SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^4$ E DUALIDADE

ANTONIO CARLOS NOGUEIRA

Orientador:

Prof. Dr. James William Bruce

Co-orientador:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Ciências Área: Matemática.¹

USP - São Carlos

Junho de 1998

¹ Programa de Doutorado Sanduiche desenvolvido em conjunto com o ICMC-USP e a Universidade de Liverpool

À Angélica e Mariana

AGRADECIMENTOS

Antes de mais nada agradeço a DEUS por ter me dado esta oportunidade.

Quero também expressar toda minha gratidão e todo o meu amor à minha esposa Angélica por ter estado sempre do meu lado, durante toda a execução deste trabalho, principalmente por ter deixado tudo de lado aqui e ter me acompanhado para a Inglaterra.

Aos meus queridos pais, com muito amor e carinho, por sempre terem dado o seu apoio.

Aos meus orientadores, Maria Aparecida Soares Ruas e Bill Bruce os meus mais sinceros agradecimentos, por terem acreditado no meu trabalho e principalmente pela participação efetiva na realização deste trabalho.

Expresso também os meus agradecimentos ao Marcos Primo (Marcão) pela sua grande amizade e companheirismo.

A todos os colegas e funcionários do ICMC-USP.

Ao *Department of Mathematics* da Universidade de Liverpool, Inglaterra.

Ao CNPq.²

²Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

RESUMO

O objetivo central deste trabalho é estudar a geometria extrínseca de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Um dos aspectos centrais de nosso trabalho é estender os resultados de dualidade obtidos por Bruce e Romero-Fuster em [11] para superfícies e curvas em $\mathbb{R}^4$. Usando então estes resultados, obtemos informações sobre a geometria de M relacionando, via dualidade, as singularidades das famílias de funções altura, projeções em planos e projeções em 3-espacos. Os resultados obtidos permitem estender o conceito de dualidade também para superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

ABSTRACT

In this work we study some aspects of the extrinsic differential geometry of surfaces in $\mathbb{R}^4$. Our main purpose is to extend the duality results obtained by Bruce and Romero-Fuster in [11] for surfaces and curves in $\mathbb{R}^4$. We use these duality results to obtain information about the geometry of the surface, by relating the singularities of the three families of orthogonal projections. These results allow us to extend the concept of duality for surfaces with boundary in $\mathbb{R}^4$.

Índice

Introdução	1
1 Material Introdutório	4
1.1 Germes e jatos	4
1.2 Equivalência de germes e jatos	5
1.3 Desdobramentos versais	8
1.4 Genericidade	10
1.5 Classificação de singularidades	12
1.6 Resultados de classificação	16
2 A geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$	20
2.1 A elipse de curvatura	20
2.2 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ do ponto de vista de contato	22
2.3 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e pencils de formas quadráticas	24
3 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade	26
3.1 Superfícies em $\mathbb{R}^4$	27
3.1.1 A família de funções altura	28
3.1.2 A família de projeções em 3-espacos	28
3.2 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade	32
3.2.1 O resultado de dualidade	34
3.2.2 Consequências Geométricas	38
3.3 Umbílicos flat	41
3.3.1 O caso $j^2u = x^2 + y^2$	42
3.3.2 O caso $j^2u = x^2 - y^2$	44
Apêndice ao capítulo 3: Curvas em $\mathbb{R}^4$	51
3.4 As famílias de projeções	51
3.4.1 A família de funções altura	51
3.4.2 A família de projeções em 3-espacos	52
3.5 A dualidade	52

4	Projeções em planos	55
4.1	A família de projeções em planos	55
4.2	Singularidades de corank 1	59
4.3	Singularidades de corank 2	67
5	Classificação de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob $\mathcal{A}_\delta$-equivalência	70
5.1	Classificação	73
5.2	Germes sobre o 1-jato $(x, 0, 0)$	75
5.3	Germes com 2-jato equivalente a $(x, y^2 + xy, 0)$	76
5.3.1	Germes sobre o 3-jato $(x, y^2 + xy, xy^2)$	84
5.3.2	Germes sobre o 3-jato $(x, y^2 + xy, 0)$	88
5.4	Germes com 2-jato $(x, y^2, 0)$	89
5.4.1	Germes com 3-jato (x, y^2, x^2y)	90
5.4.2	Germes com 3-jato $(x, y^2 + x^2y, y^3)$	92
5.4.3	Germes com 3-jato (x, y^2, y^3)	93
5.5	Germes com 2-jato $(x, xy, 0)$	94
5.5.1	Germes sobre o 3-jato $(x, xy, xy^2 + y^3)$	95
5.5.2	Germes sobre o 3-jato (x, xy, y^3)	99
5.6	Germes com 1-jato $(y, 0, 0)$	100
5.7	Germes com 2-jato (y, x^2, xy)	101
5.8	Germes com 2-jato $(y, x^2, 0)$	103
5.8.1	Germes com 3-jato (y, x^2, x^3)	105
5.9	Os germes simples	106
6	Consequências da classificação	110
6.1	Adjacências	110
6.2	Conjuntos de Bifurcação	111
6.2.1	Conjuntos de bifurcação dos germes simples	112
6.2.2	Conjuntos de bifurcação dos germes não-simples	118
6.3	Um pequeno resultado de dualidade	126
6.3.1	Singularidades de fronteira	126
6.3.2	A família de funções altura	127
6.3.3	A família de projeções em 3-espacos	128
6.3.4	O resultado de dualidade	129
6.4	Considerações Finais	133
	Bibliografia	134

Introdução

O objetivo central deste trabalho é o estudo da geometria extrínseca de superfícies em $\mathbb{R}^4$, incluídas aqui as superfícies com fronteira, através do uso de técnicas de *teoria de singularidades*. Em geral, dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$, podemos obter informações sobre a geometria desta superfície estudando o contato de M com certas subvariedades de $\mathbb{R}^n$, denominadas *subvariedades modelos*, como por exemplo, contato com planos ou contato com esferas.

Existem vários trabalhos nesta direção no contexto de superfícies em $\mathbb{R}^3$, como por exemplo, [6], [11], [28], [12], entre outros, onde se estuda a geometria de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ através de seu contato com planos, retas, esferas e círculos.

No caso de superfícies em $\mathbb{R}^4$, uma primeira referência, que é ao mesmo tempo básica e indispensável, é o excelente artigo de J. Little [20], onde ele introduz alguns invariantes geométricos bem como alguns conceitos fundamentais, como direções assintóticas. Mais recentes, e já fazendo uso de técnicas de teoria de singularidades, são os trabalhos de Mochida [23] e o de Mond [25], onde caracterizações geométricas interessantes são encontradas, relacionando as singularidades de famílias de projeções ortogonais com as singularidades da aplicação de Gauss de M .

Outra maneira de se obter informações geométricas relevantes é através do uso de técnicas de dualidade do ponto de vista da teoria de singularidades, explorado por Bruce e Wilkinson em [12], onde eles estudam a família de aplicações de dobra (*folding maps*) que mede o contato de $M \subset \mathbb{R}^3$ com pontos em um dado plano, e mostram que esta família tem como dual a família de funções distância ao quadrado. Um resultado típico do que este tipo de abordagem permite provar e que pode ser encontrado em [12] é o seguinte:

A aplicação de dobra f correspondendo a um plano π tem uma singularidade de tipo S_k em $p \in M$ se, e somente se, o plano π é tangente ao conjunto focal de M com contato de tipo A_k .

Posteriormente Bruce e Romero-Fuster [11], mostram um resultado de dualidade entre a família de funções altura e a família de projeções em planos para superfícies em $\mathbb{R}^3$ e usam este resultado para relacionar as singularidades das duas famílias. Na verdade eles mostram que certos subconjuntos do conjunto de bifurcação da família de funções altura têm como dual certos subconjuntos do conjunto de bifurcação da família de projeções em planos. Usando então os modelos locais para estes conjuntos de bifurcação eles deduzem várias propriedades geométricas interessantes.

O objetivo central de nosso trabalho, como já dissemos, é estudar a geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Um dos aspectos centrais de nosso trabalho é estender os resultados de dualidade acima descritos para superfícies e curvas em $\mathbb{R}^4$ e obter então informações sobre a geometria de M relacionando, via dualidade, as singularidades das famílias de funções altura, projeções em planos e projeções em 3-espacos. Estes resultados nos permitirão estender ainda mais o conceito de dualidade, agora para superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

Começamos no capítulo 1 dando as noções preliminares básicas de teoria de singularidades, como por exemplo critérios de determinação finita, genericidade, problemas de classificação de singularidades.

No capítulo 2 fazemos um *background* dos resultados relevantes sobre a geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$.

O capítulo 3 é dedicado ao estudo das famílias de funções altura e de projeções em 3-espacos. Mostramos aqui a dualidade destas duas famílias, isto é, de seus conjuntos de bifurcação (local e multilocal) mostrando como se dá o correlacionamento das singularidades das duas famílias e interpretando geometricamente este correlacionamento. Além da dualidade estudamos também o comportamento de M em torno de um *ponto umbílico* (isto é, um ponto de M onde o contato com algum hiperplano é de tipo D_4). Encontramos também um resultado de dualidade para curvas em $\mathbb{R}^4$. Os resultados obtidos neste capítulo fazem parte do artigo *Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality*, trabalho conjunto com Bill Bruce [9], submetido para publicação.

No capítulo 4 estudamos a família de projeções em planos. Mostramos aqui que existe uma dualidade entre o conjunto de bifurcação desta família com os conjuntos de bifurcação das famílias de funções altura e de projeções em 3-espacos, o que nos permite obter caracterizações geométricas de certas singularidades desta família. Estes resultados fazem parte do *preprint Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality II*.

No capítulo 5 fazemos a classificação de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob um tipo especial de $\mathcal{A}$ -equivalência onde as mudanças na fonte preservam a reta $y = 0$. Este

tipo de classificação está relacionado com o estudo de singularidades de aplicações definidas sobre uma superfície com fronteira. Estaremos interessados em classificar os germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob esta relação de equivalência, a qual denotamos por $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência, que tenham $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão no máximo 3. Esta classificação permitirá estudar a família de projeções em 3-espacos de uma superfície com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

Finalmente, no capítulo 6 destacamos algumas consequências da classificação obtida no capítulo 5. Damos aqui tábuas de adjacências e iniciamos o estudo da geometria dos conjuntos de bifurcação dos germes obtidos. Também mostramos um resultado de dualidade para superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

Capítulo 1

Material Introdutório

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados básicos em teoria de singularidades que serão necessários para os capítulos seguintes do presente trabalho. Gostaríamos de salientar, no entanto, que tais conceitos e resultados não são apresentados aqui simplesmente por serem necessários para este trabalho, mas também por desempenharem um papel fundamental dentro da própria teoria de singularidades. Começaremos apresentando um breve relato sobre germes e jatos, passando então a descrever $\mathcal{A}$ -equivalência entre germes. Em seguida voltamos nossa atenção às deformações versais de um germe, e à questão da genericidade. Finalizando, falamos um pouco sobre classificação de singularidades, descrevendo as etapas de tal processo e listando alguns resultados sobre este tópico, como por exemplo, a classificação de singularidades de germes $\mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ devida a D. Mond ([26]).

1.1 Germes e jatos

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações diferenciáveis definidas em uma vizinhança aberta U_1 de x . Dizemos que f e g são equivalentes e escrevemos $f \sim g$ se existir uma vizinhança $U \ni x$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $f|U = g|U$, ou seja, se f e g coincidem em uma vizinhança U de x . Esta relação é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência são chamadas *germes de aplicações diferenciáveis* de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x , e os elementos de uma classe são chamados representantes do germe. Se f e g são representantes do mesmo germe então devemos ter $f(x) = g(x)$ e, portanto qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em x , digamos y . É comum usar-se a notação $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ para indicar um germe de aplicação.

Consideremos, em particular, os germes em x de aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Usando as operações da meta $\mathbb{R}$, podemos somar e multiplicar tais aplicações e, assim, vemos que o conjunto de seus germes em x adquire uma estrutura de um anel

que denotaremos por $\mathcal{E}_x$. Este anel tem um ideal $\mathcal{M}_x$ constituído pelos germes de funções $\phi : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}, 0$, ou seja, funções ϕ com $\phi(x) = 0$. Este ideal é um ideal maximal. Na verdade, $\mathcal{M}_x$ é o único ideal maximal de $\mathcal{E}_x$ que é, portanto, um anel local. Dado um germe de aplicação $f : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ teremos $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ com $f_1, f_2, \dots, f_p \in \mathcal{E}_x$. Então podemos identificar o espaço de germes $\mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ com o $\mathcal{E}_x$ -módulo (livre) $\mathcal{E}_{x,y} = \mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_x \times \dots \times \mathcal{E}_x$ (p cópias). Desta forma, os espaços de germes podem ser então identificados com espaços lineares, e considerando-os como variedades podemos identificá-los com seus próprios espaços tangentes.

Vamos agora introduzir uma outra relação de equivalência entre aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações definidas em uma vizinhança U de x . Dizemos que f e g têm o mesmo k -jato em x se $f(x) = g(x)$ e para algum sistema local de coordenadas em $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x) \in \mathbb{R}^p$ todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ das componentes de f e g coincidem em x . Observe que esta definição depende apenas do germe de f e g . Fixando $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x) \in \mathbb{R}^p$ e coordenadas locais em $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$, segue que o k -jato de f é determinado pelos termos de grau $\leq k$ nas expansões de Taylor das componentes de f com respeito a estas coordenadas. Estes são os k -jatos de aplicações $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$. O conjunto de todos tais k -jatos denota-se por $J^k(n, p)$ o qual é um espaço vetorial de dimensão $p \binom{n+k}{k} - 1$. O conjunto $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ de todos os k -jatos (em todos os pontos) de todas as aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um fibrado sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ com fibra $J^k(n, p)$. Dada então uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ temos definida uma aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa o k -jato de f em x , $j^k f(x)$. Esta aplicação é chamada *aplicação k -jato*.

No caso particular em que $p = 1$ pode-se mostrar que as derivadas parciais de ordem $\leq k$ de $\phi \in \mathcal{E}_x$ se anulam em x se, e somente se, $\phi \in \mathcal{M}_x^{k+1}$. Assim, podemos identificar o espaço de k -jatos em x de aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com o espaço

$$\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}}.$$

Logo, no caso geral, tem-se

$$J^k(n, p) = \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}} \times \dots \times \frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{M}_x^{k+1}} \text{ (p cópias).}$$

1.2 Equivalência de germes e jatos

As relações de equivalência fundamentais para o problema de classificação de germes são a $\mathcal{K}$ - e a $\mathcal{A}$ -equivalência, onde $\mathcal{K}$ denota o grupo de contato e $\mathcal{A}$ é o

subgrupo de $\mathcal{K}$ de mudanças de coordenadas na fonte e na meta do germe. É este último grupo que nos interessa no momento e é sobre ele que discutiremos a seguir.

Seja $\mathcal{R} = \text{Diff}(\mathbb{R}^n, x)$ o grupo de germes de difeomorfismos $\phi : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^n, x$ (ou seja, $\phi \in \mathcal{R}$ é uma mudança de coordenadas locais). Este grupo age sobre $\mathcal{E}_x^p$ por composição à direita:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ (\phi, f) &\mapsto f \circ \phi^{-1}.\end{aligned}$$

Assim, dizemos que os germes $f, g : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes, e escrevemos $f \sim_{\mathcal{R}} g$, se existir $\phi \in \mathcal{R}$ tal que $f = g \circ \phi^{-1}$.

Da mesma forma, o grupo $\mathcal{L} = \text{Diff}(\mathbb{R}^p, y)$ age sobre $\mathcal{E}_x^p$, agora por composição à esquerda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ (\psi, f) &\mapsto \psi \circ f,\end{aligned}$$

e dizemos que dois germes $f, g : \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{R}^p$ são $\mathcal{L}$ -equivalentes, e escrevemos $f \sim_{\mathcal{L}} g$, se existir $\psi \in \mathcal{L}$ tal que $f = \psi \circ g$. A $\mathcal{R}$ -equivalência (resp. $\mathcal{L}$ -equivalência) é também chamada equivalência à direita (resp. à esquerda), daí o uso da letra $\mathcal{R}$ (abreviação de *right* em inglês) (resp. $\mathcal{L}$ (abreviação de *left* em inglês)). O grupo $\mathcal{A}$ de mudanças de coordenadas na fonte e na meta é então definido pelo produto $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ e este grupo age sobre $\mathcal{E}_x^p$ por composição à direita e à esquerda da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \times \mathcal{E}_x^p &\rightarrow \mathcal{E}_x^p \\ ((\phi, \psi), f) &\mapsto \psi \circ f \circ \phi^{-1}\end{aligned}$$

Definimos então a seguinte relação de equivalência, chamada de $\mathcal{A}$ -equivalência (ou equivalência à direita e à esquerda). Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_x^p$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes (ou equivalentes à direita e à esquerda) se existir $(h, k) \in \mathcal{A}$, ou seja, germes de difeomorfismos $h \in \mathcal{R}$ e $k \in \mathcal{L}$ tais que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{R}^p\end{array}$$

Passamos agora a descrever o espaço tangente à ação do grupo $\mathcal{A}$. Para isto vamos descrever separadamente os espaços tangentes às ações dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$.

Começamos com o grupo $\mathcal{R}$. Vamos trabalhar aqui com a fonte e a meta fixas digamos $x = 0$ e $y = 0$. Neste caso, usamos a notação $\mathcal{E}_n$ ao invés de $\mathcal{E}_x$ para indicar o anel dos germes de funções $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{M}_n$ para o respectivo ideal maximal. Dado então um germe $f \in \mathcal{E}_n$ seja $\theta(f)$ o conjunto de todos os germes na origem de campos de vetores ao longo de f , isto é de germes de aplicações ζ (como no diagrama abaixo) com $\Pi_p \circ \zeta = f$:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{Tf} & T(\mathbb{R}^p) \\ \Pi_n \downarrow & \nearrow \zeta & \downarrow \Pi_p \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

onde $T(\mathbb{R}^n)$ é o fibrado tangente de $\mathbb{R}^n$, Π_n é a projeção natural e Tf é aplicação tangente induzida por f . Se denotarmos por $\theta(n)$ o conjunto de germes na origem de campos de vetores do $\mathbb{R}^n$ (ou seja, campos de vetores ao longo da identidade $I_n : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$), um elemento $\chi \in \theta(n)$ será aplicado por Tf ao campo $tf(\chi) := Tf \circ \chi \in \theta(f)$, e portanto fica definida uma aplicação $tf : \theta(n) \rightarrow \theta(f)$. Observe que $\theta(n) = \theta(I_n)$ é o $\mathcal{E}_n$ -módulo livre com base $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$. Logo $tf : \theta(n) \rightarrow \theta(f)$ é a aplicação $\mathcal{E}_n$ -linear com matriz

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right).$$

Definimos então o espaço tangente à direita de f , ou o $\mathcal{R}$ -espaço tangente de f , como sendo

$$tf(\mathcal{M}_n \theta(n)),$$

ou seja, a imagem por tf dos campos de vetores que se anulam na origem.

Por outro lado, se $\eta \in \theta(p)$ então a composição com f , $\eta \circ f \in \theta(f)$, define uma aplicação $\omega f : \theta(p) \rightarrow \theta(f)$. Também aqui $\theta(p) = \theta(I_p)$ é o $\mathcal{E}_p$ -módulo livre gerado por $\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}$, e ωf é simplesmente a aplicação induzida por $f^* : \mathcal{E}_p \rightarrow \mathcal{E}_n$, $f^*(g) = g \circ f$. Definimos então o espaço tangente à esquerda de f como sendo

$$\omega f(\mathcal{M}_p \theta(p)).$$

O $\mathcal{A}$ -espaço tangente de f é então definido por

$$T\mathcal{A}f = T\mathcal{R}f + T\mathcal{L}f.$$

Voltemos agora ao caso de jatos. O k -jato de uma composta $h \circ k$ depende somente dos respectivos k -jatos das aplicações h e k . Assim, as ações de $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$

sobre o espaço de germes induzem ações dos grupos de Lie (de dimensão finita) $J^k\mathcal{R}$, $J^k\mathcal{L}$, $J^k\mathcal{A}$ sobre $J^k(n, p)$ (a fibra de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ sobre o ponto $(0, 0)$). Como estamos num caso finito-dimensional os espaços tangentes a cada uma destas ações podem ser tomados no sentido usual, e apesar de ao nível de germes termos apenas expressões formais para os espaços tangentes, os respectivos espaços tangentes às órbitas das ações induzidas são obtidos tomando-se a imagem dos respectivos espaços tangentes ao nível de germes em $\mathcal{M}_n\theta(f)/\mathcal{M}_n^{k+1}\theta(f)$. Assim, temos

$$\mathrm{T}\mathcal{R}^k f := \mathrm{T}\mathcal{R}f/\mathcal{M}_n^{k+1},$$

$$\mathrm{T}\mathcal{L}^k f := \mathrm{T}\mathcal{L}f/\mathcal{M}_n^{k+1},$$

$$\mathrm{T}\mathcal{A}^k f := \mathrm{T}\mathcal{A}f/\mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Os espaços tangentes definidos acima se referem ao caso em que a fonte e a meta dos germes são fixas (no caso fixamos $x = 0$ e $y = 0$). Se permitirmos que estas variem definimos então os espaços tangentes estendidos por

$$\mathrm{T}\mathcal{R}_e f := tf(\theta(n)),$$

$$\mathrm{T}\mathcal{L}_e f := \omega f(\theta(p)),$$

$$\mathrm{T}\mathcal{A}_e f := \mathrm{T}\mathcal{R}_e f + \mathrm{T}\mathcal{L}_e f.$$

1.3 Desdobramentos versais

Passamos agora a discutir o conceito de desdobramento de um germe f e, na seção seguinte discutiremos o conceito de genericidade. Estes dois conceitos são de certa forma relacionados um com o outro.

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe diferenciável. Um *desdobramento a s parâmetros* de f é uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s, 0$, $F(x, \lambda) = (\bar{f}(x, \lambda), \lambda)$ tal que $F(x, 0) = (f(x), 0)$, $\forall x$. A aplicação $\bar{f}(x, \lambda) = \bar{f}_\lambda(x)$, por sua vez, é denominada uma *deformação de f* . Em outras palavras, um desdobramento de f é simplesmente uma família de germes de aplicações contendo o germe f . Dentre os desdobramentos de um germe f destacam-se os desdobramentos versais de f , que são de central importância no estudo da geometria do mesmo. Dizemos que um desdobramento F do germe f é *versal* se qualquer outro desdobramento $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, 0$, de

f está contido em F . Mais precisamente, se $G(x, u) = (\bar{g}(x, u), u)$, F é versal se para cada parâmetro $u \in \mathbb{R}^r$ a aplicação $\bar{g}_u : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ dada por $\bar{g}_u(x) = \bar{g}(x, u)$, é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\bar{f}_{\alpha(u)}$ onde $\alpha : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ é uma aplicação diferenciável. Neste caso, dizemos também que $\bar{f}$ é uma deformação versal. O número mínimo s de parâmetros em um desdobramento versal de F é chamado a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f . Algebricamente os desdobramentos versais são caracterizadas pelo seguinte teorema devido a Martinet [21].

Teorema 1.1. $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um desdobramento versal do germe f se, e somente se,

$$\mathbf{TA}_e f + \mathbb{R}\{\bar{f}'_i\} = \theta(f),$$

onde $\bar{f}'_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0)$ é a velocidade inicial da deformação $\bar{f}$, $i = 1, \dots, s$.

Observação 1.1. O conceito de versalidade se estende também para os grupos $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$ usuais na teoria de singularidades bem como para uma classe mais ampla formada pelos subgrupos geométricos de Damon [13].

Dado um desdobramento (ou uma deformação) F (versal ou não) podemos associar a F dois subconjuntos do espaço de parâmetros de grande interesse geométrico.

O primeiro deles é o *discriminante de F* que é o subconjunto do espaço de parâmetros que corresponde às fibras singulares de F . Um caso de particular interesse em todo este trabalho é quando $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, isto é, $f \in \mathcal{E}_n$, e $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ é uma $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ -deformação versal de f . Neste caso, o *discriminante de F* , que é o subconjunto do espaço de parâmetros definido por

$$\text{Disc}(F) = \{u \in \mathbb{R}^s; F(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \text{ para algum } x\},$$

fornece modelos locais extremamente úteis no estudo da geometria. Por exemplo, quando estudamos o contato de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com planos e portanto F é a família de funções altura, o discriminante de F é exatamente o dual de M , pois um plano desta família dá origem a uma singularidade se, e somente se, ele é tangente a M no ponto em questão e, esta é a definição do *dual* de M . Como um exemplo, consideremos o germe de uma singularidade de tipo A_3 , isto é, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = x^2 + y^4$. Um desdobramento $\mathcal{R}$ -versal de f é dado por

$$F(x, y, u, v, w) = x^2 + y^4 + uy^2 + vy + w.$$

Neste caso o discriminante de F é obtido das equações

$$\begin{aligned}x^2 + y^4 + uy^2 + vy + w &= 0 \\2x &= 0 \\4y^3 + 2uy + v &= 0\end{aligned}$$

eliminando x e y . O conjunto que obtemos no espaço uvw é parametrizado por $(u, y) \mapsto (u, -4y^3 - 2uy, 3y^4 + uy^2)$, cuja imagem é o bem conhecido rabo-de-andorinha (figura 1.1).

O segundo conjunto a que nos referimos acima é o *conjunto de bifurcação de F* , denotado por $Bif(F)$, que é definido por

$$Bif(F) = \{u \in \mathbb{R}^s; F_u \text{ não é estável}\}.$$

Uma aplicação f é estável se qualquer perturbação suficientemente pequena de f é indistingível de f , ou mais precisamente, se g é uma perturbação de f existem difeomorfismos h, k da fonte e da meta respectivamente tais que $k \circ g = f \circ h$. Assim $Bif(F)$ é o conjunto dos valores dos parâmetros para os quais algo de novo acontece. Por exemplo, consideremos o mesmo germe acima, isto é, $f(x, y) = x^2 + y^4$. Uma deformação $\mathcal{A}$ -versal de f é dada por

$$F(x, y, u, v) = x^2 + y^4 + uy^2 + uy.$$

O conjunto de bifurcação de F é obtido das equações

$$\begin{aligned}2x &= 0 \\4y^3 + 2uy + v &= 0 \\6y^2 + u &= 0,\end{aligned}$$

onde a última equação é $Hessiana(f) = 0$. Assim, eliminando x e y vê-se facilmente que o conjunto de bifurcação de F é uma cúspide no plano uv de equação $16u^3 + 9v^2 = 0$ (figura 1.1).

1.4 Genericidade

Fortemente relacionado com o conceito de versalidade está o conceito de genericidade. Dizemos que uma propriedade é genérica em $C^\infty(M, N)$ se ela se verifica para um conjunto residual de aplicações. Lembremos que um conjunto residual é uma interseção enumerável de abertos densos. Sendo $C^\infty(M, N)$ um espaço de Baire, tais conjuntos são densos. A definição mais precisa deste conceito é em termos de resultados de transversalidade. O resultado central neste contexto é o bem conhecido teorema de transversalidade de Thom (ver por exemplo [16]) que, devido à sua importância, enunciamos abaixo.

Figura 1.1: Discriminante (a) e conjunto de bifurcação (b) de A_3

Teorema 1.2 (Teorema de transversalidade de Thom). *Sejam $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ subvariedades diferenciáveis do espaço de jatos $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. O conjunto de todas as aplicações diferenciáveis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ para as quais $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é transversal a $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ é denso em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.*

Dentro da teoria de singularidades, um dos mais poderosos e eficientes resultados de transversalidade (ou de genericidade) é o seguinte teorema devido a Montaldi [29], que se aplica a praticamente todos os casos, tanto para germes quanto para multigerms.

Teorema 1.3 (Montaldi [29]). *Sejam X, Y, Z, U variedades diferenciáveis e $\mathcal{G}$ um dos grupos usuais da teoria de singularidades: $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$. Se $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação diferenciável então dada uma aplicação $g : X \rightarrow Y$ pode-se definir uma composta $F_g : X \times U \rightarrow Z$ por $F_g(x, u) = F(g(x), u)$.*

1. *Suponha que $F : Y \times U \rightarrow Z$ é uma aplicação localmente $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}^k$ -invariante de $J^k(X, Z)$. Então para um conjunto residual de imersões $X \hookrightarrow Y$ a aplicação k -jato $j_1^k F_g : X \times U \rightarrow J^k(X, Z)$ é transversal a S .*
2. *Suponha que $F : Y \times U \rightarrow Z$ seja uma aplicação $\mathcal{G}$ -versal e seja S uma subvariedade $\mathcal{G}$ -invariante do espaço de multijatos ${}_r J^k(X, Z)$. Então para um conjunto residual de mergulhos $X \hookrightarrow Y$ a aplicação multijato $j_1^k F_g : X^{(r)} \times U \rightarrow {}_r J^k(X, Z)$ é transversal a S .*

Estamos agora em condições de esclarecer um pouco o termo genericidade ou imersão genérica, que aparece repetidas vezes em muitos textos sobre teoria de singularidades. Aproveitamos também para dizer como o teorema se aplica. Em geral, o que se faz é o seguinte. Considera-se uma família $F : Y \times U \rightarrow Z$, onde Y, U, Z são subvariedades. Dada uma imersão $g : X \rightarrow Y$ definimos a composta $F_g : X \times U \rightarrow Z$ como no teorema acima, isto é, $F_g(x, u) = F(g(x), u)$. Sejam $\dim X = k$, $\dim Z = p$ e $\dim U = d$. Observe que F é uma família de aplicações e U é o seu espaço de parâmetros. Suponhamos que já tenhamos obtido de antemão uma classificação de todas as singularidades $\mathbb{C}^k, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ até uma certa codimensão, mais precisamente todas as singularidades de $\mathcal{G}_e$ -codimensão $\leq d = \dim U$ (pelo menos os germes simples). Suponhamos ainda que tenhamos obtido um número finito de órbitas nesta classificação. Estratificamos, então, o espaço de jatos (e também o de multijatos) com estas órbitas, digamos $W_1, W_2, \dots, W_r$, e também com o complementar destas órbitas. Este complemento pode ser decomposto em um número finito de variedades de codimensão maior que $k + d$, $W_{r+1}, W_{r+2}, \dots, W_t$. Aplicamos então o teorema a esta estratificação. Em outras palavras, no teorema de Montaldi, tomamos $S = W_i$, para cada W_i na estratificação acima, e obtemos os conjuntos residuais

$$R_{W_i} = \{g \in \text{Imm}(X, Y); j_1^k F_g \pitchfork W_i\}.$$

Então o conjunto $R = \bigcap R_{W_i}$ é ainda um conjunto residual. Assim, para uma imersão/mergulho $g \in R$, a aplicação k -jato associada a g evita os estratos W_i para $i > r$ e é transversal a W_i , para $i \leq r$. Uma tal imersão é chamada uma imersão genérica para a situação que se está considerando. Assim uma imersão/mergulho genérica $g : X \rightarrow Y$ dá origem a uma composta, $F_g : X \times U \rightarrow Z$, a qual apresentará somente aquelas singularidades que aparecem na classificação cuja $\mathcal{A}_e$ -codimensão seja no máximo $d = \dim U$. A transversalidade às órbitas nos assegura, então, que estas singularidades serão versalmente deformadas (ou desdobradas).

Pode acontecer que, feita a classificação, tenhamos chegado a um número infinito de órbitas, isto é, tenhamos encontrado algum germe modal. Neste caso, devemos reunir estas órbitas em estratos e considerar então, não a codimensão individual das órbitas, mas sim a codimensão do estrato associado. Também não poderemos mais esperar que a aplicação k -jato seja transversal às órbitas. Perdem-se então, neste caso, os modelos locais para os conjuntos de bifurcação.

1.5 Classificação de singularidades

Quando estudamos a geometria de superfícies é muito comum precisarmos classificar germes de aplicações sob alguma relação de equivalência até uma certa codimensão.

Por exemplo, para estudarmos o contato de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com planos, precisamos de antemão classificar os germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ sob $\mathcal{A}$ -equivalência de $\mathcal{A}_e$ -codimensão ≤ 2 . Este processo de classificação envolve basicamente duas etapas: a primeira delas é determinar quais são os "jatos relevantes" em $J^k(n, p)$ e então testar se estes jatos são "finitamente determinados" ou não. Este processo é o que chamamos de processo indutivo via jatos, e se baseia em três pontos chaves que são: o conceito de transversal completa introduzido por Bruce, du Plessis e Kirk em [8], o lema de Mather e os teoremas de determinação finita. Destes três pontos o mais conhecido é o lema de Mather que, quando aplicado, reduz os jatos a formas mais simples. Seu enunciado é o seguinte:

Teorema 1.4 (Lema de Mather [22]). *a) Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre a variedade M e suponha que a subvariedade $S \subset M$ tem as seguintes propriedades:*

1. *para cada $x \in S$, $T_x S \subset T_x Gx$;*
2. *a dimensão de Gx é independente da escolha de $x \in S$;*
3. *S é uma variedade conexa.*

Então S está inteiramente contida em uma única G -órbita.

b) Suponha que $\Pi : M_1 \rightarrow M_2$ é uma G -submersão, e seja $S = \Pi^{-1}(x_0)$ para algum $x_0 \in M_2$. Se (1) e (3) de (a) se verificam, então S está contida em uma única G -órbita.

O processo de classificação que passamos a descrever agora será usado no capítulo 5 para classificar germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob uma relação de equivalência especial.

A técnica de classificação, como já dissemos, é o método indutivo de classificação via jatos até que um jato suficiente (e portanto um germe finitamente determinado) seja obtido. Começamos então falando um pouco sobre determinação finita. Dado um grupo $\mathcal{G}$ de equivalências entre germes, dizemos que um germe $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é k - $\mathcal{G}$ -determinado se, para qualquer germe g , tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ tivermos g $\mathcal{G}$ -equivalente a f . Dizemos ainda que f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se ele for k -determinado para algum k . Um k -jato é dito *suficiente* se ele é o k -jato de algum germe k -determinado. Resultados importantes sobre determinação finita que dão condições necessárias e, em alguns casos, também suficientes para a determinação finita podem ser encontrados em [35]. Um resultado central da teoria é o critério infinitesimal para a determinação finita:

Teorema 1.5 ([35]). *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos usuais da teoria de singularidades $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{A}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado;*
2. *para algum k $\mathrm{T}\mathcal{G}f \supset \mathcal{M}_n^k \theta(f)$;*
3. *para algum k $\mathrm{T}\mathcal{G}_\epsilon f \supset \mathcal{M}_n^k \theta(f)$;*
4. *$d(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \{ \mathcal{M}_n \theta(f) / \mathrm{T}\mathcal{G}f \} < \infty$;*
5. *$d_\epsilon(f, \mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{R}} \{ \theta(f) / \mathrm{T}\mathcal{G}_\epsilon f \} < \infty$.*

Mais precisamente, pondo $\epsilon = 1$ para $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$, e $\epsilon = 2$ para $\mathcal{L}, \mathcal{A}$, temos:

1. *se f é r - $\mathcal{G}$ -determinado então $\mathrm{T}\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f)$.*
2. *se $\mathrm{T}\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f)$ então f é $(\epsilon r + 1)$ - $\mathcal{G}$ -determinado.*
3. *se $d(f, \mathcal{G}) = d$ então $\mathrm{T}\mathcal{G}f \supseteq \mathcal{M}_n^{d+1^\epsilon} \theta(f)$.*

Alguns resultados de determinação finita utilizam o subgrupo $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas cujo 1-jato é a identidade. Em geral dado o grupo $\mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas, ficam definidos os subgrupos $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}$ de mudanças de coordenadas cujo s -jato é a identidade. Nesta direção Bruce, du Plessis e Wall em [10] encontram condições necessárias e suficientes para a determinação finita de germes para uma classe bem abrangente de subgrupos de $\mathcal{K}$, a saber subgrupos unipotentes. O principal resultado lá contido é o seguinte teorema, sobre o qual não entraremos em detalhes, por envolver conceitos e técnicas que vão além dos objetivos de nosso trabalho. Antes de enunciarmos o resultado, colocamos um conceito do qual os autores fazem uso no teorema. Diz-se que um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ é *fortemente fechado* em $\mathcal{G}$ se $\mathcal{G}_s \subset \mathcal{H}$ para algum s e $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo fechado de $J^s \mathcal{G}$. Se além disso $J^s \mathcal{H}$ é um subgrupo algébrico diz-se que $\mathcal{H}$ é *fortemente Zariski-fechado*.

Teorema 1.6 ([10]). *Seja $\mathcal{G}$ um dos grupos $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$ ou $\mathcal{A}$. Sejam $\mathcal{H}$ um subgrupo fortemente Zariski-fechado de $\mathcal{G}$ e $f : \mathbb{F}^n, 0 \rightarrow \mathbb{F}^p, 0$ um germe C^τ (aqui $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; $\tau = \infty$ (aplicações C^∞ , com $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ou $\tau = \mathbb{R} - \omega$ (aplicações analíticas reais), ou $\tau = \mathbb{C} - \omega$ (aplicações analíticas complexas, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)). Então para qualquer $r < \infty$, f é r - $\mathcal{H}$ -determinado se, e somente se, existe um subgrupo de $\mathcal{G}$ fortemente fechado $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, com $J^1 \mathcal{U}$ unipotente, para o qual tem-se*

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \theta(f) \subset \mathrm{T}\mathcal{U}f.$$

Um caso especial do teorema acima é o seguinte:

Teorema 1.7. *Um germe $C^r f : \mathbb{F}^n, 0 \rightarrow \mathbb{F}^p, 0$ é $r\text{-}\mathcal{G}_s$ -determinado ($s \geq 1$) se, e somente se,*

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \subset \mathbf{T}\mathcal{G}_s f.$$

Como consequência deste obtem-se um resultado de determinação finita para o caso em que $\mathcal{G} = \mathcal{A}$.

Corolário 1.8. *Um C^r germe $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é $r\text{-}\mathcal{G}_s$ -determinado (com $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ ou $\mathcal{A}$, $s \geq 1$) se, e somente se*

$$\mathcal{M}_n^{r+1}\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{G}_s f + \mathcal{M}_n^{r+1}(f^* \mathcal{M}_p \theta_n + \mathcal{M}_n^{r+1})\theta(f).$$

Passamos agora a descrever a outra ferramenta que precisamos no processo de classificação que é o conceito de transversal completa desenvolvido primeiramente por J.W. Bruce e A.A. du Plessis e posteriormente junto com N. Kirk [8] o processo foi aprimorado e implementado em computador. A idéia básica é a seguinte: dado um k -jato $\sigma \in J^k(n, p)$ constrói-se o $(k+1)$ -espaço tangente unipotente de σ , isto é, calcula-se da maneira usual o espaço $\mathbf{T}\mathcal{G}_1^{k+1}\sigma = \mathbf{T}\mathcal{G}_1\sigma \bmod \mathcal{M}_n^{k+2}\theta(\sigma)$. Para os casos $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathcal{R}_s f &= t f(\mathcal{M}_n^{s+1}\theta_n) \\ \mathbf{T}\mathcal{L}_s f &= w f(\mathcal{M}_p^{s+1}\theta_p) \\ \mathbf{T}\mathcal{A}_s f &= t f(\mathcal{M}_n^{s+1}\theta_n) + w f(\mathcal{M}_p^{s+1}\theta_p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Calculado este espaço tangente determinamos então um complemento T para o espaço $H^{k+1}(n, p)$ de jatos homogêneos de grau $k+1$, ou seja, procuramos um subespaço $T \subset H^{k+1}(n, p)$ tal que $H^{k+1}(n, p) \subset \mathbf{T}\mathcal{G}_1^{k+1}\sigma + T$. Na prática tomamos T como sendo o subespaço de $H^{k+1}(n, p)$ gerado por aqueles vetores monomiais que não estão em $\mathbf{T}\mathcal{G}_1^{k+1}\sigma$. Este subespaço T é então chamado uma *transversal completa* para o k -jato σ em $J^{k+1}(n, p)$ ou, simplesmente, uma $(k+1)$ -*transversal completa*. Este conceito e os principais resultados nesta direção sobre o uso tal técnica estão contidos no artigo de Bruce, du Plessis e Kirk [8]. O resultado central daquele artigo é o seguinte teorema:

Teorema 1.9 (Teorema das transversais completas [8]). *Seja $\mathcal{H}$ um subgrupo de Lie de $\mathcal{G}_1$ e seja f um k -jato em $J^k(n, p)$. Se $T \subset H^{k+1}(n, p)$ é um subespaço vetorial de $H^{k+1}(n, p)$ tal que*

$$H^{k+1}(n, p) \subset T + \mathbf{T}\mathcal{H}^{k+1} f$$

então todo $(k+1)$ -jato F com $j^k F = f$ é $\mathcal{H}^{k+1}$ -equivalente a algum $(k+1)$ -jato da forma $f + t$, para algum $t \in T$.

Bastante útil é a variante deste teorema que se obtém fazendo-se $\mathcal{H} = \mathcal{A}_1$.

Proposição 1.10. *Seja f um k -jato no espaço de jatos $J^k(n, p)$. Seja ainda T um subespaço vetorial do espaço $H^{k+1}(n, p)$ de jatos homogêneos de grau $k + 1$ tal que*

$$H^{k+1}(n, p) \subset T + \mathbf{T}\mathcal{A}_1^{k+1}f.$$

Então qualquer $(k+1)$ -jato F com $j^k F = f$ é $\mathcal{A}_1$ -equivalente a $f + t$ para algum $t \in T$.

Neste ponto cabe um exemplo para ilustrar o método.

Exemplo 1.2. *Consideremos aqui $\mathcal{A}$ -equivalência e aplicações $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ de corank 1 (ver [31]). Um tal germe f deve ter 1-jato da forma $\sigma = (x, 0)$. Vamos determinar uma 2-transversal completa para σ . Como podemos ver facilmente, os geradores do espaço tangente $\mathbf{T}\mathcal{A}_1^2\sigma$ são $(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2)$. Assim, podemos tomar como subespaço T no teorema 1.9 o subespaço de $H^2(2, 2)$ gerado pelos vetores $(0, xy), (0, y^2)$. Portanto de acordo com o mesmo teorema qualquer 2-jato sobre $(x, 0)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(x, a_1xy + a_2y^2)$, com $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Teremos então 3 casos a considerar: $a_2 \neq 0$; $a_2 = 0$, com $a_1 \neq 0$; ou $a_1 = a_2 = 0$. Chegamos então aos três possíveis 2-jatos que são $(x, y^2), (x, xy), (x, 0)$. O primeiro deles é 2- $\mathcal{A}_1$ -determinado. Poderíamos agora continuar, por exemplo, a classificar os germes sobre o 2-jato (x, xy) ou $(x, 0)$ em codimensões baixas. Por exemplo, um dos 3-jatos sobre $(x, 0)$ é (x, y^3) . Pensando este 3-jato como um k -jato (com $k \geq 3$) e analisando o seu espaço tangente $\mathbf{T}\mathcal{A}_1^{k+1}f$, vemos que o único termo de grau $k+1$ que não está presente é o vetor $(0, x^k y)$. Logo uma transversal completa em $J^{k+1}(2, 2)$ é dada por $(x, y^3 + ax^k y)$, com $a \in \mathbb{R}$. Se $a \neq 0$ com mudanças de escalas na fonte e na meta podemos reduzi-la às formas normais $(x, y^3 \pm x^k y)$ para k par e $(x, y^3 + x^k y)$ para k ímpar. Estes germes são $\mathcal{A}$ -finitamente determinados (ver [31]) e, portanto, temos uma lista completa dos germes $\mathcal{A}$ -finitamente determinados com 3-jato (x, y^3) .*

No capítulo 5 voltaremos a este ponto, pois lá fazemos uma classificação baseada nestes resultados.

Na seção seguinte listamos alguns resultados importantes de classificação, dos quais faremos uso nos capítulos seguintes.

1.6 Resultados de classificação

Como dissemos na introdução deste trabalho, estaremos interessados em estudar famílias de projeções de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$ em subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$, mais precisamente projeções em retas, em planos e em 3-espaços. Ora, para

isto é necessário que tenhamos, de antemão, uma classificação das singularidades relevantes em cada um dos casos, pelo menos as singularidades simples. Assim, precisaremos de uma classificação de germes de funções $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, uma classificação de germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ e também uma classificação de germes de aplicações $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$. Felizmente, em cada um dos casos, existem resultados conhecidos, os quais enunciamos na sequência.

Começamos com a classificação dos germes simples de funções $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ devido a Arnol'd [1]. Antes lembramos que um germe $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é dito $\mathcal{G}$ -simples se existe um número finito de $\mathcal{G}$ -classes tal que se f pertence a uma família $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, (0, \lambda_0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$, com $F(x, \lambda) = (f_\lambda(x), \lambda)$ e $f_{\lambda_0} = f$, então para qualquer ponto (w, λ) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0, \lambda_0)$, o germe de f_λ em w pertence a uma destas $\mathcal{G}$ -classes.

Teorema 1.11 (Arnol'd [1]). *Se $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe simples então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos germes da tabela 1.1.*

<i>tipo</i>	<i>forma normal</i>	<i>$\mathcal{A}_e$-cod</i>
$A_k, k \geq 1$	$x^2 \pm y^{k+1}$	$k - 1$
$D_k, k \geq 4$	$x^2y \pm y^{k-1}$	$k - 1$
E_6	$x^3 \pm y^4$	5
E_7	$x^3 + xy^3$	6
E_8	$x^3 + y^5$	7

Tabela 1.1: Germes simples $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

O outro resultado de classificação que vamos usar é o de germes simples de $\mathbb{R}^2, 0$ em $\mathbb{R}^3, 0$ devido a D. Mond [26].

Teorema 1.12 (Mond [26]). *Cada um dos germes na tabela 1.2 é $\mathcal{A}$ -simples, e qualquer germe $\mathcal{A}$ -simples de uma variedade 2-dimensional em uma variedade 3-dimensional é equivalente a um dos germes desta tabela.*

Finalmente enunciamos agora o resultado de classificação de germes de aplicações do plano no plano. Esta classificação tem duas partes: uma corresponde aos germes de corank 1 de $\mathcal{A}_e$ -codimensão ≤ 6 devido a Rieger [31]; a outra parte corresponde aos germes simples de corank 2, devida a Rieger e Ruas [32].

Teorema 1.13 (Rieger [31]). *A tabela 1.3 contém uma lista completa, a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência, de todos os germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ de corank 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão*

<i>tipo</i>	<i>forma normal</i>	$\mathcal{A}_e$ - <i>cod</i>
Imersão	(x, y)	0
Cross-cap	(x, y^2, xy)	0
$S_k^\pm, k \geq 1$	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y)$	k
$B_k^\pm, k \geq 2$	$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1})$	k
$C_k^\pm, k \geq 3$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^ky)$	k
F_4	$(x, y^2, x^3y + y^5)$	6
$H_k, k \geq 2$	$(x, xy + y^{3k-1}, y^3)$	k

Tabela 1.2: Germes simples $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$

no máximo 6. Cada germe é precedido pelo seu símbolo e seguido pela sua $\mathcal{A}_e$ -codimensão no caso de germes simples e, no caso de germes não-simples, pela codimensão do correspondente estrato no espaço de jatos.

Teorema 1.14 (Rieger, Ruas [32]). *Qualquer germe simples $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ de corank 2 é $\mathcal{A}$ -equivalente a algum membro das seguintes séries de germes:*

1. $I_{2,2}^{l,m} = (x^2 + y^{2l+1}, y^2 + x^{2m+1}), l \geq m \geq 1;$
2. $II_{2,2}^l = (x^2 - y^2 + x^{2l+1}, xy), l \geq 1.$

A $\mathcal{A}_e$ -codimensão de $I_{2,2}^{l,m}$ e $II_{2,2}^l$ são respectivamente $l + m$ e $2l$.

<i>tipo</i>	<i>forma normal</i>	$\mathcal{A}_e\text{-cod}$
1	(x, y)	0
2	(x, y^2)	0
3	$(x, xy + y^3)$	0
4, 4_k	$(x, y^3 \pm x^k y), (2 \leq k \leq 5)$	$k - 1$
5	$(x, xy + y^4)$	1
6	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	2
7	$(x, xy + y^5)$	3
8	$(x, xy + y^6 \pm y^8 + \alpha y^9)$	3
9	$(x, xy + y^6 + y^9)$	4
10	$(x, xy + y^7 \pm y^9 + \alpha y^{10} + \beta y^{11})$	4
11, 11_{2k+1}	$(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1}), (2 \leq k \leq 4)$	k
12	$(x, xy^2 + y^5 + y^6)$	3
13	$(x, xy^2 + y^5 \pm y^9)$	4
15	$(x, xy^2 + y^6 + y^7 \pm \alpha y^9)$	4
16	$(x, x^2 y + y^4 \pm y^5)$	3
17	$(x, x^2 y + y^4)$	4
18	$(x, x^2 y + xy^3 + \alpha y^5 + y^6 + \beta y^7)$	4
19	$(x, x^3 y + \alpha x^2 y^2 + y^4 x^3 y^2)$	4

Tabela 1.3: Germes do plano no plano de corank 1 e $\mathcal{A}_e\text{-cod} \leq 4$

Capítulo 2

A geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$

Neste capítulo faremos uma breve descrição da geometria de uma superfície M mergulhada em $\mathbb{R}^4$. Uma discussão mais aprofundada e mais detalhada pode ser encontrada no excelente trabalho de Little ([20]) ou na tese de doutorado de Mochida [23]. Veremos que, essencialmente, a geometria de segunda ordem de M em um ponto p será governada por uma elipse e por sua posição relativamente à origem no plano normal a M em p .

2.1 A elipse de curvatura

Seja $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão de uma superfície em $\mathbb{R}^4$. Dado $p \in M$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = 0$, que o espaço tangente a M em p é $T_p M = \mathbb{R}^2 \times 0$, que o espaço normal a M em p é $N_p = 0 \times \mathbb{R}^2$ e, portanto podemos escrever g localmente como o gráfico de uma função $G : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$. Em outras palavras, podemos parametrizar M em torno do ponto p pela sua forma de Monge $(x, y, f(x, y), g(x, y))$, onde $f, g \in \mathcal{M}_2^2$. Vamos, desde já, escrever $j^2 f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $j^2 g = ex^2 + 2fxy + gy^2$.

A primeira forma fundamental de M em p é, como usual, uma forma quadrática definida no espaço tangente a M em p :

$$I_p(u, v) = \langle dg(p)u, dg(p)v \rangle,$$

onde $\langle, \rangle$ denota o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^4$.

Já com a segunda forma fundamental precisamos de mais cuidado. Esta já não é mais uma forma quadrática, mas é melhor visualizada como uma aplicação bilinear

simétrica de $T_p M$ em $N_p M$, definida por

$$\begin{aligned} II_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow N_p M \\ (u, v) &\mapsto \Pi_p(d^2 g(p)(u, v)), \end{aligned}$$

onde $\Pi_p : \mathbb{R}^4 \rightarrow N_p M$ é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre o espaço normal a M em p .

Seja $\eta : T_p M \rightarrow N_p M$ a forma quadrática associada a II_p , ou seja, $\eta(u) = II_p(u, u)$. Esta aplicação é chamada o vetor curvatura normal. Consideremos agora uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ para $T_p M$ (a ortogonalidade aqui sendo dada pela primeira forma fundamental). Definimos então a elipse de curvatura como sendo a imagem sob η do círculo unitário em $T_p M$. Assim, se $u = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \in T_p M$, então a elipse de curvatura é dada pela imagem da aplicação

$$\begin{aligned} \theta &\mapsto \eta(\theta) = \Pi_p(d^2 g(p)(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2)) \\ &= \Pi_p(\cos^2(\theta)d^2 g(p)(e_1 e_1) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)d^2 g(p)(e_1 e_2) + \sin^2(\theta)d^2 g(p)(e_2 e_2)) \\ &= \cos^2(\theta)\eta(e_1) + 2\sin(\theta)\cos(\theta)II_p(e_1, e_2) + \sin^2(\theta)\eta(e_2) \\ &= \eta(e_1)\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + \eta(e_2)\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} + II_p(e_1, e_2)\sin(2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\eta(e_1) + \eta(e_2)) + \frac{1}{2}(\eta(e_1) - \eta(e_2))\cos(2\theta) + II_p(e_1, e_2)\sin(2\theta) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) + \frac{1}{2}(\alpha - \gamma)\cos(2\theta) + \beta\sin(2\theta), \end{aligned}$$

onde $\alpha = \eta(e_1)$, $\beta = II_p(e_1, e_2)$, $\gamma = \eta(e_2)$. Então a elipse de curvatura é duplamente coberta por η .

Estando a imersão g na forma de Monge é fácil ver que

$$\begin{aligned} \eta(e_1) &= (2a, 2e) \\ \eta(e_2) &= (2c, 2g) \\ II_p(e_1, e_2) &= (2b, 2f), \end{aligned}$$

e portanto podemos expressar a elipse de curvatura em termos da imersão:

$$\eta(\theta) = 2(a \cos^2(\theta) + 2b \cos(\theta)\sin(\theta) + c \sin^2(\theta), e \cos^2(\theta) + 2f \cos(\theta)\sin(\theta) + g \sin^2(\theta)).$$

A geometria de segunda ordem de M é governada pela elipse de curvatura e pela posição da origem do plano normal a M em p com relação à elipse. Assim, diremos que um ponto $p \in M$ é hiperbólico, elíptico ou parabólico, dependendo se o ponto $0 \in N_p M$ está fora, dentro ou sobre a elipse de curvatura.

Para entendermos melhor estas configurações introduzimos o seguinte invariante de g que nada mais é que a resultante dos polinômios definindo η :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2b & c & 0 \\ e & 2f & g & 0 \\ 0 & a & 2b & c \\ 0 & e & 2f & g \end{vmatrix}.$$

Little mostra em [20] que $\Delta = (ac - b^2)(eg - f^2) - 1/4(ag + ce - 2bf)^2$ e que (supondo a elipse não-degenerada)

- se $\Delta > 0$ então a origem está dentro da elipse
- se $\Delta = 0$ então a origem está sobre a elipse
- se $\Delta < 0$ então a origem está fora da elipse.

Assim um ponto $p \in M$ é hiperbólico (resp. elíptico/parabólico) se $\Delta(p) < 0$ (resp. $\Delta(p) > 0/\Delta(p) = 0$).

As direções θ em $T_p M$ para as quais os vetores $\partial\eta/\partial\theta$ e $\eta(\theta)$ são paralelos são chamadas de direções assintóticas. Assim, supondo que a elipse de curvatura é não-degenerada, em um ponto hiperbólico existem duas direções assintóticas enquanto que em um ponto elíptico não existe tal direção. Já em um ponto parabólico existe uma única direção assintótica. Se a elipse é um segmento de reta radial então todas as direções são assintóticas. Neste caso dizemos que o ponto p é um ponto de inflexão da superfície.

A geometria de M do ponto de vista de contato com hiperplanos em $\mathbb{R}^4$ foi estudada por Mochida em sua tese de doutorado [23]. A seguir faremos um breve relato dos principais resultados lá obtidos.

2.2 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ do ponto de vista de contato

Começamos relembando que a aplicação de Gauss generalizada de M é definida por $\Gamma : CM \rightarrow S^3$, $\Gamma(x, v) = v$, onde CM é a variedade canal de M (ou o fibrado tangente unitário de M).

O contato de M com a família de hiperplanos em $\mathbb{R}^4$ é medido pela família de funções altura sobre M definida pela aplicação

$$H : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}, H(x, v) = \langle g(x), v \rangle$$

(g é o nosso mergulho inicial). As singularidades que, genericamente, podemos esperar que ocorram para esta família são aquelas classificadas por Arnold em [1] de $\mathcal{A}_e$ -codimensão até no máximo 4, ou seja, as de tipo A_k , $1 \leq k \leq 4$, e as de tipo D_4 .

O seguinte resultado é bastante conhecido e relaciona as singularidades da família de funções altura com as singularidades da aplicação de Gauss (ver por exemplo [33]).

Teorema 2.1. *Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico da função altura H_v se, e somente se, v é normal a M em p . Além disso, p é um ponto crítico não-degenerado de H_v (ou seja uma singularidade de tipo Morse) se, e somente se, (p, v) é um ponto regular da aplicação de Gauss Γ .*

Os resultados a seguir podem ser encontrados em [23] ou [24].

- Lema 2.2.**
1. *Se $\Delta(p) > 0$ então p é um ponto crítico não-degenerado de H_v , $\forall v \in N_p M$.*
 2. *Se $\Delta(p) < 0$ então existem exatamente dois vetores $v_1, v_2 \in N_p M$ tais que p é um ponto crítico degenerado de H_{v_i} .*
 3. *Se $\Delta(p) = 0$ existe um único vetor $v \in N_p M$ tal que p é um ponto crítico degenerado de H_v .*

Observação 2.1. *Um vetor v como o dos itens (2) e (3) do lema 2.2 é chamado de vetor binormal, pois neste caso, o hiperplano ortogonal a v , digamos P_v , tem contato de ordem mais alta com M em p , e o nome vem da analogia com curvas em $\mathbb{R}^3$. O hiperplano P_v é também chamado de hiperplano osculador.*

Seja γ a seção normal de M tangente à direção assintótica θ em $f(p)$ associada ao vetor binormal v , e seja $\chi \subset CM$ a curva de pontos de tipo $\Sigma^{1,1}$ de Γ . Tem-se então:

Teorema 2.3. *Para $p \in M$ tal que $\Delta(p) < 0$, p é singularidade de dobra de H_v se, e somente se, γ tem torsão normal não-nula em p . Se, por outro lado, γ tem torsão normal nula em p então $p \in \tilde{\xi}(\chi)$ e*

1. *p é uma singularidade cúspide de H_v se, e somente se, θ é transversal a $\tilde{\xi}(\chi)$.*
2. *p é singularidade rabo de andorinha de H_v se, e somente se, θ é tangente a $\tilde{\xi}(\chi)$ com contato de ordem 1 em p .*

Observação 2.2. No teorema acima $\tilde{\xi}$ é a restrição da projeção natural $\xi : CM \rightarrow M$ ao conjunto singular de Γ fora dos pontos de tipo $\Sigma^2(\Gamma)$.

A caracterização das singularidades de funções altura sobre a curva $\Delta^{-1}(0)$ é dada pelo seguinte:

Teorema 2.4. 1. Se $\Delta(p) = 0$ e p não é um ponto de inflexão de M , então p é uma dobra ou uma cúspide de H_v e:

(a) p é uma dobra de H_v se, e somente se, θ é transversal à curva $\Delta^{-1}(0)$ de pontos parabólicos de M .

(b) p é cúspide se, e somente se, θ é tangente a $\Delta^{-1}(0)$.

2. p é um ponto umbílico de H_v se, e somente se, m é um ponto de inflexão de M . Além disso,

(a) p é um ponto de cruzamento normal (normal crossing) de $\Delta^{-1}(0)$ se, e somente se, p é um ponto de inflexão de tipo real;

(b) p é um ponto isolado de $\Delta^{-1}(0)$ se, e somente se, p é um ponto de inflexão de tipo imaginário.

2.3 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e pencils de formas quadráticas

Além da elipse de curvatura, podemos usar também um outro objeto para descrever a geometria de segunda ordem da superfície M , a saber o pencil de formas quadráticas binárias determinado pela segunda forma fundamental de M em um ponto p , digamos pelo par de formas quadráticas $(ax^2 + 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$. Se pensarmos uma forma quadrática binária $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ como um ponto $(A, B, C) \in \mathbb{R}^3$, podemos então identificar o espaço das formas quadráticas em duas variáveis com o espaço 3-dimensional $\mathbb{R}^3$. Temos então definido o cone $B^2 - AC = 0$ de formas quadráticas degeneradas. Este cone, por sua vez, determina uma cônica no espaço projetivo $\mathbb{P}^2$ ao qual nos referiremos como o cone de formas quadráticas degeneradas (ou de formas quadráticas de tipo parabólico). Os pontos do lado de dentro da cônica representam as formas quadráticas de tipo elíptico, enquanto que os pontos do lado de fora representam as formas de tipo hiperbólico.

Com a identificação acima um par de formas quadráticas (Q_1, Q_2) pode ser pensado como um par de vetores em $\mathbb{R}^3$. Se as formas quadráticas $Q_1 = (ax^2 + 2bxy + cy^2)$ e $Q_2 = (ex^2 + 2fxy + gy^2)$ são linearmente independentes então elas determinam

um plano pela origem em $\mathbb{R}^3$, e portanto, uma reta em $\mathbb{P}^2$. Esta reta vai interceptar a cônica em 0, 1 ou 2 pontos dependendo se $\delta = (ag - ec)^2 + 4(be - af)(bg - cf) < 0$, $= 0$ ou > 0 , respectivamente. Observe que $\delta = -\Delta$, onde Δ é o invariante de segunda ordem introduzido na seção anterior. Assim, se $\delta < 0$ o respectivo ponto é elíptico, se $\delta = 0$ o ponto é parabólico e se $\delta > 0$ o ponto é hiperbólico.

Por outro lado, se Q_1 e Q_2 são formas linearmente dependentes (mas não nulas) e, neste caso, a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{pmatrix}$$

tem rank 1, elas determinam um ponto em $\mathbb{P}^2$ que pode estar dentro, sobre ou fora da cônica.

É fácil ver que sob a ação óbvia do grupo $Gl(2, \mathbb{R}) \times Gl(2, \mathbb{R})$ sobre pares de formas quadráticas binárias as órbitas abertas têm os representantes (x^2, y^2) (em um ponto hiperbólico) e $(xy, x^2 - y^2)$ (em um ponto elíptico). A órbita de pares de formas quadráticas que determinam retas tangentes à cônica (pontos parabólicos) tem representante (x^2, xy) . Os pares de formas quadráticas linearmente dependentes têm representantes dados por $(x^2 \pm y^2, 0)$ (em um ponto umbílico) ou $(x^2, 0)$ $(0, 0)$ (ambos não-genéricos). Para a classificação de pares de formas quadráticas ver [16].

Capítulo 3

Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade

Neste capítulo estudaremos alguns aspectos da geometria diferencial de uma superfície M mergulhada em um espaço Euclidiano (ou mesmo afim) de dimensão 4 $\mathbb{R}^4$. A geometria que nos interessará é a chamada geometria *flat* de M , ou seja, a geometria de M obtida através do contato de M com subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$. Para isto consideraremos três famílias de projeções ortogonais de M , a saber, a família de projeções em subespaços unidimensionais de $\mathbb{R}^4$ (mais conhecida como família de funções altura), a família de projeções em subespaços bidimensionais e a família de projeções em subespaços tridimensionais de $\mathbb{R}^4$. A primeira e a última destas famílias são ambas parametrizadas sobre a esfera unitária $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, e a segunda é parametrizada sobre a Grassmaniana de 2-planos em $\mathbb{R}^4$ $G(2,4)$. Qualquer que seja a projeção $\Pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ela induzirá uma aplicação $M \rightarrow \mathbb{R}^k$ cujo $\mathcal{A}$ -tipo local dependerá somente do núcleo de Π . No caso em que $k = 1$ os núcleos destas projeções estarão em correspondência biunívoca com pontos do espaço projetivo real de dimensão 3 que denotaremos por $\mathbb{P}$ e, no caso em que $k = 3$ os núcleos das projeções estarão em correspondência com pontos do espaço projetivo dual que denotaremos $\mathbb{P}^*$.

Cada uma destas famílias fornece uma estratificação dos respectivos espaços de parâmetros. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que existem relacionamentos entre certos estratos de uma dada família com certos estratos de uma outra família. Mais precisamente, mostraremos neste capítulo, que existe uma dualidade entre certos estratos 2-dimensionais em $\mathbb{P}$ (para projeções em retas) e certos estratos 2-dimensionais em $\mathbb{P}^*$ (para projeções em 3-espaços). Isto estenderá resultados anteriores obtidos por Bruce e Romero-Fuster em [11] onde eles consideram estas mesmas famílias mas para superfícies em $\mathbb{R}^3$, e também os resultados de Mochida [23] em sua tese de doutorado. Os resultados que obteremos aqui serão também usados para correlacionar as duas famílias e, principalmente entender um pouco

mais da geometria aqui envolvida.

Além dos resultados de dualidade estudaremos também o comportamento de M em torno de um ponto "umbílico" (isto é, um ponto de M onde o contato com algum hiperplano é de tipo D_4). Os resultados deste capítulo fazem parte do artigo [9] submetido para publicação.

Começamos então dando uma descrição detalhada de cada uma das famílias e dos tipos de singularidades que poderemos esperar em cada um dos casos.

3.1 Superfícies em $\mathbb{R}^4$

Consideremos então uma superfície M mergulhada em $\mathbb{R}^4$. As famílias de projeções que estudaremos são formuladas como seguem.

A família de projeções em retas, que daqui por diante será chamada simplesmente de família de funções altura e que denotaremos por $H : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por

$$H(x, v) = \langle x, v \rangle$$

onde $\langle, \rangle$ é o produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^4$. Esta família mede o contato de M com hiperplanos em $\mathbb{R}^4$. Já a família de projeções em 3-espacos, que mede o contato de M com retas em $\mathbb{R}^4$ é melhor formulada pela aplicação $P : M \times S^3 \rightarrow TS^3$, definida por

$$P(x, v) = (v, \langle x, v \rangle v)$$

onde TS^3 é o fibrado tangente unitário de S^3 .

Outra família que estudaremos é a família de projeções em planos, que mede o contato de M com planos em $\mathbb{R}^4$. Esta família pode então ser parametrizada sobre a Grassmaniana de 2-planos em $\mathbb{R}^4$ $G(2, 4)$ pela aplicação $\Pi : M \times G(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Pi(x, v) = (\langle x, a \rangle, \langle x, b \rangle)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^4$ são vetores unitários linearmente independentes gerando o plano v . Da maneira como foi definida pode parecer que esta família seja uma família a 6 parâmetros (parametrizada, digamos, sobre $S^3 \times S^3$, pois cada par de vetores linearmente independentes gerando o plano v serve para definir a família), mas na verdade ela é uma família a 4 parâmetros, como veremos mais adiante no próximo capítulo, onde trataremos especificamente desta família.

Nosso próximo passo agora é ver como estas famílias estratificarão os respectivos espaços de parâmetros, ou seja, que tipo de singularidades podemos esperar em cada uma destas famílias. Neste capítulo trataremos em especial das famílias de funções altura e projeções em 3-espacos. A família de projeções em planos será tratada separadamente no capítulo seguinte.

3.1.1 A família de funções altura

O seguinte teorema é uma consequência do teorema de transversalidade de Montaldi.

Teorema 3.1. *Seja $W \subset J^k(M, \mathbb{R})$ uma subvariedade $\mathcal{A}$ -invariante. Então para um subconjunto residual de imersões $M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ a k -jato extensão*

$$j_1^k H : M \times S^3 \rightarrow J^k(M, \mathbb{R})$$

é transversal a W .

Prova. Para cada $v \in S^3$ a aplicação $H_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão. Portanto a família $H : \mathbb{R}^4 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{A}$ -versal, e esta é a hipótese central no teorema de Montaldi 1.3. $\square$

Corolário 3.2. *Para uma imersão genérica $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$*

1. *as singularidades locais que poderão ocorrer para a família de funções altura são as singularidades de tipo A_k , $1 \leq k \leq 4$, e singularidades de tipo D_4 . As formas normais e respectivas $\mathcal{A}_e$ -codimensões são dadas abaixo:*

$$A_k : x^2 \pm y^{k+1}, \mathcal{A}_e - \text{cod} = k,$$

$$D_4 : x^2 y \pm y^3, \mathcal{A}_e - \text{cod} = 3.$$

2. *as singularidades multilocais que podemos esperar são: duas, três ou quatro singularidade de tipo A_1 no mesmo nível (ou seja, bitangência, tritangência e quadritangência), que denominaremos $2A_1$, $3A_1$ e $4A_1$, respectivamente; uma singularidade de tipo A_1 e uma singularidade de tipo A_2 no mesmo nível ($A_1 A_2$); uma singularidade A_1 e uma A_3 ($A_1 A_3$); duas singularidades A_1 e uma A_2 ($2A_1 A_2$); e finalmente duas singularidades A_2 no mesmo nível ($A_2 A_2$).*

3.1.2 A família de projeções em 3-espacos

Neste caso teremos uma família de aplicações $P_v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Também o teorema seguinte é consequência imediata do teorema de genericidade de Montaldi.

Teorema 3.3. *Seja $W \subset J^k(M, \mathbb{R}^3)$ uma subvariedade $\mathcal{A}$ -invariante. Então para um conjunto residual de imersões $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ a k -jato extensão*

$$j_1^k P : M \times S^3 \rightarrow J^k(M, \mathbb{R}^3)$$

é transversal a W .

Corolário 3.4. *Para uma imersão genérica $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ temos:*

1. *as singularidades locais que podem ocorrer são aquelas dadas na tabela 3.1, onde são fornecidas formas normais e respectivas $\mathcal{A}_e$ -codimensões.*
2. *as singularidades multilocais que podem ocorrer são as seguintes: imagens tangentes, pontos duplos com um deles singular e pontos triplos não-transversais. As formas normais e respectivas codimensões são dadas na tabela 3.2.*

nome	forma normal	codimensão
Cross-cap	$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$	0
S_1	$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 \pm x^2y)$	1
S_2	$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 \pm x^3y)$	2
S_3	$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 \pm x^4y)$	3
B_2	$(x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y \pm y^5)$	2
B_3	$(x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y \pm y^7)$	3
C_3	$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy^3 \pm x^3y)$	3
H_2	$(x, y) \mapsto (x, xy + y^5, y^3)$	2
H_3	$(x, y) \mapsto (x, xy + y^8, y^3)$	3

Tabela 3.1: Singularidades locais para projeções em 3-espaços

Observação 3.1. *Os germes listados na tabela 3.1 foram classificados por David Mond em [26] onde ele estuda também a geometria de projeções de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Já os multigerms listados na tabela 3.2 foram classificados independentemente por Hoobs em [19] e por Vic em [4].*

Para a maioria (resp, todas) as direções de projeção em um ponto hiperbólico (resp. elíptico) teremos uma singularidade estável nestas dimensões, a saber, um guarda-chuva de Whitney (ou cross-cap). Em um ponto hiperbólico, existirão, como veremos, duas direções de projeção, que são as direções assintóticas, onde uma singularidade mais degenerada que um cross-cap ocorrerá.

Como vimos na seção 2.3 a geometria flat das superfícies quando medida pelo contato com hiperplanos em $\mathbb{R}^4$ é largamente determinada por um pencil de formas

Bigermes		
<i>nome</i>	<i>forma normal</i>	<i>codimensão</i>
$[A_1^\pm]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 \pm Y^2)$	1
$[A_2]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 + Y^3)$	2
$[A_3^\pm]$	$(x, y, 0; X, Y, X^2 \pm Y^4)$	3
	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^3, X)$	1
	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^5, X)$	2
	$(x, y, 0; Y^2, XY + Y^7, X)$	3
$[S_1^\pm]$	$(x, y, 0; y^3 \pm X^2Y, Y^2, X)$	2
$[S_2]$	$(x, y, 0; y^3 + X^3Y, Y^2, X)$	3
	$(x, y, 0; X, XY, Y^2 + X^3)$	3
	$(x, y, 0; X, Y^2, XY + Y^4)$	3
Trigermes		
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^2)$	1
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^3)$	2
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, X^2 \pm Y^2)$	2
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, Y + X^4)$	3
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, XY + X^3)$	3
	$(x, y, 0; \bar{x}, 0, \bar{y}; X, Y, X^2 + Y^3)$	3

Tabela 3.2: Multigermes para projeções em 3-espços

quadráticas binárias. Este mesmo pencil também determina algo da geometria de projeções em 3-espços. Para ver isto, vamos supor que a superfície M é dada em sua forma de Monge em torno de $p = 0$, ou seja, M é dada localmente por

$$(x, y, F_1(x, y), F_2(x, y)),$$

com $F_1, F_2 \in \mathcal{M}_2^2$. Então o pencil de formas quadráticas a que estamos nos referindo é aquele determinado pelo par de formas (Q_1, Q_2) , onde $Q_j = j^2 F_j(0)$, $j = 1, 2$. Dada então a direção tangente $(-b, a, 0, 0)$ estamos interessados no $\mathcal{A}$ -tipo do germe $(ax + by, F_1(x, y), F_2(x, y))$, quando $(a : b)$ varia no espaço projetivo unidimensional $\mathbb{P}^1$. O 2-jato desta projeção é então dado por $(ax + by, Q_1(x, y), Q_2(x, y))$.

Notemos que cada direção tangente de projeção determina também um pencil de formas quadráticas, a saber o pencil de formas quadráticas que têm $ax + by$ como um fator. Lembremos que na seção 2.3 identificamos o espaço das formas quadráticas $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ com o espaço tridimensional, $\mathbb{R}^3$, de coordenadas (A, B, C) (ou equivalentemente, com o espaço projetivo $\mathbb{P}^2$, com coordenadas $(A : B : C)$). Assim este pencil é o conjunto

$$\{(ax + by)(sx + ty); (s : t) \in \mathbb{P}^1\}$$

e o mesmo determina uma reta em $\mathbb{P}^2$ (uma para cada direção) parametrizada por

$$(s : t) \mapsto (as : (at + bs)/2 : bt).$$

Esta reta é dada implicitamente por

$$b^2A - 2abB + a^2C = 0,$$

ou seja, ela é tangente à cônica $AC = B^2$ no ponto $(a^2 : ab : b^2)$, que corresponde à forma quadrática $(ax + by)^2$. Em outras palavras o pencil de formas quadráticas acima corresponde às retas tangentes à cônica de formas degeneradas. Temos então o seguinte resultado.

Proposição 3.5. 1. *A direção de projeção dá um cross-cap a menos que a reta que ela determina passe por um dos pontos de intersecção da cônica com o pencil (Q_1, Q_2) (e consequentemente tangente à cônica naquele ponto). Assim teremos duas direções assintóticas em um ponto hiperbólico, nenhuma em um ponto elíptico e, uma em um ponto parabólico.*

2. *Em um ponto umbílico, onde o par (Q_1, Q_2) é linearmente dependente, a maioria das direções de projeção fornecerão singularidades de tipo S ou B (usualmente S_1). Teremos uma direção de projeção de tipo H se a reta determinada por tal direção passa através da forma. Assim, se a forma está dentro (resp. fora) da cônica existem 0 (resp. 2) tais direções.*

Prova. 1) Se o ponto em questão é um ponto hiperbólico, pelo que vimos anteriormente (seção 2.3), podemos supor que $(Q_1, Q_2) = (x^2, y^2)$. Então o 2-jato da projeção é $(ax + by, x^2, y^2)$. Se $a \neq 0$ escrevemos $X = ax + by$, $Y = y$, e então o 2-jato acima torna-se $(X, (X - bY)^2/a^2, Y^2)$. Este é $\mathcal{A}$ -equivalente ao 2-jato $(X, -2bXY, Y^2)$. Assim, teremos um cross-cap a menos que $b = 0$, caso em que o 2-jato se torna $(X, 0, Y^2)$. Se $a = 0$ o 2-jato se reduz a $(y, x^2, y^2) \sim (y, x^2, 0) \sim (x, y^2, 0)$. Assim as direções $(1, 0)$ e $(0, 1)$ são direções degeneradas. A reta determinada pela direção $(-b, a) = (0, 1)$ é dada por

$$(s : t) \mapsto (s : t/2 : 0)$$

e esta, como vimos acima, é tangente à cônica $AC - B^2 = 0$ (de formas degeneradas) no ponto $(1 : 0 : 0)$ que corresponde à forma x^2 . Analogamente para a direção $(1, 0)$. Já no caso elíptico podemos supor $(Q_1, Q_2) = (xy, x^2 - y^2)$, e o 2-jato da projeção é $(ax + by, xy, x^2 - y^2)$ que pode ser reduzido, se $a \neq 0$, ao 2-jato $(X, XY - bY^2, -2bXY + (b^2 - a^2)Y^2)$ e isto é sempre $\mathcal{A}$ -equivalente a um cross-cap. Em um ponto parabólico, podemos tomar $(Q_1, Q_2) = (x^2, xy)$ e o 2-jato da projeção é $(ax + by, x^2, xy)$. Se $a \neq 0$ a mudança de coordenadas $X = ax + by$, $Y = y$

transforma o 2-jato da projeção em $(X, (X - bY)^2/a^2, (XY - bY^2)/a)$, que é $\mathcal{A}$ -equivalente a $(X, -2bXY + b^2Y^2, XY - bY^2)$. Isto deixa de ser um cross-cap se $b = 0$ e neste caso temos o 2-jato $(x, 0, xy)$. Teremos então uma projeção de tipo H , e o pencil de formas determinada pela correspondente direção de projeção é tangente à cônica, na verdade ele coincide com o pencil determinado por (Q_1, Q_2) . Se $a = 0$ teremos um cross-cap.

2) Consideremos agora o caso de formas umbílicas. Neste caso o 2-jato da projeção é $(ax + by, x^2 \pm y^2, 0)$. Se $a \neq 0$ reduzimos ao 2-jato $(X, -2bXY + (b^2 \pm a^2)Y^2, 0)$. Assim, se $b^2 \pm a^2 \neq 0$, completando quadrados, podemos reduzir este último 2-jato à forma $(X, Y^2, 0)$ (e portanto teremos os tipos S ou B). Por outro lado se $b^2 \pm a^2 = 0$, com $b \neq 0$, o 2-jato se reduz a $(X, XY, 0)$. Assim, para $(x^2 - y^2, 0)$ (resp. $(x^2 + y^2, 0)$) a maioria das direções dão projeções de tipo S ou B e 2 (resp. 0) dão projeções de tipo H . $\square$

3.2 Superfícies em $\mathbb{R}^4$ e dualidade

Antes de entrarmos em detalhes sobre os resultados obtidos façamos um breve comentário sobre o que temos em mente a respeito de dualidade.

Sejam M uma hipersuperfície mergulhada no espaço projetivo n -dimensional $\mathbb{P}^n$ e $p \in M$ um ponto regular. Então o espaço tangente a M em p pode ser pensado como um hiperplano pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, digamos, $\sum_0^n a_i x_i = 0$. A este plano corresponde um ponto $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ no espaço projetivo dual $\mathbb{P}^{n*}$. O conjunto formado por tais pontos quando p varia sobre conjunto dos pontos regulares de M é o dual de M , que denotaremos por M^* (algumas vezes tomamos o fecho). Note que $\mathbb{P}^n$ pode ser pensado como o conjunto de retas pela origem $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ enquanto que $\mathbb{P}^{n*}$ pode ser visto como o conjunto de hiperplanos pela origem $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 3.2. Consideremos a curva $x^3 + y^3 + z^3 + 3axyz = 0$ em $\mathbb{P}^3$. Sua reta tangente em um ponto (x_0, y_0, z_0) é dada por

$$(x_0^2 + ay_0z_0)x + (y_0^2 + ax_0z_0)y + (z_0^2 + ax_0y_0)z = 0.$$

Então a curva dual é o conjunto dos pontos da forma $(x_0^2 + ay_0z_0, y_0^2 + ax_0z_0, z_0^2 + ax_0y_0)$ onde $(x_0 : y_0 : z_0)$ varia sobre a curva original.

Uma outra maneira de se definir o dual, de que também faremos uso aqui, consiste em considerar a esfera S^n ao invés do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Dada uma hipersuperfície regular, digamos $Y \subset S^n$, e um ponto $p \in Y$, existe uma única $(n - 1)$ -esfera

equatorial em S^n tangente a Y em p . Mais precisamente, esta $(n - 1)$ -esfera é a (única) esfera obtida pela intersecção de S^n com o hiperplano gerado pelo vetor posição p e pelo espaço tangente a Y em p . Consequentemente, temos um par de polos (ver figura 3.1). Quando fazemos p variar sobre Y estes polos traçam em S^n uma outra superfície, que é a superfície dual de Y , e que denotamos por Y^* . A ambiguidade devida ao par de polos é apenas aparente: ela desaparece se consideramos $Y \subset \mathbb{P}^n$.

Figura 3.1: Dual

Consideremos agora uma superfície k -dimensional $M^k \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Existe uma família de projeções ortogonais $\Pi_n : M^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ determinada, a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência por seu núcleo, que é um subespaço 1-dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ e que pode ser visto então como um ponto de $\mathbb{P}^n$. Por outro lado, existe também uma família de projeções ortogonais $\Pi_1 : M^k \rightarrow \mathbb{R}$, determinada, a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência por seu núcleo, que neste caso é um subespaço n -dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ e, que portanto pode ser visto como um ponto do espaço projetivo dual $\mathbb{P}^{n*}$. Assim obteremos uma estratificação dos respectivos espaços projetivos (espaços de parâmetros), e esperamos que um estrato S em $\mathbb{P}^n$ tenha como seu dual S^* um estrato em $\mathbb{P}^{n*}$ (e vice-versa).

No nosso caso específico, temos uma superfície bidimensional mergulhada em $\mathbb{R}^4$ e as duas famílias em questão são a família de funções altura (que corresponde à família Π_1 acima) e a família de projeções em 3-espaços (que corresponde à família Π_3). Os estratos acima referidos são na verdade, as componentes de codimensão

um dos respectivos conjuntos de bifurcação de cada uma destas famílias, ou seja, o conjunto de pontos dos espaços de parâmetros para os quais as respectivas projeções se tornam degeneradas. Assim, nosso principal objetivo é mostrar que o conjunto de bifurcação da família Π_1 tem como dual o conjunto de bifurcação da família Π_3 e vice-versa.

3.2.1 O resultado de dualidade

O conjunto de bifurcação da família H de funções altura, que denotaremos por $Bif(H)$, consiste daquelas direções $v \in S^3$ para as quais a função H_v tem uma singularidade de tipo A_2 (ou pior), ou então uma bitangência, isto é uma singularidade de tipo $2A_1$ (ou pior). Em outras palavras, e mais geometricamente falando, o conjunto de bifurcação de H consiste basicamente de dois estratos de codimensão mínima, um sendo formado pelas direções binormais e o outro pelas direções normais a hiperplanos bitangentes. As partes regulares de $Bif(H)$ que correspondem a estes estratos serão denotadas, respectivamente, por $Bif(H, A_2)$ e $Bif(H, 2A_1)$.

Já o conjunto de bifurcação da família P , que denotaremos por $Bif(P)$, é mais complicado pois a estabilidade neste caso pode falhar de várias maneiras. Duas em particular são as seguintes: em uma direção v a projeção P_v pode ter uma singularidade pior que um cross-cap, com efeito P_v pode ter uma singularidade de tipo S_1 ou pior; a parte regular deste estrato será denotada por $Bif(P, S_1)$. Alternativamente, P_v pode dar origem a imagens tangentes, a tangência aqui sendo medida pelo contato das imagens de tipo A_1 ou pior; a parte regular deste estrato será denotada por $Bif(P, A_1)$.

Observação 3.3. *Antes de enunciarmos e demonstrarmos o resultado de dualidade façamos a seguinte observação. As aplicações H e P , da maneira que foram formuladas, claramente dependem da estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^4$. Entretanto, isto é simplesmente por conveniência. Por exemplo, o conjunto de bifurcação $Bif(H, A_2)$ pode ser pensado como o conjunto de planos pela origem em $\mathbb{R}^4$ paralelos aos planos tendo contato de tipo A_2 com M . Agora é conveniente rotular tais planos com seu correspondente vetor normal. Claramente, mudanças de coordenadas afins em $\mathbb{R}^4$ têm a seguinte propriedade: se $\Phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é afim então a correspondente aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ levará $Bif(H) \subset \mathbb{P}$ de $M \subset \mathbb{R}^4$ àquele de $\Phi(M)$, e similarmente para $Bif(P)$. Assim, nós podemos usar (e de fato algumas vezes usaremos), mudanças de coordenadas afins para simplificar os cálculos.*

O teorema que provaremos a seguir é o seguinte.

Teorema 3.6 (O resultado de dualidade). *Nas condições acima temos: $\text{Bif}(H, A_2)^* = \text{Bif}(P, S_1)$ e $\text{Bif}(H, 2A_1)^* = \text{Bif}(P, A_1)$ e similarmente $\text{Bif}(P, S_1)^* = \text{Bif}(H, A_2)$ e $\text{Bif}(P, A_1)^* = \text{Bif}(H, 2A_1)$. Como $(Y^*)^* = Y$ para qualquer Y regular, as primeiras duas igualdades implicam o segundo par.*

Prova. Pelo que vimos anteriormente, só teremos contato degenerado de M com 3-planos em $\mathbb{R}^4$ se o ponto em questão for um ponto hiperbólico. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o ponto sob consideração é o ponto $p = (0, 0, 0, 0)$ e que a superfície está parametrizada localmente como $(x, y, u(x, y), v(x, y))$, onde $u, v \in \mathcal{M}_2^2$ (forma de Monge de M). Além disso, sendo p hiperbólico, podemos fazer uma rotação no plano normal a M em p de modo que o respectivo hiperplano degenerado seja $U = 0$ (usando aqui (X, Y, U, V) como coordenadas em $\mathbb{R}^4$) e, a direção binormal sendo então a direção $(0, 0, 1, 0)$. Isto coloca o 2-jato de u na forma $(rx + sy)^2$ e, então rodando agora no plano tangente a M podemos colocar o 2-jato de u na forma ax^2 , para algum a , que suporemos não nulo (pois se $a = 0$ o contato de M com o plano $U = 0$ seria de tipo D_4 (ou pior) que não nos interessará por enquanto).

O que queremos fazer agora é identificar os planos próximos do plano $U = 0$ que têm contatos degenerados com M em pontos próximos de p . No ponto $(x, y, u(x, y), v(x, y))$ próximo a p suponha que um dos planos degenerados próximos a $U = 0$ seja dado por $RX + SY + U + TV = \text{const}$, com R, S, T funções de (x, y) . A condição para que este plano passe pelo ponto relevante é uma condição sobre a constante, que nós ignoraremos (ver observação anterior ao teorema). A condição para ele seja tangente à superfície no dado ponto é

$$\begin{aligned} R + u_x + Tv_x &= 0 \\ S + u_y + Tv_y &= 0, \end{aligned}$$

e a condição para que o contato seja degenerado é $LN = M^2$ onde $L = u_{xx} + Tv_{xx}$, $M = u_{xy} + Tv_{xy}$, $N = u_{yy} + Tv_{yy}$, ou seja,

$$T^2(v_{xy}^2 - v_{xx}v_{yy}) + T(2u_{xy}v_{xy} - v_{xx}u_{yy} - u_{xx}v_{yy}) + (u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}) = 0.$$

Escrevendo esta equação na forma $AT^2 + 2BT + C = 0$ nós queremos resolver esta equação quadrática para a raiz próxima a $T = 0$ (quando fazemos $C(0, 0) = 0$). Para o que nos interessa, só precisaremos dos termos de primeira ordem de $T = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/A$. Vamos então aos cálculos. Se escrevermos $u = ax^2 + (r_0x^3 + 3r_1x^2y + 3r_2xy^2 + r_3y^3) + O(4)$ e $v = ex^2 + 2fxy + gy^2 + (s_0x^3 + 3s_1x^2y + 3s_2xy^2 + s_3y^3) + O(4)$, então teremos até primeira ordem as seguintes

expressões para os coeficientes A, B, C da equação quadrática acima:

$$\begin{aligned}
 A &= v_{xy}^2 - v_{xx}v_{yy} \\
 &= 4(f^2 - eg) + (24fs_1 - 12es_2 - 12gs_0)x \\
 &\quad + (24fs_2 - 12es_3 - 12gs_1)y + \dots \\
 &= \alpha_0 + A_1x + A_2y + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= 2u_{xy}g_{xy} - v_{xx}f_{yy} - u_{xx}g_{yy} \\
 &= -4ag + (24fr_1 - 12er_2 - 12as_2 - 12gr_0)x \\
 &\quad + (24fr_2 - 12er_3 - 12as_3 - 12gr_1)y \\
 &= \beta_0 + B_1x + B_2y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy} \\
 &= -12ar_2x - 12ar_3y \\
 &= C_1x + C_2y
 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 B^2 - 4AC &= \beta_0^2 + 2\beta_0B_1x + 2\beta_0B_2y - 4\alpha_0(C_1x + C_2y) + O(2) \\
 \sqrt{B^2 - 4AC} &= \beta_0\sqrt{1 + (2B_1/\beta_0 - 4C_1\alpha_0/\beta_0^2)x +} \\
 &\quad + (2B_2/\beta_0 - 4C_2\alpha_0/\beta_0^2)y + O(2)} \\
 &= \beta_0(1 + (B_1/\beta_0 - 2C_1\alpha_0/\beta_0^2)x + \\
 &\quad + (B_2/\beta_0 - 2C_2\alpha_0/\beta_0^2)y + O(2)) \\
 -B + \sqrt{B^2 - 4AC} &= -\beta_0 - B_1x - B_2y + \beta_0 + B_1x - \\
 &\quad - 2C_1\alpha_0/\beta_0x + B_2y - 2C_2\alpha_0/\beta_0y + O(2) \\
 &= -2\frac{\alpha_0}{\beta_0}(C_1x + C_2y) + O(2).
 \end{aligned}$$

Assim finalmente obtemos

$$\begin{aligned}
 T &= (-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/A \\
 &= \frac{-2\alpha_0/\beta_0(C_1x + C_2y)}{2\alpha_0 + \dots} \\
 &= -\frac{C_1x + C_2y}{\beta_0}
 \end{aligned}$$

Portanto, até termos de ordem 1 as direções dos planos degenerados são parametrizadas por

$$\begin{aligned} R &= -u_x - Tv_x = -2ax \\ S &= -u_y - Tv_y = O(2) \\ T &= -\frac{C_1x + C_2y}{\beta_0} = -\frac{3}{g}(r_2x + r_3y). \end{aligned}$$

Em particular, teremos uma imersão se, e somente se, $r_3 \neq 0$, e esta é a condição para que o contato com o plano $U = 0$ seja de tipo A_2 . Desta forma o plano tangente ao estrato A_2 do conjunto de bifurcação da família H é dado por $S = 0$.

Consideremos agora projeções em 3-espacos. Para obtermos uma projeção singular o núcleo da projeção deve estar no plano tangente. Se este núcleo é gerado, digamos por $(-E, D)$, nós considereamos então a projeção

$$(x, y, u(x, y), v(x, y)) \mapsto (Dx + Ey, u(x, y), v(x, y)).$$

Esta projeção tem 2-jato $(Dx + Ey, ax^2, ex^2 + 2fxy + gy^2)$. Se $D \neq 0$ a mudança de coordenadas $X = Dx + Ey$, $Y = y$ coloca este 2-jato na forma (lembrando que $a \neq 0$)

$$(X, a(X^2 - 2EXY + E^2Y^2)/D^2,$$

$$e(X^2 - 2EXY + E^2Y^2)/D^2 + 2f(XY - EY^2)/D + gY^2) \sim$$

$$(X, a(X^2 - 2EXY + E^2Y^2), eX^2 + (-2Ee + 2Df)XY + (eE^2 - 2fED + gD^2)Y^2) \sim$$

$$(X, -2EXY + E^2Y^2, (2Df - 2Ee)XY + (eE^2 - 2fED + gD^2)Y^2),$$

e este por sua vez é mais degenerado que um cross-cap se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} -2E & E^2 \\ 2Df - 2Ee & eE^2 - 2fED + gD^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou seja, se, e somente se,

$$E(4fED - 2gD^2 - 2fED) = 2ED(fE - gD) = 0. \quad (3.1)$$

Como $D \neq 0$ então ou $E = 0$ ou $fE - gD = 0$. Assim, projetando na direção $(0, 1, 0, 0)$ obteremos singularidades de tipo S_1 ou pior. Mostramos então que o plano tangente a $Bif(H, A_2)$ na direção binormal $(0, 0, 1, 0)$ é o plano em $\mathbb{P}$ dado

por $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ com $a_1 = 0$ e este plano corresponde, no espaço dual $\mathbb{P}^*$ de 3-planos em $\mathbb{R}^4$ ao ponto $(0 : 1 : 0 : 0)$ que é a direção onde as projeções em 3-espacos são de tipo S_1 ou pior. Isto mostra que $Bif(H, A_2)^* = Bif(P, S_1)$.

Consideremos agora o caso multi-local. Assim, suponhamos que um 3-plano bitangente nos pontos p e q é dado. Segue então da genericidade de M que $\dim Bif(H, 2A_1) = 2$ e nós podemos escolher germes $\alpha : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (M, p)$, $\beta : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (M, q)$, parametrizações locais de M em p e q respectivamente, com $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ pontos de contato de um plano tangente comum. Escrevamos $a(x, y) \in \mathbb{P}$ para o plano tangente comum (ou equivalentemente, para a normal comum em $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$). Projetando na direção dada por $\alpha(x, y) - \beta(x, y)$ teremos claramente um par de imagens tangentes, isto é, esta direção corresponde a um ponto de $Bif(P, A_1)$. Das condições de bitangência temos as seguintes equações:

$$\langle \alpha_x, a \rangle = \langle \alpha_y, a \rangle = 0 \quad (3.2)$$

$$\langle \beta_x, a \rangle = \langle \beta_y, a \rangle = 0 \quad (3.3)$$

$$\langle \alpha - \beta, a \rangle = 0. \quad (3.4)$$

Segue então destas equações que

$$\langle \alpha_x - \beta_x, a \rangle = \langle \alpha_y - \beta_y, a \rangle = \langle \alpha - \beta, a \rangle = 0.$$

Por outro lado, visualizando as direções de projeção como pontos de $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ ao invés de S^3 (e tomando cones) o espaço tangente ao estrato $Bif(P, A_1)$ é gerado por $\alpha - \beta$, $\alpha_x - \beta_x$, $\alpha_y - \beta_y$. Então, das equações acima segue que o plano tangente a $Bif(P, A_1)$ em $\mathbb{P}^*$ corresponde ao ponto $a \in \mathbb{P}$, e portanto nós mostramos que $Bif(P, A_1)^* = Bif(H, 2A_1)$. Isto completa a prova. $\square$

3.2.2 Consequências Geométricas

Tendo então estabelecido a dualidade entre os conjuntos de bifurcação das duas famílias de projeção nós queremos agora ver como as singularidades de cada uma das famílias são correlacionadas. Como antes, vamos supor que nossa superfície está escrita na forma na Monge $(x, y, u(x, y), v(x, y))$ em $0 \in \mathbb{R}^4$. Suporemos ainda que $j^3 u = x^2 + r_0 x^3 + r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3$, e portanto a função u é de tipo $A_{\geq 2}$. Pelo que vimos no teorema de dualidade a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$ tem como projeção dual a projeção no 3-espaco ortogonal à direção $(0, 1, 0, 0)$. Em outras palavras a função $u(x, y)$ tem como dual a projeção $(x, u(x, y), v(x, y))$. Notemos também que estamos interessados somente nos casos não-elípticos. Podemos agora, com o resultado de dualidade, refinar a proposição 3.5.

Teorema 3.7. 1. Suponha que o pencil de formas quadráticas associado a M não seja tangente ao cone de formas parabólicas. Então:

- (a) As singularidades A_2 da função altura são correlacionadas com as singularidades S_k ($1 \leq k \leq 3$) da projeção dual. Nós teremos uma singularidade de tipo S_1 (resp. S_2, S_3) se, e somente se, o correspondente ponto de $\text{Bif}(H, A_2)$, visto como uma hipersuperfície em $\mathbb{P}$, é elíptico ou hiperbólico (resp. parabólico, uma cúspide da aplicação de Gauss).
 - (b) As singularidades A_3 e A_4 da função altura são correlacionadas com as singularidades B_2, B_3 e C_3 da projeção dual.
2. Suponha agora que o pencil de formas quadráticas seja tangente mas que não esteja sobre o cone de formas parabólicas. Então:
- (a) As singularidades A_2 da função altura são correlacionadas com as singularidades H_2, H_3 , com as de tipo H_3 correspondendo aos pontos parabólicos de $\text{Bif}(H, A_2)$.
 - (b) As singularidades A_3 e A_4 estão correlacionadas com a projeção cujo 3-jato é um dos seguintes $(x, xy^2, xy + y^3)$, (x, xy^2, xy) , $(x, 0, xy + y^3)$, $(x, 0, xy)$.
3. (a) Pontos parabólicos (resp. cúspides de Gauss) de $\text{Bif}(H, 2A_1)$ correspondem, sob dualidade, a pontos de $\text{Bif}(P, A_2)$ (resp. $\text{Bif}(P, A_3)$).
- (b) Pontos parabólicos (resp. cúspides de Gauss) de $\text{Bif}(P, A_1)$ corresponde, sob dualidade, a pontos de $\text{Bif}(H, A_1 A_2)$ (resp. $\text{Bif}(H, A_1 A_3)$).

Prova. Podemos supor, pelo que vimos acima, $j^2 u = x^2$ e $j^2 v = ex^2 + 2fxy + gy^2$.

1) De acordo com a hipótese o ponto em questão é um ponto hiperbólico e portanto podemos supor $g \neq 0$ e então completando quadrados podemos supor que $j^2 v = y^2$. Assim teremos uma singularidade de tipo A_2 para a função altura $u(x, y)$ se, e somente se, $r_3 \neq 0$. Por outro lado, o 3-jato da projeção dual é dado por

$$(x, x^2 + r_0 x^3 + 3r_1 x^2 y + 3r_2 xy^2 + r_3 y^3, y^2 + \dots).$$

(Observe que o 3-jato da terceira componente é irrelevante pois ele pode ser eliminado via mudanças de coordenadas óbvias na meta, para eliminar os termos x^3, y^3 e xy^2 , e uma mudança na fonte para eliminar o termo $x^2 y$). Claramente podemos eliminar os termos em x^2 e x^3 da segunda componente ficando então com

$$(x, 3r_1 x^2 y + 3r_2 xy^2 + r_3 y^3, y^2).$$

Se $r_1 r_3 - r_2^2 \neq 0$ este 3-jato é então equivalente

$$(x, x^2 y + r_3 y^3, y^2) \sim (x, y^2, x^2 y + y^3),$$

e portanto temos uma singularidade de tipo S_1 . Se, do contrário, tivermos $r_1 r_3 - r_2^2 = 0$, podemos completar o cubo na segunda componente, e então o 3-jato acima se reduz a $(x, r_3 y^3, y^2) \sim (x, y^2, y^3)$. Este por sua vez dá origem à série de singularidades S_k . Então teremos uma singularidade S_2 ou S_3 . Voltemos agora nossa atenção para a expressão obtida para o estrato $Bif(H, A_2)$ na demonstração do teorema 3.6. Lá obtivemos a seguinte expressão local para $Bif(H, A_2)$:

$$(-2x, -3r_1 x^2 - 6r_2 xy - 3r_3 y^2, -3(r_2 x + r_3 y)).$$

Como $r_3 \neq 0$ isto nos dá uma superfície regular em $\mathbb{P}$. Calculando então os termos de sua segunda forma fundamental vemos que o ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$ será um ponto parabólico desta superfície se, e somente se, a condição $r_1 r_3 - r_2^2 = 0$, $r_3 \neq 0$ está verificada. Portanto, podemos concluir que uma singularidade S_2 (ou pior) corresponderá a pontos parabólicos de $Bif(H, A_2)$. Uma outra maneira de ver isto, sem fazer as contas, é observando que os conjuntos de bifurcação das singularidades S_k correspondem aos discriminantes das singularidades A_k . Assim, por exemplo, teremos um ponto parabólico de $Bif(H, A_2)$ se, e somente se, o dual tem um *edge* cuspidal ou pior, ou seja, teremos uma singularidade S_2 ou S_3 .

b) Para termos uma singularidade de tipo A_3 ou pior para a função $u(x, y)$ devemos ter $r_3 = 0$. Neste caso o 3-jato da projeção dual é

$$(x, r_1 x^2 y + 3r_2 xy^2, y^2)$$

(também aqui os termos de terceira ordem da terceira componente são irrelevantes). Este 3-jato por sua vez pode ser reduzido a $(x, r_1 x^2 y, y^2)$ e este pode ser reduzido a um dos seguintes

$$(x, x^2 y, y^2), \text{ ou } (x, 0, y^2).$$

O primeiro destes 3-jatos dá origem à série de singularidades B_k e o segundo à série C_k . Então teremos uma singularidade de tipo B_2 ou B_3 no primeiro caso e C_3 no segundo.

2) Pela hipótese sobre o par de formas quadráticas podemos supor o 2-jato de v como sendo xy .

a) Ainda a condição para um A_2 é $r_3 \neq 0$. Aqui o 3-jato da projeção dual será $(x, x^2 + r_0 x^3 + 3r_1 x^2 y + 3r_2 xy^2 + r_3 y^3, xy + s_0 x^3 + 3s_1 x^2 y + 3s_2 xy^2 + s_3 y^3)$, com $r_3 \neq 0$.

Eliminando os termos em x^2 e x^3 obtemos o 3-jato $(x, 3r_1x^2y + 3r_2xy^2 + r_3y^3, xy + 3s_1x^2y + 3s_2xy^2 + s_3y^3)$. A mudança de coordenadas na meta $\bar{Y} = Y - 3r_1XZ$, $\bar{Z} = Z - 3s_1XZ$, coloca este 3-jato na forma $(x, 3r_2xy^2 + r_3y^3, xy + 3s_2xy^2 + s_3y^3)$. Ainda com uma mudança na meta $\bar{Z} = s_3Y - r_3Z$ eliminamos o termo y^3 da terceira componente ficando com $(x, 3r_2xy^2 + r_3y^3, xy + 3s_2xy^2)$. Fazemos agora a seguinte mudança de coordenadas na fonte $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y + (r_2/r_3)x$, isto é, vamos trocar y por $\bar{y} - (r_2/r_3)x$. Ficamos então com o 3-jato (já eliminando os termos irrelevantes em x^2 e x^3)

$$(x, r_3\bar{y}^3 - 3r_2^2/r_3x^2\bar{y}, x\bar{y} + 3s_2x\bar{y}^2 - 6(s_2r_2/r_3)x^2\bar{y}),$$

e eliminando agora os termos em $x^2\bar{y}$ da segunda e terceira componentes obtemos o 3-jato $(x, r_3\bar{y}^3, x\bar{y} + 3s_2x\bar{y}^2) \sim (x, y^3, xy + 3s_2xy^2)$ (eliminando as barras). Fazendo agora, $\tilde{y} = y + 3s_2y^2$ obtemos finalmente o 3-jato $(x, \tilde{y}^3, x\tilde{y})$. Este nos dará germes de tipo H_2 ou H_3 . Um ponto parabólico de $Bif(H, A_2)$ significa que o dual contém pontos de tipo S_2 próximos, e então nós devemos ter uma singularidade H_3 e reciprocamente.

b) Para uma singularidade A_3 ou pior devemos ter $r_3 = 0$ e então eliminando os termos em x^2y nosso 3-jato fica reduzido ao seguinte $(x, r_2xy^2, xy + 3s_2xy^2 + s_3y^3) \sim (x, r_2xy^2, xy + s_3y^3)$ (para esta última equivalência faça $\bar{y} = y + 3s_2xy^2$). Este último 3-jato, por sua vez, se reduz a um dos seguintes $(x, xy^2, xy + y^3)$, (x, xy^2, xy) , $(x, 0, xy + y^3)$ ou $(x, 0, xy)$. O primeiro destes 3-jatos dá origem à família 1-modal $P_3(\alpha)$ cuja forma normal é $(x, xy^2 + \alpha y^4, xy + y^3)$, $c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$. Os demais 3-jatos são não-genéricos.

3) Segue diretamente dos modelos locais dos referidos estratos. $\square$

3.3 Umbílicos flat

Nesta seção estudaremos a geometria de M ao redor de um ponto umbílico, ou seja, um ponto para o qual existe uma direção normal tal que a correspondente função altura é de tipo D_4 (isto é, a singularidade envolvida é de corank 2). Isto acontece quando o par de formas quadráticas é dependente. Como estamos lidando com contato com planos, retas, etc, (ou seja, estamos tratando da geometria flat de M) estas propriedades serão invariantes sob a ação do grupo linear afim. Supondo então que o par de formas quadráticas não está sobre o cone, podemos reduzi-lo ao par $(x^2 \pm y^2, 0)$. ou seja, podemos supor que $j^2u = x^2 \pm y^2$ e $j^2v = 0$. Agora, toda a direção no plano tangente a M em um tal ponto é uma direção assintótica, e o nosso objetivo é descrever o comportamento de projeções nestas direções. Vamos

escrever a superfície M localmente na forma $(x, y, x^2 \pm y^2 + O(3), V(x, y) + O(4))$ para alguma forma cúbica $V(x, y)$. Consideraremos os dois casos separadamente.

3.3.1 O caso $j^2u = x^2 + y^2$

Neste caso a forma normal para a superfície é $(x, y, x^2 + y^2 + O(3), V(x, y) + O(4))$. Observe que uma rotação no plano tangente xOy preserva a forma quadrática $x^2 + y^2$. Assim, podemos e vamos efetuar escalas em cada componentes para reduzir a forma cúbica V pela ação óbvia do grupo $\mathbb{R}^* \times \mathbf{O}(2)$. Escrevendo uma forma cúbica geral como $\Re\{\alpha z^3 + \beta z^2 \bar{z}\}$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $z = x + iy$, é bem sabido que é possível reduzir V , via a ação do grupo $\mathbb{R}^* \times \mathbf{O}(2)$, ao caso $\alpha = 1$, e portanto as formas normais acima são determinadas pelos pontos do plano complexo β , com $V = \Re\{z^3 + \beta z^2 \bar{z}\}$.

Suponha agora que projetemos a superfície M na direção tangente $(\sin(\theta), \cos(\theta))$, ou seja, vamos considerar a projeção

$$(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x^2 + y^2, V(x, y) + O(4)).$$

Trocando x por $X \cos(\theta) - Y \sin(\theta)$ e y por $X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$, isto é, fazendo uma rotação de ângulo θ no plano tangente a M em p , e usando a forma acima para V obtemos

$$(X, X^2 + Y^2, \Re\{\exp(3i\theta)Z^3 + \beta \exp(i\theta)Z^2 \bar{Z}\} + O(4)),$$

onde $Z = X + iY$. Podemos claramente eliminar o termo X^2 na segunda componente, ficando então a projeção equivalente a

$$(X, Y^2, \Re\{\exp(3i\theta)Z^3 + \beta \exp(i\theta)Z^2 \bar{Z}\} + O(4)).$$

Esta projeção será de tipo S , B ou C mas não de tipo H . Para a maioria dos valores de θ esta projeção será de tipo S_1 . Queremos agora determinar aquelas direções de projeção para as quais nós temos uma singularidade de tipo S_2 ou B_2 . As direções que dão singularidades de tipo B_2 são determinadas pelo anulamento do coeficiente de Y^3 na componente cúbica, enquanto que as direções que dão singularidades de tipo S_2 são determinadas pelo anulamento do coeficiente de X^2Y na mesma componente cúbica. Estas equações determinam cúbicas homogêneas em $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ (ou, equivalentemente, cúbicas não-homogêneas em $\tan(\theta)$). O anulamento simultâneo destes coeficientes fornece as direções onde a projeção é de tipo C_3 . Vamos então aos cálculos. Desenvolvendo a forma cúbica acima obtemos:

$$\begin{aligned} V(X, Y) = & \Re\{\exp(3i\theta)(X^3 + 3iX^2Y - 3XY^2 - iY^3) \\ & + \beta \exp(i\theta)(X^3 + iX^2Y + XY^2 + iY^3)\} \end{aligned}$$

Assim as direções que dão projeções de tipo $S_{\geq 2}$ são dadas pela equação

$$\begin{aligned}\Re\{3i \exp(3i\theta) + \beta i \exp(i\theta)\} &= 0, \\ (3i \exp(3i\theta) + \beta i \exp(i\theta) + (-3i \exp(-3i\theta) - \bar{\beta} i \exp(-i\theta))) &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(3i \exp(3i\theta) - 3i \exp(-3i\theta)) + (\beta i \exp(i\theta) - \bar{\beta} i \exp(-i\theta)) &= 0 \\ (3 \exp(3i\theta) - 3 \exp(-3i\theta)) + (\beta \exp(i\theta) - \bar{\beta} \exp(-i\theta)) &= 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

Por outro lado, a equação dando as direções cujas respectivas projeções são de tipo $B_{\geq 2}$ é dada por

$$\Re\{-i \exp(3i\theta) + i\beta \exp(i\theta)\} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}(-i \exp(3i\theta) + i \exp(-3i\theta)) + (i\beta \exp(i\theta) - i\bar{\beta} \exp(-i\theta)) &= 0 \\ (-\exp(3i\theta) + \exp(-3i\theta)) + (\beta \exp(i\theta) - \bar{\beta} \exp(-i\theta)) &= 0\end{aligned}\quad (3.6)$$

As equações 3.5 e 3.6 são equações cúbicas em $\exp(2i\theta)$ e podemos usá-las para obter uma partição do plano β , de acordo com o número de raízes reais que cada uma destas cúbicas possui. Para isto, vamos diferenciar ambas equações com respeito à variável θ e calcular então o discriminante de cada uma delas. Diferenciando a equação 3.5 obtemos

$$\begin{aligned}(9i \exp(3i\theta) + 9i \exp(-3i\theta)) + (\beta i \exp(i\theta) + \bar{\beta} i \exp(-i\theta)) &= 0 \\ (9 \exp(3i\theta) + 9 \exp(-3i\theta)) + (\beta \exp(i\theta) + \bar{\beta} \exp(-i\theta)) &= 0\end{aligned}\quad (3.7)$$

Agora somando as equações 3.5 e 3.7 teremos:

$$\begin{aligned}12 \exp(3i\theta) + 6 \exp(-3i\theta) + 2\beta \exp(i\theta) &= 0 \\ 6 \exp(2i\theta) + 3 \exp(-4i\theta) + \beta &= 0\end{aligned}$$

ou seja,

$$\beta = -3(\exp(-4i\theta) + 2 \exp(2i\theta))\quad (3.8)$$

Esta equação parametriza uma hipociclóide tricuspidal no plano β com a propriedade que em seu interior a equação 3.5 tem três raízes reais e apenas uma raiz do lado de fora.

Com um mesmo raciocínio podemos obter o discriminante da cúbica 3.6 que é dado pela equação:

$$\beta = 2 \exp(2i\theta) + \exp(-4i\theta) \quad (3.9)$$

Da mesma forma, esta expressão parametriza uma hipociclóide tricuspidal no plano β sendo que dentro dela a equação 3.6 tem 3 raízes reais e apenas 1 raiz fora dela.

As direções para as quais acontece o anulamento simultâneo das duas cúbicas são as direções de tipo C_3 . Isto acontece se, e somente se, $\exp(3i\theta) - \exp(-3i\theta) = 0$, e portanto $\theta = 0, \pi/3$, ou $2\pi/3$. No plano β estas direções são representadas pelas retas $\arg(\beta) = 0, \pi/3, 2\pi/3$.

Temos então a seguinte partição do plano β dada na figura 3.2. A hipociclóide maior separa as projeções com 1 singularidade S_2 (no exterior) daquelas com 3 S_2 s (no interior), enquanto que a hipociclóide menor separa 1 B_2 (exterior) de 3 B_2 s. Ficam assim bem determinadas três regiões específicas no plano β : a região que denominamos $1B_2 - 1S_2$, onde as projeções terão 1 singularidade de tipo B_2 e uma de tipo S_2 ; a região $1B_2 - 3S_2$ onde teremos 1 singularidade de tipo B_2 e 3 de tipo S_2 ; e a região $3B_2 - 3S_2$ que nos fornecerá projeções com 3 singularidades de tipo B_2 e 3 singularidades de tipo S_2 .

Vamos analisar um pouco mais esta decomposição do plano β . Retomemos a forma da cúbica V , isto é, $V(z) = \Re\{z^3 + \beta z^2 \bar{z}\}$. Lembremos que a equação que determina as direções de projeção de tipo $B_{\geq 2}$ é dada por

$$\Re\{-i \exp(3i\theta) + i\beta \exp(i\theta)\} = 0.$$

Ora, mas isto, em termos da cúbica V é o mesmo que $V(-i \exp(i\theta)) = 0$, ou seja, $V(-\sin(\theta), \cos(\theta)) = 0$. Assim, dada a cúbica V , teremos 3 singularidades de tipo B_2 se, e somente se, V se fatora em três retas pela origem, ou seja, V é uma forma (umbílica) hiperbólica (isto é, pode ser reduzida à forma normal $x^2y - y^3$). Segue então que a distinção entre as cúbicas dando três singularidades de tipo B_2 daquelas dando somente uma tal singularidade é a mesma distinção entre umbílicos hiperbólicos e elípticos.

3.3.2 O caso $j^2u = x^2 - y^2$

Para simplicidade nos cálculos ao invés da forma quadrática $x^2 - y^2$ usaremos a forma quadrática $O(2)$ -equivalente xy . A nossa superfície neste caso terá a seguinte forma normal $(x, y, xy + O(3), V(x, y) + O(4))$, e nós não podemos mais nos valer da ação do grupo $O(2)$ aqui, pois a forma quadrática xy não é preservada por rotações. Mas nós podemos reduzir a forma cúbica a algo da forma $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3$, desde que

Figura 3.2: Partição do espaço de umbílicos associados a $x^2 + y^2$

os coeficientes de x^3 e y^3 sejam não nulos. Suporemos que este é o caso, e teremos como antes um espaço 2-dimensional para os umbílicos. A projeção novamente é

$$(x \cos(\theta) - y \sin(\theta), xy + O(3), V(x, y) + O(4)).$$

Após a rotação $x = X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)$, $y = -X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)$, e também já eliminando os termos em X^2 na terceira componente nossa projeção se torna equivalente a

$$(X, \cos(\theta) \sin(\theta) Y^2 + (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) XY + O(3),$$

$$V(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta), -X \sin(\theta) + Y \cos(\theta)) + O(4)).$$

Podemos notar, portanto, a presença de duas direções de tipo $H_{\geq 2}$ dadas por $\sin(\theta) \cos(\theta) = 0$ (ou seja, $\theta = 0, \pi/2$). Agora, se $\sin(\theta) \cos(\theta) \neq 0$ podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas $x = X$, $y = Y + \alpha X$, onde $\alpha = (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) / (2 \sin(\theta) \cos(\theta)) = \cot(2\theta)$. Assim nossa projeção (já eliminando os termos em x^2 da terceira componente) fica

$$(x, (\cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2) y^2 + O(3),$$

$$V(x \cos(\theta) + (y - \alpha x) \sin(\theta), (y - \alpha x) \cos(\theta) - x \sin(\theta)) + O(4)) \sim$$

$$(x, y^2 + O(3), V(x \cos(\theta) + (y - \alpha x) \sin(\theta), (y - \alpha x) \cos(\theta) - x \sin(\theta)) + O(4)).$$

Vamos olhar agora para a componente cúbica e ver como as mudanças de coordenadas acima a afetaram. Para facilitar a escrita (e a leitura) vamos denotar $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ por c e s respectivamente. Lembremos que estamos supondo que nossa cúbica é $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3$. Após a primeira mudança de coordenadas, ou seja, após a rotação das variáveis x e y (e também eliminando o termo em X^3), a cúbica V se transforma em:

$$V(X, Y) = AX^2Y + BXY^2 + CY^3,$$

onde

$$\begin{aligned} A &= 3c^2s + a(-2cs^2 + c^3) + b(-2sc^2 + s^3) + 3cs^2, \\ B &= 3cs^2 + a(-s^3 + 2c^2s) + b(c^3 - 2s^2c) - 3c^2s, \\ C &= s^3 + as^2c + bsc^2 + c^3. \end{aligned}$$

Aplicando então a segunda mudança de coordenadas à cúbica acima (e já eliminando os termos em x^3 e xy^2) obtemos a cúbica:

$$(A - 2B \cot(2\theta) + 3C \cot(2\theta)^2)x^2y + Cy^3.$$

Assim, após alguns cálculos tediosos, chegamos à seguinte forma normal para nossa projeção:

$$(x, y^2, (3c^3 - bc^2s - as^2c + 3s^3)x^2y + (s^3 + as^2c + bc^2s + c^3)y^3) \quad (3.10)$$

Portanto, as projeções de tipo B_2 são dadas pela equação

$$s^3 + as^2c + bc^2s + c^3 = 0, \quad (3.11)$$

enquanto que as de tipo S_2 são dadas pela equação

$$3c^3 - bc^2s - as^2c + 3s^3 = 0. \quad (3.12)$$

Ambas as equações são cúbicas homogêneas em $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$, mas para uma análise mais fácil vamos transformá-las em cúbica (não-homogêneas) em $\tan(\theta)$, fazendo a mudança $t = \sin(\theta)/\cos(\theta)$. As cúbicas 3.11 e 3.12 se transformam respectivamente nas cúbicas

$$B_{\geq 2} \quad t^3 + at^2 + bt + 1 = 0 \quad (3.13)$$

$$S_{\geq 2} \quad 3t^3 - at^2 - bt + 3 = 0 \quad (3.14)$$

Como antes, estas cúbicas vão determinar uma partição do plano ab (ou seja, do espaço de úmblicos). Vamos agora calcular os discriminantes destas cúbicas, ou seja, o subconjunto do plano ab para o qual a referida cúbica tem uma raiz dupla. Assim para a cúbica 3.13 devemos ter

$$\begin{aligned} t^3 + at^2 + bt + 1 &= 0 \\ 3t^2 + 2at + b &= 0 \end{aligned}$$

donde segue que $b = -3t^2 - 2at$. Substituindo este valor na cúbica e isolando a encontramos

$$a = \frac{1 - 2t^3}{t^2},$$

e portanto

$$b = -3t^2 - 2t \frac{1 - 2t^3}{t^2} = \frac{-3t^4 - 2t + 4t^4}{t^2} = \frac{-2 + t^3}{t}.$$

Assim, o discriminante da cúbica 3.13 pode ser parametrizado por

$$(a = \frac{1 - 2t^3}{t^2}, b = \frac{-2 + t^3}{t}) \quad (3.15)$$

Fazendo o mesmo com a cúbica 3.14 obtemos o seu discriminante que é dado por

$$(a = \frac{6t^3 - 3}{t^2}, b = \frac{-3t^3 + 6}{t}). \quad (3.16)$$

A partição que estas curvas determinam no plano ab é agora formada por quatro regiões relevantes, a saber, a região correspondendo às cúbicas dando 3 singularidades B_2 e 3 singularidades S_2 (chamada de região $3B_2 - 3S_2$); a região correspondendo a três direções B_2 e uma direção S_2 ($3B_2 - 1S_2$); a região correspondendo a 1 B_2 e 1 S_2 ($1B_2 - 1S_2$); e finalmente a região $1B_2 - 3S_2$ das cúbicas com 1 singularidade B_2 e 3 singularidades S_2 . Esta partição é dada na figura 3.3.

Fazendo agora uma análise mais detalhada das cúbicas acima podemos mostrar o seguinte resultado.

Proposição 3.8. *1. A distinção entre umbílicos elípticos e hiperbólicos é a mesma entre as cúbicas $V(x, y)$ que dão origem a uma única singularidade de tipo B_2 e cúbicas que dão origem a três singularidades B_2 . Além disso, as direções de projeção de tipo $B_{\geq 2}$ correspondem ao conjunto singular do conjunto de bifurcação da cúbica $V(x, y)$.*

Figura 3.3: Partição do espaço de umbílicos associados a xy

2. As direções de tipo $S_{\geq 2}$ correspondem à curvas parabólicas no conjunto de bifurcação da cúbica $V(x, y)$.

Prova. A primeira parte de 1) segue do fato que a equação definindo as direções de tipo $B_{\geq 2}$ para a cúbica $V(x, y)$, é dada simplesmente por $V(x, y) = 0$. Portanto, teremos três singularidades de tipo $B_{\geq 2}$ se, e somente se, a cúbica $V(x, y)$ pode ser reduzida à forma $x^2y - y^3$, ou seja se, e somente se V é uma forma hiperbólica.

Para a segunda parte de 1) e para a parte 2), procedemos da seguinte maneira. Seja $V(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3$ a forma cúbica em questão. Um desdobramento para V é dado por

$$F(x, y, u, v, w) = V(x, y) + uxy - vx - wy,$$

que é a família de funções altura na direção $(-v, -w, u, 1)$. Esta família desdobra versalmente a cúbica acima desde que $ab - 9 \neq 0$. Neste caso, o conjunto de bifurcação de F é obtido eliminando x e y das equações $F_x = F_y = 0$ e $F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2 =$

0. Das duas primeiras equações tiramos

$$\begin{aligned}v &= V_x + uy \\ w &= V_y + ux\end{aligned}$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de coordenadas no xyu -espaço,

$$\begin{cases} X &= \frac{1}{2}F_{xx} = 3x + ay \\ Y &= \frac{1}{2}F_{yy} = bx + 3y \\ Z &= F_{xy} = 2ax + 2by + u \end{cases}$$

eliminamos x e y e o conjunto de bifurcação é dado agora pelas equações $F_x = F_y = 0$ e $Z^2 - 4XY = 0$. Resolvendo as duas primeiras equações para x e y obtemos

$$x = \frac{bX - 3Y}{ab - 9}, y = \frac{-3X + aY}{ab - 9}$$

e substituindo na outra equação obtemos

$$u = Z + \frac{(6a + 2b^2)X - (6b + 2a^2)Y}{ab - 9}.$$

Agora, substituindo x , y e u nas expressões para v e w obtemos uma aplicação

$$(X, Y, Z) \mapsto (u(X, Y, Z), v(X, Y, Z), w(X, Y, Z))$$

e o conjunto de bifurcação de F é dado então pela imagem, sob esta aplicação, do cone $Z^2 - 4XY = 0$. Uma parametrização de uma folha deste cone é dada por

$$(x, y) \mapsto (x^2, y^2, 2xy)$$

e a outra folha por

$$(x, y) \mapsto (-x^2, -y^2, 2xy).$$

Assim, uma parametrização do conjunto de bifurcação de F , que vamos denotar por $Bif(F)$, é dada por

$$G : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y), w(x, y)).$$

Tendo então a parametrização de $Bif(F)$, o procedimento agora é simplesmente determinar o conjunto singular do mesmo e, também os pontos parabólicos de sua parte regular. Feitos então os cálculos necessários para se obter estas informações, obtivemos que o conjunto singular de $Bif(F)$ é dado pelos pontos (x, y) satisfazendo a equação $x^3 - bx^2y + axy^2 - y^3 = 0$, ou seja, os pontos que são raízes da

equação $V(x, -y) = 0$. Por outro lado, as direções de tipo B_2 são raízes da equação $V(x, y) = 0$. Assim, se (x, y) representa um ponto singular de $Bif(F)$, o ponto $(x, -y)$ representa uma direção de tipo B_2 para a cúbica $V(x, y)$.

Já o conjunto parabólico de $Bif(F)$ (ou seja, de sua parte regular) é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $3x^3 + bx^2y - axy^2 - 3y^3 = 0$. Mas, as direções de tipo S_2 são determinadas pela equação $3x^3 - bx^2y - axy^2 + 3y^3 = 0$, e portanto (x, y) representa um ponto parabólico de $Bif(F)$ se, e somente se, $(x, -y)$ representa uma direção de tipo S_2 para a cúbica V . De acordo com a partição obtida na figura 3.3, neste caso, existirão uma ou três curvas parabólicas, seja a curva elíptica ou hiperbólica. $\square$

Apêndice ao capítulo 3: Curvas em $\mathbb{R}^4$

Neste apêndice fazemos um rápido estudo sobre curvas em $\mathbb{R}^4$, onde obtemos também aqui, um resultado de dualidade semelhante àquele obtido para superfícies. O propósito deste estudo é, juntamente com o resultado para superfícies, estudar a questão da dualidade também no contexto de superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

Para começar vamos descrever rapidamente as famílias de projeções.

3.4 As famílias de projeções

Seja C uma curva em $\mathbb{R}^4$ e $f : C \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão. Temos, também neste caso, 3 famílias de projeções ortogonais dadas por

$$\Pi_j : C \times G(j, 4) \rightarrow \mathbb{R}^{4-j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Em outras palavras, temos a família Π_1 que é a família a 3 parâmetros de projeções em 3-espacos; a família a 4 parâmetros Π_2 de projeções em planos; e a família a 3 parâmetros Π_3 de projeções em retas, ou seja, a família de funções altura.

Nos restringiremos aqui ao estudo das famílias Π_1 , que denotaremos simplesmente por P , e Π_3 , a qual denotaremos por H . A definição destas famílias é exatamente a mesma que usamos durante todo este capítulo e, também neste caso, ambas as famílias podem ser parametrizadas sobre a esfera S^3 , ou alternativamente sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}^3$. Pretendemos relacionar os conjuntos de bifurcação destas duas famílias.

3.4.1 A família de funções altura

A família de funções altura, como já observamos, é definida por

$$H(s, v) = \langle f(s), v \rangle, \quad v \in S^3.$$

Para esta família podemos esperar que ocorram as singularidades locais A_k , $1 \leq k \leq 4$, e as singularidade multilocais $2A_1$, $3A_1$, etc. Também aqui, isto segue

do teorema de genericidade de Montaldi.

É bem sabido que $s \in C$ é um ponto crítico de H_v se, e somente se, o vetor v é normal à curva C em s , e s é um ponto crítico não-degenerado se, além disso, tivermos que o ponto $(s, v) \in N^1C$ é um ponto regular para a aplicação de Gauss generalizada $\Gamma : N^1C \rightarrow S^3$ dada por $\Gamma(s, v) = v$, onde N^1C é o fibrado normal unitário de C . Assim, o conjunto de bifurcação (local) da família H é o conjunto de valores críticos de Γ . Localmente, as condições para uma singularidade de tipo A_2 são:

$$\begin{aligned} \langle f'(s), v \rangle &= 0 \\ \langle f''(s), v \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Assim, para cada $s \in C$, temos uma família a 1 parâmetro de hiperplanos com contato de tipo A_2 , ou seja, para cada $s \in C$ existe uma aplicação $v_s : \theta \mapsto v_s(\theta) \in N_sC$ tal que $(s, v_s(\theta))$ é um ponto singular da aplicação de Gauss Γ .

3.4.2 A família de projeções em 3-espacos

A família de projeções em 3-espacos é definida por

$$P(s, v) = (v, \langle f(s), v \rangle v),$$

e neste caso a única singularidade local de codimensão ≤ 3 que pode ocorrer é dada aquela dada por $t \rightarrow (t^2, t^3, 0)$, cuja $\mathcal{A}_e$ -codimensão é 2. A nível multilocal esperamos que ocorram pontos duplos (forma normal $x \mapsto (x, 0, 0)$, $y \mapsto (0, y, 0)$) e pontos triplos. Segue que o conjunto de bifurcação local de P tem dimensão 1 no espaço de parâmetros e uma tal singularidade ocorre quando projetamos ao longo de uma direção tangente. Observamos, no entanto, que a componente multilocal do conjunto de bifurcação de P é um conjunto bidimensional e contém a componente local em seu fecho. De fato, a componente multilocal é simplesmente o conjunto de direções ligando pares de pontos distintos sobre a curva C .

Observação 3.4. *Também aqui o fato que as singularidades relevantes são as citadas acima, segue do teorema de genericidade de Montaldi, e no caso local também da classificação das singularidades simples nestas dimensões devido a Gibson e Hobbs [17].*

3.5 A dualidade

Nesta seção queremos relacionar os conjuntos de bifurcação das famílias acima descritas. Vamos denotar por $Bif(P)$ (resp. $Bif(P)$) a componente multilocal (resp.

local) do conjunto de bifurcação de P e por $Bif(H, 2A_1)$ (resp. $Bif(H, A_2)$) a componente multilocal (resp. local) do conjunto de bifurcação de H . A prova do seguinte resultado de dualidade é análoga à prova para o caso de superfícies em $\mathbb{R}^4$ e por isso a omitiremos aqui. O resultado é o seguinte:

Teorema 3.9. $\tilde{Bif}(P)^* = Bif(H, 2A_1)$, $Bif(H, 2A_1)^* = \tilde{Bif}(P)$, e $Bif(H, A_2)^* = Bif(P)$ e $Bif(P)^* = Bif(H, A_2)$.

Devemos neste ponto fazer a seguinte observação. O estrato $Bif(H, A_2)$ que é uma variedade 2-dimensional do espaço de parâmetros tem como seu dual uma curva, ou seja, seu dual é unidimensional. A razão pela qual isto acontece é que o conjunto $Bif(H, A_2)$ é uma superfície regrada: na verdade $Bif(H, A_2)$ é difeomorfo à *developable surface* de uma curva cúbica da forma (at, bt^2, ct^3) . Vamos ver isto mais detalhadamente.

Suponhamos que a curva C seja dada na forma

$$t \rightarrow (t, a_2t^2 + \dots, b_3t^3 + \dots, c_4t^4 + \dots),$$

e consideremos a função altura

$$At + Ba_2t^2 + Cb_3t^3 + Dc_4t^4 + \dots.$$

As condições para que se tenha uma singularidade de tipo A_2 são

$$A + 2Ba_2t + 3Cb_3t^2 + 4Dc_4t^3 + \dots = 0 \quad (3.17)$$

$$2Ba_2 + 6Cb_3t + 12Dc_4t^2 + \dots = 0 \quad (3.18)$$

Resolvendo estas equações para A e B vemos que o conjunto $Bif(H, A_2)$, que pode ser visto também como um subconjunto de $\mathbb{P}^3$, tem a seguinte expressão local

$$A = 3Cb_3t^2 + 8Dc_4t^3 + \dots$$

$$B = - \frac{3Cb_3t + 6Dc_4t^2}{a_2}$$

$$C = C$$

$$D = D.$$

Vamos indicar um ponto de $Bif(H, A_2)$, com as coordenadas acima, por $A_2(t, C, D)$. Ora, é fácil ver que o ponto $A_2(t, C, D)$ gera em $\mathbb{R}^4$ a mesma reta que o ponto $A_2(t, C/D, 1)$, para todo $D \neq 0$. Assim, $Bif(H, A_2)$ tem uma representação local no 3-espaço $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (A, B, C) dada por

$$A = 3b_3ut^2 + 8c_4t^3 + \dots$$

$$B = - \frac{3b_3ut + 6c_4t^2}{a_2}$$

$$C = u$$

que indicaremos por $A_2(u, t)$. O conjunto singular de $A_2(u, t)$ é o conjunto dos pontos do plano ut que satisfazem a equação

$$ub_3 + 4c_4t = 0.$$

Se $b_3 \neq 0$ (esta é a condição para a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$ ser de tipo A_2) podemos escrever

$$u = -\frac{uc_4t}{b_3},$$

e então a correspondente curva sobre a superfície $Bif(H, A_2)$ é dada por

$$\begin{aligned} A &= -4c_4t^3 \\ B &= \frac{6c_4t^2}{a_2} \\ C &= -\frac{4c_4t}{b_3} \end{aligned}$$

Por outro lado, a *tangent developable* desta curva é parametrizada por

$$\begin{aligned} A(t, s) &= -4c_4t^3 + s(-12c_4t^2) \\ B(t, s) &= \frac{6c_4t^2 + s(12c_4t)}{a_2} \\ C(t, s) &= \frac{-4c_4}{b_3}(t + s), \end{aligned}$$

e então fazendo $u = \frac{-4c_4}{b_3}(t + s)$ (donde $s = -t - (b_3/4c_4)u$), obtemos a seguinte reparametrização da superfície acima:

$$\begin{aligned} A(t, u) &= 3b_3ut^2 + 8c_4t^3 \\ B(t, u) &= -\frac{3b_3ut + 6c_4t^2}{a_2} \\ C(t, u) &= u, \end{aligned}$$

ou seja, reobtemos a parametrização inicial de $Bif(H, A_2)$. Naturalmente, a curva cúbica acima corresponde a hiperplanos com contato de tipo A_3 ou pior.

Capítulo 4

Projeções em planos

Neste capítulo vamos considerar a família de projeções em planos de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^4$, ou seja, vamos estudar o contato de M com 2-planos em $\mathbb{R}^4$. Neste caso teremos uma família a 4 parâmetros parametrizada sobre a Grassmaniana de 2-planos em $\mathbb{R}^4$ a qual denotaremos por $G(2, 4)$. Pretendemos estudar as singularidades genéricas desta família e um pouco de sua geometria e entender como esta família se relaciona com as outras duas famílias estudadas anteriormente. Veremos que existe um relacionamento entre o conjunto de bifurcação desta família e os respectivos conjuntos de bifurcação das famílias de funções altura e de projeções em 3-espacos.

4.1 A família de projeções em planos

Seja M uma superfície imersa em $\mathbb{R}^4$. A família de planos em $\mathbb{R}^4$ pode ser definida pela aplicação $\Pi : \mathbb{R}^4 \times G(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\Pi(x, v) = (\langle x, a \rangle, \langle x, b \rangle),$$

onde a e b são vetores linearmente independentes (que podemos supor unitários) gerando o plano $v \in G(2, 4)$. Observemos que, da maneira como foi definida, a aplicação Π_v depende da escolha dos geradores a, b do plano v e portanto, pode parecer que a família Π seja uma família a 6 parâmetros. No entanto, o $\mathcal{L}$ -tipo (e portanto o $\mathcal{A}$ -tipo) de Π_v não depende desta escolha. De fato, dados dois pares de vetores a, b e a', b' linearmente independentes contidos no mesmo plano v podemos escrever, por exemplo, $a = \alpha a' + \beta b'$ e $b = \gamma a' + \delta b'$. Segue que

$$(\langle x, a \rangle, \langle x, b \rangle) = (\alpha \langle x, a' \rangle + \beta \langle x, b' \rangle, \gamma \langle x, a' \rangle + \delta \langle x, b' \rangle).$$

Denotando por U, V as coordenadas do plano v e fazendo então a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \delta U - \beta V \\ \bar{V} &= \alpha V - \gamma U\end{aligned}$$

obtemos

$$(< x, a >, < x, b >) \sim ((\alpha\delta - \beta\gamma) < x, a' >, (\alpha\delta - \beta\gamma) < x, b' >).$$

Mas,

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim temos

$$(< x, a >, < x, b >) \sim_{\mathcal{L}} (< x, a' >, < x, b' >),$$

e portanto a projeção Π_v depende somente do plano v .

Restringindo agora a aplicação Π à superfície M obtemos uma família de aplicações $\Pi : M \times G(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ que mede o contato de M com planos em $\mathbb{R}^4$. Mais precisamente, dado $v \in G(2, 4)$, a aplicação Π_v quando restrita a M mede o contato entre M e o plano que é o complemento ortogonal do plano v . Como uma consequência do teorema de genericidade de Montaldi temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Seja $W \subset J^k(M, \mathbb{R}^2)$ uma subvariedade $\mathcal{A}$ -invariante. Então para um conjunto residual de imersões de M em $\mathbb{R}^4$ a aplicação k -jato*

$$j_1^k \Pi : M \times G(2, 4) \rightarrow J^k(M, \mathbb{R}^2)$$

é transversal a W .

Prova. O ponto principal aqui é que a aplicação $\Pi_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma submersão para cada ponto $v \in G(2, 4)$. Então a família $\Pi : M \times G(2, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é $\mathcal{A}$ -versal. Esta é a hipótese exigida para se aplicar o teorema de Montaldi. $\square$

Como consequência do teorema 4.1 segue que as singularidades que podem ocorrer para a família Π são aquelas de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 4 ($= \dim G(2, 4)$), ou ainda famílias modais de $\mathcal{A}$ -órbitas cuja reunião forme uma variedade $\mathcal{A}$ -invariante W de codimensão no máximo 4. Estas singularidades são descritas no próximo corolário.

Corolário 4.2. *Para uma imersão genérica $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ temos:*

1. *as singularidades locais de corank 1 que podem ocorrer para a família Π são dadas na tabela 4.1, onde formas normais e respectivas $\mathcal{A}_e$ -codimensões (codimensão do estrato no caso de germes não-simples) são fornecidas.*
2. *as singularidades simples de corank 2 que podem ocorrer são listadas na tabela 4.2, com respectivas formas normais e $\mathcal{A}_e$ -codimensões.*
3. *as singularidades multilocais de codimensão 1 que podem ocorrer são uma interseção transversal de dobras; um par de dobras tangentes; ponto triplo de dobras duas a duas transversais; uma dobra e uma cúspide transversais.*

<i>tipo</i>	<i>forma normal</i>	<i>$\mathcal{A}_e$-cod</i>
1	(x, y)	0
2	(x, y^2)	0
3	$(x, xy + y^3)$	0
4, 4_k	$(x, y^3 \pm x^k y), (2 \leq k \leq 5)$	$k - 1$
5	$(x, xy + y^4)$	1
6	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	2
7	$(x, xy + y^5)$	3
8	$(x, xy + y^6 \pm y^8 + \alpha y^9)$	3
9	$(x, xy + y^6 + y^9)$	4
10	$(x, xy + y^7 \pm y^9 + \alpha y^{10} + \beta y^{11})$	4
11, 11_{2k+1}	$(x, xy^2 + y^4 + y^{2k+1}), (2 \leq k \leq 4)$	k
12	$(x, xy^2 + y^5 + y^6)$	3
13	$(x, xy^2 + y^5 \pm y^9)$	4
15	$(x, xy^2 + y^6 + y^7 \pm \alpha y^9)$	4
16	$(x, x^2 y + y^4 \pm y^5)$	3
17	$(x, x^2 y + y^4)$	4
18	$(x, x^2 y + xy^3 + \alpha y^5 + y^6 + \beta y^7)$	4
19	$(x, x^3 y + \alpha x^2 y^2 + y^4 x^3 y^2)$	4

Tabela 4.1: Germes de corank 1 de $\mathcal{A}_e$ -cod ≤ 4

Observação 4.1. 1. *Os germes de $\mathcal{K}$ -tipo A_2 e A_3 listados na tabela 4.1 foram classificados por du Plessis em [30] e a lista completa de germes de $\mathcal{A}$ -codimensão ≤ 6 foi obtida por Rieger em [31]. Já os germes da tabela 4.2 foram classificados por Rieger e Ruas em [32].*

<i>tipo</i>	<i>forma normal</i>	$\mathcal{A}_e\text{-cod}$
$\mathbf{I}_{2,2}^{1,1}$	$(x^2 + y^3, y^2 + x^3)$	2
$\mathbf{I}_{2,2}^{2,1}$	$(x^2 + y^5, y^2 + x^3)$	3
$\mathbf{I}_{2,2}^{3,1}$	$(x^2 + y^7, y^2 + x^3)$	4
$\mathbf{I}_{2,2}^{2,2}$	$(x^2 + y^5, y^2 + x^5)$	4
$\mathbf{II}_{2,2}^1$	$(x^2 - y^2 + x^3, xy)$	2
$\mathbf{II}_{2,2}^2$	$(x^2 - y^2 + x^5, xy)$	4

Tabela 4.2: Germes simples de corank 2 e $\mathcal{A}_e\text{-cod} \leq 4$

2. Os germes de tipo 2, 3 na tabela 4.1 são chamados, respectivamente, de dobra e cúspide e são estáveis. O germe 4 é denominado beaks/lips (dependendo do sinal). O germe 5 é conhecido como rabo de andorinha.

Proposição 4.3. *Seja M uma superfície regular em $\mathbb{R}^4$.*

1. *Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico para a aplicação Π_v se, e somente se, a interseção do plano tangente a M em p com o complemento ortogonal do plano v , que indicaremos por $v^\perp$, é diferente de zero, isto é existe um vetor tangente não-nulo $u \in T_p M$ tal que $u \in v^\perp$.*
2. *O ponto p é um ponto de dobra se, e somente se, o contato entre M e $v^\perp$ é de tipo A_1 em p . Se o contato entre M e $v^\perp$ é de tipo A_2 então temos:*
 - (a) *se a aplicação Π_v é transversal a Σ^1 então a projeção tem uma cúspide em p .*
 - (b) *caso contrário, a projeção tem uma singularidade de tipo 4_k , $k \geq 2$.*
3. *Se o contato é de tipo A_3 temos:*
 - (a) *$\Pi_v \pitchfork \Sigma^1$ então a projeção tem uma singularidade de tipo rabo de andorinha.*
 - (b) *Se $\Pi_v \not\pitchfork \Sigma^1$ então a projeção tem uma singularidade de tipo 11_2 em p (ou pior).*
4. *as singularidades de corank 2 correspondem aos planos normais à superfície (ou seja, o contato agora é entre M e o seu plano tangente em p).*

Prova. 1. A aplicação $\Pi_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma submersão, e quando restrita a M obtemos uma aplicação $\Pi_v : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ e esta tem um ponto crítico em $p \in M$ se, e somente se, o núcleo da diferencial $d\Pi_v(p)$ é não nulo, ou seja, se, e somente

se existe um vetor tangente não nulo $u \in T_p M$ tal que $d\Pi_v(p)u = 0$. Mas $d\Pi_v(p)u = (\langle u, a \rangle, \langle u, b \rangle)$. Então p é ponto crítico de Π_v se, e somente se, o vetor tangente u pertence ao plano que é o complemento ortogonal do plano v .

2. Se o contato entre M e $v^\perp$ é de tipo A_2 então o a projeção deve ser equivalente ou a $(x, xy + y^3)$ (cúspide) ou a $(x, y^3 + x^k y)$, (4_k) , $2 \leq k \leq 5$. O resultado agora segue da observação abaixo. Uma aplicação do plano no plano de corank 1, da forma $(x, f(x, y))$, é transversal à Σ^1 se, e somente se,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) \neq 0 \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) \neq 0,$$

ou seja, se, e somente se, o 2-jato da aplicação em questão tem uma das formas (x, y^2) ou (x, xy) .

3. Se o contato é de tipo A_3 então a projeção Π_v deve ser $\mathcal{K}$ -equivalente a (x, y^4) . Nestas condições Π_v é transversal a Σ^1 se, e somente se, $\Pi_v \sim (x, xy + y^4)$.
4. Um ponto $p \in M$ é uma singularidade de corank 2 de Π_v se, e somente se, $d\Pi_v(p) \cong 0$, ou seja, o núcleo de $d\Pi_v(p)$ é o plano tangente de M , e portanto o plano v é o plano normal $N_p M$.

□

Na seções seguintes vamos descrever um pouco da geometria desta família, refinando a proposição 4.3. Começamos estudando as singularidades de corank 1.

4.2 Singularidades de corank 1

Vamos, como sempre, considerar a superfície M na forma de Monge em torno de um ponto $p \in M$, o qual ainda podemos supor que seja a origem do $\mathbb{R}^4$. Assim, escrevemos M localmente como $(x, y, f(x, y), g(x, y))$, com $f, g \in \mathcal{M}_2^2$. Escolhamos também um plano $v \in G(2, 4)$ gerado, digamos, pelos vetores unitários a e b . Pela proposição 4.3 pelo menos um destes vetores deve ser normal a M em p . Suponhamos que $b \in N_p M$. Então b pode ser escrito na forma $b = (0, 0, b_1, b_2)$. Como estamos interessados, por enquanto, somente nas singularidades de corank 1 podemos supor ainda que $a \in T_p M$ e, portanto, a pode ser escrito na forma $a = (a_1, a_2, 0, 0)$. Assim, a projeção que vamos estudar é dada por

$$(x, y) \mapsto (a_1 x + a_2 y, b_1 f(x, y) + b_2 g(x, y)).$$

Suponhamos que $j^2 f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ e $j^2 g = ex^2 + 2fxy + gy^2$. Então o 2-jato da projeção Π_v é dado por

$$(a_1x + a_2y, b_1(ax^2 + 2bxy + cy^2) + b_2(ex^2 + 2fxy + gy^2)).$$

Esta projeção será singular se sua matriz jacobiana assim o for, isto é, se

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 2b_1(ax + by) + 2b_2(ex + fy) & 2b_1(bx + cy) + 2b_2(fx + gy) \end{vmatrix} = 0$$

$$= (a_1b_1b + a_1b_2f - a_2b_1a - a_2b_2e)x + (a_1b_1c + a_1b_2g - a_2b_1b - a_2b_2f)y = 0.$$

Esta singularidade será transversal a Σ^1 se, e somente se,

$$a_1b_1b + a_1b_2f - a_2b_1a - a_2b_2e \neq 0 \text{ ou}$$

$$a_1b_1c + a_1b_2g - a_2b_1b - a_2b_2f \neq 0$$

Assim, se Π_v não é transversal a Σ^1 então devemos ter

$$a_1b_1b + a_1b_2f - a_2b_1a - a_2b_2e = 0$$

$$a_1b_1c + a_1b_2g - a_2b_1b - a_2b_2f = 0$$

e estas equações determinam o seguinte sistema linear nas variáveis (a_1, a_2) :

$$\begin{bmatrix} b_1b + b_2f & -(b_1a + b_2e) \\ b_1c + b_2g & -(b_1b + b_2f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema tem uma solução não trivial (a_1, a_2) se, e somente se, sua matriz de coeficientes tem determinante igual a zero, isto é, se, e somente se,

$$-(b_1b + b_2f)^2 + (b_1a + b_2e)(b_1c + b_2g) = 0,$$

ou seja,

$$(ac - b^2)b_1^2 + (ag + ec - 2bf)b_1b_2 + (eg - f^2)b_2^2 = 0.$$

Mas esta é exatamente a condição para a função altura na direção do vetor $(0, 0, b_1, b_2)$ ser degenerada. Em outras palavras, o vetor $(0, 0, b_1, b_2)$ é uma direção binormal. De fato, a forma Hessiana da função altura

$$b_1(ax^2 + 2bxy + cy^2) + b_2(ex^2 + 2fxy + gy^2)$$

é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} b_1a + b_2e & b_1b + b_2f \\ b_1b + b_2f & b_1c + b_2g \end{bmatrix},$$

e o seu determinante é aquele dado acima. Observe ainda que como o vetor (a_1, a_2) é solução do sistema acima então o vetor $(-a_2, a_1)$ é uma direção assintótica de M em p e esta direção assintótica deve estar no complemento ortogonal do plano v . Em outras palavras o plano $v^\perp$, que é o núcleo da projeção Π_v , deve conter uma direção assintótica. Provamos assim o seguinte lema:

Lema 4.4. *Se Π_v não é transversal a Σ^1 então v deve conter uma direção binormal e, dualmente, $v^\perp$ deve conter uma direção assintótica.*

Uma consequência imediata é o seguinte teorema.

Teorema 4.5. *1. Em um ponto hiperbólico existem dois planos degenerados cuja projeção é de tipo 4_2 (ou pior).*

2. Em um ponto elíptico só ocorrem singularidades transversais a Σ^1 .

3. Em um ponto parabólico existe um único plano cuja projeção é de tipo 4_2 (ou pior).

Prova. A demonstração segue imediatamente da proposição 4.3 e do lema 4.4. De fato, pelo lema 4.4 Π_v é não transversal a Σ^1 em p se, e somente se, p é um ponto hiperbólico ou parabólico de M e, além disso, v deve conter uma direção binormal. Assim, vemos que em um ponto hiperbólico (resp. parabólico) devem existir dois (resp. apenas um) planos degenerados com Π_v não-transversal a Σ^1 . Por outro lado, de acordo com a proposição 4.3 se Π_v não é transversal a Σ^1 então ela deve ser de tipo 4_2 ou pior. A afirmação sobre os pontos elípticos também é clara. $\square$

Vamos agora nos restringir aos pontos hiperbólicos de M , e olhar para aquelas projeções que são do tipo beaks/lips (ou seja, $4_{\geq 2}$). Em um tal ponto podemos escrever M localmente na forma $(x, y, x^2 + O(3), y^2 + O(3))$. Um dos planos de projeção degenerada é o plano gerado pelos vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 1, 0)$. Escrevendo a parte cúbica da terceira componente de M como $r_0x^3 + 3r_1x^2y + 3r_2xy^2 + r_3y^3$ o 3-jato da projeção é então dado por

$$(x, x^2 + r_0x^3 + 3r_1x^2y + 3r_2xy^2 + r_3y^3),$$

que é claramente equivalente a

$$(x, 3r_1x^2y + 3r_2xy^2 + r_3y^3).$$

Se a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$, ou seja a função $f(x, y)$, tem uma singularidade de tipo A_2 então devemos ter $r_3 \neq 0$. Neste caso, a mudança de coordenadas $Y = y + (r_2/r_3)x$, $X = x$ transforma o 3-jato acima em

$$(X, \frac{3}{r_3}(r_1r_3 - r_2^2)X^2Y + r_3Y^3),$$

e teremos então uma singularidade beaks/lips genuína (4_2 na tabela 4.1) se, e somente se, $r_1 r_3 - r_2^2 \neq 0$. Se $r_1 r_3 - r_2^2 = 0$ teremos uma singularidade de tipo $4_{\geq 3}$. Ora, se voltarmos um pouco para o capítulo anterior, veremos que a condição $r_1 r_3 - r_2^2 \neq 0$ com $r_3 \neq 0$ para se ter uma singularidade de tipo 4_2 é a mesma condição exigida para que o ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$ fosse um ponto hiperbólico (ou elíptico) da componente $Bif(H, A_2)$ do conjunto de bifurcação da família de funções altura. Na verdade, se este ponto for elíptico teremos $r_1 r_3 - r_2^2 > 0$ e a projeção será então equivalente a $(x, y^3 + x^2 y)$ ao passo que se o ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$ for um ponto hiperbólico a projeção será equivalente a $(x, y^3 - x^2 y)$. A condição $r_1 r_3 - r_2^2 = 0$ necessária para que se tenha uma singularidade $4_{\geq 3}$ significa que $(0 : 0 : 1 : 0)$ é um ponto parabólico de $Bif(H, A_2)$.

Esta simples observação nos sugere que deve haver um relacionamento mais profundo entre os conjuntos de bifurcação das famílias de projeção em plano e de funções altura. Vamos denotar por $Bif(\Pi, 4_2)$ a componente do conjunto de bifurcação da família de projeção em planos correspondente às projeções de tipo 4_2 (beaks/lips). Assim, do que vimos acima temos que se v é um plano em $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores a e b , com $a \in T_p M$ e $b \in N_p M$ então $v \in Bif(\Pi, 4_2)$ se, e somente se, o vetor b é um ponto elíptico ou hiperbólico de $Bif(H, A_2)$.

Para melhor entendermos o relacionamento entre $Bif(H, A_2)$ e $Bif(\Pi, 4_2)$ observemos que um elemento $v \in G(2, 4)$, que é um plano pela origem em $\mathbb{R}^4$, pode ser visto como uma reta no espaço projetivo 3-dimensional $\mathbb{P}(= G(1, 4))$. Esta reta, por sua vez, determina uma reta no espaço projetivo dual $\mathbb{P}^*(= G(3, 4))$ (que é a "reta" de hiperplanos contendo a reta dada). O resultado a seguir usa estas identificações para relacionar os conjuntos $Bif(\Pi, 4_2)$ e $Bif(H, A_2)$. Podemos dizer que, de um certo modo, o teorema a seguir é também um resultado de "dualidade" entre $Bif(H, A_2)$ e $Bif(\Pi, 4_2)$. Assim, temos um interrelacionamento entre as três famílias de projeções.

Teorema 4.6. 1. *Se uma reta L em $\mathbb{P}^*$ é tangente a $Bif(H, A_2) (\subset G(3, 4))$ então ela determina um plano em $\mathbb{R}^4$, que é um ponto de $G(2, 4)$, com a correspondente projeção Π_L tendo uma singularidade beaks/lips (ou pior).*

2. *Reciprocamente se a projeção Π_L tem uma singularidade beaks/lips em um ponto $p \in M$, então a correspondente reta em $\mathbb{P}^*$ é tangente a $Bif(H, A_2)$.*

3. *Uma reta L tem contato de tipo exatamente A_1 com $Bif(H, A_2)$ se, e somente se, a correspondente projeção tem uma singularidade beaks/lips genuína (ou seja, exatamente de tipo 4_2).*

Prova. 1) Escrevamos como de costume M em sua forma de Monge $(x, y, f(x, y), g(x, y))$ no ponto $p = (0, 0, 0, 0)$ em questão, onde $f, g \in \mathcal{M}_2^2$. Queremos mostrar que uma reta tangente a $Bif(H, A_2)$ determina um plano em $\mathbb{R}^4$ com a correspondente projeção tendo uma singularidade de tipo beaks/lips (ou pior). Vamos supor que o ponto em $Bif(H, A_2)$ seja $(0 : 0 : 1 : 0)$ e então a correspondente função altura é $f(x, y)$. Suponhamos também que $j^3 f = x^2 + r_0 x^3 + 3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3$, com $r_3 \neq 0$. Fazendo mudanças lineares de coordenadas na fonte e na meta podemos supor ainda que $j^2 g = x^2 + y^2$ (o ponto $p \in M$ é um ponto hiperbólico). Queremos agora calcular o plano tangente a $Bif(H, A_2)$ no ponto $(0, 0, 1, 0)$. No capítulo anterior foi calculada, na demonstração do teorema 3.6, uma expressão local para o conjunto $Bif(H, A_2)$. Cálculos inteiramente análogos àqueles feitos lá nos dão a seguinte expressão local para $Bif(H, A_2)$,

$$\begin{aligned}\alpha &= -2x + O(2) \\ \beta &= -3r_1 x^2 + 3r_3 y^2 + O(3) \\ \delta &= -3(r_2 x + r_3 y) + O(2),\end{aligned}$$

onde $(\alpha : \beta : \gamma : \delta)$ denota um ponto de $Bif(H, A_2)$ próximo a $(0 : 0 : 1 : 0)$. Também, estamos supondo (localmente) que $\gamma = 1$. O fato crucial aqui é que β é de segunda ordem. Então o plano tangente a $Bif(H, A_2)$ em $(0 : 0 : 1 : 0)$ é dado por $\beta = 0$.

Escolhamos agora uma reta L tangente a $Bif(H, A_2)$ no ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$. Então L deve ser da forma

$$\beta = a\alpha + d\delta = 0 \subset \mathbb{P}^*.$$

Esta reta determina uma reta em $\mathbb{P}$: de fato, se $(\alpha : \beta : \gamma : \delta)$ representa o hiperplano $\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta t = 0$ (onde (u, v, w, t) são coordenadas em $\mathbb{R}^4$), a referida reta é a reta comum aos hiperplanos acima. Dois pontos sobre a reta L são $(0 : 0 : 1 : 0)$ e $(-d : 0 : 0 : a)$, que representam os hiperplanos $w = 0$ e $-du + at = 0$. Agora, estes pontos juntos determinam uma projeção em $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$(u, v, w, t) \mapsto (-du + at, w).$$

Compondo com a inclusão da superfície $M \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ obtemos a projeção

$$(x, y) \mapsto (-dx + ag(x, y), f(x, y)),$$

e assumindo $d \neq 0$ mudamos coordenadas na fonte fazendo $X = -dx + O(2)$ para obter

$$(X, 3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3)$$

que pertence ao fecho do conjunto $Bif(\Pi, 4_2)$. Se $d = 0$ teremos uma singularidade de corank 2.

2) Agora estabelecemos a recíproca. Assim, se a projeção $M^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tem uma singularidade $4_{\geq 2}$ queremos mostrar que a correspondente reta em $\mathbb{P}^*$ é tangente a $Bif(H, A_2)$.

Podemos supor, mudando coordenadas se necessário, que a projeção é dada por $(u, v, w, t) \mapsto (u, w)$ e que a superfície é dada por $(x, y, f(x, y), g(x, y))$, com $f, g \in \mathcal{M}_2^2$. Como a projeção $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ tem uma singularidade de tipo beaks/lips ($4_{\geq 2}$) então devemos ter $f(x, y) = a_0 x^2 + O(3)$ com $a_0 \neq 0$. O núcleo desta projeção é gerado pelos vetores $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$, e este núcleo determina a reta projetiva $u = w = 0$. O pencil de hiperplanos contendo esta reta é da forma $au + bw = 0$. Portanto a reta em $\mathbb{P}^*$ liga os pontos $(1 : 0 : 0 : 0)$ e $(0 : 0 : 1 : 0)$, ou seja, ela é dada por $\beta = \delta = 0$. É claro que $(0 : 0 : 1 : 0) \in Bif(H, A_2)$, e dos cálculos feitos na parte (1) da prova segue que a reta acima é tangente a $Bif(H, A_2)$ no ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$.

3) Pelo que vimos acima o plano $u = w = 0$ determina uma reta em $\mathbb{P}^*$ tangente a $Bif(H, A_2)$ no ponto $(0 : 0 : 1 : 0)$. Esta reta é dada por $\beta = \delta = 0$ e o seu contato com o conjunto $Bif(H, A_2)$ é medido pela aplicação

$$(x, y) \mapsto (\beta(x, y), \delta(x, y)).$$

Nos cálculos da parte 1) da prova mostramos que o 3-jato da projeção é equivalente a

$$(x, 3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3),$$

e sendo $r_3 \neq 0$ podemos fazer a seguinte mudança de coordenadas $y = Y - (r_2/r_3)x$, $X = x$ para obter

$$(X, \frac{3}{r_3}(r_1 r_3 - r_2^2)X^2 Y + r_3 Y^3),$$

e este dá uma singularidade beaks/lips genuína, ou seja exatamente de tipo 4_2 , se, e somente se, $r_1 r_3 - r_2^2 \neq 0$. Por outro lado, a aplicação de contato é dada localmente por

$$(x, y) \mapsto (3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3, -3(r_2 x + r_3 y))$$

e pondo $y = Y - (r_2/r_3)x$ (ou seja, fazendo a mesma mudança de coordenadas que fizemos acima), esta se torna equivalente a

$$((r_1 r_3 - r_2^2)x^2 + 2r_2 x Y, Y).$$

Assim, a reta $\beta = \delta = 0$ tem contato exatamente A_1 com $Bif(H, A_2)$ se, e somente se, $r_1 r_3 - r_2^2 \neq 0$, ou seja, se, e somente se, a projeção é um beaks/lips genuíno. Dos cálculos acima podemos também concluir a reta $\beta = \delta = 0$ é uma reta assintótica (ou seja, o contato é de tipo $A_{\geq 2}$) se, e somente se, a projeção é de tipo $4_{\geq 3}$. $\square$

Os próximos resultados tratam do caso multilocal. Queremos agora, relacionar também os estratos multilocais das famílias de projeções, pelo menos, os estratos de codimensão 1. Vamos denotar por DT (forma abreviada para dobras tangentes) a componente de $Bif(\Pi)$ correspondente às projeções de tipo dobra tangente. O primeiro passo para estabelecer o resultado de *dualidade* que procuramos é caracterizar geometricamente os espaços tangentes aos conjuntos $Bif(H, 2A_1)$ para funções altura e $Bif(P, A_1)$ para projeções em 3-espaços (ver capítulo anterior). As duas proposições a seguir se verificam não só para superfícies em $\mathbb{R}^4$ mas para qualquer subvariedade k -dimensional imersa num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Proposição 4.7. *O espaço tangente a $Bif(H, 2A_1)$ pode ser descrito geometricamente como segue: existem dois pontos $p, q \in M$ e um hiperplano K com $T_p M \subset K$ e $T_q M \subset K$. Estes dois pontos são ligados por uma reta L , e consideramos então o conjunto de todos os hiperplanos contendo L . Isto nos dá um espaço projetivo $(n-2)$ -dimensional $\mathbb{P}^{n-2}$ que é o requerido espaço tangente.*

Prova. Seja $p = (0, 0, \dots, 0)$ e $q = (0, \dots, 0, 1)$. Vamos supor que o hiperplano $x_1 = 0$ é tangente a M em p e q . Assim, no ponto p , M é dada localmente por

$$u \mapsto (f_1(u), f_2(u), \dots, f_n(u))$$

com f_1 singular em 0. Analogamente, M é dada localmente em q por

$$v \mapsto (g_1(v), \dots, g_n(v) + 1),$$

com g_1 singular em 0. Agora vamos determinar as condições para um hiperplano ser bitangente. Se o hiperplano é dado por

$$x_1 + \sum_{j=2}^n \beta_j x_j + \gamma = 0$$

então devemos ter

$$\begin{aligned}
f_1(u) + \sum_{j=2}^n \beta_j f_j(u) + \gamma &= g_1(v) + \sum_{j=2}^{n-1} \beta_j g_j(v) + \beta_n (g_n(v) + 1) + \gamma, \\
\frac{\partial f_1}{\partial u_s} + \sum_{j=2}^n \beta_j \frac{\partial f_j}{\partial u_s} &= 0, \\
\frac{\partial g_1}{\partial v_s} + \sum_{j=2}^n \beta_j \frac{\partial g_j}{\partial v_s} &= 0,
\end{aligned}$$

com $1 \leq s \leq k$, onde $k = \dim M$. Estas equações determinam um conjunto $Z \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-1}$ (ignorando γ) de dimensão $2k + n - 1 - (2k + 1) = n - 2$. Queremos calcular o espaço tangente a este conjunto Z em $u = v = 0, \beta = 0$. Mas se um conjunto $Z \subset \mathbb{R}^l$ é dado por um conjunto de m equações $F_1(u_1, \dots, u_p) = \dots = F_m(u_1, \dots, u_p) = 0$ então seu espaço tangente em um ponto z é o núcleo da matriz jacobiana da aplicação $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $F(u_1, \dots, u_p) = (F_1(u_1, \dots, u_p), \dots, F_m(u_1, \dots, u_p))$, calculada em z . Assim, o plano tangente a Z em $u = v = \beta = 0$, é o núcleo da matriz

$$T = \begin{bmatrix} A_{k \times k} & 0_{k \times k} & X_{k \times (n-1)} \\ 0_{k \times k} & B_{k \times k} & Y_{k \times (n-1)} \\ 0_{1 \times k} & 0_{1 \times k} & 0_{1 \times (n-2)} \quad -1 \end{bmatrix},$$

onde

$$A = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_i \partial u_j} \right),$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial v_i \partial v_j} \right),$$

$$X = \left(\frac{\partial f_j}{\partial u_s} \right)$$

e

$$Y = \left(\frac{\partial g_j}{\partial v_s} \right).$$

Um vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-1}$ pertence ao núcleo de T se, e somente se, $Aa + Xc = 0$, $Bb + Yc = 0$ e $c_n = 0$ (onde $c = (c_2, c_3, \dots, c_n)$). Agora se o contato é de tipo A_1 em p e também em q então as matrizes A e B são inversíveis e portanto $a = -A^{-1}(Xc)$, $b = -B^{-1}(Yc)$, e $c_n = 0$. Assim, após projetar no espaço de β vemos que o espaço tangente a $Bif(H, 2A_1)$ é dado por $\beta_n = 0$. Mas $x_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \beta_j x_j = 0$ é o conjunto de hiperplanos contendo p and q . $\square$

Proposição 4.8. *Seja $Bif(P, A_1)$ o estrato de imagens tangentes para a família de projeções $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Então o espaço tangente a $Bif(P, A_1)$ consiste do conjunto de retas contidas no hiperplano gerado pela reta ligando o par de pontos e seus espaços tangentes.*

Prova. Pelo resultado de dualidade do capítulo anterior (teorema 3.6) o espaço tangente a $Bif(P, A_1)$ corresponde a pontos de $Bif(H, 2A_1)$ e vice-versa. Dado um ponto de $Bif(P, A_1)$ existem dois pontos $p, q \in M$ (os pontos de bitangência); estes pontos estão sobre a reta L que os une. Esta reta por sua vez é tal que $L + T_p M + T_q M \neq \mathbb{R}^n$. Assim, os espaços $T_p M$ e $T_q M$ estão contidos em um hiperplano K passando através de p e q . Agora, o espaço tangente a $Bif(H, 2A_1)$ em K é o conjunto de todos os hiperplanos contendo L e então o espaço tangente a $Bif(P, A_1)$ em L é o conjunto de retas em K . $\square$

Agora podemos estabelecer o novo resultado de dualidade.

Teorema 4.9. *Se $K \in DT$ então a correspondente reta $K^* \in \mathbb{P}$ é tangente a $Bif(P, A_1)$.*

Prova. Seja K um ponto do estrato DT , isto é, K é tangente a M em dois pontos, digamos em $p, q \in M$. Assim, K contém a reta L ligando p e q . Mas L é um ponto do conjunto $Bif(P, A_1)$, e então K determina uma reta K^* em $\mathbb{P}$, que de acordo com a proposição 4.8 deve ser tangente a $Bif(P, A_1)$ em L . $\square$

4.3 Singularidades de corank 2

Nesta seção vamos voltar nossa atenção para aquelas projeções que apresentam singularidades de corank 2. Os tipos genéricos de singularidades simples que podem ocorrer aqui são dados na tabela 4.1. Lembremos que, de acordo com a proposição 4.3, $p \in M$ é uma singularidade de corank 2 para Π_v quando o plano de projeção é normal a M em p . Assim, escrevendo, como sempre, M na forma $(x, y, f(x, y), g(x, y))$, com $f, g \in \mathcal{M}_2^2$, a projeção será dada por

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y)).$$

A primeira coisa que queremos fazer é determinar a parte inicial do germe desta projeção. Para isto temos a seguinte proposição.

Proposição 4.10. *1. Se $p \in M$ não é um ponto de inflexão então a correspondente projeção de M sobre seu plano normal $N_p M$ tem 2-jato equivalente a (x^2, y^2) (em um ponto hiperbólico), $(xy, x^2 - y^2)$ (em um ponto elíptico) ou (xy, x^2) (em um ponto parabólico).*

2. Se p é um ponto de inflexão o 2-jato da projeção é equivalente a $(xy, 0)$, $(x^2 + y^2, 0)$, $(x^2, 0)$ ou $(0, 0)$.

Prova. A prova segue diretamente da classificação de pares de formas quadráticas (ver por exemplo [16]). $\square$

Teorema 4.11. 1. Em um ponto hiperbólico de M a projeção de M em seu plano normal $N_p M$ será equivalente a um germe do tipo $I_{2,2}^{l,m}$ com $3 \geq l \geq m \geq 1$ (ver tabela 4.2). A projeção tem uma singularidade $I_{2,2}^{1,1}$ em p se, e somente se, os hiperplanos osculadores a M em p têm contato exatamente A_2 com M em p . Se um destes hiperplanos tem contato de tipo A_3 (ou pior) com a superfície, então a singularidade da projeção em p é de tipo $I_{2,2}^{2,1}$ (ou pior).

2. Em um ponto elíptico ocorrerão somente as singularidades de tipo $II_{2,2}^l$, com $l=1$, ou 2 (ver tabela 4.2).

3. Em um ponto parabólico as singularidades envolvidas têm K -tipo $I_{2,m}$ com $m \geq 3$ e estas são não-simples.

Prova. Que as singularidades envolvidas são as citadas pelo teorema segue da proposição 4.10 e do corolário 4.2.

Suponhamos agora que estamos em um ponto hiperbólico e portanto a forma normal da superfície pode ser dada localmente por $(x, y, x^2 + r_0 x^3 + 3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3 + O(4), y^2 + s_0 x^3 + 3s_1 x^2 y + 3s_2 x y^2 + s_3 y^3 + O(4))$. Assim, o 3-jato da projeção é dado por

$$(x^2 + r_0 x^3 + 3r_1 x^2 y + 3r_2 x y^2 + r_3 y^3, y^2 + s_0 x^3 + 3s_1 x^2 y + 3s_2 x y^2 + s_3 y^3),$$

e esta tem uma singularidade de tipo $I_{2,2}^{1,1}$ se, e somente se $r_3 \neq 0$ e $s_0 \neq 0$ (mais detalhes, principalmente com relação aos cálculos envolvidos na redução deste 3-jato à referida forma normal podem ser encontrados em [32]). Isto equivale a dizer que as funções altura nas direções binormais a M em p são de tipo A_2 , ou seja, o contato entre M e os hiperplanos osculadores determinados por estas direções é de tipo A_2 . Por outro lado, se $r_3 = 0$ ou $s_0 = 0$, (e portanto pelo menos uma das funções altura degeneradas é de tipo $A_{\geq 3}$) então a projeção terá uma singularidade de tipo $I_{2,2}^{2,1}$ ou $I_{2,2}^{2,2}$, e reciprocamente.

Já em um ponto elíptico (ou seja, $\Delta(p) > 0$), p é um ponto de Morse para qualquer função altura. A projeção de M em seu plano normal terá uma singularidade de tipo $II_{2,2}^1$ ou $II_{2,2}^2$.

Em um ponto parabólico o 2-jato da projeção é equivalente a (xy, x^2) . De acordo com Rieger e Ruas [32], qualquer germe sobre este 2-jato será não-simples. $\square$

- Observação 4.2.** 1. *Pelo teorema de transversais completas e também do lema de Mather, segue que os 3-jatos relevantes sobre o 2-jato (xy, x^2) são: $(xy, x^2 + y^3)$, $(xy, x^2 + xy^2)$ e (xy, x^2) . O germe $(xy, x^2 + y^3)$, de acordo com Gaffney e Mond [14], é finitamente determinado e, além disso, todos os germes $\mathcal{A}$ -finitamente determinados na $\mathcal{K}$ -órbita $\mathcal{K}(xy, x^2 + y^3)$ são topologicamente $\mathcal{A}$ -equivalentes; em outras palavras existe um único tipo topológico nesta $\mathcal{K}$ -órbita. A codimensão deste estrato é 3.*
2. *Seria também interessante encontrar uma interpretação geométrica para distinguir entre os pontos elípticos de M de tipo $II_{2,2}^1$ e $II_{2,2}^2$.*

Capítulo 5

Classificação de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência

Nosso objetivo neste capítulo é classificar germes de aplicações de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob a ação do grupo de equivalências $\mathcal{A}_\delta$, que passamos a descrever a seguir. Esta classificação nos permitirá estudar um pouco da geometria de superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$ e também estender os resultados de dualidade para este contexto.

O grupo de equivalências $\mathcal{A}_\delta$ é um subgrupo do grupo $\mathcal{A}$ definido por $\mathcal{A}_\delta = \mathcal{R}_\delta \times \mathcal{L}$, onde $\mathcal{R}_\delta$ é o grupo de germes de difeomorfismos $h : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ que preservam a reta $y = 0$, isto é, que preservam o eixo- x , e $\mathcal{L}$ é o grupo usual de mudanças de coordenadas na meta. Dizemos então que dois germes $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ são $\mathcal{A}_\delta$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h \in \mathcal{R}_\delta$ e $k \in \mathcal{L}$ tais que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2, 0 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^3, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^2, 0 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^3, 0 \end{array}$$

Consideremos então um elemento $(h, k) \in \mathcal{A}_\delta$, isto é, com $h \in \mathcal{R}_\delta$ e $k \in \mathcal{L}$. Observe que as mudanças de coordenadas na meta são livres. Já a mudança de coordenadas na fonte $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ deve ter a propriedade que $h_2(x, 0)$ seja identicamente nula e, portanto podemos escrever $h_2(x, y) = y\tilde{h}_2(x, y)$ para alguma função diferenciável $\tilde{h}_2$. Como h é um difeomorfismo local, devemos ter

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(0, 0)\tilde{h}_2(0, 0) \neq 0.$$

Como usual dizemos que um germe $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ é k - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado se qualquer outro germe $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ com $j^k f = j^k g$ é $\mathcal{A}_\delta$ -equivalente a f (isto é, está na mesma $\mathcal{A}_\delta$ -órbita de f). Passemos agora a descrever o $\mathcal{A}_\delta$ -espaço tangente de um germe $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$.

Como as mudanças de coordenadas permitidas na meta são arbitrárias a componente $\mathbf{TL}f$ permanecerá a mesma que a do $\mathcal{A}$ -espaço. Na fonte, no entanto, as mudanças de coordenadas permitidas devem preservar o eixo- x , o qual vamos denotar com a letra maiúscula X . Seja $\theta(X)$, o conjunto de campo de vetores tangentes ao eixo- x . É facilmente visto que $\theta(X)$ é o $\mathcal{E}_2$ -módulo gerado por $\partial/\partial x$, $y\partial/\partial y$. Assim, definimos então $\mathbf{TA}_\delta f$ por

$$\mathbf{TA}_\delta f = tf(\mathcal{M}_2\theta(2) \cap \theta(X)) + \mathbf{TL}f.$$

De uma forma mais explícita podemos escrever

$$\mathbf{TL}f = f^*\mathcal{M}_3\{e_1, e_2, e_3\}, \text{ e}$$

$$tf(\mathcal{M}_2\theta(2) \cap \theta(X)) = \mathcal{E}_2\{x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\}, \text{ isto é,}$$

o $\mathcal{E}_2$ -módulo gerado por estes três elementos. Assim,

$$\mathbf{TA}_\delta f = \mathcal{E}_2\{x\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial x}, y\frac{\partial f}{\partial y}\} + f^*\mathcal{M}_3\{e_1, e_2, e_3\},$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

A técnica que seguiremos para levar a cabo a classificação é o método indutivo de classificação via jatos até que um jato suficiente (e portanto um germe finitamente determinado) seja obtido. Para tanto usaremos o método das transversais completas e também os resultados sobre determinação finita descritos no capítulo 1 deste trabalho. Este método de classificação de singularidades funciona para uma classe bastante abrangente de subgrupos de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{A}$, incluindo aí os subgrupos ‘geométricos de Damon’ [13]. Se X é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, o grupo $\mathcal{R}(X)$ de mudanças de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ que preservam esta subvariedade é um destes subgrupos geométricos bem como o grupo $\mathcal{A}(X) = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{L}$. Assim, para o nosso caso específico, isto é, para $n = 2$, $p = 3$ e $X = \text{eixo} - x$ podemos extrair de [8] o seguinte resultado básico de classificação.

Proposição 5.1. *Seja σ um k -jato no espaço de jatos $J^k(2, 3)$. Seja ainda T um subespaço vetorial do espaço $H^{k+1}(2, 3)$ de jatos homogêneos de grau $k + 1$ tal que*

$$H^{k+1}(2, 3) \subset T + \mathbf{TA}_{\delta_1}^{k+1}\sigma.$$

Então qualquer $(k+1)$ -jato f com $j^k f = \sigma$ é $\mathcal{A}_{\delta_1}$ -equivalente a $\sigma + t$ para algum $t \in T$.

Os resultados de determinação finita dos quais faremos uso são variantes daqueles resultados mais gerais citados no capítulo 1. Estes resultados aparecem no artigo [7] de J.W. Bruce e P.J. Giblin onde eles consideram o mesmo grupo $\mathcal{A}_\delta$ mas para aplicações $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$. As provas dadas aqui são essencialmente as mesmas dadas pelos autores em [7]. Devido à sua importância para o nosso trabalho, reproduziremos aqui estas provas, que continuam válidas para o nosso caso.

Teorema 5.2. *Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}_\delta$ um subgrupo com $\mathcal{A}_{\delta_1} \subset \mathcal{U}$ e $J^1\mathcal{U}$ um grupo unipotente, e seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ um germe diferenciável de aplicação. Se*

$$\mathcal{M}_2^{r+1}\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{U}f \quad (5.1)$$

então f é r - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.

Prova. Este teorema é uma consequência dos resultados principais de [10] (mais particularmente do teorema 1.9 daquele artigo). Como $\mathbf{T}\mathcal{U}f \subset T\mathcal{A}_\delta f$, podemos deduzir que f é k - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado para algum k . Portanto basta mostrarmos que o espaço afim de k -jatos como o mesmo r -jato de f está contido na $J^k\mathcal{U}$ -órbita de $j^k f$. Isto pode ser feito da mesma forma que na prova do teorema 1.9 de [10] desde que possamos mostrar que $J^k\mathcal{U}$ é um grupo unipotente. Agora, da proposição 1.8 de [10] segue que só precisamos mostrar que $J^k\mathcal{U}$ é um subgrupo fechado de $J^k\mathcal{A}$, e isto segue da inclusão $\mathcal{A}_{\delta_1} \subset \mathcal{U}$ e do fato que $J^1\mathcal{A}_\delta$ é fechado. $\square$

Se $\mathcal{U} = \mathcal{A}_{\delta_1}$ podemos concluir que f é r - $\mathcal{A}_{\delta_1}$ -determinado. Para este caso temos uma condição mais fácil de ser verificada que garante que a condição 5.1 no teorema 5.2 esteja satisfeita. O resultado é o seguinte:

Corolário 5.3. *Se $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ satisfaz as condições*

$$\mathcal{M}_2^l\theta(f) \subset T\mathcal{R}_{\delta_e}f + f^*(\mathcal{M}_3)\theta(f) + \mathcal{M}_2^{l+1}\theta(f) \quad (5.2)$$

$$\mathcal{M}_2^{r+1}\theta(f) \subset T\mathcal{A}_{\delta_1}f + \mathcal{M}_2^{r+l+1}\theta(f), \quad (5.3)$$

então f é r - $\mathcal{A}_{\delta_1}$ -determinado.

Prova. As inclusões acima implicam que

$$\mathcal{M}_2^{r+1}\theta(f) \subset T\mathcal{A}_{\delta_1}f + \mathcal{M}_2^{r+1}\theta(f)(f^*\mathcal{M}_3\theta(2) + \mathcal{M}_2^{r+1})\theta(f),$$

e então aplicamos o lema 2.6 de [10] para deduzir que $\mathcal{M}_2^{r+1}\theta(f) \subset T\mathcal{A}_{\delta_1}f$. $\square$

5.1 Classificação

Iniciamos então o trabalho de classificação de singularidades. Trabalhando sempre no espaço de jatos $J^k(2, 3)$, o símbolo $\sim$ significará $J^k\mathcal{A}_\delta$ -equivalência. Estaremos preocupados somente com aqueles germes de aplicações de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ de corank 1 e $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão até no máximo 3. Dentre estes germes destacaremos aqueles germes que são simples sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência. Enfatizamos também que, eventualmente, durante o processo de classificação surgirão famílias infinitas de germes de aplicações e, portanto obteremos alguns germes cuja codimensão é maior que 3. Antecipamos então, neste ponto, os principais resultados deste capítulo, que estão contidos nos seguintes teoremas.

Teorema 5.4 (Classificação dos germes com $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão ≤ 3). *Se $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ é um germe finitamente $\mathcal{A}_\delta$ -determinado com $\mathcal{A}_{\delta_e}\text{-cod} f \leq 3$ então f é equivalente a um dos germes listados na tabela abaixo (tabela 5.1).*

A-tipo	nome	forma normal	codimensão
X-cap	X-cap	$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$	1
	1_1	$(x, y) \mapsto (y, x^2, xy \pm x^3)$	2
	2_1	$(x, y) \mapsto (y \pm x^3, x^2, xy)$	3
S	$S_{1,a}$	$(x, y) \mapsto (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y), a \neq -1, -3/4$	2^1
	S_1	$(x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y \pm y^3)$	3
	$\tilde{S}_1$	$(x, y) \mapsto (y, x^2, x^3 \pm xy^2)$	3
B	B_2	$(x, y) \mapsto (x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^5)$	3
H	H_2	$(x, y) \mapsto (x, xy \pm y^5, xy^2 + y^3)$	3

Tabela 5.1: Germes de $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão ≤ 3

Teorema 5.5 (Classificação dos germes simples). *Se $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ é um germe simples (sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência) então f é equivalente a um dos seguintes germes da tabela 5.2.*

Seguirá também da classificação o aparecimento de algumas famílias de germes finitamente determinados, além daquelas já explicitadas, as quais se acham destacadas na tabela 5.3.

Observação 5.1. *Durante todo este capítulo indicaremos pelas letras minúsculas x e y as coordenadas da fonte e com as letras maiúsculas X, Y e Z as coordenadas da meta.*

¹codimensão do estrato

	<i>germe</i>	$\mathcal{A}_\delta$ -cod
X-cap	$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$	1
1_k	$(x, y) \mapsto (y, x^2, xy \pm x^{2k+1})$	2k
2_k	$(x, y) \mapsto (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy)$	2k + 1

Tabela 5.2: Germes simples sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência

<i>nome</i>	<i>forma normal</i>	<i>codimensão</i>
S_k	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y), k \geq 1$	2k+1
$\tilde{S}_k$	$(y, x^2, x^3 \pm xy^{k+1}), k \geq 1$	k+2
$S_{k,l}$	$(x, y^2 \pm x^k y, y^3 \pm x^l y), 2 \leq k < l$	
$\tilde{B}_k$	$(x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^{2k+1}), k \geq 2$	k+1
B_k	$(x, y^2, x^2 y \pm y^{2k+1}), k \geq 2$	k+2

Tabela 5.3: Algumas famílias de germes $\mathcal{A}_\delta$ -determinadas

Para começar vamos classificar os 1-jatos.

Lema 5.6 (Classificação de 1-jatos). *Existem duas $\mathcal{A}_\delta^1$ -órbitas em $\Sigma^1(2, 3)$. São elas as órbitas de*

$$(x, 0, 0) \text{ e } (y, 0, 0).$$

Prova. Seja σ o 1-jato $\sigma(x, y) = (a_1x + a_2y, b_1x + b_2y, c_1x + c_2y)$. Se a matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

tem rank 2 então σ é equivalente ao 1-jato $(x, y, 0)$ o qual é claramente 1- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Se a matriz tem rank ≤ 1 então σ é equivalente a um dos

$$(x, 0, 0), (y, 0, 0) \text{ ou } (0, 0, 0),$$

este último sendo de corank 2. □

O nosso próximo passo, seguindo o método indutivo, é classificar os 2-jatos. Começaremos classificando os 2-jatos sobre o 1-jato $(x, 0, 0)$.

5.2 Germes sobre o 1-jato $(x, 0, 0)$

Lema 5.7 (Classificação de 2-jatos). *a) Existem cinco $\mathcal{A}_s^2$ -órbitas sobre o 1-jato $(x, 0, 0)$ em $J^2(2, 3)$, que são as órbitas dos jatos*

$$(x, y^2, xy), (x, y^2 + xy, 0), (x, y^2, 0),$$

$$(x, xy, 0) \text{ e } (x, 0, 0).$$

Prova. a) Consideremos o 1-jato $\sigma = (x, 0, 0)$ e encontremos uma transversal completa para σ em $J^2(2, 3)$ (ou simplesmente uma 2-transversal completa). Observemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = (1, 0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. O que temos que fazer é encontrar um complemento em $H^2(2, 3)$ para o espaço tangente $T\mathcal{A}_s^2\sigma$ que é gerado pelos 2-jatos dos elementos de $\mathcal{E}_2\{x\partial f/\partial x, y\partial f/\partial x, y\partial f/\partial y\} + f^*\mathcal{M}_3\{e_1, e_2, e_3\}$, isto é, pelos vetores $(x^2, 0, 0), (xy, 0, 0), (y^2, 0, 0), (0, x^2, 0), (0, 0, x^2)$. Neste caso um tal complemento é dado pelo espaço vetorial real T gerado pelos vetores $(0, xy, 0), (0, y^2, 0), (0, 0, xy), (0, 0, y^2)$. Portanto, uma 2-transversal completa para σ é dada pelo 2-jato $(x, a_1xy + a_2y^2, b_1xy + b_2y^2)$. Se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ a mudanças de coordenadas na meta $\bar{X} = X, \bar{Y} = b_2Y - a_2Z, \bar{Z} = a_1Z - b_1Y$, transforma este 2-jato em

$$(x, (a_1b_2 - a_2b_1)xy, (a_1b_2 - a_2b_1)y^2)$$

e este é claramente equivalente à

$$(x, xy, y^2). \quad (5.4)$$

Caso contrário a transversal completa acima é equivalente a $(x, a_1xy + a_2y^2, 0)$ (pois (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são proporcionais), e este pode ser reduzido a um dos seguintes

$$(x, xy + y^2, 0), \text{ se } a_1a_2 \neq 0 \quad (5.5)$$

$$(x, y^2, 0), \text{ se } a_1 = 0, a_2 \neq 0 \quad (5.6)$$

$$(x, xy, 0), \text{ se } a_1 \neq 0, a_2 = 0 \quad (5.7)$$

$$(x, 0, 0), \text{ se } a_1 = a_2 = 0 \quad (5.8)$$

□

Teorema 5.8. *O germe $f(x, y) = (x, xy, y^2)$ é 2- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Seu espaço tangente é dado por*

$$\mathbf{T}\mathcal{A}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y\} \end{pmatrix}.$$

Prova. Denotemos por $\mathcal{G}$ o nosso grupo de equivalências $\mathcal{A}_\delta$. Observemos inicialmente que $\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{G}_1 f$. Segue que f é 3- $\mathcal{G}_1$ -determinado (teorema 5.2). Seja g um germe tal que $j^2 g(0) = j^2 f(0)$. Então pelo teorema das transversais completas (5.1), $j^3 g$ é equivalente a um germe da forma $(x, xy + ay^3, y^2)$, para algum a . Agora, as mudanças de coordenadas $x = \bar{x} - a\bar{y}^2$, $y = \bar{y}$, $\bar{X} = X + aZ$ (nesta ordem), transformam g em $(\bar{x}, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2) \sim (x, xy, y^2) = f(x, y)$. Portanto f é 2- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. A expressão para o espaço tangente é obtida facilmente. $\square$

Passaremos agora a estudar os jatos de ordem mais alta.

5.3 Germes com 2-jato equivalente a $(x, y^2 + xy, 0)$

Seja σ o 2-jato $(x, y^2 + xy, 0)$. Uma transversal completa para σ no espaço de jatos $J^3(2, 3)$ é dada por

$$(x, y^2 + xy, ay^3 + bx^2y). \quad (5.9)$$

De fato, o espaço vetorial T gerado pelos vetores $(0, 0, x^2y)$, $(0, 0, y^3)$ é um complemento para $\mathbf{T}\mathcal{A}_\delta^3\sigma$ em $H^3(2, 3)$, isto é, $H^3(2, 3) \subseteq \mathbf{T}\mathcal{A}_\delta^3\sigma + T$. Se $ab = 0$ então 5.9 pode ser reduzido a um dos seguintes:

$$(x, y^2 + xy, y^3) \quad (5.10)$$

$$(x, y^2 + xy, x^2y) \quad (5.11)$$

$$(x, y^2 + xy, 0). \quad (5.12)$$

Se $ab \neq 0$ então 5.9 é equivalente a

$$(x, y^2 + xy, y^3 + \frac{b}{a}x^2y),$$

e este por sua vez é equivalente a um germe da forma

$$(x, y^2 + xy, y^3 + cx^2y) \quad (5.13)$$

para algum $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Tentativas de escalonamento das variáveis, tanto na fonte quanto na meta, para transformar o germe 5.13 no germe $(x, y^2 + xy, y^3 \pm xy^2)$ se mostraram infrutíferas. Isto nos sugere então que este germe seja não-simples, isto é, que ele seja pelo menos 1-modal, com c sendo um módulo. Vamos então fazer uma análise mais detalhada deste germe. Começamos com o

Teorema 5.9. 1. O germe $f_a(x, y) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$ é $3\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado, para todo $a \neq -1, -3/4$.

2. O espaço tangente de f_a é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{TA}_\delta f_a = & \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{y\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2, x^2y, xy^2, y^3\} \end{pmatrix} + \\ & + \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ 2axy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 2axy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y^2 \\ 3y^3 - ax^2y \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y + xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^3 - axy^2 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

se $a \neq 0, -1, -3/4$. Se $a = 0$ este espaço tangente se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{TA}_\delta f_0 = & \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2, x^2y, xy^2\} \end{pmatrix} + \\ & \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 + xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2 + x^2y \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Prova. a) Para mostrar que f é $3\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado vamos mostrar inicialmente que $\mathcal{M}_2^5 \theta(f) \subset \mathcal{TA}_\delta f$. Seguirá então do teorema 5.2 que f é $4\text{-}\mathcal{A}_{\delta_1}$ -determinado e, portanto $4\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Em seguida, faremos uma análise dos 4-jatos sobre este germe para concluir a $3\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinação.

Começamos analisando os termos de grau 5. No que segue, e daqui por diante, denotaremos por $\phi e_i, i = 1, 2, 3$, o monômio vetorial cuja i -ésima componente é ϕ , e as demais são identicamente nulas. Assim podemos dizer que os monômios vetoriais $x^5 e_1, x^5 e_2, x^5 e_3$ todos estão no $\mathcal{A}_{\delta_1}$ -espaço tangente de f . As equações em $\mathcal{TA}_{\delta_1} f$

envolvendo os monômios vetoriais x^4ye_3 , $x^3y^2e_3$, $x^2y^3e_3$, xy^4e_3 e y^5e_3 , envolvem também os monômios x^3ye_2 , $x^2y^2e_2$, xy^3e_2 , y^4e_2 , x^2ye_1 , xy^2e_1 e y^3e_1 . São elas:

$$\begin{aligned}
x^3 \frac{\partial f}{\partial x} - X^3 \frac{\partial}{\partial X} &= (0, x^3y, 2ax^4y) \\
x^2y \frac{\partial f}{\partial x} &= (x^2y, x^2y^2, 2ax^3y^2) \\
xy^2 \frac{\partial f}{\partial x} &= (xy^2, xy^3, 2ax^2y^3) \\
y^3 \frac{\partial f}{\partial x} &= (y^3, y^4, 2axy^4) \\
x^2(y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, 2x^2y^2 + x^3y, 3x^2y^3 + ax^4y) \\
xy(y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, 2xy^3 + x^2y^2, 3xy^4 + ax^3y^2) \\
y^2(y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, 2y^4 + xy^3, 3y^5 + ax^2y^3) \\
X^3Y \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, x^3y^2 + x^4y) \\
X^2Z \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, x^2y^3 + ax^4y) \\
XY^2 \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, xy^4 + 2x^2y^3 + x^3y^2) \\
YZ \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, y^5 + xy^4 + ax^2y^3 + ax^3y^2) \\
X^2Y \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, x^2y^2 + x^3y, 0) \\
XZ \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, xy^3 + ax^3y, 0) \\
Y^2 \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, y^4 + 2xy^3 + x^2y^2, 0) \\
XY \frac{\partial}{\partial X} &= (xy^2 + x^2y, 0, 0)
\end{aligned}$$

Extraindo os coeficientes destes vetores obtemos a seguinte matriz 15×12 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & a & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & a & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a qual, após aplicarmos eliminação Gaussiana, é transformada na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -a & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & a & 2a & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -a & -2a & 4a+3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8a & 8-8a & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2+5a+3 & 2a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8a^2+14a+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz tem rank máximo (ou seja rank 12) se, e somente se $8a^2+14a+6 \neq 0$, ou seja, se, e somente se, $a \neq -1, -3/4$. Observe que a equação $3a^2+5a+3 = 0$ não admite raízes reais e, apesar de parecer que o rank da matriz inicial possa cair também com $a = 0$, isto não acontece. Assim, segue que os monômios $x^4ye_3, x^3y^2e_3, x^2y^3e_3, xy^4e_3, y^5e_3$ e também $x^2ye_1, xy^2e_1, y^3e_1, x^3ye_2, x^2y^2e_2, xy^3e_2$ e y^4e_2 estão todos contidos em $\text{TA}_{\delta_1}f_a, \forall a \neq -1, -3/4$. Como $x \in f^*(\mathcal{M}_3)$, segue que todos os monômios vetoriais da forma $x^k\phi \in \text{TA}_{\delta_1}f_a$, para $k \geq 0$, onde ϕ é qualquer um

dos nove vetores listados acima. Em particular temos todos os monômios de grau 5 na primeira e segunda componentes, exceto possivelmente y^5 . Mas estes podem ser obtidos das equações:

$$YZe_i = (y^5 + xy^4 + ax^2y^3 + ax^3y^2)e_i, \quad i = 1, 2.$$

Agora, argüindo indutivamente, é tarefa fácil mostrar que $T\mathcal{A}_{\delta_1}f_a$ contém todos os vetores monomiais de grau $k \geq 5$. Portanto, $\mathcal{M}_2^5\theta(f) \subset T\mathcal{A}_{\delta_1}f_a$ e, f_a é então $4\mathcal{A}_{\delta}$ -determinado.

Consideremos agora um germe g tal que $j^3g(0) = f_a$ para algum $a \neq -1, -3/4$. Pelo teorema das transversais completas devemos ter $j^4g(0) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y + bx^3y)$ (esta é a expressão de uma transversal completa para f_a em $J^4(2, 3)$) para algum b . Agora, é fácil mostrar que o espaço tangente $T\mathcal{A}_{\delta}f_a$ contém o vetor x^3ye_3 , $\forall a \neq -1, -3/4$. De fato, as equações em $T\mathcal{A}_{\delta}f_a$ envolvendo x^3ye_3 são:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - X^2 \frac{\partial}{\partial X} &= (0, x^2y, 2ax^3y) \\ xy \frac{\partial f}{\partial x} &= (xy, xy^2, 2ax^2y^2) \\ y^2 \frac{\partial f}{\partial x} &= (y^2, y^3, 2axy^3) \\ x(y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, 2xy^2 + x^2y, 3xy^3 + ax^3y) \\ y(y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, 2y^3 + xy^2, 3y^4 + ax^2y^2) \\ X^2Y \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, x^2y^2 + x^3y) \\ XZ \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, xy^3 + ax^3y) \\ Y^2 \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, y^4 + 2xy^3 + x^2y^2) \\ XY \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, xy^2 + x^2y, 0) \\ Z \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, y^3 + ax^2y, 0) \\ Y \frac{\partial}{\partial X} &= (y^2 + xy, 0, 0) \end{aligned}$$

Estas equações produzem uma matriz 11×9 (matriz de coeficientes) a qual tem rank máximo (no caso 9) para todo $a \neq -1, -3/4$, o que pode ser visto efetuando-se a eliminação Gaussiana. Então todos os monômios envolvidos nestas equações

estão em $\mathbf{TA}_\delta f_a$, independentemente do valor de b . Então, pelo Lema de Mather, $j^4 g \sim (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y) = f_a$. Portanto, f_a é 3- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.

b) Para calcularmos o espaço tangente de f_a , para $a \neq -1, -3/4$, só precisamos analisar agora os monômios de grau ≤ 3 . Já sabemos, dos cálculos acima, que $xye_1, y^2e_1, y^3e_2, x^2ye_2, xy^2e_2$, estão todos em $\mathbf{TA}_\delta f_a$, para todo $a \neq -1, -3/4$. Também $x^3e_i, i = 1, 2, 3$ estão em $\mathbf{TA}_\delta f_a$, para todo a . Dos vetores da forma ϕe_1 , podemos obter todos eles em $\mathbf{TA}_\delta f_a$, exceto possivelmente ye_1 . Resta-nos então analisar os vetores $ye_1, ye_2, xye_2, y^2e_2, ye_3, xye_3, y^2e_3, x^2ye_3, xy^2e_3$ e y^3e_3 . Estes vetores se relacionam em $\mathbf{TA}_\delta f_a$ pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f_a}{\partial x} - X \frac{\partial}{\partial X} &= (0, xy, 2ax^2y) \\ y \frac{\partial f_a}{\partial x} &= (y, y^2, 2axy^2) \\ y \frac{\partial f_a}{\partial y} &= (0, 2y^2 + xy, 3y^3 + ax^2y) \\ Y \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, y^2 + xy, 0) \\ Z \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, y^3 + axy^2) \\ XY \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, xy^2 + x^2y) \\ Y \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, y^2 + xy) \end{aligned}$$

Observemos que tanto ye_2 quanto ye_3 não figuram nestas equações, logo podemos concluir que eles não estão no espaço tangente de f_a . Também os vetores y^2e_3 e xye_3 só aparecem uma única vez nas equações acima (aliás eles aparecem na mesma equação), portanto estes dois vetores também não estão no espaço tangente de f_a . Quanto aos demais, se tomarmos as equações acima (exceto a última) e montarmos a matriz dos coeficientes veremos que esta é uma matriz quadrada de ordem 6 e que a mesma é singular, isto é, seu determinante é zero. Escalonando esta matriz e reescrevendo as novas equações, vemos que nenhum dos vetores acima pertencem ao espaço tangente $\forall a \neq 0$. As novas equações após o escalonamento são:

$$\begin{aligned} &(y, y^2, 2axy^2) \\ &(0, xy, 2ax^2y) \\ &(0, 2y^2, 3y^3 - ax^2y) \\ &(0, 0, x^2y + xy^2) \\ &(0, 0, y^3 - axy^2) \end{aligned}$$

Assim, se $a \neq 0, -1, -3/4$ teremos

$$\mathbf{TA}_\delta f_a = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{y\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2, x^2y, xy^2, y^3\} \end{pmatrix} + \\ + \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ 2axy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 2axy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y^2 \\ 3y^3 - ax^2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2y + xy^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^3 - axy^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se $a = 0$ é fácil ver agora que $ye_1, xye_2, y^2e_2, y^3e_3 \in \mathbf{TA}_\delta f_0$. Assim,

$$\mathbf{TA}_\delta f_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{y, xy, y^2, x^2y, xy^2\} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^2 + xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy^2 + x^2y \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Observação 5.2. 1. Os germes $f_{-3/4}$ e f_{-1} não são $\mathcal{A}_\delta$ -finitamente determinados. De fato, $f_{-3/4}$ não é sequer $\mathcal{A}$ -finito pois sua imagem em $\mathbb{R}^3$ contém um edge cuspidal (na verdade $f_{-3/4} \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2, y^3)$). Quanto ao germe f_{-1} , apesar dele ser $\mathcal{A}$ -finito ele não é $\mathcal{A}_\delta$ -finito pois sua curva de pontos duplos em $\mathbb{R}^3$ coincide com a fronteira.

2. Segue do teorema acima que os germes $f_a(x, y) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$ são não-simples, pois para cada $a \neq -1, -3/4$, o vetor $(0, 0, x^2y) \notin \mathbf{TA}_\delta f_a$. A seguir damos um argumento geométrico para esta não-simplicidade.

Proposição 5.10. Os germes $f_a(x, y) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$ são $\mathcal{A}_\delta$ -não-equivalentes e a família f_a é unimodal.

Prova. Nosso primeiro passo é calcular a curva de pontos duplos para os germes f_a . Assim sejam $(x, y) \neq (u, v)$ pontos de $\mathbb{R}^2$, 0 tais que $f_a(x, y) = f_a(u, v)$, isto é,

$$\begin{aligned} x &= u \\ y^2 + xy &= v^2 + uv \\ y^3 + ax^2y &= v^3 + au^2v \end{aligned}$$

Segue então que $u = x$. Substituindo nas outras equações e notando que devemos ter $v \neq y$ obtemos as equações:

$$\begin{aligned} v &= -x - y \\ y^2 + vy + v^2 + ax^2 &= 0 \end{aligned}$$

Eliminando v da última equação obtemos a curva de pontos duplos na fonte dada por

$$y^2 + xy + (a + 1)x^2 = 0$$

A involução que faz o intercâmbio de pares de pontos com mesma imagem sobre esta curva é dada por $(x, y) \mapsto (x, -x - y)$. Em particular, pares correspondentes de pontos duplos são dados pela intersecção da curva acima com as retas $x = \text{constante}$. Suponhamos agora que os germes f_a e f_b sejam $\mathcal{A}_\delta$ -equivalentes para algum par a, b de números reais, isto é, existe uma $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência (H, K) tal que $f_b = K \circ f_a \circ H^{-1}$. Denotando por L a aplicação linear $dH(0, 0)$ vemos que L preserva a reta $\{y = 0\}$ e também leva a tangente à curva de pontos duplos de f_a na origem na tangente à curva de pontos duplos de f_b na origem. Finalmente, como H leva $D^2 f_a$ sobre $D^2 f_b$ então H levará um par de pontos com a mesma coordenada x a um par de pontos de $D^2 f_b$ com a mesma propriedade. Afirmamos, agora, que L preserva também o eixo- y . De fato, consideremos dois pontos de $D^2 f_a$ com a mesma coordenada x , digamos, $(x, \alpha(x))$ e $(x, \beta(x))$, onde $\beta(x) = -x - \alpha(x)$. Escrevendo $H = (H_1, H_2)$ e tomando então o seguinte limite quando $x \rightarrow 0$ temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_1(x, \alpha(x)) - H_1(x, \beta(x))}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_1(x, \alpha(x)) - H_1(0, 0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_1(x, -x - \alpha(x)) - H_1(0, 0)}{x}. \end{aligned}$$

Segue, daí que

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial H_1}{\partial y}(0, 0)\alpha'(0) - \frac{\partial H_1}{\partial x}(0, 0) + \frac{\partial H_1}{\partial y}(0, 0)(1 + \alpha'(0)) = 0.$$

isto é,

$$\frac{\partial H_1}{\partial y}(0, 0)(1 + 2\alpha'(0)) = 0.$$

Por outro lado, é fácil ver que α pode ser parametrizada por $\alpha(x) = (-1/2 + 1/2\sqrt{-3 - 4a})x$. Então, como $a \neq -3/4$ segue $1 + 2\alpha'(0) \neq 0$ e portanto $\frac{\partial H_1}{\partial y}(0, 0) = 0$. Daí segue que se $L(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ então devemos ter

- $\gamma = 0$, que corresponde à preservação da fronteira
- $\beta = 0$, que corresponde à preservação do eixo y , ou preservação da involução.

Assim $L(x, y) = (\alpha x, \delta y)$. Aplicando L às retas tangentes à curva de pontos duplos para f_a deduzimos que se $y^2 + xy + (a+1)x^2 = 0$ então devemos ter $(\delta y)^2 + \alpha \delta xy + (a+1)\alpha^2 x^2 = 0$ (curva de pontos duplos de f_b). Mas isto implica que $\alpha/\delta = 1$ e $(a+1)\alpha^2/\delta^2 = (b+1)$, e portanto $a = b$. Alternativamente, mostramos acima que L deve levar 4 retas em 4 retas, e é bem conhecido que dois conjuntos de 4 retas no plano são equivalentes (isto é, um conjunto pode ser levado sobre o segundo conjunto por meio de uma aplicação linear) se, e somente se, eles determinam a mesma razão anarmônica (ou cross-ratio). $\square$

5.3.1 Germes sobre o 3-jato $(x, y^2 + xy, xy^2)$

Consideremos agora o 3-jato $\sigma = (x, y^2 + xy, xy^2)$. Uma transversal completa para σ em $J^4(2, 3)$, é o próprio jato, pois $\mathbf{TA}_{\delta_1}\sigma$ contém todos os monômios de grau 4. Já uma transversal completa em $J^5(2, 3)$ é dada por

$$(x, y^2 + xy, xy^2 + ay^5).$$

Se $a \neq 0$ este último é equivalente à $(x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^5)$ e este é 5- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Na verdade temos um resultado mais geral que é o seguinte:

Teorema 5.11. *Se $j^3 f(0)$ é $\mathcal{A}_\delta$ -equivalente $(x, y^2 + xy, xy^2)$ e f tem $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão finita, então f é equivalente a um germe da forma*

$$(x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^{2l+1}),$$

para algum $l \geq 2$.

Prova. Seja f um germe sobre o $(k-1)$ -jato $(x, y^2 + xy, xy^2)$, para algum $k \geq 5$. Então pelo teorema das transversais completas $j^k f$ é equivalente ao próprio jato $(x, y^2 + xy, xy^2)$ se k é par, enquanto que se k é ímpar, digamos $k = 2l + 1$, para algum $l \geq 2$, então $j^k f$ é equivalente a um germe da forma $(x, y^2 + xy, xy^2 + ay^{2l+1})$, para algum a . Mas se $a \neq 0$ este germe é equivalente a $(x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^{2l+1})$. Resta então mostrar que este germe de aplicação é finitamente determinado. Para tanto observamos inicialmente que

$$\mathcal{M}_2^4 \theta(f) \subset \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \theta(2) + f^*(\mathcal{M}_3) \theta(f) + \mathcal{M}_2^5 \theta(f).$$

Se mostrarmos que

$$\mathcal{M}_2^{2l+2} \theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^{2l+5} \theta(f)$$

seguirá então do corolário 5.3 que f é $(2l+1)$ -determinado. Isto é o que faremos a seguir. Para tanto só precisaremos obter aqueles monômios vetoriais ϕ com $2l+2 \leq$

$\text{grau}(\phi) \leq 2l + 4$ em $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Antes lembremos que os geradores do $\mathcal{R}_\delta$ -espaço tangente como um $\theta(2)$ -módulo são os vetores

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, y, y^2),$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = (0, 2y^2 + xy, 2xy^2 + (2l + 1)y^{2l+1}).$$

As seguintes equações em $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$

$$x(y \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, 2xy^2 + x^2y, 2x^2y^2 + (2l + 1)xy^{2l+1})$$

$$XZ \frac{\partial}{\partial Z} = (0, 0, x^2y^2 + xy^{2l+1})$$

$$XY \frac{\partial}{\partial Y} = (0, xy^2 + x^2y, 0)$$

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - X^2 \frac{\partial}{\partial X} = (0, x^2y, xy^2)$$

são linearmente independentes e, portanto os monômios envolvidos estão todos contidos em $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$, isto é, $xy^2e_2, x^2ye_2, x^2y^2e_3, xy^{2l+1}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Segue que $x^{k+2}y^2e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f, \forall k \geq 1$. Em particular tem-se $x^{2l}y^2e_3, x^{2l+1}y^2e_3, x^{2l+2}y^2e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Também temos $x^{2l}y^2e_2, x^{2l+1}y^2e_2, x^{2l+2}y^2e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Notemos que

$$X^{2l}Y \frac{\partial}{\partial Z} = (0, 0, x^{2l}y^2 + x^{2l+1}y) \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$$

e como já temos $x^{2l}y^2e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$ segue que $x^{2l+1}ye_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Para obter $x^{2l-1}y^3$ usamos primeiro a equação

$$X^{2l-2}Y^2 \frac{\partial}{\partial Z} = (x^{2l-2}y^4 + 2x^{2l-1}y^3 + x^{2l}y^2)e_3,$$

da qual segue que

$$(x^{2l-2}y^4 + 2x^{2l-1}y^3)e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f. \quad (5.14)$$

A seguir notamos que como $x^2y^2e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$ e $x, y^2 + xy \in f^*(\mathcal{M}_3)$ então temos

$$x^{2l-4}(y^2 + xy)x^2y^2e_3 = (x^{2l-2}y^4 + x^{2l-1}y^3)e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f \quad (5.15)$$

Segue de 5.14 e 5.15 que tanto $x^{2l-2}y^4e_3$ quanto $x^{2l-1}y^3e_3$ pertencem ao espaço tangente $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Em geral para obtermos $x^{2l-r}y^re_3$, para r ímpar fazemos

$$X^{2l-r-1}Y^{\frac{r+3}{2}}\frac{\partial}{\partial Z} = (x^{2l-r-1}y^{r+3} + B_1x^{2l-r}y^{r+2} + \sum_{k=2}^{(r+3)/2} B_kx^{2l+k-r-1}y^{r+3-k})e_3 \quad (5.16)$$

e em seguida fazemos

$$X^{2l-r-3}Y^{\frac{r+1}{2}}x^2y^2e_3 = (x^{2l-r-1}y^{r+3} + A_1x^{2l-r}y^{r+2} + \sum_{k=2}^{(r+1)/2} A_kx^{2l+k-r-1}y^{r-k+3})e_3, \quad (5.17)$$

onde os coeficientes nos somatórios, A_k e B_k são os respectivos coeficientes binomiais.

Observamos aqui que os vetores $x^{2l-i}y^{i+2}e_3$ aparecem sempre envolvidos com vetores da forma $x^{2l-j}y^{j+2}e_3$ com $j < i$. Observamos também que ao obtermos $x^{2l-i}y^{2+i}e_3$ com i ímpar obtemos ao mesmo tempo o vetor $x^{2l-(i+1)}y^{2+(i+1)}e_3$. Assim suponhamos que tenhamos obtido todos os vetores da forma $x^{2l-i}y^{2+i}e_3$ para $i < r$. Então das equações 5.16 e 5.17 acima segue que

$$(x^{2l-(r+1)}y^{r+3} + B_1x^{2l-r}y^{r+2})e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f \quad (5.18)$$

onde $B_1 = (r+3)/2$, e

$$(x^{2l-r-1}y^{r+3} + A_1x^{2l-r}y^{r+2})e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f \quad (5.19)$$

com $A_1 = (r+1)/2$. Assim, podemos concluir das equações 5.18 e 5.19 que $x^{2l-r}y^{r+2}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$ e também que $x^{2l-(r+1)}y^{r+3}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Assim, por indução, $x^{2l-r}y^{r+2} \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, $\forall r = 0, 1, 2, \dots, 2l-1$. Ficamos então devendo o monômio $y^{2l+2}e_3$. Mas este pode ser obtido da equação

$$Y^{l+1}\frac{\partial}{\partial Z} = y^{2l+2}e_3 + \sum_{k=1}^{l+1} B_kx^ky^{2l+2-k}e_3$$

e notando que todos os termos dentro do somatório já foram obtidos anteriormente. Logo $y^{2l+2}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Assim temos obtido todos os termos de grau $2l+2$ na última coordenada. Como $x \in f^*(\mathcal{M}_3)$, segue que $x^{2l+3-k}y^ke_3, x^{2l+4-k}y^ke_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, $\forall k = 0, 1, \dots, 2l+2$. Precisamos ainda verificar que $y^{2l+3}e_3, xy^{2l+3}e_3, y^{2l+4}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Começamos com $y^{2l+3}e_3$. As equações

$$y^2(y\frac{\partial f}{\partial y}), YZ\frac{\partial}{\partial Z}, XY^2\frac{\partial}{\partial Z}, Y^2\frac{\partial}{\partial Y},$$

$$xy^2 \frac{\partial f}{\partial x}, xy(y \frac{\partial f}{\partial y}), XY \frac{\partial}{\partial X}, x^2 y \frac{\partial f}{\partial x},$$

produzem uma matriz 8×7 (aqui excluídos aqueles monômios já anteriormente obtidos) a qual tem rank máximo, isto é, seu rank é 7. Portanto todos os monômios envolvidos, a saber, $xy^2 e_1, x^2 y e_1, y^4 e_2, xy^3 e_2, xy^4 e_3, x^2 y^3 e_3, y^{2l+3} e_3$ pertencem ao espaço tangente $\mathbf{TA}_{\delta_1} f$. Assim podemos obter também o monômio $xy^{2l+3} e_3$ em $\mathbf{TA}_{\delta_1} f$. De modo análogo ao que fizemos para obter $y^{2l+2} e_3$ podemos obter $y^{2l+4} e_3$ usando a equação $Y^{l+2} \partial / \partial Z$. Portanto temos obtido todos os monômios ϕe_3 em $\mathbf{TA}_{\delta_1} f$ com $2l+2 \leq \text{grau}(\phi) \leq 2l+4$. Passemos agora aos monômios ϕe_2 . Começamos obtendo $y^{2l+2} e_2$ das equações

$$y^{2l}(y \frac{\partial f}{\partial y}) = (2y^{2l+2} + xy^{2l+1}, 2xy^{2l+2}) \bmod \mathcal{M}_2^{2l+5},$$

$$XZ \frac{\partial}{\partial Y} = (0, x^2 y^2 + xy^{2l+1}, 0).$$

Lembramos então que já obtivemos $x^2 y^2 e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}$. Logo, $xy^{2l+1} e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$ e portanto $y^{2l+2} \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^{2l+5}$. Da equação

$$xy^{2l-1}(y \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, 2xy^{2l+1} + x^2 y^{2l}, 2x^2 y^{2l+1} + (2l+1)xy^{4l}),$$

vemos que $x^2 y^{2l} e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^{2l+5}$, desde que $xy^{2l+1} e_2$ já foi obtido. Em geral, tendo obtido $x^{i-1} y^{2l+2-(i-1)} e_2$ podemos obter $x^i y^{2l+2-i} e_2$ através da equação

$$x^{i-1} y^{2l+1-i}(y \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, 2x^{i-1} y^{2l+2-(i-1)} + x^i y^{2l+2-i}, O(2l+3)).$$

Assim temos $x^k y^{2l+2-k} e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^{2l+5}$, $\forall k = 0, 1, \dots, 2l+2$. Temos também: $x^k y^{2l+3-k} e_2, x^k y^{2l+4-k} e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^{2l+5}$, $\forall k = 0, 1, \dots, 2l+2$. Resta-nos então verificar $y^{2l+3} e_2, xy^{2l+3} e_2, y^{2l+4} e_2$. Mas $xy^{2l+3} e_2$ vem da equação

$$Z^2 \frac{\partial}{\partial Y} \bmod \mathcal{M}_2^{2l+5}$$

notando que $x^2 y^4 e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$. Tendo obtido $xy^{2l+3} e_2$ podemos obter $y^{2l+4} e_2$ da mesma forma que obtivemos $y^{2l+4} e_3$, isto é, através da equação

$$Y^{l+2} \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Finalmente, obtemos $y^{2l+3} e_2$ da equação

$$y^{2l+1}(y \frac{\partial f}{\partial y}) \bmod \mathcal{M}_2^{2l+5}.$$

Portanto temos obtido todos os monômios ϕe_2 com $2l + 2 \leq \text{grau}(\phi) \leq 2l + 4$ em $\mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f + \mathcal{M}_2^{2l+5}$.

Para obtermos os monômios ϕe_1 , $2l + 2 \leq \text{grau}(\phi) \leq 2l + 4$ simplesmente usamos a equação

$$\phi \frac{\partial f}{\partial x}$$

e notamos que nas segunda e terceira componentes da mesma só aparecerão termos de grau pelos menos $2l + 3$ os quais já foram obtidos anteriormente.

Portanto

$$\mathcal{M}_2^{2l+2}\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f + \mathcal{M}_2^{2l+5},$$

donde concluímos, pelo corolário 5.3, que f é $(2l + 1)$ - $\mathcal{A}_{\delta_1}$ - (e portanto $\mathcal{A}_{\delta}$ -) determinado.

□

5.3.2 Germes sobre o 3-jato $(x, y^2 + xy, 0)$

Neste caso uma transversal completa em $J^4(2, 3)$ para o 3-jato $\sigma = (x, y^2 + xy, 0)$ será dada por

$$(x, y^2 + xy, ax^3y + bx^2y^2 + cxy^3 + dy^4),$$

sendo que esta é $\mathcal{A}_{\delta}^4$ -equivalente a

$$(x, y^2 + xy, ax^3y + bx^2y^2),$$

para algum $a, b \in \mathbb{R}$. Se $ab \neq 0$ o 4-jato acima é equivalente ao 4-jato

$$(x, y^2 + xy, Ax^3y + xy^3),$$

para algum $A \neq 0$. O cálculo do $\mathcal{A}_{\delta}$ -espaço tangente deste 4-jato revela que A é um módulo e, além disso, que este jato é não-suficiente. A codimensão do estrato no espaço de jatos é 3. Se $ab = 0$ teremos um dos seguintes 4-jatos:

$$(x, y^2 + xy, x^3y), \mathcal{A}_{\delta_e}^4\text{-cod} = 5$$

$$(x, y^2 + xy, xy^3), \mathcal{A}_{\delta_e}^4\text{-cod} = 5$$

$$(x, y^2 + xy, 0), \mathcal{A}_{\delta_e}^4\text{-cod} = 6,$$

e nenhum deles nos interessará.

5.4 Germes com 2-jato $(x, y^2, 0)$

Uma transversal completa em $J^3(2, 3)$ neste caso é dada por

$$(x, y^2 + ax^2y, bx^2y + cy^3).$$

Se tivermos $abc \neq 0$ esta pode ser reduzida à forma

$$(x, y^2 \pm x^2y, x^2y \pm y^3).$$

Caso contrário, obteremos um dos seguintes 3-jatos:

$$(x, y^2 + x^2y, x^2y) \sim (x, y^2, x^2y) \quad (5.20)$$

$$(x, y^2 + x^2y, y^3) \quad (5.21)$$

$$(x, y^2, x^2y \pm y^3) \quad (5.22)$$

$$(x, y^2, y^3) \quad (5.23)$$

$$(x, y^2 + x^2y, 0) \quad (5.24)$$

$$(x, y^2, 0) \quad (5.25)$$

Começamos analisando o 3-jato $(x, y^2 \pm x^2y, x^2y \pm y^3)$.

Teorema 5.12. *a) O 3-jato $g(x, y) = (x, y^2 \pm x^2y, x^2y \pm y^3)$ é $\mathcal{A}_\delta^3$ -equivalente ao 3-jato $f(x, y) = (x, y^2, x^2y \pm y^3)$.*

b) O germe f acima por sua vez é 3- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado e tem espaço tangente dado por

$$\mathrm{TA}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy\} \end{pmatrix}.$$

Prova. a) Para ver que g é equivalente a f primeiro fazemos a mudança de coordenadas na meta $\tilde{Y} = Y \pm Z$ seguida então da mudança de coordenadas na fonte dada por $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y \mp 1/2y^2$. Estas mudanças, feitas nesta ordem, transformam o germe g na forma desejada.

b) Para provar a 3-determinação de f segundo a $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência vamos mostrar de uma vez por todas que

$$\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset \mathrm{TA}_\delta f.$$

Primeiro notamos que dos monômios de grau 4, os únicos que devemos verificar são x^3y e xy^3 . Obtemos x^3ye_3 pela equação

$$\frac{1}{2}(x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - X^2 \frac{\partial}{\partial X});$$

e obtido xy^3e_3 podemos obter xy^3e_3 da equação

$$XZ \frac{\partial}{\partial Z}.$$

A equação

$$xy(y \frac{\partial f}{\partial y}) - (X^3Y - 3XY^2) \frac{\partial}{\partial Z}$$

fornece xy^3e_2 e portanto podemos obter também xy^3e_2 da equação

$$XZ \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Já x^3ye_1 é obtido da equação

$$x^3y \frac{\partial f}{\partial x} - 2X^4Y \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Analogamente se obtém xy^3e_1 . Assim, todos os monômios de grau 4 estão presentes em $\mathcal{TA}_{\delta_1}f$. Podemos também obter y^5e_i facilmente das equações:

$$\begin{aligned} YZ \frac{\partial}{\partial X} &= (x^2y^3 \pm y^5, 0, 0) \\ YZ \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, x^2y^3 \pm y^5, 0) \\ YZ \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, x^2y^3 \pm y^5), \end{aligned}$$

notando que como $xy^3e_i \in \mathcal{TA}_{\delta_1}f$ então $x^2y^3e_i \in \mathcal{TA}_{\delta_1}f$, para $i = 1, 2, 3$. Como $x, y^2 \in f^*(\mathcal{M}_3)$, segue

$$\mathcal{TA}_{\delta_1}f \supset \mathcal{M}_2^4\theta(f),$$

e portanto f é 3- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. □

5.4.1 Germes com 3-jato (x, y^2, x^2y)

Seja $\sigma(x, y) = (x, y^2, x^2y)$. Uma transversal completa para σ em $J^k(2, 3)$ é dada por $(x, y^2, x^2y + axy^{k-1})$ se k for par. Neste caso, uma aplicação simples do lema de Mather mostra que podemos eliminar o termo xy^{k-1} na terceira componente, e então a transversal completa se reduz ao próprio jato inicial. Por outro lado se k é ímpar, digamos $k = 2l + 1$, então uma transversal completa para σ em $J^{2l+1}(2, 3)$ é dada por $(x, y^2, x^2y + ay^{2l+1})$. fácil ver que se $a \neq 0$ este último jato pode ser reduzido à forma $(x, y^2, x^2y \pm y^{2l+1})$.

Teorema 5.13. O germe $f(x, y) = (x, y^2, x^2y \pm y^{2l+1})$ é $(2l+1)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado e seu espaço tangente é dado por

$$\mathbf{TA}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy, y^3, y^5, \dots, y^{2l-1}\} \end{pmatrix}.$$

Prova. Para provarmos a $(2l+1)$ -determinação de f mostraremos que $\mathcal{M}_2^{2l+2}\theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. fácil ver que $f^*(\mathcal{M}_3^2) \supset \{x^k, y^k, x^r y^{2s}, r, s \geq 1, k \geq 2\}$. Assim, $\mathbf{TL}_1f$ contém todos os monômios vetoriais envolvendo x e y^2 (exceto $y^2 e_i$). Agora consideremos os monômios da forma $x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1}$, $j = 0, 1, \dots, l$. A equação

$$x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1} \frac{\partial f}{\partial x} - 2X^{(2l+2)-2j}Y^{j+1} \frac{\partial}{\partial Z}$$

fornece-nos $x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1}e_1$ em $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$, enquanto que a equação

$$\frac{1}{2}(x^{2l-2j}y^{2j} \frac{\partial f}{\partial x} - X^{2l-2j}Y^j \frac{\partial}{\partial X})$$

nos mostra que $x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1}e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, pra $j = 0, 1, \dots, l$. Também temos a equação

$$\frac{1}{2}(x^{(2l+1)-2j}y^{2j-1}(y \frac{\partial f}{\partial y}) - X^{(2l+3)-2j}Y^j \frac{\partial}{\partial Z} - (2l+1)X^{(2l+1)-2j}Y^{l+j}) \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f,$$

para $j = 1, 2, \dots, l$, a qual nos fornece os monômios vetoriais $x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1}e_2$, para $j = 1, 2, \dots, l$. Resta-nos verificar o monômio $x^{2l+1}y e_2$. Este é obtido pela equação

$$X^{2l-1}Z \frac{\partial}{\partial Y} - 1/2x^{2l-1}y^{2l-1}(y \frac{\partial f}{\partial y}) - 1/2(X^{2l+1}Y^l - (2l+1)X^{2l-1}Y^{2l}).$$

Assim $x^{(2l+1)-2j}y^{2j+1}e_i \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, $\forall j = 0, 1, \dots, l$, $\forall i = 1, 2, 3$. Como $x, y^2 \in f^*(\mathcal{M}_3)$ segue que

$$\mathbf{TA}_{\delta_1}f \supset \mathcal{M}_2^{2l+2}\theta(f) - \{y^{2k+1}e_i, k \geq l+1, i = 1, 2, 3\}.$$

Para concluirmos que $\mathbf{TA}_{\delta_1}f \supset \mathcal{M}_2^{2l+2}\theta(f)$, como $y^2 \in f^*(\mathcal{M}_3)$, basta mostrarmos que $y^{2l+3}e_i \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, para $i = 1, 2, 3$. Isto é o que fazemos abaixo:

$$\begin{aligned} y^{2l+3}e_1 &= y^{2l+3} \frac{\partial f}{\partial x} - 2XY^{l+2} \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2y^{2l+3}e_2 &= y^{2l+1}(y \frac{\partial f}{\partial y}) - (X^2Y^{l+1} + (2l+1)Y^{2l+1}) \frac{\partial}{\partial Z} \\ (2l)y^{2l+3}e_3 &= y^2(y \frac{\partial f}{\partial y}) - 2Y^2 \frac{\partial}{\partial Y} - XY \frac{\partial}{\partial Z}. \end{aligned}$$

□

5.4.2 Germes com 3-jato $(x, y^2 + x^2y, y^3)$

Sendo $\sigma(x, y) = (x, y^2 + x^2y, y^3)$ uma transversal completa para este jato em $J^4(2, 3)$ é dada por $(x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^3y)$ e esta pode ser reduzida ao germe $(x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^3y)$, se $a \neq 0$.

Proposição 5.14. *O germe $f(x, y) = (x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^3y)$ é $4\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado.*

Prova. A demonstração é análoga ao que temos feito até aqui, ou seja, mostrar que o espaço tangente $\mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f$ contém uma potência do ideal maximal. Neste caso é muito fácil mostrar que $\mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f \supset \mathcal{M}_2^5\theta(f)$ e que portanto, f é $4\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado. $\square$

Consideremos agora $\sigma(x, y) = (x, y^2 + x^2y, y^3) \in J^4(2, 3)$. Uma transversal completa para σ em $J^l(2, 3)$ é dada por $(x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^{l-1}y)$. Se $a \neq 0$ e $l \neq 5$ este germe pode ser reduzido à forma normal $(x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^{l-1}y)$. Por outro lado, se $l = 5$, teremos um módulo, pois neste caso, podemos ver facilmente que o vetor $x^4ye_3 \notin \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_e}f_a$, $\forall a \neq 0$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 5.15. *1. O germe $f = (x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^{l-1}y)$ é $l\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado para todo $l \geq 6$.*

2. O germe $f_a = (x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^4y)$ é $6\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado, $\forall a \neq -1, -3/4$.

Prova. A demonstração desta proposição é inteiramente análoga ao que temos feito até aqui. Em outras palavras podemos mostrar, com algumas páginas de cálculos que incluem, por exemplo, escalonamento de matrizes, que o germe $f = (x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^{l-1}y)$ no ítem (a) é tal que

$$\mathcal{M}_2^{l+1}\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f.$$

Já para o germe $f_a = (x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^4y)$ do ítem (b) a prova da 6-determinação é análoga à demonstração da parte (a) do teorema 5.9 onde mostramos a 3-determinação do germe $(x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$. Assim, mostramos inicialmente que $\mathcal{M}_2^8\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f_a$, $\forall a \neq -1, -3/4$, seguindo então que f_a é 7-determinado. Então usamos o teorema das transversais completas para mostrar que um 7-jato sobre f_a , $a \neq -1, -3/4$, deve ser da forma

$$(x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^4y + bx^5y + cx^6y).$$

Finalmente, com uma aplicação do Lema de Mather, vemos que a transversal completa acima se reduz a $(x, y^2 + x^2y, y^3 + ax^4y \pm x^5y)$ e este 6-jato é 6-determinado para todo $a \neq -1, -3/4$. $\square$

5.4.3 Germes com 3-jato (x, y^2, y^3)

Seja $\sigma(x, y) = (x, y^2, y^3) \in J^k(2, 3)$, $k \geq 3$. Uma transversal completa para σ em $J^{k+1}(2, 3)$ é dada por $(x, y^2 + ax^ky, y^3 + bx^ky)$ e esta pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

$$\begin{aligned} (x, y^2 \pm x^ky, y^3 \pm x^ky) &\sim (x, y^2, y^3 \pm x^ky) \\ &\sim (x, y^2 \pm x^ky, y^3) \\ &\sim (x, y^2, y^3) \end{aligned}$$

Teorema 5.16. *O germe $f(x, y) = (x, y^2, y^3 \pm x^ky)$ é $(k+1)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Sua $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão é $2k-1$.*

Prova. Notamos inicialmente que $\mathbf{TL}_1 f$ contém todos os monômios vetoriais da forma $x^i y^{2j} e_m$, para $i+2j \geq 2$ e $m = 1, 2, 3$, exceto $y^2 e_m$. Então ele deve conter os monômios $x^{l-i} y^i e_m$ para todo i par, $l \geq k$ e $m = 1, 2, 3$. A seguir vamos verificar os monômios da forma $x^{l-i} y^i$ com i ímpar. Temos:

$$\begin{aligned} x^{l-i} y^i e_1 &= x^{l-i} y^i \frac{\partial f}{\partial x} - k X^{l+k-(i+1)} Y^{(i+1)/2} \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2x^{l-i} y^i e_2 &= x^{l-i} y^{i-2} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - (3X^{l-i} Y^{(i+1)/2} + X^{l+k-i} Y^{(i-1)/2}) \frac{\partial}{\partial Z}, \quad i \geq 3 \\ x^{l-1} y e_2 &= X^{l-(k+1)} Z \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{1}{2} x^{l-k-1} y \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(\frac{3}{2} X^{l-k-1} Y^2 \pm X^{l-1} Y \right) \frac{\partial}{\partial Z} \\ x^{l-i} y^i e_3 &= X^{l-i} Y^{(i-3)/2} Z \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{1}{k} x^{l-i+1} y^{i-3} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{k} X^{l-i+1} Y^{(i-3)/2} \frac{\partial}{\partial X}, \quad i \geq 3 \\ x^{l-1} y e_3 &= x^{l-(k+1)} \frac{\partial f}{\partial x} - X^{l-(k+1)} \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned}$$

Podemos também obter os monômios $y^l e_m$, para $m = 1, 2, 3$ e $l \geq k$. Se l é par não temos nada a fazer. Se l é ímpar temos:

$$\begin{aligned} y^l e_1 &= y^l \frac{\partial f}{\partial x} - k X^{k-1} Y^{(l+1)/2} \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2y^l e_2 &= y^{l-2} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - (3Y^{(l+1)/2} + X^k Y^{(l-1)/2}) \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2y^{l+2} e_3 &= y^{l-3} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - Y^{(l-3)/2} Z \frac{\partial}{\partial Z} - 2Y^{(l-1)/2} \frac{\partial}{\partial Y} \end{aligned}$$

Como $x, y^2 \in f^*(\mathcal{M}_3)$ segue que $\mathcal{M}_2^{k+2} \theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta 1} f$ e, portanto, f é $(k+1)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.

Alguns cálculos mostram que o $\mathcal{A}_\delta$ -espaço tangente deste germe é dado por

$$\mathbf{TA}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy, \dots, x^{k-1}y\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y, xy, \dots, x^{k-2}y\} \end{pmatrix}$$

□

Consideremos agora o k -jato $\sigma = (x, y^2 \pm x^{k-1}y, y^3)$ como um $(l-1)$ -jato para algum $l \geq k+1$. Então uma transversal completa para σ em $J^l(2, 3)$ é dada por $f_a = (x, y^2 \pm x^{k-1}y, y^3 + ax^{l-1}y)$, e este pode ser reduzido à forma $(x, y^2 \pm x^{k-1}y, y^3 \pm x^{l-1}y)$ sempre que $l \neq 2k-1$ e $a \neq 0$. Se $l = 2k-1$ (o que é o mesmo que $l-1 = 2(k-1)$), a é um módulo pois, neste caso, o vetor $x^{l-1}ye_3 \notin \mathbf{TA}_\delta f_a$, $\forall a$. Como no caso, em que $k = 3$ (ver seção 5.4.2) temos o seguinte resultado:

Proposição 5.17. 1. O germe $f(x, y) = (x, y^2 \pm x^{k-1}y, y^3 \pm x^{l-1}y)$ é l - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado, se $l \neq 2k-1$.

2. O germe $f_a(x, y) = (x, y^2 \pm x^{k-1}y, y^3 + ax^{2k-2}y)$ é finitamente $3k$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.

Prova. A prova desta proposição é análoga àquela da proposição 5.15 e nós a omitimos aqui. □

5.5 Germes com 2-jato $(x, xy, 0)$

Consideremos agora o 2-jato $\sigma = (x, xy, 0)$. Uma transversal completa para σ em $J^3(2, 3)$ é dada por $(x, xy + ay^3, by^2 + cy^3)$. fácil ver que se $abc \neq 0$, esta transversal pode ser reduzida à forma

$$(x, xy \pm y^3, xy^2 \pm y^3) \quad (5.26)$$

Se, por outro lado, tivermos $abc = 0$ então a transversal completa se reduz a um dos seguintes 3-jatos:

$$(x, xy, xy^2 \pm y^3) \quad (5.27)$$

$$(x, xy, y^3) \quad (5.28)$$

$$(x, xy, xy^2) \quad (5.29)$$

$$(x, xy, 0) \quad (5.30)$$

$$(x, xy + y^3, y^3) \sim (x, xy, y^3) \quad (5.31)$$

$$(x, xy + y^3, xy^2) \quad (5.32)$$

$$(x, xy + y^3, 0) \quad (5.33)$$

Dos 3-jatos acima só nos interessarão 5.26, 5.27 e 5.28. Os demais têm codimensão ≥ 4 . O jato 5.26 é equivalente ao jato 5.27. De fato, escrevendo o germe 5.26 na forma $(x, xy + \epsilon_1 y^3, xy^2 + \epsilon_2 y^3)$, onde ϵ_1, ϵ_2 são, independentemente, 1 ou -1, e fazendo a mudança de coordenadas na meta $\bar{X} = X$, $\bar{Y} = Y - \epsilon_1/\epsilon_2 Z$, $\bar{Z} = Z$ transforma o germe 5.26 em $(x, xy \pm xy^2, xy^2 \pm y^3)$. Fazendo então a mudança de coordenadas na fonte $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y(1 \pm y)$, trazemos o 3-jato acima para a forma $(x, xy, xy^2 \pm y^3)$, ou seja, 5.27~5.26. Notemos também que $(5.26_-) \sim (5.26_+)$.

Vamos começar estudando o 3-jato $(x, xy, xy^2 + y^3)$.

5.5.1 Germes sobre o 3-jato $(x, xy, xy^2 + y^3)$

Uma transversal completa para este 3-jato em $J^4(2, 3)$ é dada por $\sigma = (x, xy + ay^4, xy^2 + y^3 + by^4)$. Agora é fácil mostrar que os vetores $(0, y^4, 0)$ e $(0, 0, y^4)$ estão no espaço tangente $\mathbf{TA}_\delta^4 \sigma$, $\forall a, b$. Então, pelo lema de Mather, temos que $\sigma \sim (x, xy, xy^2 + y^3)$, ou seja, a 4-transversal completa é vazia. Já a transversal completa de ordem 5 é dada por $(x, xy + ay^5, xy^2 + y^3)$, e se $a \neq 0$ esta pode ser reduzida à forma $(x, xy \pm y^5, xy^2 + y^3)$. Observe que $(x, xy - y^5, xy^2 + y^3) \sim (x, xy + y^5, xy^2 + y^3)$.

Proposição 5.18. *O germe $f = (x, xy + y^5, xy^2 + y^3)$ é 5- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Sua $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão é 3.*

Prova. Seja $f = (x, xy + y^5, xy^2 + y^3)$. Então temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1, y, y^2),$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} = (0, xy + 5y^5, 2xy^2 + 3y^3).$$

Para mostrarmos a 5-determinação de f vamos mostrar que

$$\mathcal{M}_2^6 \theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta 1} f + \mathcal{M}_2^6(f^* \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2^6) \theta(f),$$

e então aplicar um resultado de Bruce, du Plessis e Wall [10]. Em outras palavras, vamos mostrar que

$$\mathcal{M}_2^6 \theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta 1} f \text{ mod } \mathcal{M}_2^{12} \theta(f).$$

Considerando as equações

$$\begin{aligned} x^k \frac{\partial f}{\partial x} - X^k \frac{\partial}{\partial X} &= (0, x^k y, x^k y^2) \\ x^{k-1} (y \frac{\partial f}{\partial y}) &= (0, x^k y + 5x^{k-1} y^5, 2x^k y^2 + 3x^{k-1} y^3) \\ X^{k-1} Y \frac{\partial}{\partial Y} &= (0, x^k y + x^{k-1} y^5, 0) \\ X^{k-1} Z \frac{\partial}{\partial Z} &= (0, 0, x^k y^2 + x^{k-1} y^3) \end{aligned}$$

e analisando a matriz proveniente de seus coeficientes vemos que a mesma é uma matriz 4×4 não-singular, e portanto $x^k y e_2, x^{k-1} y^5 e_2, x^k y^2 e_3, x^{k-1} y^3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f, \forall k \geq 2$. Em particular, $x^5 y e_2, x y^5 e_2, x^4 y^2 e_3, x^3 y^3 e_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$. Também temos $x^k e_m \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f, \forall k \geq 2, m = 1, 2, 3$. Vamos agora, procurar pelos outros monômios de grau 6 até os monômios de grau 11 mod $\mathcal{M}_2^1$. Vamos denotar por $\mathcal{F}$ o módulo $\mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^6(f^* \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2^6) \theta(f)$. Começamos obtendo os monômios de grau 6 na segunda componente. O vetor $x^4 y^2 e_2$ é obtido como segue: primeiro observamos que, como $x y^5 e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$ e $x, xy + y^5 \in f^*(\mathcal{M}_3)$ então

$$x(xy + y^5)(xy^5 e_2) = (0, x^3 y^6 + x^2 y^{10}, 0) \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f.$$

Então $x^3 y^6 e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f + \mathcal{M}_2^6(f^* \mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2^6) \theta(f) = \mathcal{F}$. Por outro lado, temos também

$$(0, x^4 y^2 + 2x^3 y^6 + x^2 y^{10}, 0) = X^2 Y^2 \frac{\partial}{\partial Y} \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f.$$

Então, segue que $x^4 y^2 e_2 \in \mathcal{F}$. Aproveitando isto, da equação

$$X^3 Z \frac{\partial}{\partial Y} = (0, x^4 y^2 + x^3 y^3, 0),$$

segue que $x^3 y^3 e_2 \in \mathcal{F}$. O vetor $(0, x^2 y^4, 0)$ é obtido observando-se que, como $x^2 y e_2 \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$ e $xy^2 + y^3 \in f^* \mathcal{M}_3$, então

$$(xy^2 + y^3)(x^2 y e_2) = (0, x^3 y^3 + x^2 y^4, 0) \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f$$

e então $x^2 y^4 e_2 \in \mathcal{F}$. Finalmente obtemos $y^6 e_2$ em $\mathcal{F}$ da equação

$$Z^2 \frac{\partial}{\partial Y} = (0, x^2 y^4 + 2xy^5 + y^6, 0).$$

Usando argumentos similares é fácil obter os demais monômios de grau 6 na primeira e segunda componentes.

Do que vimos acima, $\mathcal{F}$ contém todos os monômios de grau 6 em todas as posições. Então como $x \in f^*(\mathcal{M}_3)$ temos também:

$$x^{7-i} y^i e_m \in \mathcal{F}, m = 1, 2, 3, i = 0, 1, \dots, 6,$$

$$x^{8-i} y^i e_m \in \mathcal{F}, m = 1, 2, 3, i = 0, 1, \dots, 6,$$

⋮

$$x^{11-i} y^i e_m \in \mathcal{F}, m = 1, 2, 3, i = 0, 1, \dots, 6.$$

Os mesmos cálculos feitos acima também nos mostram que os monômios

$$y^5e_1, xy^7e_2, xy^8e_2, y^9e_2, y^{11}e_2, y^7e_3, xy^8e_3, x^2y^7e_3, y^9e_3 \in \mathcal{F},$$

e então também estão em $\mathcal{F}$ os monômios

$$x^i y^7 e_2, x^i y^8 e_2, x^i y^{11} e_2, x^i y^7 e_3, x^i y^8 e_3, x^i y^9 e_3, \forall i \geq 1.$$

Como $xy^8e_2, xy^9e_3 \in \mathcal{F}$ então a equação

$$xy^7 \frac{\partial f}{\partial x} = (xy^7, xy^8, xy^9) \in \mathcal{TA}_{\delta_1} f$$

implica que $xy^7e_1 \in \mathcal{F}$. O mesmo acontece com $x^2y^7e_1, x^3y^7e_1$ e $x^4y^7e_1$. Também podemos obter $x^3y^8e_1, x^2y^9e_1, xy^{10}e_1, y^{11}e_1 \bmod \mathcal{M}_2^{12}$ das equações

$$x^3y^8 \frac{\partial f}{\partial x}, x^2y^9 \frac{\partial f}{\partial x}, xy^{10} \frac{\partial f}{\partial x}, y^{11} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Assim, ainda devemos procurar pelos seguintes monômios:

- grau 7: y^7e_1, y^7e_2
- grau 8: y^8e_1, y^8e_2, y^8e_3
- grau 9: xy^8e_1, y^9e_1
- grau 10: $x^2y^8e_1, xy^9e_1, y^{10}e_1, y^{10}e_2, y^{10}e_3$
- grau 11: $y^{11}e_3, xy^{10}e_2, xy^{10}e_3$

Começamos pelos de grau 11. Obtemos $xy^{10}e_2$ e $xy^{10}e_3$ como segue. Temos

$$(0, 0, x^3y^2 + 2x^2y^6 + xy^{10}) = XY^2 \frac{\partial}{\partial Z} \in \mathcal{TA}_{\delta_1} f,$$

$$(0, x^3y^2 + 2x^2y^6 + xy^{10}, 0) = XY^2 \frac{\partial}{\partial Y} \in \mathcal{TA}_{\delta_1} f.$$

Mas, já vimos anteriormente que $x^2y^6e_3, x^3y^3e_3 \in \mathcal{F}$ e portanto podemos concluir que $xy^{10}e_3 \in \mathcal{F}$. Também sabemos que $x^2y^6e_2 \in \mathcal{F}$. Logo $(0, x^3y^2 + xy^{10}, 0) \in \mathcal{F}$.

Mas

$$x^2y(y \frac{\partial f}{\partial y}) = (0, x^3y^2 + 5x^2y^5, 2x^3y^3 + x^2y^4) \in \mathcal{TA}_{\delta_1} f \subset \mathcal{F}$$

com $x^2y^5e_2, x^3y^3e_3, x^2y^4e_3 \in \mathcal{F}$. Então $x^3y^2e_2 \in \mathcal{F}$ e, portanto $xy^{10}e_2 \in \mathcal{F}$. Finalmente, podemos obter $y^{11}e_3$ da equação

$$(y^8(y\frac{\partial f}{\partial y})) = (0, xy^9 + 5y^{13}, 2xy^{10} + 3y^{11}),$$

observando que $xy^9e_2, y^{13}e_2, xy^{10}e_3 \in \mathcal{F}$.

Passando agora aos monômios de ordem 10 é fácil obter $x^2y^8e_1, xy^9e_1, y^{10}e_1$ das equações

$$x^2y^8\frac{\partial f}{\partial x}, xy^9\frac{\partial f}{\partial x}, y^{10}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

O monômio $y^{10}e_3$ pode ser obtido da equação

$$y^7(y\frac{\partial f}{\partial y}) = (0, xy^8 + 5y^{12}, 2xy^9 + 3y^{10}),$$

pois $xy^8e_2, y^{12}e_2, xy^9e_3 \in \mathcal{F}$. Podemos agora obter xy^8e_1 da equação

$$xy^8\frac{\partial f}{\partial x} = (xy^8, xy^9, xy^{10}),$$

e para obtermos y^9e_1 usamos a equação

$$Z^3\frac{\partial}{\partial X} = (x^3y^6 + 3x^2y^7 + 3xy^8 + y^9, 0, 0),$$

observando que $x^3y^6e_1, x^2y^7e_1, xy^8e_1$ já foram obtidos em $\mathcal{F}$. fácil agora obter os monômios restantes, isto é, $y^7e_1, y^7e_2, y^8e_1, y^8e_2, y^8e_3, y^{10}e_2$. Este último é obtido da equação

$$y^9\frac{\partial f}{\partial x} = (y^9, y^{10}, y^{11}).$$

Já y^8e_1 é obtido da equação

$$y^8\frac{\partial f}{\partial x} = (y^8, y^9, y^{10}).$$

Para obtermos y^8e_2 usamos as equações

$$y^3(y\frac{\partial f}{\partial y}) = (0, xy^4 + 5y^8, 2xy^5 + 3y^6),$$

$$YZ\frac{\partial}{\partial Y} = (0, x^2y^3 + xy^4 + xy^7 + y^8, 0),$$

observando que $xy^5e_3, y^6e_3, x^2y^3e_2, xy^7e_2 \in \mathcal{F}$. A equação

$$y^5(y\frac{\partial f}{\partial y}) = (0, xy^6 + 5y^{10}, 2xy^7 + 3y^8)$$

nos dá $y^8e_3 \in \mathcal{F}$. Finalmente as equações

$$y^6\frac{\partial f}{\partial x} = (y^6, y^7, y^8),$$

$$y^7\frac{\partial f}{\partial x} = (y^7, y^8, y^9)$$

nos dão, respectivamente, y^7e_2 e y^7e_1 .

Assim, segue que

$$\mathcal{M}_2^6\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f + \mathcal{M}_2^6(f^*\mathcal{M}_3 + \mathcal{M}_2^6)\theta(f),$$

e portanto f é $5\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado. $\square$

Continuando consideremos agora $\sigma = (x, xy, xy^2 + y^3)$ como um $(l-1)$ -jato em $J^l(2, 3)$. Então uma l -transversal completa para σ é o próprio jato se $l \equiv 0, 1 \pmod{3}$, e é dada por $(x, xy + ay^{3k+2}, xy^2 + y^3)$ se $l \equiv 2 \pmod{3}$. Este germe é equivalente a $(x, xy \pm y^{3k+2}, xy^2 + y^3)$, se $a \neq 0$.

Com um raciocínio análogo àquele usado na prova da proposição 5.18, prova-se o seguinte resultado.

Proposição 5.19. *O germe $f = (x, xy + y^{3k+2}, xy^2 + y^3)$ é $(3k+2)\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado.*

5.5.2 Germes sobre o 3-jato (x, xy, y^3)

Nesta seção consideramos o 3-jato $\sigma = (x, xy, y^3)$. Também aqui a 4-transversal completa é vazia e uma 5-transversal completa para σ é dada por $(x, xy + ay^5, y^3)$, a qual pode ser reduzida à forma $(x, xy \pm y^5, y^3) \sim (x, xy + y^5, y^3)$ se $a \neq 0$.

Proposição 5.20. *O germe $f = (x, xy + y^5, y^3)$ é $5\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado e sua $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão é 4.*

Prova. Poderíamos também aqui usar um argumento análogo ao que usamos na demonstração da proposição 5.18, mas neste caso, não é difícil mostrar que

$$\mathcal{M}_2^6\theta(f) \subset \mathbf{T}\mathcal{A}_{\delta_1}f,$$

e portanto, de acordo com o teorema 5.2, f é $6\text{-}\mathcal{A}_\delta$ -determinado. $\square$

Pensando agora $\sigma = (x, xy, y^3)$ como um $(l-1)$ -jato em $J^l(2, 3)$ é fácil ver que uma l -transversal completa para σ é o próprio jato se $l \equiv 0, 1 \pmod{3}$ e é dada por $(x, xy + ay^{3k+2}, y^3)$ se $l \equiv 2 \pmod{3}$. Se $a \neq 0$ esta se reduz à forma $(x, xy \pm y^{3k+2}, y^3)$. Ainda com um argumento análogo ao usado na proposição 5.18 ou na proposição 5.20 mostra-se o seguinte resultado.

Proposição 5.21. *O germe $f = (x, xy \pm y^{3k+2}, y^3)$ é $(3k+2)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.*

5.6 Germes com 1-jato $(y, 0, 0)$

Nesta seção estudaremos os germes sobre o 1-jato $(y, 0, 0)$. Começamos, seguindo o método indutivo, classificando os 2-jatos sobre este 1-jato.

Lema 5.22. *Existem seis $\mathcal{A}_\delta^2$ -órbitas sobre o 1-jato $(y, 0, 0)$ em $J^2(2, 3)$: as órbitas dos jatos*

$$(y, x^2, xy), (y, x^2, 0), (y + x^2, xy, 0), \\ (y + x^2, 0, 0), (y, xy, 0) \text{ e } (y, 0, 0).$$

Prova. Para o 1-jato $(y, 0, 0)$ uma transversal completa em $J^2(2, 3)$ é dada por $(y + ax^2, b_1x^2 + b_2xy, c_1x^2 + c_2xy)$. Se $d = b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$ este 2-jato é equivalente a $(y + ax^2, x^2, xy)$ e este por sua vez é equivalente ao 2-jato

$$(y, x^2, xy). \quad (5.34)$$

Se por outro lado temos $d = 0$ então a transversal completa se reduz a $\sigma = (y + ax^2, b_1x^2 + b_2xy, 0)$. Se $b_1 \neq 0$ a mudança de coordenadas na meta $\bar{X} = X - (a/b_1)Y$ transforma σ em $(y - (ab_2/b_1)xy, b_1x^2 + b_2xy, 0)$, e então a mudança de coordenadas na fonte $\bar{x} = x, \bar{y} = y - (ab_2/b_1)xy$, coloca o jato na forma $(y, b_1x^2 + b_2xy, 0)$. Completando então o quadrado na segunda coordenada vemos que este jato é equivalente a

$$(y, x^2, 0). \quad (5.35)$$

Se $b_1 = 0$ σ se reduz a um dos seguintes:

$$(y + x^2, xy, 0) \quad (5.36)$$

$$(y, xy, 0) \quad (5.37)$$

$$(y + x^2, 0, 0) \quad (5.38)$$

$$(y, 0, 0) \quad (5.39)$$

□

Passamos agora a estudar os jatos de ordem mais alta sobre cada um dos 2-jatos obtidos no lema acima. Observamos, antes disso, que os 2-jatos 5.36, 5.37, 5.38 e 5.39 têm $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão ≥ 4 e não nos interessarão.

5.7 Germes com 2-jato (y, x^2, xy)

Seja $\sigma(x, y) = (y, x^2, xy)$. A primeira coisa a notar é que, diferentemente do germe (x, y^2, xy) , σ não é finitamente determinado. De fato os monômios $(x^{2k+1}, 0, 0), (0, 0, x^{2k+1}) \notin \mathbf{TA}_{\delta_1}\sigma$ para todo $k \geq 1$. Assim, se l é par uma l -transversal completa para σ em $J^l(2, 3)$ é o próprio σ e, se l for ímpar, digamos $l = 2k + 1$, a transversal completa é $(y + ax^l, x^2, xy + bx^l)$. Esta última pode ser reduzida a um dos seguintes jatos:

$$\begin{aligned} & (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy \pm x^{2k+1}) \\ & (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy) \\ & (y, x^2, xy \pm x^{2k+1}) \\ & (y, x^2, xy) \end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro germes listados acima são equivalentes. De fato seja $f(x, y) = (y + \epsilon_1 x^{2k+1}, x^2, xy + \epsilon_2 x^{2k+1})$ e $g(x, y) = (y, x^2, xy \pm x^{2k+1})$, onde ϵ_1, ϵ_2 são independentes iguais a 1 ou -1 . A mudança de coordenadas na meta $\bar{X} = X - \epsilon_1/\epsilon_2 Z$ traz o germe f à forma $(y \pm xy, x^2, xy + \epsilon_2 x^{2k+1})$, e então a $\mathcal{A}_{\delta}$ -mudança de coordenadas $\bar{x} = x, \bar{y} = y \pm xy$ transforma este $(2k + 1)$ -jato ao $(2k + 1)$ -jato $(\bar{y}, x^2, x\bar{y} + x^2\bar{y} + \epsilon_2 x^{2k+1})$ e este é claramente equivalente à $(y, x^2, xy \pm x^{2k+1}) = g(x, y)$.

Teorema 5.23. *O germe $f(x, y) = (y, x^2, xy \pm x^{2k+1})$ é $(2k + 1)$ - $\mathcal{A}_{\delta}$ -determinado.*

Prova. Nós mostraremos que $\mathbf{TA}_{\delta_1}f \supset \mathcal{M}_2^{2k+2}\theta(f)$. Começamos observando que $f^*(\mathcal{M}_3^2)$ contém todos os monômios da forma $x^{2i}y^j$ exceto x^2 e y . Assim, também $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$ contém todos os vetores da forma $(x^{2i}y^j)e_m$, com $2i + j \geq 2$ e $m = 1, 2, 3$. Em particular $\mathbf{TA}_{\delta_1}f$ contém todos os vetores da forma $x^{2i}y^j e_m$ com $2i + j \geq 2k + 2$ e $m = 1, 2, 3$. Agora, vamos analisar os monômios da forma $x^{2i+1}y^j$ com $2i + j + 1 \geq 2k + 2$ e $j \geq 1$. Estes monômios podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x^{2i+1}y^j e_1 &= x^{2i+1}y^{j-1} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - Y^{i+1} X^j \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2x^{2i+1}y^j e_2 &= x^{2i}y^j \frac{\partial f}{\partial x} - Y^i X^j (X + (2k + 1)Y^k) \frac{\partial}{\partial Z} \\ x^{2i+1}y^j e_3 &= x^{2i}y^{j-1} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - Y^i X^j \frac{\partial}{\partial X} \end{aligned}$$

Resta-nos agora obter os monômios x^{2i+1} com $2i+1 \geq 2k+2$. Para estes temos:

$$\begin{aligned} x^{2i+1}e_1 &= Y^{i-k} \frac{\partial}{\partial X} - x^{2i-2k+1} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - XY^{i-k+1} \frac{\partial}{\partial Z} \\ 2x^{2i+1}e_2 &= x^{2i} \frac{\partial f}{\partial x} - Y^i (X + (2k+1)Y^k) \frac{\partial}{\partial Z} \\ (2k)x^{2i+1}e_3 &= x^{2i-2k+1} \frac{\partial f}{\partial x} - 2Y^{i-k+1} \frac{\partial}{\partial Y} - Y^{i-k} Z \frac{\partial}{\partial Z} \end{aligned}$$

Assim, nós temos mostrado que $\mathcal{M}_2^{2k+2}\theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta_1}f$ e portanto f é $(2k+1)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. $\square$

Consideremos agora o jato $\sigma(x, y) = (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy)$ e seja $l > 2k+1$. Queremos encontrar uma transversal completa para σ em $J^l(2, 3)$. Se l é par uma transversal completa para σ é o próprio σ , enquanto que se l é ímpar, digamos $l = 2m+1$, então uma transversal completa para σ é dada por

$$(y \pm x^{2k+1}, x^2, xy + ax^{2m+1}).$$

Mas, com uma aplicação do Lema de Mather, vemos que este germe é ainda equivalente ao germe σ inicial, para qualquer valor do parâmetro a . Seja $\Pi : J^{2m+1} \rightarrow J^{2k+1}$ a projeção canônica e seja S a subvariedade do espaço de jatos $J^{2m+1}(2, 3)$ dada por

$$S = \Pi^{-1}(\sigma).$$

A variedade S é na verdade o conjunto de todos os $(2m+1)$ -jatos sobre o $(2k+1)$ -jato σ , e de acordo com o teorema da transversal completa, um elemento de S é da forma acima. Geometricamente, S é uma reta em $J^{2m+1}(2, 3)$ passando por σ com a direção do vetor (tangente) $x^{2m+1}e_3$. claro que S é conexa. Denotemos por ϕ_a um elemento genérico de S . Então, para podermos aplicar o Lema de Mather, tudo o que temos que fazer é mostrar que $\mathbf{TA}_\delta^{2m+1}\phi_a \supset \mathbf{T}_{\phi_a}S$, $\forall a$, ou seja, devemos mostrar que $x^{2m+1}e_3 \in \mathbf{TA}_\delta^{2m+1}\phi_a$, $\forall a$. De fato, as seguintes equações em $\mathbf{TA}_\delta^{2m+1}\phi_a$

$$\begin{aligned} (0, 0, x^{2m-2k}y \pm x^{2m+1}) &= Y^{m-k}X \frac{\partial}{\partial Z} \\ (x^{2m-2k-1}y, 0, x^{2m-2k}y) &= x^{2m-2k-1} \left(y \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \right) \\ (x^{2m-2k-1}, 0, 0) &= Y^{m-k-1}Z \frac{\partial}{\partial X} \bmod \mathcal{M}_2^{2m+2} \end{aligned}$$

mostram que $x^{2m+1}e_3 \in \mathbf{TA}_\delta^{2m+1}\phi_a \forall a$. Então pelo Lema de Mather (1.4) segue que S está inteiramente contida em uma única $\mathcal{A}_\delta^{2m+1}$ -órbita e, portanto a transversal completa se reduz novamente ao jato σ , isto é,

$$\phi_a \sim (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy).$$

Segue então o seguinte

Teorema 5.24. *O germe $f(x, y) = (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy)$ é $(2k+1)$ - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.*

5.8 Germes com 2-jato $(y, x^2, 0)$

Seja $\sigma(x, y) = (y, x^2, 0)$. Uma transversal completa para σ em $J^3(2, 3)$ é dada por

$$(y + ax^3, x^2, bx^3 + cxy^2) \quad (5.40)$$

Se $abc \neq 0$, podemos, por mudança de escalas, transformar este germe em c . Se ao contrário, tivermos $abc = 0$ então a transversal completa se reduz a um dos seguintes

$$(y, x^2, x^3 \pm xy^2) \quad (5.41)$$

$$(y, x^2, x^3) \quad (5.42)$$

$$(y, x^2, xy^2) \quad (5.43)$$

$$(y + x^3, x^2, x^3) \sim (y, x^2, x^3) \quad (5.44)$$

$$(y + x^3, x^2, xy^2) \quad (5.45)$$

$$(y + x^3, x^2, 0) \quad (5.46)$$

$$(y, x^2, 0) \quad (5.47)$$

Dos 3-jatos acima os que realmente interessarão são 5.40, 5.41 e 5.42, uma vez que os demais apresentam $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão ≥ 4 .

Vamos começar analisando o 3-jato 5.40 dado por $(y + \epsilon_1 x^3, x^2, x^3 + \epsilon_2 xy^2)$, onde ϵ_1 e ϵ_2 são, independentemente, iguais a 1 ou -1. A mudança de coordenadas na meta $\bar{X} = X - \epsilon_1 Z$ transforma o 3-jato acima em $(y \pm xy^2, x^2, x^3 + \epsilon_2 xy^2)$. Feito isto, a mudança de coordenadas na fonte $x = x$, $Y = y \pm xy^2$ coloca o 3-jato em questão na forma $(Y, x^2, x^3 \pm xY^2)$. Portanto o 3-jato 5.40 é equivalente ao 3-jato 5.41.

Teorema 5.25. *O germe $f(x, y) = (y, x^2, x^3 \pm xy^2)$ é 3- $\mathcal{A}_\delta$ -determinado.*

Prova. Vamos mostrar que $\mathcal{M}_2^4 \theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta_1} f$. Lembremos que $\mathbf{TA}_{\delta_1} f = \mathcal{M}_2^2 \{ \partial f / \partial x \} + \mathcal{M}_2 \{ y \partial f / \partial y \} + f^* (\mathcal{M}_3^2) \theta(f)$. Observemos inicialmente que $x^{2k} e_m, y^k e_m, x^{2i} y^j e_m \in \mathbf{TA}_{\delta_1} f, \forall k \geq 2, \forall i, j \geq 1, m = 1, 2, 3$. Vamos agora analisar os monômios da forma $x^{2i+1} y^j$. O vetor $x^{2i+1} y^j e_1$ pode ser obtido através da equação

$$x^{2i+1} y^{j-1} \left(y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - 2Y^{i+1} X^{j+1} \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \forall i \geq 0, j \geq 1$$

Já a equação

$$x^{2i}y^j \frac{\partial f}{\partial x} - 3Y^{i+1}X^j - Y^iX^{j+2} \frac{\partial}{\partial Z},$$

fornece os vetores $x^{2i+1}y^je_2$ para $i \geq 1, j \geq 1$, enquanto que a equação

$$y^j \frac{\partial f}{\partial x} - 3 * YX^j - X^{j+2} \frac{\partial}{\partial Z}$$

por sua vez, nos dá, os vetores xy^je_2 para $j \geq 2$. Agora, a equação

$$x^{2i}yj - 2(y \frac{\partial f}{\partial y}) - Y^iX^{j-1} \frac{\partial}{\partial X}$$

fornece-nos os vetores $x^{2i+1}y^je_3$ para $i \geq 1, j \geq 2$. Para obtermos os vetores $x^{2i+1}ye_3$ notamos inicialmente que

$$xy^3e_3 = y(y \frac{\partial f}{\partial y}) - X^2 \frac{\partial}{\partial X},$$

e então a equação

$$XZ \frac{\partial}{\partial Z},$$

nos mostra que $x^3ye_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$. Segue então, observando que $x^2 \in f^*(\mathcal{M}_{\exists})$, que $x^{2i+1}ye_3 \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, $\forall i \geq 1$. Segue também que $xy^j \in \mathbf{TA}_{\delta_1}f$, $\forall j \geq 3$. Resta agora, nos preocuparmos com os monômios x^{2i+1} . As equações

$$x^{2i} \frac{\partial f}{\partial x} - 3Y^{i+1} - Y^iX^2 \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$x^{2i-1} \frac{\partial f}{\partial x} - 2Y^i - x^{2i-1}y^2e_3$$

$$Y^{i-1}Z \frac{\partial}{\partial X} - x^{2i-1}y^2e_1$$

nos fornecem, respectivamente, $x^{2i+1}e_2$, $\forall i \geq 1$, $x^{2i+1}e_3$, $\forall i \geq 2$ e $x^{2i+1}e_1$, $\forall i \geq 2$.

De tudo o que vimos acima, segue então que

$$\mathcal{M}_2^4\theta(f) \subset \mathbf{TA}_{\delta_1}f,$$

e portanto f é $3\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Com mais alguns poucos cálculos encontramos que o $\mathcal{A}_\delta$ -espaço tangente e o $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -espaço tangente de f são dados por

$$\mathrm{T}\mathcal{A}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x, xy\} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}\mathcal{A}_{\delta_e} f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & & \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x, xy\} \end{pmatrix}.$$

□

5.8.1 Germes com 3-jato (y, x^2, x^3)

Seja $\sigma = (y, x^2, x^3)$. Uma transversal completa para σ em $J^4(2, 3)$ é dada por

$$(y, x^2, x^3 + axy^3).$$

De fato a única dúvida quanto aos termos de grau 4 são os monômios xy^3 . Podemos obter xy^3e_1 pela equação $xy^2(y\partial f/\partial y)$ enquanto que xy^3e_2 pode ser obtido pela equação $y^3\partial f/\partial x - 3YX^3\partial/\partial Z$, e a transversal completa é como dada acima. Se $a \neq 0$ então as mudanças de coordenadas $y = 1/a^{1/3}\bar{y}$, $\bar{X} = a^{1/3}X$, nesta ordem, transformam a transversal completa acima no 4-jato

$$(y, x^2, x^3 + xy^3).$$

Assim os 4-jatos relevantes são

$$(y, x^2, x^3 + xy^3) \tag{5.48}$$

$$(y, x^2, x^3) \tag{5.49}$$

Na verdade, o germe $f = (y, x^2, x^3 + xy^3)$ é a parte inicial de uma família de germes finitamente determinados, como veremos a seguir.

Consideremos então o 4-jato $\sigma = (y, x^2, x^3)$ e procuremos uma transversal completa para σ em $J^k(2, 3)$ para $k \geq 5$. fácil ver que os monômios de grau k todos estão presentes em $\mathrm{T}\mathcal{A}_{\delta_1}^k \sigma$ exceto, possivelmente, $xy^{k-1}e_i$. Mas podemos obter $xy^{k-1}e_1$ da equação $xy^{k-2}(y\partial\sigma/\partial y)$, enquanto que $xy^{k-1}e_2$ é obtido pela equação $y^{k-1}\partial\sigma/\partial x - 3YX^{k-1}\partial/\partial Z$. Assim, o único monômio em falta é o monômio $xy^{k-1}e_3$. Portanto uma transversal completa para σ em $J^k(2, 3)$ é dada por

$$(y, x^2, x^3 + axy^{k-1}).$$

Esta pode ser reduzida, se $a \neq 0$ à forma

$$(y, x^2, x^3 \pm xy^{k-1}),$$

sendo que quando k é par este germe é equivalente à $(y, x^2, x^3 + xy^{k-1})$.

Teorema 5.26. *O germe $f(x, y) = (y, x^2, x^3 \pm xy^{k-1})$, $k \geq 4$ é k - $\mathcal{A}_\delta$ -determinado. Sua $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão é k .*

Prova. A demonstração deste teorema segue o mesmo argumento que temos usado até aqui. De fato, usando métodos análogos aos que usamos nas provas anteriores, especialmente na prova do teorema 5.25, mostra-se, sem muita dificuldade, que

$$\mathcal{M}_2^{k+1}\theta(f) \subset \mathcal{TA}_\delta f,$$

e o resultado segue. A expressão para os espaços tangentes de f são dadas por

$$\mathcal{TA}_\delta f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x, xy, xy^2, \dots, xy^{k-2}\} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{TA}_{\delta_e} f = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 & - & \{x\} \\ \mathcal{M}_2 & & \\ \mathcal{M}_2 & - & \{x, xy, xy^2, \dots, xy^{k-2}\} \end{pmatrix}.$$

□

Observação 5.3. *Completamos assim, o trabalho de classificação de germes $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência, cuja $\mathcal{A}_\delta$ -codimensão é no máximo 3, tendo então provado o teorema 5.4. Na próxima seção, vamos provar o teorema 5.4.*

5.9 Os germes simples

Nesta seção provaremos o teorema 5.5 que caracteriza os germes simples $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência. Só relembrando queremos provar a que os únicos germes $\mathcal{A}_\delta$ -simples são aqueles listados abaixo (tabela 5.4):

prova do teorema 5.5. Primeiro mostraremos que os germes na tabela 5.4 são simples. Começamos com o germe X-cap. Um $\mathcal{A}_\delta$ -desdobramento versal deste germe é dado por

$$F(u, v, x, y) = (x, y^2 + uy, xy + vy),$$

	<i>germe</i>	$\mathcal{A}_s\text{-cod}$
X-cap	$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$	1
1_k	$(x, y) \mapsto (y, x^2, xy \pm x^{2k+1})$	2k
2_k	$(x, y) \mapsto (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy)$	2k + 1

Tabela 5.4: Germes simples sob $\mathcal{A}_s$ -equivalência

e se $u \neq 0$ ou $v \neq 0$ então $F_u(0)$ (germe de $F_{(u,v)}$ na origem) é uma imersão. Assim, um desdobramento versal do germe **X-cap** encontra somente um número finito de $\mathcal{A}_s$ -órbitas, e portanto este germe é simples.

Já para o germe de tipo **1_k** um desdobramento versal é dado por

$$F(u_i, v_j, w, x, y) = (y + \sum_{i=1}^k u_i x^{2i-1}, x^2 + wx, xy + x^{2k+1} \sum_{j=1}^k v_j x^{2j-1}).$$

Se $v_1 \neq 0$ ou $w \neq 0$ o germe de F_u na origem é uma imersão. Se $v_1 = w = 0$ e $u_1 \neq 0$ pondo $\bar{x} = y + u_1 x$, vemos que $F_u(0)$ é equivalente à

$$(\bar{x} + O(3), \frac{1}{u_1^2}(-2\bar{x}y + y^2), \frac{1}{u_1}(\bar{x}y - y^2) + O(3)).$$

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{-2}{u_1^2} & \frac{1}{u_1^2} \\ \frac{1}{u_1} & \frac{-1}{u_1} \end{pmatrix}$$

tem determinante não-nulo, segue que o jato acima é equivalente ao germe $(x + O(3), xy + O(3), y^2 + O(3))$ e portanto $F_u(0)$ é equivalente ao cross-cap (x, xy, y^2) . Suponhamos agora que $w = v_1 = u_1 = u_2 = \dots u_i = 0$ para algum i ; se para algum $j \leq i$ tivermos $v_j \neq 0$ então $F_u(0)$ é equivalente ao germe $(y, x^2, xy \pm x^{2j_0-1})$ onde $j_0 = \min\{j \leq i; v_j \neq 0\}$, e portanto temos um germe do tipo **1_j**, com $j < k$. Se, por outro lado, tivermos também $v_1 = v_2 = \dots v_i = 0$ sejam $l_u = \min\{j; u_j \neq 0\}$, $l_v = \min\{j; v_j \neq 0\}$ e $l = \min\{l_u, l_v\}$. Então $F_u(0)$ será equivalente ou ao germe $(y \pm x^{2l-1}, x^2, xy)$ ou ao germe $(y, x^2, xy \pm x^{2l-1})$. Assim, vemos que um desdobramento versal de um germe do tipo **1_k** só intercepta um número finito de $\mathcal{A}_s$ -órbitas, isto é, estes germes são simples. Um argumento análogo mostra que os germes do tipo **2_k** também são simples.

Por outro lado, se f é qualquer outro germe diferente daqueles listados acima, é fácil ver que f pode ser deformado a um germe cujo 2-jato é $(x, y^2 + xy, 0)$. Mas o germe mais simples tendo este 2-jato é o germe $(x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$. De acordo com o teorema 5.10 este germe é não-simples, e portanto também são não-simples todo germe sobre este 2-jato. Logo f é não-simples. $\square$

Veremos agora como se dá a distinção entre os germes do teorema 5.5. Começamos com um resultado elementar. No que segue vamos denotar por $D^2(f)$ a curva de pontos duplos de um germe f .

Lema 5.27. *Se f, g são $\mathcal{A}_\delta$ -equivalentes, então $D^2(f)$ e $D^2(g)$ têm o mesmo tipo de contato com a reta $y = 0$.*

Observação 5.4. *Lembramos aqui a definição de contato (ver [27]). Sejam $M_i, N_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim M_1 = \dim M_2$ e $\dim N_1 = \dim N_2$. Dizemos que o contato de M_1 e N_1 em p_1 é do mesmo tipo que o contato de M_2 e N_2 em p_2 se existe um germe de difeomorfismo*

$$H : \mathbb{R}^n, p_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, p_2$$

tal que $H(M_1) = M_2$ e $H(N_1) = N_2$.

Prova. Se $D^2(f) = D^2(g) = \emptyset$ não temos nada a fazer. Suponhamos então $D^2(f) \neq \emptyset$ e tomemos um ponto $p \in D^2(f)$. Então, com certeza, existe $q \neq p$ tal que $f(p) = f(q)$. Por outro lado, como f e g são $\mathcal{A}_\delta$ -equivalentes, existem germes de difeomorfismos $h = (h_1, h_2)$ da fonte, com $h_2(x, 0) = 0$, e k da meta tal que $g \circ h = k \circ f$. Assim temos:

$$g(h(p)) = (k \circ f)(p) = k(f(p)) = k(f(q)) = (k \circ f)(q) = g(h(q))$$

e portanto $h(p) \in D^2(g)$. Isto mostra de uma só vez que $D^2(g) \neq \emptyset$ e também que o difeomorfismo h leva $D^2(f)$ sobre $D^2(g)$. Ora, como h preserva a reta $y = 0$, segue que $D^2(f)$ e $D^2(g)$ têm o mesmo tipo de contato com a reta $y = 0$. $\square$

Teorema 5.28. *Os germes de tipo X -cap, 1_k e 2_k se distinguem um do outro pelo contato da curva de pontos duplos com a reta $y = 0$.*

Prova. De acordo com o lema 5.27 basta calcular a curva de pontos duplos de cada um destes germes e determinar a ordem de contato da mesma com a reta $y = 0$. Começamos com o cross-cap usual. Neste caso a curva de pontos duplos é a reta $x = 0$ e esta é transversal à reta $y = 0$.

A curva de pontos duplos de um germe de tipo 1_k é dada por $y = \mp x^{2k}$ e, portanto o contato desta curva com a reta $y = 0$ é de ordem $2k - 1$. Por sua vez, um germe de tipo 2_k tem sua curva de pontos duplos dada por $y = \mp x^{2k+1}$, a qual tem contato de ordem $2k$ com a reta $y = 0$. O resultado agora segue do lema 5.27. $\square$

Alguns exemplos podem ser vistos na figura 5.1 onde são mostrados a curva de pontos duplos e a reta $y = 0$ na fonte e também a imagem em $\mathbb{R}^3$.

Figura 5.1: Os germes (a) 1_1 ; (b) 2_2

Capítulo 6

Consequências da classificação

Neste capítulo destacamos algumas consequências da classificação obtida no capítulo 5. Daremos aqui tabelas de adjacências das famílias obtidas e analisaremos os conjuntos de bifurcação dos germes de codimensão até 3. Começamos listando as adjacências.

6.1 Adjacências

Passamos agora a descrever as adjacências dos germes obtidos no capítulo 5. Dado um grupo $\mathcal{G}$ de equivalências de germes, dizemos que a $\mathcal{G}$ -classe L é *adjacente* à $\mathcal{G}$ -classe K ($L \rightarrow K$) se todo germe de aplicação $f \in L$ pode ser deformado a um germe in K por perturbações arbitrariamente pequenas. Diz-se também que K se especializa a L . Assim, as $\mathcal{G}$ -classes às quais L é adjacente são aquelas que aparecem em um desdobramento $\mathcal{G}$ -versal de qualquer germe em L . Mostraremos abaixo, nas figuras 6.2 e 6.3, como são as adjacências para as $\mathcal{A}_\delta$ -classes de germes obtidas em nossa classificação. Para isto, precisamos de um desdobramento $\mathcal{A}_\delta$ -versal de cada um dos germes obtidos na classificação. A tabela 6.1 mostra cada um dos germes (ou famílias de germes) obtidos na classificação juntamente com uma base para um desdobramento $\mathcal{A}_\delta$ -versal do germe. Muito da geometria destes germes está contida nestes desdobramentos.

A seguir daremos uma tabela de adjacências para os germes listados na tabela 6.1. A tabela 6.2 mostra as adjacências dos germes com 1-jato $(y, 0, 0)$. Como podemos observar, os germes da forma $(y, x^2, x^3 \pm xy^k)$, aqui rotulados $\tilde{S}_k$, são não-simples por serem adjacentes ao germe não-simples $(x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y)$. A tabela 6.3 mostra as adjacências dos germes com 1-jato $(x, 0, 0)$.

<i>forma normal</i>	<i>desdobramento versal</i>
$(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$	$\{ye_2\}$
$(x, y) \mapsto (y, x^2, xy \pm x^{2k+1})$	$\{x^{2i-1}e_1, x^{2i-1}e_3, i = 1 \dots k\}$
$(x, y) \mapsto (y \pm x^{2k+1}, x^2, xy)$	$\{x^{2i-1}e_1, i = 1 \dots k,$ $x^{2j-1}e_3, j = 1 \dots k+1\}$
$(x, y) \mapsto (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y), a \neq -1, -3/4$	$\{ye_3, xye_3\}$
$(x, y) \mapsto (x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^{2k+1}), k \geq 2$	$\{ye_3, y^2e_3, y^{2i-1}3e_3, i = 2 \dots k\}$
$(x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1}), k \geq 1$	$\{ye_2, xye_2, y^{2i-1}e_3, i = 1 \dots k\}$
$(x, y) \mapsto (x, xy \pm y^5, xy^2 + y^3)$	$\{y^2e_2, ye_3, y^2e_3\}$
$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 \pm x^{k-1}y), k \geq 4$	$\{x^{i-2}ye_2, i = 2 \dots k$ $x^{j-3}ye_3, j = 3 \dots k\}$
$(x, y) \mapsto (x, y^2 + x^2y, y^3 \pm x^3y)$	$\{ye_2, xye_2, ye_3, xye_3\}$
$(x, y) \mapsto (y, x^2, x^3 \pm xy^k)$	$\{xe_1, xe_3, xy^{i-1}e_3, i = 1 \dots k\}$
$(x, y) \mapsto (x, xy \pm y^5, y^3)$	$\{y^2e_2, ye_3, y^2e_3, xy^2e_3\}$

Tabela 6.1: Desdobramentos $\mathcal{A}_\delta$ -versais

Tabela 6.2: Adjacências dos germes com 1-jato $(y, 0, 0)$

6.2 Conjuntos de Bifurcação

Passamos agora a descrever os conjuntos de bifurcação dos germes listados na tabela 5.1, isto é, dos germes de $\mathcal{A}_{\delta_\varepsilon}$ -codimensão até 3.

Para um germe $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ (sob $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência) o conjunto de bifurcação é composto basicamente de cinco componentes, a saber,

1. o conjunto de bifurcação de f como uma aplicação de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$;
2. o conjunto de bifurcação da restrição de f à reta $\{y = 0\}$ (fronteira), ou seja, como uma aplicação de $\mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$;

Tabela 6.3: Adjacências dos germes com 1-jato $(x, 0, 0)$

3. *fronteira* tangenciando a curva de pontos duplos
4. *fronteira* passando por um ponto de cross-cap
5. auto-interseção da *fronteira* sobre a curva de pontos duplos

Na sequência descreveremos cada uma destas componentes para cada germe na tabela 5.1. Começamos com os germes simples.

6.2.1 Conjuntos de bifurcação dos germes simples

Lembremos que os germes simples são todos do mesmo tipo topológico, na verdade, todos eles são $\mathcal{A}$ -equivalentes a cross-caps. Neste caso, a primeira componente do conjunto de bifurcação de cada um deles será sempre vazia.

X-cap: $f(x, y) = (x, y^2, xy)$.

Este germe tem $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão 1 e um desdobramento $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -versal para f é dado por

$$F(x, y, a) = (x, y^2 + ay, xy).$$

Figura 6.1: Bifurcação do germe $X\text{-cap}$

Claramente as componentes (1) e (2) do conjunto de bifurcação de F são vazias. A curva de pontos duplos de F_a é simplesmente o eixo y , que é portanto transversal à fronteira. Assim, a terceira componente do conjunto de bifurcação de F também é vazia. O (único) ponto de cross-cap de F_a é o ponto $(0, -a/2)$ e este ocorre sobre a fronteira se, e somente se, $a = 0$, sendo esta a quarta componente do conjunto de bifurcação (ver a figura 6.1).

$$1_1: f(x, y) = (y, x^2, xy \pm x^3).$$

Um desdobramento $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -versal deste germe é dado por

$$F(x, y, a, b) = (y + ax, x^2, xy \pm x^3 + bx).$$

Começamos determinando a curva de pontos duplos deste germe, isto é, os pares de pontos $(x, y) \neq (u, v)$ tais que $F(x, y, a, b) = F(u, v, a, b)$. Para tanto precisamos resolver as equações

$$\begin{aligned} y + ax &= v + au \\ x^2 &= u^2 \\ xy \pm x^3 + bx &= uv \pm u^3 + bu \end{aligned}$$

Da segunda equação segue que $u = -x$, e então as demais equações se transformam

em

$$\begin{aligned}y + ax &= v - ax \\ xy \pm x^3 + bx &= -xv \mp x^3 - bx\end{aligned}$$

Assim temos que $v = y + 2ax$ e então eliminando v da segunda equação, e notando que $x \neq 0$ (pois do contrário teremos $u = x = 0$ e $y = v$), obtemos que a curva de pontos duplos de $F_{(a,b)}$ é dada (na fonte) pela equação

$$y = -(x^2 + ax + b)$$

A involução que faz o intercâmbio de pares de pontos com mesma imagem sobre esta curva é dada por

$$(x, y) \mapsto (-x, y + 2ax),$$

e seus pontos fixos são os pontos da forma $(0, y)$. Como o germe f é um cross-cap, a primeira componente do conjunto de bifurcação é vazia.

A segunda componente do conjunto de bifurcação é simplesmente o conjunto de bifurcação de f restrita à fronteira, ou seja, quando restrita à reta $\{y = 0\}$. Neste caso a aplicação F se reduz a

$$(x, y) \mapsto (ax, x^2, \pm x^3 + bx).$$

Esta última aplicação é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal do germe $(0, x^2, x^3)$. O conjunto de bifurcação aqui é dado por

$$a = b = 0. \tag{6.1}$$

A terceira componente é aquela formada pelos valores dos parâmetros para os quais a curva de pontos duplos é tangente à fronteira $\{y = 0\}$. Esta componente é simplesmente o discriminante da equação

$$x^2 + ax + b = 0,$$

que é dado por

$$a^2 - 4b = 0, \tag{6.2}$$

A quarta componente é formada pelos valores dos parâmetros para os quais a fronteira passa por um ponto de cross-cap. Um ponto de cross-cap é um ponto da curva de pontos duplos que é, ao mesmo tempo, um ponto fixo da involução. Estes

Figura 6.2: Conjunto de bifurcação do germe 1_1 (fonte)

pontos fixos são da forma $(0, y)$ e, isto substituído na equação da curva de pontos duplos nos mostra que os pontos de cross-cap são da forma $(0, -b)$ (assim, para cada (a, b) fixado existe um único ponto de cross-cap). Portanto a fronteira passará por um tal ponto se e somente se tivermos

$$b = 0 \quad (6.3)$$

sendo esta a quarta componente do conjunto de bifurcação.

Finalmente, a quinta componente é formada pelos valores dos parâmetros para os quais a fronteira se autointercepta sobre a curva de pontos duplos. Para isto os pontos $(x, 0)$ e $(-x, 0)$ devem ter a mesma imagem sob $F_{(a,b)}$. Para que isto aconteça devemos ter

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &< 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo esta, portanto, a quinta componente do conjunto de bifurcação de f . A figura 6.2 mostra a curva de pontos duplos na fonte em relação à fronteira que é a reta $y = 0$ e a figura 6.3 mostra a imagem da superfície com bordo em $\mathbb{R}^3$.

Observação 6.1. *Analisando os modelos dos conjuntos de bifurcação das singularidades de fronteira $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, classificadas por Arnold em [2], notamos que o*

Figura 6.3: Conjunto de bifurcação do germe 1_1 (meta)

conjunto de bifurcação que obtivemos acima é difeomorfo ao conjunto de bifurcação da singularidade de fronteira C_3 , cuja forma normal é $xy + x^3$. Podemos ainda observar que as componentes (3), (4) e (5) descritas acima se relacionam com as componentes do conjunto de bifurcação de C_3 da seguinte maneira: um ponto de (3) corresponde a um ponto do conjunto de bifurcação de C_3 quando restrita à fronteira; um ponto de (4) corresponde a um ponto de $\text{Bif}(C_3)$ para o qual a função desdobrada tem uma singularidade na fronteira; um ponto de (5) corresponde a um ponto de $\text{Bif}(C_3)$ para o qual os pontos $(x, 0)$ e $(-x, 0)$ são raízes da função desdobrada. Os modelos para os conjuntos de bifurcação das singularidades de fronteira podem ser encontrados em [3].

$$2_1: f(x, y) = (y \pm x^3, x^2, xy).$$

Um desdobramento $\mathcal{A}_{\delta c}$ -versal para este germe é dado por

$$F(x, y, a, b, c) = (y + x^3 + ax, x^2, xy + bx + cx^3),$$

e a curva de pontos duplos de F é dada pela equação

$$y + x^3 + cx^2 + ax + b = 0.$$

A involução que faz a troca de pares de pontos com mesma imagem sobre esta curva é dada por

$$(x, y) \mapsto (-x, y + 2x^3 + 2ax).$$

Aqui também a primeira componente do conjunto de bifurcação é vazia (pois o germe em questão é um cross-cap). A segunda componente, que é o conjunto de bifurcação de F restrita à fronteira, é dada pelas equações

$$a = b = 0. \quad (6.5)$$

A fronteira tangencia a curva de pontos duplos quando a cúbica

$$x^3 + cx^2 + ax + b = 0$$

tem uma raiz dupla, ou seja, a terceira componente do conjunto de bifurcação de F é dada pelo discriminante desta cúbica:

$$-27b^2 + 18abc + c^2a^2 - 4bc^3 - 4a^3 = 0 \quad (6.6)$$

Os pontos de cross-cap de F satisfazem a equação $y + b = 0$, ou seja, são os pontos da forma $(0, -b)$. Desta forma a fronteira passa por um ponto de cross-cap se, e somente se, tivermos

$$b = 0, \quad (6.7)$$

sendo esta a quarta componente do conjunto de bifurcação. Observe que a união das componentes (2), (3) e (4) (figura 6.4) é difeomorfa ao conjunto de bifurcação da singularidade de fronteira C_4 (ver [3]).

Finalmente, a fronteira se autointercepta se, e somente se, os pontos $(x, 0)$ e $(-x, 2x^3 + ax)$ (imagem de $(x, 0)$ pela involução) pertencem à fronteira. Então devemos ter $x^3 + ax = 0$, mas com $x \neq 0$, o que nos dá $x^2 + a = 0$, e $a < 0$. Além disso $(x, 0)$ e $(-x, 0)$ devem satisfazer a equação de pontos duplos, ou seja, devemos ter

$$\begin{aligned} x^3 + cx^2 + ax + b &= 0 \\ -x^3 + cx^2 - ax + b &= 0 \end{aligned}$$

equações estas que se reduzem à

$$\begin{aligned} cx^2 + b &= 0 \\ x^2 + a &= 0. \end{aligned}$$

Figura 6.4: Conjunto de bifurcação do germe 2_1

Calculando-se a resultante destes dois polinômios obtemos a quinta e última componente do conjunto de bifurcação que é dada por

$$\begin{aligned} ac - b &= 0 \\ a &< 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

que é um pedaço de sela.

Observação 6.2. *Também aqui existe um relacionamento, como no caso anterior, entre o conjunto de bifurcação descrito acima e o conjunto de bifurcação da singularidade C_4 de Arnol'd.*

6.2.2 Conjuntos de bifurcação dos germes não-simples

Começamos com o germe

$$S_{1,a}: f_a(x, y) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y).$$

Um desdobramento $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -versal (do estrato) para f_a é dado por

$$F_a(x, y, a, b, c) = (x, y^2 + xy, y^3 + ax^2y + bxy + cy).$$

A curva de pontos duplos deste germe (na fonte) é dada por

$$y^2 + xy + (a + 1)x^2 + bx + c = 0. \quad (6.9)$$

A involução que faz a troca de pontos com mesma imagem sobre esta curva é dada por

$$(x, y) \mapsto (x, -x - y).$$

Os pontos de cross-cap de $F_{a,b,c}$, sendo os pontos da curva de pontos duplos que ficam fixos por esta involução, devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned} y^2 + xy + (a + 1)x^2 + bxc &= 0 \\ y &= -\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

ou seja, são os pontos da forma $(x, -\frac{1}{2}x)$ onde x satisfaz a equação

$$(a + 3/4)x^2 + bx + c = 0 \quad (6.10)$$

Assim teremos uma singularidade degenerada para $F_{a,b,c}$ se a equação 6.10 tiver uma raiz dupla, isto é, se tivermos

$$b^2 - 4(a + 3/4)c = 0 \quad (6.11)$$

A segunda componente do conjunto de bifurcação é vazia, pois neste caso a restrição de $F_{a,b,c}$ à fronteira é regular: $F_a(x, 0, b, c) = (x, 0, 0)$.

A terceira componente formada pelos valores dos parâmetros para os quais a fronteira tangencia a curva de pontos duplos é dada pelo discriminante da equação

$$(a + 1)x^2 + bx + c = 0,$$

ou seja, esta componente é dada por

$$b^2 = 4(a + 1)c \quad (6.12)$$

A quarta componente é aquela formada pelos valores dos parâmetros para os quais a fronteira $\{y = 0\}$ passa por um ponto de cross-cap. Os pontos de cross-cap são pontos da forma $(x, -\frac{1}{2}x)$, onde x satisfaz a equação 6.10, e este ponto ocorrerá sobre a fronteira se tivermos $x = 0$ e portanto

$$c = 0 \quad (6.13)$$

é a quarta componente do conjunto de bifurcação.

A quinta e última componente do conjunto de bifurcação é vazia, ou seja, a fronteira não se autointercepta. As figuras 6.5, 6.6 e 6.7 mostram as transições da curva de pontos duplos com relação à fronteira na fonte para alguns valores do módulo a .

Figura 6.5: Bifurcação do germe $S_{1,a}$, $a < -1$

$$S_1: f(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^3).$$

Uma deformação versal para este germe é dada por

$$F(x, y, a, b, c) = (x, y^2 + axy + by, x^2y + y^3 + cy).$$

A curva de pontos duplos, neste caso, é dada pela equação:

$$(1 + a^2)x^2 + y^2 + axy + by + 2abx + c + b^2 = 0 \quad (6.14)$$

sendo que a involução é dada por $(x, y) \mapsto (x, -y - ax - b)$. Assim os pontos de cross-cap são pontos da forma $(x, \frac{-ax-b}{2})$ onde x satisfaz a equação

$$(1 + \frac{3}{4}a^2)x^2 + \frac{3}{2}abx + \frac{3}{4}b^2 + c = 0. \quad (6.15)$$

Figura 6.6: Bifurcação do germe $S_{1,a}$, $-1 < a < -3/4$

Logo a primeira componente do conjunto de bifurcação (ver figura 6.8(a)) é dada pelo discriminante da equação 6.15, ou seja,

$$c = -\frac{3b^2}{4 + 3a^2} \quad (6.16)$$

A fronteira tangencia a curva de pontos duplos quando as seguintes equações se verificam simultaneamente:

$$\begin{aligned} (1 + a^2)x^2 + 2abx + c + b^2 &= 0 \\ 2(1 + a^2)x + 2ab &= 0 \end{aligned}$$

e portanto a terceira componente do conjunto de bifurcação (figura 6.8(b)) é dada pela equação:

$$c = -\frac{b^2}{1 + a^2} \quad (6.17)$$

A fronteira passará por um ponto de cross-cap se, e somente se, o ponto $(x, 0)$ for um ponto da curva de pontos duplos e além disso for um ponto fixo da involução

Figura 6.7: Bifurcação do germe $S_{1,a}$, $a > -3/4$

Figura 6.8: Componentes do conjunto de bifurcação do germe S_1

$(x, y) \mapsto (x, -y - ax - b)$. Então devemos ter $x = -b/a$ e isto substituído na equação 6.15 nos dá a quarta componente do conjunto de bifurcação que é dada por

$$ca^2 + b^2 = 0 \quad (6.18)$$

Esta componente é ela mesma, como podemos observar, um cross-cap (figura 6.8(c)).

Novamente tanto a segunda quanto a quinta componente são vazias.

$$\tilde{S}_1: f(x, y) = (y, x^2, x^3 + xy^2).$$

Uma deformação versal para este germe é dada por

$$F(x, y, a, b, c) = (y + ax, x^2, x^3 + xy^2 + bx + cxy).$$

A curva de pontos duplos aqui é dada pela equação:

$$y^2 + 2axy + (2a^2 + 1)x^2 + cy + acx + b = 0 \quad (6.19)$$

sendo que a involução, neste caso, é dada por $(x, y) \mapsto (-x, y + 2ax)$ e, esta tem para pontos fixos os pontos da forma $(0, y)$. Assim os pontos de cross-caps são raízes da equação

$$y^2 + cy + b = 0, \quad (6.20)$$

e teremos uma singularidade degenerada quando a equação 6.20 tiver uma raiz dupla. Portanto a primeira componente do conjunto de bifurcação será dada por

$$c^2 - 4b = 0. \quad (6.21)$$

A segunda componente (conjunto de bifurcação de $F_{a,b,c}$ restrita à $\{y = 0\}$) é dada por

$$a = 0 \quad (6.22)$$

$$b = 0. \quad (6.23)$$

A fronteira encontra a curva de pontos duplos quando

$$(2a^2 + 1)x^2 + acx + b = 0, \quad (6.24)$$

e será tangente à mesma se o discriminante da equação 6.24 for nulo. Assim a terceira componente do conjunto de bifurcação é dada por

$$a^2c^2 - 4(2a^2 + 1)b = 0. \quad (6.25)$$

Figura 6.9: Conjunto de bifurcação do germe $\tilde{S}_1$

Segue da equação 6.20 que a fronteira passará por um ponto de cross-cap se tivermos

$$b = 0 \quad (6.26)$$

sendo esta a quarta componente. Finalmente, a quinta componente é dada por

$$a = 0 \quad (6.27)$$

$$b < 0, \quad (6.28)$$

ou seja, para estes valores do parâmetro a fronteira se autointercepta. Gostaríamos de observar que a união das componentes (1) e (4) (figura 6.9(b)) descritas acima é difeomorfa ao produto do conjunto de bifurcação da singularidade de fronteira C_3 com a reta real.

$$\tilde{\mathbf{B}}_2: f(x, y) = (x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^5).$$

Uma deformação versal neste caso é dada por

$$F(x, y, a, b, c) = (x, y^2 + xy, xy^2 \pm y^5 + ay + by^2 + cy^3).$$

Neste caso a curva de pontos duplos é dada por

$$x^4 + 3x^3y + 4x^2y^2 + 2x^3y + y^4 + (c - 1)x^2 + cxy + cy^2 - bx + a = 0 \quad (6.29)$$

e a involução ainda é $(x, y) \mapsto (x, -x - y)$. Os pontos de cross-cap são então as raízes da equação

$$5x^4 + (12c - 16)x^2 - 16bx + 16a = 0 \quad (6.30)$$

e, portanto as singularidades degeneradas de $F_{a,b,c}$ satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 5x^4 + (12c - 16)x^2 - 16bx + 16a &= 0 \\ 20x^3 + 2(12c - 16)x - 16b &= 0 \end{aligned}$$

Portanto a primeira componente do conjunto de bifurcação é dada por

$$\begin{aligned} a &= \frac{15}{16}x^4 + \frac{3}{4}cx^2 - x^2 \\ b &= \frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{2}cx - 2x \\ c &= c \end{aligned} \tag{6.31}$$

Estas equações parametrizam um objeto bem conhecido que é o rabo de andorinha (figura 6.10).

Figura 6.10: Bifurcação do germe $\tilde{B}_2$: componente (1)

A segunda componente do conjunto de bifurcação é vazia, pois quando restrita à reta $\{y = 0\}$ $F_{a,b,c}$ se reduz a $(x, 0, 0)$ que é o germe de uma imersão $\mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$.

A fronteira é tangente à linha de pontos duplos se a equação

$$x^4 + (c - 1)x^2 - bx + a = 0$$

tem uma raiz dupla, ou seja se o discriminante desta quártica for nulo. Assim, a terceira componente é também um rabo-de-andorinha e é parametrizada por:

$$\begin{aligned} a &= 3x^4 + (c - 1)x^2 \\ b &= 4x^3 + 2(c - 1)x \\ c &= c \end{aligned} \tag{6.32}$$

A fronteira passa por um ponto de cross-cap se, e somente se, o ponto $(0, 0)$ é um ponto fixo da involução e $x = 0$ é raiz da equação 6.30. Então a quarta componente é dada por

$$a = 0 \tag{6.33}$$

Novamente a quinta componente, ou seja, os valores dos parâmetros para os quais a fronteira se autointercepta sobre a curva de pontos duplos, é vazia.

6.3 Um pequeno resultado de dualidade

Nesta seção pretendemos estabelecer um resultado de dualidade, semelhante àquele obtido no capítulo 3, agora no contexto de superfícies com fronteira. Em outras palavras, queremos estabelecer aqui também um relacionamento entre as singularidades de fronteira da família de funções altura com aquelas da família de projeções em 3-espacos. Os ingredientes necessários para tal são essencialmente a classificação dos germes relevantes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ (bem como a de singularidades de fronteira de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ devido a Arnol'd [2]) e também os resultados de dualidade obtidos no capítulo 3 para superfícies e curvas em $\mathbb{R}^4$. Começaremos então com alguns breves comentários sobre singularidades de fronteira e passaremos então a descrever mais detalhadamente as famílias de projeções.

Daqui até o final desta seção M denotará uma superfície com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

6.3.1 Singularidades de fronteira

Por uma singularidade de fronteira entendemos uma aplicação $f : (\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^n), 0 \rightarrow \mathbb{C}^m, 0$ tal que f é singular como uma aplicação de $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^m$ e além disso quando restrita ao hiperplano $\mathbb{C}^n$, ou seja como uma aplicação $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, f também é singular.

Para o caso $m = 1$, as singularidades simples de fronteira foram classificadas por Arnol'd em [2]. Enunciamos este resultado abaixo.

Teorema 6.1 ([2]). *Um germe simples de função com ponto crítico sobre a fronteira de uma variedade com fronteira é A -equivalente a um dos germes abaixo no ponto $(0, 0)$ da fronteira $y = 0$:*

$$\begin{aligned}
B_k &= x^2 \pm y^k, \quad k \geq 2 \\
C_k &= xy \pm x^k, \quad k \geq 2 \\
F_4 &= x^3 + y^2
\end{aligned}$$

Observação 6.3. 1. A $\mathcal{A}$ -equivalência acima é na verdade a $\mathcal{A}_s$ -equivalência, pois as mudanças de coordenadas na fonte devem preservar a fronteira.

2. A codimensão das singularidades de tipo B_k e de tipo C_k é $k - 1$, enquanto que a codimensão de F_4 é 3. Observe também que $B_2 \sim C_2$.

É interessante também observar que uma singularidade de fronteira f pode ser decomposta de acordo com o tipo de singularidade que f apresenta quando considerada como uma função $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^m$ e quando considerada como uma função $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Em outras palavras, podemos decompor f na forma (T_1, T_2) , onde T_1 é o tipo de singularidade de f como uma função $\mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^m$ e T_2 é o tipo de singularidade de f quando restrita à fronteira. Assim, por exemplo, as singularidades listadas no teorema 6.1 têm a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned}
B_k &= (A_k, A_1) \\
C_k &= (A_1, A_k) \\
F_4 &= (A_2, A_2)
\end{aligned}$$

Maiores detalhes nesta direção podem ser encontrados no artigo [34] de I.G. Shcherback.

6.3.2 A família de funções altura

A família de funções altura, que denotaremos por H , é definida como usual. As singularidades simples que podem ocorrer aqui são aquelas classificadas dadas no teorema 6.1 que tenham $\mathcal{A}_s$ -codimensão no máximo 3. Elas são dadas na tabela 6.4.

A decomposição, citada na seção anterior, das singularidades de fronteira dadas na tabela 6.4 são dadas na tabela 6.5.

O conjunto de bifurcação local da família de funções altura $H : M \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ consistirá basicamente de três componentes, a saber,

<i>nome</i>	<i>forma normal</i>	<i>codimensão</i>
B_2	$x^2 \pm y^2$	1
B_3	$x^2 \pm y^3$	2
B_4	$x^2 \pm y^4$	3
C_3	$xy \pm x^3$	2
C_4	$xy \pm x^4$	3
F_4	$y^2 + x^3$	3

Tabela 6.4: Singularidades locais para funções altura

<i>nome</i>	<i>decomposição</i>
B_2	(A_1, A_1)
B_3	(A_2, A_1)
B_4	(A_3, A_1)
C_3	(A_1, A_2)
C_4	(A_1, A_3)
F_4	(A_2, A_2)

Tabela 6.5: Decomposição das singularidades de fronteira

1. o conjunto de bifurcação (local) de H como uma função $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$;
2. o conjunto de bifurcação de H restrita à fronteira, ou seja, como uma função $\mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$.
3. o subconjunto do espaço de parâmetros para os quais a fronteira passa por um ponto de Morse.

A primeira componente é exatamente a mesma que obtemos quando consideramos superfícies (sem fronteira) em $\mathbb{R}^4$, ou seja, ela é o A_2 -estrato do conjunto de bifurcação de H . Neste novo contexto, vamos denominá-lo (A_2, A_1) -estrato. A segunda componente é aquela em que o contato com a fronteira é degenerado e corresponde ao A_2 -estrato da família H que obtivemos quando estudamos curvas em $\mathbb{R}^4$. Este estrato será denominado (A_1, A_2) -estrato.

6.3.3 A família de projeções em 3-espços

Neste caso, as singularidades locais que esperamos encontrar são aquelas obtidas no capítulo 5 e que tenham $\mathcal{A}_{\delta_e}$ -codimensão no máximo 3. Também aqui teremos três componentes para o conjunto de bifurcação local. São elas:

1. O conjunto de bifurcação de P como aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$,

2. O conjunto de bifurcação de P restrita à fronteira, ou seja, como uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$;
3. O subconjunto dos pontos do espaço de parâmetros para os quais a fronteira passa por um ponto de cross-cap.

Como na seção anterior, a primeira componente corresponde ao estrato $Bif(P, S_1)$ da família de projeções em 3-espacos quando consideramos uma superfície sem fronteira em $\mathbb{R}^4$ e é formado pelos valores dos parâmetros para os quais a projeção tem uma singularidade de tipo S_1 ou pior. Aqui este subconjunto do espaço de parâmetros será denotado por S_1 -estrato. A segunda componente corresponde ao estrato local da família de projeções em 3-espacos para curvas em $\mathbb{R}^4$ e é formado pelos valores dos parâmetros para os quais as correspondentes projeções são não-degeneradas mas quando restritas à fronteira são degeneradas. Este estrato será denotado por $(X - cap, sing)$ -estrato.

6.3.4 O resultado de dualidade

Podemos agora estabelecer o resultado de dualidade no contexto das superfícies com bordo em $\mathbb{R}^4$. Como já observamos, a primeira componente do conjunto de bifurcação da família H coincide com o estrato $Bif(H, A_2)$ estudado no capítulo 3. Também temos que a primeira componente do conjunto de bifurcação de P coincide com o estrato $Bif(P, S_1)$ do capítulo 3. O mesmo acontece com as respectivas segundas componentes de cada família, que coincidem com os estratos locais destas mesmas famílias quando consideramos curvas em $\mathbb{R}^4$. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado.

- Proposição 6.2.** 1. O dual do (A_2, A_1) -estrato do conjunto de bifurcação de H é o S_1 -estrato de P e vice-versa;
2. O dual do (A_1, A_2) -estrato do conjunto de bifurcação de H é o $(X - cap, sing)$ -estrato de P e vice-versa.

Prova. A prova desta proposição resume-se a aplicar diretamente os teoremas de dualidade do capítulo 3. Vamos dar uma idéia da prova do item 2) da proposição. Consideremos uma superfície M em $\mathbb{R}^4$ dada localmente por

$$(x, y, ax^2 + 2bxy + cy^2 + r_0x^3 + r_1x^2y + r_2xy^2 + r_3y^3 + \dots,$$

$$ex^2 + 2fxy + gy^2 + s_0x^3 + s_1x^2y + s_2xy^2 + s_3y^3 + \dots),$$

e com fronteira parametrizada por

$$(x, 0, ax^2 + r_0x^3 + \dots, ex^2 + s_0x^3 + \dots).$$

Suponhamos que a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$ seja degenerada. Portanto devemos ter $a = 0$. Podemos ainda supor que a função altura quando considerada na variedade como um todo seja não-degenerada, ou seja podemos supor $b \neq 0$. Vamos considerar uma função altura próxima, digamos, na direção do vetor $(R, S, 1, T)$. A função em questão é dada por

$$Rx + r_0x^3 + T(ex^2 + s_0x^3) + \dots,$$

e esta é degenerada se tivermos

$$\begin{aligned} R + 3r_0x^2 + T(2ex + 3s_0x^2) &= 0 \\ 6r_0x + T(2e + 6s_0x) &= 0. \end{aligned}$$

Daí tiramos então que

$$T = -\frac{6r_0x}{2e + 6s_0x},$$

e com alguns poucos cálculos obtemos $j^1T = -\frac{3r_0}{e}x$. Então até ordem 2 a componente (2) do conjunto de bifurcação de H é parametrizada por

$$\begin{aligned} R &= 3r_0x^2 + \dots \\ S &= S \\ T &= -\frac{3r_0x}{e} + O(2). \end{aligned}$$

Supondo $e \neq 0$ a aplicação $(S, x) \mapsto (3r_0x^2, S, \frac{3r_0x}{e})$ é uma imersão se, e somente se, $r_0 \neq 0$, e esta é a condição para a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$ ser de tipo A_2 . Segue da parametrização acima que o plano tangente à componente (2) do conjunto de bifurcação de H no ponto $(0, 0, 1, 0)$ é dado por $R = 0$. Portanto, um vetor dual a $(0, 0, 1, 0)$ é o vetor $(1, 0, 0, 0)$.

Por outro lado, consideremos agora a projeções em 3-espacos. Para que esta projeção seja singular o seu núcleo deve estar no espaço tangente de M . Digamos que este núcleo seja gerado pelo vetor $(-b, a)$. Então o 2-jato da correspondente projeção é dada por

$$(ax + by, 2bxy + cy^2, ex^2 + 2fxy + gy^2).$$

Uma direção degenerada de projeção é dada por $a = 0$, ou seja, a direção $(1, 0, 0, 0)$, pois neste caso, o 2-jato acima é equivalente a $(y, 2bxy, ex^2 + 2fxy) \sim (y, xy, x^2)$ se $eb \neq 0$ (que é o nosso caso). Portanto $(0, 0, 1, 0)^* = (1, 0, 0, 0) \in (X - \text{cap}, \text{sing})$ -estrato de P e o resultado segue. $\square$

Vamos agora fazer um emparelhamento das singularidades de cada uma das projeções. De acordo com a proposição acima a função altura na direção $(0, 0, 1, 0)$ tem como dual a projeção em 3-espaço

1. na direção do vetor $(0, 1, 0, 0)$, quando considerada como uma função $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ (dualidade entre os estratos (A_2, A_1) de H e S_1 de P);
2. na direção do vetor $(1, 0, 0, 0)$, quando restrita à fronteira (dualidade dos estratos (A_1, A_2) de H e $(X - \text{cap}, \text{sing})$ de P).

Vamos ver, em cada um dos casos, como as singularidades destas famílias se relacionam. Suponhamos que M seja dada localmente por $(x, y, u(x, y), v(x, y))$, com $u, v \in \mathcal{M}_2^2$.

1. Para o primeiro caso, evidentemente temos $\Delta \leq 0$ e portanto podemos supor $j^3 u = x^2 + r_0 x^3 + r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3$ e então a função $u(x, y)$ é de tipo $A_{\geq 2}$. Seja $j^3 v = ex^2 + 2fxy + gy^2 + s_0 x^3 + s_1 x^2 y + s_2 x y^2 + s_3 y^3$. A projeção dual tem então o seu 3-jato dado por

$$\begin{aligned} & (x, x^2 + r_0 x^3 + r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3, \\ & ex^2 + 2fxy + gy^2 + s_0 x^3 + s_1 x^2 y + s_2 x y^2 + s_3 y^3) \sim \\ & \sim (x, r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3, ex^2 + 2fxy + gy^2 + \dots). \end{aligned}$$

Se $fg \neq 0$, e portanto $\Delta < 0$, este 3-jato é equivalente a

$$(x, r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3, xy + y^2) \sim (x, (r_1 - r_2)x^2 y + r_3 y^3, xy + y^2).$$

Se tivermos $r_3 \neq 0$, ou seja, se a função altura $u(x, y)$ é de tipo (A_2, A_1) , a correspondente projeção dual será equivalente a um germe da forma

$$(x, xy + y^2, y^3 + ax^2 y),$$

para algum a . Se $r_3 = 0$, e portanto a função u é de tipo $(A_{\geq 3}, A_1)$, então o 3-jato acima se reduz a $(x, (r_1 - r_2)x^2 y, xy + y^2)$. Se $r_1 - r_2 \neq 0$ teremos uma singularidade de tipo $\tilde{B}_2$.

Se $f = 0$ mas $g \neq 0$ (ainda neste caso $\Delta < 0$), o 3-jato da projeção se reduz a $(x, r_1 x^2 y + r_2 x y^2 + r_3 y^3, gy^2) \sim (x, r_1 x^2 y + r_3 y^3, y^2)$ e, portanto a projeção será de tipo S_2 (se $r_3 \neq 0$) ou B_2 ($r_3 = 0$).

Se $g = 0$ e $f \neq 0$ (neste caso $\Delta = 0$) reduzimos o 3-jato à forma $(x, r_2 x y^2 + r_3 y^3, xy)$, e portanto a projeção será de tipo $\tilde{H}_2$ ou pior. O caso $f = g = 0$ é não-genérico.

2. Para o segundo caso tomemos $j^3u = xy + r_0x^3 + r_1x^2y + r_2xy^2 + r_3y^3$ e j^3v como no item (1). Assim, a projeção dual será dada por

$$(y, xy + r_0x^3 + r_1x^2y + r_2xy^2 + r_3y^3, ex^2 + 2fxy + gy^2 + \dots).$$

Esta por sua vez é equivalente a

$$(y, xy + \dots, ex^2 + \dots$$

e se $e \neq 0$ reduzimos à forma

$$(y, xy + r_0x^3 + \dots, x^2).$$

Agora, se $r_0 \neq 0$, ou seja, se a função $u(x, y)$ tem uma singularidade de tipo (A_1, A_2) então a projeção é equivalente a

$$(y, xy \pm x^3, x^2).$$

Se, por outro lado, a função $u(x, y)$ tem tipo $(A_1, A_{\geq 2})$, isto é, se $r_0 = 0$, então a projeção é (genericamente) equivalente $(y, xy \pm x^5, x^3)$. Se $e = 0$ o 2-jato da projeção se reduz a $(y, xy, 0)$ que é não-genérico.

Assim provamos o seguinte resultado:

Proposição 6.3. 1. (a) Se p é um ponto hiperbólico de M , isto é, $\Delta(p) < 0$, temos:

- as singularidades de tipo B_3 (ou (A_2, A_1)) da função altura correspondem às singularidades de tipo $S_{1,a}$ ou S_1 para a projeção dual.
- as singularidades de tipo B_4 (ou (A_3, A_1)) da função altura correspondem às singularidades de tipo $\tilde{B}_2$ ou B_2 para a projeção dual.

(b) Em um ponto parabólico ($\Delta = 0$) as singularidades de tipo (A_2, A_1) da função altura correspondem às singularidades de tipo $\tilde{H}_2$ para a projeção dual.

2. (a) as singularidades de tipo C_3 , isto é (A_1, A_2) , da função altura correspondem às singularidades de tipo l_1 da projeção dual.

(b) as singularidades de tipo C_4 correspondem às projeções de tipo l_2 .

6.4 Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um estudo extensivo de aspectos locais e multilocais da geometria de superfícies em $\mathbb{R}^4$. Outra questão importante na geometria extrínseca de superfícies em $\mathbb{R}^4$, assim como no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, é o estudo das linhas assintóticas e linhas de curvatura.

O estudo das linhas assintóticas se beneficia do estudo das singularidades das famílias de projeções ortogonais em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^3$. Resultados nesta direção são obtidos em [15]. O relacionamento das singularidades que obtemos neste trabalho poderá ser útil para completar o estudo da equação diferencial das linhas assintóticas de superfícies em $\mathbb{R}^4$.

Em [18] é feito um estudo das linhas de curvatura de superfícies em $\mathbb{R}^4$. É natural se esperar que as singularidades da equação das linhas de curvatura se relacionem com as singularidades da função distância ao quadrado. Nesta direção, um problema interessante é o estudo mais completo desta família, estendendo os resultados de dualidade obtidos por Wilkinson e Bruce em [12], e tentar aplicar tais resultados no estudo das linhas de curvatura.

Mudando um pouco o enfoque, da geometria para a topologia, é também de interesse o estudo da topologia de superfícies singulares com fronteira em $\mathbb{C}^3$ (ou $\mathbb{R}^3$), estendendo resultados de Atique [5]. Nesta direção, são questões de interesse o estudo de invariantes analíticos e topológicos para a $\mathcal{A}_\delta$ -equivalência, e o estudo da topologia do complementar dos conjuntos de bifurcação dos germes $\mathcal{A}_\delta$ -simples bem como a existência de boas perturbações reais.

Ainda com respeito às singularidades de fronteira, um problema a ser considerado é um melhor entendimento de como as $\mathcal{A}_\delta$ -singularidades de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ se relacionam com as singularidades de fronteira simples usuais B_k , C_k e F_4 classificadas por Arnol'd em [2]. Tal relacionamento existe como pudemos notar quando estudamos os conjuntos de bifurcação dos germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ na seção 6.2. Esta análise pode levar à formulação de resultados gerais para superfícies com fronteira em $\mathbb{R}^4$.

Bibliografia

- [1] V.I. Arnol'd. *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities*. *Functional Anal. Appl.*, 6:254–272, 1973.
- [2] V.I. Arnol'd. *Critical points of boundary on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k e F_4 and singularities of evolutes*, volume 53 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, pages 207–224. 1981.
- [3] V.I. Arnol'd. *Dynamical Systems IV*, volume 4 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, chapter 5, pages 101–103. Springer-Verlag, 1985.
- [4] R. Atique. *On the classification of multigerms of maps from $\mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$ under A -equivalence*. preprint.
- [5] R. Atique. *Classificação e topologia de variedades singulares parametrizadas por multigerms*. Tese de doutorado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP-São Carlos, 1998.
- [6] T. Banchoff, T.J. Gaffney and C. McCrory. *Cusps of Gauss mappings* Pitman, New York, 1982
- [7] J.W. Bruce and P.J. Giblin. *Projections of surfaces with boundary*. *Proc. London Math. Soc.*, 60:392–416, 1990.
- [8] J.W. Bruce, N. Kirk, and A.A.du Plessis. *Complete transversals and the classifications of singularities*. *Nonlinearity*, 10, 1997.
- [9] J.W. Bruce and A.C. Nogueira. *Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and duality*. to appear in *Quart. J. Math. Oxford*
- [10] J.W. Bruce, A.A.du Plessis, and C.T.C. Wall. *Determinacy and unipotency*. *Invent. Math.*, 88:521–554, 1987.
- [11] J.W. Bruce and M.C. Romero-Fuster. *Duality and projections of curves and surfaces in 3-space*. *Quart. J. Math. Oxford*, 42:433–441, 1991.

- [12] J.W. Bruce and T.V. Wilkinson. *Folding maps and focal sets. Proceedings of Warwick Symposium on Singularities, Springer Lectures Notes in Math.*, vol. 1462, 63–72, 1991.
- [13] J.N Damon. *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. Mem. Amer. Math. Soc.*, 50, 1984.
- [14] T.J. Gaffney and D. Mond. *Weighted homogeneous maps from the plane to the plane. Math.Proc. Camb. Phil. Soc.* 109:451–470, 1991.
- [15] R.A. Garcia, D.K. Mochida, M.C. Romero-Fuster and M.A.S. Ruas. *Inflection points and topology of surfaces in 4-space.* to appear in *Transaction of the Amer. Math. Soc.*.
- [16] C.G. Gibson. *Singular points of smooth mappings*, volume 25 of *Pitman Research Notes in Mathematics*. 1979.
- [17] C.G. Gibson and C.A. Hoobs. *Simple singularities of space curves. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 113:297–310, 1993.
- [18] C. Gutierrez, I. Guadalupe, R. Tribuzy and V. Guíñez. *Lines of curvature on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$. Bol. Soc. Bras. Mat.*, 28, 1997, nº 2, 233–251.
- [19] C.A. Hoobs. *The geometry of kinematics.* PhD thesis, The University of Liverpool, 1994.
- [20] J.A. Little. *On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces. Ann. Math. Pura Appl.*, 83:261–336, 1969.
- [21] J. Martinet. *Singularities of smooth functions and maps*, volume 58 of *London Math. Soc. Lecture Notes*. Cambridge University Press, 1982.
- [22] J.N. Mather. *Stability of C^∞ -mappings IV: Classification of stable map-germs by $\mathbb{R}$ -algebras. Publ. Math. IHES*, 37:223–248, 1970.
- [23] D.K.H. Mochida. *Tese de doutorado*, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP.
- [24] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster, and M.A.S. Ruas. *The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint. Geometriae Dedicata*, 54:323–332, 1995.
- [25] D. Mond. *Ph.D. Thesis*, The University of Liverpool.

- [26] D. Mond. *On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$* . *Proc. London Math. Soc.*, 50:333–369, 1985.
- [27] J.A. Montaldi. *On contact between manifolds*. *Michigan Math. J.*, 33:195–199, 1986.
- [28] J.A. Montaldi. *Surfaces in 3-space and their contact with circles*. *J. Differential Geometry*, 23:109–126, 1986.
- [29] J.A. Montaldi. *On generic composite of maps*. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 23:81–85, 1991.
- [30] A.A. du Plessis. *On the determinacy of smooth map-germs*. *Invent. Math.*, 58:107–160, 1980.
- [31] J.H. Rieger. *Families of maps from the plane to the plane*. *J. London Math. Soc.*, 36:351–369, 1987.
- [32] J.H. Rieger and M.A.S. Ruas. *Classification of A -simple germs from $\mathbb{K}^n$ to $\mathbb{K}^2$* . *Compositio Math.*, 79:99–108, 1991.
- [33] L. Rodrigues. *Geometria das subvariedades*, volume 26 of *Monografias de matemática*. Impa.
- [34] I.G. Shcherbak. *Boundary singularities and focal sets of surfaces with boundary in $\mathbb{R}^3$* . In D.T. Lê, K. Saito, and B. Tessier, editors, *Singularity Theory*, 635–645. World Scientific Publishing, 1995.
- [35] C.T.C. Wall. *Classification and stability of singularities of smooth maps*. In D.T. Lê, K. Saito, and B. Tessier, editors, *Singularity Theory*, pages 920–952. World Scientific Publishing, 1995.