Invariantes de variedades determinantis

Nancy Carolina Chachapoyas Siesquén

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Invariantes de variedades determinantis

Nancy Carolina Chachapoyas Siesquén

***Orientadora:* Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas**

***Orientador da instituição conveniada:* Prof. Dr. Jean-Paul Brasselet**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

USP – São Carlos
Novembro de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C431i Chachapoyas Siesquen, Nancy Carolina
Invariantes de variedades determinantis / Nancy
Carolina Chachapoyas Siesquen; orientadora Maria
Aparecida Soares Ruas; co-orientador Jean-Paul
Brasselet. -- São Carlos, 2014.
82 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Variedades determinantis. 2. Transformada de
Nash. 3. Hiperplano genérico. 4. Seção genérica. 5.
Obstrução de Euler. I. Soares Ruas, Maria Aparecida,
orient. II. Brasselet, Jean-Paul, co-orient. III.
Título.

A Matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio do homem para a descoberta da verdade.

Laisant.

Going after a dream has a price. But however costly it may be, it is never as high as the price paid by people who didn't live!

Paulo Coelho.

Agradecimentos

É com muita satisfação que expresso aqui o mais profundo agradecimento a todos aqueles que tornaram a realização deste trabalho possível.

Em primeiro lugar gostaria de expressar minha gratidão a Deus por seu infinito amor, por todas as alegrias, pela saúde e pela força que me concedeu, para que conseguisse chegar até aqui.

Gostaria antes de mais nada de agradecer aos meus Professores orientadores, Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, pelo apoio nesses momentos em que quase desistia e me sentia perdida, pelo incentivo de continuar, pela confiança desprendida. Ao prof. Dr. Jean-Paul Bras-selet, pela assistência durante minha estadia na França, pelo apoio e sugestões realizadas, pelo incentivo de progredir. Agradeço aos dois por acreditar sempre no meu trabalho, pela disponibilidade demonstrada, pela amizade e pela enorme contribuição em todas as fases que levaram à concretização deste trabalho.

Quero expressar aqui meus sinceros agradecimentos a minha mãe, María Yolanda, pelo seu carinho e apoio moral incondicional durante o transcurso da minha vida, sempre acreditando em mim, “te amo mamá”. A meu pai, Santiago, pelos ensinamentos em minha infância que me foram muito úteis, só Deus sabe quanta saudade tenho de você. A meus irmãos Jimmy, Sandra, José e Alexis pela compreensão, companherismo e carinho durante estes anos, porque mais que irmãos sempre têm sido meus amigos. Talvez nem saibam a sua importância em minha vida, meus sobrinhos Jhon, Juliana e Estrella. Alegrias incomparáveis ao lado deles. Agradeço muito a toda minha família que apesar de estar longe sempre estão comigo no meu coração.

Gostaria de agradecer aos professores Jawad Snoussi e Juan J. Nuño Ballesteros por aceitar ser os pareceristas desta tese, “rapporteurs”, pelos comentários e sugestões. Aos professores Nicolas Dutertre, Marcelo Escudeiro por ser parte da banca. Agradeço muito sua participação !

Agradeço aos professores Lê Dung Trang, Terence Gaffney por algumas sugestões e pelas conversas matemáticas.

Aos professores do ICMC, com os quais muito aprendi. Aos amigos que sempre estiveram presentes Luis Sanchez, Manuel Zuloeta, Thaís Dalbelo, Maria Amelia, Andrea e a todos os amigos com os quais compartilhei conversas durante todo este longo trajeto do meu doutorado, muito obrigada pela amizade e por fazerem minha estadia em São Carlos inesquecível.

A meu amor José Vidarte, pelo apoio e pela compreensão com que sempre me brinda. Por

dar-me forças para não desistir. Suas palavras sempre chegam na hora certa. Obrigada por estar comigo neste longo caminho.

A FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo nº 2010/09736-1 e 2011/20082-6 pelo apoio financeiro.

Reitero aqui minhas palavras, sendo este um grande sonho, não se pode empreendê-lo sem a ajuda dos que nos cercam e querem bem. Um muito obrigado a todos, por estarem lado a lado nessa caminhada.

*Com amor, a minha mãe
Yolanda, a meus irmãos
Jimmy, Sandra, José e
Alexis.*

*Ao meu pai Santiago em
memória a seu décimo
sexto aniversário de estar
junto a nosso Criador.*

Resumo

Neste trabalho estudamos variedades determinantis essencialmente isoladas (EIDS), definidas por W. Èbeling e S. M. Guseïn-Zade em [23]. Este tipo de singularidades é uma generalização das singularidades isoladas. A variedade determinantal genérica $M_{m,n}^t$ é o subconjunto das matrizes $m \times n$, tais que o posto seja menor que t , onde $t \leq \min\{n, m\}$. Uma variedade $X \subset \mathbb{C}^N$ é determinantal se é definida como a pré-imagem de uma função holomorfa $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}^t$, sobre a variedade determinantal genérica $M_{m,n}^t$, com a condição $\text{codim } X = \text{codim } M_{m,n}^t$.

Uma variedade determinantal tem singularidade isolada se $N \leq (n - t + 2)(m - t + 2)$ e admite suavização se $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Trabalhos recentes têm estudado variedades determinantis com singularidade isolada, [35, 31]. O número de Milnor de uma superfície determinantal é investigado em [35, 31, 12]. Para variedades determinantis de dimensões maiores a característica de Euler evanescente é definida em [31, 12].

Neste trabalho estudamos o conjunto de limites de hiperplanos tangentes às variedades determinantis $X^2 \subset \mathbb{C}^4$ e $X^3 \subset \mathbb{C}^5$ para dar uma caracterização deste conjunto, em que o número de Milnor de sua seção com a superfície no primeiro caso ou a 3- variedade no segundo caso não é mínimo. O primeiro caso foi estudado por Jawad Snoussi em [38].

Provamos também que se X é uma EIDS de dimensão d e H e H' são dois hiperplanos fortemente gerais, se $P \subset H$ e $P' \subset H'$ são planos lineares de codimensão $d - 2$ contidos respectivamente em H e H' , o número de Milnor das superfícies correspondentes $X \cap P$ e $X \cap P'$ são iguais. Este resultado foi provado para o caso em que a seção genérica é uma curva em [26].

Estudamos a transformada de Nash de uma EIDS e discutimos condições suficientes para que esta transformada seja suave.

Outro objetivo é estudar a obstrução de Euler de singularidades determinantis essencialmente isoladas. Obtemos fórmulas que relacionam a obstrução de Euler com a característica de Euler evanescente da suavização essencial de suas seções gerais. Estudamos as variedades determinantis com o conjunto singular de dimensão 1 para ilustrar os resultados.

Résumé

Dans ce travail nous étudions les variétés déterminantales essentiellement isolées (EIDS), qui ont été définies dans l'article [23]. Ce type de singularité est une généralisation de la notion de singularité isolée. La variété déterminantale générique est un sous-ensemble des matrices, $m \times n$, tels que le rang est inférieur que t , où $t \leq \min\{n, m\}$. Une variété $X \subset \mathbb{C}^N$ est déterminantal si X est définie comme la pré-image d'une fonction holomorphe, $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$, sur la variété déterminantale générique, $M_{m,n}^t$, avec la condition $\text{codim } X = \text{codim } M_{m,n}^t$.

Les variétés déterminantales ont des singularités isolées si $N \leq (n - t + 2)(m - t + 2)$ et elles admettent un "lissage" si $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Certains travaux précédents ont étudié les variétés déterminantales avec singularité isolée [35, 31] et ils ont défini le nombre de Milnor d'une surface déterminantale. La caractéristique évanescence d'Euler a été définie dans [31].

Nous étudions l'ensemble des hyperplans limites d'hyperplans tangents à une variété déterminantale $X^2 \subset \mathbb{C}^4$ et $X^3 \subset \mathbb{C}^5$ pour donner une caractérisation de ces hyperplans, par le fait que le nombre de Milnor de leur section avec la surface dans le premier cas ou la 3- variété dans le deuxième cas n'est pas minimum. Le premier cas a été étudié par Jawad Snoussi dans [38].

Nous montrons également que, si X est une EIDS, de dimension d et H et H' sont des hyperplans fortement généraux, si $P \subset H$ et $P' \subset H'$ sont des plans de codimension $d - 2$ contenus respectivement dans H et H' , les nombres de Milnor des surfaces $X \cap P$ et $X \cap P'$ sont égaux. Ce résultat a été démontré dans le cas où la section est une courbe dans [26].

Nous étudions aussi la modification de Nash d'une EIDS et donnons des conditions suffisantes pour que cette transformation soit lisse.

Un autre objectif de notre travail est l'étude de l'obstruction d'Euler des variétés déterminantales essentiellements isolées. Nous obtenons des formules inductives qui relient l'obstruction d'Euler de X à la caractéristique d'Euler évanescence du lissage essentiel de leurs sections génériques. Nous étudions les variétés déterminantales dont l'ensemble singulier est de dimension 1 pour illustrer ce résultat

Abstract

In this work, we study the essentially isolated determinantal singularities (EIDS), which have been defined by W. Èbeling and S. M. Guseĭn-Zade in the article [23]. This type of singularities is a natural generalization of isolated ones. A generic determinantal variety $M_{m,n}^t$ is a subset of the space of $m \times n$ matrices, given by matrices of rank less than t , where $t \leq \min\{n, m\}$. A variety $X \subset \mathbb{C}^N$ is determinantal if X is defined as the pre-image of $M_{m,n}^t$ by a holomorphic function $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ with the condition $\text{codim } X = \text{codim } M_{m,n}^t$.

Determinantal varieties have isolated singularity if $N \leq (n - t + 2)(m - t + 2)$ and they admit smoothing if $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Several recent works investigate determinantal variety with isolated singularities. The Milnor number of a surface was defined in [35, 31] and the vanishing Euler characteristic was studied in [31].

In this work we study the set of limits of tangent hyperplanes to determinantal varieties $X^2 \subset \mathbb{C}^4$ and $X^3 \subset \mathbb{C}^5$ to give a characterization of this set by the fact that the Milnor number of its section with the surface in the first case or the 3-dimensional determinantal variety in the second case is not minimum. The first case is studied by Jawad Snoussi in [38].

We also prove that if X is a d -dimensional EIDS and H and H' are strongly general hyperplanes, if $P \subset H$ and $P' \subset H'$ are linear plans of codimension $d - 2$ contained in H and H' , the Milnor number of the surfaces $X \cap P$ and $X \cap P'$ are equal. In the case that the generic section is a curve the result has been proved in [26].

We study the Nash transformation of an EIDS and give sufficient conditions for this transformation to be smooth.

Another aim of our study is the Euler obstruction of essentially isolated determinantal singularities. We obtain inductive formulas associating the Euler obstruction with the vanishing Euler characteristic of the essential smoothing of their generic sections. We study the determinantal variety with singular set of dimension 1 to illustrate the results.

Sumário

Lista de Tabelas	xix
Introdução	1
Resultados	2
1 Preliminares	5
1.1 Variedades Analíticas	5
1.2 Estratificação de Whitney	6
1.3 Transformação de Nash e o Fibrado de Nash	6
1.4 Variedades Polares e Multiplicidade Polar	8
1.5 Fecho Integral de Ideais e de Módulos	11
1.6 Número de Milnor de uma Curva em $\mathbb{C}^N$	12
2 Variedades Determinantais	15
2.1 Variedades Determinantais Essencialmente Isoladas	15
2.2 Singularidades de Matrizes	18
2.2.1 $\mathcal{K}$ - Equivalência	19
2.2.2 A $\mathcal{G}(n, m)$ - Equivalência	19
2.2.3 A $\mathcal{K}_V$ - Equivalência	21
2.2.4 A $\mathcal{K}_H$ - Equivalência	22
2.3 Determinação Finita	23
2.4 Variedades Cohen-Macaulay de Codimensão 2	24
3 Topologia de Variedades com Singularidade Isolada	27
3.1 Teoria de Morse	27

3.2	Funções Definidas em IDS	29
3.3	Fórmula de Tipo Lê-Greuel para Variedades Determinantais	30
4	A Transformada de Nash de Variedades Determinantais	33
4.1	Resoluções de $M_{m,n}^t$	33
4.2	Transformação de Nash de uma EIDS	40
4.3	Exemplos	44
5	Espaço Conormal de Variedades Determinantais	49
5.1	Limite de Hiperplanos de Espaços Tangentes	49
5.2	Minimalidade do Número de Milnor	54
5.2.1	Hipersuperfícies e Interseções Completas em $\mathbb{C}^N$	54
5.2.2	Variedades Determinantais com Singularidade Isolada na Origem	55
5.3	Seções de Variedades Determinantais Essencialmente Isoladas	59
6	Topologia de EIDS	61
6.1	Índices de Poincaré Hopf de 1-formas sobre EIDS	61
6.2	Obstrução de Euler Local	65
6.3	Número de Milnor Singular de Seções de Interseções Completas	67
6.4	A característica de Euler Evanesciente de Variedades Determinantais	69
6.5	Obstrução de Euler de Variedades Determinantais	71
6.5.1	Obstrução de Euler de IDS, caso $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$	73
6.6	Obstrução de Euler para as EIDS, definidas por $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$	73
6.7	Obstrução de Euler de EIDS, caso $N \geq 7$	74
	Referências Bibliográficas	82

Lista de Tabelas

6.1	Tabela das equações definindo os divisores livres, $\mathcal{E}$ e as variedades determinantis $\mathcal{D}$. Se $A = (A_{ij})$ então $\hat{A}$ denota a matriz obtida eliminando a primeira coluna da matriz A e $A^{(k)}$ denota a submatriz $k \times k$ superior a esquerda de A . .	69
6.2	Ostrução de Euler, $X \subset \mathbb{C}^6$	75
6.3	Obstrução de Euler, $X \subset \mathbb{C}^6$	76

Introdução

Um tipo de variedade analítica que pode ser considerado uma generalização para interseções completas com singularidade isolada (ICIS) é a variedade com singularidade determinantal essencialmente isolada (EIDS). Estas variedades foram definidas por W. Èbeling e S. M. Guseïn-Zade em [23]. As variedades determinantisais $X \subset \mathbb{C}^N$ são definidas por uma função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ holomorfa tal que $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ e que satisfazem certas condições sobre a codimensão de X , em que $M_{m,n}^t$ é o subconjunto das matrizes $m \times n$ com posto menor do que t , chamada variedade determinantal genérica.

Uma EIDS satisfaz condições de transversalidade da F sobre os estratos de $M_{m,n}^t$. Nem toda EIDS tem singularidade isolada. Temos singularidade determinantal isolada (IDS) se $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$. Trabalhos recentes, como por exemplo [31, 35], têm estudado IDS que admitem suavização ($N < (m - t + 2)(n - t + 2)$). A topologia da fibra genérica da suavização é um invariante da variedade e então se pode definir a característica de Euler evanescente em termos da característica de Euler da fibra genérica, $\nu(X) = (-1)^d(\chi(X_t) - 1)$.

No caso de superfícies determinantisais com singularidade isolada em $\mathbb{C}^N$, o primeiro número de Betti $b_1(X_t)$ é nulo [40], então podemos definir o número de Milnor de X , $\mu(X) = b_2(X_t)$. Miriam Pereira e Maria Ruas [35], Bruna Oréfice, João Tomazella e Juan Nuño Ballesteros [31] demonstraram uma fórmula de tipo Lê-Greuel em termos do número de Milnor da superfície determinantal ou característica de Euler evanescente.

Neste trabalho desenvolvemos o estudo de seções genéricas de IDS, dadas pela interseção da IDS X com um hiperplano geral, isto é um hiperplano que não é limite de hiperplanos tangentes à variedade X . Estudamos superfícies determinantisais em $\mathbb{C}^4$ e 3- variedades em $\mathbb{C}^5$ e damos uma caracterização das seções genéricas em termos da minimalidade do número de Milnor. O caso de superfícies determinantisais segue do trabalho de Jawad Snoussi [38], pois toda variedade determinantal com singularidade isolada é normal.

Estudamos também seções genéricas de uma EIDS $X \subset \mathbb{C}^N$, dadas pela interseção de uma EIDS e P -planos que estão contidos num hiperplano fortemente geral, com a condição que essa

interseção seja uma superfície determinantal (IDS). Sobre algumas condições sobre N podemos garantir que $X \cap P$ admite suavização. Provamos uma generalização do resultado de Lê Dung Trang em [26], obtendo a igualdade do número de Milnor de duas seções gerais de uma EIDS.

No Capítulo 1, relembramos algumas definições e resultados básicos tais como germes de variedades analíticas, estratificação de Whitney, transformada de Nash de uma variedade analítica, variedades polares, fecho integral de módulos e número de Milnor de curvas espaciais.

No Capítulo 2, definimos as variedades essencialmente isoladas (EIDS), suavização essencial de uma EIDS, estudamos diferentes grupos de equivalência que agem sobre o conjunto de funções $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ e relacionamos as EIDS com a teoria de singularidades de matrizes.

No capítulo 3, é estudada a topologia de variedades com singularidade isolada. A fórmula de tipo Lê-Greuel para singularidades determinantis isoladas (IDS) é apresentada.

A transformada de Nash da variedade determinantal genérica $M_{m,n}^t$ é suave, no capítulo 4, fazemos um estudo detalhado deste resultado, usando as diferentes resoluções da variedade $M_{m,n}^t$. Calculamos o espaço tangente em um ponto regular de $M_{m,n}^t$. Provamos em que condições a transformada de Nash de uma EIDS é suave. Concluimos este capítulo dando exemplos de transformada de Nash.

Os resultados obtidos no capítulo 5, são generalizações dos trabalhos de Jawad Snoussi [38] e Lê Dung Trang [26]. Aqui usamos as seções gerais da EIDS, dadas pela interseção de hiperplanos gerais e a variedade EIDS. Provamos que um hiperplano é geral a uma variedade $X \subset \mathbb{C}^N$ 3-dimensional se somente se $\mu(X \cap H)$ e $\mu(X \cap H \cap H')$ são mínimos.

No Capítulo 6, estudamos a topologia de EIDS. Definimos a obstrução de Euler e fornecemos uma fórmula para o cálculo da obstrução de Euler de EIDS que admitem 3 estratos, com a condição que o conjunto singular é uma ICIS. Para variedades determinantis definidas por $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$, $N \geq 7$ e de coposto 1, mostramos que este número é constante e igual a 2.

Resultados

Os resultados mais relevantes deste trabalho são enunciados nesta seção. As provas são encontradas nos Capítulos 4, 5, 6.

O seguinte resultado dá uma condição para que a transformada de Nash de uma EIDS seja suave.

Proposição 0.1. (Proposição 4.7) *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$. Se F é transversal aos limites de espaços tangentes da variedade $M_{m,n}^t$ então a transformada de Nash de X denotado por $\widehat{X}$, é suave.*

Dizemos que um hiperplano $H \subset \mathbb{C}^N$ é geral a X no ponto x se H não é limite de hiperplanos tangentes a X em x . Se H for transversal a todos os estratos da estratificação de X numa

vizinhança do ponto x dizemos que H é fortemente geral.

Proposição 0.2. (Proposição 5.9) *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade determinantal d -dimensional com singularidade isolada na origem e H um hiperplano geral com relação a X , então $X \cap H \subset \mathbb{C}^{N-1}$ é uma variedade determinantal $d - 1$ dimensional com singularidade isolada na origem.*

Teorema 0.3. (Teorema 5.12) *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma EIDS, de tipo (n, m, t) . Se $H \subset \mathbb{C}^N$ é um hiperplano fortemente geral a X na origem, então $X \cap H$ é uma EIDS em $\mathbb{C}^{N-1}$ de dimensão $d - 1$ e do mesmo tipo.*

Teorema 0.4. (Teorema 5.21) *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade determinantal de dimensão 3 com singularidade isolada, e seja H um hiperplano em $\mathbb{C}^N$ dado pelo núcleo da projeção linear $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que $X \cap H$ tem singularidade isolada na origem, então as seguintes condições são equivalentes:*

- a) p é geral a X na origem
- b) $\mu(X \cap H)$ é mínimo e $\mu(X \cap H \cap H')$ é mínimo para todo H' geral a X e a $X \cap H$.

Teorema 0.5. (Teorema 5.24) *Seja $X^d \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS de tipo (m, n, t) tal que $\text{codim } X < (m - t + 2)(n - t + 2) - 2$. Sejam H e H' hiperplanos de $\mathbb{C}^N$ fortemente gerais para $(X, 0)$ na origem. Então H e H' contêm respectivamente P e P' tais que $\text{codim } P = \text{codim } P' = d - 2$, para os quais as superfícies determinantis $X \cap P$ e $X \cap P'$ satisfazem as seguintes condições*

- a) têm singularidade isolada
- b) admitem suavizações
- c) $\mu(X \cap P) = \mu(X \cap P')$.

Proposição 0.6. (Proposição 6.36) *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$, se $N < (n - t + 3)(m - t + 3)$ e o conjunto singular, ΣX , é uma ICIS, então a obstrução de Euler de X na origem é dado por:*

$$Eu_0(X) = ((-1)^{\dim(\Sigma X \cap l^{-1}(0))} \mu(\Sigma X \cap l^{-1}(0)) + 1)(\chi(L_{V_1}) - 1) + \tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0) \cap B_\epsilon) + 1,$$

onde $l : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica, L_{V_1} é o link complexo do estrato V_1 em X e B_ϵ é a bola de raio ϵ em $\mathbb{C}^N$.

Teorema 0.7. (Teorema 6.41) *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$, com $N \geq 7$. Então*

$$Eu_0(X) = (-1)^{N-7} \mu(\Sigma(X \cap H)) + \tilde{\chi}(X \cap H) + 2$$

onde $\tilde{\chi}(X) = \chi(F_s^{-1}(M_{2,3}^2)) - 1$, F_s é uma estabilização de F .

Corolário 0.8. (*Corolário 6.42*) *Com as hipóteses do Teorema 0.7, se F é de coposto igual a 1, então*

$$Eu_0(X) = 2$$

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e principais resultados que serão usados para o desenvolvimento deste trabalho. Começamos definindo variedades analíticas, estratificação de Whitney, transformação de Nash de variedades analíticas. O nosso objeto de estudo são as variedades determinantis que serão definidas no próximo capítulo. As principais referências para este capítulo são [8, 24, 27, 21].

1.1 Variedades Analíticas

Seja $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Indicamos por $\mathcal{O}_N$ o conjunto de germes de funções analíticas $(\mathbb{K}^N, 0) \rightarrow \mathbb{K}$. Este conjunto é um anel local (possui um único ideal maximal), cujo ideal maximal é dado por $\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}_N / f(0) = 0\}$.

Usaremos a notação $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_N]$ para representar o anel dos polinômios com variáveis $x_1, \dots, x_N$ sobre $\mathbb{C}$.

Definição 1.1. *Seja $Y \subset \mathbb{C}^N$. Se existe um subconjunto $T \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_N]$ tal que Y é o conjunto de zeros comuns a todos os polinômios de T , dizemos que Y é um conjunto algébrico.*

Definição 1.2. *Um subconjunto $Y \subset \mathbb{C}^N$ é chamado subconjunto analítico complexo de $\mathbb{C}^N$ se para cada ponto $y \in \mathbb{C}^N$ existe uma vizinhança U de y e funções holomorfas $f_1, \dots, f_m$ em U tal que*

$$Y \cap U = \{x \in U \mid f_1 = \dots = f_m = 0\}.$$

Ou seja Y localmente é o conjunto de zeros de funções holomorfas.

Definição 1.3. *Um conjunto Y é chamado conjunto analítico ou variedade analítica (complexa) se em uma vizinhança U' de cada um dos seus pontos, U' é um subconjunto analítico.*

Definição 1.4. Sejam $Y_1, Y_2 \subset \mathbb{C}^N$ conjuntos analíticos, Y_1 e Y_2 são equivalentes em y se existe uma vizinhança U de y tal que $Y_1 \cap U = Y_2 \cap U$. As correspondentes classes de equivalências são chamadas germes de conjuntos analíticos em y .

1.2 Estratificação de Whitney

Definição 1.5. Seja X uma variedade analítica complexa de dimensão (complexa) d . Uma estratificação de X é dada por uma filtração

$$(\chi) \quad \emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_{d-1} \subset X_d = X,$$

tal que cada $V_i = X_i \setminus X_{i-1}$ é uma variedade complexa suave de dimensão complexa i . Chamamos as variedades V_i de estratos (não necessariamente conexos) da estratificação.

Definição 1.6. Dizemos que a estratificação $\{V_i\}$ de X satisfaz à condição de fronteira, se para cada par de estratos (V_1, V_2) tais que $V_1 \cap \overline{V_2} \neq \emptyset$ então $V_1 \subset \overline{V_2}$.

Definição 1.7. A estratificação $\{V_i\}$ satisfaz as condições de Whitney se para todo par de estratos (V, W) tais que $W \subset \overline{V}$ e para todo $y \in W$ temos:

a) Para toda sequência $x_i \in V$, $x_i \rightarrow y$, e tal que o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(V) = T$$

existe na grassmaniana correspondente, então $T_y(W) \subset T$.

b) Se além disso temos uma sequência $y_i \in W$, $y_i \rightarrow y$ e tal que o limite de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$$

existe no espaço projetivo, então $\lambda \subset T$.

Exemplo 1.8. Consideremos o cone C cujo vértice é a origem, e seja $\{Y, V\}$ uma estratificação onde Y é uma geratriz do cone e $V = C - Y$. Esta estratificação não é de Whitney pois as condições da Definição 1.7 não são satisfeitas, como se mostra na figura 1.1.

1.3 Transformação de Nash e o Fibrado de Nash

Definição 1.9. Seja X uma variedade analítica complexa de dimensão d , mergulhada em uma variedade suave M de dimensão m , $X \subset \Omega \subset M$, Ω um aberto em M . Sobre M definimos o fibrado $\widehat{M}$, cuja fibra $\widehat{M}_x$ sobre $x \in M$ é $Gr(d, m)$, conjunto dos d -subespaços em $T_x(M) \cong$

Figura 1.1: Estratificação de Whitney, condições a) e b) não satisfeitas.

$\mathbb{C}^m$. Denotamos por $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ a projeção do fibrado. Sobre a parte regular de X temos uma seção dada por:

$$\begin{aligned} s : X_{reg} &\rightarrow \widehat{M} \\ x &\mapsto (x, T_x X_{reg}). \end{aligned}$$

A transformação de Nash $\widehat{X}$ de X é o fecho em $\widehat{M}$ da imagem de s . Quer dizer que:

$$\widehat{X} = \overline{\{(x, W)/x \in X_{reg}, W = T_x X_{reg}\}} \subset X \times Gr(d, m).$$

Segundo a definição temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} & \longrightarrow & \widehat{M} \\ \downarrow \nu & & \downarrow \pi \\ X & \longrightarrow & M. \end{array}$$

A aplicação $\nu : \widehat{X} \rightarrow X$ é a restrição de π à $\widehat{X}$.

Se $x \in X$ é um ponto singular então:

$$\nu^{-1}(x) = \{(x, T)/\exists x_n \rightarrow x, x_n \in X_{reg}, T = \lim_{x_n \rightarrow x} (T_{x_n} X)\}.$$

Definição 1.10. Denotemos por E o fibrado tautológico sobre $\widehat{M}$. A fibra E_P no ponto $(x, P) \in \widehat{M}$ é o conjunto de vetores v no d -plano $P \in \widehat{M}_x$.

Figura 1.2: Nash

$$E_P = \{v(x) \in T_x M : v(x) \in P\}$$

Definimos então o fibrado de Nash $\widehat{E}$ sobre $\widehat{X}$, como sendo a restrição do fibrado tautológico sobre $\widehat{X}$, quer dizer, $\widehat{E} = E|_{\widehat{X}}$. Então $\widehat{E}|_{\widehat{X}_{reg}}$ pode ser identificado com $T(X_{reg})$ onde $\widehat{X}_{reg} = \nu^{-1}(X_{reg}) \cong X_{reg}$ e

$$\widehat{E} = E \times_{\widehat{M}} \widehat{X} = \{(v(x), \tilde{x}) \in E \times \widehat{X} : v(x) \in \tilde{x}\}$$

Um elemento em $\widehat{E}$ é representado por (x, P, v) onde $x \in X$, P é um d -plano em $\nu^{-1}(x)$ e v é um vetor em P . Se $x \in X_{reg}$, então $P = T_x(X_{reg})$.

1.4 Variedades Polares e Multiplicidade Polar

Nesta seção introduzimos as variedades polares e as multiplicidades polares. A principal referência a seguir é [39].

Seja $f : X \rightarrow S$ um morfismo de espaços analíticos reduzidos tais que as fibras de f são suaves e de dimensão $d = \dim X - \dim S$ sobre o complementar de um conjunto fechado F . De maneira geral, podemos mergulhar $X \subset S \times \mathbb{C}^N$ como o diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & S \times \mathbb{C}^N \\ & \searrow f & \downarrow p \\ & & S \end{array}$$

Proposição 1.11. *Seja N um inteiro e seja:*

$$(\mathcal{D} :) \quad (0) \subset D_{N-1} \subset D_{N-2} \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = \mathbb{C}^N$$

uma sequência de subespaços vetoriais em $\mathbb{C}^N$, tal que $\text{codim } D_i = i$. Para cada inteiro $0 \leq k \leq d$, chamamos k -ésima variedade de Schubert projetiva associada à $\mathcal{D}$, denotada por $c_k(\mathcal{D})$, ao subespaço da Grassmanniana G de d -planos de $\mathbb{C}^N$, definido por:

$$c_k(\mathcal{D}) = \{T \in G / \dim(T \cap D_{d-k+1}) \geq k\}.$$

Para todo $\mathcal{D}$, o conjunto $c_k(\mathcal{D})$ é munido naturalmente de uma estrutura de subvariedade algébrica reduzida de G , de codimensão k em G .

Denotemos por $\mathcal{W}_k$ o conjunto dos sub-espaços genéricos, D_{d-k+1} em $\mathbb{C}^N$, ver [39, Pag. 419] para as propriedades de generalidade. O conjunto $\mathcal{W}_k$ é aberto e denso nas Grassmannianas de sub-espaços de codimensão $d - k + 1$ em $\mathbb{C}^N$.

Uma projeção $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ é uma projeção linear genérica se $\ker p = D_{d-k+1} \in \mathcal{W}_k$.

Teorema 1.12. [39, V 1.3.2] *Suponha que $f : X \rightarrow S$ seja um morfismo liso, isto é, f é plano e as fibras são suaves de codimensão $d = \dim X - \dim S$, fora de um conjunto fechado F . Seja $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ uma projeção linear genérica. Para cada $x \in X - F$, a fibra $X(f(x)) = f^{-1}(f(x))$ de f em X é não singular em x , contida em $\{f(x)\} \times \mathbb{C}^N$. Notemos por $\pi_x : X(f(x)) \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ a restrição à $X(f(x))$ da projeção p .*

Seja $P_k^0(X, f, p) = \{x \in X - F | x \in \Sigma\pi_x\}$, onde $\Sigma\pi_x$ é o conjunto de pontos críticos de π_x .

O fecho $P_k(X, f, p)$ de $P_k^0(X, f, p)$ em X , é um subespaço analítico fechado de X , de codimensão k em X ou vazio.

Então temos a seguinte definição:

Definição 1.13. *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ um morfismo como acima, tal que $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0)$, e seja $D_{d-k+1} \subset \mathbb{C}^N$ de codimensão $d - k + 1$ contido em $\mathcal{W}_k$. Chamamos variedade polar local relativa de codimensão k associada a f e a p ao subespaço analítico*

$$P_k(X, f, p) = \overline{P_k^0(X, f, p)},$$

onde $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{d-k+1}$ é uma aplicação linear tal que $D_{d-k+1} = \ker p$.

Observação 1.14. *Podemos ver que*

1. *Se S é um ponto e f é a aplicação constante, então denotamos a variedade polar por $P_k(X, p)$ e a chamaremos variedade polar absoluta.*

Figura 1.3: $P_1(X, p)$

Exemplo 1.15. Calculemos as variedades polares da seguinte variedade singular:

$$X = \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^3 : y^2 - x^3 - tx^2 = 0\}$$

1. $P_0(X, p) = X$, $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $p(x, y, t) = (x, y, t)$.
2. $P_1(X, p) = \{(x, y, t) \in \mathbb{C}^3 : x + t = 0, y = 0\}$, $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $p(x, y, t) = (x, t)$.

Denotamos por $m_k(X, f) = m_0(P_k(X, f, p))$ (com $D = \ker p \in \mathcal{W}_k$) a k -ésima multiplicidade polar da variedade polar relativa $P_k(X, f, p)$. Se f é uma aplicação constante, denotamos a multiplicidade polar absoluta por $m_k(X)$.

Teorema 1.16. Seja $f : (X, 0) \rightarrow (S, 0)$ um morfismo de espaços analíticos. Para todo mergulho local $(X, 0) \subset (S, 0) \times (\mathbb{C}^N, 0)$, toda escolha de coordenadas, e para todo inteiro k , $0 \leq k \leq d = \dim X - \dim S$, existe um aberto de Zariski denso $V_k \subset W_k$, tal que as multiplicidades $m_k(X, f)$ independem do $D_{d-k+1} \in V_k$.

No Capítulo 3, definiremos $m_d(X)$ para variedades de dimensão d que admitem perturbações suaves (suavização).

1.5 Fecho Integral de Ideais e de Módulos

A principal referência para esta seção na qual daremos algumas noções de fecho integral é [21].

Definição 1.17. *Seja I um ideal no anel A e $h \in A$, dizemos que h está no fecho integral de I , denotado por $\bar{I}$, se existe um polinômio mônico $P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$, $a_i \in I^{n-i}$ tal que $P(h) = 0$*

Considere (X, x) uma variedade analítica complexa equidimensional, definida por $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $A = \mathcal{O}_{X,x}$ seu anel local. Neste caso $\bar{I}$ tem propriedades interessantes.

Dada $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$ uma aplicação, podemos associar uma aplicação induzida $\phi^* : \mathcal{O}_{X,x}^p \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ definida por $\phi^*(h) = h \circ \phi$.

Proposição 1.18. [21] *Seja $I \subset \mathcal{O}_{X,x}$ um ideal, X um conjunto analítico complexo. Então as seguintes condições são equivalentes.*

1. $h \in \bar{I}$.
2. Para cada escolha de geradores (g_i) de I , existe uma vizinhança U de x e uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|h(z)\| \leq C \sup_i \|g_i(z)\|, \text{ para todo } z \in U.$$

3. Para cada $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$, $h \circ \phi \in (\phi^*(I))\mathcal{O}_1$.
4. Existe L , $\mathcal{O}_{X,x}$ módulo faithful de tipo finito tal que $h.I \subset I.L$. L é um $\mathcal{O}_{X,x}$ módulo faithful se $\text{Ann}_{\mathcal{O}_{X,x}}(L) = \{r \in \mathcal{O}_{X,x} | \forall l \in L, rl = 0\} = 0$,

A seguir daremos a definição de fecho integral de módulos, e algumas das suas propriedades.

Definição 1.19. *Seja (X, x) um germe analítico complexo, $M \subset \mathcal{O}_{X,x}^p$ um submódulo. Então $h \in \bar{M}$ se para todo $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, x)$, $h \circ \phi \in (\phi^*(M))\mathcal{O}_1$.*

Exemplo 1.20. *Seja $X = \mathbb{C}^2$, $M = \langle (x, 0), (0, y), (y, x) \rangle \subset \mathcal{O}_2^2$. Então $\bar{M} = m_2 \mathcal{O}_2^2$. Seja $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$, então $(\phi^* M)\mathcal{O}_1 = \langle (t^n, 0), (0, t^n) \rangle$, onde $n = \min_{i=1,2} \{o(\phi_i)\}$ e $o(\phi_i)$ denota a ordem de ϕ_i .*

Denotemos por $J_k(M)$ o k -ésimo ideal de Fitting de M , i.e. o ideal gerado pelos zeros dos menores $k \times k$, da matriz A , dado pelos geradores de M . O módulo gerado por M e $h \in \mathcal{O}_{X,x}^p$ será denotado por (h, M) .

Proposição 1.21. *Se $M \subset \mathcal{O}_{X,x}^p$ é um submódulo, $h \in \mathcal{O}_{X,x}^p$ e $\text{rank}(h, M) = k$ sobre cada componente de (X, x) . Então $h \in \bar{M}$ se e somente se, $J_k(h, M) \subset \bar{J}_k(M)$.*

Seja $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$, uma função analítica complexa, denotemos por $JM(F) \subset \mathcal{O}_{X,x}^p$ o submódulo jacobiano de F gerado por $\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N} \rangle$. Os módulos de nosso interesse são os módulos jacobianos, $JM(F)$, e as reduções destes ($P \subset M$ é redução de M se $\overline{M} = \overline{P}$.)

Corolário 1.22. [21] *Seja $(X, 0)$ uma d -variedade analítica complexa equidimensional definida por $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$. Então P é redução de $JM(F)$ se, somente se $\forall \phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, 0)$ tal que $\phi(\mathbb{C} - \{0\}) \subset X - \Sigma X$, temos que $(\phi^* P)\mathcal{O}_1 = (\phi^* M)\mathcal{O}_1$.*

Proposição 1.23. *Seja (X, x) uma variedade analítica complexa equidimensional, definida por $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e seja P um submódulo de $JM(F)$ tal que $(h, P) = JM(F)$. Temos que $h \in \overline{P}$ se, somente se, para toda curva $\phi : (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0, 0) \rightarrow (X, X - \Sigma X, 0)$ e $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^p, 0)$, temos $\psi(\phi^*(h)) \in I_\psi(\phi^*(P))$, onde $I_\psi(\phi^*(P))$ é o ideal de $\mathcal{O}_1$ gerado aplicando ψ aos geradores de $\phi^*(P)$.*

1.6 Número de Milnor de uma Curva em $\mathbb{C}^N$

Nesta parte definimos o número de Milnor para curvas espaciais seguindo os artigos [7, 32, 6].

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma curva singular reduzida. Seja $\Omega_{(X,0)}^1$ o módulo de 1-formas holomorfas sobre X (módulo das diferenciais de Kähler) e $\omega_{(X,0)}$ o módulo dualizante de Grothendieck

$$\omega_{(X,0)} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^N,0)}}^{N-1}(\mathcal{O}_{X,0}, \Omega_{(\mathbb{C}^N,0)}^N)$$

onde $\Omega_{(\mathbb{C}^N,0)}^N$ é o módulo de N -formas holomorfas sobre $\mathbb{C}^N$ e $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{(\mathbb{C}^N,0)}}^{N-1}$ é o funtor derivado Ext . Seja $\eta : (\overline{X}, x_0) \rightarrow (X, 0)$ a normalização, onde $(\overline{X}, x_0)$ é o multigerme $(\overline{X}, \eta^{-1}(0))$. Como Ω^1 é um funtor contravariante e ω é um funtor covariante, podemos usar a funtorialidade para obter a aplicação c_X .

$$c_X : \Omega_{(X,0)}^1 \rightarrow \Omega_{(\overline{X},x_0)}^1 \cong \omega_{(\overline{X},x_0)} \rightarrow \omega_{(X,0)}.$$

Também temos a aplicação derivada “ d ”, compondo com c_X obtemos uma nova aplicação ao qual chamamos de “ d ”

$$d : \mathcal{O}_{(X,0)} \xrightarrow{d} \Omega_{(X,0)}^1 \xrightarrow{c_X} \omega_{(X,0)}.$$

Definição 1.24. [7] *Seja $(X, 0)$ uma curva singular reduzida. Definimos o número de Milnor, μ , como a dimensão da seguinte álgebra:*

$$\mu = \mu(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\omega_{(X,0)}}{d(\mathcal{O}_{X,0})}.$$

Daremos uma definição equivalente para $\omega_{(X,0)}$, usando as formas diferenciais de Rosenlicht. Seja $\bar{x}_0 = \eta^{-1}(0)$ e denotemos por $\Omega_{(\bar{X}, \bar{x}_0)}^1(x_0)$ o multigerme de formas meromorfas sobre $(\bar{X}, \bar{x}_0)$ com no máximo um polo (de qualquer ordem) em $\bar{x}_0$. Definimos o conjunto das formas diferenciais regulares de Rosenlicht como sendo:

$$\omega_{(X,0)}^R = \eta_* \{ \alpha \in \Omega_{(\bar{X}, \bar{x}_0)}^1(x_0) / \sum_{p \in \bar{x}_0} \text{res}_p(f\alpha) = 0, \forall f \in \mathcal{O}_{(X,0)} \}.$$

Outra vez obtemos a aplicação d ,

$$d : \mathcal{O}_{(X,0)} \xrightarrow{d} \Omega_{(X,0)}^1 \xrightarrow{c_X} \omega_{(X,0)}.$$

Assim

$$\mu(X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\omega_{(X,0)}^R}{d\mathcal{O}_{(X,0)}}.$$

A definição de Grothendieck tem a vantagem de ser funtorial e pode ser estendida a várias dimensões. Mas pelo contrário a definição de Rosenlicht é mais usada para os cálculos.

Em [7] é dada outra definição de número de Milnor que coincide com o número de Milnor para interseções completas.

Seja $\eta : (\bar{X}, \bar{x}_0) \rightarrow (X, 0)$ a normalização, denotemos por $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\eta_* \mathcal{O}_{(\bar{X}, \bar{x}_0)}}{\mathcal{O}_{X,0}}$ e por r o número de ramos da curva $(X, 0)$

Observação 1.25. [7] O número de Milnor da curva $(X, 0)$ satisfaz a fórmula de Milnor

$$\mu(X) = 2\delta - r + 1.$$

No seguinte exemplo calculamos o número de Milnor de C usando a definição equivalente à definição 1.24.

Exemplo 1.26. Seja $C = V(z(z + x^2), y(z + x^2), y^2 - xz)$, curva singular. Vamos calcular o número de Milnor da curva C . A curva tem dois ramos, o primeiro ramo é dado pela seguinte normalização

$$\begin{aligned} \eta_1 : \mathbb{C} &\rightarrow C \\ t &\mapsto (t^2, -t^3, -t^4) \end{aligned}$$

O segundo ramo é parametrizado por:

$$\begin{aligned} \eta_2 : \mathbb{C} &\rightarrow C \\ s &\mapsto (s, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim, temos a aplicação induzida por η ,

$$\eta_* : \mathbb{C} \left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t^4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \mathbb{C}\{t\} \oplus \mathbb{C}\{s\}$$

Vamos calcular uma base para as 1-formas diferenciais de Rosenlicht. Um elemento $\alpha \in \Omega^1_{(\overline{X}, x_0)}(x_0)$ pode ser expresso em séries da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} (\sum_{m=1}^r a_m t^{-m} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m) dt \\ (\sum_{k=1}^l c_k s^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k s^k) ds \end{pmatrix}.$$

Temos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{(X,0)}$, então $a_1 + c_1 = 0$

$\begin{pmatrix} t^2 \\ s \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{(X,0)}$, então $a_3 + c_2 = 0$

$\begin{pmatrix} -t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{(X,0)}$, então $a_4 = 0$, assim $a_m = 0, \forall m \geq 4$ e $c_k = 0, \forall k \geq 2$.

Logo temos que

$$\begin{pmatrix} (a_3 t^{-3} + a_2 t^{-2} + a_1 t^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m) dt \\ (-a_3 s^{-2} + -a_1 s^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k s^k) ds \end{pmatrix} \in \omega_X^R$$

$$\omega_X^R = \begin{pmatrix} t^{-3} dt \\ -s^{-2} ds \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t^{-2} dt \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t^{-1} dt \\ -s^{-1} ds \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} 1 dt \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C}\{t\} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 ds \end{pmatrix} \mathbb{C}\{s\}$$

Para calcular μ , precisamos descrever $d\mathcal{O}_X$:

$$d\mathcal{O}_{X,0} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C}\{t\} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \mathbb{C}\{s\}$$

Assim, temos que o quociente é gerado por

$$\frac{\omega_{(X,0)}^R}{d\mathcal{O}_{(X,0)}} = \begin{pmatrix} t^{-3} dt \\ -s^{-2} ds \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t^{-2} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -s^{-1} \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} 1 dt \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C} \oplus \begin{pmatrix} t dt \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{C}$$

Portanto $\mu = 5$.

Variedades Determinantais

Neste capítulo apresentaremos as definições básicas sobre variedades determinantais, com base no artigo de W. Èbeling e S. M. Guseïn-Zade [23]. O objetivo é definir as variedades essencialmente isoladas e estudar suas propriedades. Estas singularidades generalizam as singularidades isoladas. Mostramos também que elas podem ser estudadas através da teoria de singularidades de matrizes. As referências para este estudo são as teses de Frühbis-Krüger [17] e Silva Pereira [34]

2.1 Variedades Determinantais Essencialmente Isoladas

Denotemos por $M_{m,n}$ o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas complexas.

Definição 2.1. Para cada t , $1 \leq t \leq \min\{m, n\}$, seja $M_{m,n}^t$ o subconjunto de $M_{m,n}$ cujos elementos são matrizes de posto menor do que t :

$$M_{m,n}^t = \{A \in M_{m,n} / \text{rank}(A) < t\}.$$

Este conjunto é uma variedade singular de codimensão $(m - t + 1)(n - t + 1)$ em $M_{m,n}$, chamada variedade determinantal genérica.

O conjunto singular de $M_{m,n}^t$ é $M_{m,n}^{t-1}$. Temos que $M_{m,n}^t = \cup_{i=1, \dots, t} (M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ e $\{M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}\}_{i=1, \dots, t}$ é uma estratificação de Whitney de $M_{m,n}^t$, ver [1].

Seja $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ uma aplicação dada pela matriz $m \times n$, $F(x) = (f_{ij}(x))$, cujas entradas são funções analíticas complexas definidas sobre um domínio aberto $U \subset \mathbb{C}^N$.

Definição 2.2. A variedade determinantal de tipo (m, n, t) é a pré-imagem $F^{-1}(M_{m,n}^t)$ da variedade $M_{m,n}^t$ com a condição que a codimensão seja $(n - t + 1)(m - t + 1)$.

A imagem de uma aplicação genérica F pode interceptar a variedade $M_{m,n}^i$ com $i < t$ (além disso a correspondente variedade determinantal $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ tem singularidades). Uma aplicação genérica F intercepta o estrato $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ da variedade $M_{m,n}^t$ transversalmente. Quer dizer, nos pontos correspondentes, a variedade determinantal tem um tipo de singularidades que depende apenas de $i = \text{rank} F(x) + 1$.

Definição 2.3. Um ponto $x \in X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ é chamado essencialmente não singular se, neste ponto, a aplicação F é transversal ao estrato correspondente da variedade $M_{m,n}^t$ (isto é, ao estrato $\{M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}\}$, com $i = \text{rank} F(x) + 1$).

Sejam $I \subset \{1, \dots, m\}$ e $J \subset \{1, \dots, n\}$ tais que $|I| = |J| = i$. Denotemos por $m_{IJ}(x)$ o menor $i \times i$ correspondente da matriz $F(x)$ e por $\{dm_{IJ}^i(x)\}$ o conjunto de diferenciais de todos os menores $m_{IJ}(x)$.

Em um ponto essencialmente não singular $x_0 \in X$ com $\text{rank} F(x_0) = i - 1$, temos que o posto da matriz $\{dm_{IJ}^i\}$ é $(m - i + 1)(n - i + 1)$.

Para $1 \leq i \leq t$, denotemos por $X_i = F^{-1}(M_{m,n}^i)$. Em uma vizinhança do ponto essencial não singular x_0 , temos que a subvariedade $X_i \setminus X_{i-1} = \{x \in X / \text{rank} F(x) = i - 1\}$ é não singular de dimensão $N - (m - i + 1)(n - i + 1)$.

Em um ponto essencialmente singular $x \in X$ temos,

$$\text{rank}(\{dm_{IJ}^i\})_{IJ} < (m - i + 1)(n - i + 1).$$

Definição 2.4. Um germe $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de variedade determinantal de tipo (m, n, t) tem um ponto essencialmente singular isolado na origem (EIDS), se existe uma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^N$ tal que todos os pontos singulares de X em $U - \{0\}$ são pontos essencialmente não singulares.

Quando $t = 1$ ou $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$ a singularidade da variedade determinantal é isolada e satisfaz a seguinte definição.

Definição 2.5. Seja X uma variedade determinantal de tipo (m, n, t) , definida por F e satisfazendo: $t = 1$ ou $N \leq (m - t + 2)(n - t + 2)$. Dizemos que $(X, 0)$ é uma variedade determinantal com singularidade isolada em 0 ou IDS se X é suave em x e $\text{rank} F(x) = t - 1$, para todo $x \neq 0$ em uma vizinhança da origem.

De agora em diante vamos supor que a variedade determinantal X é definida por uma aplicação $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ com $F(0) = 0$. Isto não é uma restrição porque se $F(0) \neq 0$ e $\text{rank} F(0) = s > 0$, então X é uma variedade determinantal de tipo $(m - s, n - s, t - s)$ definida pela aplicação $F' : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m-s, n-s}$ com $F'(0) = 0$. Vamos supor também que a dimensão de X é maior do que 0, ou seja $N > (m - t + 1)(n - t + 1)$.

Exemplo 2.6. Considere $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$, onde F é definida por

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{C}^4 &\rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & y & x \\ w & z & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A variedade X é definida pelos zeros de $z^2 - wy, y^2 - zx, zy - wx$ e tem singularidade isolada na origem.

Definição 2.7. Consideramos uma perturbação de F no seguinte sentido,

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \quad \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} &\rightarrow M_{m,n} \\ (x, t) &\mapsto \tilde{F}(x, s) \end{aligned}$$

onde $\tilde{F}(x, 0) = F(x)$ e $\tilde{F}_s : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ é transversal a todos os estratos $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$, com $i \leq t$, para todo $s \neq 0$ suficiente próximo de zero. Então $\tilde{X}_s = \tilde{F}_s^{-1}(M_{m,n}^t)$, $s \neq 0$ é chamada uma suavização essencial de X .

Quando $\tilde{X}$ é suave, dizemos que $\tilde{X}$ é uma suavização de X .

Uma perturbação genérica $\tilde{F}$ da aplicação F define uma suavização essencial da EIDS $(X, 0)$. Uma suavização essencial em geral não é suave (para $N \geq (m - t + 2)(n - t + 2)$). O conjunto singular de $\tilde{X}_s$ é $\tilde{F}_s^{-1}(M_{m,n}^{t-1})$. Como F é transversal aos estratos de $M_{m,n}^t$, segue que $\tilde{X}_s = \cup_{1 \leq i \leq t} \tilde{F}_s^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ é uma estratificação de Whitney de $\tilde{X}_s$.

Uma suavização essencial de uma EIDS $(X, 0)$ de tipo (m, n, t) é uma suavização, isto é, $\tilde{X}$ é suave, se $N < (m - t + 2)(n - t + 2)$.

Teorema 2.8. [40] Seja $(X, 0)$ uma variedade determinantal com singularidade isolada na origem, definida pelos menores $t \times t$ de uma matriz F_{ij} $m \times n$, com entradas em $\mathcal{O}_N$, $2 \leq t \leq m \leq n$. Se $\dim(X) < m + n - 2t + 3$, então X admite uma suavização.

Exemplo 2.9. Seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$ a superfície determinantal definida pela função,

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{C}^4 &\rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & y + w & x \\ w & x & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma suavização essencial, $\tilde{X}_s$, de X é representada pela seguinte matriz:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s : \quad U \subset \mathbb{C}^4 &\rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & y + w & x + s \\ w & x & y \end{pmatrix}, \quad s \neq 0, \end{aligned}$$

então $\tilde{X}_s = \tilde{F}_s^{-1}(M_{2,3}^2)$ é uma suavização de X .

Exemplo 2.10. Seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$ a 4- variedade determinantal definida pela seguinte matriz

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{C}^6 & \rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w, v, u) & \mapsto \begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & x + u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma suavização essencial, $\tilde{X}_s$, de X é representada pela seguinte matriz:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s : \quad U \subset \mathbb{C}^6 & \rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w, v, u) & \mapsto \begin{pmatrix} x + s & y & v \\ z & w & x + u^2 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0, \end{aligned}$$

então $\tilde{X}_s = \tilde{F}_s^{-1}(M_{2,3}^2)$ é uma suavização essencial de X , que tem singularidade em $y = z = w = v = 0$, $x = -s$, $u = \pm\sqrt{s}$.

Exemplo 2.11. Seja $X = F^{-1}(M_{2,4}^2) \subset \mathbb{C}^5$ a superfície determinantal definida por

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{C}^5 & \rightarrow M_{2,4} \\ (x, y, z, w, v) & \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ y & z & w & v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Uma suavização essencial, $\tilde{X}_s$, de X é representada pela matriz:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s : \quad U \subset \mathbb{C}^5 & \rightarrow M_{2,4} \\ (x, y, z, w, v) & \mapsto \begin{pmatrix} x & y + s & z & w \\ y & z & w & v \end{pmatrix}, \quad s \neq 0, \end{aligned}$$

então $\tilde{X}_s = \tilde{F}_s^{-1}(M_{2,4}^2)$ é uma suavização essencial de X , que é singular.

2.2 Singularidades de Matrizes

Vamos definir os grupos $\mathcal{G}(n, m)$, $\mathcal{K}_V$ e $\mathcal{K}_H$ que são subgrupos geométricos do grupo de contato $\mathcal{K}$, que agem no espaço das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathcal{O}_N$. O grupo $\mathcal{G}(n, m)$ age sobre o espaço das matrizes através de operações de linhas e colunas de matrizes e de mudanças de coordenadas na fonte. A teoria de singularidades pode ser então utilizada, e as

caracterizações de estabilidade e determinação finita se verificam para estas ações. Poderemos então dar novas caracterizações para as EIDS, tendo como base a teoria de singularidades de matrizes. As principais referências a seguir são [18, 35, 12].

2.2.1 $\mathcal{K}$ - Equivalência

Vamos descrever o grupo de contato $\mathcal{K}$ que age sobre o espaço de de germes analíticos $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

$\mathcal{K} = \{\Phi : (\mathbb{C}^{N+p}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{N+p}, 0) | \Phi \text{ é um difeomorfismo, } \Phi(x, y) = (\phi(x), \theta(x, y)), \theta(x, 0) = 0, \text{ onde } \phi : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N, 0) \text{ é um difeomorfismo}\}$.

Ou seja, $\mathcal{K}$ consiste de difeomorfismos analíticos $\Phi : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^p$ tais que existe um difeomorfismo $\phi : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N, 0)$, na qual temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^N & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{N+p} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^N \\ \downarrow \phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \phi \\ \mathbb{C}^N & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{N+p} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C}^N \end{array}$$

$i : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{N+p}$ é a inclusão $i(x) = (x, 0)$ e $\pi : \mathbb{C}^{N+p} \rightarrow \mathbb{C}^N$ é a projeção sobre o primeiro fator.

Um elemento $\Phi \in \mathcal{K}$ age sobre $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ se $\text{graf}(\Phi.F) = \Phi(\text{graf} F)$, onde $\text{graf} F$ é o gráfico da função F .

2.2.2 A $\mathcal{G}(n, m)$ - Equivalência

Seja como antes $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$, tal que para cada x em uma vizinhança U da origem, $F(x) \in M_{m,n}$.

Indicaremos por $M_{m,n}(\mathcal{O}_N) = \{F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n} | F \text{ é um germe analítico complexo}\}$.

Seja $\mathcal{R}$ o grupo de mudanças de coordenadas em $(\mathbb{C}^N, 0)$, ou seja $\mathcal{R} = \{\phi : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^N, 0) | \phi \text{ é um germe de difeomorfismo analítico}\}$.

Definição 2.12. (*O Grupo $\mathcal{G}(n, m)$*) Seja $GL_i(\mathcal{O}_N)$ o grupo das matrizes $i \times i$ invertíveis com entradas em $\mathcal{O}_N$. Denotemos por $\mathcal{H} = GL_n(\mathcal{O}_N) \times GL_m(\mathcal{O}_N)$

Então definimos $\mathcal{G}(n, m) = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$, o qual é um grupo com as seguintes operações.

$$(\phi, R, L) \circ (\psi, S, N) = (\phi \circ \psi, (\psi^* R).S, (\psi^* L).N),$$

onde $\psi^*(M)$ é a matriz gerada aplicando ψ em cada uma das entradas de M .

Definimos a ação de $\mathcal{G}(n, m)$ sobre $M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathcal{G}(n, m) \times M_{m,n}(\mathcal{O}_N) \longrightarrow M_{m,n}(\mathcal{O}_N) \\ ((\phi, R, L), F) &\longmapsto L^{-1}(\phi^* F) \cdot R. \end{aligned}$$

Dizemos que F_1, F_2 são $\mathcal{G}(n, m)$ -equivalentes se $\exists(\phi, R, L) \in \mathcal{G}(n, m)$ tal que $F_2 = L^{-1}(\phi^* F_1)R$.

A ação do grupo $\mathcal{G}(n, m)$ é dada por mudanças de coordenadas na fonte e transformações de linhas e colunas da matriz.

Como já definimos uma ação sobre o espaço das matrizes $m \times n$, a primeira tarefa é determinar o espaço tangente sob a ação do grupo $\mathcal{G}(n, m)$.

Definição 2.13. *Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe analítico, definimos o $\mathcal{O}_N$ -módulo*

$$\theta(F) = \mathcal{O}_N \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}_{i=1}^p,$$

módulo de campos vetoriais ao longo de F .

Consideremos o espaço das matrizes com entradas em $\mathcal{O}_N$ como um $\mathcal{O}_N$ módulo. O espaço tangente será considerado como um $\mathcal{O}_N$ submódulo de $\theta(F)$.

Teorema 2.14. [35, 16] *Seja $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$.*

1. *O espaço tangente com relação ao grupo $\mathcal{R}$ é dado por:*

$$T\mathcal{R} \cdot F = \mathfrak{m} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i}, \forall 1 \leq i \leq N \right\}$$

onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_N$.

Usamos também a notação $J(F)$ para o $\mathcal{O}_N$ -módulo gerado pelas matrizes da forma

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial F_{1n}}{\partial x_j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m1}}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_j} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

$$\forall 1 \leq j \leq N.$$

2. *O espaço tangente com relação ao grupo $\mathcal{H}$ é dado por:*

$$T\mathcal{H} \cdot F = \mathcal{O}_N \{ (AF + FB) / A \in M_m(\mathcal{O}_N), B \in M_n(\mathcal{O}_N) \}.$$

3. O espaço tangente com relação ao grupo $\mathcal{G}(n, m) = \mathcal{R} \times \mathcal{H}$ é dado pela soma dos espaços tangentes:

$$T\mathcal{G}(n, m) \cdot F = \mathfrak{m}\left\{\frac{\partial F}{\partial x_i}, \forall 1 \leq i \leq N\right\} + \mathcal{O}_N\{(AF + FB)/A \in M_m(\mathcal{O}_N), B \in M_n(\mathcal{O}_N)\}.$$

Definição 2.15. O espaço tangente estendido para $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$ é dado por:

$$T_e\mathcal{G}(n, m) \cdot F = \mathcal{O}_N\{\langle JM(F), AF + FB \rangle / A \in M_m(\mathcal{O}_N), B \in M_n(\mathcal{O}_N)\}.$$

Lema 2.16. [35] Seja $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$ com entradas no ideal maximal $\mathfrak{m}$. Então o módulo normal é dado por:

$$N_F = \frac{\theta(F)}{T\mathcal{H} \cdot F}$$

Definição 2.17. A codimensão do espaço tangente estendido de $G(n, m)$ em F é denominada número de Tjurina de $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$. Isto é,

$$\tau(F) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(F)}{T_e\mathcal{G}(n, m) \cdot F}.$$

2.2.3 A $\mathcal{K}_V$ - Equivalência

Nesta seção apresentamos o grupo $\mathcal{K}_V$ que é um subconjunto do grupo de contato $\mathcal{K}$, que depende do conjunto analítico $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ e age sobre o espaço de funções $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$. Para nosso contexto $\mathbb{C}^p$ é o espaço das matrizes $M_{m,n}$. As referências para esta subseção são [12, 36].

Denotemos por θ_p o $\mathcal{O}_p$ módulo de germes de campos vetoriais holomorfos sobre $\mathbb{C}^p$, 0 e por $\mathcal{K}$ o grupo de contato que age sobre o espaço das funções $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$.

Definição 2.18. Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de conjunto analítico. Seja $I(V) \subset \mathcal{O}_p$ o ideal de germes que se anulam sobre V . Definimos o módulo de germes de campos vetoriais que são tangentes a V .

$$\text{Derlog}(V) = \{\eta \in \theta_p \mid \eta(I(V)) \subset I(V)\}.$$

Definição 2.19. Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de espaço analítico complexo, definido pelos zeros de uma função $H : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^r$. Definimos o submódulo do $\text{Derlog}(V)$ por

$$\text{Derlog}(H) = \{\eta \in \theta_p \mid \eta(H) = 0\}.$$

Nesse contexto, se H é uma boa equação que define $V \subset \mathbb{C}^p$, então:

$$\text{Derlog}(V) = \text{Derlog}(H) \oplus \mathcal{O}_p\{\zeta\},$$

o vetor ζ é chamado campo vetorial de Euler.

Definição 2.20. *Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de variedade analítica. Definimos o subgrupo de $\mathcal{K}$ denotado por $\mathcal{K}_V$, que consiste de germes de difeomorfismos de $\mathcal{K}$ que preservam $\mathbb{C}^N \times V$, isto é,*

$$\mathcal{K}_V = \{\Phi \in \mathcal{K} \mid \Phi(\mathbb{C}^N \times V) \subset \mathbb{C}^N \times V\}.$$

Seja $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ o conjunto de geradores para o $\text{Derlog}(V)$. Então o espaço tangente estendido do $\mathcal{K}_V$ em $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ é

$$T\mathcal{K}_{V,e} \cdot F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^N + \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \{\eta_i \circ F\}_{i=1}^m$$

Então a codimensão de $\mathcal{K}_V$ em F é a dimensão do espaço normal de $\mathcal{K}_V$ em F .

$$\mathcal{K}_{V,e} - \text{codim}(F) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(F)}{T\mathcal{K}_{V,e} \cdot F}.$$

2.2.4 A $\mathcal{K}_H$ - Equivalência

Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ tal que $V = H^{-1}(0)$, com $H : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^r, 0)$ um germe analítico. Neste caso definimos o grupo $\mathcal{K}_H$ que consiste de difeomorfismos que preservam todos os conjuntos de nível de H , ver [36].

Definição 2.21. *Com as hipóteses acima, seja $\pi_2 : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ a projeção sobre o segundo fator. Então o grupo $\mathcal{K}_H$ é definido por:*

$$\mathcal{K}_H = \{\Phi \in \mathcal{K} \mid H \circ \pi_2 \circ \Phi = H \circ \pi_2\}.$$

O espaço tangente estendido do grupo $\mathcal{K}_H$ em $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um submódulo de $\theta(F)$, dado por

$$T\mathcal{K}_{H,e} \cdot F = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^N + \mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0} \{\eta_j \circ F\}_{j=1}^m$$

onde $\{\eta_j\}_{j=1}^m$ é o conjunto de geradores para o $\text{Derlog}(H)$.

A codimensão estendida de $\mathcal{K}_H$ em F é definida por

$$T\mathcal{K}_{H,e} - \text{codim}(F) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(F)}{T\mathcal{K}_{H,e} \cdot F}$$

2.3 Determinação Finita

Seja G qualquer um dos grupos definidos acima, $G = \mathcal{G}(n, m), \mathcal{K}_V$ ou $\mathcal{K}_H$. Nesta seção apresentaremos critérios de determinação finita do grupo G .

Definição 2.22. *Seja $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$. Dizemos que F é $k-G$ determinado se para toda matriz $P \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$ tal que $j^k(F) = j^k(P)$ se tem que $F \sim_G P$.*

Dizemos que F é finitamente determinado se $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que F é $k-G$ determinado.

Nos resultados seguintes, apresentamos condições necessárias e suficientes para a G -determinação finita.

Proposição 2.23. [34, 9] *Seja $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$. Se F é $k-G$ determinado então $\mathfrak{m}^{k+1}\theta(F) \subseteq TG \cdot F$*

Teorema 2.24. [34, 9] (*Crrio Infinitesimal da determino Finita.*) *Seja $F \in M_{m,n}(\mathcal{O}_N)$ um germe de matriz. Seja $k > 0$ um inteiro tal que se G satisfaz as relaes para os grupos $G = \mathcal{G}(n, m), \mathcal{K}_V$ e $\mathcal{K}_H$ respectivamente*

$$\mathfrak{m}^{k+1}\theta(F) \subset \mathfrak{m}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N}\right) + \mathfrak{m}\{(AF + FB)/A \in M_m(\mathcal{O}_N), B \in M_n(\mathcal{O}_N)\}. \quad (2.1)$$

$$\mathfrak{m}^{k+1}\theta(F) \subset \mathfrak{m}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N}\right) + \mathfrak{m}Derlog(V). \quad (2.2)$$

$$\mathfrak{m}^{k+1}\theta(F) \subset \mathfrak{m}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N}\right) + \mathfrak{m}Derlog(H). \quad (2.3)$$

Ento F G k -finitamente determinado.

O seguinte resultado uma caracterizao geomtrica dos germes finitamente determinados.

Definio 2.25. *Um germe $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ G -estvel se $TG_e \cdot F = \theta(F)$.*

Teorema 2.26. [34] (*Crrio Geomtrico da G -determino Finita.*) *$F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ G -finitamente determinado se e somente se existe um representante $F : U \rightarrow M_{m,n}$ tal que para todo $x \in U - \{0\}$, o germe de F no ponto x G estvel.*

Podemos usar o crrio geomtrico da G -determino finita para relacionar esta abordagem com as EIDS definidas na seo anterior no caso de variedades determinantis definidas pelo anulamento dos menores maximais da matriz $F(x)$.

Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ e $X = F^{-1}(M_{m,n}^m)$ a variedade determinantal definida por F .

Teorema 2.27. *$F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ $\mathcal{G}(n, m)$ finitamente determinada se e somente se X uma EIDS.*

Demonstração: Se F é $\mathcal{G}(n, m)$ finitamente determinado, existe um representante $F : U \rightarrow M_{m,n}$, U uma vizinhança da origem tal que, $\forall x \in U \setminus \{0\}$, F é transversal aos estratos $M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ de $M_{m,n}^m$. Ou seja, $X = F^{-1}(M_{m,n}^m)$ é uma EIDS. Evidentemente a recíproca também se verifica. ■

Um germe $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow M_{m,n}$ $\mathcal{G}(n, m)$ finitamente determinado admite um desdobramento versal a s -parâmetros (onde $s = \tau(F)$), ver [34]

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^s, 0) &\rightarrow M_{m,n} \\ (x, u) &\mapsto \mathcal{F}(x, u) = (\mathcal{F}_{ij}(x, u)). \end{aligned}$$

Para um representante $\mathcal{F} : W \times D \rightarrow M_{m,n}$ de F , onde W é uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^N$ e D é vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^s$, definimos o conjunto de bifurcação $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ por

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{u \in D \mid \mathcal{F}_u : W \rightarrow M_{m,n} \text{ não é } \mathcal{G}(n, m) \text{ estável}\}$$

onde $\mathcal{F}_u : W \rightarrow M_{m,n}$, $\mathcal{F}_u(x) = \mathcal{F}(x, u)$. Este é um subconjunto analítico próprio de W e portanto seu complemento é conexo.

Assim, para cada $u \in D \setminus \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_u$ é $\mathcal{G}(n, m)$ -estável. Além disso, $\forall u, u' \in D \setminus \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_u \sim_{\mathcal{G}(n, m)} \mathcal{F}_{u'}$.

Em outras palavras, $\forall u \in D \setminus \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}_u$ é uma suavização essencial de F . Além disso, quaisquer duas suavizações essenciais são equivalentes.

2.4 Variedades Cohen-Macaulay de Codimensão 2

O Teorema de Hilbert-Burch nos permite enunciar a seguinte proposição, que diz que todo germe Cohen-Macaulay de codimensão 2 pode ser expresso como os menores maximais de uma matriz M de tamanho $n \times (n+1)$ e viceversa. No mesmo contexto, deformações de um germe Cohen-Macaulay de codimensão 2 podem ser representadas por perturbações da matriz M , e qualquer perturbação da matriz surge como uma deformação do germe X .

Dada uma matriz $F \in M_{n(n+1)}(\mathcal{O}_N)$, denotemos por Δ_i o menor $n \times n$ cujo índice i , indica que a i -ésima linha da matriz $F(x)$ foi eliminada para calcular o menor, denotemos por $\langle \Delta \rangle = \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n+1} \rangle$ o ideal gerado pelos menores Δ_i , $i = 1, \dots, n+1$ e por $V(\Delta)$ a variedade em $\mathbb{C}^N$ definida pelos zeros das funções Δ_i .

Proposição 2.28. [15, página 496]

1. Se a $\text{codim } V(\langle \Delta \rangle) \geq 2$, a seguinte seqüência

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_N^n \xrightarrow{F} \mathcal{O}_N^{n+1} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_N \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \Delta \rangle} \longrightarrow 0$$

é exata. Além disso, $\frac{\mathcal{O}_N}{\langle \Delta \rangle}$ é Cohen - Macaulay e $\text{codim} V(\langle \Delta \rangle) = 2$.

2. Se $X \subset \mathbb{C}^N$ é Cohen- Macaulay, tal que $\text{codim}(X) = 2$ e $X = V(I)$ então $\mathcal{O}_N/I$ tem uma resolução livre minimal do tipo.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_N^n \xrightarrow{F} \mathcal{O}_N^{n+1} \xrightarrow{I} \mathcal{O}_N \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_N}{I} \longrightarrow 0$$

Além disso existe uma unidade $u \in \mathcal{O}_N$ tal que $I = u \cdot \Delta$, onde $\Delta = \langle \Delta_1, \dots, \Delta_{n+1} \rangle$.

3. Qualquer perturbação da matriz $F(x)$ dá origem a uma deformação de X .
4. Qualquer deformação da variedade X pode ser gerada por uma perturbação da matriz $F(x)$.

Observação 2.29. $X \subseteq \mathbb{C}^N$ é chamado Cohen-Macaulay se o anel local $\mathcal{O}_N/I$, é **Cohen-Macaulay**.

Topologia de Variedades com Singularidade Isolada

Vamos estudar neste capítulo a topologia de variedades determinantis isoladas. Estas variedades podem admitir suavização. A topologia da fibra genérica é um invariante da variedade determinantal. Definimos o número de Milnor com base nos trabalhos [12, 35, 31] e a característica de Euler evanescente com base nos trabalhos [12, 31] e estudamos uma fórmula de tipo Lê-Greuel que se verifica para essas variedades.

3.1 Teoria de Morse

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma variedade d -dimensional com singularidade isolada na origem. Uma suavização de X é uma deformação plana com a propriedade que suas fibras genéricas são suaves.

Definição 3.1. Dizemos que uma variedade $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ d -dimensional com singularidade isolada admite uma suavização, se existem uma bola aberta $B_\epsilon(0) \subset \mathbb{C}^N$ centrada na origem, um subespaço fechado $\mathcal{X} \subset B_\epsilon(0) \times D$, onde $D \subset \mathbb{C}$ é um disco aberto centrado no zero e uma aplicação analítica própria $\pi : \mathcal{X} \rightarrow D \subset \mathbb{C}$, que é a restrição da aplicação projeção $\pi : B_\epsilon(0) \times D \rightarrow D$ tal que:

1. π é plana
2. $(\pi^{-1}(0), 0)$ é isomorfo a $(X, 0)$
3. $\pi^{-1}(s)$ é não singular para $s \neq 0$

Segue da definição que $\mathcal{X}$ tem singularidade isolada na origem e é uma variedade normal se X é normal em zero. Além disso,

$$\pi|_{\pi^{-1}(D - \{0\})} : \pi^{-1}(D - \{0\}) \rightarrow D - \{0\}$$

é um fibrado cujas fibras $X_t = \pi^{-1}(s)$ são suaves.

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma variedade d -dimensional com singularidade isolada na origem. Suponhamos que exista uma suavização para X , isto é, uma família plana $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$, restrição de $\pi : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$, tal que $X_s = \pi^{-1}(s)$ é suave para $s \neq 0$ e $X = X_0$. Notemos também que $\mathcal{X}$ tem singularidade isolada na origem. Seja p uma função analítica complexa definida em X , com singularidade isolada na origem. Seja

$$\begin{aligned} \tilde{p} : \mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, s) &\mapsto \tilde{p}(x, s) \end{aligned}$$

tal que $\tilde{p}(x, 0) = p(x)$ e tal que para todo $s \neq 0$, $\tilde{p}(\cdot, s) = p_s$ seja uma função de Morse em X_s . O número de pontos críticos de p_s é finito.

Proposição 3.2. [35] *Sejam X uma variedade d -dimensional com singularidade isolada na origem que admite uma suavização π e $p_s = \tilde{p}(\cdot, s)$ como acima. Então:*

1. Se $s \neq 0$

$$X_s \cong p_s^{-1}(0) \cup \{ \text{Células de dimensão } d \},$$

onde $\cup$ indica a colagem dos dois espaços e $\cong$ indica que os espaços têm o mesmo tipo de homotopia.

2. Temos a igualdade

$$\chi(X_s) = \chi(p_s^{-1}(0)) + (-1)^d n_\sigma \quad (3.1)$$

onde n_σ é o número de pontos críticos de p_s e $\chi(X_s)$ é a característica de Euler de X_s .

Na fórmula (3.1) podemos substituir n_σ pela multiplicidade polar $m_d(X)$, que definimos a seguir.

Definição 3.3. [20] *Sejam $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^s$ uma variedade analítica complexa de dimensão $d + s$ e $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}^s$ uma função analítica tal que $\pi^{-1}(0) = X$. Seja $\tilde{p} : \mathcal{X} \subset (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ tal que $\tilde{p}|_X$ tem singularidade isolada na origem. Denotamos $m_d(X, \pi, \tilde{p}) = m_0(P_d(X, \pi, \tilde{p}))$, onde $P_d(X, \pi, \tilde{p})$ é a d -ésima variedade polar de $\mathcal{X}$ com relação a π . Em geral $m_d(X, \pi, \tilde{p})$ depende das escolhas de $\mathcal{X}$ e $\tilde{p}$, mas quando $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$ é uma suavização única de X , $m_d(X, \pi, \tilde{p})$ depende apenas de $\tilde{p}$. Quando $\tilde{p}$ é uma projeção genérica, então $m_d(X, \pi, \tilde{p})$ depende apenas de X , e é portanto um invariante de X que será denotado por $m_d(X) = m_d(X, \pi, \tilde{p})$.*

A prova da proposição abaixo pode ser encontrada em [34].

Proposição 3.4. *Sob as condições da Proposição 3.2, $n_\sigma = m_d(X)$.*

No estudo da topologia de variedades determinantis com singularidade isolada, os seguintes resultados são úteis.

Teorema 3.5. [22] *Seja $(X, 0)$ um espaço analítico complexo d -dimensional, com singularidade isolada e X_s a suavização de $(X, 0)$. Então $\pi_i(X_s) = 0$ para $i \leq \dim X - \text{codim } X$.*

Denotemos por $b_i(X_s)$ o i -ésimo número de Betti da fibra genérica.

Teorema 3.6. [22] *Seja X_s a suavização de uma singularidade normal, então $b_1(X_s) = 0$.*

Exemplo 3.7. (*Interseções completas com singularidade isolada*) *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma ICIS d -dimensional. A fibra de Milnor X_s , tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas. O número de esferas é o número de Milnor, denotado por $\mu(X)$ e temos a seguinte relação*

$$\chi(X_s) = 1 + (-1)^d \mu(X).$$

3.2 Funções Definidas em IDS

Nem toda IDS tem suavização, como vimos no Teorema 2.8. A condição é que $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Em [31, 33], J. Nuño Ballesteros, B. Oréface-Okamoto e J. Tomazella construíram suavizações de $(X, 0)$, no seguinte sentido:

Dado um germe de variedade determinantal $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, onde $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ vamos construir uma suavização de $(X, 0)$ através de uma deformação de F . Seja $A = (a_{ij})_{mn}$ com $a_{ij} \in \mathbb{C}$ números genéricos. Denotamos

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{C}^N &\rightarrow M_{m,n} \\ x &\mapsto F(x) + A \end{aligned}$$

$$\text{e } X_A = F_A^{-1}(M_{m,n}^t).$$

Lema 3.8. [31, Lema 3.1] *Seja $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma IDS, com $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Escolhemos um representante suficientemente pequeno de $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$. Existe um aberto de Zariski não vazio $\mathcal{W} \subset M_{m,n}$ tal que se $A \in \mathcal{W}$ então X_A é suave e $\text{rank } F_A(x) = t - 1$ para todo $x \in X_A$.*

Teorema 3.9. [33, Teorema 4.14] *Sejam $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^t), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma IDS e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz genérica. Definimos*

$$\begin{aligned} F_s : \mathbb{C}^N &\rightarrow M_{m,n} \\ x &\mapsto F(x) + sA. \end{aligned}$$

Então $X_s = F_s^{-1}(M_{m,n}^t)$ é uma suavização de X .

Lema 3.10. [33, Lema 5.2] *Existe uma função linear $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ e um conjunto Zariski aberto $\mathcal{W} \subset M_{m,n}$ tal que para todo $A \in \mathcal{W}$, X_A é suave e $p|_{X_A}$ é uma função de Morse.*

Estes resultados foram mostrados usando o fato que para A genérica, F_s é transversal aos estratos da variedade determinantal genérica $M_{m,n}^t$.

3.3 Fórmula de Tipo Lê-Greuel para Variedades Determinantais

No estudo da topologia de interseções completas com singularidades isoladas (ICIS), um resultado importante é a fórmula de Lê-Greuel. Esta fórmula estabelece um método indutivo que permite calcular o número de Milnor da variedade, no seguinte sentido:

Sejam $f = (f_1, \dots, f_{k-1}, f_k) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ e $g = (f_1, \dots, f_{k-1}) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$. Seja $X = g^{-1}(0)$ e $Y = f^{-1}(0) = X \cap f_k^{-1}(0)$, então

$$\mu(X, 0) + \mu(Y, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle f_1, \dots, f_{k-1}, J(f_1, \dots, f_k) \rangle}$$

onde $J(f_1, \dots, f_k)$ é o ideal de todos os menores $k \times k$ da matriz jacobiana de f . A dimensão descrita na parte direita é igual ao número de pontos críticos de uma perturbação de f_k restrita à fibra genérica g .

Fórmulas de tipo Lê-Greuel para variedades determinantais foram estudadas recentemente em [31, 35, 12]. Para superfícies determinantais em $\mathbb{C}^N$, segue do Teorema 3.6 que $b_1(X_s) = 0$. Então a seguinte definição se justifica.

Definição 3.11. [35] *Sejam X uma superfície determinantal em $\mathbb{C}^N$, com singularidade isolada na origem. O número de Milnor de X , denotado por $\mu(X)$, é o segundo número de Betti de X_s ,*

$$\mu(X, 0) = b_2(X_s).$$

Para obter a fórmula de tipo Lê-Greuel, é considerada a curva determinantal obtida pela interseção de X com um hiperplano H , definido pelo núcleo de uma aplicação linear p , tal que $X \cap H$ tem singularidade isolada na origem.

O seguinte resultado é encontrado no artigo [35], para o caso de superfícies $X \subset \mathbb{C}^4$, mas vale também para superfícies com singularidade isolada em $\mathbb{C}^N$, que admitem suavização.

Proposição 3.12. [35] *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ o germe de uma superfície determinantal com singularidade isolada na origem. Seja $p : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma aplicação linear cuja restrição à X tem singularidade isolada na origem. Então:*

$$\mu(X) + \mu(X \cap H) = m_2(X). \quad (3.2)$$

Para dimensões $d = \dim X > 2$, os números de Betti $b_i(X)$, $2 \leq i < d$ não são necessariamente nulos, neste caso em [31, 12] os autores definem a característica de Euler evanescente de variedades que admitem suavizações. No trabalho [12] a noção de característica de Euler evanescente é também definida para EIDS que não são necessariamente IDS, ver Capítulo 6.

Definição 3.13. [31] *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma IDS tal que $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. A característica de Euler evanescente é definida por*

$$\nu(X, 0) = (-1)^d (\chi(X_s) - 1),$$

onde X_s é uma suavização de X e $\chi(X_s)$ é a característica de Euler de X_t .

Observação 3.14. *Se $\tilde{\chi}(X) = \chi(X_s) - 1$ então $\tilde{\chi}(X) = (-1)^d \nu(X)$.*

Teorema 3.15. [31] *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma IDS tal que $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$ e seja $p : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função linear genérica cuja restrição à X tem singularidade isolada na origem. Então,*

$$\nu(X) + \nu(X \cap p^{-1}(0)) = m_d(X) \quad (3.3)$$

Observação 3.16. *Quando $d = 2$, então $\nu(X) = \mu(X)$.*

Exemplo 3.17. [34] *Seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2) \subset \mathbb{C}^4$ definida pela função:*

$$F : \quad \mathbb{C}^4 \quad \rightarrow \quad M_{2,3} \\ (x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y \end{pmatrix}$$

Considere X_s a suavização de X , definida pela matriz

$$\begin{pmatrix} z & y + w & x + s \\ w & x & y \end{pmatrix}.$$

Considere $p : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $p(x, y, z, w) = w$, como $m_2(X) = 3$ e $\mu(X \cap p^{-1}(0)) = 2$, então $\mu(X) = 1$.

A Transformada de Nash de Variedades Determinantais

Estudamos a transformada de Nash da variedade determinantal genérica $M_{m,n}^t$, de forma detalhada, seguindo W. Èbeling e S. M. Guseïn-Zade em [23]. Se verifica que a transformada de Nash de $M_{m,n}^t$ é suave e portanto uma resolução para $M_{m,n}^t$. Com isso podemos estudar a transformada de Nash $\hat{X}$, da EIDS X , definida por F e obter condições sobre a transversalidade de F aos estratos da estratificação de $M_{m,n}^t$ para obter $\hat{X}$ suave.

4.1 Resoluções de $M_{m,n}^t$

Nesta seção apresentaremos três tipos de resoluções para as variedades determinantais genéricas, sendo uma delas a transformação de Nash da variedade determinantal genérica. Nosso objetivo aqui é apresentar com mais detalhes os resultados de W. Èbeling e S. M. Guseïn-Zade em [23].

Denotemos por ΣX o conjunto dos pontos singulares de X e por $X_{reg} = X \setminus \Sigma X$ a parte regular de X . Consideremos $Gr(k, n)$ a variedade grassmanniana de subespaços vetoriais complexos de dimensão k em $\mathbb{C}^n$.

No seguinte lema vamos mostrar que o espaço tangente de $Gr(k, n)$ em um ponto W pode ser identificado com $Hom(W, \frac{\mathbb{C}^n}{W})$, o que será usado para calcular o espaço tangente de $M_{m,n}^t$.

Lema 4.1. *Dado $W \in Gr(k, n)$, temos que $T_W(Gr(k, n))$ e $Hom(W, \frac{\mathbb{C}^n}{W})$ são isomorfos.*

Demonstração: Definimos a seguinte aplicação linear de espaços vetoriais:

$$\begin{aligned} L : Hom(W, \mathbb{C}^n) &\rightarrow T_W(Gr(k, n)) \\ \phi &\mapsto W_{\phi, \epsilon} \end{aligned}$$

como segue: se $w_1, \dots, w_k \in W \subset \mathbb{C}^n$ geram uma base de W , então definimos $W_{\phi, \epsilon} = \langle w_1 + \epsilon\phi(w_1), \dots, w_k + \epsilon\phi(w_k) \rangle$. Notemos que os vetores $w_i + \epsilon\phi(w_i)$, $i = 1, \dots, k$ são ainda linearmente independentes pois são pequenas perturbações de um conjunto linearmente independente.

Vamos mostrar que L é sobrejetora: suponha que $w_1, \dots, w_k, e_{k+1}, \dots, e_n$ formem uma base de $\mathbb{C}^n$, completando a base W . Cada elemento $W' \in Gr(k, n)$ perto de W pode ser dado como o gráfico de uma aplicação linear $\lambda : W \rightarrow W^\perp$ definida por uma matriz $(n - k) \times k$, $\alpha = (b_{ij})$ com relação as bases $\langle w_1, \dots, w_k \rangle$ de W e $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ de $W^\perp$. Logo $W' = \{(w, \lambda(w)) | w \in W\}$, assim uma base para W' é dada por $\langle w_i + b_{i,k+1}e_{k+1} + \dots + b_{i,n}e_n \rangle$. Então definimos ϕ como

$$\phi(w_i) = b_{i,k+1}e_{k+1} + \dots + b_{i,n}e_n.$$

Agora, temos que

$$Hom(W, W) \subset Hom(W, \mathbb{C}^n)$$

está contido no $Ker(L)$, pois dado $\phi : W \rightarrow W$, $L(\phi) = W$ que corresponde ao espaço vetorial 0 em $\mathbb{C}^N/W$. Como L é sobrejetora, usando o teorema do posto, obtemos

$$\dim \ker(L) = \dim Hom(W, \mathbb{C}^n) - \dim Gr(k, n) = nk - k(n - k) = k^2.$$

Como $\dim Hom(W, W) = k^2$ e $Hom(W, W) \subset Ker(L)$, então

$$Hom(W, W) = Ker(L).$$

Pelo Teorema do isomorfismo temos:

$$Hom(W, \frac{\mathbb{C}^n}{W}) \cong \frac{Hom(W, \mathbb{C}^n)}{Hom(W, W)} \cong T_W(Gr(k, n)).$$

■

Definição 4.2. Dada uma variedade singular X , uma resolução de X é uma aplicação $\pi : Y \rightarrow X$, onde Y é uma variedade suave e que satisfaz as seguintes condições:

- $\pi|_{\pi^{-1}(X_{reg})} : \pi^{-1}(X_{reg}) \rightarrow X - \Sigma X$ é um isomorfismo.
- π é própria.

Existem ao menos 4 resoluções para a variedade $M_{m,n}^t$. Vamos defini-las e estudar com mais detalhes a resolução de Nash.

1. A primeira resolução é construída da seguinte maneira. Consideremos as matrizes de tamanho $m \times n$ como aplicações $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$. Para $t \leq \min\{m, n\}$ definimos Y_1 , uma

subvariedade de $M_{m,n} \times Gr(n - t + 1, n)$:

$$Y_1 = \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(n - t + 1, n) / A(W) = 0\}.$$

Consideramos a aplicação $\pi_1 : Y_1 \rightarrow M_{m,n}^t$ que é a projeção no primeiro fator. A projeção no segundo fator $\pi_2 : Y_1 \rightarrow Gr(n - t + 1, n)$ define um fibrado vetorial, cuja fibra tem posto $m(t - 1)$. Assim Y_1 é suave e portanto uma resolução de $M_{m,n}^t$.

O seguinte lema será útil para calcular a transformada de Nash de $M_{m,n}^t$. Sua prova usa a resolução Y_1 .

Lema 4.3. [1] *Seja $A \in (M_{m,n}^t)_{reg}$. O espaço tangente de $(M_{m,n}^t)_{reg}$ no ponto A é igual a:*

$$T_A(M_{m,n}^t) = \{B \in M_{m,n} / B \cdot \ker A \subset \text{im } A\}.$$

Demonstração: Consideremos a aplicação $\pi_1 : Y_1 \rightarrow M_{m,n}^t$ e determinemos o espaço tangente de $(A, W) \in Y_1$.

Dado $(A, W) \in Y_1$, temos que $AW = 0$. O espaço tangente é dado por um par (B, ϕ) onde B é uma matriz e $\phi \in \text{Hom}(W, \frac{\mathbb{C}^n}{W})$ tais que $(A + \epsilon B)(w_i + \epsilon \phi(w_i)) = 0$, onde $\{w_i\}$ é uma base de W . Assim $A \cdot W = 0$ e $A\phi(w_i) + B \cdot w_i = 0$, $(A\phi + B)W = 0$, $B \cdot W = A(-\phi W)$, i.e. $B \cdot W \subset \text{im}(A)$. Assim

$$d_{(A,W)}\pi_1(T_{(A,W)}Y_1) = \{B \in M_{m,n} / B \cdot W \subset \text{im}(A)\}.$$

Quando $A \in (M_{m,n}^t)_{reg} = M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}$, $\text{rank } A = t - 1$ então $W = \ker A$ e temos que $(A, \ker A) \in Y_1$ e a aplicação $d_{(A, \ker A)}\pi : T_{(A, \ker A)}Y_1 \rightarrow T_A M_{m,n}^t$ é injetiva. Assim

$$T_A(M_{m,n}^t) = \{B \in M_{m,n} / B \ker A \subset \text{im } A\}.$$

■

2. A segunda resolução é dada considerando as matrizes de tamanho $m \times n$, como aplicações de $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$. Definimos Y_2 da mesma forma que a primeira resolução dada como um subconjunto de $M_{m,n} \times Gr(m - t + 1, m)$ e definimos $\pi_2 : Y_2 \rightarrow M_{m,n}^t$.
3. Uma terceira resolução é definida considerando Y definido por:

$$Y = \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(t - 1, m) / \text{im } A \subset W\}$$

e definindo $\pi : Y \rightarrow M_{m,n}^t$ como a projeção no primeiro fator.

4. A transformada de Nash da variedade $M_{m,n}^t$, denotada por $\widehat{M}_{m,n}^t$ é uma resolução da

variedade $M_{m,n}^t$.

Vamos usar esta definição para o caso da variedade analítica das matrizes de posto menor do que t , $M_{m,n}^t$. Denotamos por $d_{m,n}^t = mn - (m - t + 1)(n - t + 1)$ a dimensão da variedade $M_{m,n}^t$. A transformação de Nash $\widehat{M}_{m,n}^t$ é um subespaço de $M_{m,n}^t \times Gr(d_{m,n}^t, M_{m,n})$ dado por:

$$\widehat{M}_{m,n}^t = \overline{\{(A, T)/A \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1} = (M_{m,n}^t)_{reg}, T = T_A M_{m,n}^t\}}.$$

Na seqüência daremos uma caracterização da transformada de Nash $M_{m,n}^t$. Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \alpha : Gr(n - t + 1, n) \times Gr(t - 1, m) &\rightarrow Gr(d_{m,n}^t, mn) \\ (W_1, W_2) &\mapsto \{B \in M_{m,n}/BW_1 \subset W_2\}. \end{aligned}$$

Proposição 4.4. [23] *A transformação de Nash de $M_{m,n}^t$ é dada por:*

$$\widehat{M}_{m,n}^t = \{(A, T)/A \in M_{m,n}, T = \alpha(W_1, W_2), W_1 \subset \ker A, \text{im } A \subset W_2\}.$$

Demonstração:

Dados W_1 e W_2 , $Q = \{B \in M_{m,n}/BW_1 \subset W_2\}$ é um subespaço vetorial de $M_{m,n}$. De fato, temos:

- (a) Seja $B_1 \in Q$, $B_2 \in Q$, então $B_1W_1 \subset W_2$ e $B_2W_1 \subset W_2$, logo $(B_1 + B_2)W_1 = B_1W_1 + B_2W_1 \subset W_2$.
- (b) Seja $k \in \mathbb{C}$ e $B \in Q$ então $(kB)W_1 \subset kW_2 \subset W_2$.

Os elementos $W_1 \in Gr(n - t + 1, n)$ podem ser descritos por coordenadas, dadas por uma matriz complexa $n \times (n - t + 1)$, $Y = (y_{ij})$ de posto $n - t + 1$, cujas colunas $v_1 = (y_{11}, \dots, y_{1n}), \dots, v_{n-t+1} = (y_{(n-t+1)1}, \dots, y_{(n-t+1)n})$ formam uma base de W_1 . Todas as outras bases de W são combinações lineares da base dada, determinadas por uma matriz $A = (a_{ij})$, $r \times r$, invertível. Então as coordenadas de W estão definidas por YA , onde A é uma matriz invertível.

Considerando W_1 gerado pelos primeiros $n - t + 1$ elementos da base canônica de $\mathbb{C}^n$, $\{e_1, \dots, e_{n-t+1}\}$, e W_2 gerado pelos últimos $t - 1$ geradores da base canônica de $\mathbb{C}^m$, podemos representar W_1, W_2 pelas seguintes matrizes:

$$W_1 = \begin{pmatrix} Id_{(n-t+1) \times (n-t+1)} \\ - - - - - \\ 0_{(t-1) \times (n-t+1)} \end{pmatrix}_{n \times (n-t+1)} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0_{(m-t+1) \times (t-1)} \\ - - - - - \\ Id_{(t-1) \times (t-1)} \end{pmatrix}_{m \times (t-1)}.$$

Dado um elemento $B \in W$, temos que $BW_1 \subset W_2$, então podemos dividir a matriz B em blocos, e fazer o produto:

Considere $B = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right)_{m \times n}$, onde $[P]_{(m-t+1)(n-t+1)}$, $[Q]_{(m-t+1)(t-1)}$, $[R]_{(t-1)(n-t+1)}$, $[S]_{(t-1) \times (t-1)}$.

$$\left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} Id \\ - - - \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{(m-t+1) \times (n-t+1)} \\ - - - - - \\ R_{(t-1) \times (n-t+1)} \end{pmatrix}.$$

Como $BW_1 \subset W_2$, então $P = 0$. Assim $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Q \\ \hline R & S \end{array} \right)$.

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} \alpha : Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m) &\rightarrow Gr(d_{m,n}^t, mn) \\ (W_1, W_2) &\mapsto \{B \in M_{m,n} / BW_1 \subset W_2\} \end{aligned}$$

é um mergulho.

Sejam $W_1, W'_1 \in Gr(n-t+1, n)$, e $W_2, W'_2 \in Gr(t-1, m)$, com $\alpha(W_1, W_2) = \alpha(W'_1, W'_2)$. Sem perda de generalidade podemos considerar W_1 e W_2 , como no caso anterior e W'_1, W'_2 representados pelas matrizes:

$$W'_1 = \begin{pmatrix} M \\ - - - \\ N \end{pmatrix}, \quad W'_2 = \begin{pmatrix} T \\ - - - \\ U \end{pmatrix}.$$

A injetividade de α vai ser demonstrada em 3 casos:

$$1) \text{ Caso: } W_2 = W'_2 = \begin{pmatrix} 0_{(m-t+1) \times (t-1)} \\ - - - - - \\ Id_{(t-1) \times (t-1)} \end{pmatrix}.$$

Como $B \in \alpha(W_1, W_2)$ então B é da forma $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & Q \\ \hline R & S \end{array} \right)$, e como $\alpha(W_1, W_2) =$

$$\alpha(W'_1, W'_2), \text{ temos } \left(\begin{array}{c|c} 0 & Q \\ \hline R & S \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} M \\ - - - \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QN \\ - - - \\ RM + SN \end{pmatrix}, \text{ os vetores colunas}$$

pertencem a W_2 . Em termos de matrizes, por abuso de notação, podemos dizer que

$$\begin{pmatrix} QN \\ - - - \\ RM + SN \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0_{(m-t+1) \times (t-1)} \\ - - - - - \\ Id_{(t-1) \times (t-1)} \end{pmatrix}. \text{ Assim } QN = 0 \text{ para toda matriz } Q, \text{ en-}$$

tão $N = 0$, logo $W'_1 = \begin{pmatrix} M \\ - - - \\ 0 \end{pmatrix}$. Como W'_1 é um subespaço vetorial temos que $\det M \neq 0$, assim concluímos que $W_1 = W'_1$.

2) Caso $W_2 \neq W'_2$ e $\det U \neq 0$.

Neste caso, a matriz U em W'_2 é invertível. Então W'_2 pode ser representada por $W'_2 = \begin{pmatrix} T \\ - - - \\ U \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} TU^{-1} \\ - - - \\ Id \end{pmatrix}$.

Então $BW'_1 = \begin{pmatrix} QN \\ - - - \\ RM + SN \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} TU^{-1} \\ - - - \\ Id \end{pmatrix}$. Como esta condição está satisfeita para toda matriz Q , podemos considerar $Q = 0$, logo $TU^{-1} = 0$, assim $W_2 = W'_2$, pelo caso anterior.

3) Caso $W_2 \neq W'_2$ e $\det U = 0$.

Usando os mesmos argumentos $BW'_1 = \begin{pmatrix} QN \\ - - - \\ RM + SN \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} T \\ - - - \\ U \end{pmatrix}$. Como esta condição é verificada para qualquer matriz Q , podemos considerar $Q = 0$, assim $T = 0$. Temos uma contradição, pois o posto de W'_2 é $t - 1$.

Continuando com o cálculo da transformação de Nash para a variedade $M_{m,n}^t$ e considerando o espaço tangente calculado temos:

$$\widehat{M}_{m,n}^t = \overline{\{(A, T)/A \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1} = (M_{m,n}^t)_{reg}, T = T_A M_{m,n}^t\}}$$

$$\widehat{M}_{m,n}^t = \overline{\{(A, T)/A \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1} = (M_{m,n}^t)_{reg}, T = \alpha(\ker A, \operatorname{im} A)\}}$$

Seja $(A, T) \in \overline{\{(A, T)/A \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1} = (M_{m,n}^t)_{reg}, T = T_A M_{m,n}^t\}}$, então $(A, T) = \lim_{r \rightarrow \infty} (A_r, T_r)$, com $(A_r, T_r) \in \{(A, T)/A \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1} = (M_{m,n}^t)_{reg}, T = T_A M_{m,n}^t\}$ então $T_r = \alpha(\ker A_r, \operatorname{im} A_r)$. Como α é um mergulho então

$\lim T_r = \alpha(\lim \ker A_r, \lim \operatorname{im} A_r)$. Assim,

$$\overline{\{A/\ker A = W_1, \operatorname{im} A = W_2\}} = \{A \in M_{m,n}/W_1 \subset \ker A, \operatorname{im} A \subset W_2\}. \quad \blacksquare$$

Mostramos acima que a restrição de π ao segundo fator de $\widehat{M}_{m,n}^t \subset M_{m,n}^t \times \operatorname{Gr}(d_{m,n}^t, mn)$ é a projeção de um fibrado vetorial de posto $(t-1)^2$ e de base $\alpha(\operatorname{Gr}(n-t+1, n) \times \operatorname{Gr}(t-1, m))$. A fibra F deste fibrado vetorial é dada por

$$\pi^{-1}(\alpha(W_1, W_2)) = \{A/W_1 \subset \ker A, \operatorname{im} A \subset W_2\}.$$

Temos $\dim B + \dim F = \dim \widehat{M}_{m,n}^t$, $\dim B = (t-1)(n-t+1) + (t-1)(m-t+1)$ e $\dim \widehat{M}_{m,n}^t = \dim M_{m,n}^t = mn - (m-t+1)(n-t+1)$, assim $\dim F = (t-1)^2$. Logo $\widehat{M}_{m,n}^t$ é suave.

Assim obtemos uma resolução de $M_{m,n}^t$, $Y_3 = \widehat{M}_{m,n}^t$ dada pela transformação de Nash e denotamos

$$\pi_3 : \widehat{M}_{m,n}^t \rightarrow M_{m,n}^t$$

a projeção no primeiro fator.

Exemplo 4.5. Vamos calcular a transformada de Nash de $M_{2,3}^2$.

$$M_{2,3}^2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & u & v \end{pmatrix} \mid xu - wy = xv - wz = yv - uz = 0 \right\}.$$

Para isso primeiro vamos calcular $\nu^{-1}(A) = \{(A, T) \in M_{2,3} \times \operatorname{Gr}(2, 4) \mid T = T_A(M_{2,3}^2)_{\text{reg}}\}$, onde A é um ponto regular.

Para ilustrar, se consideramos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$T_A M_{2,3}^2 = \{B \in M_{2,3} \mid B \ker A \subset \operatorname{im} A\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e \end{pmatrix} \mid a, b, d, e \in \mathbb{C} \right\}$$

Temos então $\nu^{-1}(A) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e \end{pmatrix} \right) \mid a, b, d, e \in \mathbb{C} \right\}$.

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ponto singular de $M_{2,3}^2$, agora vamos calcular

$$\nu^{-1}(A) = \{(A, T) \in M_{2,3} \times \operatorname{Gr}(2, 4) \mid T = \alpha(W_1, W_2), W_1 \subset \ker A, \operatorname{im} A \subset W_2\}.$$

Temos que $(A, T) \in \widehat{M}_{2,3}^2$, se $T = \alpha(W_1, W_2)$ com $W_1 \subset \ker A = \mathbb{C}^3$, $\{0\} = \operatorname{im} A \subset W_2$,

com $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 1$.

Dado $W_1 \subset \ker A = \mathbb{C}^3$ e $(0) = \text{im } A \subset W_2$, se consideramos $W_1 = \langle (1, 0, r), (0, 1, s) \rangle$ e $W_2 = \langle (1, u) \rangle$, com $r, s, u \in \mathbb{C}$, podemos construir uma matriz C tal que $\ker C = W_1$ e $\text{im } C = W_2$.

Assim obtemos C da seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} r & s & -1 \\ ur & us & -u \end{pmatrix}$$

Com isso podemos concluir que $C \in \nu^{-1}(0)$,

Para as outras bases acontece o mesmo, existe uma matriz com uma entrada distinta de zero.

Logo $\nu^{-1}(0)$ é o conjunto de matrizes de posto 1 módulo o subconjunto $\{cA \mid \text{rank}(A) = 1, c \in \mathbb{C}, c \neq 0\}$, tais que $\nu(M) = 0$ e $\dim \nu^{-1}(0) = 3$.

4.2 Transformação de Nash de uma EIDS

Seja X uma variedade determinantal essencialmente isolada (Def. 2.4), ou seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$, onde F é transversal a todos os estratos da estratificação canônica de $M_{m,n}^t$ fora da origem.

Usando a transformação de Nash para matrizes $M_{m,n}^t$, podemos calcular a transformação de Nash para $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$, que denotamos por $\widehat{X} \subset \mathbb{C}^N \times Gr(d, N)$, onde $d = N - (n - t + 1)(m - t + 1)$.

Por definição temos que $\widehat{X}$ é dada por:

$$\widehat{X} = \overline{\{(x, T) \mid x \in X_{reg}, T = T_x(X_{reg})\}}$$

Usando a transversalidade de F temos que:

$$\widehat{X} = \overline{\{(x, T) \mid F(x) \in (M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}), T = (d_x F)^{-1}(T_{F(x)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}))\}}$$

Agora vamos considerar os seguintes casos:

1. Se $x \in X_{reg} = F^{-1}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})$. Temos que $(x, T) \in \widehat{X}$, se $F(x) \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}$, então $T = T_x(X_{reg}) = (d_x F)^{-1}(T_{F(x)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}))$.
2. Se $x \in \Sigma X = F^{-1}(M_{m,n}^{t-1})$.

Temos que $(x, T) \in \widehat{X}$, se existe uma sequência (x_r, T_r) tal que $x_r \rightarrow x \in F^{-1}(M_{m,n}^{t-1})$,

$F(x_r) \in (M_{m,n}^t)_{reg}$, com $T_r = d_{x_r} F^{-1}(T_{F(x_r)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}))$ e $T_r \rightarrow T$, onde $T = \lim_{x_r \rightarrow x} T_r$.

No próximo teorema obtemos condições para que a transformada de Nash de uma EIDS seja suave.

Teorema 4.6. *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS, definida por $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$. Se F é transversal aos limites dos espaços tangentes aos estratos da variedade $M_{m,n}^t$ então $\widehat{X}$ é suave.*

Inicialmente, mostraremos os seguintes resultados

Proposição 4.7. *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$. Se F é transversal aos estratos da variedade $M_{m,n}^t$ então $\widehat{X}$ é suave.*

Demonstração: Como $M_{m,n}^1 = \{0\}$ é estrato de dimensão 0 e F é transversal aos estratos de $M_{m,n}^t$, então F é transversal a $M_{m,n}^1$, $\forall x \in \mathbb{C}^N$ tal que $F(x) = 0$, quer dizer $d_x F$ é sobrejetora em x . Portanto, existe uma vizinhança U de 0 tal que

$$d_x F(\mathbb{C}^N) = T_{F(x)} M_{m,n}, \forall x \in U. \quad (4.1)$$

Ou seja, temos que $N \geq m \times n$ e F localmente é equivalente a uma projeção.

Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \bar{F} : \mathbb{C}^N \times Gr(d_{m,n}^t, mn) &\rightarrow M_{m,n} \times Gr(d_{m,n}^t, mn) \\ (x, T) &\mapsto (F(x), T) \end{aligned}$$

onde $d_{m,n}^t = \dim M_{m,n}^t = mn - (m - t + 1)(n - t + 1)$.

Queremos mostrar que $\bar{F}$ é transversal a $\widehat{M}_{m,n}^t$. De fato, seja x tal que $F(x) \in M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$, $x \in U$, como $F \pitchfork M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ em $F(x)$ temos

$$d_x F(\mathbb{C}^N) + T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) = T_{F(x)} M_{m,n}. \quad (4.2)$$

Assim

$$d_x F(\mathbb{C}^N) \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn) + T_{(F(x), W)} \widehat{M}_{m,n}^t = M_{m,n} \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn). \quad (4.3)$$

$$d_{(x, W)} \bar{F}(\mathbb{C}^N \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn)) + T_{(F(x), W)} \widehat{M}_{m,n}^t = M_{m,n} \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn), \quad (4.4)$$

e portanto $\bar{F}$ é transversal a $\widehat{M}_{m,n}^t$ em (x, W) . Então $\bar{X} = \bar{F}^{-1}(\widehat{M}_{m,n}^t)$ é suave.

Vamos mostrar que $\bar{X} \cong \widehat{X}$. De fato, considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \overline{X} &\rightarrow \widehat{X} \\ (x, W) &\mapsto (x, (d_x F)^{-1}(W)). \end{aligned}$$

A aplicação Ψ está bem definida pois para um ponto singular $x \in X$, $(x, W) \in \overline{X}$, $(F(x), W) \in \widehat{M}_{m,n}^t$, existe uma seqüência $x_r \rightarrow x$, $F(x_r) \rightarrow F(x)$, $x_r \in X_{reg} = F^{-1}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^t)$ tal que $\lim T_{F(x_r)} M_{m,n}^t = W$. Como F é transversal aos estratos de $M_{m,n}^t$, então

$$(d_{x_r} F)^{-1}(T_{F(x_r)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})) = T_{x_r} X_{reg} \text{ e } T = (d_x F)^{-1}(W).$$

■

A restrição da projeção $\pi : M_{m,n} \times Gr(d_{m,n}^t, mn) \rightarrow M_{m,n}$ a $\widehat{M}_{m,n}^t$ é a aplicação $\nu_t : \widehat{M}_{m,n}^t \rightarrow M_{m,n}^t$.

Lema 4.8. *Se $(F(x), W) \in \nu_t^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ então*

$$d_{(F(x), W)} \nu_t(T_{(F(x), W)} \widehat{M}_{m,n}^t) \supset T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}).$$

Demonstração: Como $(F(x), W) \in \widehat{M}_{m,n}^t$, então existe uma seqüência $x_k \rightarrow x$, com $x_k \in X_{reg}$, assim $F(x_k) \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}$, $F(x_k) \rightarrow F(x)$ e $T_{F(x_k)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}) \rightarrow W$.

Temos que a aplicação $\nu_t : \widehat{M}_{m,n}^t \setminus \nu_t^{-1}(M_{m,n}^{t-1}) \rightarrow M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}$ é um difeomorfismo, se denotamos $W_k = T_{F(x_k)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})$ então

$$d_{(F(x_k), W_k)} \nu_t(T_{(F(x_k), W_k)} \widehat{M}_{m,n}^t) = T_{F(x_k)}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})$$

Aplicando limite temos que

$$d_{(F(x), W)} \nu_t(T_{(F(x), W)} \widehat{M}_{m,n}^t) = W$$

Como a estratificação de $M_{m,n}^t$ é Whitney, então pela condição a) temos que

$$W \supset T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}).$$

■

Prova do Teorema 4.6 Vamos provar que se F é transversal aos limites dos espaços tangentes aos estratos, então $\overline{X}$ é suave.

Se $x \notin F^{-1}(0)$, $F(x) \in M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$, então $F \pitchfork \{M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}\}$ em x . Isto é

$$d_x F(\mathbb{C}^N) + T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) = M_{m,n}. \quad (4.5)$$

Então afirmamos que

$$d_{(x,W)}\overline{F}(\mathbb{C}^N \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn)) + T_{(F(x),W)}\widehat{M}_{m,n}^t = M_{m,n} \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn). \quad (4.6)$$

De fato, pelo Lema 4.8, como $(F(x), W) \in \nu_t^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$ então

$$d_{(F(x),W)}\nu_t(T_{(F(x),W)}M_{m,n}^t) \supset T_{F(x)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}).$$

O resultado segue da Equação (4.5).

Se $x \in F^{-1}(0)$, por hipótese F é transversal aos limites dos espaços tangentes aos estratos de $M_{m,n}^t$. Isto é, $\forall x_k \rightarrow x, F(x_k) \rightarrow 0, F(x_k) \in M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}, T_{F(x_k)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) \rightarrow T^i$, então

$$d_x F(\mathbb{C}^N) + T^i = M_{m,n}. \quad (4.7)$$

Seja $(0, W) \in \nu_t^{-1}(0)$. Queremos mostrar que

$$d_x F(\mathbb{C}^N) \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn) + T_{(0,W)}\widehat{M}_{m,n}^t = M_{m,n} \oplus T_W Gr(d_{m,n}^t, mn). \quad (4.8)$$

É suficiente mostrar que $\forall T^i$ como acima

$$d_{(0,W)}\nu_t(T_{(0,W)}(\widehat{M}_{m,n}^t)) \supset T^i.$$

Seja T^i como na Equação 4.7. Para cada k seja x_{kl} uma seqüência em X_{reg} tal que $x_{kl} \rightarrow x_k$, então temos que $F(x_{kl}) \in M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}, F(x_{kl}) \rightarrow F(x_k) \in M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ e

$$W_k = \lim_{F(x_{kl}) \rightarrow F(x_k)} T_{F(x_{kl})}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}).$$

Tomando a seqüência diagonal $x_{kk} \rightarrow x$, temos $F(x_{kk}) \rightarrow F(x) = 0, T_{F(x_{kk})}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1}) \rightarrow W$. Então $(0, W) \in \nu_t^{-1}(0)$ e $W_k \rightarrow W$. Temos que $(F(x_k), W_k) \in \nu^{-1}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1})$, pelo Lema 4.8 segue que

$$d_{(F(x_k), W_k)}\nu_t(T_{(F(x_k), W_k)}\widehat{M}_{m,n}^t) \supset T_{F(x_k)}(M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}) \quad (4.9)$$

Aplicando limite, obtemos

$$d_{(0,W)}\nu_t(T_{(0,W)}\widehat{M}_{m,n}^t) \supset W \supset T^i \quad (4.10)$$

Assim $\overline{X}$ é suave. ■

4.3 Exemplos

Na seqüência apresentamos alguns exemplos de transformada de Nash de EIDS. Para o cálculo usamos a definição da transformada de Nash. As matrizes nos exemplos são obtidas da tabela de A. Frühbis-Krüger e A. Neumer em [18].

Exemplo 4.9. *Considere*

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{C}^4 &\rightarrow M_{2,3} \\ (x, y, z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então $X = V(w^2 - zy, wy - zx, y^2 - wx)$, tem uma singularidade isolada na origem.

A fibra $\nu^{-1}(0)$ é igual a,

$$\nu^{-1}(0) = \{(0, T)/T = \lim_{x_r \rightarrow 0} (d_{x_r} F)^{-1}(T_{F(x_r)} M_{2,3}^2 \setminus M_{2,3}^1)\}.$$

$$\nu^{-1}(0) = \{(0, T)/T = (d_x F)^{-1}(\lim_{x_r \rightarrow 0} T_{F(x_r)} M_{2,3}^2 \setminus M_{2,3}^1)\}.$$

$$\nu^{-1}(0) = \{(0, T)/T = (d_x F)^{-1}(W), W = \alpha(W_1, W_2), W_1 \subset \mathbb{C}^3, \{0\} \subset W_2\}$$

Temos que a dimensão de W_1 é 2 e a dimensão de W_2 é 1, $F(0)$ é a matriz nula, $\ker F(0) = \mathbb{C}^3$ e $\text{Im} F(\{0\}) = \{0\}$. Calculamos o limite da diferencial de F :

$$d_{(x,y,z,w)} F(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} d & b & a \\ c & d & b \end{pmatrix}.$$

Logo, como $W_1 \subset \mathbb{C}^3$ é de dimensão dois, podemos considerar sem perda de generalidade W_1 gerada pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ e $W_2 = \langle (1, 0) \rangle$ assim:

$$W = \alpha(W_1, W_2) = \{B \in M_{2,3} | B.W_1 \subset W_2\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}.$$

Como $W_2 = \langle (1, 0) \rangle$, então $d = e = 0$.

$$\text{Assim } W = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \mid d = e = 0 \right\}$$

$$T = (d_x F)^{-1}(W) = \langle (a, b, c, d) \mid c = d = 0 \rangle. \text{ Portanto } (0, T) \in \nu^{-1}(0).$$

Se consideramos outras bases W_1, W_2 que satisfazem as condições acima mencionadas temos outros elementos na fibra.

Para os próximos exemplos calculamos os limites de planos tangentes em $x = 0$.

Exemplo 4.10. *Seja F dada por:*

$$F : \mathbb{C}^4 \rightarrow M_{2,3}$$

$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & y & x \\ w & z & y \end{pmatrix}$$

Então a variedade determinantal X é uma superfície dada pelos zeros das funções:

- 1) $z^2 - wy = 0$
- 2) $zy - xw = 0$
- 3) $y^2 - xz = 0$

Podemos ver X como o cone de uma curva projetiva X^* em $\mathbb{P}^3$ parametrizada por

$$\nu : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$(S : T) \mapsto (S^3 : S^2T : ST^2 : T^3)$$

Ou seja, $X = C(X^*) \subset \mathbb{C}^4$ onde X^* é uma curva suave isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Vamos calcular os planos limites, ou seja, os limites da sequência $T_{x_n}X_{reg}$ quando x_n converge para x , que é equivalente pelo Lema de seleção da curva a calcular o limite de $T_{\delta(t)}X_{reg}$ com $\delta(t)$, uma curva em X convergendo para 0, quando t converge para 0.

Considerando uma carta, quando $x \neq 0$, temos que a variedade pode se representar com as seguintes coordenadas:

$$(x, y, \frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}).$$

Agora considerando as derivadas com relação a x e y , temos o espaço tangente gerado por:

$$\langle (1, 0, -\frac{y^2}{x^2}, -2\frac{y^3}{x^3}), (0, 1, 2\frac{y}{x}, 3\frac{y^2}{x^2}) \rangle.$$

Seja $\delta(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ em X uma curva em X , tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = 0$. Se $x(t) = a_0 t^{\alpha_0} + \dots$ e $y(t) = b_0 t^{\beta_0} + \dots$, então $2\alpha_0 < 3\beta_0$, assim:

1. Se $\alpha_0 < \beta_0$, então o plano limite é gerado por

$$\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

2. Se $\alpha_0 = \beta_0$, então o plano limite é gerado por

$$\langle (1, 0, -\frac{b_0^2}{a_0^2}, -2\frac{b_0^3}{a_0^3}), (0, 1, 2\frac{b_0}{a_0}, 3\frac{b_0^2}{a_0^2}) \rangle.$$

Quando $x \rightarrow 0$, temos o seguinte limite de planos tangentes:

$$\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Com estes resultados obtemos $\nu^{-1}(0, 0, 0, 0) = X^*$ e $X = C(X^*)$.

Exemplo 4.11. *Seja F dada pela seguinte matriz, para $k \geq 2$*

$$F : \quad \mathbb{C}^4 \quad \rightarrow \quad M_{2,3}$$

$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & y & x \\ w & z & y^k \end{pmatrix}$$

A superfície $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$ é definida pelos zeros das seguintes funções

1. $z^2 - wy = 0$
2. $zy^k - wx = 0$
3. $y^{k+1} - zx = 0$

Considerando uma carta, quando $x \neq 0$, temos que a variedade pode se representar com as seguintes coordenadas:

$$(x, y, \frac{y^{k+1}}{x}, \frac{y^{2k+1}}{x^2}).$$

Agora considerando as derivadas com relação a x e y , temos o espaço tangente gerado por:

$$\langle (1, 0, -\frac{y^{k+1}}{x^2}, -2\frac{y^{2k+1}}{x^3}), (0, 1, (k+1)\frac{y^k}{x}, (2k+1)\frac{y^{2k}}{x^2}) \rangle.$$

Tirando os denominadores temos que o espaço tangente é gerado por:

$$\langle (x^3, 0, -xy^{k+1}, -2y^{2k+1}), (0, x^2, (k+1)xy^k, (2k+1)y^{2k}) \rangle.$$

Dada uma curva $\delta(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ em X , tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = 0$, se:

$x(t) = a_0 t^{\alpha_0} + \dots$ e $y(t) = b_0 t^{\beta_0} + \dots$, então $2\alpha_0 < (2k+1)\beta_0$, assim:

$$\langle (a_0^3 t^{3\alpha_0} + \dots, 0, -a_0 b_0^{k+1} t^{\alpha_0 + (k+1)\beta_0} + \dots, -2b_0^{2k+1} t^{(2k+1)\beta_0} + \dots), (0, a_0^2 t^{2\alpha_0} + \dots, (k+1)a_0 b_0^k t^{\alpha_0 + k\beta_0} + \dots, (2k+1)b_0^{2k} t^{2k\beta_0} + \dots) \rangle.$$

Fazendo por casos:

1. Se $\alpha_0 \leq \beta_0$, então o plano limite é gerado por

$$\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

2. Se $\beta_0 < \alpha_0 < \frac{(k+1)\beta_0}{2}$, então $3\alpha_0 < \alpha_0 + (k+1)\beta_0 < (2k+1)\beta_0$ e $2\alpha_0 < \alpha_0 + k\beta_0 < 2k\beta_0$, logo, o plano limite é gerado por

$$\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

3. Se $2\alpha_0 = (k+1)\beta_0$, então o plano tangente é gerado por:

$$\langle (a_0^2, 0, -b_0^{k+1}, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

4. Se $\frac{(k+1)\beta_0}{2} < \alpha_0 < k\beta_0$, então $\alpha_0 + (k+1)\beta_0 < (2k+1)\beta_0 < 3\alpha_0$ e $2\alpha_0 < \alpha_0 + k\beta_0 < 2k\beta_0$, logo o plano é gerado por

$$\langle (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

5. $\alpha_0 = k\beta_0$, então o plano limite é gerado por

$$\langle (0, 0, a_0, 2b_0^k), (0, a_0^2, (k+1)a_0b_0^k, (2k+1)b_0^{2k}) \rangle.$$

6. $k\beta_0 < \alpha_0 < \frac{(2k+1)\beta_0}{2}$, então os limites de vetores tangentes são paralelos

$$\langle (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

7. Se $x = 0$, temos o seguinte limite de planos tangentes

$$\langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle.$$

Podemos ver que o conjunto de limites de espaços tangentes na origem se dá através do cone tangente unido com um feixe de planos que são gerados por $(0, 1, 0, 0)$ e $(a_0^2, 0, -b_0^{k+1}, 0)$, concluindo que a transformada de Nash não é suave.

Espaço Conormal de Variedades Determinantais

O objetivo deste capítulo é estudar os limites de hiperplanos tangentes de uma variedade determinantal. Definiremos hiperplano geral e fortemente geral sobre uma IDS ou EIDS respectivamente. Estas duas definições são equivalentes no caso de singularidade isolada. As seções gerais definidas pela interseção de um hiperplano geral (fortemente geral) com a variedade determinantal determina uma variedade determinantal com singularidade isolada ou uma EIDS respectivamente. Jawad Snoussi estudou o limite de hiperplanos tangentes de superfícies normais em [38], dando algumas caracterizações das seções gerais em termos da minimalidade do número de Milnor da curva. Como toda superfície determinantal com singularidade isolada é normal o resultado se aplica para superfícies determinantais em $\mathbb{C}^4$. Neste capítulo estudamos as seções gerais de uma 3 variedade determinantal em $\mathbb{C}^5$. Tais seções são superfícies determinantais, e portanto seu número de Milnor está bem definido. No Teorema 5.21 provamos que o número de Milnor de uma seção geral é mínimo.

Para o caso de EIDS, podemos considerar as seções gerais, dadas pela interseção da variedade X com um plano linear P , de codimensão $d - 2$ tal que $\dim X \cap P = 2$. Neste caso, obtemos um resultado análogo ao de Lê Dung Trang em [26]. No Teorema 5.24 provamos que se H e H' são dois hiperplanos fortemente gerais então eles contêm P e P' espaços lineares de codimensão $d - 2$, tais que os respectivos números de Milnor das seções gerais, que são superfícies determinantais, são iguais.

5.1 Limite de Hiperplanos de Espaços Tangentes

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica d -dimensional reduzida. Denotamos por X um representante suficientemente pequeno do germe $(X, 0)$ e por $X_0 = X_{reg}$ a parte regular de X (para não fazer confusão com a notação, note que se X tem uma estratificação de

Whitney $V_0 = \{0\}$ é o estrato de X).

Consideremos o subconjunto $C_0(X_0, \mathbb{C}^N)$ de $X_0 \times \check{\mathbb{C}}^N$, definido assim:

$$C_0(X_0, \mathbb{C}^N) = \{(x, \xi)/x \in X_0 \text{ e } \xi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}, \text{ é uma forma linear com } \xi(T_x X_0) = 0\}.$$

Definição 5.1. O fecho da projetivização com relação ao segundo fator de $C_0(X_0, \mathbb{C}^N)$ em $X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$, é chamado espaço conormal associado X em $\mathbb{C}^N$, denotado por $C(X, \mathbb{C}^N)$ ou simplesmente $C(X)$. Denotaremos por $\eta : C(X, \mathbb{C}^N) \rightarrow X$ o morfismo induzido pela primeira projeção, chamado morfismo conormal.

Observação 5.2. Para um germe $(X, 0)$ de variedade analítica as seguintes propriedades se verificam, ver [39]:

1. O conjunto $C(X)$ é um subespaço analítico de $X \times \check{\mathbb{P}}^{N-1}$ de dimensão $N - 1$.
2. Se x é um ponto não singular do espaço X , então $\eta^{-1}(x)$ corresponde ao conjunto de hiperplanos de $\mathbb{C}^N$ tangentes ao espaço X em x e $\dim \eta^{-1}(x) = N - d - 1$.
3. Um hiperplano $H \in \eta^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^N$ é um limite de hiperplanos tangentes ao espaço X em 0 , se existe uma sequência de pontos não singulares (x_n) de X que converge a 0 e uma sequência de hiperplanos $H_n \supset T_{x_n} X_{reg}$ de $\mathbb{C}^N$, tais que H_n converge à H em $\check{\mathbb{P}}^{N-1}$.
4. A fibra $\eta^{-1}(0)$ em um ponto singular tem dimensão $N - d + k - 1$, onde $k = \dim \nu^{-1}(0)$ ($\nu : \hat{X} \rightarrow X$ é a aplicação definida pela transformação de Nash, ver Definição 1.9).

Como $k \leq d - 1$, temos que $\dim \eta^{-1}(0) \leq N - 2$.

Denotemos por $C_0(X) = \eta^{-1}(0)$ o conjunto de todos os limites de hiperplanos tangentes a X em 0 .

Denotemos por $\phi : (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0, 0) \rightarrow (X, X_0, 0)$ o germe de curva analítica tal que $\phi(0) = 0$ e $\phi(\mathbb{C} - \{0\}) \subset X_0$

Lema 5.3. [21] Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $X = F^{-1}(0)$. Um hiperplano H pertence a $C_0(X)$ se somente se existe um germe de curva analítica $\phi : (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0, 0) \rightarrow (X, X_0, 0)$ e uma aplicação $\psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$ tais que para algum k ,

$$(a_1, a_2, \dots, a_N) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \psi(t)(DF(\phi(t)))$$

onde $\sum_{i=1}^N a_i x_i = 0$ é a equação de H .

Se H é um hiperplano em $\mathbb{C}^N$, denotemos $JM(F)_H$ o submódulo de $JM(F)$ gerado por $\partial F/\partial v, \forall v \in H$.

O seguinte resultado é uma caracterização do conjunto de limites de hiperplanos tangentes. Apresentamos a prova com mais detalhes.

Teorema 5.4. [21, 13] *Seja H um hiperplano em $\mathbb{C}^N$, temos que $H \in C_0(X)$ se e somente se, $JM(F)_H$ não é redução de $JM(F)$.*

Demonstração: Pelo lema 5.3, temos que $H = \{(x_1, \dots, x_N) / \sum_{i=1}^N a_i x_i = 0\} \in C(X)$ se existem $\phi : (\mathbb{C}, \mathbb{C} - \{0\}, 0) \rightarrow (X, X_0, 0)$, $\psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$ e $k > 0$, tais que

$$(a_1, \dots, a_N) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \psi(t)(DF(\phi(t))). \quad (5.1)$$

Por outro lado temos que $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) = \mathcal{O}_1\{\psi(t)(DF(\phi(t)).v)) / v \in H\}$ (ϕ^* é definido no Capítulo 1, Seção 1.5), como $I_\psi(\phi^*(N)) \subset \mathcal{O}_1$, então $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) = \mathcal{O}_1\{t^q\}$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Pela equação (5.1), temos que: $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) = \mathcal{O}_1\{t^q\}$, para $q > k$.

Da equação (5.1), temos que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \psi(t)(DF(\phi(t))).u \neq 0$ para qualquer $u \in \mathbb{C}^N - H$. Logo $\psi(t)(DF(\phi(t))).u \notin I_\psi \phi^*(JM(F)_H)$, segue da proposição 1.23, que $DF(x)u \notin JM(F)_H$.

Reciprocamente, se $\overline{JM(F)_H} \subsetneq \overline{JM(F)}$, existe $u \in \mathbb{C}^N - H$ tal que $D(F).u \notin JM(F)_H$, logo pela proposição 1.23, existem $\phi : (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0, 0) \rightarrow (X, X_0, 0)$, $\psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C})$ tal que $\psi(t)(DF(\phi(t))).u \notin I_\psi \phi^*(JM(F)_H)$. Como $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) \subseteq I_\psi \phi^*(JM(F)) \subseteq \mathcal{O}_1$, existem $k, q \in \mathbb{N}$ tais que $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) = \mathcal{O}_1\{t^q\}$, $I_\psi \phi^*(JM(F)) = \mathcal{O}_1\{t^k\}$, com $0 \leq k \leq q$. Como $\psi(t)(DF(\phi(t))).u \notin I_\psi \phi^*(JM(F)_H)$, então $0 \leq k < q$. Como $I_\psi \phi^*(JM(F)) = \mathcal{O}_1\{t^k\}$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \psi(t)(DF(\phi(t))) = (a_1, a_2, \dots, a_N) \neq 0$$

e pelo fato que $I_\psi \phi^*(JM(F)_H) = \mathcal{O}_1\{t^q\}$ e $0 \leq k < q$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^k} \psi(t)(DF(\phi(t))) = 0,$$

portanto $\sum_{i=1}^N a_i x_i = 0, \forall x \in H$. Assim $H = \{(x_1, \dots, x_N) / \sum_{i=1}^N a_i x_i = 0\}$ e pelo lema 5.3 segue que $H \in C_0(X)$. ■

No artigo [38], o autor define hiperplano geral se ele não é limite de espaços tangentes. Aqui daremos uma definição equivalente.

Definição 5.5. *Dizemos que um hiperplano H em $\mathbb{C}^N$, dado pelo núcleo de uma aplicação linear $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é geral com relação a X em 0 se H é transversal a $T, \forall T \in \nu^{-1}(0)$ (limite de espaços tangentes).*

Proposição 5.6. *Seja X uma variedade analítica em $\mathbb{C}^N$. Existe um conjunto Zariski aberto não vazio $\Omega \subset \mathbb{P}^{N-1}$ tal que $\forall H \in \Omega$, H é geral a X em 0 .*

Demonstração: A proposição segue da observação 5.2, com $\Omega = \mathbb{P}^{N-1} \setminus \eta^{-1}(0)$, pois $\eta^{-1}(0)$ é um conjunto analítico próprio. ■

Na seguinte proposição mostraremos que a Definição 2.2 (pag. 64) dada no artigo [38] e a definição 5.5 são equivalentes.

Proposição 5.7. *Um hiperplano H é limite de hiperplanos tangentes a X em 0 se, somente se H não é geral.*

Demonstração: Suponha que H é um limite de hiperplanos tangentes, então existe uma sequência (x_n) de pontos na parte regular de X , tal que $T = \lim T_{x_n} X_{reg} \subset H = p^{-1}(0)$. Logo $\ker(p)$ não é transversal à T .

Reciprocamente, suponha que H não é geral, então, existe uma sequência $(x_n) \in X_{reg}$ com $T = \lim T_{x_n \rightarrow 0} X_{reg}$, tal que H não é transversal à T . Isto quer dizer que $T + H \neq \mathbb{C}^N$. Como $\dim H = N - 1$ e $\dim T = 2$, então $T \subseteq H$, ou seja, $p(T) = 0$, assim $H = p^{-1}(0)$ é limite de hiperplanos tangentes. ■

Na seguinte proposição vamos mostrar que a condição " H é geral" vale para todos os pontos regulares em uma vizinhança de 0 .

Proposição 5.8. *Se H é geral em 0 então existe um aberto U contendo 0 , tal que H é transversal a X em y , $\forall y \in U \cap X_{reg}$*

Demonstração: Suponha que a condição não seja verdadeira. Pelo lema da seleção da curva, existe uma curva α em X , tal que $\alpha(t) \neq 0$ quando $t \neq 0$ e $\alpha(0) = 0$, tal que $T_{\alpha(t)} X$ não é transversal à H , $\forall t \neq 0$. Isto implica que $T_{\alpha(t)} X \subset H$, $\forall t \neq 0$. Logo $T = \lim_{t \rightarrow 0} T_{\alpha(t)} \subset H$, o que contradiz a hipótese. ■

Proposição 5.9. *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade determinantal d -dimensional com singularidade isolada na origem e H um hiperplano geral com relação a X , então $X \cap H \subset \mathbb{C}^{N-1}$ é uma variedade determinantal $d - 1$ dimensional com singularidade isolada na origem.*

Demonstração: Como H é transversal à T , então $\dim(X \cap H) = d - 1$. Assim, suponha sem perda de generalidade que $x_1 = 0$ é a equação de H e X é definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$, então $X \cap H$ é definida pela função $F'(x_2, \dots, x_N) = F(0, x_2, \dots, x_N)$. Portanto $X \cap H$ é uma variedade determinantal $d - 1$ dimensional em $\mathbb{C}^{N-1}$.

Segue da proposição 5.8 que $X \cap H$ tem singularidade isolada na origem. ■

Figura 5.1:

Na sequência daremos um exemplo no qual um hiperplano H não é limite de hiperplanos tangentes, mas ele não é transversal aos limites de espaços tangentes aos estratos do conjunto singular da variedade com singularidade não isolada.

Exemplo 5.10. Considere X a superfície rabo de andorinha, dada na figura 5.1. X é a superfície em $\mathbb{C}^3$ definida pelos zeros de

$$256Z^3 - 27X^4 - 128Z^2Y^2 + 144ZX^2Y + 16ZY^4 - 4X^2Y^3 = 0.$$

Ela pode também ser definida pela parametrização.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y) &\mapsto (-4x^3 - 2xy, y, -3x^4 - x^2y) \end{aligned}$$

O conjunto dos hiperplanos tangentes a X em zero é o hiperplano $Z = 0$ (ver por exemplo [30]).

Temos que todo hiperplano diferente do hiperplano $Z = 0$ é geral, em particular o plano $H = \{(X, Y, Z) : X = 0\}$ é geral, mas H não é transversal aos limites de retas tangentes aos estratos de dimensão 1.

Este exemplo motiva a seguinte definição.

Definição 5.11. Seja X uma variedade analítica complexa d -dimensional, e seja $\{V_i\}$ uma estratificação de X . Dizemos que um hiperplano H é fortemente geral a X em 0 , se existe uma

vizinhança U de 0 tal que para todo estrato V_λ de X , com $0 \in \overline{V}_\lambda$, temos que $H \pitchfork V_\lambda$ em x , $\forall x \in U \setminus \{0\}$.

Se a variedade tem singularidade isolada, então as duas condições das definições (geral e fortemente geral) coincidem.

Teorema 5.12. *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma EIDS, de tipo (n, m, t) . Se $H \subset \mathbb{C}^N$ é um hiperplano fortemente geral a X na origem, então $X \cap H$ é uma EIDS em $\mathbb{C}^{N-1}$ de dimensão $d - 1$ e do mesmo tipo.*

Demonstração: Seja $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ a função que define $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$. Como X é uma EIDS, então F é transversal aos estratos de $M_{m,n}^t$ em $U \setminus \{0\}$, onde U é uma vizinhança da origem. Pela hipótese temos que H é transversal aos estratos de X fora da origem, ou seja a aplicação inclusão $i : \mathbb{C}^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}^N$ é transversal aos estratos de X fora da origem. Então $F \circ i : \mathbb{C}^{N-1} \rightarrow M_{m,n}$ é transversal a todos os estratos de $M_{m,n}^t$ fora da origem, assim $X \cap H = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset \mathbb{C}^{N-1}$ é uma EIDS do mesmo tipo do que X e $\dim(X \cap H) = d - 1$ em $\mathbb{C}^{N-1}$. ■

5.2 Minimalidade do Número de Milnor

O objetivo desta seção é provar um resultado de minimalidade análogo ao obtido por Jawad Snoussi [38], para variedades determinantais com singularidade isolada.

Os primeiros resultados sobre minimalidade do número de Milnor de uma seção genérica foram obtidos por J.-P. G. Henry e D. T. Lê para hipersuperfícies em $\mathbb{C}^N$ em 1975, [25]. Esses resultados foram estendidos ao caso de interseções completas por Terence Gaffney, em [21]. Os dois trabalhos usam fecho integral de ideais e módulos para provar os resultados.

5.2.1 Hipersuperfícies e Interseções Completas em $\mathbb{C}^N$

Seja $X \subset U \subset \mathbb{C}^N$ uma hipersuperfície analítica definida em um aberto U em $\mathbb{C}^N$ pela função $f = 0$. Suponha que X tem singularidade isolada na origem.

Lema 5.13. [25] *Existe um conjunto Zariski aberto Ω , do espaço projetivo de hiperplanos afins de $\mathbb{C}^N$ passando pela origem tal que $H \in \Omega$ se e somente se $(X \cap H)$ tem uma singularidade isolada na origem e o número de Milnor $\mu(X \cap H, 0)$ de $X \cap H$ na origem é mínimo entre os números de Milnor na origem de seções hiperplanas $X \cap L$, tendo singularidade isolada na origem.*

Se $H \in \Omega$, então H é chamado plano geral de X na origem.

Teorema 5.14. [25] *Um hiperplano $H \subset \mathbb{C}^N$ não é limite de hiperplanos tangentes em X se e somente se $\mu(X \cap H)$ é mínimo.*

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que H é definido por $x_0 = 0$

Temos a fórmula de tipo Lê-Greuel:

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}}{\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle} = \mu(X) + \mu(X \cap H).$$

Então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^N,0}}{\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle} = e(\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle, \mathcal{O}_{X,x}),$$

onde $e(I, \mathcal{O}_{X,x})$ é a multiplicidade do ideal I sobre $\mathcal{O}_{X,x}$.

Indicamos por $I = \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle$ e $J = \langle \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle$ os ideais do anel $\mathcal{O}_{X,x}$, podemos usar o seguinte resultado, ver [37].

Lema 5.15. *Se $I \subseteq J$ então $e(I, \mathcal{O}_{X,x}) = e(J, \mathcal{O}_{X,x})$ se e somente se $\bar{I} = \bar{J}$.*

Continuando com a prova, como $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle \subseteq \langle \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle$ então temos a desigualdade

$$e(\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle, \mathcal{O}_{X,x}) \leq e(\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle, \mathcal{O}_{X,x}).$$

Logo $e(\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle, \mathcal{O}_{X,x}) = e(\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle, \mathcal{O}_{X,x})$ se e somente se

$$\overline{\langle \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle} = \overline{\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \rangle}$$

O resultado segue de [25, Lema 2.5]. ■

5.2.2 Variedades Determinantais com Singularidade Isolada na Origem

O seguinte resultado foi provado por Jawad Snoussi [38] para o caso de superfícies normais. Este lema é um dos resultados chaves para obter os resultados nesse artigo.

Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma superfície, considere $\pi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma aplicação linear genérica, denotemos por $\Delta_L = \overline{\pi(P_1(X), \pi)}$ o discriminante da aplicação π , onde $P_1(X)$ é o conjunto polar $P_1(X) = \overline{\Sigma \pi|_{X_{reg}}}$

Lema 5.16. [38] *Um hiperplano H em $\mathbb{C}^N$ é geral se e somente se existe um $(N - 2)$ plano $L \subset H$ tal que $L \cap |C_{X,0}| = \{0\}$ e $\pi_L(H \cap X)$ não é tangente ao cone tangente $C_{\Delta_L,0}$, onde $\pi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^2$ com $L = \ker(\pi)$.*

Para dimensões maiores, a seguinte proposição é demonstrada em [26].

Proposição 5.17. [26] *Sejam $X \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade analítica complexa e L um subespaço afim em $\mathbb{C}^N$ de codimensão igual a dimensão de $C_{X,x}$ em $\mathbb{C}^N$, $x \in L$ e $L \cap C_{X,x} = \{x\}$. Considere a projeção $\pi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{\dim X}$ tal que $\ker \pi = L$. Considere Δ_L o discriminante de π restrito a X . Seja H_0 um hiperplano de $\mathbb{C}^{\dim X}$ que não é limite de hiperplanos tangentes do discriminante Δ_L . Então, o hiperplano H dado pela imagem inversa $H = \pi^{-1}(H_0)$ não é limite de hiperplanos tangentes a X .*

O seguinte resultado é uma consequência simples da fórmula de Lê- Greuel mas é um resultado útil.

Proposição 5.18. *Seja $(X, 0) \subset \mathbb{C}^N$ uma IDS de dimensão d , $N < (m-t+2)(n-t+2)$. Sejam H e H' hiperplanos em $\mathbb{C}^N$ tais que $X \cap H$ e $X \cap H'$ são EIDS então $\nu(X \cap H, 0) \leq \nu(X \cap H', 0)$ se, e somente se $m_d(X, p) \leq m_d(X, p')$.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.15. ■

Na sequência temos o seguinte resultado para o caso de superfícies determinantais, este resultado é um caso particular do resultado no trabalho [38], já que toda variedade determinantal é normal. A nossa prova da condição necessária usa argumentos da teoria de variedades determinantais, mas a prova recíproca é a mesma prova apresentada por Jawad Snoussi em [38].

Teorema 5.19. *Sejam $X \subset \mathbb{C}^N$ uma superfície determinantal e $H \subset \mathbb{C}^N$ um hiperplano em $\mathbb{C}^N$. Temos que $H = p^{-1}(0)$ é geral a X em 0 , se e somente se, $m_d(X, p)$ é mínimo.*

Demonstração: Suponha que p não é geral e seja p_t uma família a 1-parâmetro de projeções tal que para $t \neq 0$, p_t é geral. Podemos assumir que $X \cap H_t = X \cap p_t^{-1}(0)$ é família plana de curvas reduzidas. Pela semicontinuidade do número de Milnor μ de curvas reduzidas, então

$$\mu(X \cap H_t) < \mu(X \cap H), \quad t \neq 0.$$

Da proposição 5.18, segue que $m_d(X, p_t) < m_d(X, p)$, assim $m_d(X, p)$ não é mínimo.

Reciprocamente como em [38], suponha que p é geral e $m_d(X, p)$ não é mínimo. pela Proposição 5.18, $\mu(X \cap H)$ não é mínimo. Por [7, Teorema 6.1.7], existe um aberto Zariski Ω do conjunto de hiperplanos em $\mathbb{C}^N$ tal que para todo $H' \in \Omega$ temos que $H' \cap X$ é uma curva reduzida e $\mu(H' \cap X) < \mu(H \cap X)$. O conjunto $W = \{H \cap H' / H \in \Omega\}$ é um conjunto Zariski aberto de hiperplanos de H . Como H não contém nenhuma componente irredutível de $|C_X|$, o conjunto

$$W' = \{L/L \text{ não contém nenhuma geratriz em comum com o cone } |C_X|\}$$

de hiperplanos de H é também aberto e denso. Então existe um hiperplano $H' \subset \mathbb{C}^N$ tal que $H' \cap X$ é uma curva reduzida e $\mu(H' \cap X) < \mu(H \cap X)$. Seja $L = H \cap H'$, L é um $(N-2)$ -plano de $\mathbb{C}^N$, então $L \cap |C_X| = \emptyset$, então temos:

$$(\Delta_L \cdot \pi_L(H \cap X))_0 = \mu(X \cap H) + \deg_0(\pi_L) - 1$$

$$(\Delta_L \cdot \pi_L(H' \cap X))_0 = \mu(X \cap H') + \deg_0(\pi_L) - 1,$$

Denotamos por $(\Delta_L \cdot \pi_L(H' \cap X))_0$ a multiplicidade de interseção de curvas planas. Como $\mu(H' \cap X) < \mu(H \cap X)$, então temos que $(\Delta_L \cdot \pi_L(H \cap X))_0 > (\Delta_L \cdot \pi_L(H' \cap X))_0$, logo por [19, pag. 40] $\pi_L(X \cap H)$ é tangente ao cone tangente de Δ_L . Pelo Lema 5.16 temos que H é um limite de hiperplanos tangentes. ■

Proposição 5.20. [28, Corolário 2.3.2.1] *Sejam c um inteiro e E um subespaço vetorial de $\mathbb{C}^N$ de codimensão c que é a interseção de c hiperplanos $H_1, H_2, \dots, H_c$ tais que H_i não é tangente à $|X \cap H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{i-1}|$, para $1 \leq i \leq c$. Então a multiplicidade em x das variedades polares $P_k(|X \cap E|)$ é igual à multiplicidade em x das variedades polares $P_k(X)$ para $0 \leq k \leq d - c - 1$.*

O próximo resultado é uma generalização do Teorema 5.19, para o caso de 3-variedades determinantis em $\mathbb{C}^5$.

Teorema 5.21. *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma variedade determinantal de dimensão 3 com singularidade isolada, e seja H um hiperplano em $\mathbb{C}^N$ dado pelo núcleo da projeção linear $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que $X \cap H$ tem singularidade isolada na origem, então as seguintes condições são equivalentes:*

- a) p é geral a X na origem
- b) $\mu(X \cap H)$ é mínimo e $\mu(X \cap H \cap H')$ é mínimo para todo H' geral a X e a $X \cap H$.

Demonstração: Suponha que $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é geral a X na origem, $H = p^{-1}(0)$ então $X \cap H$ é uma superfície determinantal com singularidade isolada na origem. Então existe um conjunto Zariski aberto $\Omega \subset \mathbb{P}^{N-1}$ tal que $\forall H' \in \Omega$, com $H' = \ker p'$, $p' : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação linear tem-se que:

1. p é geral a X na origem e p é geral a $X \cap H'$ na origem.
2. $\mu(X \cap H')$ é mínimo.

Usando a fórmula de tipo Lê- Greuel (3.2) da Proposição 3.12 para a superfície $X \cap H$ e $X \cap H'$, temos:

$$\mu(X \cap H) + \mu(X \cap H \cap H') = m_2(X \cap H) \quad (5.2)$$

$$\mu(X \cap H') + \mu(X \cap H \cap H') = m_2(X \cap H') \quad (5.3)$$

Como H e H' são gerais a X em 0, segue da Proposição 5.20 que $m_2(X \cap H) = m_2(X \cap H') = m_2(X)$. Então segue das equações (5.2) e (5.3) que $\mu(X \cap H) = \mu(X \cap H')$, logo $\mu(X \cap H)$ é mínimo.

Sejam H' e H'' hiperplanos gerais a X na origem, dados pelo kernel de p' e p'' , tais que $\mu(X \cap H' \cap H'')$ é mínimo. Então temos as seguintes fórmulas de tipo Lê- Greuel para $X \cap H$ e $X \cap H'$.

$$\mu(X \cap H) + \mu(X \cap H \cap H') = m_2(X \cap H) = m_2(X) \quad (5.4)$$

$$\mu(X \cap H') + \mu(X \cap H' \cap H'') = m_2(X \cap H') = m_2(X) \quad (5.5)$$

Como $\mu(X \cap H) = \mu(X \cap H')$ então segue que $\mu(X \cap H \cap H') = \mu(X \cap H' \cap H'')$.

Reciprocamente, seja $\pi = (p, p', p'')$ a aplicação $\mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^3$, com $H = \ker p$, $H' = \ker p'$ e $H'' = \ker p''$, tal que $\ker \pi \cap C_{X,0} = \{0\}$ e $m_0(X) = \deg \pi|_X$. Consideremos $\pi' : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $\pi' \circ \pi|_{X \cap H} = (p', p'')$, $\ker(\pi' \circ \pi) \cap C_{X \cap H} = \{0\}$ e $m_0(X) = m_0(X \cap H) = \deg \pi' \circ \pi|_{X \cap H}$. Logo

$$\mu(X \cap H \cap H') + \deg \pi - 1 = m_1(X \cap H \cap H') \quad (5.6)$$

$$\mu(X \cap H' \cap H'') + \deg \pi - 1 = m_1(X \cap H' \cap H''). \quad (5.7)$$

Temos que $m_1(X) = m_1(X \cap H \cap H')$. Por outro lado, segue de [38, Lema 4.3] que

$$\mu(X \cap H \cap H') + \deg \pi - 1 = (\Delta_{\pi' \circ \pi} \cdot (\pi' \circ \pi)(X \cap H \cap H'))_0.$$

Logo $m_1(X \cap H \cap H') = (\Delta_{\pi' \circ \pi} \cdot (\pi' \circ \pi)(X \cap H \cap H'))_0$ então $(\pi' \circ \pi)(X \cap H \cap H')$ não é limite de hiperplanos tangentes a $\Delta_{\pi' \circ \pi}$. Logo pela Proposição 5.17, temos que $\pi(X \cap H)$ não é limite de hiperplanos tangentes a Δ_π . Segue então pela Proposição 5.17 que H não é limite de hiperplanos tangentes a X . ■

Exemplo 5.22. Seja X a 3-variedade determinantal com singularidade isolada definida pela função

$$F : \quad \mathbb{C}^5 \quad \rightarrow \quad M_{2,3} \\ (x, y, z, w, v) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Sejam p e p' as projeções lineares definidas por

$$p(x, y, z, w, v) = w - z$$

e

$$p'(x, y, z, w, v) = x - v$$

que definem os hiperplanos H e H' respectivamente.

Então a superfície $X \cap H$ é determinada pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & v & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

O número de Milnor de $X \cap H$ é $\mu(X \cap H) = 4$, ver [34].

A superfície $X \cap H'$ é determinada pela seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{G}(n,m)} \begin{pmatrix} x & y & z \\ w & x & y^2 \end{pmatrix}$$

Então segue de [35] que o número de Milnor desta superfície é $\mu(X \cap H') = 2$.

Então temos que p' é geral a X na origem.

5.3 Seções de Variedades Determinantais Essencialmente Isoladas

Quando X é uma EIDS, de dimensão $d > 2$ também é possível associar a X uma superfície determinantal Y cujo número de Milnor é um invariante de X .

Proposição 5.23. [26] *Sejam H e H' hiperplanos em $\mathbb{C}^N$ que não são limites de hiperplanos tangentes a $(X, 0)$. Então H e H' contêm planos Q e Q' respectivamente tais que as curvas reduzidas $|X \cap Q|$ e $|X \cap Q'|$ têm o mesmo número de Milnor.*

O seguinte resultado é uma generalização da Proposição 5.23 e resulta como consequência da Proposição 5.20 e da fórmula de tipo Lê- Greuel, Teorema 3.3.

Teorema 5.24. *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS de tipo (m, n, t) de dimensão d . Sejam H e H' hiperplanos de $\mathbb{C}^N$ fortemente gerais para $(X, 0)$ na origem. Então H e H' contêm respectivamente P e P' tais que $\text{codim } P = \text{codim } P' = d - 2$, para os quais as superfícies determinantais $X \cap P$ e $X \cap P'$ satisfazem as seguintes condições*

- a) têm singularidade isolada
- b) admitem suavizações
- c) $\mu(X \cap P) = \mu(X \cap P')$.

Demonstração:

- a) Podemos considerar $P = H \cap \dots \cap H_{d-3} \subset H$ e $P' = H' \cap \dots \cap H'_{d-3} \subset H'$ tais que para tudo i , H_i e H'_i são fortemente gerais para $X \cap H \cap H_1 \cap \dots \cap H_{i-1}$ e $X \cap H' \cap H'_1 \cap \dots \cap H'_{i-1}$ respectivamente. Pela Proposição 5.12, segue que $X \cap P \subset \mathbb{C}^{N-d+2}$ e $X \cap P' \subset \mathbb{C}^{N-d+2}$ são EIDS e como a $\text{codim } X < (m-t+2)(n-t+2) - 2$ então $X \cap P$ e $X \cap P'$ são superfícies determinantais com singularidade isolada.
- b) Seja $\mathcal{X}$ um smoothing essencial de X , tal que $H_i \times \mathbb{C}$ e $H'_i \times \mathbb{C}$ são fortemente gerais para $\mathcal{X} \cap (H \times \mathbb{C}) \cap (H_1 \times \mathbb{C}) \cap \dots \cap (H_{i-1} \times \mathbb{C})$ e $\mathcal{X} \cap (H' \times \mathbb{C}) \cap (H'_1 \times \mathbb{C}) \cap \dots \cap (H'_{i-1} \times \mathbb{C})$ respectivamente. De fato, $\mathcal{X} \cap \tilde{P}$ e $\mathcal{X} \cap \tilde{P}'$, com $\tilde{P} = P \times \mathbb{C}$ e $\tilde{P}' = P' \times \mathbb{C}$ são as suavizações de $X \cap P$ e $X \cap P'$, pelo Teorema 2.8.
- c) Os hiperplanos H e H' contêm planos $Q = P \cap H'$ e $Q' = P' \cap H$ dados na Proposição 5.23, então $X \cap Q$ e $X \cap Q'$ são curvas determinantais e pela Proposição 5.23, temos que:

$$\mu(X \cap Q) = \mu(X \cap Q'). \quad (5.8)$$

Usando a fórmula de tipo Lê- Greuel, Teorema 3.3, temos

$$\mu(X \cap P) + \mu(X \cap Q) = m_2(X \cap P, p') \quad (5.9)$$

$$\mu(X \cap P') + \mu(X \cap Q') = m_2(X \cap P', p). \quad (5.10)$$

Podemos aplicar a Proposição 5.20 na variedade $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$, e nos hiperplanos produto $H_i \times \mathbb{C}$. Logo, temos que $m_2(X \cap P, p') = m_2(X \cap P', p)$ pois $m_2(X \cap P, p') = m_0(P_2(X \cap P), p') = m_0(P_2(\mathcal{X}))$, e da mesma forma $m_2(X \cap P', p) = m_0(P_2(\mathcal{X}))$.

Logo $m_2(X \cap P, p') = m_2(X \cap P', p) = m_0(P_2(\mathcal{X}))$ e usando (5.8) temos o resultado. ■

Exemplo 5.25. Seja $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$, $N \geq 7$ definida por

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 + f(y) \end{pmatrix}, f(0) = 0$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ e $y = (y_1, \dots, y_{N-6})$. Então $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ é uma EIDS em $\mathbb{C}^N$ de codimensão 2. Considere $P = \{(x, y) | x_1 = x_5, x_2 = x_6, y = 0\}$, obtemos a superfície determinantal em $\mathbb{C}^4$ definida por

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Segue de [34] que $\mu(X \cap P) = 1$.

Topologia de EIDS

Neste capítulo estudamos o conceito de índice de Poincaré- Hopf de 1-formas sobre EIDS e estudamos a noção de obstrução de Euler local de variedades analíticas. O principal objetivo é calcular a obstrução de Euler de variedades determinantis essencialmente isoladas definidas pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ e que admitem 3 estratos. Daremos algumas condições sobre N para garantir a existência de tais variedades e forneceremos uma fórmula explícita da obstrução de Euler em termos da característica de Euler evanescente, definida em [12]. Além disso estudaremos o caso particular das EIDS, definidas por uma função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$ de coposto 1. Neste caso, verificaremos que a obstrução de Euler é constante.

6.1 Índices de Poincaré Hopf de 1-formas sobre EIDS

Nesta seção, com base no artigo [23], definimos índices de 1-formas sobre variedades determinantis. Estes índices são índices de Poincaré Hopf, e são definidos usando as três resoluções estudadas no Capítulo 4.

Seja $(X, 0) = F^{-1}(M_{m,n}^t) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ de tipo (m, n, t) e w uma 1-forma sobre $(\mathbb{C}^N, 0)$ tal que $w|_X$ tem um ponto singular isolado na origem.

Uma suavização essencial $\tilde{X} = \tilde{F}^{-1}(M_{m,n}^t) \subset U$ de EIDS $(X, 0)$ em geral não é suave. Para definir um análogo ao índice de Poincaré-Hopf, temos que construir um substituto para o fibrado tangente a $\tilde{X}$.

Uma possibilidade é usar uma resolução $\tilde{X}$ de X , usando uma das resoluções Y_k , $k = 1, 2, 3$ de $M_{m,n}^t$, apresentadas no Capítulo 4. Nestes casos, $\overline{X}_k$ é o pull-back de $(\pi_k, \tilde{F})$, no diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_k & \longrightarrow & Y_k \\ \Pi_k \downarrow & & \downarrow \pi_k \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{F}|_{\tilde{X}}} & M_{m,n}^t \end{array}$$

Vimos no Capítulo 4 que $\overline{X}_k = \tilde{X} \times_{M_{m,n}^t} Y_k$ é suave. Como w é uma forma sobre $\mathbb{C}^N$ então podemos definir uma 1-forma sobre $\overline{X}_k$ como: $(j \circ \Pi_k)^*(w) = w_k$ (onde j é uma aplicação inclusão $\tilde{X} \hookrightarrow U \subset \mathbb{C}^N$).

Temos que w_k é uma 1-forma sobre a variedade analítica complexa não singular $\overline{X}_k$ sem zeros fora da preimagem de uma vizinhança na origem. Em geral w_k pode ter zeros não isolados. Podemos ver w_k como uma seção do fibrado cotangente de $\overline{X}_k$.

Definição 6.1. [23] *O índice de Poincaré-Hopf (PH-índice) $ind_{PH}^k(w) = ind_{PH}^k(w, X, 0)$, $k = 1, 2, 3$, da 1-forma w sobre a EIDS $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é a soma dos índices dos zeros de uma perturbação genérica $\tilde{w}_k$ da 1-forma w_k sobre a variedade $\overline{X}_k$. Em outras palavras, o PH-índice $ind_{PH}^k(w)$ é a obstrução à extensão da 1-forma não nula w_k da preimagem (sob $j \circ \Pi_k$) da vizinhança da esfera $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$ à variedade $\overline{X}_k$.*

$$ind_{PH}^k(w) = Obs(w_k, (j \circ \Pi_k)^{-1}(B_\epsilon), (j \circ \Pi_k)^{-1}(S_\epsilon))$$

Este índice independe da escolha da deformação.

Outra possibilidade é levar em conta que o espaço $\overline{X}_3$ da terceira resolução é a transformação de Nash de $\tilde{X}$. Vamos usar o fibrado de Nash $\hat{\mathbb{T}}$ de $\tilde{X}$ no lugar do fibrado tangente de $\overline{X}_k$. A 1-forma w define uma seção não nula $\hat{w}$ do fibrado dual de $\hat{\mathbb{T}}^*$ sobre a preimagem da intersecção de $\tilde{X} \cap S_\epsilon$.

Definição 6.2. [23] *O índice de Poincaré-Hopf-Nash (PHN-índice) da 1-forma w sobre $(X, 0)$ $ind_{PHN}w = ind_{PHN}(w, X, 0)$ é a obstrução a extensão da seção não nula $\hat{w}$ do fibrado dual $\hat{\mathbb{T}}^*$ da preimagem da esfera $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$ à preimagem do seu interior, ie, à variedade $\overline{X}_3$ sobre a classe fundamental do par $[(\Pi_3^{-1}(X \cap B_\epsilon), \Pi_3^{-1}(X \cap S_\epsilon))]$.*

$$ind_{PHN}w = Obs(\hat{w}, \Pi_3^{-1}(X \cap B_\epsilon), \Pi_3^{-1}(X \cap S_\epsilon))([(\Pi_3^{-1}(X \cap B_\epsilon), \Pi_3^{-1}(X \cap S_\epsilon))])$$

Proposição 6.3. [23] *O índice de PHN, $ind_{PHN}(w) = ind_{PHN}(w; X, 0)$ da 1-forma w sobre uma EIDS X , é igual ao número de pontos singulares não degenerados de uma deformação genérica $\tilde{w}$ da 1-forma w sobre a parte não singular $\tilde{X}_{reg} = F^{-1}(M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})$ de uma suavização essencial $\tilde{X}$ da variedade $(X, 0)$.*

Quando X é uma variedade determinantal com singularidade isolada que admite uma suavização e w é uma 1-forma definida em X , o número de pontos singulares não degenerados de uma perturbação $\tilde{w}$ de w sobre a suavização $\tilde{X}$ de X é o índice GSV de w sobre X em $x = 0$, ver [5] para mais detalhes.

Então temos o seguinte corolário da proposição anterior.

Corolário 6.4. *Se X é IDS que admite suavização e w é uma 1-forma em X com singularidade isolada em $x = 0$. Então*

$$\text{ind}_{PHN}(w, X, 0) = \text{ind}_{GSV}(w, X, 0)$$

Queremos mostrar que para o caso de uma variedade com suavização e com singularidade isolada todos os índices de Poincaré Hopf (e o índice de Poincaré- Hopf- Nash) coincidem. Temos o seguinte resultado enunciado por Èbeling e Guseïn-Zade [23, pag. 120].

Teorema 6.5. *Seja X uma variedade determinantal com singularidade isolada, que admite uma suavização $\tilde{X}$. Então*

$$\text{Ind}_{PH}^3(w, X, 0) = \text{Ind}_{PHN}(w, X, 0)$$

Demonstração: Seja w uma 1-forma definida sobre $\mathbb{C}^N$ tal que $w|_X$ tem singularidades isolada na origem, como X é uma variedade singular com suavização, temos que a suavização é uma suavização essencial $\tilde{X}$ (é suave), assim $\overline{X}_3 \cong \tilde{X}$, então temos $\hat{\mathbb{T}}$ é o fibrado tangente de $\tilde{X}$. ■

Seja $\chi(X, 0) = \chi(\tilde{X} \cap B_\epsilon)$, onde $\tilde{X}$ é uma suavização essencial de $(X, 0)$. Denotemos por $\tilde{X}_i \subset \tilde{X}$ a suavização essencial da EIDS $X_i = F^{-1}(M_{m,n}^i)$ de tipo (m, n, i) .

Vamos denotar por G_i^k a imagem inversa de um ponto de $V_i = M_{m,n}^i \setminus M_{m,n}^{i-1}$ das resoluções π_k da variedade $M_{m,n}^t$.

$$\begin{aligned} G_i^1 &= Gr(n - t + 1, n - i + 1) \\ G_i^2 &= Gr(m - t + 1, m - i + 1) \\ G_i^3 &= Gr(n - t + 1, n - i + 1) \times Gr(m - t + 1, m - i + 1) \end{aligned}$$

Definiremos o índice radial de 1- formas complexas com base em [5, 14].

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^N, 0)$ um germe de variedade analítica e seja w uma 1- forma sobre uma vizinhança na origem em $\mathbb{R}^N$.

Definição 6.6. [14] *A 1- forma w é radial sobre $(X, 0)$ se para qualquer curva analítica $\varphi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (X, 0)$, o valor da 1- forma sobre o espaço tangente $\dot{\varphi}$ é positivo para $t > 0$.*

Seja $X = \cup_{i=0}^q V_i$ uma estratificação de Whitney do germe $(X, 0)$, $V_0 = \{0\}$. Seja w uma 1-forma sobre uma vizinhança na origem em $\mathbb{R}^N$, com uma singularidade isolada sobre $(X, 0)$ na origem. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que na bola fechada B_ϵ de raio ϵ e centrada na origem em $\mathbb{R}^N$ a 1-forma w não tem pontos singulares sobre $X \setminus \{0\}$. Então existe uma 1-forma $\tilde{w}$ sobre $\mathbb{R}^N$ tal que

1. A 1- forma $\tilde{w}$ coincide com a 1- forma sobre uma vizinhança da esfera $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$.
2. A 1- forma $\tilde{w}$ é radial sobre $(X, 0)$ na origem.
3. Em cada vizinhança de um ponto singular $x_0 \in (X \cap B_\epsilon) \setminus \{0\}$, $x_0 \in V_i$, $\dim V_i = k$, a 1- forma $\tilde{w}$ pode ser vista como segue. Existe um difeomorfismo analítico local $h : (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, V_i, x_0)$ tal que $h^*\tilde{w} = \pi_1^*\tilde{w}_1 + \pi_2^*\tilde{w}_2$, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ são projeções, $\tilde{w}_1$ é o germe de 1-forma sobre $(\mathbb{R}^k, 0)$ com um ponto singular isolado na origem e $\tilde{w}_2$ é uma forma radial sobre $(\mathbb{R}^{N-k}, 0)$.

Definição 6.7. *O índice radial da 1- forma w sobre a variedade X na origem é*

$$ind_{rad}(w; X, 0) = 1 + \sum_{i=1}^q \sum_{Q \in \Sigma \tilde{w} \cap V_i} ind_Q \tilde{w}|_{V_i},$$

onde a segunda soma é considerada sobre todos os pontos singulares da 1- forma $\tilde{w}$ sobre $V_i \cap B_\epsilon$.

Agora seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ um germe de variedade analítica complexa de dimensão d e seja w uma 1- forma complexa sobre uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^N$. Existe uma correspondência entre as 1-formas complexas sobre $\mathbb{C}^N$ e 1-formas reais sobre $\mathbb{C}^N$ (considerando $\mathbb{C}^N$ como uma variedades real de dimensão $2N$). Ou seja, a uma 1- forma complexa w associamos uma 1- forma real $\eta = Rew$; a 1 forma w pode ser obtida pela fórmula $w(v) = \eta(v) - i\eta(iv)$ para $v \in T_x \mathbb{C}^N$. Isto quer dizer que o índice radial à 1- forma real ReW é um invariante da 1- forma complexa sobre si mesma. Porém, sobre uma variedade suave M d -dimensional, $ind_{rad}(Rew; M, x)$ não coincide com o índice usual de um ponto singular x da 1- forma w . Eles diferem pelo coeficiente $(-1)^d$.

Definição 6.8. [5, 14] *O índice radial da 1- forma complexa w sobre X na origem, $ind_{rad}(w; X, 0)$, é $ind_{rad}(w; X, 0) = (-1)^d ind_{rad}(Rew; X, 0)$.*

Proposição 6.9. [23] *Temos a seguinte igualdade:*

$$ind_{PH}^k(w; X, 0) = (-1)^{\dim X} \sum_{i=1}^t ((-1)^{\dim X_i} ind_{rad}(w; X_i, 0) - (-1)^{\dim X_{i-1}} ind_{rad}(w; X_{i-1}, 0) + (\chi(X_i, 0) - \chi(X_{i-1}, 0))) \chi(G_i^k),$$

onde $X_0 = \{0\}$ e $ind_{rad}(w, X_0, 0) = 1$ e $\chi(X_0, 0) = 0$.

Calculamos a diferença entre o índices de Poincaré Hopf e o índice de Poincaré Hopf Nash. Queremos usar esta diferença para exibir um exemplo em que os fibrados correspondentes, fibrado de Nash e fibrado tangente da transformação de Nash são isomorfos se a transformada de Nash é suave.

Usando as fórmulas dadas na proposição 6. no artigo [23], temos a seguinte diferença:

$$\text{ind}_{PH}^k(w) - \text{ind}_{PHN}(w) = [(-1)^{\dim X} \bar{\chi}(G_{t-1}^k) + (-1)^{m+n+2}(m-t+1)]\chi(X_{t-1}, 0),$$

onde $\bar{\chi}(X) = \chi(X) - 1$.

6.2 Obstrução de Euler Local

Sejam $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ germe de variedade analítica complexa, X um representante suficientemente pequeno do germe $(X, 0)$ e $\{V_i\}$ uma estratificação de Whitney de X . Suponhamos que $\{0\}$ seja um estrato. Seja $\cup TV_i$ a união dos fibrados tangentes a todos os estratos. Esta união pode ser vista como um subconjunto do fibrado tangente $T\mathbb{C}^N|_X$. A referência para esta seção são os artigos [3, 2, 4].

Definição 6.10. *Seja v uma seção de $T\mathbb{C}^N$ sobre um subconjunto $A \subset \mathbb{C}^N$. Dizemos que o campo v é estratificado se para $z \in V_i \cap A$, temos que $v(z) \in T_z V_i$, onde V_i é o estrato que contém z .*

Definição 6.11. *Dizemos que o campo de vetores v é radial em a se v é um campo estratificado e se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que o campo v está saindo de $B_\epsilon(a)$, para $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.*

Lema 6.12. [4] *Um campo de vetores estratificado v não nulo definido sobre um subconjunto $A \subset X$ admite um levantamento canônico $\tilde{v}$ como seção não nula do fibrado de Nash, $\tilde{T}$, sobre $\nu^{-1}(A)$.*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \xrightarrow{\nu_*} & TM|_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\nu} & M \end{array}$$

Demonstração:

Dado $\tilde{x} \in \tilde{X}$, denotemos por $x = \nu(\tilde{x})$

1. Se $x \in X_{reg}$, então $v(x) \in T_x(X_{reg}) = \tilde{x}$ com $\tilde{x} = \nu^{-1}(x)$. Então $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, T_x(X_{reg}), v(x))$.
2. Se $x \in V_i$, então $v(x) \in T_x(V_i)$. Temos que cada $x \in \nu^{-1}(x)$ está no fecho da imagem do s , ver Definição 1.9. Então existe uma sequência $(\tilde{x}_n)$ de pontos de $\tilde{X}_{reg}$ tal que $\tilde{x} = \lim \tilde{x}_n$, $\nu(\tilde{x}_n) = x_n \in X_{reg}$ e $\tilde{x}_n = T_{x_n}(X_{reg})$. Então temos que $\lim x_n = x$ e $\lim T_{x_n}(X_{reg}) = \tilde{x}$. Como $\{V_i\}$ é uma estratificação de Whitney, temos pela condição a) da Definição 1.7 que $T_x(V_i) \subset \tilde{x}$. E então $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, \tilde{x}, v(x))$ está bem definido.

■

A definição de obstrução de Euler foi dada por R. MacPherson [29]. Aqui damos uma definição equivalente dada por J.-P. Brasselet e M.-H. Schwartz.

Definição 6.13. [4] *Seja v um campo de vetores radial sobre $X \cap \partial B_\epsilon$ e $\tilde{v}$ o levantamento de v sobre o conjunto $\nu^{-1}(X \cap \partial B_\epsilon)$. O campo $\tilde{v}$ define um cociclo de obstrução $Obs(\tilde{v})$, que mede a obstrução para estender $\tilde{v}$ como seção não-nula de $\tilde{T}$ sobre $\nu^{-1}(X \cap B_\epsilon)$:*

$$Obs(\tilde{v}) \in Z^{2N}(\nu^{-1}(X \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon))$$

A obstrução de Euler local, denotada por $Eu_X(0)$ é a avaliação do cociclo $Obs(\tilde{v})$ sobre a classe fundamental $[\nu^{-1}(X \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)]$, quer dizer:

$$Eu_0(X) = \langle Obs(\tilde{v}), [\nu^{-1}(X \cap B_\epsilon), \nu^{-1}(V \cap \partial B_\epsilon)] \rangle$$

Observação 6.14. *As seguintes propriedades da obstrução de Euler se verificam:*

- $Eu_x(X)$ é constante sobre os estratos de uma estratificação de Whitney de X .
- $Eu_x(X) = 1$, se $x \in X_{reg}$.
- Assuma que X é localmente mergulhado em $\mathbb{C}^N$ e W uma variedade suave em $\mathbb{C}^N$ que intercepta a estratificação de Whitney de X transversalmente. Então $Eu_x(X \cap W) = Eu_x(X)$ para todo ponto $x \in X \cap W$.
- $Eu_{(x,y)}(X \times Y) = Eu_x(X) \times Eu_y(Y)$ para $x \in X$ e $y \in Y$.

O teorema seguinte é a fórmula de tipo Lefschetz para a obstrução de Euler, dada em [3, Teorema 3.1]. Este resultado é muito importante para o cálculo da obstrução de Euler.

Teorema 6.15. [3] *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico complexo equidimensional em $\mathbb{C}^N$. Seja $V_i, i = 1, \dots, l$ estratos de uma estratificação de Whitney de um representante pequeno X de $(X, 0)$. Então existe um subconjunto aberto Zariski Ω no espaço de formas lineares complexas sobre $\mathbb{C}^N$, tal que para cada $l \in \Omega$, existe ϵ_0 , tal que para cada $\epsilon, \epsilon_0 > \epsilon > 0$ e $t_0 \neq 0$ suficientemente pequeno tal que a seguinte fórmula para a obstrução de Euler de $(X, 0)$ se verifica.*

$$Eu_0(X) = \sum_{i=1}^l \chi(V_i \cap B_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)) Eu_{V_i}(X),$$

onde χ denota a característica de Euler-Poincaré e $Eu_{V_i}(X)$ é a obstrução de Euler de X em qualquer ponto de $V_i, i = 1, \dots, l$.

Para o cálculo da obstrução de Euler de variedades determinantis, a seguinte fórmula dada em [23] é bastante útil. Para variedades determinantis $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ fora da ori-

gem, uma seção normal ao estrato $V_i = X_i \setminus X_{i-1}$ (onde $X_i = F^{-1}(M_{m,n}^i)$) é isomorfo a $(M_{m-i+1, n-i+1}^{t-i+1}, 0)$.

Teorema 6.16. [23] *Seja $l : M_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma linear genérica, e seja $L_{m,n}^t = M_{m,n}^t \cap l^{-1}(1)$. Então, para $t \leq m \leq n$, se tem:*

$$\bar{\chi}(L_{m,n}^t) = (-1)^t \binom{m-1}{t-1},$$

onde $\bar{\chi}(L_{m,n}^t) = \chi(L_{m,n}^t) - 1$.

6.3 Número de Milnor Singular de Seções de Interseções Completas

Definição 6.17. [12] *Sejam $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ uma função analítica e $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de conjunto analítico. Dizemos que F é geometricamente transversal a $(V, 0)$ fora da origem se existe, $U = B_\epsilon(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^N$ tal que F é transversal a todos os estratos de V , $\forall x \in U$.*

Definição 6.18. [12] *Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de uma conjunto analítico. Sejam $\eta_1, \dots, \eta_k$ o conjunto de geradores para o $\text{Derlog}(V)$. Uma função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ é algebricamente transversal a $(V, 0)$ em $x_0 \in \mathbb{C}^N$ se*

$$d_{x_0}F(T_{x_0}\mathbb{C}^N) + \langle \text{Derlog}(V) \rangle_{F(x_0)} = T_{F(x_0)}\mathbb{C}^p,$$

onde para $y \in \mathbb{C}^p$, $\langle \text{Derlog}(V) \rangle_y = \mathbb{C}\{\eta_1(y), \dots, \eta_k(y)\} \subset T_y\mathbb{C}^p$. Se existe uma vizinhança $U = B_\epsilon(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^N$ tal que F é algebricamente transversal a $(V, 0)$ em $x \in U$, então dizemos que F é algebricamente transversal a $(V, 0)$ fora da origem.

Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe holomorfo e seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ uma interseção completa de dimensão k . Seja $F' : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um desdobramento versal de F definido sobre uma vizinhança $U \times T \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}$. Denotemos por $F_t(x) = F'(x, t)$.

Definição 6.19. [12] *Sejam F e V como acima, assuma que F é geometricamente transversal a V fora da origem. Então chamamos F' uma estabilização geométrica com relação a V se para todo $t \in T \setminus \{0\}$, F_t é geometricamente transversal a V sobre U .*

Definição 6.20. *Sejam F e V como acima, assuma que F é algebricamente transversal a V fora da origem. Então F' é uma estabilização algébrica de F com relação a V se para todo $t \in T \setminus \{0\}$, F_t é algebricamente transversal a V sobre U .*

Proposição 6.21. [12] *Sejam $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe analítico e $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ um conjunto analítico*

1. *F tem $\mathcal{K}_{V,e}$ -codimensão finita se e somente se F é algebricamente transversal a V fora da origem.*
2. *Seja $H : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}$ um germe analítico tal que $V = H^{-1}(0)$. Então F tem $\mathcal{K}_{H,e}$ -codimensão finita se e somente se F é algebricamente transversal a $V = H^{-1}(0)$ fora da origem.*

Teorema 6.22. [10, 11, 12] *Seja $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe holomorfo e seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ uma interseção completa de dimensão k . Suponha que F é geometricamente transversal a V fora da origem. Seja $F' : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ uma estabilização geométrica de F com relação a V e seja $F_t = F'(\cdot, t)$. Então existem $\epsilon > 0$ e $0 < \delta \ll \epsilon$ tais que se $0 < |t| < \delta$, a fibra $F_t^{-1}(V) \cap B_\epsilon(0)$ tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão real $N - p + k$, e o número de esferas é independente da escolha da estabilização de t e ϵ .*

Definição 6.23. [12] *O conjunto $F_t^{-1}(V) \cap B_\epsilon$ é chamado fibra de Milnor singular de F com relação a V (ou a $X = F^{-1}(V)$). O número de esferas é chamado número de Milnor singular de X e é denotado por $\mu_V(F)$ ou $\mu(X)$.*

Definição 6.24. *Seja $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ uma hipersuperfície. Dizemos que V é um divisor livre se $\text{Derlog}(V)$ é um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p, 0}$ -módulo livre de posto p .*

Um divisor livre V é chamado holonômico se para cada $z \in V$ os geradores do $\text{Derlog}(V)$ avaliados em z geram o espaço tangente do estrato correspondente da estratificação de Whitney de V que contém z . Se H é a equação que define V e $\text{Derlog}(H)$ satisfaz a condição acima, dizemos que V é H -holonômico.

Teorema 6.25. [12, Teorema 3.1] *Se $V \subset \mathbb{C}^p$ é um divisor livre, H holonômico e $F : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é transversal a V fora da origem, então*

$$\mu(X) = \mathcal{K}_{H,e} - \text{codim}(F),$$

onde $\mathcal{K}_{H,e}$ é a $\mathcal{K}_{H,e}$ codimensão de F .

Definição 6.26. [12] *Uma hipersuperfície singular $(W, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ admite um completamento livre se existe um divisor livre $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ talque $V \cup W$ é outra vez um divisor livre.*

6.4 A característica de Euler Evanescete de Variedades Determinantais

No caso em que V não é uma interseção completa, os autores em [12] definiram a característica de Euler evanescente singular como segue.

Definição 6.27. [12] *Seja $V \subset \mathbb{C}^p$ uma variedade analítica complexa não necessariamente uma interseção completa e seja $X = F^{-1}(V)$. Suponha que $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ é transversal aos estratos de V fora da origem, e considere F' uma estabilização de F . Então a característica de Euler evanescente singular de X é dada por:*

$$\tilde{\chi}(X) = \tilde{\chi}(F_t^{-1}(V)) = \chi(F_t^{-1}(V)) - 1, \text{ em que } F_t = F'(\cdot, t), t \neq 0 \text{ pequeno.}$$

Observação 6.28. [12] *Se V é uma interseção completa de codimensão igual a k e $X = F^{-1}(V)$ então:*

$$\tilde{\chi}(X) = (-1)^{N-k} \mu(X).$$

Lema 6.29. [12] *Suponha que $F : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^p$ é transversal a V , W e $V \cap W$ fora da origem $0 \in \mathbb{C}^N$, então:*

$$\tilde{\chi}_{W \cup V}(F) = \tilde{\chi}_W(F) + \tilde{\chi}_V(F) - \tilde{\chi}_{W \cap V}(F) \quad (6.1)$$

$\mathcal{E}$	Equação para $\mathcal{E}$	$\mathcal{D}$	Equação para $\mathcal{D}$
$\mathcal{E}_n$	$\prod_{k=1}^n \det(A^{(k)}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \det(\hat{A}^{(k)})$	$\mathcal{D}_n$	$\det(\hat{A}^{n-1}) \cdot \det(A)$
$\mathcal{E}_{n-1,n}$	$\prod_{k=1}^{n-1} \det(A^{(k)}) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \det(\hat{A}^{(k)})$	$\mathcal{D}_{n-1,n}$	$\det(\hat{A}^{n-1}) \cdot \det(A^{n-1})$

Tabela 6.1: Tabela das equações definindo os divisores livres, $\mathcal{E}$ e as variedades determinantais $\mathcal{D}$. Se $A = (A_{ij})$ então $\hat{A}$ denota a matriz obtida eliminando a primeira coluna da matriz A e $A^{(k)}$ denota a submatriz $k \times k$ superior a esquerda de A .

Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ definidos na Tabela 6.1, no trabalho [12] se mostra que $\mathcal{E}$ é um divisor livre H holonômico e que $\mathcal{D}$ tem complemento livre dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \pi^* \mathcal{E}_{n-1,n} \cup \mathcal{D}_n & \text{e} \\ \mathcal{E}_{n-1,n} &= \pi'^* \mathcal{E}_{n-1} \cup \mathcal{D}_{n-1,n} \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde π e π' são as projeções dadas por $\pi : M_n \rightarrow M_{n-1,n}$ e $\pi' : M_{n-1,n} \rightarrow M_{n-1}$.

As matrizes 2×2 , $M_{2,2}$ podem ser representadas pelas coordenadas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, o divisor $\mathcal{E}_2$ é definido por $ab(ad - bc) = 0$ e $V(D_2) = V(ac - bd) = V(ab) \cup V(ad - bc)$. Então

Teorema 6.30. [12, Teorema 7.1] *Sobre o espaço de germes transversais fora da origem as variedades associadas a $\mathcal{E}_2$, então*

$$\mu_V(\mathcal{D}_2) = \mu_V(\mathcal{E}_2) - ((\mu_{V(a)} + \mu_{V(a,cb)}) + (\mu_{V(b)} + \mu_{V(b,ad)})), \quad (6.3)$$

onde $\mu_{V(\mathcal{E}_2)} = \mathcal{K}_{\tilde{G}_2} - \text{codim}$ onde $\tilde{G}_2$ é o grupo de $B_2 \times C_2$ preservando a equação $ab(ad - bc) = 0$.

Corolário 6.31. *Com as hipóteses do teorema acima, a fórmula (6.3) pode ser reformulada por*

$$\mu_V(\mathcal{D}_2) = \mu_V(\mathcal{E}_2) + \mu_V(bc) - \mu_V(abc) + \mu_V(ad) - \mu_V(abd). \quad (6.4)$$

Todos os termos na parte direita são números de Milnor singular de divisores livres holonômicos, que podem ser calculados usando o Teorema 6.25.

Teorema 6.32. [12, Teorema 7.4] *Para o espaço de germes transversais às variedades associadas a $\mathcal{E}_{2,3}$ fora da origem,*

$$\mu_{V_{1,3}} = \mu_V(\mathcal{E}_{2,3}) - (\mu_{V(a,bde(df-ce))} + \mu_{V(a)}) + (\mu_{V(a,e,bdf)} + \mu_{V(a,e)}) - (\mu_{V(b,ace)} + \mu_{V(b)}). \quad (6.5)$$

Exemplo 6.33. *Considere $F : \mathbb{C}^5 \rightarrow M_{2,2}$ definido por*

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x^3 + y^3 + u^2 + v^2 + w^2 \end{pmatrix}.$$

Então $X = F^{-1}(M_{2,2}^2) = V(u(x^3 + y^3 + u^2 + v^2 + w^2) - vw)$ define uma hipersuperfície que não tem singularidade isolada em 0.

Usaremos a fórmula (6.4) para calcular $\mu_V(\mathcal{D}_2)(F)$. Pela tabela 6.4, temos que $\mathcal{D}_2 = ad - bc$ e $\mathcal{E}_2 = ab(ad - bc)$.

Como (u, v, w) e (v, w) são submersões, então $\mu_{V(u,v,w)}(F) = \mu_{V(v,w)}(F) = 0$.

$\mu_{V(ab(ad-bc))} = \mathcal{K}_{ab(ad-bc),e} - \text{codim}(F) = 16$, o $\text{Derlog}(ab(ad-bc))$ é gerado pelos vetores:

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ -w & -2(x^3 + y^3 + u^2 + v^2 + w^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v \\ -2w & -(x^3 + y^3 + u^2 + v^2 + w^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u & v \end{pmatrix}.$$

Uma base para o espaço tangente estendido do grupo $\mathcal{K}_H$, $TK_{H,e} \cdot F$, é dada pelos vetores

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$Derlog(ad)$ e $Derlog(abd)$ são gerados por $\{a\frac{\partial}{\partial a}-d\frac{\partial}{\partial d}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c}\}$ e $\{a\frac{\partial}{\partial a}-d\frac{\partial}{\partial d}, b\frac{\partial}{\partial b}-d\frac{\partial}{\partial d}, \frac{\partial}{\partial c}\}$, assim $\mathcal{K}_{ad,e} - \text{codim}(F) = 8$ e $\mathcal{K}_{abd,e} - \text{codim}(F) = 16$.

Por Corolário 6.31, temos que $\mu_{V(ad-bc)}(F) = 16 + 8 - 16 = 8$.

Teorema 6.34. [12, Teorema 8.1] Para um germe F transversal aos estratos de $M_{2,3}^2$, fora da origem, seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$ a EIDS correspondente. Então a característica de Euler evanescente singular de X é calculada por

$$\tilde{\chi}(X) = (-1)^{N-1} \left(\mu_{V_{123}}(F) - \sum \mu_{V_{ij}}(F) + \sum_{i=1}^3 \mu_{V_i}(F) \right),$$

em que a primeira soma é sobre $\{i, j\} = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ e $V_{123} = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ é holonômico e pode ser calculado usando o Teorema 6.25.

Se $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$ é um germe genérico de coposto igual a 1, Então

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^5 x_i w_i + g(y) w_0,$$

onde $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ é uma base para $W = dF(0)(\mathbb{C}^N)$, $w_0 \notin W$ e $g(y)$ define uma singularidade isolada sobre $\mathbb{C}^{N-5}$.

Corolário 6.35. [12] Se F é um germe genérico de coposto 1, $N \geq 6$,

$$\tilde{\chi}(X) = (-1)^{N-1} \mu_{V_{123}}(F) = (-1)^{N-1} \mu(g)$$

Se g é quase-homogêneo, $\mu(g)$ é igual a $\tau(X)$.

6.5 Obstrução de Euler de Variedades Determinantais

Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$. Se $N \leq (m-t+3)(n-t+3)$ então $\Sigma X = F^{-1}(M_{m,n}^{t-1})$ é uma variedade com singularidade isolada. Logo a variedade admite 3 estratos $\{V_0, V_1, V_2\}$, $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \Sigma X \setminus \{0\}$, $V_2 = X_{reg}$. Esta é a classe de EIDS que consideramos nesta seção.

Para o cálculo da obstrução de Euler usamos a fórmula do Teorema 6.15, então temos

$$Eu_0(X) = \chi(V_0 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) Eu_{V_0}(X) + \chi(V_1 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) Eu_{V_1}(X) + \chi(V_2 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) Eu_{V_2}(X).$$

Como $V_0 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon = \emptyset$ então $\chi(V_0 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) = 0$. Temos também $Eu_{V_2}(X) = 1$, então

$$Eu_0(X) = \chi(V_1 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon)(Eu_{V_1}(X) - 1) + \chi(X \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) \quad (6.6)$$

Note que $\chi(V_1 \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon) = \chi(\Sigma X \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon)$ e por outro lado dado $a \in V_1$ existe um aberto U_a contendo a tal que $U_a \cong B_\delta \times c(L_{V_1})$, onde a dimensão de B_δ é $\dim V_1 = N - (m - t + 2)(n - t + 2)$ e $c(L_{V_1})$ é o cone do link complexo de V_1 em X , $L_{V_1} = X \cap \mathcal{N} \cap p^{-1}(s)$, com $\mathcal{N}$ transversal a V_1 em a , $\text{codim } \mathcal{N} = \dim V_1$, então $Eu_{V_1}(X) = Eu_a(B_\delta) \times Eu_a(c(L_{V_1})) = Eu_a(c(L_{V_1})) = \chi(L_{V_1}) = \chi(X \cap \mathcal{N} \cap p^{-1}(s))$.

$X \cap \mathcal{N}$ é a suavização essencial de uma variedade determinantal de tipo (m, n, t) em $\mathbb{C}^r$, onde $r = \text{codim } V_1 = (m - t + 2)(n - t + 2)$, por tanto com singularidade isolada.

Substituindo na equação (6.6), temos

$$Eu_0(X) = \chi(\Sigma X \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon)(\chi(L_{V_1}) - 1) + \chi(X \cap l^{-1}(r) \cap B_\epsilon). \quad (6.7)$$

Esta fórmula pode ser expressa em termos da característica de Euler evanescente singular da Definição 6.27.

$$Eu_0(X) = (\tilde{\chi}(\Sigma X \cap l^{-1}(0) \cap B_\epsilon) + 1)(\chi(L_{V_1}) - 1) + \tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0) \cap B_\epsilon) + 1. \quad (6.8)$$

Proposição 6.36. *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$, se $N \leq (n - t + 3)(m - t + 3)$ e ΣX é uma ICIS, então:*

$$Eu_0(X) = ((-1)^{\dim(\Sigma X \cap l^{-1}(0))} \mu(\Sigma X \cap l^{-1}(0)) + 1)(\chi(L_{V_1}) - 1) + \tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0) \cap B_\epsilon) + 1, \quad (6.9)$$

onde $l : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica, L_{V_1} é o link complexo do estrato V_1 em X e B_ϵ é a bola de raio ϵ em $\mathbb{C}^N$.

Demonstração:

Se ΣX é uma interseção completa, então $\chi(\Sigma X \cap l^{-1}(r)) = 1 + (-1)^{\dim(\Sigma X \cap l^{-1}(0))} \mu(\Sigma X \cap l^{-1}(0))$. Substituindo esta fórmula em (6.8) obtemos o resultado. ■

O seguinte resultado mostra a existência de variedades determinantis cujo conjunto singular é uma ICIS.

Proposição 6.37. *Seja $X = F^{-1}(M_{2,n}^2) \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,n}$, $n \geq 2$ então o conjunto singular de X , $\Sigma X \subset \mathbb{C}^N$ é uma ICIS.*

Demonstração: Como $X = F^{-1}(M_{2,n}^2)$ é uma EIDS então $\Sigma X = F^{-1}(\Sigma M_{2,n}^2) = F^{-1}(M_{2,n}^1)$, como $M_{2,n}^1 = \{0\}$, então $\Sigma X = F^{-1}(0)$ e $\text{codim } \Sigma X = (2 - 2 + 2)(n - 2 + 2) = 2 \cdot n$, portanto ΣX é uma interseção completa.

Seja $x \in \Sigma X$, $x \neq 0$ então $\text{rank } F(x) = 0$, pela definição de EIDS, temos que F é transversal ao estrato corresponde, neste caso F é transversal à $\{0\}$ fora da origem. Então dF é uma submersão em $x \neq 0$, assim ΣX é uma ICIS. ■

6.5.1 Obstrução de Euler de IDS, caso $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$

Nesta seção trataremos as variedades IDS, definidas pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$, tal que $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$. Estas variedades admitem suavização e a obstrução de Euler foi estudada no trabalho [31], usando a característica de Euler evanescente e a multiplicidade da variedade.

Teorema 6.38. [31] *Seja $X = F^{-1}(M_{m,n}^t)$ definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ com $N < (n - t + 2)(m - t + 2)$, então*

$$Eu_0(X) = 1 + (-1)^d \nu(X, 0) + (-1)^{d+1} m_d(X, 0)$$

Demonstração: Pelo teorema 6.15 e pela definição da característica de Euler evanescente temos que $Eu_0(X) = \chi(X \cap p^{-1}(t)) = (-1)^d \nu(X \cap p^{-1}(0)) + 1$. Usando a fórmula de tipo Lê-Greuel (3.3), temos que $\nu(X) + \nu(X \cap p^{-1}(0)) = m_d(X)$. Então

$$Eu_0(X) + (-1)^d m_d(X) = 1 + (-1)^d \nu(X).$$

Então obtemos o resultado. ■

Exemplo 6.39. *Seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2) \subset \mathbb{C}^4$ uma variedade determinantal com singularidade isolada, definida por F .*

$$F : \quad \mathbb{C}^4 \quad \rightarrow \quad M_{2,3} \\ (x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$$

Por [31] temos que $m_2(X) = 3$, $\nu(X) = 1$, logo $Eu_0(X) = -1$.

6.6 Obstrução de Euler para as EIDS, definidas por $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$

O próximo resultado é para o caso $N = 6$, neste caso a variedade determinantal não admite suavização, a fórmula do Teorema 6.38, dada acima não vale.

Teorema 6.40. *Seja $X = F^{-1}(M_{2,3}^2)$ definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$ com $N = 6$, então*

$$Eu_0(X) = b_2(X \cap l^{-1}(r)) - b_3(X \cap l^{-1}(r)) + 1.$$

Demonstração: Segue directamente pois $\chi(X \cap l^{-1}(r)) - 1 = \tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0)) = b_2(X \cap l^{-1}(r)) - b_3(X \cap l^{-1}(r))$. ■

Nas tabelas 6.2, 6.3, calculamos a obstrução de Euler de variedades determinantis 4-dimensionais em $\mathbb{C}^6$, classificadas em [18]. Usamos a Tabela 5 do trabalho [12] para obter os resultados.

6.7 Obstrução de Euler de EIDS, caso $N \geq 7$

Teorema 6.41. *Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ uma EIDS, definida pela função $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{2,3}$, com $N \geq 7$. Então*

$$Eu_0(X) = (-1)^{N-7} \mu(\Sigma X \cap l^{-1}(0)) + \tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0)) + 2. \quad (6.10)$$

Demonstração: Como X tem três estratos, $\{V_0, V_1, V_2\}$, $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \Sigma \setminus \{0\}$, $V_2 = X_{reg}$ e $V_1 = F^{-1}(M_{2,3}^1) \setminus F^{-1}(M_{2,3}^0)$. Temos que $L_{V_1} = X \cap \mathcal{N} \cap p^{-1}(s)$, a variedade $X \cap \mathcal{N} \cong M_{2,3}^2$. Assim $\chi(L_{V_1}) - 1 = 1$ pelo Teorema 6.16. Substituindo este valor na Proposição 6.36 temos o resultado. ■

Corolário 6.42. *Com as hipóteses do Teorema 6.41, se F é de coposto igual a 1, então*

$$Eu_0(X) = 2.$$

Demonstração: Como F tem coposto 1, então

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^5 x_i w_i + g(y) w_0,$$

onde $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ é uma base para $W = d_0 F(\mathbb{C}^N)$, $w_0 \notin W$ e $g(y_1, y_2, \dots, y_{N-5})$ define uma singularidade isolada sobre $\mathbb{C}^{N-5}$. Suponha sem perda de generalidade que $l(x, y) = y_1$ e considere $\tilde{g}(y_2, \dots, y_{N-5}) = g(0, y_2, \dots, y_{N-5})$

Usando a fórmula do Corolário 6.35 para $X \cap l^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{N-1}$, temos que $\tilde{\chi}(X \cap l^{-1}(0)) = (-1)^{N-2} \mu(\tilde{g})$.

Também temos que $\Sigma X \cap l^{-1}(0) = \{(0, \dots, 0, y_2, \dots, y_{N-5}) | \tilde{g}(y_2, \dots, y_{N-5}) = 0\}$ e portanto $\mu(\Sigma X \cap l^{-1}(0)) = \mu(\tilde{g})$. Substituindo na fórmula (6.10), temos que $Eu_0(X) = 2$. ■

Veremos dois exemplos de cálculo da obstrução de Euler usando Corolário 6.42.

Tipo	Apresentação da Matriz	Condições	τ	$Eu_0(X)$
Ω_1	$\begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & u \end{pmatrix}$		0	2
Ω_k	$\begin{pmatrix} x & y & v \\ z & w & x + u^k \end{pmatrix}$	$k \geq 2$	$k - 1$	2
$A_k^\dagger$	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^{k+1} + y^2 \end{pmatrix}$	$k \geq 1$	$k - 2$	1
$D_k^\dagger$	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + xy^2 + x^{k-1} \end{pmatrix}$	$k \geq 4$	$k + 2$	-1
$E_6^\dagger$	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + y^4 \end{pmatrix}$		8	0
$E_7^\dagger$	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + xy^3 \end{pmatrix}$		9	0
$E_8^\dagger$	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & u^2 + x^3 + y^5 \end{pmatrix}$		10	0
	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & ux + y^k + u^l \end{pmatrix}$	$k \geq 2, l \geq 3$	$k + l - 1$	$3 - k$
	$\begin{pmatrix} x & y & z \\ w & v & x^2 + y^2 + u^3 \end{pmatrix}$		6	1
$F_{q,r}^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + vu & y + v^q + u^r \end{pmatrix}$	$q, r \geq 2$	$q + r$	2
$G_5^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 & y + u^3 \end{pmatrix}$		7	2
$G_7^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 & y + u^4 \end{pmatrix}$		10	2
$H_{q+3}^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 + u^q & y + vu^2 \end{pmatrix}$	$q \geq 3$	$q + 5$	2

Tabela 6.2: Ostrução de Euler, $X \subset \mathbb{C}^6$

Tipo	Apresentação da Matriz	Condições	τ	$Eu_0(X)$
$I_{2q-1}^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & v \\ z & w + v^2 + u^3 & y + u^q \end{pmatrix}$	$q \geq 4$	$2q + 1$	2
$I_{2r+2}^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 + u^3 & y + vu^r \end{pmatrix}$	$r \geq 3$	$2r + 4$	2
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^2 & u^2 + yv \end{pmatrix}$		6	1
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + uv & u^2 + yv + v^k \end{pmatrix}$	$k \geq 3$	$k + 4$	1
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^k & u^2 + yv + v^3 \end{pmatrix}$	$k \geq 3$	$2k + 2$	1
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + uv^k & u^2 + yv + v^3 \end{pmatrix}$	$k \geq 2$	$2k + 5$	1
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^3 & u^2 + yv \end{pmatrix}$		9	1
	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + v^k & u^2 + y^2 + v^3 \end{pmatrix}$	$k \geq 3$	$2k + 3$	1
$H_{q+3}^\dagger$	$\begin{pmatrix} w & y & x \\ z & w + uv^k & u^2 + y^2 + v^3 \end{pmatrix}$	$k \geq 2$	$2k + 6$	1

Tabela 6.3: Obstrução de Euler, $X \subset \mathbb{C}^6$.

Exemplo 6.43. Seja X definido pela função F .

$$F : \mathbb{C}^8 \rightarrow M_{2,3}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_1 + y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$. A variedade X é uma EIDS de dimensão 6 em $\mathbb{C}^8$. O conjunto singular é de dimensão 2 e é dado pelo conjunto

$$\Sigma X = \{(0, 0, 0, 0, 0, y_1, y_2, y_3) | y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 = 0\}.$$

Esta variedade tem três estratos $V_0 = 0$, $V_1 = \Sigma X - \{0\}$ e $V_2 = X_{reg}$.

Como o coposto de F é 1. Então pelo Corolário 6.42, temos:

$$Eu_0(X) = 2.$$

Exemplo 6.44. Seja X definido pela função F .

$$F : \mathbb{C}^7 \rightarrow M_{2,3}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_1 + y_1^2 - y_2^2 \end{pmatrix}$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $y = (y_1, y_2)$. A variedade X é uma EIDS de dimensão 5 em $\mathbb{C}^7$. O conjunto singular é de dimensão 2 e é dado pelo conjunto

$$\Sigma X = \{(0, 0, 0, 0, 0, y_1, y_2) | y_1^2 - y_2^2 = 0\}$$

Esta variedade tem três estratos $V_0 = 0$, $V_1 = \Sigma X - \{0\}$ e $V_2 = X_{reg}$.

Como o coposto de F é 1. Então usando o Corolário 6.42, temos:

$$Eu_0(X) = 2.$$

Referências Bibliográficas

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [2] J.-P. Brasselet. Milnor classes via polar varieties. In *Singularities in algebraic and analytic geometry (San Antonio, TX, 1999)*, volume 266 of *Contemp. Math.*, pages 181–187. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [3] J.-P. Brasselet, D. T. Lê, and J. Seade. Euler obstruction and indices of vector fields. *Topology*, 39(6):1193–1208, 2000.
- [4] J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz. Sur les classes de Chern d’un ensemble analytique complexe. In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 82 of *Astérisque*, pages 93–147. Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [5] J.-P. Brasselet, J. Seade, and T. Suwa. *Vector fields on singular varieties*, volume 1987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [6] J. Briançon, A. Galligo, et M. Granger. Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (1):69, 1980/81.
- [7] R.-O. Buchweitz and G.-M. Greuel. The Milnor number and deformations of complex curve singularities. *Invent. Math.*, 58(3):241–281, 1980.
- [8] E. M. Chirka. *Complex analytic sets*, volume 46 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen.
- [9] J. Damon. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of A and K . *Mem. Amer. Math. Soc.*, 50(306):x+88, 1984.

- [10] J. Damon. Higher multiplicities and almost free divisors and complete intersections. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 123(589):x+113, 1996.
- [11] J. Damon and D. Mond. A -codimension and the vanishing topology of discriminants. *Invent. Math.*, 106(2):217–242, 1991.
- [12] J. Damon and B. Pike. Solvable groups, free divisors and nonisolated matrix singularities II: Vanishing topology. *Geom. Topol.*, 18(2):911–962, 2014.
- [13] L. R. Dias. *Regularity at infinity and global fibrations of real algebraic maps*. PhD thesis, ICMC-USP, 2013.
- [14] W. Ebeling and S. M. Gusein-Zade. Radial index and Euler obstruction of a 1-form on a singular variety. *Geom. Dedicata*, 113:231–241, 2005.
- [15] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a view towards Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1995.
- [16] A. Frühbis-Krüger. Classification of simple space curve singularities. *Comm. Algebra*, 27(8):3993–4013, 1999.
- [17] A. Frühbis-Krüger. *Moduli spaces for space curve singularities*. PhD thesis, Universität Kaiserslautern, 2000.
- [18] A. Frühbis-Krüger and A. Neumer. Simple Cohen-Macaulay codimension 2 singularities. *Comm. Algebra*, 38(2):454–495, 2010.
- [19] W. Fulton. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Mathematics Lecture Notes Series.
- [20] T. Gaffney. Polar multiplicities and equisingularity of map germs. *Topology*, 32(1):185–223, 1993.
- [21] T. Gaffney. Aureoles and integral closure of modules. In *Stratifications, singularities and differential equations, II (Marseille, 1990; Honolulu, HI, 1990)*, volume 55 of *Travaux en Cours*, pages 55–62. Hermann, Paris, 1997.
- [22] G.-M. Greuel and J. Steenbrink. On the topology of smoothable singularities. In *Singularities, Part I (Arcata, Calif., 1981)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 535–545. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.

- [23] S. M. Guseĭn-Zade and W. Èbeling. On the indices of 1-forms on determinantal singularities. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 267(Osobennosti i Prilozheniya):119–131, 2009.
- [24] R. Hartshorne. Book Review: Algebraic geometry I: Complex projective varieties. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1(3):513–515, 1979.
- [25] J.-P. G. Henry et D. T. Lê. Limites d’espaces tangents. In *Fonctions de plusieurs variables complexes, II (Sém. François Norguet, 1974-1975)*, pages 251–265. Lecture Notes in Math., Vol. 482. Springer, Berlin, 1975.
- [26] D. T. Lê. Generic sections of singularities. In *Singularity theory*, pages 677–682. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [27] D. T. Lê et B. Teissier. Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières. *Ann. of Math. (2)*, 114(3):457–491, 1981.
- [28] D. T. Lê et B. Teissier. Limites d’espaces tangents en géométrie analytique. *Comment. Math. Helv.*, 63(4):540–578, 1988.
- [29] R. D. MacPherson. Chern classes for singular algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 100:423–432, 1974.
- [30] W. L. Marar, J. A. Montaldi, and M. A. S. Ruas. Multiplicities of zero-schemes in quasihomogeneous corank-1 singularities $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. In *Singularity theory (Liverpool, 1996)*, volume 263 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 353–367. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [31] J. Nuño Ballesteros, B. Oréface-Okamoto, and J. Tomazella. The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity. *Israel Journal of Mathematics*, 197(1):475–495, 2013.
- [32] J. J. Nuño-Ballesteros and J. N. Tomazella. The Milnor number of a function on a space curve germ. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(1):129–138, 2008.
- [33] B. Oréface. *O número de Milnor de uma singularidade isolada*. PhD thesis, UFSCAR, 2011.
- [34] M. S. Pereira. *Variedades determinantis e singularidades de matrizes*. PhD thesis, ICMC, 2010.
- [35] M. S. Pereira and M. A. S. Ruas. Codimension two determinantal varieties with isolated singularities. *Math. Scandinavica*, to appear.

-
- [36] B. Pike. *Singular Milnor numbers of non-isolated singularities*. PhD thesis, University of North Carolina, 2010.
- [37] D. Rees. A-transforms of local rings and a theorem on multiplicities of ideals. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 57:8–17, 1961.
- [38] J. Snoussi. Limites d’espaces tangents à une surface normale. *Comment. Math. Helv.*, 76(1):61–88, 2001.
- [39] B. Teissier. Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney. In *Algebraic geometry (La Rábida, 1981)*, volume 961 of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–491. Springer, Berlin, 1982.
- [40] J. Wahl. Smoothings of normal surface singularities. *Topology*, 20(3):219–246, 1981.