Propriedades da homologia local com respeito a
um par de ideais e limite inverso de homologia
local

Carlos Henrique Tognon

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Carlos Henrique Tognon

Propriedades da homologia local com respeito a um par de ideais e limite inverso de homologia local

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

USP – São Carlos
Novembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

T645p Tognon, Carlos Henrique
 Propriedades da homologia local com respeito a
 um par de ideais e limite inverso de homologia
 local / Carlos Henrique Tognon; orientador Victor
 Hugo Jorge Pérez. -- São Carlos, 2016.
 106 p.

 Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

 1. Cohomologia local. 2. Homologia local. 3.
 Limite inverso. I. Jorge Pérez, Victor Hugo,
 orient. II. Título.

Carlos Henrique Tognon

**Properties of local homology with respect to a pair of
ideals and inverse limit of local homology**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Mathematics.
REVISED VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Victor Hugo Jorge Pérez

**USP – São Carlos
November 2016**

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz Carlos Tognon e Dirce Aparecida Tertuliano Tognon, que sempre me apoiaram em todos os momentos e me incentivaram a sempre dar o meu melhor no estudo. Ao meu irmão, André Luiz Tognon, que acima de tudo é um amigo para mim e um companheiro para toda a vida. Ao meu avô, Santo Tognon, à minha avó Ana Bordonal Tognon, e ao meu outro avô, Anésio Tertuliano, que partiram desta vida, mas me ensinaram os verdadeiros valores dela. E a minha avó viva, Nair Barbim Tertuliano.

Neste momento, é meu dever dedicar uma parcela deste trabalho à todos os professores que fizeram parte de minha formação acadêmica na Universidade Federal de Uberlândia, onde cursei a graduação e o mestrado, em especial a professora Rosana Sueli da Motta Jafelice, pois na graduação e mestrado sempre me lecionou bons cursos fazendo com que eu adquirisse experiência matemática. Neste contexto, também devo citar o professor Cícero Fernandes de Carvalho, o qual foi meu orientador de mestrado, e os professores Márcio José Horta Dantas e Antônio Carlos Nogueira, com os quais realizei trabalhos de iniciação científica, e que por meio destes consegui adquirir maturidade matemática.

Com relação aos professores que trabalhei no doutorado, todos merecem o meu respeito e cada um deles possui uma parcela de contribuição neste trabalho e em minha formação acadêmica; em especial a professora Denise de Mattos, que realmente é uma pessoa fora do comum, o professor Raimundo Nonato Araújo dos Santos, pois me incentivou muito durante uma disciplina do curso e o professor Behrooz Mirzaei.

E também dedico a todos os meus colegas de doutorado, que com certeza me ajudaram a chegar até este momento.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a DEUS, nosso Senhor e Pai, por ter me dado forças e auxílio no decorrer de todo este caminho de estudos.

Em segundo lugar, agradeço a toda minha família por sempre estar ao meu lado.

Ao meu orientador, o professor Victor Hugo Jorge Pérez, pela confiança em meu trabalho e por sempre me estimular e me motivar a estudar.

Ao professor Thiago Henrique de Freitas, pois com ele sempre estive discutindo e conversando muitas coisas sobre a teoria elaborada na tese.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro concedido durante um certo período de estudos no doutorado.

Aos professores que fizeram parte de minha comissão de avaliação da defesa, por terem aceito o convite para comporem a minha banca de defesa da tese de doutorado.

E a todos os demais que fizeram parte deste trabalho, de forma direta ou indireta.

OBRIGADO POR TUDO!!

Resumo

TOGNON, C. H. **Propriedades da homologia local com respeito a um par de ideais e limite inverso de homologia local.** 2016. 106 p. Tese de Doutorado em Matemática, Universidade de São Paulo, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos - SP.

Neste trabalho, introduzimos uma generalização da noção de módulo de homologia local de um módulo com respeito a um ideal, o qual nós chamamos de módulo de homologia local com respeito a um par de ideais. Estudamos suas várias propriedades tais como teoremas de anulamento e de não anulamento, e Artinianidade. Também fazemos sua conexão com a homologia e cohomologia local usual. Introduzimos uma generalização da noção de largura de um ideal sobre um módulo aplicando o conceito de módulo de homologia local com respeito a um par de ideais. Também introduzimos o conceito de um módulo co-Cohen-Macaulay para um par de ideais, o qual é uma generalização do conceito de um módulo co-Cohen-Macaulay. Para finalizar, introduzimos o limite inverso de homologia local, e estudamos algumas de suas propriedades, analisamos a sua estrutura, o anulamento, não anulamento e Artinianidade.

Palavras-chave: Cohomologia local, Homologia local, Limite inverso.

Abstract

TOGNON, C. H. **Properties of local homology with respect to a pair of ideals and inverse limit of local homology.** 2016. 106 p. Doctoral thesis in Mathematics, University of São Paulo, Institute of Sciences Mathematics and Computer (ISMC/USP), São Carlos - SP.

In this work, we introduce a generalization of the notion of local homology module of a module with respect to an ideal, which we call of local homology module with respect to a pair of ideals. We study its various properties such as vanishing and nonvanishing theorems, and Artinianness. We also do its connection with ordinary local homology and cohomology. We introduce a generalization of the notion of width of an ideal on a module applying the concept of local homology module with respect to a pair of ideals. Also we introduce the concept of a co-Cohen-Macaulay module for a pair of ideals, what is a generalization of the concept of a co-Cohen-Macaulay module. To finish, we introduce the inverse limit of local homology, and we study some of its properties, we analyze the their structure, the vanishing, non-vanishing and Artinianness.

Keywords: Local cohomology, Local homology, Inverse limit.

Sumário

Dedicatória	i
Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Introdução	i
1 Conceitos preliminares	2
1.1 Módulos e funtores	2
1.1.1 Funtores exatos	4
1.2 O módulo linearmente compacto	6
1.2.1 Dimensão Noetheriana de um módulo	7
1.2.2 O Lema de Artin-Rees e filtrações	7
1.2.3 Suporte e dimensão de um módulo	7
1.3 Complexo de cadeias e complexo de cocadeias	8
1.3.1 Resoluções e módulos projetivo e injetivo	9
1.3.2 Funtores e complexos	11
1.3.3 Dimensão projetiva	11
1.4 Limites diretos	12
1.5 Limites inversos e completamentos	13
1.5.1 Completamentos	14
1.5.2 Sistema inverso e limite inverso	15
1.6 Alguns resultados importantes	17
1.7 Grau e profundidade de um módulo	18
1.7.1 Módulos Cohen-Macaulay	19
1.7.2 Módulos (I, J) -Cohen-Macaulay	20
1.7.3 Módulos co-Cohen-Macaulay	20

2	Módulo de cohomologia local e de homologia local	22
2.1	O funtor de cohomologia local	22
2.1.1	Alguns resultados sobre cohomologia local usual	25
2.1.2	Cohomologia local com suporte em um par de ideais	25
2.1.3	Alguns resultados e teoremas de anulamento	29
2.2	Homologia local usual	31
2.2.1	A definição de homologia local usual	34
2.2.2	Propriedades e Artinianidade de homologia local usual	35
2.2.3	Anulamento e resultado para a largura de um módulo	37
3	Homologia local generalizada no par de ideais	38
3.1	Definições e algumas propriedades	38
3.2	Resultados de anulamento	44
3.2.1	Homologia local com respeito a um par de ideais	46
3.3	Teoremas de anulamento e co-localização	53
3.3.1	Resultados sobre co-localização	56
4	O conceito de R-módulo (I, J)-co-Cohen-Macaulay	59
4.1	Largura de um par de ideais (I, J) sobre módulos	59
4.1.1	Algumas propriedades do $\text{width}_{I,J}(M)$	61
4.2	Anulamento e não-anulamento	67
4.3	O R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay	71
5	Limite inverso de homologia local	73
5.1	A definição de limite inverso de homologia local	73
5.2	Algumas propriedades e sequências exatas de limite inverso de homologia local	74
5.2.1	Sequências exatas para $\mathfrak{F}_i^{a,I}(M)$, para $i \geq 0$	78
5.3	Alguns resultados de Artinianidade de limite inverso de homologia local	80
5.4	Anulamento e não-anulamento de limite inverso de homologia local	82
A	Propriedades do limite direto e do limite inverso	85
A.1	Existência e unicidade do limite direto	85
A.2	Propriedades do limite inverso	87
B	A envoltória injetiva de um módulo	90
B.1	A unicidade da envoltória injetiva de um módulo	91
B.2	Dualidade Matlis	92
C	A existência das resoluções injetiva e projetiva	93
C.1	Existência das resoluções injetiva e projetiva de um módulo	94

D Os funtores Ext e Tor	96
D.1 Funtor derivado à esquerda covariante	97
D.2 Propriedades básicas do Tor	99
D.3 Funtor derivado à direita covariante	102
D.4 Funtor derivado à direita contravariante	102
Referências Bibliográficas	104

Introdução

Em todo este trabalho, vamos considerar que todos os anéis são comutativos e com elemento identidade não nulo.

A teoria de cohomologia local possui um desenvolvimento há mais de seis décadas após a sua introdução feita por Grothendieck [16]. A teoria de cohomologia local, tem provado ser uma importante ferramenta em álgebra comutativa e geometria algébrica. Sua teoria dual de homologia local, é também estudada por muitos matemáticos. A teoria de homologia local foi iniciada por Matlis [24], em 1974. O estudo desta teoria foi continuado em Simon [39] e [40]. Mais adiante, Greenlees [15] e Alonso Tarrío, Jeremías López e Lipman [3] iniciaram uma nova era no estudo de homologia local.

Para um R -módulo M e um ideal I de R , existem dois funtores importantes em álgebra comutativa que são o funtor de I -torção $\Gamma_I(\bullet)$ e o funtor do completamento I -ádico $\Lambda_I(\bullet)$, definidos por:

$$\Gamma_I(M) = \bigcup_{t \geq 0} (0 :_M I^t), \text{ e } \Lambda_I(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M/I^t M.$$

Devemos observar, que o funtor de I -torção $\Gamma_I(\bullet)$ é exato à esquerda e seu i -ésimo funtor derivado à direita $H_I^i(\bullet)$ é chamado o i -ésimo funtor de cohomologia local com respeito à I . No entanto, o funtor do completamento I -ádico $\Lambda_I(\bullet)$ não é nem exato à esquerda e nem exato à direita, de modo que computar seus funtores derivados à esquerda é, em geral, uma tarefa difícil.

A definição de módulo de cohomologia local, introduzida por Grothendieck em [16], é dada da seguinte forma:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/I^t, M),$$

para $i \geq 0$, o qual é chamado o i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito a I . Observamos que existe uma generalização de $H_I^i(M)$, a qual é definida por:

$$H_I^i(N, M) = \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(N/I^t N, M).$$

A respeito deste R -módulo, existem muitas questões e propriedades similares a cohomologia local usual. Para ver mais detalhes, ver Herzog [19], Nam [30], e outros.

Também, temos a definição do módulo de homologia local de M com respeito a I , dada da seguinte maneira:

$$H_i^I(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M).$$

Esta definição é dual à definição de Grothendieck de módulo de cohomologia local de M com respeito ao ideal I . Recentemente, foi introduzida uma generalização de $H_I^i(M)$, a qual é chamada o i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito a um par de ideais (I, J) , e é denotado por $H_{I,J}^i(M)$. Para M um R -módulo, onde R é um anel Noetheriano, temos, de acordo com Takahashi, Yoshino e Yoshizawa [43, Teorema 3.2], o isomorfismo

$$H_{I,J}^i(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(M),$$

onde $\tilde{W}(I, J) := \{\mathfrak{a} \subseteq R \mid \mathfrak{a} \text{ é ideal de } R \text{ e } I^n \subseteq \mathfrak{a} + J, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$.

Observamos que existe uma generalização de $H_{I,J}^i(M)$, a qual é definida por:

$$H_{I,J}^i(N, M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(N, M).$$

A respeito deste R -módulo, existem muitas questões e propriedades similares a cohomologia local no par de ideais. Para ver mais detalhes, ver Zamani [45].

A definição nova que apresentamos neste trabalho é a do R -módulo $H_i^{I,J}(N, M)$, o qual denominamos homologia local generalizada no par de ideais. A organização desta tese, se faz da seguinte maneira.

Nos Capítulos 1 e 2, colocamos, respectivamente, pré-requisitos da teoria de álgebra comutativa e resultados básicos sobre homologia local e cohomologia local, que serão usados no decorrer do trabalho.

No Capítulo 3, o qual é o principal capítulo da tese, introduzimos o módulo de homologia local generalizado com respeito a um par de ideais (I, J) , o qual é o dual do módulo de cohomologia local generalizado definido por um par de ideais, ou seja, é o dual de $H_{I,J}^i(N, M)$. Estudamos o módulo de homologia local definido por um par de ideais para módulos linearmente compactos. Deve ser mencionado que a classe de módulos linearmente compactos é grande, ela contém classes importantes de módulos. Por exemplo, módulos Artinianos são linearmente compactos. Além disso, obtemos resultados para o funtor de homologia local $\Lambda_{I,J}(\bullet)$ definido por um par de ideais (I, J) e provamos resultados para o módulo de homologia local $H_i^{I,J}(M)$ definido por um par de ideais, quando M é um R -módulo linearmente compacto. Colocamos também resultados sobre o anulamento e artinianidade deste tal R -módulo, e sua relação com a co-localização de um módulo.

No Capítulo 4, introduzimos o conceito de largura de um par de ideais (I, J) sobre um R -módulo M , o qual é denotado por $\text{width}_{I,J}(M)$. Provamos algumas fórmulas e desigualdades para este invariante. Além disso, aplicando a noção de largura de um par de ideais, introduzimos o conceito de um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay sobre um anel Noetheriano. E desta forma, fornecemos algumas condições que caracterizam quando um R -módulo M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay.

No Capítulo 5, introduzimos o limite inverso de homologia local denotado e definido por:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M),$$

para $\mathfrak{a}$ um outro ideal de R . Além disso, estudamos algumas propriedades básicas e principais deste R -módulo, e mostramos que sob certas condições o limite inverso de homologia local é reduzido ao módulo de homologia local com respeito a um ideal. Também, obtemos algumas sequências exatas longas, por exemplo uma sequência de Mayer-Vietoris. Fornecemos algumas condições para que o limite inverso de homologia local torne-se um R -módulo Artiniano. Também, nos apegamos ao estudo do anulamento e não-anulamento deste tal módulo.

Capítulo 1

Conceitos preliminares

O objetivo principal deste capítulo, é introduzir alguns conceitos que usaremos em todo este trabalho.

1.1 Módulos e funtores

Definição 1.1.1 Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ uma sequência de R -módulos e de R -homomorfismos. Dizemos que esta sequência é uma **sequência exata curta**, se f é injetora, g é sobrejetora e $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

Sejam A e B dois R -módulos. Dizemos que A é um **retrato** de B , se existem homomorfismos de R -módulos $s : A \rightarrow B$ e $r : B \rightarrow A$ tal que $r \circ s \equiv \text{Id}_A$. Neste caso, dizemos que s é uma **seção** de r , e r é uma **retração** de s .

Observação 1.1.2 Se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de R -módulos, temos que são equivalentes:

- (1) f tem uma retração $r : B \rightarrow A$.
- (2) g tem uma seção $s : C \rightarrow B$.
- (3) Existe um isomorfismo (de R -módulos) $B \cong A \oplus C$, de tal forma que temos a seguinte sequência exata curta de R -módulos:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\omega_A} A \oplus C \xrightarrow{\pi_B} C \rightarrow 0,$$

onde $\omega_A : a \mapsto (a, 0)$ e $\pi_B : (a, c) \mapsto c$.

Definimos a seguir, quando uma sequência exata curta é uma **cisão**.

Definição 1.1.3 Denominamos de **cisão**, uma sequência exata curta satisfazendo uma das propriedades (e portanto, todas) da Observação 1.1.2. Neste caso, diremos que a sequência exata curta **cinde**.

Denominamos o **espectro primo** de R , ou simplesmente **espectro** de R , o conjunto de todos os ideais primos de R , denotado por $\text{Spec}(R)$. Dado J um ideal de R , definimos a variedade de (ou a variedade cortada pelo ideal) J como o seguinte subconjunto de $\text{Spec}(R)$: $\text{Var}(J) := V(J) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid J \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Agora, para $\mathfrak{P} \subseteq \text{Spec}(R)$ um conjunto de ideais primos, denotamos por $\text{Min}(\mathfrak{P})$ o conjunto de todos os ideais primos minimais de $\mathfrak{P}$ com respeito à inclusão; desta forma, segue que:

$$\text{Min}(\mathfrak{P}) := \{Q \in \mathfrak{P} \mid \forall I \in \mathfrak{P} \text{ temos que } (I \subseteq Q \Rightarrow Q = I)\}.$$

Ao longo deste trabalho, $(R, \mathfrak{m}, k)$ ou simplesmente $(R, \mathfrak{m})$ denota um anel local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual k .

A seguir, apresentamos a definição de uma categoria e funtor.

Definição 1.1.4 Uma **categoria** κ consiste de:

- (1) Uma classe de objetos $\text{Obj}(\kappa)$, denotados por $X, Y, Z, \dots$
- (2) Para cada par ordenado de objetos (X, Y) de κ , um conjunto $\text{Hom}_\kappa(X, Y) = \text{Hom}(X, Y)$, onde $\text{Hom}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y\}$, sendo cada f neste conjunto chamada de flecha ou de morfismo.
- (3) Para cada tripla (X, Y, Z) de objetos de κ , um único morfismo, chamado composição de morfismos:

$$\text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}(X, Z),$$

que toma o par (f, g) e leva em $g \circ f$, onde temos $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ morfismos, satisfazendo os seguintes axiomas:

Axioma 1: (Associatividade) Se $f \in \text{Hom}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ e $h \in \text{Hom}(Z, W)$ então temos que: $h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f$.

Axioma 2: (Existência de Identidades) Para todo $f \in \text{Hom}(X, Y)$ e para todo $g \in \text{Hom}(Z, X)$ existe Id_X tal que $f \circ \text{Id}_X \equiv f$ e $\text{Id}_X \circ g \equiv g$.

Definição 1.1.5 Um **funtor covariante** de uma categoria κ em uma outra categoria τ é uma regra $F : \kappa \longrightarrow \tau$, tal que $X \longmapsto F(X)$ e $(f : X \longrightarrow Y) \longmapsto (F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y))$, ou seja, uma regra que associa a cada objeto X de κ um objeto $F(X)$ em τ , e a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de κ associa um morfismo $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ de τ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) F preserva identidades, ou seja, para todo $X \in \kappa$, se $\text{Id}_X : X \longrightarrow X$ é o morfismo identidade, então $F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$ (morfismo identidade na categoria τ).
- (2) F preserva a composição de morfismos, isto é, $F(g \circ f) \equiv F(g) \circ F(f)$, onde $g \circ f : X \longrightarrow Z$ e $F(g) \circ F(f) : F(X) \longrightarrow F(Z)$, para todo morfismo $f \in \text{Hom}(X, Y)$ e para todo morfismo $g \in \text{Hom}(Y, Z)$.

Exemplo 1.1.6 Um exemplo de categoria é a **categoria de R -módulos**, na qual os objetos são todos os R -módulos e os morfismos são os R -homomorfismos entre eles. Usaremos neste trabalho esta categoria, e ela será denotada, a menos de menção explícita em contrário, pelo símbolo ζ .

1.1.1 Funtores exatos

Nesta subseção, vamos introduzir a exatidão de funtores.

Definição 1.1.7 Um funtor covariante $F : \zeta \rightarrow \zeta$ é exato à esquerda, se a exatidão de $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ implica a exatidão de $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(\alpha)} F(B) \xrightarrow{F(\beta)} F(C)$; um funtor covariante $F : \zeta \rightarrow \zeta$ é dito ser exato à direita se a exatidão de $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ implica a exatidão de $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$.

Um funtor covariante $F : \zeta \rightarrow \zeta$ é dito ser exato se sempre que a sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ for exata, temos que $0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0$ é uma sequência exata, ou seja, o funtor F é exato se é ao mesmo tempo exato à esquerda e exato à direita, desde que, neste caso, F seja covariante.

Observação 1.1.8 Quando temos um funtor $F : \kappa \rightarrow \tau$ entre duas categorias de R -módulos e de S -módulos, respectivamente, tal que dados X, Y em κ e $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$, F associa um único morfismo $F(f)$ em $\text{Hom}_S(F(Y), F(X))$, ou seja, $f : X \rightarrow Y \Rightarrow F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$, e $F(\text{Id}_X) \equiv \text{Id}_{F(X)}$ e ainda dados os R -homomorfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ temos que $F(g \circ f) \equiv F(f) \circ F(g)$, dizemos que o funtor F é um **funtor contravariante**.

Definição 1.1.9 Um funtor contravariante $F : \zeta \rightarrow \zeta$ é dito ser exato à esquerda (respectivamente à direita), se toda vez que a sequência $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ for exata, então $0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$ (respectivamente $F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A) \rightarrow 0$) é exata, desde que F seja contravariante.

O funtor contravariante F é exato, se ele é ao mesmo tempo exato à esquerda e exato à direita, como dado anteriormente.

Sejam κ e τ categorias de R -módulos e de S -módulos, respectivamente, e seja $F : \kappa \rightarrow \tau$ um funtor (covariante ou contravariante). Dizemos que F é **aditivo**, se temos o seguinte: $F(f + g) = F(f) + F(g)$, para todos $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$, ou seja, R -homomorfismos na categoria κ .

Note que desta forma, temos que $F(0) = F(0 + 0) = F(0) + F(0)$ e assim, $F(0)$ é o S -homomorfismo nulo em τ .

Exemplo 1.1.10 (Funtor covariante $\text{Hom}_R(X, -)$) Seja X um R -módulo fixo. Então, temos que $\text{Hom}_R(X, -)$ é um funtor covariante da categoria de R -módulos para a categoria de R -módulos, que entendemos como sendo o funtor:

$$\text{Hom}_R(X, -) = \text{Hom}_R(X, \bullet) : \left(M \xrightarrow{f} N \right) \rightsquigarrow \left(\text{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(X, N) \right),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva a um R -módulo $\text{Hom}_R(X, M)$ e para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ leva a um R -homomorfismo $\text{Hom}_R(X, f) : X \rightarrow N$, onde $\text{Hom}_R(X, f) := f \circ h$, para todo $h \in \text{Hom}_R(X, M)$.

Exemplo 1.1.11 (Functor contravariante $\text{Hom}_R(-, X)$) Seja X um R -módulo fixo. Então, $\text{Hom}_R(-, X)$ é um functor contravariante da categoria de R -módulos para a categoria de R -módulos, que entendemos como sendo o functor:

$$\text{Hom}_R(-, X) = \text{Hom}_R(\bullet, X) : (M \xrightarrow{f} N) \rightsquigarrow (\text{Hom}_R(N, X) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M, X)),$$

o qual, para cada R -módulo M , leva a um R -módulo $\text{Hom}_R(M, X)$ e para cada R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ leva a um R -homomorfismo $\text{Hom}_R(f, X) : M \rightarrow X$, onde $\text{Hom}_R(f, X) := h \circ f$, para todo $h \in \text{Hom}_R(N, X)$.

Exemplo 1.1.12 (O functor torção) Seja $F = - \otimes_R M$, para um R -módulo M dado. Seja $\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, uma resolução projetiva do R -módulo N (ver resolução projetiva na seção 1.3). Aplicando F ao complexo de cadeias $\mathbf{P}_\bullet^N : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$, obtemos o complexo de cadeias $F(\mathbf{P}_\bullet^N)$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que o functor torção é definido como:

$$\text{Tor}_n^R(N, M) = \text{Ker}(d_n \otimes \text{Id}_M) / \text{Im}(d_{n+1} \otimes \text{Id}_M),$$

o R -módulo de homologia, no nível n , de $F(\mathbf{P}_\bullet^N)$ (para mais detalhes sobre módulo de homologia, ver seção 1.3). Ver no apêndice D mais detalhes sobre o functor Tor.

Exemplo 1.1.13 (O functor extensão covariante) Se $F = \text{Hom}_R(N, -)$, N um R -módulo dado, então para $\mathbf{I}^\bullet : 0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots$, uma resolução injetiva do R -módulo M (ver resolução injetiva na seção 1.3), temos que aplicando F ao complexo de cocadeias $\mathbf{I}_M^\bullet : 0 \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots$, obtemos o complexo de cocadeias $F(\mathbf{I}_M^\bullet)$. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que o functor Ext covariante é definido como:

$$\text{Ext}_R^n(N, M) = \text{Ker}(\text{Hom}(N, d^n)) / \text{Im}(\text{Hom}(N, d^{n-1})),$$

o R -módulo de cohomologia, no nível n , de $F(\mathbf{I}_M^\bullet)$ (para mais detalhes sobre módulo de cohomologia, ver seção 1.3). Ver no apêndice D mais detalhes sobre o functor Ext.

Exemplo 1.1.14 (O functor extensão contravariante) Seja M um R -módulo dado. Se $F = \text{Hom}_R(-, M)$, então para $\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \rightarrow 0$ uma resolução projetiva do R -módulo N , temos que aplicando F ao complexo de cadeias $\mathbf{P}_\bullet^N : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$, obtemos o complexo de cocadeias $F(\mathbf{P}_\bullet^N)$. Então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que o functor extensão, ou functor Ext, contravariante é definimos como:

$$\text{Ext}_R^n(N, M) = \text{Ker}(\text{Hom}(d_{n+1}, M)) / \text{Im}(\text{Hom}(d_n, M)),$$

o R -módulo de cohomologia, no nível n , de $F(\mathbf{P}_\bullet^N)$.

Para mais detalhes sobre os funtores Ext e Tor, ver [36] como referência.

1.2 O módulo linearmente compacto

Nesta seção, definiremos o importante conceito de um **R -módulo linearmente compacto**, que será usado em vários resultados deste trabalho. Antes de apresentarmos este conceito, começamos com algumas outras noções que serão utilizadas mais adiante.

Relembramos que um R -módulo M é dito ser **simples** se ele é não nulo e não admite um R -submódulo não nulo próprio. O $\text{Soc}(M)$, denominado o **socle** de M , é a soma de todos os submódulos simples de M , isto é, é o submódulo:

$$\text{Soc}(M) = \sum \{N \mid N \text{ é submódulo simples de } M\}.$$

Um R -módulo M é de **comprimento finito**, se existe uma sequência da forma $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n = 0$ de R -submódulos de M tal que M_i/M_{i+1} é um R -módulo simples, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Antes de definirmos o conceito de um **módulo linearmente compacto**, devemos apresentar uma noção que é utilizada como pré-requisito a este novo conceito.

Definição 1.2.1 ([27, Definição 5]) Seja M um R -módulo e N um R -submódulo de M . Para $m \in M$ definimos um subconjunto de M : $m + N := \{m + n \mid n \in N\}$. Um subconjunto de M é dito ser uma **classe** de N se existe $m \in M$ tal que ele é igual à $m + N$.

Observação 1.2.2 Além disso, $x \in m + N$ se, e somente se, existe n tal que $n \in N$ e $x = m + n$.

Definição 1.2.3 (Módulo linearmente compacto) ([23, Definição 3.1]) Considere que o anel R é Noetheriano e possui uma estrutura topológica, ou seja, R é munido de uma topologia. Seja M um R -módulo que também possui uma topologia. Um **núcleo** de M é um subconjunto de M que pertence à topologia (ou seja, é um aberto de M) e contém o elemento zero de M . Uma **base nuclear** de M é uma base para a topologia de M . O R -módulo M é Hausdorff se, e somente se, a interseção de todos os núcleos de M é somente o zero de M . O R -módulo M é dito ser **linearmente topologizado**, se M possui uma base nuclear Σ consistindo de R -submódulos.

Um R -módulo M que é linearmente topologizado e Hausdorff é dito ser **linearmente compacto**, se M possui a seguinte propriedade: se $\mathfrak{F}$ é uma família de **classes fechadas**, isto é, uma família de classes de R -submódulos que são fechados em M , que possui a **propriedade da interseção finita**, então as classes em $\mathfrak{F}$ tem interseção arbitrária não-vazia.

Além disso, um R -módulo M linearmente topologizado e Hausdorff é dito ser **semidiscreto**, se **todo** R -submódulo de M é fechado.

O próximo teorema, é um resultado que será usado com bastante frequência no decorrer do trabalho, e ele mostra que módulos linearmente compactos existem em abundância.

Teorema 1.2.4 ([13, Teorema 2.1]) Seja R um anel Noetheriano. Um R -módulo M é linearmente compacto na topologia discreta se, e somente se, ele é um R -módulo Artiniano.

1.2.1 Dimensão Noetheriana de um módulo

Definição 1.2.5 ([10]) Seja M um R -módulo. Vamos definir o conceito de **dimensão Noetheriana** de M , denotada por $\text{Ndim}(M)$. Quando $M = 0$, colocamos $\text{Ndim}(M) = -1$. Então, por indução, para qualquer $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, colocamos $\text{Ndim}(M) = \alpha$ quando:

- (1) $\text{Ndim}(M) < \alpha$ é falso; e
- (2) para toda cadeia ascendente $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ de R -submódulos de M , existe um inteiro positivo m_0 tal que $\text{Ndim}(M_{m+1}/M_m) < \alpha$, para todo $m \geq m_0$.

1.2.2 O Lema de Artin-Rees e filtrações

Enunciamos o Lema de Artin-Rees e falamos de filtrações, pois utilizamos esta noção no Capítulo 5.

Teorema 1.2.6 (Lema de Artin-Rees) ([20, Teorema 85]) Seja R um anel Noetheriano, seja I um ideal qualquer de R e sejam $N \subseteq M$ dois R -módulos finitamente gerados. Então, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq k$, temos que: $I^n M \cap N = I^{n-k} (I^k M \cap N)$.

Uma **filtração** sobre R é uma sequência $R = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots \supset R_n \supset \dots$ de ideais de R tal que $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$. Um anel com uma filtração é chamado um **anel filtrado**. Seja R um anel filtrado. Uma filtração sobre um R -módulo M é uma sequência $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$ de R -submódulos M_n de M tal que $R_m M_n \subseteq M_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$. Um R -módulo M com uma filtração é chamado de um **módulo filtrado**.

Seja R um anel filtrado e seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Seja M um R -módulo filtrado com filtração $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$. Dizemos que essa filtração é **compatível** com $\mathfrak{a}$ se $\mathfrak{a} M_n \subseteq M_{n+1}$, para todo $n \geq 0$.

Seja M um R -módulo e seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Então, $\mathfrak{a}$ define uma filtração $R = \mathfrak{a}^0 \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}^2 \supset \mathfrak{a}^3 \supset \dots$ sobre R e uma filtração $M = \mathfrak{a}^0 M \supset \mathfrak{a} M \supset \mathfrak{a}^2 M \supset \dots$ sobre M , que são chamadas de **filtrações $\mathfrak{a}$ -ádicas**.

1.2.3 Suporte e dimensão de um módulo

Definição 1.2.7 Seja M um R -módulo. O **anulador** de um elemento $m \in M$ é o ideal de R , $\text{ann}(m) := \{x \in R \mid x \cdot m = 0\}$. Por sua vez, o **anulador do R -módulo M** é o ideal de R dado por $\text{Ann}_R(M) := \bigcap_{m \in M} \text{ann}(m) = \{x \in R \mid x \cdot m = 0, \forall m \in M\}$. O **suporte** do R -módulo M é definido como o seguinte conjunto $\text{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid S^{-1}M \neq 0\}$, onde S é o conjunto multiplicativamente fechado (ou conjunto multiplicativo) dado por $S = R \setminus \mathfrak{p}$.

Para finalizar esta seção, relembremos a dimensão de Krull de um R -módulo M , o qual é finitamente gerado sobre R .

Seja M um R -módulo finitamente gerado, com R sendo um anel Noetheriano. Então, a dimensão (de Krull) de M , denotada por $\dim(M)$, é dada pela dimensão de Krull do anel $R/\text{Ann}_R(M)$, ou seja, $\dim(M) = \dim(R/\text{Ann}_R(M))$.

1.3 Complexo de cadeias e complexo de cocadeias

Um **complexo de cadeias** $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência (decrecente) de R -módulos e de R -homomorfismos:

$$C_\bullet : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots,$$

satisfazendo a seguinte condição: $d_n \circ d_{n+1} \equiv 0$, o que é equivalente à $\text{Im}(d_{n+1}) \subseteq \text{Ker}(d_n)$ como um R -submódulo, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Os elementos $c_n \in C_n$ são chamados n -cadeias de $C_\bullet$ e os R -homomorfismos $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ são chamados de operadores bordo.

Definimos a seguir, o módulo de homologia de um complexo de cadeias.

Definição 1.3.1 Dado um complexo de cadeias $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ temos que o núcleo do R -homomorfismo d_n , o qual é dado por $\text{Ker}(d_n) = \{c_n \in C_n \mid d_n(c_n) = 0\}$, é chamado o R -submódulo dos n -ciclos e a imagem de d_{n+1} , dada por

$$\text{Im}(d_{n+1}) = \{c_n \in C_n \mid c_n = d_{n+1}(c_{n+1}), \text{ para alguma } (n+1)\text{-cadeia } c_{n+1} \in C_{n+1}\},$$

é chamada o R -submódulo dos n -bordos.

Tomamos agora o R -módulo quociente:

$$\text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}) := \{z_n + \text{Im}(d_{n+1}) \mid z_n \in \text{Ker}(d_n) \text{ é um } n\text{-ciclo}\}.$$

A **homologia** do complexo de cadeias $C_\bullet$ é a família de R -módulos quocientes: $H_*(C_\bullet) = \{H_n(C_\bullet)\} = \{\text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1})\}$. E, para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que o R -módulo $H_n(C_\bullet)$ será chamado R -módulo de homologia, no nível n , do complexo de cadeias $C_\bullet$.

Sejam $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $D_\bullet = \{D_n, e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ dois complexos de cadeias. Uma aplicação de cadeias $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ é uma coleção de R -homomorfismos, a qual é dada por: $f = \{f_n : C_n \rightarrow D_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, que possui a seguinte propriedade: $f_{n-1} \circ d_n \equiv e_n \circ f_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Uma sequência de R -módulos e de R -homomorfismos dada da seguinte maneira:

$$\dots \rightarrow A_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} A_m \xrightarrow{f_m} A_{m-1} \rightarrow \dots,$$

é dita ser exata se toda tripla que a compõe for exata. Se este for o caso, esta sequência é chamada de **sequência exata longa**.

Um **complexo de cocadeias** $C^\bullet = \{C^p, d^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência (crescente) de R -módulos e de R -homomorfismos:

$$C^\bullet : \dots \rightarrow C^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} C^p \xrightarrow{d^p} C^{p+1} \rightarrow \dots,$$

tal que $d^p \circ d^{p-1} \equiv 0$, para todo $p \in \mathbb{Z}$, condição essa que é equivalente à $\text{Im}(d^{p-1}) \subseteq \text{Ker}(d^p) \subseteq C^p$ como um R -submódulo. Um elemento $c^p \in C^p$ é chamado uma p -cadeia e os R -homomorfismos $d^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$ são chamados de operadores cobordo.

Vamos definir a seguir, o módulo de cohomologia de um complexo de cocadeias.

Definição 1.3.2 Tomando $\text{Ker}(d^p) = \{z^p \in C^p \mid d^p(z^p) = 0\}$, o chamado submódulo dos p -cociclos, e $\text{Im}(d^{p-1}) = \{c^p \in C^p \mid d^{p-1}(c^{p-1}) = c^p \text{ para alguma } (p-1)\text{-cadeia } c^{p-1} \in C^{p-1}\}$ que é chamado o submódulo dos p -cobordos, vamos considerar o seguinte R -módulo quociente

$$\text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1}) := \{z^p + \text{Im}(d^{p-1}) \mid z^p \in \text{Ker}(d^p)\},$$

e definimos o R -módulo de **cohomologia** do complexo de cocadeias $C^\bullet$ como sendo $H^p(C^\bullet) = \text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1})$, e a família de R -módulos quocientes $H^*(C^\bullet) := \{\text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1})\}_{p \in \mathbb{Z}}$, é a cohomologia do complexo de cocadeias $C^\bullet$.

Dados dois complexos de cocadeias $C^\bullet = \{C^p, d^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ e $D^\bullet = \{D^p, e^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$, temos que uma **aplicação de cocadeias** $f : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ é uma família de R -homomorfismos a qual é dada por $f = \{f^p : C^p \rightarrow D^p \mid p \in \mathbb{Z}\}$, com a seguinte propriedade: $f^{p+1} \circ d^p \equiv e^p \circ f^p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Voltamos agora com uma definição, que envolve uma aplicação de cadeias.

Definição 1.3.3 Seja $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ uma aplicação de cadeias. A aplicação f é dita ser **nula-homotópica** se existem aplicações $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ com a seguinte propriedade:

$$f_n \equiv e_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, onde temos os complexos de cadeias:

$$C_\bullet : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \text{ e } D_\bullet : \dots \rightarrow D_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} D_n \xrightarrow{e_n} D_{n-1} \rightarrow \dots,$$

com $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ e $f_n : C_n \rightarrow D_n$.

Além disso, se f e $g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ são aplicações de cadeias, dizemos que f é homotópica à g se a aplicação $f - g$ é nula-homotópica.

Teorema 1.3.4 ([36, Teorema 6.5]) Sejam $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ duas aplicações de cadeias. Se f e g são homotópicas, então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $f_{*n} \equiv g_{*n} : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$, onde $f_{*n}(z_n + \text{Im}(d_{n+1})) = f_n(z_n) + \text{Im}(e_{n+1})$.

1.3.1 Resoluções e módulos projetivo e injetivo

Nas próximas duas definições, determinaremos dois tipos importantes de módulos.

Definição 1.3.5 Um R -módulo P é chamado de um módulo **projetivo**, se para todo R -homomorfismo $f : P \rightarrow B$ e todo epimorfismo $g : A \rightarrow B$, existe um R -homomorfismo $h : P \rightarrow A$ tal que $f \equiv g \circ h$.

O R -homomorfismo h é chamado o **levantamento projetivo** de f .

Definição 1.3.6 Um R -módulo E é chamado de um módulo **injetivo**, se temos que para todo R -homomorfismo $f : A \rightarrow E$ e todo monomorfismo $g : A \rightarrow B$, existe um R -homomorfismo $h : B \rightarrow E$ tal que $h \circ g \equiv f$.

Seja M um R -módulo. Uma **resolução** de M significa uma sequência exata da seguinte forma:

$$\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0,$$

onde temos que cada F_i é um R -módulo e cada d_i é um R -homomorfismo.

Vamos denotar por $\mathbf{F}_M : \dots \rightarrow F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0$, e neste caso denotamos uma resolução do R -módulo M como: $\mathbf{F}_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$.

Uma **resolução livre** de um R -módulo M é uma resolução de M , $\mathbf{F}_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$, em que cada F_i é um R -módulo livre.

Definição 1.3.7 Seja M um R -módulo. Uma **resolução projetiva** de M é uma sequência exata da forma:

$$\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0,$$

em que cada R -módulo P_n é projetivo, para todo $0 \leq n \in \mathbb{Z}$.

Denominamos a chamada **resolução projetiva deletada** do R -módulo M , ao complexo de cadeias dado como segue:

$$\mathbf{P}_\bullet^M : \dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow P_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0.$$

O dual da definição anterior, é a de uma resolução injetiva de um R -módulo M .

Definição 1.3.8 ([9, Definição 3.1.7]) Uma **resolução injetiva** de um R -módulo M é uma sequência exata da forma:

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \rightarrow M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \rightarrow \dots,$$

em que cada R -módulo E^n é injetivo, para todo $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, e além disso, sendo

$$\mathbf{I}_M^\bullet : 0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow E^{n+1} \rightarrow \dots,$$

a chamada **resolução injetiva deletada** de M , temos que $\text{Ker}(d^0) := H^0(\mathbf{I}_M^\bullet) \cong M$ e $H^i(\mathbf{I}_M^\bullet) = 0$, para todo $i > 0$.

Observação 1.3.9 No apêndice B, é colocado que sendo M um R -módulo arbitrário ele sempre admite uma resolução injetiva e uma resolução projetiva.

1.3.2 Funtores e complexos

Seja $F : \kappa \rightarrow \tau$ um funtor aditivo e covariante de uma categoria de R -módulos para uma categoria de S -módulos, e seja $C_\bullet = \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ um complexo de cadeias na categoria κ . Aplicando então o funtor F à $C_\bullet$, como F é covariante, obtemos a seguinte sequência de S -módulos:

$$F(C_\bullet) : \dots \rightarrow F(C_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(C_{n-1}) \rightarrow \dots \rightarrow F(C_3) \xrightarrow{F(d_3)} F(C_2) \rightarrow \dots,$$

que estão na categoria τ .

Uma vez que $d_n \circ d_{n+1} \equiv 0$, segue que $F(d_n \circ d_{n+1}) = F(0) = 0$ pois F é um funtor aditivo. Desta forma, temos que $F(d_n) \circ F(d_{n+1}) \equiv 0$. Portanto, concluímos que $F(C_\bullet)$ é um complexo de cadeias.

Agora, considere $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ uma aplicação de cadeias, onde $D_\bullet$ é um outro complexo de cadeias com os módulos na categoria κ . Desta maneira, por definição, temos que $f_n \circ d_{n+1} \equiv e_{n+1} \circ f_{n+1}$ e pelo que foi feito logo acima já temos os complexos de cadeias $F(C_\bullet)$ e $F(D_\bullet)$. Logo, observe que:

$$F(f_n \circ d_{n+1}) \equiv F(e_{n+1} \circ f_{n+1}) \Rightarrow F(f_n) \circ F(d_{n+1}) \equiv F(e_{n+1}) \circ F(f_{n+1}),$$

e assim, concluímos que $F(f) : F(C_\bullet) \rightarrow F(D_\bullet)$ é uma aplicação de cadeias.

Nas condições anteriormente expostas, obtemos uma aplicação induzida a qual, por abuso de notação, chamaremos de $F : \text{Comp}(R) \rightarrow \text{Comp}(S)$ da categoria de complexos de cadeias de R -módulos para a categoria de complexos de cadeias de S -módulos. Esta aplicação induzida faz o seguinte: $C_\bullet \in \text{Obj}(\text{Comp}(R)) \mapsto F(C_\bullet) \in \text{Obj}(\text{Comp}(S))$, e dada uma aplicação de cadeias $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet \in \text{Hom}_R(C_\bullet, D_\bullet)$, obtemos $F(f) \in \text{Hom}_S(F(C_\bullet), F(D_\bullet))$.

Observação 1.3.10 Nas considerações anteriores, os resultados obtidos também valem se o funtor F for contravariante. Além disso, se ao invés de um complexo de cadeias nós tomarmos um complexo de cocadeias $C^\bullet$, conseguimos os mesmos resultados para $F(C^\bullet)$ com F um funtor covariante e aditivo, ou sendo um funtor contravariante e aditivo.

A próxima proposição nos traz um resultado simples, mas importante.

Proposição 1.3.11 Seja $F : \kappa \rightarrow \tau$ um funtor covariante e aditivo, de uma categoria de R -módulos para uma categoria de S -módulos. Consideremos a aplicação induzida $F : \text{Comp}(R) \rightarrow \text{Comp}(S)$. Então, se $f, g : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ são aplicações de cadeias com f homotópica à g então, $F(f)$ é homotópica à $F(g)$.

1.3.3 Dimensão projetiva

A seguir, definimos a chamada **dimensão homológica** de um dado módulo M .

Definição 1.3.12 Se M é um R -módulo não nulo, dizemos que M possui **dimensão projetiva** finita, exatamente quando ele admite alguma **resolução projetiva limitada**, ou seja, admite uma sequência exata da forma:

$$0 \rightarrow P_k \xrightarrow{d_k} P_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} P_{k-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0,$$

com cada R -módulo P_i projetivo, para todo $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$.

Neste caso, definimos a **dimensão projetiva** de M , denotada por $\text{projdim}_R(M)$, pelo **menor** $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ satisfazendo a sequência exata dada anteriormente.

Se M é nulo, convencionamos que $\text{projdim}_R(0) = -\infty$. Se M , não nulo, não possui dimensão projetiva finita, denotamos $\text{projdim}_R(M) = +\infty$.

Observação 1.3.13 Observe que sendo M um R -módulo não nulo, temos que:

$$\text{projdim}_R(M) = 0 \Leftrightarrow \text{a sequência } 0 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \text{ é exata,}$$

com P_0 um R -módulo projetivo.

1.4 Limites diretos

O objetivo aqui, é apresentar o conceito de limite direto de um sistema direto de R -módulos.

As propriedades de existência e unicidade do limite direto podem ser encontradas no apêndice A.

Seja $(\Omega, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dizemos que $(\Omega, \leq)$ é um **conjunto dirigido** se, dados dois elementos $i, \tilde{i} \in \Omega$ existe $\hat{i} \in \Omega$ tal que $i \leq \hat{i}$ e $\tilde{i} \leq \hat{i}$.

Exemplo 1.4.1 Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer, e seja $\Omega = \wp(X)$ o conjunto das partes de X , parcialmente ordenado pela relação de inclusão: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$. Então, $(\wp(X), \leq)$ é um conjunto dirigido. Um outro exemplo, é quando consideramos X um espaço topológico e tomamos $\Omega = \{K \subset X \mid K \text{ é compacto}\}$. Defina em Ω a relação de ordem parcial $K_1 \leq K_2 \Leftrightarrow K_1 \subset K_2$. Então, $(\Omega, \leq)$ é um conjunto dirigido. De fato, dados K_1, K_2 compactos de X , tome o compacto $K_1 \cup K_2 \in \Omega$ e assim temos $K_1 \leq K_1 \cup K_2$ e $K_2 \leq K_1 \cup K_2$.

Seja $(\Omega, \leq)$ um conjunto dirigido. Um **sistema direto**, ou **sistema indutivo**, de R -módulos denotado por $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$, é uma família de R -módulos $\{M_i\}_{i \in \Omega}$ indexada no conjunto dirigido $(\Omega, \leq)$ juntamente com uma família de R -homomorfismos dada por:

$\{\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}, \forall i \leq \tilde{i} \mid i, \tilde{i} \in \Omega\}$ tal que temos

- (1) $\Phi_{i, i} : M_i \rightarrow M_i$ é o R -homomorfismo identidade;
- (2) Se $i \leq \tilde{i} \leq \hat{i}$, então: tomando os R -homomorfismos $\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$ e $\Phi_{\hat{i}, \tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M_{\hat{i}}$ temos que $\Phi_{\hat{i}, i} \equiv \Phi_{\hat{i}, \tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i}, i}$.

Definição 1.4.2 Um **limite direto** de um sistema direto de R -módulos $(M_i, \Phi_{i,i})_{i \in \Omega}$ é um R -módulo M juntamente com uma família de R -homomorfismos $\{\Phi_i : M_i \rightarrow M \mid i \in \Omega\}$ tal que:

- (I) Para cada $i \leq \tilde{i}$, tomando os R -homomorfismos $\Phi_i : M_i \rightarrow M$, $\Phi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M$ e $\Phi_{\tilde{i},i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$ obtemos que $\Phi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i},i} \equiv \Phi_i$, se $i \leq \tilde{i}$.
- (II) (**Propriedade Universal**) Para cada R -módulo N e para qualquer família de homomorfismos de R -módulos: $\{\Psi_i : M_i \rightarrow N \mid i \in \Omega\}$ tal que vale $\Psi_i \equiv \Psi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i},i}$, $\forall i \leq \tilde{i}$, onde $\Psi_i : M_i \rightarrow N$, $\Psi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow N$ e $\Phi_{\tilde{i},i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$, temos então que existe um único R -homomorfismo $\Psi : M \rightarrow N$ com a seguinte propriedade: $\forall i \in \Omega$, $\Psi \circ \Phi_i \equiv \Psi_i$.

Vamos denotar o limite direto de um sistema direto de R -módulos por $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$.

Observação 1.4.3 De acordo com o apêndice A, o limite direto é único. Sendo assim, vamos utilizar a seguinte notação $M = \varinjlim_{i \in \Omega} M_i$ para o limite direto $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$.

Vamos, a partir de agora, considerar que o conjunto dirigido Ω é tal que $\Omega = \mathbb{N}$.

Vamos denotar por **Dir**($\mathbb{N}$) a categoria de todos os sistemas diretos de R -módulos sobre o conjunto dirigido $\Omega = \mathbb{N}$. Neste caso, um morfismo nesta categoria é um homomorfismo de sistemas diretos de R -módulos, o qual é definido da seguinte maneira: $t : \{M_n, \Phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{N_n, \Psi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, e t é uma família de R -homomorfismos $t = \{t_n : M_n \rightarrow N_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tal que temos o seguinte: $\Psi_{n+1,n} \circ t_n \equiv t_{n+1} \circ \Phi_{n+1,n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.4.4 Vamos definir o denominado funtor “constante” $|\bullet| : \zeta \rightarrow \mathbf{Dir}(\mathbb{N})$: para cada R -módulo M , ele associa o sistema direto constante dado por $(M_n = M, \text{Id}_M)$, para todo $n \in \mathbb{N}$; se $f : M \rightarrow N$ é um R -homomorfismo, então $|f| : |M| \rightarrow |N|$ é o homomorfismo de sistemas diretos de R -módulos $|f|_n = f$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

O próximo teorema é utilizado na sequência do texto. Para mais detalhes sobre limite direto, veja a referência [34].

Teorema 1.4.5 ([35, Teorema 2.21]) Quaisquer dois limites diretos comutam.

1.5 Limites inversos e completamentos

Nesta seção, vamos definir sistema inverso e limite inverso. Também falamos um pouco sobre o completamento de um anel.

1.5.1 Completamentos

Exemplo 1.5.1 Seja R um anel Noetheriano, seja I um ideal de R e assumamos que $\bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$. Se $x, y \in R$ seja $v(x, y) = \sup \{n \in \mathbb{N} \mid x - y \in I^n\}$ e definimos: $d(x, y) := \frac{1}{2^{v(x, y)}}$.

Afirmamos que (R, d) é um espaço métrico. De fato:

- (1) Para qualquer ideal J , temos que $x - y \in J$ se, e somente se, $y - x \in J$. Logo, $v(x, y) = v(y, x)$ e então, temos que $d(x, y) = d(y, x)$.
- (2) Se $x = y$ então $v(x, y) \rightarrow \infty$, e assim $d(x, x) = 0$. Agora, se $d(x, y) = 0$ então $x - y \in I^n$, para $n \rightarrow \infty$; logo $x - y \in \bigcap_{n \geq 0} I^n = 0$ e desta forma, $x = y$.
- (3) Agora, assumamos que $d(x, y) = \frac{1}{2^k}$ e $d(y, z) = \frac{1}{2^l}$. Pela definição de $v(x, y)$ e de $v(y, z)$, segue que $x - y \in I^k \setminus I^{k+1}$ e $y - z \in I^l \setminus I^{l+1}$. Portanto, temos que: $x - z = (x - y) + (y - z) \in I^{\min\{k, l\}}$, onde $\min\{k, l\}$ denota o valor mínimo entre os inteiros k e l . Portanto, concluímos que

$$d(x, z) \leq \frac{1}{2^{\min\{k, l\}}} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} = d(x, y) + d(y, z).$$

De (1), (2) e (3) temos que (R, d) é um espaço métrico, como queríamos demonstrar.

Observação 1.5.2 (1) Para todo $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, vamos observar quais são as bolas abertas $B_\epsilon(x)$, as quais são dadas por $B_\epsilon(x) := \{y \in R \mid d(x, y) < \epsilon\}$, neste espaço métrico. Sem perda de generalidade, assumamos que $\epsilon = \frac{1}{2^k}$; então, temos que:

$$\begin{aligned} B_{\frac{1}{2^k}}(x) &= \{y \in R \mid d(x, y) < \frac{1}{2^k}\} \\ &= \{y \in R \mid d(x, y) \leq \frac{1}{2^{k+1}}\} \\ &= \{y \in R \mid x - y \in I^{k+1}\} \\ &= x + I^{k+1}. \end{aligned}$$

(2) Se nós colocamos a **topologia produto** sobre $R \times R$, então ambas as aplicações:

$$+ : R \times R \rightarrow R \quad \text{e} \quad \cdot : R \times R \rightarrow R \quad \text{são contínuas.}$$

De fato, seja $x + I^k$ um aberto básico em torno de $x \in R$ e seja $(y, z) \in (+)^{-1}(x + I^k)$. Isto significa que $y + z \in x + I^k$ e portanto, $(y + I^k) + (z + I^k) \subseteq x + I^k$. Consequentemente, $(+)^{-1}(x + I^k)$ contém $(y + I^k) \times (z + I^k)$ em torno de (y, z) . Ou seja, $+$ é contínua. Similarmente, fazemos para a aplicação produto $\cdot$.

Em seguida, vamos apresentar algumas definições. Mas primeiro, observemos o seguinte.

Observação 1.5.3 Tendo um espaço métrico, podemos nos referir a uma sequência de Cauchy neste espaço. Desta forma, vamos observar explicitamente como uma sequência de Cauchy em (R, d) se comporta. Para que uma sequência $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em R seja uma sequência de Cauchy, precisamos que para todo $\epsilon = \frac{1}{2^l}$ exista $k \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n, m \geq k$ nós temos que:

$$d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^l} \iff x_n - x_m \in I^{l+1} \iff x_n + I^{l+1} = x_m + I^{l+1}.$$

Desta forma, temos caracterizada uma sequência de Cauchy no espaço métrico (R, d) .

Sejam R e $I \subseteq R$ como dados no Exemplo 1.5.1. A métrica d define uma topologia sobre R (que é a topologia métrica induzida por esta métrica d), a qual é chamada de **topologia I -ádica**.

Uma **sequência de Cauchy nula** $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, com respeito à métrica d , tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $n \geq k$, temos $d(x_n, 0) < \epsilon$ (lembre que um **espaço métrico é completo**, se toda sequência de Cauchy neste espaço converge a um ponto do respectivo espaço métrico).

Definição 1.5.4 Para I um ideal do anel Noetheriano R , podemos agora formar um novo objeto:

$$\hat{R}^I := \{\text{sequências de Cauchy em } R\} / \{\text{sequências de Cauchy nulas em } R\}.$$

Chamamos $\hat{R}^I$ o **completamento de R com respeito à I** .

Exemplo 1.5.5 Quando tomamos $R[x]$ o anel de polinômios na indeterminada x e $I = (x)$ o ideal de $R[x]$ gerado por x , temos que $\hat{R}[x]^I = R[[x]] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid a_i \in R\}$.

1.5.2 Sistema inverso e limite inverso

Definição 1.5.6 Um **sistema inverso**, ou sistema projetivo, de R -módulos sobre um conjunto direcionado $(\Omega, \leq)$ consiste de uma coleção de R -módulos $\{X_i \mid i \in \Omega\}$, indexados no conjunto dirigido Ω , e uma coleção de R -homomorfismos $\{\phi_{i,j} : X_i \rightarrow X_j \mid i, j \in \Omega\}$ definidos sempre que $j \leq i$, tal que valem as seguintes condições:

- (1) $\phi_{i,i} : X_i \rightarrow X_i$ é a aplicação identidade sobre X_i , e
- (2) Tendo as aplicações $\phi_{i,j} : X_i \rightarrow X_j$ e $\phi_{j,k} : X_j \rightarrow X_k$, definidas sempre que $i, j, k \in \Omega$, com $k \leq j \leq i$, então segue que $\phi_{j,k} \circ \phi_{i,j} \equiv \phi_{i,k}$.

Denotamos um tal sistema por $\{X_i, \phi_{i,j}, \Omega\}$, ou por $\{X_i, \phi_{i,j}\}$ se o conjunto dirigido de índices Ω está claramente entendido.

Vamos à definição do limite inverso.

Definição 1.5.7 Considere, sem perda de generalidade, que o conjunto dirigido Ω é tal que $\Omega = \mathbb{N}$. Seja $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos juntamente com os R -homomorfismos $\phi_{n+1,n} : M_{n+1} \rightarrow M_n$. Então, o **limite inverso** deste sistema inverso de R -módulos é definido como sendo o núcleo da seguinte aplicação:

$$M = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M_n := \text{Ker} \left(D : \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} M_n \right),$$

onde D é o R -homomorfismo definido como segue:

$$D((m_1, m_2, \dots)) = (m_1 - \phi_{2,1}(m_2), m_2 - \phi_{3,2}(m_3), \dots),$$

e juntamente com M temos uma família de R -homomorfismos $\{\phi_n : M \rightarrow M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, que são R -homomorfismos compatíveis (veja na Observação 1.5.9, o que significa um R -homomorfismo compatível).

Observação 1.5.8 ([23, Propriedade 2.4]) De acordo com a Definição 1.5.7, temos que $M = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M_n$ é um R -submódulo do $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Neste contexto, quando $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$ é munido de uma topologia, temos que M é um R -submódulo fechado em $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

Este fato, será utilizado nos próximos capítulos. Além disso, veja no apêndice A que o limite inverso sempre existe e é único.

Observação 1.5.9 Seja N um R -módulo, $\{M_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos e seja $\psi_n : N \rightarrow M_n$ um R -homomorfismo, para cada $n \in \mathbb{N}$. Essas aplicações ψ_n são ditas serem **compatíveis**, se $\phi_{n+1,n} \circ \psi_{n+1} \equiv \psi_n$.

Observação 1.5.10 ([17, Seção 9]) Um homomorfismo $\{A_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f} \{B_n, \psi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sistemas inversos de R -módulos é uma coleção de R -homomorfismos $f = \{f_n : A_n \rightarrow B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, que são compatíveis com as aplicações do sistema inverso, isto é, para cada $m \geq n$, temos que sendo os R -homomorfismos $\phi_{m,n} : A_m \rightarrow A_n$, $\psi_{m,n} : B_m \rightarrow B_n$, $f_m : A_m \rightarrow B_m$ e $f_n : A_n \rightarrow B_n$ temos que $f_n \circ \phi_{m,n} \equiv \psi_{m,n} \circ f_m$. Uma sequência

$$0 \rightarrow \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f} \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{g} \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0,$$

de sistemas inversos e de homomorfismos de sistemas inversos de R -módulos é exata (ou exata curta), se a sequência correspondente de R -módulos $0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0$ é exata, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada uma tal sequência exata curta de sistemas inversos de R -módulos, vemos que a sequência de limites inversos

$$0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

também é exata. No entanto, a última aplicação não precisa ser sobrejetora. Assim, dizemos que $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}}$ é um funtor covariante e exato à esquerda (ver apêndice A).

Exemplo 1.5.11 Para um ideal I de R , considere o sistema inverso de R -módulos dado por $\{R/I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com a família de R -homomorfismos $\{\pi_{n+1,n} : R/I^{n+1} \rightarrow R/I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/I^n \cong \hat{R}^I$ (ver prova no apêndice A).

Seja M um R -módulo arbitrário, com R um anel Noetheriano, e seja I um ideal qualquer de R tal que $\bigcap_{n \geq 0} I^n M = 0$. De forma análoga ao que foi feito no Exemplo 1.5.1, podemos definir uma métrica sobre M . Então, o completamento de M com respeito à I é definido sendo o seguinte R -módulo:

$$\hat{M}^I := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/I^n M,$$

o qual é denominado o **completamento I -ádico de M** .

Teorema 1.5.12 ([35, Teorema 2.26]) Quaisquer dois limites inversos comutam.

Teorema 1.5.13 ([35, Teorema 2.27]) Para qualquer R -módulo B , temos que:

$$\mathrm{Hom}_R \left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n, B \right) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_R (A_n, B).$$

Para mais detalhes sobre o limite inverso, ver [20].

1.6 Alguns resultados importantes

De acordo com [10], para R um anel Noetheriano, seja N um R -módulo finitamente gerado e seja $\mathbf{F}_\bullet : \dots \rightarrow F_i \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, uma resolução livre de N com cada R -módulo livre F_i sendo finitamente gerado, para todo $i \geq 0$. Podemos definir, para um R -módulo linearmente compacto M , uma topologia sobre o R -módulo $\mathrm{Tor}_i^R(N, M)$, que é a topologia induzida da topologia produto de $F_i \otimes_R M$, para todo $i \geq 0$.

Lema 1.6.1 ([10, Lema 2.6]) Seja R um anel Noetheriano. Seja N um R -módulo finitamente gerado e M um R -módulo linearmente compacto. Então, o R -módulo $\mathrm{Tor}_i^R(N, M)$, para todo $i \geq 0$, é linearmente compacto com a topologia induzida por uma resolução livre de N .

Teorema 1.6.2 ([32, Seção 6.1, Teorema 1]) Seja $F(M)$ um funtor aditivo, covariante e exato de um único módulo variável M e seja $\mathbf{C}_\bullet$ um complexo de cadeias de R -módulos. Então, temos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, um isomorfismo canônico:

$$H_n(F(\mathbf{C}_\bullet)) \cong F(H_n(\mathbf{C}_\bullet)).$$

No entanto, se $F(M)$ é um funtor aditivo, contravariante e exato de um único módulo variável M e $\mathbf{C}^\bullet$ é um complexo de cocadeias, então temos o isomorfismo:

$$H_n(F(\mathbf{C}^\bullet)) \cong F(H^n(\mathbf{C}^\bullet)).$$

Lema 1.6.3 ([10, Lema 2.3]) Seja R um anel Noetheriano. Temos duas propriedades:

- (1) Se $\{M_n\}_{n \in \Omega}$ é uma família de R -módulos linearmente compactos, então o seu produto direto $\prod_{n \in \Omega} M_n$ é um R -módulo linearmente compacto com a topologia produto.
- (2) O limite inverso de um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos e com os R -homomorfismos contínuos, é um R -módulo linearmente compacto, com a topologia induzida da topologia produto.

O próximo resultado, nos diz que o limite inverso é um funtor exato sobre R -módulos linearmente compactos.

Lema 1.6.4 ([10, Lema 2.4]) Seja $\{M_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos com os R -homomorfismos contínuos. Neste caso, se:

$$0 \rightarrow \{M_t\}_{t \in \mathbb{N}} \rightarrow \{N_t\}_{t \in \mathbb{N}} \rightarrow \{P_t\}_{t \in \mathbb{N}} \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata curta de sistemas inversos de R -módulos, então a sequência de limites inversos

$$0 \rightarrow \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M_t \rightarrow \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} N_t \rightarrow \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} P_t \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata.

O próximo resultado, é frequentemente usado na sequência.

Lema 1.6.5 ([10, Lema 2.7]) Seja R um anel Noetheriano. Seja N um R -módulo finitamente gerado e $\{M_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos com os R -homomorfismos contínuos. Então, para todo $i \geq 0$, temos que a família de R -módulos dada por $\{\mathrm{Tor}_i^R(N, M_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ forma um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos com R -homomorfismos contínuos. Além disso, temos que:

$$\mathrm{Tor}_i^R\left(N, \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M_t\right) \cong \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(N, M_t).$$

Proposição 1.6.6 ([41, Proposição 3.4.14]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e sejam N e M dois R -módulos. Então, temos que:

- (1) $D(\mathrm{Tor}_i^R(N, M)) \cong \mathrm{Ext}_R^i(N, D(M))$;
- (2) $\mathrm{Tor}_i^R(N, D(M)) \cong D(\mathrm{Ext}_R^i(N, M))$, com a necessidade de que N seja um R -módulo finitamente gerado.

Observação 1.6.7 Na Proposição 1.6.6, temos que $D(\bullet) = \mathrm{Hom}_R(\bullet, E_R(R/\mathfrak{m}))$ é o módulo dual Matlis, com $E_R(R/\mathfrak{m})$ a envoltória injetiva do corpo residual $R/\mathfrak{m}$. (Para mais detalhes sobre a envoltória injetiva, ver Apêndice B.)

1.7 Grau e profundidade de um módulo

Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Um elemento x de R é dito ser um **não divisor de zero** sobre M , se $xm \neq 0$ para todo elemento não nulo $m \in M$.

Se além disso, temos que $xM \neq M$ então o elemento x é dito ser **regular** sobre M , ou M -regular. Uma sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ de elementos de R é dita ser uma **sequência regular** sobre o R -módulo M , se x_1 é M -regular e x_i é regular sobre $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ para cada $i = 2, \dots, n$, ou seja, temos que:

- (a) para todo $1 \leq i \leq n$, o elemento x_i é um não divisor de zero sobre $M/(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})M$

(b) e também, $(x_1, x_2, \dots, x_n) M \neq M$.

Esta tal sequência, também é chamada simplesmente de uma M -sequência. Se retirarmos a hipótese de que $(x_1, x_2, \dots, x_n) M \neq M$, obtemos a noção de uma **sequência fracamente regular** sobre o R -módulo M . Quando $M = R$, dizemos que $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma sequência regular.

Observação 1.7.1 Uma M -sequência $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ contida em um ideal I de R , é dita ser maximal em I se a sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ não é uma M -sequência, para qualquer $x_{n+1} \in I$.

O próximo teorema, nos fornece que todas as sequências regulares sobre o R -módulo M maximais em um ideal I de R , com $IM \neq M$, possuem o mesmo comprimento, se M é finitamente gerado sobre R . Este resultado é conhecido como **Teorema de Rees**.

Teorema 1.7.2 (Rees) ([9, Teorema 1.2.5]) Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal próprio de R tal que $IM \neq M$. Então, todas as sequências regulares sobre M , maximais em I , possuem o mesmo comprimento n , o qual é dado por:

$$n = \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

Definição 1.7.3 ([9, Definição 1.2.6]) O comprimento comum de todas as M -sequências maximais em I , dado no Teorema 1.7.2, é chamado o **grau** de I sobre M e é denotado por $\text{grade}(I, M)$. Além disso, convencionamos que, nas mesmas condições anteriores, se $IM = M$ então $\text{grade}(I, M) = \infty$. No caso em que $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local e Noetheriano, nas mesmas hipóteses anteriores, a **profundidade** de M , que é denotada por $\text{depth}(M)$, é o grau de $\mathfrak{m}$ sobre M , ou seja, temos que:

$$\text{grade}(\mathfrak{m}, M) = \text{depth}(M).$$

O próximo teorema é uma consequência do Teorema 1.7.2.

Teorema 1.7.4 ([9, Teorema 1.2.8]) Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo não-nulo e finitamente gerado. Então, temos que

$$\text{depth}(M) = \min \{i \mid \text{Ext}_R^i(k, M) \neq 0\}.$$

1.7.1 Módulos Cohen-Macaulay

Definição 1.7.5 ([14, Definição 7.7.1]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Um R -módulo finitamente gerado M é dito ser um R -módulo **Cohen-Macaulay** se $M = 0$ ou M é não nulo e $\text{depth}(M) = \dim(M)$. Se o R -módulo R é um módulo Cohen-Macaulay, então ele é denominado um anel Cohen-Macaulay. Um módulo **Cohen-Macaulay maximal** é um R -módulo Cohen-Macaulay M tal que $\dim(M) = \dim(R)$.

1.7.2 Módulos (I, J) -Cohen-Macaulay

Sejam I, J dois ideais de R . Como uma generalização do conceito de módulos Cohen-Macaulay, vamos introduzir o conceito de módulos (I, J) -Cohen-Macaulay. Para este fim, vamos usar o conceito de grau de um par de ideais sobre um R -módulo M . Tendo em mente o grau de um ideal sobre um R -módulo M , o qual foi dado na Definição 1.7.3, fornecemos a seguinte noção.

Definição 1.7.6 ([1, Definição 2.1]) Sejam I, J dois ideais do anel Noetheriano R e seja M um R -módulo finitamente gerado. Definimos o grau de (I, J) sobre M da seguinte maneira:

$$\text{grade}(I, J, M) = \inf \left\{ \text{grade}(\mathfrak{a}, M) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \right\},$$

se este ínfimo existe, e ∞ caso contrário, onde o conjunto $\tilde{W}(I, J)$ é dado, de acordo com [43, Definição 3.1], da seguinte forma:

$$\tilde{W}(I, J) := \{ \mathfrak{a} \subseteq R \mid \mathfrak{a} \text{ é ideal de } R \text{ e } I^n \subseteq \mathfrak{a} + J, \text{ para algum } n \in \mathbb{N} \}.$$

Observação 1.7.7 Tratamos mais sobre o conjunto $\tilde{W}(I, J)$ no Capítulo 2. Note que, pela Definição 1.7.6, se $J = 0$, então o $\text{grade}(I, J, M)$ coincide com o $\text{grade}(I, M)$.

Definição 1.7.8 ([1, Definição 3.5]) Seja R um anel Noetheriano e sejam I, J dois ideais de R . Um R -módulo finitamente gerado M é chamado um R -módulo (I, J) -Cohen-Macaulay se $M \neq 0$ e $\text{grade}(I, J, M) = \dim(M/JM)$ ou se $M = 0$. Se R é ele mesmo um módulo (I, J) -Cohen-Macaulay, dizemos que R é um anel (I, J) -Cohen-Macaulay.

Observação 1.7.9 Note que, pela Definição 1.7.8, se M é um R -módulo (I, J) -Cohen-Macaulay, então J é um ideal próprio de R . Também, se na Definição 1.7.8 temos que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano, $I = \mathfrak{m}$ e $J = 0$, então o conceito de R -módulos finitamente gerados (I, J) -Cohen-Macaulay coincide com o conceito de R -módulos Cohen-Macaulay.

1.7.3 Módulos co-Cohen-Macaulay

Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Um elemento x de R é dito ser um **divisor de zero** sobre M , se existe um elemento não nulo $m \in M$ tal que $xm = 0$.

Se além disso, temos que $xM = M$ então, de acordo com [33, Definição 3.1], dizemos que o elemento x de R é **coregular** sobre M , ou M -coregular. Uma sequência ordenada $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n$ de elementos de R é dita ser uma **sequência coregular** sobre o R -módulo M , se $(0 :_M (x_1, \dots, x_n)) \neq \{0\}$ e além disso temos que $(0 :_M (x_1, \dots, x_{i-1})) \xrightarrow{x_i} (0 :_M (x_1, \dots, x_{i-1}))$ é sobrejetiva, para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, temos que:

(a) o R -módulo $(0 :_M (x_1, \dots, x_n)) \neq \{0\}$; e

(b) x_i é um elemento coregular sobre $(0 :_M (x_1, \dots, x_{i-1}))$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Esta tal sequência, também é chamada simplesmente de uma sequência M -coregular.

Observação 1.7.10 Relembramos que uma sequência de elementos $\mathbf{x} = x_1, \dots, x_s$ contida em um ideal I de R , é uma sequência M -coregular maximal se para todo $x_{s+1} \in I$, a sequência $x_1, \dots, x_s, x_{s+1}$ não é M -coregular.

Definição 1.7.11 ([33, Definição 3.2]) Seja I um ideal do anel Noetheriano R , e seja M um R -módulo. Definimos a **largura** de I sobre M , e denotamos por $\text{width}_I(M)$, como sendo o supremo dos comprimentos de todas as sequências M -coregulares maximais no ideal I . Se tais sequências não existem, então nós escrevemos $\text{width}_I(M) = \infty$.

Observação 1.7.12 Temos o seguinte fato: para R um anel Noetheriano, I um ideal próprio qualquer de R , e para qualquer R -módulo Artiniano M , temos que $\text{width}_I(M) \leq \text{Ndim}(M) < \infty$, sempre é válido.

Definição 1.7.13 ([42]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Um R -módulo Artiniano M é dito ser um módulo **co-Cohen-Macaulay** se, e somente se, $M \neq 0$ e a igualdade $\text{width}_{\mathfrak{m}}(M) = \text{Ndim}(M)$ é válida, ou se $M = 0$.

Capítulo 2

Módulo de cohomologia local e de homologia local

Neste capítulo, apresentamos pré-requisitos da teoria que são necessários para o entendimento de nossos resultados.

2.1 O funtor de cohomologia local

Para prosseguir com o nosso estudo, precisamos introduzir o **módulo de cohomologia local** de um R -módulo M com respeito a um ideal de R , e discutir algumas de suas propriedades. Este R -módulo é também chamado módulo de cohomologia local usual.

De acordo com [7, Definição 1.2], para um R -módulo M e um ideal I de R , o R -módulo de I -torção de M é o seguinte conjunto:

$$\Gamma_I(M) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0 :_M I^n) = \{m \in M \mid I^n m = 0, \text{ para algum inteiro } n \geq 1\}.$$

Observação 2.1.1 ([7, Observação 1.4]) Sendo M um R -módulo e I, J dois ideais de R , temos as propriedades:

- (1) $\Gamma_0(M) = M$ e $\Gamma_R(M) = 0$;
- (2) Se $I \subseteq J$ então $\Gamma_J(M) \subseteq \Gamma_I(M)$;
- (3) Suponha que R é anel Noetheriano; sendo assim, temos que I e J são ideais finitamente gerados e portanto, se $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ então $\Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$;
- (4) Temos que $\Gamma_{I+J}(M) = \Gamma_I(M) \cap \Gamma_J(M)$;
- (5) Seja N um R -módulo. Se $h : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de R -módulos então, $h(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$.

De acordo com a Observação 2.1.1 (5), para um R -homomorfismo $h : M \rightarrow N$ temos a inclusão $h(\Gamma_I(M)) \subseteq \Gamma_I(N)$. Consequentemente, a aplicação $\Gamma_I(h) : \Gamma_I(M) \rightarrow \Gamma_I(N)$ é definida de modo que ela coincide com h sobre $\Gamma_I(M)$, ou seja, ela é a restrição de h sobre $\Gamma_I(M)$. Desta forma, $\Gamma_I(-)$ torna-se um funtor aditivo e covariante da categoria de todos os R -módulos e R -homomorfismos para ela mesma. Denominamos $\Gamma_I(-)$ o funtor de I -torção. Dizemos que M é um R -módulo de I -torção (respectivamente, é um R -módulo livre-de- I -torção) precisamente quando temos que $\Gamma_I(M) = M$ (respectivamente, quando temos que $\Gamma_I(M) = 0$).

Proposição 2.1.2 ([9, Proposição 3.5.1]) Para I um ideal próprio de R , temos que o funtor de I -torção $\Gamma_I(-) : \zeta \longrightarrow \zeta$ é um funtor aditivo, exato à esquerda e covariante.

A próxima definição, nos fornece o módulo de cohomologia local usual.

Definição 2.1.3 ([9, Definição 3.5.2]) Os funtores de cohomologia local com respeito a um ideal I de R , denotados por $H_I^i(-)$ para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$, são os funtores derivados à direita de $\Gamma_I(-)$ (veja mais sobre funtores derivados no Apêndice D).

Em outras palavras, sendo M um R -módulo, se $\mathbf{I}^\bullet$ é uma resolução injetiva do R -módulo M , então temos que $H_I^i(M) \cong H^i(\Gamma_I(\mathbf{I}_M^\bullet))$, para todo $i \geq 0$.

O R -módulo $H_I^i(M)$ é denominado o i -ésimo **módulo de cohomologia local** de M com respeito ao ideal I .

Observação 2.1.4 ([9, Observação 3.5.3]) Para $\mathfrak{a}$ um ideal de R , notemos as seguintes propriedades do R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$.

- (1) Seja M um R -módulo qualquer. Então, temos que $H_{\mathfrak{a}}^0(M) \cong \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ e $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$, para todo $i < 0$.
- (2) Se E é um R -módulo injetivo, então temos que $H_{\mathfrak{a}}^i(E) = 0$, para todo $i > 0$.
- (3) Uma sequência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ fornece uma sequência exata longa da seguinte forma:

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}(P) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^1(N) \rightarrow \dots \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^{i-1}(P) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(N) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(M) \rightarrow H_{\mathfrak{a}}^i(P) \rightarrow \dots$$

Teorema 2.1.5 ([8, Teorema 3.4.10]) Seja R um anel Noetheriano e $\mathfrak{a}$ um ideal próprio de R . Para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$, temos que o funtor de cohomologia local $H_{\mathfrak{a}}^i(-)$, com respeito a um ideal, comuta com limites diretos.

O teorema a seguir, caracteriza o módulo de cohomologia local com respeito a um ideal em termos de limite direto de módulos Ext, da seguinte maneira.

Teorema 2.1.6 ([26, Teorema 7.8]) Seja M um R -módulo qualquer, com R um anel Noetheriano, e seja $\mathfrak{a}$ um ideal próprio de R . Então, temos que existem R -isomorfismos:

$$H_{\mathfrak{a}}^i(M) \cong \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M),$$

para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração Para cada R -módulo N e para todo inteiro $1 \leq n \in \mathbb{N}$, temos o seguinte monomorfismo:

$$\Psi : \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, N) \rightarrow \{x \in N \mid \mathfrak{a}^n x = 0\} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N),$$

dado por $\Psi(f) = f(\bar{1})$. De fato, note que Ψ é um homomorfismo de R -módulos, uma vez que $\Psi(f + g) = (f + g)(\bar{1}) = f(\bar{1}) + g(\bar{1}) = \Psi(f) + \Psi(g)$ e para todo $r \in R$ temos que $\Psi(rf) = (rf)(\bar{1}) := rf(\bar{1}) = r\Psi(f)$; além disso, Ψ é injetora, pois sendo $\text{Ker}(\Psi) = \{f \in \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, N) \mid f(\bar{1}) = 0\}$ temos, desta forma, para $g \in \text{Ker}(\Psi)$ que $g(\bar{r}) = g(r\bar{1}) = rg(\bar{1}) = 0$, para todo $r \in R$, e assim $g(\bar{r}) = 0$, para todo $\bar{r} \in R/\mathfrak{a}^n$ e com isso, $g \equiv 0$, logo $\text{Ker}(\Psi) = \{0\}$ e assim Ψ é injetora.

Com esta identificação, temos um sistema direto de R -módulos da seguinte maneira:

$$\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, N) \subseteq \dots \subseteq \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, N) \subseteq \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^{n+1}, N) \subseteq \dots,$$

que são R -submódulos de $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Desta forma, temos que seu limite direto (ou seja, digamos sua união) é $\Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$. Em outras palavras, obtemos o seguinte:

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, N) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(N).$$

Agora, seja $\mathbf{I}^{\bullet} : 0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \dots$ uma resolução injetiva do R -módulo M , e considere o complexo de cadeias $\mathbf{I}_M^{\bullet} : 0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \dots$, ou seja, $\mathbf{I}_M^{\bullet}$ é a resolução injetiva deletada do R -módulo M . Pelo feito anteriormente, temos que

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, E^i) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(E^i),$$

ou seja, a construção do sistema direto anterior é funtorial; logo, temos que:

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, \mathbf{I}_M^{\bullet}) = \Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathbf{I}_M^{\bullet}).$$

Desde que, pelo Teorema 2.1.5, o funtor $H_{\mathfrak{a}}^i(\bullet)$ comuta com limite direto, segue que temos o isomorfismo:

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H^i(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, \mathbf{I}_M^{\bullet})) \cong H^i(\Gamma_{\mathfrak{a}}(\mathbf{I}_M^{\bullet})) := H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

Como, por definição, temos que $H^i(\text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}^n, \mathbf{I}_M^{\bullet})) = \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, M)$, segue o resultado como enunciado. ■

2.1.1 Alguns resultados sobre cohomologia local usual

Vamos colocar em pauta alguns resultados clássicos sobre o módulo de cohomologia local usual. A teoria de cohomologia local já foi estudada por muitos pesquisadores, e ainda continua sendo vista por se tratar de uma teoria importante em álgebra comutativa.

Primeiramente, vamos recordar a definição de dimensão de Krull de um R -módulo M que não é necessariamente finitamente gerado.

Seja M um R -módulo não-nulo, o qual não é necessariamente finitamente gerado, onde R é um anel Noetheriano. A dimensão de Krull, $\dim(M)$ ou $\dim_R(M)$, de M é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos de R que estão no suporte de M , se este supremo existe, e é ∞ caso contrário.

Adotamos a convenção de que a dimensão do R -módulo nulo é igual à -1 .

O teorema a seguir, diz respeito à artinianidade do módulo de cohomologia local usual.

Teorema 2.1.7 (O módulo de cohomologia local Artiniano) ([8, Teorema 7.1.3]) Suponhamos que $(R, \mathfrak{m}, k)$ é um anel local e Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, o R -módulo $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ sempre é Artiniano, para todo $i \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$.

Os próximos dois resultados, nos fornecem, respectivamente, anulamento e não-anulamento de cohomologia local usual.

Teorema 2.1.8 (O Teorema de anulamento de Grothendieck) ([8, Teorema 6.1.2]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo qualquer com $\mathfrak{a}$ um ideal próprio de R . Então, temos que $H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0$, para todo $i > \dim(M)$.

Teorema 2.1.9 (O Teorema de não-anulamento de Grothendieck) ([8, Teorema 6.1.4]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja M um R -módulo não-nulo, finitamente gerado e de dimensão n . Então, temos que $H_{\mathfrak{m}}^n(M) \neq 0$.

Observamos que existe uma generalização de $H_I^i(M)$, a qual é definida por:

$$H_I^i(N, M) = \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(N/I^t N, M).$$

A respeito deste R -módulo, existem muitas questões e propriedades similares a cohomologia local usual. Para ver mais detalhes, ver [19], [30], e outros.

2.1.2 Cohomologia local com suporte em um par de ideais

Colocamos resultados importantes sobre o módulo de cohomologia local com suporte em um par de ideais, o qual é uma generalização da cohomologia local usual.

Seja R um anel Noetheriano. Para um R -módulo M , de acordo com [43, Definição 1.1], denotamos por $\Gamma_{I,J}(M)$ o conjunto de elementos x de M tais que $I^n x \subseteq Jx$, para algum inteiro $n \geq 1$. Portanto, temos o seguinte conjunto:

$$\Gamma_{I,J}(M) := \{x \in M \mid I^n x \subseteq Jx, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dizemos que o R -módulo M é de (I, J) -torção (respectivamente, é livre-de- (I, J) -torção) precisamente quando $\Gamma_{I,J}(M) = M$ (respectivamente, quando $\Gamma_{I,J}(M) = 0$). Note que quando fazemos o ideal $J = 0$ em $\Gamma_{I,J}(M)$ nós temos a definição do R -módulo $\Gamma_I(M)$, conforme colocado anteriormente.

Note que temos uma caracterização dos elementos que estão em $\Gamma_{I,J}(M)$. Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo qualquer; temos que um elemento $x \in M$ pertence à $\Gamma_{I,J}(M)$ se, e somente se, $I^n \subseteq \text{ann}(x) + J$, para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $\text{ann}(x) := \{r \in R \mid rx = 0\}$ é o anulador de x . De fato, para $x \in M$, suponha que $I^n \subseteq \text{ann}(x) + J$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $a \in I^n$ qualquer. Logo $ax \in I^n x$, e por hipótese temos que $a \in \text{ann}(x) + J$; assim, $a = r + j$, para $r \in \text{ann}(x)$ e $j \in J$. Com isso, $ax = (r + j)x = rx + jx = jx$, pois $rx = 0$. Portanto, $ax \in Jx$, e por consequência $I^n x \subseteq Jx$, ou seja, $x \in \Gamma_{I,J}(M)$. Reciprocamente, suponha que I^n não está contido em $\text{ann}(x) + J$. Assim, existe $a \in I^n$ tal que $a \notin \text{ann}(x) + J$. Logo, a nunca se escreve como $a = r + j$, para $r \in \text{ann}(x)$ e $j \in J$. Desta forma, $ax \neq rx + jx = jx$, para todo $j \in J$. Então, existe $a \in I^n$ tal que $ax \notin Jx$. Portanto, $I^n x$ não está contido em Jx , o que contraria a hipótese.

Além disso, para um R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ temos a seguinte inclusão de R -módulos $f(\Gamma_{I,J}(M)) \subseteq \Gamma_{I,J}(N)$: de fato, se temos que $p \in f(\Gamma_{I,J}(M))$ segue que $p = f(x)$, para algum $x \in \Gamma_{I,J}(M)$; desta forma, $I^n x \subseteq Jx$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e então como f é homomorfismo de R -módulos obtemos que $I^n f(x) \subseteq Jf(x)$, para $f(x) = p \in N$, ou seja, $I^n p \subseteq Jp$, para $p \in N$; portanto, $p \in \Gamma_{I,J}(N)$ e assim segue a inclusão desejada.

Portanto, temos uma aplicação bem definida $\Gamma_{I,J}(f) : \Gamma_{I,J}(M) \rightarrow \Gamma_{I,J}(N)$, que toma $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ e leva em $f(x)$. Desta forma, $\Gamma_{I,J}(\bullet)$ torna-se um funtor covariante e aditivo da categoria de todos os R -módulos e R -homomorfismos para essa mesma categoria: de fato, ele é um funtor uma vez que:

- (1) $\Gamma_{I,J}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\Gamma_{I,J}(f))(\Gamma_{I,J}(g(x))) = (\Gamma_{I,J}(f) \circ \Gamma_{I,J}(g))(x)$
e então $\Gamma_{I,J}(f \circ g) \equiv \Gamma_{I,J}(f) \circ \Gamma_{I,J}(g)$, ou seja, preserva a composição de morfismos; e além disso,
- (2) $\Gamma_{I,J}(\text{Id})(x) = \text{Id}(x) = \text{Id}_{\Gamma_{I,J}(M)}(x)$, e assim $\Gamma_{I,J}(\text{Id}) \equiv \text{Id}_{\Gamma_{I,J}(M)}$, isto é, preserva identidades.

Além disso, notemos que: $\Gamma_{I,J}(f + g)(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \Gamma_{I,J}(f)(x) + \Gamma_{I,J}(g)(x)$. Portanto, é um funtor covariante e aditivo. Denominamos o funtor $\Gamma_{I,J}(\bullet)$ como

sendo o funtor de (I, J) -torção. Note que se fazemos o ideal $J = 0$ na definição do funtor de (I, J) -torção, temos o funtor de I -torção $\Gamma_I(\bullet)$, como já definido.

Teorema 2.1.10 ([43, Lema 1.2]) O funtor de (I, J) -torção $\Gamma_{I,J}(\bullet)$ é um funtor exato à esquerda sobre a categoria de todos os R -módulos e R -homomorfismos.

Demonstração Seja uma sequência exata curta de R -módulos e R -homomorfismos dada como segue: $0 \xrightarrow{f_1} L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{g_1} 0$, a qual chamaremos de sequência $(*)$. Devemos mostrar que a sequência:

$$0 \longrightarrow \Gamma_{I,J}(L) \xrightarrow{\Gamma_{I,J}(f)} \Gamma_{I,J}(M) \xrightarrow{\Gamma_{I,J}(g)} \Gamma_{I,J}(N),$$

é uma sequência exata.

Como $\Gamma_{I,J}(f) : \Gamma_{I,J}(L) \longrightarrow \Gamma_{I,J}(M)$ toma x e leva em $f(x)$, e temos que f é um monomorfismo, uma vez que $(*)$ é sequência exata curta, segue que o núcleo da aplicação $\Gamma_{I,J}(f)$ dado por $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(f)) = \{x \in \Gamma_{I,J}(L) \mid f(x) = 0\} \subseteq \text{Ker}(f) = \{0\}$, logo $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(f)) = \{0\}$ e portanto, $\Gamma_{I,J}(f)$ é um monomorfismo.

Agora, note que $\text{Im}(\Gamma_{I,J}(f)) = \{f(x) \mid x \in \Gamma_{I,J}(L)\} \subseteq \text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$. Então, dado um elemento $y \in \text{Im}(\Gamma_{I,J}(f))$, temos que existe $x \in \Gamma_{I,J}(L)$ tal que $\Gamma_{I,J}(f)(x) = f(x) = y \in \Gamma_{I,J}(M)$. Uma vez que $y \in \text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$, segue que $g(y) = 0$. Desta forma, $\Gamma_{I,J}(g)(y) = g(y) = 0$ e portanto, $y \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(g))$ e assim $\text{Im}(\Gamma_{I,J}(f)) \subseteq \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(g))$. Agora, vamos provar a inclusão contrária.

Para tanto, seja $x \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(g))$ e como $x \in \Gamma_{I,J}(M)$, segue por definição que existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $I^n x \subseteq Jx$. Além disso, como $g(x) = 0$ temos que $x \in \text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$, pois $(*)$ é sequência exata curta, e assim existe um elemento $y \in L$ com $f(y) = x$. Vamos mostrar que $y \in \Gamma_{I,J}(L)$. De fato, para cada $a \in I^n$, temos $f(ay) = af(y) = ax \in I^n x \subseteq Jx$ e consequentemente, existe um elemento $b \in J$ com $ax = bx$. Desta forma, note que:

$$f((a-b)y) = (a-b)f(y) = af(y) - bf(y) = ax - bx = 0,$$

e então $(a-b)y \in \text{Ker}(f) = \{0\}$, pois f é um monomorfismo.

A fortiori, $ay = by$, com $b \in J$, e assim $ay \in Jy$. Portanto, $I^n y \subseteq Jy$. Segue que $y \in \Gamma_{I,J}(L)$. Desta forma, $x \in \text{Im}(\Gamma_{I,J}(f))$. Podemos então concluir que $\Gamma_{I,J}(\bullet)$ é um funtor exato à esquerda, como queríamos demonstrar. ■

No próximo resultado, temos algumas propriedades básicas do funtor de (I, J) -torção. Ou seja, para um R -módulo M qualquer, vamos ver como o R -submódulo $\Gamma_{I,J}(M)$ se comporta sob certas hipóteses.

Proposição 2.1.11 ([43, Proposição 1.4]) Sejam I_1, I_2, J_1, J_2 ideais próprios de R , onde R é um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo qualquer. Temos as seguintes propriedades:

$$(1) \Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_2}(M)) = \Gamma_{I_2, J_2}(\Gamma_{I_1, J_1}(M)).$$

- (2) Se $I_1 \subseteq I_2$, então $\Gamma_{I_2, J_1}(M) \subseteq \Gamma_{I_1, J_1}(M)$.
- (3) Se $J_1 \subseteq J_2$, então $\Gamma_{I_1, J_1}(M) \subseteq \Gamma_{I_1, J_2}(M)$.
- (4) $\Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_2, J_1}(M)) = \Gamma_{I_1 + I_2, J_1}(M)$.
- (5) $\Gamma_{I_1, J_1}(\Gamma_{I_1, J_2}(M)) = \Gamma_{I_1, J_1 J_2}(M) = \Gamma_{I_1, J_1 \cap J_2}(M)$.

Para I e J ideais próprios do anel Noetheriano R , de acordo com [43, Definição 1.5], $W(I, J)$ denota o conjunto de ideais primos $\mathfrak{p}$ de R tais que $I^n \subseteq J + \mathfrak{p}$, para algum inteiro $n \geq 1$. Ou seja, temos o seguinte conjunto:

$$W(I, J) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I^n \subseteq J + \mathfrak{p}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observe, que para o ideal $J = 0$, temos que $W(I, 0)$ coincide com o conjunto $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Vamos exibir algumas propriedades de $W(I, J)$.

Proposição 2.1.12 ([43, Proposição 1.6]) Sejam I_1, I_2, J_1, J_2 ideais próprios do anel Noetheriano R . Temos as seguintes propriedades:

- (1) Se $I_1 \subseteq I_2$, então $W(I_1, J_1) \supseteq W(I_2, J_1)$.
- (2) Se $J_1 \subseteq J_2$, então $W(I_1, J_1) \subseteq W(I_1, J_2)$.
- (3) $W(I_1 + I_2, J_1) = W(I_1, J_1) \cap W(I_2, J_1)$.
- (4) $W(I_1, J_1 J_2) = W(I_1, J_1 \cap J_2) = W(I_1, J_1) \cap W(I_1, J_2)$.
- (5) $W(I_1, J_1) = W(\sqrt{I_1}, J_1) = W(I_1, \sqrt{J_1})$.

Vamos introduzir o módulo de cohomologia local de um R -módulo M com respeito ao par de ideais (I, J) .

Dado um R -módulo M , consideremos uma qualquer resolução injetiva de M :

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \rightarrow \dots$$

Vamos aplicar o funtor $\Gamma_{I, J}(\bullet)$ à resolução injetiva deletada:

$$\mathbf{I}_M^\bullet : 0 \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \rightarrow \dots$$

Obtemos então o complexo de cocadeias, dado da seguinte maneira:

$$0 \rightarrow \Gamma_{I, J}(E^0) \xrightarrow{\Gamma_{I, J}(d^0)} \Gamma_{I, J}(E^1) \xrightarrow{\Gamma_{I, J}(d^1)} \Gamma_{I, J}(E^2) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_{I, J}(E^n) \xrightarrow{\Gamma_{I, J}(d^n)} \Gamma_{I, J}(E^{n+1}) \rightarrow \dots$$

Desta forma, definimos os seguintes R -módulos:

$$H_{I, J}^0(M) := \text{Ker}(\Gamma_{I, J}(d^0)) / \{0\} = \Gamma_{I, J}(M) \text{ e } H_{I, J}^i(M) := \text{Ker}(\Gamma_{I, J}(d^i)) / \text{Im}(\Gamma_{I, J}(d^{i-1})),$$

para $1 \leq i \in \mathbb{Z}$. Este R -módulo definido dessa maneira é denominado o i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito ao par de ideais (I, J) , para I e J ideais próprios de R .

Em outras palavras:

Definição 2.1.13 ([43, Definição 1.3]) Para um inteiro $i \geq 0$, o i -ésimo funtor derivado à direita de $\Gamma_{I,J}(\bullet)$ é denotado por $H_{I,J}^i(\bullet)$ e é referido como o i -ésimo funtor de cohomologia local com respeito ao par de ideais (I, J) . Além disso, o R -submódulo $\Gamma_{I,J}(M)$ de M é dito ser a parte de (I, J) -torção do R -módulo M .

Observe que $H_{I,J}^0(M) = \Gamma_{I,J}(M)$, uma vez que $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0)) = \Gamma_{I,J}(M)$: de fato, como $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0)) = \{x \in \Gamma_{I,J}(E^0) \mid d^0(x) = 0\} \subseteq \text{Ker}(d^0)$, e pela definição de resolução injetiva temos que $\text{Ker}(d^0) = M$ obtemos então que $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0)) \subseteq M$; assim, dado $x \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0))$ segue que $x \in M$ e como $x \in \Gamma_{I,J}(E^0)$, existe $n \geq 1$ tal que $I^n x \subseteq Jx$ tendo desta forma, que $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ e portanto, $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0)) \subseteq \Gamma_{I,J}(M)$; agora, seja $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ e assim temos que $x \in M = \text{Ker}(d^0)$ e existe $m \geq 1$ tal que $I^m x \subseteq Jx$ e então $x \in \Gamma_{I,J}(E^0)$, com $d^0(x) = 0$; portanto, $x \in \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0))$ e com isso $\Gamma_{I,J}(M) \subseteq \text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0))$, mostrando assim que $\text{Ker}(\Gamma_{I,J}(d^0)) = \Gamma_{I,J}(M)$, como queríamos inicialmente.

Além disso, note que quando fazemos o ideal $J = 0$ no R -módulo $H_{I,J}^i(M)$ temos definido o i -ésimo módulo de cohomologia local de M com respeito a um único ideal, conforme colocado anteriormente.

2.1.3 Alguns resultados e teoremas de anulamento

Proposição 2.1.14 ([43, Corolário 1.13 (1) e (5)]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo. Temos que $H_{I,J}^i(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção, para qualquer inteiro $i \geq 0$. Agora, se M é um R -módulo de (I, J) -torção, então $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todo $0 < i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.1.15 ([43, Corolário 1.13 (3) e (4)]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo. Então, temos que $M/\Gamma_{I,J}(M)$ é um R -módulo livre-de- (I, J) -torção, e existe um R -isomorfismo $H_{I,J}^i(M) \cong H_{I,J}^i(M/\Gamma_{I,J}(M))$, para todo $0 < i \in \mathbb{Z}$.

Proposição 2.1.16 ([43, Proposição 2.6]) Os funtores $H_{I,J}^i(-)$, para $i \geq 0$, comutam com limites diretos, isto é, se $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}$, onde Ω é um conjunto direcionado, é um sistema direto de R -módulos, então existe um isomorfismo:

$$H_{I,J}^i\left(\varinjlim_{\lambda \in \Omega} M_\lambda\right) \cong \varinjlim_{\lambda \in \Omega} H_{I,J}^i(M_\lambda),$$

para qualquer inteiro $i \geq 0$.

Teorema 2.1.17 ([43, Teorema 2.7]) Seja R um anel Noetheriano e sejam I e J ideais próprios de R . Além disso, seja $\phi : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis, onde S é um anel Noetheriano, e seja N um S -módulo. Suponha que ϕ satisfaz a igualdade $\phi(J) = JS$. Então, existe um isomorfismo $H_{I,J}^i(N) \cong H_{IS,JS}^i(N)$, visto como S -módulos, para qualquer inteiro $i \geq 0$.

A seguir, obteremos uma relação entre $H_I^i(\bullet)$ e $H_{I,J}^i(\bullet)$, e colocamos alguns resultados para o anulamento do R -módulo $H_{I,J}^i(M)$. Primeiramente, vamos introduzir uma definição necessária.

Definição 2.1.18 ([43, Definição 3.1]) Seja $\tilde{W}(I, J)$ denotando o conjunto de ideais $\mathfrak{a}$ do anel Noetheriano R tais que $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J$, para algum inteiro $n \geq 1$. Ou seja, temos que:

$$\tilde{W}(I, J) = \{\mathfrak{a} \subseteq R \mid \mathfrak{a} \text{ é ideal de } R \text{ e } I^n \subseteq \mathfrak{a} + J, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos uma relação de ordem parcial sobre $\tilde{W}(I, J)$ da seguinte maneira: $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, para quaisquer $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \tilde{W}(I, J)$.

Observação 2.1.19 Temos que $\tilde{W}(I, J)$ é um conjunto direcionado. De fato, dados $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \tilde{W}(I, J)$, temos que $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J$ e $I^s \subseteq \mathfrak{b} + J$, para certos $n, s \in \mathbb{N}$; tome então $n_0 = \max\{n, s\}$ e assim segue que $I^{n_0} \subseteq (\mathfrak{a} + J) \cap (\mathfrak{b} + J) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + J \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap J + J \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + J$. Portanto, $I^{n_0} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + J$, o que implica o seguinte $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \in \tilde{W}(I, J)$ e temos $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ e $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Portanto, $\tilde{W}(I, J)$ é um conjunto dirigido.

O próximo teorema, nos fornece uma relação entre o R -módulo $H_{I,J}^i(M)$ e o R -módulo $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Teorema 2.1.20 ([43, Teorema 3.2]) Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Então, existe um isomorfismo:

$$H_{I,J}^i(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(M),$$

para qualquer inteiro $i \geq 0$.

Temos os resultados sobre o anulamento do módulo de cohomologia local com respeito a um par de ideais.

Proposição 2.1.21 ([43, Corolário 4.2]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, temos que as seguintes condições são equivalentes:

- (1) M é um R -módulo de (I, J) -torção.
- (2) $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todo $0 < i \in \mathbb{Z}$.

Teorema 2.1.22 ([43, Teorema 4.3]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Suponha que o ideal $J \neq R$. Então, temos que $H_{I,J}^i(M) = 0$, para qualquer $i > \dim(M/JM)$.

O Teorema 2.1.9, diz que o módulo de cohomologia local usual $H_{\mathfrak{m}}^r(M)$ não se anula, sempre que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano e M é um R -módulo finitamente gerado de dimensão r . O seguinte teorema, pode ser visto como uma generalização deste resultado.

Teorema 2.1.23 ([43, Teorema 4.5]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Suponha que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então, temos a seguinte igualdade:

$$\sup \{i \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\} = \dim(M/JM).$$

Proposição 2.1.24 ([43, Corolário 4.4]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo que não é necessariamente finitamente gerado. Então, temos que $H_{I,J}^i(M) = 0$, para qualquer inteiro $i > \dim(R/J)$.

Mesmo no caso não local, temos o seguinte resultado sobre o anulamento de módulos de cohomologia local com respeito a um par de ideais.

Teorema 2.1.25 ([43, Teorema 4.7]) Seja M um R -módulo finitamente gerado, com R um anel Noetheriano. Então, temos as seguintes propriedades:

- (1) $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todos os inteiros $i > \dim(M)$.
- (2) $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todos os inteiros $i > \dim(M/JM) + 1$.

Os próximos dois resultados são utilizados no Capítulo 3.

Lema 2.1.26 ([43, Lema 4.8(1)]) Seja n um inteiro não-negativo. Suponha que $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i > n$, onde temos que R é anel Noetheriano. Então, para qualquer R -módulo M , temos que $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todo $i > n$.

Lembramos que, para I um ideal de R , $\text{ara}(I)$ é o menor número de elementos de R que são necessários para se gerar um ideal J tal que $\sqrt{I} = \sqrt{J}$, e é chamado de **posto aritmético** de I .

Proposição 2.1.27 ([43, Proposição 4.11]) Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Então, $H_{I,J}^i(M) = 0$ para qualquer inteiro $i > \text{ara}(I\bar{R})$, onde $\bar{R} = R/\sqrt{J + \text{Ann}_R(M)}$.

Observamos que existe uma generalização de $H_{I,J}^i(M)$, a qual é definida por:

$$H_{I,J}^i(N, M) = \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(N, M).$$

A respeito deste R -módulo, existem muitas questões e propriedades similares a cohomologia local no par de ideais. Para ver mais detalhes, ver [45].

2.2 Homologia local usual

Vamos proceder de acordo com [11] para introduzir uma nova notação para o completamento I -ádico de um módulo, para I um ideal de R , conforme foi feito no Capítulo 1, na seção 1.5.

Definição 2.2.1 ([11, Seção 2]) Para R um anel Noetheriano, I um ideal próprio de R e M um R -módulo, considere o sistema inverso de R -módulos $\{M/I^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$, com epimorfismos naturais $\pi_{k,t} : M/I^k M \rightarrow M/I^t M$, para todo $0 < t \leq k$. Usamos:

$$\Lambda_I(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M/I^t M \text{ para denotar o completamento } I\text{-ádico do } R\text{-módulo } M.$$

Desta forma, temos que o funtor do completamento I -ádico $\Lambda_I(-)$ é um funtor aditivo e covariante da categoria de R -módulos e R -homomorfismos para ela mesma. Vamos denotar por $\mathfrak{L}_i^I(M)$ o i -ésimo módulo derivado à esquerda de $\Lambda_I(M)$, para todo $i \geq 0$.

Neste contexto, dizemos que o R -módulo M é completo com respeito à topologia I -ádica se $\Lambda_I(M) \cong M$.

Observação 2.2.2 Agora, sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \tilde{W}(I, J)$, com $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$; logo, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Desta forma, para $1 \leq t \in \mathbb{N}$, temos que $\mathfrak{b}^t \subseteq \mathfrak{a}^t$. Temos então um epimorfismo: $R/\mathfrak{b}^t \rightarrow R/\mathfrak{a}^t$.

Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Uma vez que $- \otimes_R M$ é um funtor covariante e exato à direita, temos que a aplicação $R/\mathfrak{b}^t \otimes_R M \rightarrow R/\mathfrak{a}^t \otimes_R M$ ainda é um epimorfismo. Aplicando $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}}$ ao mapa anterior e sendo que $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}}$ é funtor covariante, temos o mapa $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (R/\mathfrak{b}^t \otimes_R M) \rightarrow \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (R/\mathfrak{a}^t \otimes_R M)$. Ou seja, para os mapas $R/\mathfrak{b}^t \rightarrow R/\mathfrak{a}^t$ obtemos mapas $\Lambda_{\mathfrak{b}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$, definidos para $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, isto é, o R -homomorfismo $\phi_{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}} : \Lambda_{\mathfrak{b}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ é bem definido, sempre que $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, e é tal que:

- (1) $\phi_{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}} : \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ é a aplicação identidade e,
- (2) sendo as aplicações $\phi_{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}} : \Lambda_{\mathfrak{b}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ e $\phi_{\mathfrak{a}, \mathfrak{c}} : \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{c}}(M)$, para $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, temos que: $\phi_{\mathfrak{a}, \mathfrak{c}} \circ \phi_{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}} \equiv \phi_{\mathfrak{b}, \mathfrak{c}}$.

Portanto, a família de R -módulos $\{\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ junto com a família de R -homomorfismos $\{\phi_{\mathfrak{b}, \mathfrak{a}} : \Lambda_{\mathfrak{b}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) \mid \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \tilde{W}(I, J) \text{ com } \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}\}$ nos fornece um **sistema inverso de R -módulos**.

Observação 2.2.3 ([11, Observação 2.1]) Observemos o seguinte:

- (1) Uma vez que o funtor produto tensorial não é exato à esquerda e o funtor limite inverso não é exato à direita sobre a categoria de R -módulos, temos que o funtor $\Lambda_I(-)$ não é nem exato à esquerda e nem exato à direita. Portanto, em geral, $\mathfrak{L}_0^I(-) \neq \Lambda_I(-)$. No entanto, $\mathfrak{L}_0^I(-)$ é um funtor exato à direita e seus funtores derivados à esquerda, para $i > 0$, são os mesmos daqueles de $\Lambda_I(-)$.
- (2) Suponha que R é um anel Noetheriano e que M é um R -módulo finitamente gerado. Uma vez que $\Lambda_I(-)$ é funtor exato sobre R -módulos finitamente gerados, obtemos que $\mathfrak{L}_i^I(M) = 0$, para todo $i > 0$, e também que $\mathfrak{L}_0^I(M) \cong \Lambda_I(M)$.

Em [30, Definição 2.1], temos também definido o completamento I -ádico generalizado, o qual é o R -módulo $\Lambda_I(N, M)$, dos R -módulos N, M da seguinte forma:

$$\Lambda_I(N, M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (R/I^t \otimes_R N \otimes_R M).$$

Note que $\Lambda_I(N, M) \cong \Lambda_I(N \otimes_R M)$ o completamento I -ádico do R -módulo $N \otimes_R M$.

O teorema a seguir, nos fornece uma condição para que $\mathfrak{L}_0^I(M)$ seja isomorfo a $\Lambda_I(M)$.

Teorema 2.2.4 ([11, Teorema 2.3]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo, e I um ideal próprio de R . Suponha que o sistema inverso de R -módulos $\{I^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é estacionário, isto é, existe um inteiro positivo n tal que $I^t M = I^n M$, para todo $t \geq n$. Então, temos o R -isomorfismo $\mathfrak{L}_0^I(M) \cong \Lambda_I(M)$.

Módulos Artinianos com certeza satisfazem as hipóteses do Teorema 2.2.4. Portanto, temos a seguinte consequência imediata.

Corolário 2.2.5 ([11, Corolário 2.4]) Seja R um anel Noetheriano. Seja M um R -módulo Artiniano. Então, o epimorfismo natural $\phi_M : \mathfrak{L}_0^I(M) \rightarrow \Lambda_I(M)$ é um isomorfismo.

Corolário 2.2.6 ([11, Corolário 2.5]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo qualquer. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $IM = M$;
- (2) $\mathfrak{L}_0^I(M) = 0$;
- (3) $\Lambda_I(M) = 0$.

Observação 2.2.7 ([37, Observação 4.6]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo qualquer. Suponha que para um ideal I de R e $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ dado, temos que, para $\mathfrak{a}$ ideal de R , o módulo de cohomologia local $H_I^i(M/\mathfrak{a}^n M) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (de modo análogo, $H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Então, nestas condições, a sequência exata curta de R -módulos

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^n M \rightarrow 0$$

induz um epimorfismo $H_I^i(M/\mathfrak{a}^{n+1} M) \rightarrow H_I^i(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow 0$, de R -módulos não nulos, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, o limite inverso $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_I^i(M/\mathfrak{a}^n M)$ é não nulo.

Apresentamos duas proposições que serão generalizadas no Capítulo 3.

Proposição 2.2.8 ([30, Corolário 2.5]) Seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Se f é sobrejetivo, então o homomorfismo $\Lambda_I(f) : \Lambda_I(M) \rightarrow \Lambda_I(N)$ também é sobrejetivo.

Proposição 2.2.9 ([30, Lema 2.6]) Seja $G \rightarrow L \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos tal que o sistema inverso de R -módulos $\{I^t N\}_{t \in \mathbb{N}}$ é estacionário. Então, a seguinte sequência induzida:

$$\Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(L) \rightarrow \Lambda_I(N) \rightarrow 0,$$

é exata.

2.2.1 A definição de homologia local usual

Vejamos alguns resultados sobre o módulo de homologia local com respeito a um ideal, que utilizamos no decorrer do trabalho. Este R -módulo também é conhecido como o módulo de homologia local usual.

De acordo com o Teorema 2.1.6, temos que o i -ésimo módulo de cohomologia local $H_I^i(M)$ de um R -módulo M com respeito a um ideal I é dado da seguinte maneira:

$$H_I^i(M) = \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/I^t, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Desta forma, de acordo com [11], isto sugere a seguinte definição.

Definição 2.2.10 ([11, Definição 3.1]) Seja I um ideal do anel Noetheriano R e seja M um R -módulo qualquer. O i -ésimo módulo de homologia local $H_i^I(M)$ de M com respeito ao ideal I é definido por:

$$H_i^I(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Este R -módulo, como dado anteriormente, é denominado módulo de homologia local usual. Neste contexto, ressaltamos que, por [5], temos também a definição do módulo de homologia local $H_i^I(N, M)$ de N, M com respeito ao ideal I , a qual é dada por:

$$H_i^I(N, M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(N/I^t N, M),$$

para todo $i \geq 0$. Este R -módulo é estudado por muitos pesquisadores, por exemplo em [30], [29], etc.

Observação 2.2.11 ([11, Observação 3.2]) Vejamos duas observações:

- (1) Note que $H_i^I(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} H_i(R/I^t \otimes_R \mathbf{P}_\bullet)$, onde $\mathbf{P}_\bullet$ é uma resolução projetiva de M . Por outro lado, temos, por definição, que

$$\mathfrak{L}_i^I(M) = H_i \left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (R/I^t \otimes_R \mathbf{P}_\bullet) \right).$$

Desta forma, existem aplicações naturais, para todo $i \geq 0$, $\phi_i : \mathfrak{L}_i^I(M) \rightarrow H_i^I(M)$, que são, de acordo com [15, 1.1], epimorfismos.

- (2) Pela Definição 2.2.10, é visto que $H_0^I(M) \cong \Lambda_I(M)$. Além disso, se M é um R -módulo finitamente gerado, com R um anel Noetheriano, então, pela Observação 2.2.3 (3), temos que para todo $i > 0$, $\mathfrak{L}_i^I(M) = 0$. Portanto, $H_i^I(M) = 0$, para todo $i > 0$, pela parte (1).

2.2.2 Propriedades e Artinianidade de homologia local usual

Proposição 2.2.12 ([11, Proposição 3.3]) Seja M um R -módulo, com R um anel Noetheriano. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Para todo $i \geq 0$, o módulo de homologia local $H_i^I(M)$ de M com respeito a um ideal I é I -separado, isto é,

$$\bigcap_{s \geq 0} I^s H_i^I(M) = 0.$$

- (2) Suponha que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local. Então, para todo $i \geq 0$, temos que:

$$H_i^I(D(M)) \cong D(H_i^I(M)),$$

onde $D(M) = \text{Hom}_R(M, E)$ é o módulo dual Matlis de M , e onde temos que $E = E(R/\mathfrak{m})$ é a envoltória injetiva do corpo residual $R/\mathfrak{m}$. (ver sobre envoltória injetiva no apêndice B)

Lema 2.2.13 ([5, Corolário 2.3]) Seja M um R -módulo, com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja I um ideal de R . Então, temos que:

- (1) $H_i^I(D(M)) = 0$ se, e somente se, $H_i^I(M) = 0$.
- (2) Se M é um R -módulo Artiniano, $H_i^I(M) = 0$ se, e somente se, $H_i^I(D(M)) = 0$.

Lema 2.2.14 ([10, Lema 3.2]) Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo e I um ideal de R gerado por elementos $x_1, x_2, \dots, x_r$; seja $H_i(\bar{x}(t), M)$ o i -ésimo módulo de homologia de M com respeito a sequência $\bar{x}(t) = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_r^t)$. Então, para todo $i \geq 0$, temos que:

$$H_i^I(M) \cong \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} H_i(\bar{x}(t), M).$$

Observação 2.2.15 Seja R um anel Noetheriano, M um R -módulo e seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Considere que tanto R como M estão munidos da topologia $\mathfrak{a}$ -ádica. Temos o seguinte:

- (1) ([23, Propriedade 3.14]) Se M é um R -módulo linearmente compacto, então para cada inteiro positivo n temos que $\mathfrak{a}^n M$ é um R -submódulo fechado de M .
- (2) ([23, Propriedade 3.3]) Se M é um R -módulo linearmente compacto, N é um R -submódulo fechado de M , então N é um R -módulo linearmente compacto.
- (3) ([23, Propriedade 3.5]) Se N é um R -submódulo fechado de M , então M é linearmente compacto se, e somente se, N e M/N são linearmente compactos.

Teorema 2.2.16 ([30, Teorema 3.6]) Seja R um anel Noetheriano, e suponha que N é um R -módulo finitamente gerado e M é um R -módulo linearmente compacto. Então, temos que:

$$H_i^I(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^I(N, M),$$

para todo $i \geq 0$.

A seguinte proposição, nos fornece uma caracterização para o R -módulo $H_i^I(M)$ ser linearmente compacto.

Proposição 2.2.17 ([10, Proposição 3.3]) Seja M um R -módulo linearmente compacto, com R um anel Noetheriano. Então, para todo $i \geq 0$, temos que $H_i^I(M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

A seguinte proposição, nos mostra que módulos de homologia local podem comutar com limites inversos de sistemas inversos de R -módulos linearmente compactos com homomorfismos contínuos.

Proposição 2.2.18 ([10, Proposição 3.4]) Seja $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos com os homomorfismos contínuos. Então, temos que

$$H_i^I \left(\varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^I(M_s).$$

O próximo resultado, nos fornece uma sequência exata longa para o módulo de homologia local usual.

Proposição 2.2.19 ([29, Proposição 2.4]) Seja R um anel Noetheriano e $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos. Então, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local com respeito à um ideal:

$$\dots \rightarrow H_i^I(M') \rightarrow H_i^I(M) \rightarrow H_i^I(M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^I(M') \rightarrow H_0^I(M) \rightarrow H_0^I(M'') \rightarrow 0.$$

Proposição 2.2.20 ([10, Lema 3.9]) Seja M um R -módulo linearmente compacto, com R um anel Noetheriano. Então, para todo $j \geq 0$ temos que:

- (1) $H_i^I(H_j^I(M)) \cong H_j^I(M)$, se $i = 0$,
- (2) $H_i^I(H_j^I(M)) \cong 0$, se $i > 0$.

Teorema 2.2.21 ([10, Lema 3.10]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, temos que:

- (1) $H_i^I(\bigcap_{t>0} I^t M) \cong 0$, se $i = 0$, e
- (2) $H_i^I(\bigcap_{t>0} I^t M) \cong H_i^I(M)$, se $i > 0$.

Proposição 2.2.22 ([29, Proposição 2.5 (1)]) Seja R um anel Artiniano. Se M é um R -módulo finitamente gerado então $H_i^I(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i \geq 0$.

Teorema 2.2.23 ([5, Teorema 3.4]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo Artiniano. Então, para um inteiro positivo $s \geq 1$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $H_i^{\mathfrak{m}}(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s$;
- (2) $\mathfrak{m} \subseteq \text{Rad}(\text{Ann}_R(H_i^{\mathfrak{m}}(M)))$, para todo $i < s$.

2.2.3 Anulamento e resultado para a largura de um módulo

Estabelecemos alguns resultados de anulamento para a homologia local usual, e apresentamos um resultado para o $\text{width}_I(M)$ que é usado nos próximos capítulos.

Lema 2.2.24 ([10, Lema 4.1]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo semidiscreto e linearmente compacto. Então, $H_0^I(M) = 0$ se, e somente se, $xM = M$, para algum $x \in I$.

Lema 2.2.25 ([10, Lema 4.2]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo semidiscreto e linearmente compacto. Suponha que $\text{Soc}(M) = 0$. Então, temos que:

$$H_i^I(M) = 0, \text{ para todo } i > 0.$$

A próxima proposição, envolve a dimensão Noetheriana de um módulo.

Proposição 2.2.26 ([11, Proposição 4.8]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo Artiniano com $\text{Ndim}(M) = d$. Então, para todo $i > d$, temos que $H_i^I(M) = 0$.

Para R um anel Noetheriano, e I um ideal próprio de R , denotamos por $\text{width}_I(M)$ o supremo dos comprimentos de todas as sequências coregulares sobre o R -módulo M , que são maximais no ideal I , e o denominamos a **largura** do R -módulo M (ou, a largura de I sobre M). Se tais sequências não existem, então nós escrevemos $\text{width}_I(M) = \infty$. Relembramos que uma sequência de elementos $x_1, \dots, x_s$ em I é uma sequência coregular sobre M maximal em I , se para todo $x_{s+1} \in I$, a sequência $x_1, \dots, x_s, x_{s+1}$ não é uma sequência coregular sobre o R -módulo M .

Observação 2.2.27 ([10, Observação 4.6 (i)]) Seja R um anel Noetheriano. No caso em que M é um R -módulo Artiniano, temos que $\text{Ndim}(M) < \infty$. Mais geralmente, se M é um R -módulo semidiscreto e linearmente compacto, existe uma sequência exata curta $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow 0$, onde N é um R -módulo finitamente gerado e A é um R -módulo Artiniano. Consequentemente, $\text{Ndim}(M) = \max\{\text{Ndim}(N), \text{Ndim}(A)\} < \infty$. Além disso, temos que $\text{width}_I(M) \leq \text{Ndim}(M)$.

Desta forma, temos pela Observação 2.2.27, que $\text{width}_I(M) < \infty$, quando M é um R -módulo semidiscreto e linearmente compacto. Em particular, quando M é um R -módulo Artiniano.

Teorema 2.2.28 ([10, Teorema 4.11]) Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo linearmente compacto e semidiscreto e I um ideal de R tal que $(0 :_M I) \neq 0$. Então, todas as sequências M -coregulares maximais em I possuem o mesmo comprimento. Além disso, temos que:

$$\text{width}_I(M) = \inf \{i \mid H_i^I(M) \neq 0\}.$$

Capítulo 3

Homologia local generalizada no par de ideais

Neste capítulo, o qual é o principal da tese, fazemos a generalização da homologia local de dois R -módulos N, M com suporte em um ideal. Fazendo isto, introduzimos também o R -módulo de homologia local no nível $0 \leq i \in \mathbb{Z}$ de um R -módulo M com respeito a um par de ideais (I, J) de R ; este R -módulo é uma generalização do módulo de homologia local usual, o qual foi definido no Capítulo 2. Note que fazemos um paralelo com a teoria de cohomologia local, uma vez que nesta teoria é feito uma generalização do módulo de cohomologia local usual.

3.1 Definições e algumas propriedades

Com a relação de ordem parcial dada na Observação 2.1.19, temos que $\tilde{W}(I, J)$ é um conjunto dirigido. Além disso, temos que a família de R -módulos $\{\Lambda_{\mathfrak{a}}(N, M)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ é um sistema inverso. Definimos então,

$$\Lambda_{I, J}(N, M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \Lambda_{\mathfrak{a}}(N, M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (N/\mathfrak{a}^n N \otimes_R M).$$

Observação 3.1.1 Seja R um anel Noetheriano.

- (1) Para $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, uma vez que o funtor $\Lambda_{\mathfrak{a}}(N, \bullet)$ não é nem exato a esquerda e nem exato a direita e o limite inverso não é exato a direita sobre a categoria de R -módulos, temos que o funtor $\Lambda_{I, J}(N, \bullet)$ não é nem exato a esquerda e nem exato a direita. Além disso, o funtor do completamento $\mathfrak{a}$ -ádico generalizado $\Lambda_{\mathfrak{a}}(N, \bullet)$ é um funtor covariante e $\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ também é um funtor covariante; desta forma, $\Lambda_{I, J}(N, \bullet)$ é um funtor covariante da categoria de R -módulos e R -homomorfismos para ela mesma.
- (2) Denotamos por $\mathfrak{L}_i^{I, J}(N, M)$ o i -ésimo módulo derivado à esquerda de $\Lambda_{I, J}(N, M)$. Assim, como $\Lambda_{I, J}(N, \bullet)$ não é nem exato à esquerda e nem exato à direita, segue que, em geral,

$\mathfrak{L}_0^{I,J}(N, \bullet) \neq \Lambda_{I,J}(N, \bullet)$. No entanto, $\mathfrak{L}_0^{I,J}(N, \bullet)$ é um funtor exato à direita e seus funtores derivados à esquerda para $i > 0$ são os mesmos daqueles de $\Lambda_{I,J}(N, \bullet)$.

Definição 3.1.2 Seja R um anel Noetheriano. Sejam I, J dois ideais de R e sejam N, M dois R -módulos. O i -ésimo módulo de homologia local generalizado $H_i^{I,J}(N, M)$ de N, M com respeito a um par de ideais (I, J) é definido por:

$$H_i^{I,J}(N, M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^{\mathfrak{a}}(N, M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(N/\mathfrak{a}^t N, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Vamos ver então algumas propriedades deste R -módulo $H_i^{I,J}(N, M)$.

Proposição 3.1.3 Sejam M e N dois R -módulos, onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano e N é um R -módulo finitamente gerado. Então temos, para todo $i \geq 0$, que

$$H_i^{I,J}(N, D(M)) \cong D(H_{I,J}^i(N, M)),$$

onde $D(M) = \text{Hom}_R(M, E)$ é o módulo dual Matlis de M e $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ é a envoltória injetiva do corpo residual $R/\mathfrak{m}$.

Demonstração Temos, pelo Teorema 1.5.13, que para um sistema direto de R -módulos $\{N_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, vale o isomorfismo

$$\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} D(N_t) \cong D\left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} N_t\right),$$

e, pela Proposição 1.6.6 (2), obtemos, para todo $i \geq 0$, que

$$\text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, D(M)) \cong D(\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^t, M)) \text{ para todo } \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J).$$

Desta forma, como pela Definição 3.1.2, obtemos que

$$\begin{aligned} H_i^{I,J}(N, D(M)) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^{\mathfrak{a}}(N, D(M)) \\ &= \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(N/\mathfrak{a}^t N, D(M)) \end{aligned}$$

segue que temos

$$H_i^{I,J}(N, D(M)) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} D(\text{Ext}_R^i(N/\mathfrak{a}^t N, M)).$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} H_i^{I,J}(N, D(M)) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} D\left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(N/\mathfrak{a}^t N, M)\right) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} D(H_{\mathfrak{a}}^i(N, M)). \end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$H_i^{I,J}(N, D(M)) \cong D\left(\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(N, M)\right) \cong D(H_{I,J}^i(N, M))$$

onde, $\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(N, M) \cong H_{I,J}^i(N, M)$, para todo $i \geq 0$, pelo Teorema 2.1.20.

Portanto, concluímos que $H_i^{I,J}(N, D(M)) \cong D(H_{I,J}^i(N, M))$. ■

A próxima observação, será usada na sequência.

Observação 3.1.4 ([33, Teorema 1.6 (5)]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Se M é um R -módulo Artiniano, então temos que $D(D(M))$ é isomorfo à M .

O seguinte resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, do Lema 2.2.13.

Corolário 3.1.5 Sejam N, M dois R -módulos, onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano e N é um R -módulo finitamente gerado. Então, temos que:

- (1) $H_{I,J}^i(N, M) = 0$ se, e somente se, $H_i^{I,J}(N, D(M)) = 0$.
- (2) Se M é um R -módulo Artiniano então, $H_i^{I,J}(N, M) = 0$ se, e somente se, $H_{I,J}^i(N, D(M)) = 0$.

Demonstração É de conhecimento que, para um R -módulo N , temos $N = 0$ se, e somente se, $D(N) = 0$. Portanto, o item (1) segue a partir da Proposição 3.1.3. O corolário é agora imediato, uma vez que como M é um R -módulo Artiniano então $D(D(M)) \cong M$, de acordo com a Observação 3.1.4. ■

Proposição 3.1.6 ([29, Lema 2.7]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Sejam M um R -módulo finitamente gerado e N um R -módulo Artiniano. Se N é completo na topologia I -ádica (isto é, $\Lambda_I(N) \cong N$), então existe um isomorfismo $H_i^I(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(M, N)$, para todo $i \geq 0$.

Proposição 3.1.7 ([31, Proposição 2.6]) Seja R um anel Noetheriano, e seja N um R -módulo de (I, J) -torção. Então, $H_{I,J}^i(M, N) \cong \text{Ext}_R^i(M, N)$, para todo $i \geq 0$.

De acordo com Proposição 3.1.6, temos o seguinte isomorfismo $H_i^I(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(M, N)$ para todo $i \geq 0$. A seguinte proposição nos fornece um resultado similar para o i -ésimo módulo de homologia local generalizado com respeito a um par de ideais.

Proposição 3.1.8 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, considere que N é um R -módulo finitamente gerado e seja M um R -módulo Artiniano. Suponha que $D(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção. Então

$$H_i^{I,J}(N, M) \cong \text{Tor}_i^R(N, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração Pela Proposição 3.1.7, temos que $H_{I,J}^i(N, D(M)) \cong \text{Ext}_R^i(N, D(M))$ para todo $i \geq 0$. Pela Proposição 3.1.3 segue que:

$$D(H_{I,J}^i(N, D(M))) \cong H_i^{I,J}(N, D(D(M))).$$

Agora, usando que $D(D(M)) \cong M$ (ver Observação 3.1.4) e a Proposição 1.6.6 obtemos que $H_i^{I,J}(N, M) \cong \text{Tor}_i^R(N, M)$ para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

Proposição 3.1.9 ([31, Proposição 2.7]) Seja R um anel Noetheriano. Se N é um R -módulo de J -torção, então $H_{I,J}^i(M, N) \cong H_I^i(M, N)$, para todo $i \geq 0$.

Para um R -módulo Artiniano M , quando $D(M)$ é um R -módulo de J -torção, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.10 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Sejam N, M dois R -módulos com N finitamente gerado e M Artiniano, e suponha que $D(M)$ é um R -módulo de J -torção. Então, $H_i^{I,J}(N, M) \cong H_i^I(N, M)$, para todo $i \geq 0$.

Demonstração Temos, de acordo com a Observação 3.1.4, que $D(D(M))$ é isomorfo à M . Note que, pela Proposição 3.1.9, temos $H_{I,J}^i(N, D(M)) \cong H_I^i(N, D(M))$, para todo $i \geq 0$.

Agora, usando a Proposição 3.1.3, aplicamos o funtor dual Matlis $D(\bullet)$ ao isomorfismo dado anteriormente para obtermos o resultado, como desejado. ■

Temos a seguinte propriedade, do módulo de homologia local generalizado com respeito a um par de ideais, para módulos linearmente compactos.

Teorema 3.1.11 Seja R um anel Noetheriano. Se N é um R -módulo finitamente gerado e M é um R -módulo linearmente compacto então, para todo $i \geq 0$, temos que $H_i^{I,J}(N, M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

Demonstração Temos, pela Proposição 2.2.17, que para todo $i \geq 0$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, $H_i^{\mathfrak{a}}(N, M)$ é um R -módulo linearmente compacto. Desta forma, a família de R -módulos de homologia local generalizada $\{H_i^{\mathfrak{a}}(N, M)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ forma um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos.

Portanto, pelo Lema 1.6.3 (2), temos que

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} H_i^{\mathfrak{a}}(N, M) := H_i^{I, J}(N, M),$$

é um R -módulo linearmente compacto, para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

O seguinte resultado nos fornece uma propriedade interessante.

Proposição 3.1.12 Seja R um anel Noetheriano e seja N um R -módulo finitamente gerado. Se $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos, então

$$H_i^{I, J}\left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s\right) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^{I, J}(N, M_s).$$

Demonstração Pela Definição 3.1.2, temos que

$$H_i^{I, J}\left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s\right) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} H_i^{\mathfrak{a}}\left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s\right).$$

Agora, pelo Lema 1.6.5, temos

$$H_i^a \left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) \cong \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \operatorname{Tor}_i^R (N/\mathfrak{a}^t N, M_s).$$

Além disso, pelo Teorema 1.5.12, limites inversos são comutativos. Portanto,

$$H_i^a \left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \operatorname{Tor}_i^R (N/\mathfrak{a}^t N, M_s) = \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^a (N, M_s).$$

Desta forma, obtemos que

$$H_i^{I,J} \left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^a (N, M_s).$$

Novamente pelo Teorema 1.5.12, segue que

$$H_i^{I,J} \left(N, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^a (N, M_s) = \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^{I,J} (N, M_s),$$

como desejado. ■

O próximo teorema, nos fornece uma sequência exata longa de módulos de homologia local generalizada com respeito a um par de ideais.

Teorema 3.1.13 Seja R um anel Noetheriano e seja N um R -módulo finitamente gerado. Além disso, seja

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos. Então, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local generalizada com respeito a um par de ideais (I, J) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i^{I,J} (N, M') \rightarrow H_i^{I,J} (N, M) \rightarrow H_i^{I,J} (N, M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{I,J} (N, M') \rightarrow H_0^{I,J} (N, M) \rightarrow \\ H_0^{I,J} (N, M'') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Além disso, cada R -módulo desta sequência é linearmente compacto.

Demonstração A sequência exata curta de R -módulos:

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

nos fornece uma sequência exata longa da forma:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \operatorname{Tor}_i^R (N/\mathfrak{a}^t N, M') \rightarrow \operatorname{Tor}_i^R (N/\mathfrak{a}^t N, M) \rightarrow \operatorname{Tor}_i^R (N/\mathfrak{a}^t N, M'') \rightarrow \dots \rightarrow \\ \operatorname{Tor}_0^R (N/\mathfrak{a}^t N, M') \rightarrow \operatorname{Tor}_0^R (N/\mathfrak{a}^t N, M) \rightarrow \operatorname{Tor}_0^R (N/\mathfrak{a}^t N, M'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para qualquer $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Como $N/\mathfrak{a}^t N$ é um R -módulo finitamente gerado e M' , M , M'' são R -módulos linearmente compactos temos, pelo Lema 1.6.1, que para todo $i \geq 0$, $\text{Tor}_i^R(N/\mathfrak{a}^t N, M')$, $\text{Tor}_i^R(N/\mathfrak{a}^t N, M)$ e $\text{Tor}_i^R(N/\mathfrak{a}^t N, M'')$, são R -módulos linearmente compactos.

Agora, pelo Lema 1.6.4, temos que $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}}$ é um funtor exato sobre R -módulos linearmente compactos. Desta forma, aplicando $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}}$ à sequência exata longa anterior, temos que

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(N, M') \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(N, M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{\mathfrak{a}}(N, M') \rightarrow H_0^{\mathfrak{a}}(N, M) \rightarrow \\ H_0^{\mathfrak{a}}(N, M'') \rightarrow 0, \end{aligned}$$

é uma sequência exata. Pela Proposição 2.2.17, os módulos na sequência exata longa anterior são R -módulos linearmente compactos. Então, pelo Lema 1.6.4, aplicando $\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ à sequência anterior obtemos a sequência exata longa

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i^{I, J}(N, M') \rightarrow H_i^{I, J}(N, M) \rightarrow H_i^{I, J}(N, M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{I, J}(N, M') \rightarrow H_0^{I, J}(N, M) \rightarrow \\ H_0^{I, J}(N, M'') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1.11, temos que cada R -módulo desta sequência é um R -módulo linearmente compacto, como desejado. ■

O seguinte corolário, é uma consequência imediata do Teorema 3.1.13.

Corolário 3.1.14 Seja R um anel Noetheriano e seja N um R -módulo finitamente gerado. Além disso, seja

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

uma sequência exata curta de R -módulos Artinianos. Então, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local generalizada com respeito a um par de ideais (I, J) , como segue:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_i^{I, J}(N, M') \rightarrow H_i^{I, J}(N, M) \rightarrow H_i^{I, J}(N, M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{I, J}(N, M') \rightarrow H_0^{I, J}(N, M) \rightarrow \\ H_0^{I, J}(N, M'') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

O próximo teorema nos fornece um **resultado de Artinianidade** para módulos de homologia local generalizada com respeito a um par de ideais, e é uma generalização da Proposição 2.2.22.

Os resultados a seguir são usados na sequência, para provar o dito anteriormente.

Proposição 3.1.15 ([33, Proposição 2.13]) Suponha que R é um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Além disso, seja N um R -módulo Artiniano. Então, temos que $M \otimes_R N$ é um R -módulo Artiniano.

Proposição 3.1.16 ([6, Proposição 1.1 (i)]) Seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R , e seja M um R -módulo Artiniano. Então, $M = \mathfrak{a}M$ se, e somente se, $\mathfrak{a}$ contém um elemento M -coregular.

A próxima observação também é usada adiante.

Observação 3.1.17 ([22, Propriedades 27.2 e 27.3]) Temos as propriedades:

- (1) Um produto direto de R -módulos Artinianos, é um R -módulo Artiniano.
- (2) Se G é um R -módulo Artiniano, assim o é todo R -submódulo fechado em G .

Teorema 3.1.18 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e seja N um R -módulo finitamente gerado. Além disso, seja M um R -módulo Artiniano. Então, para um inteiro positivo $s \geq 1$, temos que se $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad} \left(\text{Ann}_R \left(H_i^{I,J}(N, M) \right) \right)$, para todo $i < s$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ então, $H_i^{I,J}(N, M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s$.

Demonstração Usamos indução sobre s . Quando $s = 1$, devemos mostrar que $H_0^{I,J}(N, M)$ é um R -módulo Artiniano. Uma vez que M é um R -módulo Artiniano, segue que existe um inteiro positivo m tal que $\mathfrak{a}^t M = \mathfrak{a}^m M$, para todo $t \geq m$. Então, por definição, $H_0^{\mathfrak{a}}(N, M) = N/\mathfrak{a}^m N \otimes_R M$. Uma vez que, pela Proposição 3.1.15, $N/\mathfrak{a}^m N \otimes_R M$ é Artiniano, temos que $H_0^{\mathfrak{a}}(N, M)$ é um R -módulo Artiniano. Temos então que $\{H_0^{\mathfrak{a}}(N, M)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ é um sistema inverso de R -módulos Artinianos. Portanto, pela Observação 3.1.17, temos que

$$H_0^{I,J}(N, M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} H_0^{\mathfrak{a}}(N, M),$$

é um R -módulo Artiniano.

Suponha que $s > 1$. Pelo Teorema 2.2.21 (2) podemos substituir M por $\bigcap_{t>0} \mathfrak{a}^t M$. O último módulo é justamente igual à $\mathfrak{a}^n M$, para n suficientemente grande. Portanto, podemos assumir que $\mathfrak{a}M = M$. Uma vez que M é um R -módulo Artiniano, existe um elemento $x \in \mathfrak{a}$ tal que $xM = M$, de acordo com a Proposição 3.1.16. Desta forma, pela hipótese, existe um inteiro positivo t tal que $x^t H_i^{I,J}(N, M) = 0$ para todo $i < s$. Então, a sequência exata curta de R -módulos Artinianos dada por

$$0 \rightarrow (0 :_M x^t) \rightarrow M \xrightarrow{x^t} M \rightarrow 0,$$

nos fornece, pelo Corolário 3.1.14, uma sequência exata longa:

$$0 \rightarrow H_{i+1}^{I,J}(N, M) \rightarrow H_i^{I,J}(N, (0 :_M x^t)) \rightarrow H_i^{I,J}(N, M) \rightarrow 0,$$

para todo $i < s - 1$. Segue que $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad} \left(\text{Ann}_R \left(H_i^{I,J}(N, (0 :_M x^t)) \right) \right)$, e pela hipótese indutiva temos que $H_i^{I,J}(N, (0 :_M x^t))$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s - 1$.

Desta forma, $H_i^{I,J}(N, M)$ é um R -módulo Artiniano para todo $i < s$. Isto finaliza o passo indutivo e a prova. ■

3.2 Resultados de anulamento

A seguinte observação, será usada na sequência.

Observação 3.2.1 ([33, Corolário 1.4 e Teorema 1.6 (8)]) Temos os seguintes resultados:

- (1) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Sejam M e N dois R -módulos, e suponha que M é um R -módulo finitamente gerado. Então, temos o seguinte isomorfismo: $M \otimes_R D(N) \cong D(\text{Hom}_R(M, N))$.
- (2) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Para qualquer R -módulo M , temos que vale a igualdade $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(D(M))$. Em particular, $\dim(M) = \dim(D(M))$.

Consideremos a seguir os resultados, os quais iremos usar no próximo teorema.

Teorema 3.2.2 ([2, Teorema 1.1 (i)]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Sejam M e N dois R -módulos não nulos e finitamente gerados, tal que $\text{projdim}_R(M) < \infty$. Suponha que $\dim(N) < \infty$. Então, temos que $H_I^i(M, N) = 0$, para todo $i > \text{projdim}_R(M) + \dim(M \otimes_R N)$.

Teorema 3.2.3 ([45, Teorema 2.2]) Seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, temos o seguinte isomorfismo:

$$H_{I,J}^i(M, N) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(M, N),$$

para qualquer R -módulo N e para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.2.4 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo e sejam N, M dois R -módulos com N finitamente gerado e M Artiniano, e tal que $\text{projdim}(N) < \infty$. Suponha que $\dim(M) < \infty$. Então, $H_i^{I,J}(N, M) = 0$, para todo $i > \text{projdim}(N) + \dim(\text{Hom}_R(N, M))$.

Demonstração Temos, pelo Teorema B.2.1, que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado. E, pela Observação 3.2.1 (2), como $\dim(M) = \dim(D(M))$, temos

$$\dim(\text{Hom}_R(N, M)) = \dim(D(\text{Hom}_R(N, M))) = \dim(N \otimes_R D(M)),$$

onde a última igualdade segue a partir da Observação 3.2.1 (1).

Uma vez que $\dim(M) < \infty$ segue que $\dim(D(M)) < \infty$ e então, pelo Teorema 3.2.2, temos que $H_{\mathfrak{a}}^i(N, D(M)) = 0$, para todo $i > \text{projdim}(N) + \dim(N \otimes_R D(M))$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Portanto, pelo Teorema 3.2.3, segue que:

$$H_{I,J}^i(N, D(M)) = 0, \text{ para todo } i > \text{projdim}(N) + \dim(N \otimes_R D(M)).$$

Desta forma, pelo Corolário 3.1.5 (2), temos $H_i^{I,J}(N, M) = 0$, para todo $i > \text{projdim}(N) + \dim(\text{Hom}_R(N, M))$, como desejado. ■

Os seguintes resultados, serão utilizados para provar o próximo teorema.

Teorema 3.2.5 ([45, Teorema 2.4]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e sejam M, N dois R -módulos finitamente gerados, com $\text{projdim}(M) < \infty$. Suponha que o ideal $J \neq R$. Então, temos que $H_{I,J}^i(M, N) = 0$ para todo $i > \text{projdim}(M) + \dim(N/JN)$.

Proposição 3.2.6 ([12, Corolário 2.5]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, e seja M um R -módulo Artiniano. Então, temos que $\text{Ndim}(M) = \dim(M)$.

Teorema 3.2.7 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo e sejam N, M dois R -módulos com N um R -módulo finitamente gerado e $\text{projdim}(N) < \infty$. Suponha que M é um R -módulo Artiniano e que o ideal $J \neq R$.

Então, $H_i^{I,J}(N, M) = 0$, para qualquer $i > \text{projdim}_R(N) + \text{Ndim}(M/JM)$.

Demonstração Segue, a partir do Teorema 3.2.5, que temos:

$$H_{I,J}^i(N, D(M)) = 0, \text{ para todo } i > \text{projdim}(N) + \dim(D(M)/JD(M)).$$

Pelo Corolário 3.1.5 (2), segue que

$$H_i^{I,J}(N, M) = 0, \text{ para todo } i > \text{projdim}(N) + \dim(D(M)/JD(M)),$$

onde, $\dim(D(M)/JD(M)) = \dim(D(M/JM))$ pois, de acordo com a Observação 3.2.1 (2), temos que $\text{Ann}_R(M/JM) = \text{Ann}_R(D(M/JM))$.

Agora, o resultado segue devido à Observação 3.2.1 (2) (que diz $\dim(M) = \dim(D(M))$), e pela Proposição 3.2.6, a qual afirma que $\text{Ndim}(M) = \dim(M)$. ■

Quando fazemos $N = R$ no Teorema 3.2.7, obtemos a seguinte consequência imediata.

Corolário 3.2.8 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo e seja M um R -módulo Artiniano. Suponha que $J \neq R$. Então, $H_i^{I,J}(M) = 0$, para qualquer $i > \text{Ndim}(M/JM)$.

3.2.1 Homologia local com respeito a um par de ideais

Note que quando fazemos o R -módulo $N = R$, para R um anel Noetheriano, temos o R -módulo:

$$\Lambda_{I,J}(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M,$$

onde $\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ é o completamento $\mathfrak{a}$ -ádico de M .

Definição 3.2.9 Seja R um anel Noetheriano. Denote por $\mathfrak{C}_{\Lambda_{I,J}}(R)$ a categoria de todos os R -módulos e R -homomorfismos tais que $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) \cong \Lambda_{I,J}(M)$.

O seguinte resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, da Proposição 2.2.8.

Proposição 3.2.10 Suponha que R é um anel Noetheriano. Seja $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos, onde M é um R -módulo linearmente compacto. Se f é sobrejetivo, então o R -homomorfismo

$$\Lambda_{I,J}(f) : \Lambda_{I,J}(M) \rightarrow \Lambda_{I,J}(N),$$

também é sobrejetivo.

Demonstração Temos o epimorfismo $f : M \rightarrow N$. Pela Proposição 2.2.8 temos que, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, o R -homomorfismo $\Lambda_{\mathfrak{a}}(f) : \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(N)$ é sobrejetivo. Como, por hipótese, M é um R -módulo linearmente compacto segue, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), que a família de R -módulos $\{M/\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Assim, pelo Lema 1.6.3 (2), temos que $\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^t M = \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo linearmente compacto. Desta forma, a família de R -módulos dada por $\{\text{Ker}(\Lambda_{\mathfrak{a}}(f))\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ é também um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Portanto, temos que

$$0 \rightarrow \{\text{Ker}(\Lambda_{\mathfrak{a}}(f))\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \rightarrow \{\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \rightarrow \{\Lambda_{\mathfrak{a}}(N)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata curta de sistemas inversos de R -módulos linearmente compactos. Portanto, pelo Lema 1.6.4, temos que a sequência de limites inversos

$$0 \rightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \mathbf{L}_{\mathfrak{a}} \rightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \Lambda_{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata, onde $\mathbf{L}_{\mathfrak{a}} := \text{Ker}(\Lambda_{\mathfrak{a}}(f))$. Desta maneira, o R -homomorfismo $\Lambda_{I, J}(f) : \Lambda_{I, J}(M) \rightarrow \Lambda_{I, J}(N)$ é também sobrejetivo, como desejado. ■

O lema a seguir é interessante, e é frequentemente utilizado.

Lema 3.2.11 Seja R um anel Noetheriano e sejam N um R -módulo finitamente gerado e M um R -módulo linearmente compacto. Então, temos o seguinte isomorfismo:

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{I, J}(N, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração Uma vez que M é linearmente compacto temos, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), que $\{M/\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Como N é finitamente gerado, seja $\mathbf{F}_{\bullet} := \{F_i\}_{i \geq 0}$ resolução livre de N onde cada R -módulo livre F_i é finitamente gerado, para todo $i \geq 0$. Desta forma, temos, pelo Lema 1.6.3 (1), que $\{F_i \otimes_R M/\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos, para todo $i \geq 0$. Agora, pelo Lema 1.6.3 (2), temos que $\left\{ \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (F_i/\mathfrak{a}^t F_i \otimes_R M) \right\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos.

Além disso, pelo Lema 1.6.4, temos que $\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)}$ é um funtor aditivo, covariante e exato sobre R -módulos linearmente compactos. Desta forma, temos que:

$$H_i \left(\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (\mathbf{F}_{\bullet} \otimes_R M/\mathfrak{a}^t M) \right) \right) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} H_i \left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (\mathbf{F}_{\bullet} \otimes_R M/\mathfrak{a}^t M) \right),$$

pelo Teorema 1.6.2. Portanto, segue que:

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)} \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{I, J}(N, M),$$

para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

Observação 3.2.12 Pela Observação 2.2.3 (3), temos que se R é um anel Noetheriano e M é um R -módulo finitamente gerado obtemos que $\mathfrak{L}_i^{\mathfrak{a}}(M) = 0$, para todo $i > 0$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Agora, com as hipóteses do Lema 3.2.11, nós obtemos que $\mathfrak{L}_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i > 0$.

Teorema 3.2.13 Seja M um R -módulo linearmente compacto, onde R é um anel Noetheriano. Além disso, suponha que o sistema inverso de R -módulos $\{\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, é estacionário, isto é, existe um inteiro positivo $n \geq 1$ tal que $\mathfrak{a}^t M = \mathfrak{a}^n M$, para todo $t \geq n$. Então, temos que $M \in \mathfrak{C}_{\Lambda_{I,J}}(R)$.

Demonstração A partir do Teorema 2.2.4 temos que $\mathfrak{L}_0^{\mathfrak{a}}(M) \cong \Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Portanto:

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \mathfrak{L}_0^{\mathfrak{a}}(M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \Lambda_{\mathfrak{a}}(M) = \Lambda_{I,J}(M).$$

Agora, pelo Lema 3.2.11, segue que $\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \mathfrak{L}_0^{\mathfrak{a}}(M) \cong \mathfrak{L}_0^{I,J}(M)$ e assim $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) \cong \Lambda_{I,J}(M)$. Desta forma, temos, pela Definição 3.2.9, que $M \in \mathfrak{C}_{\Lambda_{I,J}}(R)$, como desejado. ■

Temos a seguinte consequência imediata.

Corolário 3.2.14 Seja M um R -módulo Artiniano e finitamente gerado, onde R é um anel Artiniano. Então, temos que o homomorfismo de R -módulos:

$$\phi_M : \mathfrak{L}_0^{I,J}(M) \rightarrow \Lambda_{I,J}(M),$$

é um isomorfismo de R -módulos.

Demonstração De fato, como M é um R -módulo Artiniano temos que, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, a família de R -módulos $\{\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$, que é uma família de R -submódulos de M , é estacionária. Além disso, R é um anel Noetheriano (pois R é Artiniano), e M é linearmente compacto com a topologia discreta (veja Teorema 1.2.4).

Desta forma, pelo Teorema 3.2.13, temos que $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M)$ é isomorfo à $\Lambda_{I,J}(M)$. Portanto, ϕ_M é um isomorfismo, como desejado. ■

Também temos a seguinte consequência.

Corolário 3.2.15 Seja R um anel Artiniano e seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, as seguintes afirmações:

- (a) $\mathfrak{a}M = M$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$;
- (b) $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) = 0$;
- (c) $\Lambda_{I,J}(M) = 0$,

são tais que temos as implicações: (a) $\Rightarrow$ (b); (a) e (b) $\Rightarrow$ (c).

Demonstração $(a) \Rightarrow (b)$: A partir das hipóteses, temos que $M = \mathfrak{a}^t M$, para todo $t \in \mathbb{N}$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Desta forma, o sistema inverso de R -módulos $\{\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é estacionário. Portanto, pelo Teorema 3.2.13, temos que $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) \cong \Lambda_{I,J}(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^t M = 0$, como desejado.

(a) e $(b) \Rightarrow (c)$: Por (a) temos que $\{\mathfrak{a}^t M\}_{t \in \mathbb{N}}$ é estacionário; pela hipótese (b) obtemos que $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) = 0$; pelo Teorema 3.2.13 segue que $\mathfrak{L}_0^{I,J}(M) \cong \Lambda_{I,J}(M)$, e então segue $\Lambda_{I,J}(M) = 0$, como desejado. ■

O seguinte resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, da Proposição 2.2.9.

Proposição 3.2.16 Seja R um anel Noetheriano. Seja $G \rightarrow L \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos, onde G e L são R -módulos linearmente compactos e f é um R -homomorfismo, e tal que o sistema inverso de R -módulos $\{\mathfrak{a}^t N\}_{t \in \mathbb{N}}$ é estacionário, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Então, a seguinte sequência induzida:

$$\Lambda_{I,J}(G) \rightarrow \Lambda_{I,J}(L) \rightarrow \Lambda_{I,J}(N) \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata.

Demonstração Seja $K = \text{Ker}(f)$; temos sequências exatas induzidas:

$$G \rightarrow K \rightarrow 0 \quad (*) \quad \text{e} \quad 0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow N \rightarrow 0 \quad (**).$$

A partir da Proposição 3.2.10, temos que a primeira sequência exata $(*)$ induz uma sequência exata

$$\Lambda_{I,J}(G) \rightarrow \Lambda_{I,J}(K) \rightarrow 0.$$

Além disso, a segunda sequência exata $(**)$ nos fornece, de acordo com a prova do Teorema 2.2.4, uma sequência exata

$$\Lambda_{\mathfrak{a}}(K) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(L) \rightarrow \Lambda_{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow 0,$$

para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Uma vez que K é um R -módulo linearmente compacto, pois L é um R -módulo linearmente compacto, temos, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), que $\{K/\mathfrak{a}^t K\}_{t \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Agora, pelo Lema 1.6.3 (2), segue então que $\Lambda_{\mathfrak{a}}(K)$ é um R -módulo linearmente compacto. Portanto, $\{\Lambda_{\mathfrak{a}}(K)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Desta forma, temos, pelo Lema 1.6.4, que a sequência de limites inversos

$$\Lambda_{I,J}(K) \rightarrow \Lambda_{I,J}(L) \rightarrow \Lambda_{I,J}(N) \rightarrow 0,$$

é exata. Portanto, a sequência induzida:

$$\Lambda_{I,J}(G) \rightarrow \Lambda_{I,J}(L) \rightarrow \Lambda_{I,J}(N) \rightarrow 0,$$

é exata, como desejado. ■

Note que para o R -módulo $N = R$, onde R é um anel Noetheriano, temos o i -ésimo módulo de homologia local $H_i^{I,J}(M)$ de M com respeito ao par de ideais (I, J) :

$$H_i^{I,J}(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^{\mathfrak{a}}(M) = \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, M),$$

para todo $i \geq 0$.

Vamos provar algumas propriedades de módulos de homologia local com respeito a um par de ideais.

Teorema 3.2.17 Seja R um anel Noetheriano. Sejam N e M dois R -módulos com N finitamente gerado e M linearmente compacto. Então, temos $H_i^{I,J}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{I,J}(N, M)$, para todo $i \geq 0$.

Demonstração Pelo Teorema 2.2.16, temos o isomorfismo $H_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{a}}(N, M)$ para todo $i \geq 0$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Desta forma, segue que:

$$\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \mathfrak{L}_i^{\mathfrak{a}}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{I,J}(N, M),$$

para todo $i \geq 0$, pelo Lema 3.2.11. Portanto, temos que

$$H_i^{I,J}(N, M) \cong \mathfrak{L}_i^{I,J}(N, M),$$

para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

Observação 3.2.18 Note que, se no Teorema 3.2.17 tomarmos $N = R$ obtemos que $H_i^{I,J}(M) \cong \mathfrak{L}_i^{I,J}(M)$, para todo $i \geq 0$.

A seguir, temos alguns resultados que obtemos fazendo $N = R$ no R -módulo $H_i^{I,J}(N, M)$.

Proposição 3.2.19 Seja M um R -módulo, onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano. Então temos, para todo $i \geq 0$, que:

$$H_i^{I,J}(D(M)) \cong D(H_{I,J}^i(M)),$$

onde $D(M) = \text{Hom}_R(M, E)$ é o módulo dual Matlis do R -módulo M e $E = E(R/\mathfrak{m})$ é a envoltória injetiva do corpo residual $R/\mathfrak{m}$.

Corolário 3.2.20 Seja M um R -módulo, onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano. Então, temos que:

- (1) $H_{I,J}^i(M) = 0$ se, e somente se, $H_i^{I,J}(D(M)) = 0$.
- (2) Se M é um R -módulo Artiniano então, $H_i^{I,J}(M) = 0$ se, e somente se, $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$.

O próximo resultado segue do Teorema 3.1.11, fazendo $N = R$.

Teorema 3.2.21 Seja R um anel Noetheriano. Seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, para todo $i \geq 0$, temos que $H_i^{I,J}(M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

Observação 3.2.22 Seja R um anel Artiniano e seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, temos que $H_0^{I,J}(M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

O seguinte resultado segue da Proposição 3.1.12, fazendo $N = R$.

Proposição 3.2.23 Sejam R um anel Noetheriano, e $\{M_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Então, temos que:

$$H_i^{I,J} \left(\varprojlim_{s \in \mathbb{N}} M_s \right) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^{I,J}(M_s).$$

Definição 3.2.24 ([23, Parágrafo 4]) Dizemos que um R -módulo M é **estritamente linearmente compacto**, se M é um R -módulo linearmente compacto e todo homomorfismo contínuo de M é uma aplicação aberta.

Observação 3.2.25 ([23, Propriedade 4.7]) Notemos o seguinte: se M é um R -módulo estritamente linearmente compacto, temos que $M = \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)$, onde U pertence à uma base nuclear $\mathfrak{M}$ de M consistindo de R -submódulos, e cada M/U é um R -módulo Artiniano, para todo $U \in \mathfrak{M}$.

Em resultados posteriores, vamos nos referir a esta observação.

No seguinte teorema, nós assumimos que $f : R \rightarrow R'$ é um homomorfismo de anéis comutativos e com identidade não-nula. Também, para um ideal I de R , denotamos sua **extensão** para (ou à) R' por I^e .

Teorema 3.2.26 Sejam R um anel Noetheriano e I, J ideais de R . Seja M um R' -módulo estritamente linearmente compacto, com $(R', \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Além disso, seja $f : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis tal que $f(J) = JR' = J^e$. Então, temos o seguinte isomorfismo de R' -módulos:

$$H_i^{I,J}(M) \cong H_i^{I^e, J^e}(M),$$

para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Primeiro, vamos provar o caso especial em que M é um R' -módulo Artiniano. Neste caso, pela Observação 3.1.4, temos que $D(D(M)) \cong M$. Portanto, segue que:

$$H_i^{I,J}(M) \cong H_i^{I,J}(D(D(M))) \cong D(H_{I,J}^i(D(M))),$$

pela Proposição 3.2.19. Agora, pelo Teorema 2.1.17, temos que $H_{I,J}^i(D(M)) \cong H_{I^e,J^e}^i(D(M))$.

Desta forma, temos que:

$$H_i^{I,J}(M) \cong D(H_{I^e,J^e}^i(D(M))) \cong H_i^{I^e,J^e}(M),$$

pela Proposição 3.2.19, para todo $i \geq 0$.

Seja M um R' -módulo linearmente compacto. Neste caso, denote por $\mathfrak{M}$ uma base nuclear de M consistindo de submódulos. Segue a partir da Observação 3.2.25, que $M = \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)$, onde os módulos M/U ($U \in \mathfrak{M}$) são R -módulos Artinianos.

Em virtude da Proposição 3.2.23, temos que:

$$H_i^{I,J}(M) = H_i^{I,J}\left(\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)\right) \cong \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} H_i^{I,J}(M/U)$$

e também

$$H_i^{I^e,J^e}(M) = H_i^{I^e,J^e}\left(\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)\right) \cong \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} H_i^{I^e,J^e}(M/U).$$

Por nossa afirmação acima no caso Artiniano, temos o seguinte isomorfismo de R' -módulos $H_i^{I,J}(M/U) \cong H_i^{I^e,J^e}(M/U)$, para todo $i \geq 0$. Aplicando então $\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}}$ obtemos que $H_i^{I,J}(M) \cong H_i^{I^e,J^e}(M)$, para todo $i \geq 0$, como queríamos demonstrar. ■

No resultado a seguir, para N um R -módulo vamos denotar por $\hat{N}$ o completamento $\mathfrak{m}$ -ádico de N . Além disso, note que se N é um módulo Artiniano sobre um anel local R então N possui uma estrutura como um módulo Artiniano sobre $\hat{R}$, de acordo com [38, 1.11].

Corolário 3.2.27 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica, e seja $\phi : R \rightarrow \hat{R}$ um homomorfismo de anéis. Seja M um R -módulo Artiniano. Suponha que ϕ satisfaz a igualdade $\phi(J) = J\hat{R} = \hat{J}$. Então, temos que:

$$H_i^{I,J}(M) \cong H_i^{\hat{I},\hat{J}}(M) \quad (\text{como } R\text{-módulos})$$

para todo $0 \leq i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração Uma vez que M é um R -módulo Artiniano temos, pela Observação 3.1.4, que $D(D(M)) \cong M$. Portanto, segue que

$$H_i^{I,J}(M) \cong H_i^{I,J}(D(D(M))) \cong D(H_{I,J}^i(D(M))),$$

pela Proposição 3.2.19. Desta forma, pelo Teorema 2.1.17, temos que $H_{I,J}^i(D(M)) \cong H_{\hat{I},\hat{J}}^i(D(M))$ como R -módulos. Portanto, temos que

$$H_i^{I,J}(M) \cong D(H_{\hat{I},\hat{J}}^i(D(M))) \cong H_i^{\hat{I},\hat{J}}(M),$$

como R -módulos, pela Proposição 3.2.19, para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

Os resultados a seguir seguem, respectivamente, diretamente dos Teoremas 3.1.13 e 3.1.18, se considerarmos $N = R$.

Teorema 3.2.28 Seja R um anel Noetheriano e seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos. Então, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local com respeito ao par de ideais (I, J) da seguinte maneira:

$$\dots \rightarrow H_i^{I,J}(M') \rightarrow H_i^{I,J}(M) \rightarrow H_i^{I,J}(M'') \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{I,J}(M') \rightarrow H_0^{I,J}(M) \rightarrow H_0^{I,J}(M'') \rightarrow 0.$$

Além disso, cada R -módulo desta sequência é um R -módulo linearmente compacto.

Teorema 3.2.29 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, com um único ideal maximal $\mathfrak{m}$, e seja M um R -módulo Artiniano. Então, para um inteiro positivo $s \geq 1$, temos que se $\mathfrak{a} \subseteq \text{Rad}\left(\text{Ann}_R\left(H_i^{I,J}(M)\right)\right)$, para todo $i < s$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$ então, $H_i^{I,J}(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s$.

3.3 Teoremas de anulamento e co-localização

Nesta seção, estudamos o **anulamento** de módulos de homologia local com respeito a um par de ideais.

O primeiro resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, do seguinte teorema.

Teorema 3.3.1 ([30, Teorema 3.16]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica, e seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, $H_i^{\mathfrak{m}}(M) = 0$, para todo $i > \dim(R)$.

Vamos então ao resultado em questão. Mas antes, coloquemos uma observação que será utilizada em tal resultado.

Observação 3.3.2 ([18, Teorema 3.2]) Assuma que R é um anel Noetheriano, e que M é um R -módulo finitamente gerado. Então, temos que $H_I^i(M) = 0$, para todo $i > \dim(R)$.

Teorema 3.3.3 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica, e seja $\phi : R \rightarrow \hat{R}$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = \hat{J}$. Seja M um R -módulo estritamente linearmente compacto. Então, $H_i^{\mathfrak{m},J}(M) = 0$, para todo $i > \dim(R)$.

Demonstração

Primeiramente, vamos fazer o caso especial em que M é um R -módulo Artiniano. A partir do Corolário 3.2.27, podemos assumir neste caso que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo. Pelo Teorema B.2.1, (3), temos que $D(D(M)) \cong M$ e $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano. Desta forma, temos que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado. Pela Proposição 3.2.19, temos que:

$$D(H_{\mathfrak{m},J}^i(D(M))) \cong H_i^{\mathfrak{m},J}(D(D(M))) \cong H_i^{\mathfrak{m},J}(M).$$

Agora, pela Observação 3.3.2, temos que $H_{\mathfrak{a}}^i(D(M)) = 0$, para todo $i > \dim(R)$ e para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(\mathfrak{m}, J)$. Agora, pelo Teorema 2.1.20 segue que

$$H_{\mathfrak{m},J}^i(D(M)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(\mathfrak{m},J)} H_{\mathfrak{a}}^i(D(M)).$$

Portanto, $H_{\mathfrak{m},J}^i(D(M)) = 0$ para todo $i > \dim(R)$. Desta forma, pelo Corolário 3.2.20 (1), segue que $D(H_{\mathfrak{m},J}^i(D(M))) = 0$ para todo $i > \dim(R)$. Consequentemente, temos que $H_i^{\mathfrak{m},J}(M) = 0$, para todo $i > \dim(R)$.

Seja M um R -módulo linearmente compacto. Neste caso, denote por $\mathfrak{M}$ uma base nuclear de M consistindo de submódulos. Segue a partir da Observação 3.2.25, que $M = \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)$, onde os R -módulos M/U ($U \in \mathfrak{M}$) são R -módulos Artinianos.

Em virtude da Proposição 3.2.23, temos que:

$$H_i^{\mathfrak{m},J}(M) = H_i^{\mathfrak{m},J}\left(\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)\right) \cong \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} H_i^{\mathfrak{m},J}(M/U).$$

Pela parte inicial do caso Artiniano, temos que $H_i^{\mathfrak{m},J}(M/U) = 0$ para todo $i > \dim(R)$ e para todo $U \in \mathfrak{M}$. Portanto, $H_i^{\mathfrak{m},J}(M) = 0$ para todo $i > \dim(R)$. Concluimos assim a prova, como desejado. ■

O próximo resultado de anulamento, envolve a definição de um R -módulo de (I, J) -torção.

Proposição 3.3.4 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica, e seja $\phi : R \rightarrow \hat{R}$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = \hat{J}$. Seja M um R -módulo Artiniano. Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $D(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção.
- (b) $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todos os inteiros $i > 0$.

Demonstração (a) $\Rightarrow$ (b): A partir do Corolário 3.2.27, podemos assumir neste caso que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo. Uma vez que M é um R -módulo Artiniano segue, pelo Teorema B.2.1 (3), que $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano. Portanto, $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado. Uma vez que $\Gamma_{I,J}(D(M)) = D(M)$ segue, pela Proposição 2.1.21, que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$, para todo $0 < i \in \mathbb{Z}$. Portanto, pelo fato visto na prova do Corolário 3.2.20, temos que $D(H_{I,J}^i(D(M))) = 0$, para todo $0 < i \in \mathbb{Z}$. Por outro lado temos, pela Proposição 3.2.19, que $D(H_{I,J}^i(D(M))) \cong H_i^{I,J}(D(D(M)))$; e como, pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(D(M)) \cong M$ segue que $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todo $i > 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a): A partir do Corolário 3.2.27, podemos assumir neste caso que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo. Uma vez que $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i > 0$, segue que $D(H_i^{I,J}(M)) = 0$; desta forma, temos que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$ para todo $i > 0$, uma vez que $D(H_i^{I,J}(M)) \cong H_{I,J}^i(D(M))$, pelo Corolário 3.2.20 (2).

Agora, pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado, pois é um R -módulo Noetheriano. Portanto, pela Proposição 2.1.21, segue que $D(M)$ é um R -módulo de (I, J) -torção, como desejado. ■

O seguinte resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, da Proposição 2.1.24.

Teorema 3.3.5 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica. Seja M um R -módulo estritamente linearmente compacto. Suponha que o ideal não nulo J de R , é tal que $J \neq R$ e seja $\phi : R \rightarrow \hat{R}$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = \hat{J}$. Então, $H_i^{I,J}(M) = 0$ para qualquer $i > \dim(R/J)$.

Demonstração

Vamos dividir a prova em dois casos. No primeiro caso, considere que M é um R -módulo Artiniano. A partir do Corolário 3.2.27, podemos assumir neste caso que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo; pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(D(M)) \cong M$ e $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano e por conseguinte é um R -módulo finitamente gerado. Pela Proposição 3.2.19, temos que:

$$D(H_{I,J}^i(D(M))) \cong H_{I,J}^{I,J}(D(D(M))) \cong H_{I,J}^{I,J}(M).$$

Além disso, temos, pela Proposição 2.1.24, que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$, para qualquer $i > \dim(R/J)$. Portanto, pelo Corolário 3.2.20 (1), temos que $D(H_{I,J}^i(D(M))) = 0$, para todo $i > \dim(R/J)$. Uma vez que, como vimos acima, temos que $D(H_{I,J}^i(D(M))) \cong H_{I,J}^{I,J}(M)$, segue o resultado.

No segundo caso, seja M um R -módulo linearmente compacto. Neste caso, denote por $\mathfrak{M}$ uma base nuclear de M consistindo de submódulos. Segue a partir da Observação 3.2.25, que $M = \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)$, onde os módulos M/U ($U \in \mathfrak{M}$) são todos R -módulos Artinianos.

Em virtude da Proposição 3.2.23, temos que:

$$H_i^{I,J}(M) = H_i^{I,J}\left(\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)\right) \cong \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} H_i^{I,J}(M/U).$$

Pelo que fizemos inicialmente no caso Artiniano, segue que $H_i^{I,J}(M/U) = 0$ para todo $i > \dim(R/J)$ e para todo $U \in \mathfrak{M}$. Portanto, $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todo $i > \dim(R/J)$, como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.3.6 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano com a topologia $\mathfrak{m}$ -ádica e seja $\phi : R \rightarrow \hat{R}$ um homomorfismo de anéis tal que $\phi(J) = \hat{J}$. Seja n um inteiro não-negativo. Suponha que o R -módulo $H_{I,J}^i(R) = 0$ para todo $i > n$. Então, $H_{I,J}^{I,J}(M) = 0$ para todo $i > n$ e para qualquer R -módulo estritamente linearmente compacto M , o qual não é necessariamente finitamente gerado.

Demonstração

Considere primeiro o caso em que M é um R -módulo Artiniano. A partir do Corolário 3.2.27, podemos assumir neste caso que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo; pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(D(M)) \cong M$ e $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano, e sendo assim é finitamente gerado sobre o anel R . Pela Proposição 3.2.19, temos que:

$$D(H_{I,J}^i(D(M))) \cong H_{I,J}^{I,J}(D(D(M))) \cong H_{I,J}^{I,J}(M).$$

Pelo Lema 2.1.26 temos que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$, para todo $i > n$. Portanto, pelo Corolário 3.2.20 (1), segue que $D(H_{I,J}^i(D(M))) = 0$ para todo $i > n$ e então, isso resulta que $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todo $i > n$, como desejado.

Agora, seja M um R -módulo linearmente compacto. Neste caso, denote por $\mathfrak{M}$ uma base nuclear de M consistindo de submódulos. Segue a partir da Observação 3.2.25, que $M = \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)$, onde os módulos M/U ($U \in \mathfrak{M}$) são todos R -módulos Artinianos.

Pela Proposição 3.2.23, temos que:

$$H_i^{I,J}(M) = H_i^{I,J}\left(\varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} (M/U)\right) \cong \varprojlim_{U \in \mathfrak{M}} H_i^{I,J}(M/U).$$

Pelo que foi feito na parte inicial da demonstração, para o caso Artiniano, temos que $H_i^{I,J}(M/U) = 0$ para todo $i > n$ e para todo $U \in \mathfrak{M}$. Portanto, $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i > n$, como desejado. ■

Proposição 3.3.7 Seja M um R -módulo linearmente compacto e finitamente gerado, onde R é um anel Noetheriano. Então, temos que $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i > 0$.

Demonstração A prova segue a partir do Teorema 3.2.17 e da Observação 3.2.12. ■

Temos também os seguintes resultados sobre o anulamento de módulos de homologia local com respeito ao par de ideais (I, J) , os quais vamos colocar na seguinte observação.

Observação 3.3.8 Relembramos que o **posto aritmético** de um ideal I , denotado por $\text{ara}(I)$, é definido sendo o menor número de elementos do anel R que são necessários para se gerar um ideal J o qual possui o mesmo radical que o ideal I , ou seja, $\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

- (1) Seja M um R -módulo finitamente gerado com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Suponha que o ideal J do anel R é tal que $J \neq R$. Então, $H_i^{I,J}(D(M)) = 0$ para qualquer $i > \dim(M/JM)$. (consequência imediata do Teorema 2.1.22)
- (2) (consequência imediata do Teorema 2.1.25) Seja M um R -módulo finitamente gerado, onde R é um anel local e Noetheriano.
 - (a) $H_i^{I,J}(D(M)) = 0$ para todos os inteiros $i > \dim(M)$.
 - (b) $H_i^{I,J}(D(M)) = 0$ para todos os inteiros $i > \dim(M/JM) + 1$.
- (3) Seja M um R -módulo, onde R é um anel local e Noetheriano. Então, para qualquer inteiro $i > \text{ara}(I\bar{R})$, onde $\bar{R} = R/\sqrt{J + \text{Ann}_R(M)}$, temos que $H_i^{I,J}(D(M)) = 0$. (consequência imediata da Proposição 2.1.27)

3.3.1 Resultados sobre co-localização

Definição 3.3.9 (Definição de co-localização) ([30, Definição após Corolário 3.9]) Seja S um conjunto multiplicativo de R . Temos que a **co-localização** de um R -módulo M com respeito à S é definida como sendo o R -módulo ${}_S M = \text{Hom}_R(S^{-1}R, M)$. Seja $\mathfrak{p}$ um ideal primo de R e $S = R \setminus \{\mathfrak{p}\}$; então, ao invés de ${}_S M$ escrevemos ${}_{\mathfrak{p}} M$.

Além disso, ainda de acordo com [30], para um R -módulo M temos que o **Co-suporte** de M é definido sendo o seguinte conjunto $\text{Cos}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p}M \neq 0\}$.

O próximo resultado é uma generalização, para o caso de um par de ideais, da proposição a seguir.

Proposição 3.3.10 ([30, Proposição 3.13]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, temos que:

$${}_S(H_i^I(M)) \cong H_i^{S^{-1}I}({}_S M),$$

para todo $i \geq 0$.

Antes de enunciarmos o resultado em questão, vamos colocar uma observação que é usada a seguir.

Observação 3.3.11 ([35, Corolário 2.25]) Se B é um R -módulo qualquer, então temos que $\text{Hom}_R(B, \bullet)$ preserva limites inversos.

O seguinte lema é usado para provar o Teorema 3.3.13.

Lema 3.3.12 ([30, Lema 3.12]) Seja R um anel Noetheriano. E seja N um R -módulo finitamente gerado, e M um R -módulo linearmente compacto. Então, temos que:

$${}_S(\text{Tor}_i^R(N, M)) \cong \text{Tor}_i^{S^{-1}R}(S^{-1}N, {}_S M),$$

para todo $i \geq 0$.

Teorema 3.3.13 Seja R um anel Noetheriano. Seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, segue que:

$${}_S(H_i^{I,J}(M)) \cong H_i^{S^{-1}I, S^{-1}J}({}_S M) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Demonstração Temos, a partir da Observação 3.3.11, que o funtor co-localização ${}_S(\bullet)$ é tal que ele preserva limites inversos, e desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} {}_S(H_i^{I,J}(M)) &= {}_S\left(\varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, M)\right) \\ &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} {}_S(\text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, M)). \end{aligned}$$

Agora, temos, pelo Lema 3.3.12, que:

$$\begin{aligned} {}_S(H_i^{I,J}(M)) &\cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^{S^{-1}R}(S^{-1}R/(S^{-1}\mathfrak{a})^t, {}_S M) \\ &= \varprojlim_{S^{-1}\mathfrak{a} \in \tilde{W}(S^{-1}I, S^{-1}J)} H_i^{S^{-1}\mathfrak{a}}({}_S M) \\ &= H_i^{S^{-1}I, S^{-1}J}({}_S M) \end{aligned}$$

para todo $i \geq 0$, como desejado. ■

Temos então o seguinte corolário.

Corolário 3.3.14 Seja R um anel Noetheriano. Seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, temos que:

$$\text{Cos}_R \left(H_i^{I,J} (M) \right) \subseteq \text{Cos}_R (M),$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração Seja $\mathfrak{p} \in \text{Cos}_R \left(H_i^{I,J} (M) \right)$. Temos, pelo Teorema 3.3.13, um isomorfismo, para todo $i \geq 0$:

$${}_{\mathfrak{p}} \left(H_i^{I,J} (M) \right) \cong H_i^{S^{-1}I, S^{-1}J} ({}_{\mathfrak{p}}M)$$

onde $S = R \setminus \{\mathfrak{p}\}$.

Segue que $H_i^{S^{-1}I, S^{-1}J} ({}_{\mathfrak{p}}M) \neq \{0\}$ e consequentemente, ${}_{\mathfrak{p}}M \neq \{0\}$. Portanto, $\mathfrak{p} \in \text{Cos}_R (M)$, como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.3.15 Os resultados deste capítulo foram submetidos e divulgados no arXiv em março de 2015, e podem ser encontrados em <http://xxx.tau.ac.il/abs/1503.05137>, via arquivo eletrônico.

Capítulo 4

O conceito de R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay

Vimos no Capítulo 1 os conceitos de R -módulo Cohen-Macaulay, (I, J) -Cohen-Macaulay e de um R -módulo co-Cohen-Macaulay. O objetivo agora é definir a noção de um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, como uma generalização do conceito de R -módulo co-Cohen-Macaulay.

4.1 Largura de um par de ideais (I, J) sobre módulos

Introduzimos neste capítulo o conceito de **largura** de um par de ideais (I, J) sobre um R -módulo M . Antes disso, na próxima proposição, vamos mostrar algumas propriedades do conjunto $\tilde{W}(I, J)$ que são utilizadas na sequência do texto.

Proposição 4.1.1 Sejam I, I', J, J' denotando ideais de R . Desta forma, temos as seguintes propriedades:

- (1) Se $I \subseteq I'$, então $\tilde{W}(I, J) \supseteq \tilde{W}(I', J)$.
- (2) Se $J \subseteq J'$, então $\tilde{W}(I, J) \subseteq \tilde{W}(I, J')$.
- (3) Temos $\tilde{W}(I + I', J) = \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I', J)$.
- (4) Temos $\tilde{W}(I, JJ') = \tilde{W}(I, J \cap J') = \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I, J')$.
- (5) Temos $\tilde{W}(\sqrt{I}, J) \subseteq \tilde{W}(I, J)$.

Demonstração (1): Seja $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I', J)$, e assim temos que $I'^n \subseteq \mathfrak{a} + J$, para algum inteiro $n \geq 1$; uma vez que $I \subseteq I'$ temos que $I^n \subseteq I'^n$ e desta forma, $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J$. Portanto, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Consequentemente, $\tilde{W}(I', J) \subseteq \tilde{W}(I, J)$.

(2): Suponha que $J \subseteq J'$. Seja $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$; com isso, para algum inteiro $n \geq 1$ temos que $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J$. Uma vez que, $J \subseteq J'$ segue que $I^n \subseteq \mathfrak{a} + J \subseteq \mathfrak{a} + J'$; portanto, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J')$. Consequentemente, $\tilde{W}(I, J) \subseteq \tilde{W}(I, J')$.

(3): Seja $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I', J)$. Desta forma, existem inteiros $n, m \geq 1$ tais que $I^n \subseteq J + \mathfrak{a}$ e $I'^m \subseteq J + \mathfrak{a}$. Seja $s = \max\{n, m\}$ e assim segue que $(I + I')^s \subseteq J + \mathfrak{a}$, e então $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I + I', J)$. Agora, para $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I + I', J)$ temos que, para algum inteiro $r \geq 1$, $(I + I')^r \subseteq J + \mathfrak{a}$; uma vez que, $I^r \subseteq (I + I')^r$ e $I'^r \subseteq (I + I')^r$ segue que $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I', J)$. Portanto, segue que $\tilde{W}(I + I', J) = \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I', J)$, como desejado.

(4): Uma vez que, $JJ' \subseteq J \cap J' \subseteq J, J'$, vale que $\tilde{W}(I, JJ') \subseteq \tilde{W}(I, J \cap J') \subseteq \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I, J')$. Seja $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I, J')$. Então existem inteiros $m, n \geq 1$ tais que $I^m \subseteq J + \mathfrak{a}$, $I^n \subseteq J' + \mathfrak{a}$. Desta forma, $I^{m+n} \subseteq (J + \mathfrak{a})(J' + \mathfrak{a}) \subseteq JJ' + \mathfrak{a}$. Consequentemente, temos que $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, JJ')$. Portanto, $\tilde{W}(I, J) \cap \tilde{W}(I, J') \subseteq \tilde{W}(I, JJ')$.

(5): Seja $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(\sqrt{I}, J)$. Então, existe $r \geq 1$, $r \in \mathbb{Z}$, tal que $(\sqrt{I})^r \subseteq J + \mathfrak{a}$; uma vez que, $I \subseteq \sqrt{I}$ segue que $I^r \subseteq J + \mathfrak{a}$. Desta forma, $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Portanto, $\tilde{W}(\sqrt{I}, J) \subseteq \tilde{W}(I, J)$. ■

Definimos, a seguir, o **cograu**. Essa noção aparece mais adiante no texto.

Definição 4.1.2 ([33, Definição 3.10]) Sejam M e N dois R -módulos, com R um anel Noetheriano. Suponha que M é finitamente gerado e N é Artiniano. Denotamos por $\text{cograde}_N(M)$ o comprimento de uma sequência N -coregular maximal em $\text{Ann}_R(M)$, e este é denominado o **cograu** de N sobre M .

Observe que nas mesmas hipóteses da Definição 4.1.2, temos que

$$\text{cograde}_N(M) = \text{width}_{\text{Ann}_R(M)}(N),$$

de acordo com a definição de largura de um módulo dada anteriormente.

O seguinte lema, será usado na próxima seção.

Lema 4.1.3 ([33, Corolário 3.11]) Seja R um anel Noetheriano. Considere as mesmas hipóteses da Definição 4.1.2. Então, temos que:

$$\text{cograde}_N(M) = \inf \{n \geq 0 \mid \text{Tor}_n^R(M, N) \neq 0\}.$$

Enunciemos agora um resultado, que vamos usar para fazer algumas conexões.

Teorema 4.1.4 ([5, Teorema 4.2]) Sejam R um anel Noetheriano e I um ideal próprio de R , e seja M um R -módulo Artiniano. Então, temos que:

$$\text{cograde}_M(R/I) = \inf \{i \mid H_i^I(M) \neq 0\}.$$

Observação 4.1.5 Temos que $\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) = \text{cograde}_M(R/\mathfrak{a})$ para $\mathfrak{a}$ um ideal de R onde $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano, e M é um R -módulo Artiniano tal que $(0 :_M \mathfrak{a}) \neq \{0\}$. De fato, pelo Teorema 4.1.4, temos que $\text{cograde}_M(R/\mathfrak{a}) = \inf \{i \mid H_i^{\mathfrak{a}}(M) \neq 0\}$, e pelo Teorema 2.2.28, segue que $\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) = \inf \{i \mid H_i^{\mathfrak{a}}(M) \neq 0\}$. Portanto, temos a igualdade $\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) = \text{cograde}_M(R/\mathfrak{a})$, como desejado.

A seguir, definimos um novo conceito.

Definição 4.1.6 Sejam I e J dois ideais de R , com R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo. Definimos a **largura** do par de ideais (I, J) sobre M , da seguinte maneira:

$$\text{width}_{I,J}(M) := \inf \left\{ \text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \right\},$$

se este infimo existe, e ∞ caso contrário.

4.1.1 Algumas propriedades do $\text{width}_{I,J}(M)$

Na proposição a seguir, provamos desigualdades para este novo invariante definido em 4.1.6.

Proposição 4.1.7 Sejam I, I', J, J' ideais do anel Noetheriano R , e seja M um R -módulo.

- (1) Se $I \subseteq I'$ então $\text{width}_{I,J}(M) \leq \text{width}_{I',J}(M)$.
- (2) Se $J \subseteq J'$ então $\text{width}_{I,J'}(M) \leq \text{width}_{I,J}(M)$.
- (3) Temos que $\text{width}_{I,JJ'}(M) = \text{width}_{I,J \cap J'}(M)$.
- (4) Temos que $\text{width}_{I,J}(M) \leq \text{width}_{\sqrt{I},J}(M)$.

Demonstração (1): Uma vez que $I \subseteq I'$ temos, pela Proposição 4.1.1, que $\tilde{W}(I', J) \subseteq \tilde{W}(I, J)$; desta forma, pela Definição 4.1.6, obtemos que:

$$\begin{aligned} \text{width}_{I,J}(M) &= \inf \left\{ \text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I', J) \right\} = \text{width}_{I',J}(M). \end{aligned}$$

(2): Como $J \subseteq J'$ segue a partir da Proposição 4.1.1 que $\tilde{W}(I, J) \subseteq \tilde{W}(I, J')$, e desta forma temos o resultado pela Definição 4.1.6, como no item (1) anterior.

(3): Uma vez que, pela Proposição 4.1.1, temos $\tilde{W}(I, JJ') = \tilde{W}(I, J \cap J')$, o resultado segue pela Definição 4.1.6, como acima.

(4): Novamente pela Proposição 4.1.1, temos que $\tilde{W}(\sqrt{I}, J) \subseteq \tilde{W}(I, J)$; e assim temos o resultado, procedendo como nos itens anteriores. ■

Observemos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.8 ([33, Corolário 3.13]) Seja R um anel local e Noetheriano, com I um ideal próprio de R , e seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $IM \neq M$. Então, temos que: $\text{width}_I(D(M)) = \text{grade}(I, M)$.

A próxima proposição é uma generalização da Proposição 4.1.8. Lembramos que o conceito de $\text{grade}(I, J, M)$ foi colocado no Capítulo 1 desta tese.

Proposição 4.1.9 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, temos que:

$$\text{width}_{I,J}(D(M)) = \text{grade}(I, J, M).$$

Demonstração Pela Proposição 4.1.8, temos que:

$$\text{width}_{\mathfrak{a}}(D(M)) = \text{grade}(\mathfrak{a}, M),$$

para qualquer ideal $\mathfrak{a}$ de R . Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} \text{width}_{I,J}(D(M)) &= \inf \left\{ \text{width}_{\mathfrak{a}}(D(M)) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \right\} \\ &= \inf \left\{ \text{grade}(\mathfrak{a}, M) \mid \mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J) \right\} \\ &= \text{grade}(I, J, M) \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue pela Definição 1.7.6. ■

Observação 4.1.10 ([33, Teorema 1.6 (3)]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Se M é um R -módulo Artiniano, então $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado.

Observação 4.1.11 ([33, Teorema 1.6 (5)]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Se M é um R -módulo Artiniano, então $D(D(M))$ é isomorfo à M .

Corolário 4.1.12 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo e seja M um R -módulo Artiniano. Então, temos que:

$$\text{width}_{I,J}(M) = \text{grade}(I, J, D(M)).$$

Demonstração Pela Observação 4.1.10, temos que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado. Agora, pela Proposição 4.1.9 e pela Observação 4.1.11, temos o resultado, como desejado. ■

Temos também a seguinte consequência imediata. Para esta consequência, vamos utilizar o seguinte resultado.

Lema 4.1.13 ([1, Corolário 2.5]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado tal que $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todo $i < t$, para um certo $t \in \mathbb{N}$. Para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, temos que:

$$\text{grade}(I, J, M) \leq \text{grade}(\mathfrak{a}, J, M) \leq \text{grade}(\mathfrak{a}, M).$$

Em particular, isto vale para $\mathfrak{a} = I$.

Corolário 4.1.14 Nas mesmas hipóteses do Corolário 4.1.12, acrescente a hipótese de que temos $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i < t$, para um certo $t \in \mathbb{N}$. Desta forma, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, nós obtemos que:

$$\text{width}_{I,J}(M) \leq \text{width}_{\mathfrak{a},J}(M) \leq \text{width}_{\mathfrak{a}}(M).$$

Em particular, isto vale para $\mathfrak{a} = I$.

Demonstração Note que, pelo Corolário 3.2.20 (2), temos $H_i^{I,J}(M) = 0$ se, e somente se, $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$. O resultado agora segue pelo Corolário 4.1.12, e pelo Lema 4.1.13, como desejado. ■

O próximo resultado nos fornece uma caracterização do $\text{width}_{I,J}(M)$ em termos do módulo de homologia local com respeito a um par de ideais. Para a prova de tal resultado, vamos precisar do seguinte lema.

Lema 4.1.15 ([1, Proposição 2.3]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado. Então, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \text{grade}(I, J, M) &= \inf \{i \mid H_{I,J}^i(M) \neq 0\} \\ &= \inf \{\text{grade}(\mathfrak{p}, M) \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\} \\ &= \inf \{\text{depth}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in W(I, J)\}. \end{aligned}$$

Proposição 4.1.16 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, e seja M um R -módulo Artiniano. Então, temos que:

$$\text{width}_{I,J}(M) = \inf \{i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0\}.$$

Demonstração Temos, pela Observação 4.1.10, que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado. Note que, pelo Lema 4.1.15, temos:

$$\text{grade}(I, J, D(M)) = \inf \{i \mid H_{I,J}^i(D(M)) \neq 0\}.$$

O resultado é agora imediato a partir do Corolário 3.2.20 (2), e do Corolário 4.1.12. ■

O seguinte lema é usado na sequência do texto.

Lema 4.1.17 ([33, Proposição 3.16]) Sejam R um anel Noetheriano, $\mathfrak{a} \subset R$ um ideal de R , e M , N e U R -módulos tais que $(0 :_M \mathfrak{a}) \neq 0$, $(0 :_U \mathfrak{a}) \neq 0$ e $(0 :_N \mathfrak{a}) \neq 0$. Suponha que $0 \rightarrow U \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta com M um R -módulo Artiniano. Então, temos que:

- (1) $\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \geq \min \{\text{width}_{\mathfrak{a}}(U), \text{width}_{\mathfrak{a}}(N)\},$
- (2) $\text{width}_{\mathfrak{a}}(U) \geq \min \{\text{width}_{\mathfrak{a}}(M), \text{width}_{\mathfrak{a}}(N) + 1\},$
- (3) $\text{width}_{\mathfrak{a}}(N) \geq \min \{\text{width}_{\mathfrak{a}}(U) - 1, \text{width}_{\mathfrak{a}}(M)\}.$

Demonstração A sequência exata curta dada induz, pela Proposição 2.2.19, uma sequência exata longa de módulos de homologia local dada da seguinte forma:

$$\dots \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(U) \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow H_i^{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow \dots \rightarrow H_0^{\mathfrak{a}}(U) \rightarrow H_0^{\mathfrak{a}}(M) \rightarrow H_0^{\mathfrak{a}}(N) \rightarrow 0.$$

Devemos observar que $H_i^{\mathfrak{a}}(M) = 0$ se $H_i^{\mathfrak{a}}(U)$ e $H_i^{\mathfrak{a}}(N)$ ambos se anulam. Portanto, a primeira desigualdade segue a partir de:

$$\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) = \inf \{i \mid H_i^{\mathfrak{a}}(M) \neq 0\},$$

resultado este que é dado pelo Teorema 2.2.28, e por nossa discussão do caso $\text{width}_{\mathfrak{a}}(-) = \infty$.

Com argumentos completamente análogos, mostramos que a segunda e a terceira desigualdades também acontecem. ■

A seguinte proposição nos fornece algumas relações com a largura de um par de ideais (I, J) sobre módulos.

Proposição 4.1.18 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, e seja M um R -módulo Artiniano. Seja $0 \rightarrow U \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos. Seja $r := \text{width}_{I,J}(U)$, $t := \text{width}_{I,J}(M)$ e $s := \text{width}_{I,J}(N)$. Então, segue que:

- (1) $t \geq \min \{r, s\}$.
- (2) $r \geq \min \{t, s + 1\}$.
- (3) $s \geq \min \{r - 1, t\}$.
- (4) Temos que, uma das seguintes igualdades sempre vale:

$$t = r, t = s, t = r = s, s = r - 1.$$

Demonstração Note que, pela Proposição 4.1.16, temos que $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i < t$. Assim, para os itens (1), (2) e (3) aplicamos o Corolário 4.1.14 e o Lema 4.1.17. Agora, para provar (4), suponha que nenhuma das igualdades seja verdadeira. Então, somente um dos seguintes casos acontece:

$$\begin{aligned} (a) \ r < s < t \quad (b) \ s < r < t \quad (c) \ t < r < s \\ (d) \ t < s < r \quad (e) \ s < t < r \quad (f) \ r < t < s. \end{aligned}$$

Seja $r < s < t$. Então, $s + 1 \leq t$ e por (2), segue que $s + 1 \leq r < s$, o que é uma contradição. Se $s < r < t$, então $s \leq r - 1 < t$. Desta forma, por (3), temos que $r - 1 \leq s$. Portanto, $s = r - 1$, o que é uma contradição.

O mesmo método pode ser aplicado aos outros casos. ■

Vejamos um resultado que associa o módulo de cohomologia local com respeito a um par de ideais com o R -módulo Ext .

Proposição 4.1.19 ([1, Proposição 2.4]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo tal que $H_{I,J}^i(M) = 0$, para todo $i < t$, para um certo $t \in \mathbb{N}$. Então, para qualquer $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, M) &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(M)) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a},J}^t(M)) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(M)). \end{aligned}$$

Observação 4.1.20 ([33, Corolário 1.4]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, e sejam M e N dois R -módulos. Suponha que M é finitamente gerado. Então, vale o seguinte isomorfismo: $M \otimes_R D(N) \cong D(\text{Hom}_R(M, N))$.

A seguinte proposição relaciona o módulo de homologia local com respeito a um par de ideais com o R -módulo Tor .

Proposição 4.1.21 Seja M um R -módulo Artiniano com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Suponha que temos $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i < t$, para um certo $t \in \mathbb{N}$.

Então vale, para qualquer $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, que

$$\begin{aligned} \text{Tor}_t^R(R/\mathfrak{a}, M) &\cong R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{\mathfrak{a}}(M) \\ &\cong R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{\mathfrak{a},J}(M) \\ &\cong R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{I,J}(M). \end{aligned}$$

Demonstração Uma vez que $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todo $i < t$, segue que seu módulo dual Matlis $D(H_i^{I,J}(M)) = 0$, isto é, $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$ para todo $i < t$, devido ao Corolário 3.2.20 (2). Pela Proposição 4.1.19, temos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, D(M)) &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a}}^t(D(M))) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{\mathfrak{a},J}^t(D(M))) \\ &\cong \text{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H_{I,J}^t(D(M))). \end{aligned}$$

Pela Observação 4.1.11, temos que $D(D(M)) \cong M$ e pela Proposição 1.6.6 (2), temos o seguinte isomorfismo $D(\text{Ext}_R^t(R/\mathfrak{a}, D(M))) \cong \text{Tor}_t^R(R/\mathfrak{a}, D(D(M))) = \text{Tor}_t^R(R/\mathfrak{a}, M)$. Agora, o resultado segue a partir da Observação 4.1.20, e da Proposição 2.2.12 (2), como desejado. ■

Teorema 4.1.22 Seja M um R -módulo Artiniano com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Seja $t := \text{width}_{I,J}(M)$ e suponha que o R -módulo $H_i^{I,J}(M) = 0$, para todo $i < t$. Então, para qualquer $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$.
- (2) $R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{\mathfrak{a},J}(M) \neq 0$.
- (3) $\text{Tor}_t^R(R/\mathfrak{a}, M) \neq 0$.
- (4) $R/\mathfrak{a} \otimes_R H_t^{I,J}(M) \neq 0$.

Demonstração Note que, pela Proposição 4.1.16, temos:

$$t = \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\}.$$

Agora, todas essas equivalências são consequências da Proposição 4.1.21. ■

O próximo teorema relaciona o cograu com o módulo de homologia local com respeito ao par de ideais (I, J) , como vemos a seguir.

Teorema 4.1.23 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano tal que R é linearmente compacto como um R -módulo, e seja M um R -módulo Artiniano e finitamente gerado. Desta forma, se $\Lambda_{I,J}(R)$ é um R -módulo finitamente gerado temos que:

$$\text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R)) = \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\}.$$

Demonstração Uma vez que M é um R -módulo Artiniano segue, pela Observação 4.1.11, que temos o isomorfismo $D(D(M)) \cong M$. Pelo Lema 4.1.3 temos que:

$$\text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R)) = \inf \left\{ i \mid \text{Tor}_i^R(\Lambda_{I,J}(R), M) \neq 0 \right\}.$$

Agora, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), segue que $\{R/\mathfrak{a}^t\}_{t \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Além disso, pelo Lema 1.6.3 (2), temos que $\{\Lambda_{\mathfrak{a}}(R)\}_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos.

Desta maneira, pelo Lema 1.6.5, temos que:

$$\text{Tor}_i^R(\Lambda_{I,J}(R), M) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, M).$$

Portanto, $\text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R))$ é justamente igual à:

$$\begin{aligned} &= \inf \left\{ i \mid \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{a}^t, D(D(M))) \neq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ i \mid \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} D(\text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^t, D(M))) \neq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ i \mid D\left(\varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}^t, D(M))\right) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

pela Proposição 1.6.6 (2), e pelo Teorema 1.5.13. Agora, pelo Teorema 2.1.20, temos que:

$$H_{I,J}^i(D(M)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_{\mathfrak{a}}^i(D(M))$$

e desta forma, como, pela Proposição 3.2.19, temos o seguinte isomorfismo $D(H_{I,J}^i(D(M))) \cong H_i^{I,J}(D(D(M)))$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} \text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R)) &= \inf \left\{ i \mid D(H_{I,J}^i(D(M))) \neq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(D(D(M))) \neq 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Concluimos então que, $\text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R)) = \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\}$, como desejado. ■

Observação 4.1.24 Considere as mesmas hipóteses do Teorema 4.1.23. Além disso, acrescente que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel completo. Sob essas condições temos que:

$$\begin{aligned} \text{cograde}_M(\Lambda_{I,J}(R)) &= \inf \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\} \\ &= \text{width}_{I,J}(M) \end{aligned}$$

onde a última igualdade ocorre pela Proposição 4.1.16.

4.2 Anulamento e não-anulamento

Argumentamos sobre o **anulamento** e **não-anulamento** do R -módulo de homologia local com respeito a (I, J) . Começamos com o seguinte resultado, que é usado para o nosso propósito.

Teorema 4.2.1 ([44, Teorema 1.5 (a)]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo. Além disso, seja $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(M)$. Então, temos que:

$$\text{para qualquer ideal } \mathfrak{a} \text{ de } R, H_{\mathfrak{a}}^i(M) = 0 \text{ se } i < \text{grade}(\mathfrak{a}, M).$$

Proposição 4.2.2 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, seja M um R -módulo Artiniano e seja $\mathfrak{p} \in \text{Supp}_R(M)$. Neste caso, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, temos que se $i < \text{width}_{\mathfrak{a}}(M)$ então $H_i^{I,J}(M) = 0$.

Demonstração Pelo Teorema 4.2.1, temos que se $i < \text{grade}(\mathfrak{a}, D(M))$ então $H_{\mathfrak{a}}^i(D(M)) = 0$. Agora, pela Proposição 4.1.8, temos que:

$$\text{grade}(\mathfrak{a}, D(M)) = \text{width}_{\mathfrak{a}}(D(D(M))).$$

E como M é um R -módulo Artiniano segue, pela Observação 4.1.11, que $D(D(M)) \cong M$. Desta forma, temos: se $i < \text{width}_{\mathfrak{a}}(M)$ então $D(H_{\mathfrak{a}}^i(D(M))) = 0$. Uma vez que, pela Proposição 2.2.12 (2), temos $D(H_{\mathfrak{a}}^i(D(M))) \cong H_i^{\mathfrak{a}}(D(D(M)))$ segue que $H_i^{\mathfrak{a}}(M) = 0$, se $i < \text{width}_{\mathfrak{a}}(M)$. Portanto,

$$\text{se } i < \text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \text{ então } H_i^{I,J}(M) := \varprojlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H_i^{\mathfrak{a}}(M) = 0,$$

como desejado. ■

O próximo resultado, é uma generalização da Proposição 4.2.3 para o caso do módulo de homologia local com respeito a um par de ideais (I, J) , como segue.

Proposição 4.2.3 ([11, Proposição 4.8]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo Artiniano com $\text{Ndim}(M) = d$. Então, para todo $i > d$, temos que $H_i^I(M) = 0$.

Observação 4.2.4 ([33, Teorema 1.6 (8)]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano. Para qualquer R -módulo M , temos que $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(D(M))$. Em particular, temos que $\dim(M) = \dim(D(M))$.

Ainda, antes de enunciarmos este segundo resultado de anulamento, devemos observar o seguinte resultado.

Lema 4.2.5 ([12, Corolário 2.5]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Então, para M um R -módulo Artiniano, temos que $\text{Ndim}(M) = \dim(M)$.

Teorema 4.2.6 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, e seja M um R -módulo Artiniano. Suponha que $J \neq R$. Então, $H_i^{I,J}(M) = 0$, para qualquer $i > \text{Ndim}(M/JM)$.

Demonstração Temos que M é um R -módulo Artiniano. Assim, pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano e assim é finitamente gerado. Segue a partir do Teorema 2.1.22 que temos $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$, para todo $i > \dim(D(M)/JD(M))$. Pelo Corolário 3.2.20 (2) temos que:

$$H_{I,J}^i(D(M)) \cong D\left(H_i^{I,J}(M)\right) \text{ para todo } i \geq 0.$$

Portanto, segue que

$$H_i^{I,J}(M) = 0 \text{ para todo } i > \dim(D(M)/JD(M))$$

uma vez que, $D\left(H_i^{I,J}(M)\right) = 0 \Rightarrow H_i^{I,J}(M) = 0$, pelo Corolário 3.2.20 (2). Agora, pela Observação 4.2.4, segue que $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(D(M))$ e assim temos:

$$\dim(M/JM) = \dim(D(M)/JD(M)).$$

Desta forma, temos $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todo $i > \dim(M/JM)$. Uma vez que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local, Noetheriano e completo segue, pelo Lema 4.2.5, que $\text{Ndim}(M/JM) = \dim(M/JM)$. Portanto, $H_i^{I,J}(M) = 0$, para qualquer $i > \text{Ndim}(M/JM)$, como desejado. ■

O próximo teorema, pode ser visto como o dual do Teorema 2.1.23.

Teorema 4.2.7 Seja M um R -módulo Artiniano com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Suponha que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então, temos a igualdade:

$$\sup \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\} = \text{Ndim}(M/JM).$$

Demonstração Temos que M é um R -módulo Artiniano. Desta forma, pelo Teorema B.2.1 (3), temos que $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano e assim é finitamente gerado. Pelo Teorema 2.1.23, temos que:

$$\sup \left\{ i \mid H_{I,J}^i(D(M)) \neq 0 \right\} = \dim(D(M)/JD(M)).$$

Pelo Corolário 3.2.20 (2), temos que $D\left(H_i^{I,J}(M)\right) \cong H_{I,J}^i(D(M))$, para todo $i \geq 0$. Pela Observação 4.2.4, segue que $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(D(M))$ e então temos a igualdade:

$$\dim(D(M)/JD(M)) = \dim(M/JM).$$

Portanto, temos que:

$$\sup \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\} = \dim(M/JM).$$

Agora, pelo Lema 4.2.5, temos que $\dim(M/JM) = \text{Ndim}(M/JM)$. Portanto,

$$\sup \left\{ i \mid H_i^{I,J}(M) \neq 0 \right\} = \text{Ndim}(M/JM),$$

como desejado. Isto finaliza a prova. ■

Em seguida, temos o seguinte resultado sobre o anulamento de módulos de homologia local com respeito a (I, J) .

Teorema 4.2.8 Seja M um R -módulo Artiniano com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Então, temos que $H_i^{I,J}(M) = 0$ para todos os inteiros $i > \text{Ndim}(M)$.

Demonstração Pelo Teorema B.2.1 (3) temos que, $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano e assim é R -módulo finitamente gerado. Pelo Teorema 2.1.25 (1), segue que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$ para todos os inteiros $i > \dim(D(M))$. Pela Observação 4.2.4, temos que a dimensão de Krull de um R -módulo é igual à dimensão de Krull do módulo dual Matlis deste R -módulo. Além disso, pelo Lema 4.2.5, temos que a dimensão Noetheriana é igual à dimensão de Krull de um R -módulo. Portanto, uma vez que, pelo Corolário 3.2.20, temos $H_{I,J}^i(D(M)) \cong D(H_i^{I,J}(M))$ segue o resultado, como desejado. ■

A próxima proposição faz referência ao posto aritmético.

Proposição 4.2.9 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo qualquer. Então, $H_i^{I,J}(M) = 0$ para qualquer inteiro $i > \text{ara}(I\bar{R})$, onde $\bar{R} = R/\sqrt{J + \text{Ann}_R(M)}$.

Demonstração Pela Proposição 2.1.27, temos que $H_{I,J}^i(D(M)) = 0$ para qualquer inteiro $i > \text{ara}(IR')$ onde $R' = R/\sqrt{J + \text{Ann}_R(D(M))}$. Pela Observação 4.2.4, segue que $\text{Ann}_R(M) = \text{Ann}_R(D(M))$. Uma vez que, pelo Corolário 3.2.20 (2), temos o isomorfismo $H_{I,J}^i(D(M)) \cong D(H_i^{I,J}(M))$, o resultado então segue. ■

A seguir, vamos enunciar um resultado que irá ser utilizado para alguns resultados desta seção.

Proposição 4.2.10 ([1, Lema 3.1]) Seja R um anel Noetheriano, o qual é um domínio integral, e I um ideal de R . Seja M um R -módulo finitamente gerado e fielmente plano com dimensão de Krull finita e igual à d . Então, $\dim(M/IM) = d$ se, e somente se, $I = 0$.

Lema 4.2.11 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo tal que R é um domínio integral e seja $\mathfrak{a}$ um ideal de R . Seja M um R -módulo Artiniano tal que M é um R -módulo fielmente plano e finitamente gerado de dimensão de Krull finita e igual à d . Então, $\text{Ndim}(M/\mathfrak{a}M) = d$ se, e somente se, $\mathfrak{a} = 0$.

Demonstração Temos, pelo Lema 4.2.5, que $\text{Ndim}(M/\mathfrak{a}M) = \dim(M/\mathfrak{a}M)$. Segue então, pela Proposição 4.2.10, que temos $\text{Ndim}(M/\mathfrak{a}M) = d$ se, e somente se, $\mathfrak{a} = 0$, como queríamos demonstrar. ■

A seguinte proposição é uma consequência imediata do Lema 4.2.11 e do Teorema 4.2.7.

Proposição 4.2.12 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, tal que R é um domínio integral e $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Seja M um R -módulo Artiniano tal que M é um R -módulo fielmente plano e finitamente gerado de dimensão de Krull finita e igual à d . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $\text{Ndim}(M/JM) = d$;

(2) $J = 0$;

(3) $H_d^{I,J}(M) \neq 0$.

Em particular, isto é verdade para $M = R$.

Demonstração Basta aplicar o Lema 4.2.11 e o Teorema 4.2.7. ■

A próxima proposição, depende do seguinte resultado.

Teorema 4.2.13 ([1, Corolário 3.3]) Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano, tal que R é um domínio integral de dimensão n e seja J um ideal próprio não nulo de R . Então, $H_{I,J}^n(M) = 0$, para qualquer R -módulo M .

Proposição 4.2.14 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano tal que R é um domínio integral de dimensão n , e seja J um ideal próprio não nulo de R . Se M é um R -módulo Artiniano, então $H_n^{I,J}(M) = 0$.

Demonstração Pelo Teorema 4.2.13, temos que $H_{I,J}^n(D(M)) = 0$. Agora, pela Proposição 3.2.19 e pelo Corolário 3.2.20 (1), segue que temos $D(H_{I,J}^n(D(M))) \cong H_n^{I,J}(D(D(M))) = 0$. O resultado agora segue pela Observação 4.1.11, como queríamos demonstrar. ■

O próximo teorema é utilizado na próxima seção. Antes deste teorema, observemos a proposição.

Proposição 4.2.15 ([1, Teorema 2.10 (i) e (ii)]) Seja R um anel Noetheriano, e seja M um R -módulo finitamente gerado e tal que $IM \neq M$. Seja $t := \text{grade}(I, J, M)$. Então, temos que $H_I^t(M) \neq 0$ se, e somente se, $t = \text{grade}(I, M)$.

Também temos que, se $H_I^t(M) \neq 0$, então $\text{grade}(I, M) \leq \text{grade}(\mathfrak{a}, M)$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Teorema 4.2.16 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Seja M um R -módulo Artiniano tal que $IM \neq M$, para I um ideal de R , e seja $t := \text{width}_{I,J}(M)$. Então, as seguintes afirmações são satisfeitas:

(1) $H_I^t(M) \neq 0$ se, e somente se, $t = \text{width}_I(M)$.

(2) Se $H_I^t(M) \neq 0$, então $\text{width}_I(M) \leq \text{width}_{\mathfrak{a}}(M)$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Demonstração Pela Observação 4.1.10, Observação 4.1.11 e pela Proposição 4.1.8 temos, respectivamente, que $D(M)$ é um R -módulo finitamente gerado, $D(D(M)) \cong M$ e além disso $\text{grade}(I, D(M)) = \text{width}_I(D(D(M))) = \text{width}_I(M)$.

(1): Pela Proposição 4.2.15, segue que $H_I^t(D(M)) \neq 0$ se, e somente se, $t = \text{grade}(I, D(M)) = \text{width}_I(M)$. Agora, pelo Lema 2.2.13 (2), temos que $H_I^t(D(M)) \cong D(H_I^t(M))$ e assim, $D(H_I^t(M)) \neq 0$ se, e só se, $H_I^t(M) \neq 0$. Portanto, $H_I^t(M) \neq 0$ se, e somente se, $t = \text{width}_I(M)$.

(2): Como $H_I^t(M) \neq 0$ segue, pelo Lema 2.2.13 (2), que $H_I^t(D(M)) \neq 0$; pela Proposição 4.2.15, temos que $\text{grade}(I, D(M)) \leq \text{grade}(\mathfrak{a}, D(M))$, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Segue o resultado. ■

4.3 O R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay

Como uma generalização do conceito de um R -módulo co-Cohen-Macaulay, visto na Definição 1.7.13, nós introduzimos o conceito de um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, utilizando o conceito de largura de um par de ideais. É o que nós fazemos a seguir.

Definição 4.3.1 Seja R um anel Noetheriano e sejam I e J dois ideais de R . Um R -módulo Artiniano M é chamado de um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, se $M \neq 0$ e vale que

$$\text{width}_{I,J}(M) = \text{Ndim}(M/JM),$$

ou se $M = 0$. Se R é ele mesmo um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, então dizemos que R é um anel (I, J) -co-Cohen-Macaulay.

Observação 4.3.2 De acordo com a Definição 4.3.1, segue que se M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, então J é um ideal próprio de R . Também, se na Definição 4.3.1 temos que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano, $I = \mathfrak{m}$ e $J = 0$, então o conceito de um R -módulo Artiniano (I, J) -co-Cohen-Macaulay coincide com o conceito de R -módulo co-Cohen-Macaulay, de acordo com a Definição 1.7.13, vista no Capítulo 1.

Vejamos então um resultado, envolvendo este novo conceito.

Proposição 4.3.3 Seja M um R -módulo Artiniano com $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Suponha que temos $J \neq R$ e $\text{Ndim}(M) = \text{Ndim}(M/JM)$. Se M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay, então M é um R -módulo $(\mathfrak{a}, J)$ -co-Cohen-Macaulay, para qualquer $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$.

Demonstração Por hipótese, temos que $\text{Ndim}(M/JM) = \text{width}_{I,J}(M)$. Pelo Corolário 4.1.14 segue que temos:

$$\text{Ndim}(M/JM) \leq \text{width}_{\mathfrak{a},J}(M) \leq \text{width}_{\mathfrak{a}}(M),$$

para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$. Por outro lado, nós já temos que $\text{width}_{\mathfrak{a},J}(M) \leq \text{Ndim}(M) = \text{Ndim}(M/JM)$ (usando a hipótese), uma vez que, pela Observação 1.7.12 (ou pela Observação 2.2.27), temos que $\text{width}_{\mathfrak{a}}(M) \leq \text{Ndim}(M) < \infty$.

Portanto, nós obtemos que:

$$\text{Ndim}(M/JM) = \text{width}_{\mathfrak{a},J}(M),$$

e assim segue, pela Definição 4.3.1, que M é um R -módulo $(\mathfrak{a}, J)$ -co-Cohen-Macaulay, para todo $\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I, J)$, como desejado. ■

O próximo resultado nos fornece uma cota para não-anulamento de módulos de homologia local, com respeito à um par de ideais, no caso local.

Proposição 4.3.4 Seja M um R -módulo Artiniano, não nulo, sobre o anel local, Noetheriano e completo $(R, \mathfrak{m})$, e seja $J \neq R$. Suponha que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então, qualquer inteiro $i \geq 0$ para o qual $H_i^{I,J}(M) \neq 0$ deve satisfazer:

$$\text{width}_{I,J}(M) \leq i \leq \text{Ndim}(M/JM),$$

enquanto que para i em uma das extremidades deste intervalo, temos que $H_i^{I,J}(M) \neq 0$.

Demonstração Aplique a Proposição 4.1.16, e o Teorema 4.2.7. ■

Uma consequência imediata da Proposição 4.3.4 é o seguinte resultado.

Corolário 4.3.5 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo, e seja M um R -módulo não nulo e Artiniano. Suponha que $I + J$ é um ideal $\mathfrak{m}$ -primário. Então, existe exatamente um inteiro $i \geq 0$ para o qual $H_i^{I,J}(M) \neq 0$ se, e somente se, $\text{width}_{I,J}(M) = \text{Ndim}(M/JM)$, isto é, se, e somente se, M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay.

Na próxima proposição nós mostramos que os dois conceitos, de um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay e de um R -módulo co-Cohen-Macaulay não são, de fato, a mesma coisa.

Proposição 4.3.6 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo tal que R é um domínio integral. Além disso, considere que o ideal J é não nulo. Seja M um R -módulo Artiniano tal que M é um R -módulo fielmente plano e finitamente gerado e seja $t = \text{width}_{\mathfrak{m},J}(M)$ de maneira tal que $H_t^{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Se M é um R -módulo $(\mathfrak{m}, J)$ -co-Cohen-Macaulay, então M não é um R -módulo co-Cohen-Macaulay. Em particular, isto é válido para $M = R$.

Demonstração Temos, pelo Lema 4.2.5, que $\text{Ndim}(M) = \dim(M)$ (dimensão de Krull). Suponha que M é um R -módulo co-Cohen-Macaulay. Agora, aplique o Teorema 4.2.16 (1) e o Lema 4.2.11. Assim, temos que $J = 0$, o que contradiz a hipótese de que $J \neq 0$. Portanto, M não é um R -módulo co-Cohen-Macaulay. ■

Proposição 4.3.7 Seja M um R -módulo finitamente gerado, com R um anel Noetheriano, tal que M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay. Então, temos que M/JM é um R -módulo de comprimento finito.

Demonstração De fato, uma vez que M é um R -módulo (I, J) -co-Cohen-Macaulay temos que M/JM é um R -módulo Artiniano (pois M é um R -módulo Artiniano). Agora, como R é um anel Noetheriano e M/JM é um R -módulo finitamente gerado (pois M é finitamente gerado) segue que M/JM é um R -módulo Noetheriano. Portanto, segue que M/JM é um R -módulo de comprimento finito, como queríamos demonstrar. ■

Observação 4.3.8 Os resultados deste capítulo foram submetidos e divulgados no arXiv em março de 2015, e podem ser encontrados em <http://xxx.tau.ac.il/abs/1503.05137>, via arquivo eletrônico.

Capítulo 5

Limite inverso de homologia local

5.1 A definição de limite inverso de homologia local

O objetivo neste capítulo é elaborar uma teoria em paralelo com a teoria de cohomologia local formal, definida em [37] por Peter Schenzel. Os resultados deste capítulo foram publicados.

Seja M um R -módulo qualquer, com R um anel Noetheriano, e sejam $\mathfrak{a}$ e I ideais dados de R . Desta forma, vamos considerar o sistema inverso de R -módulos $\{M/\mathfrak{a}^n M, \pi_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, com os epimorfismos naturais: $\pi_{n,k} : M/\mathfrak{a}^n M \rightarrow M/\mathfrak{a}^k M$, $\forall 0 < k \leq n$.

Temos então um complexo de cadeias:

$$0 \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M \rightarrow M/\mathfrak{a}^k M \rightarrow 0.$$

Agora, uma vez que o produto tensorial é comutativo, ou seja, dados dois R -módulos A e B temos que $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$, segue que também temos $\mathrm{Tor}_i^R(A, B) \cong \mathrm{Tor}_i^R(B, A)$, para todo $i \geq 0$.

E além disso, tanto $A \otimes_R -$ como $- \otimes_R B$ são funtores covariantes, logo $\mathrm{Tor}_i^R(A, -)$ e $\mathrm{Tor}_i^R(-, B)$, para todo $i \geq 0$, são funtores covariantes. Portanto, aplicando o funtor torção dado por $\mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, -)$, para $t \in \mathbb{N}$, ao complexo de cadeias: $0 \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M \rightarrow M/\mathfrak{a}^k M \rightarrow 0$, obtemos o seguinte complexo de cadeias:

$$0 \rightarrow \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^k M) \rightarrow 0. \quad (*)$$

Temos, conforme visto no Capítulo 1, que o limite inverso é funtor aditivo, covariante e exato à esquerda. Portanto, aplicando o limite inverso ao complexo $(*)$ obtemos, por definição do módulo de homologia local de um R -módulo com respeito à um ideal, de acordo com o que já foi visto no Capítulo 2, a seguinte sequência de R -módulos:

$$0 \rightarrow H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H_i^I(M/\mathfrak{a}^k M) \rightarrow 0.$$

Logo, para todo $k, n \in \mathbb{N}$ com $0 < k \leq n$, temos um R -homomorfismo natural dado por $\phi_{n,k} : H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H_i^I(M/\mathfrak{a}^k M)$. Desta maneira, temos uma família de R -módulos de homologia local com respeito à um ideal $\{H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}}$, e uma família de R -homomorfismos dada

da seguinte forma $\{\phi_{n,k} : H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow H_i^I(M/\mathfrak{a}^k M) \mid n, k \in \mathbb{N}\}$, onde os R -homomorfismos desta família são definidos sempre que $0 < k \leq n$, e tal que:

- (1) $\phi_{n,n}$ é a aplicação identidade sobre $H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M)$, e
- (2) tendo as aplicações $H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \xrightarrow{\phi_{n,k}} H_i^I(M/\mathfrak{a}^k M) \xrightarrow{\phi_{k,j}} H_i^I(M/\mathfrak{a}^j M)$, com $j \leq k \leq n$, obtemos que $\phi_{k,j} \circ \phi_{n,k} \equiv \phi_{n,j}$.

Podemos então concluir, de acordo com o que foi visto no Capítulo 1, que essas duas famílias nos fornece um sistema inverso de R -módulos.

Definição 5.1.1 Dado o sistema inverso de R -módulos $\{H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M), \phi_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, o seu limite inverso é chamado de o **limite inverso de homologia local**, e será denotado por:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M),$$

para todo $i \geq 0$.

5.2 Algumas propriedades e sequências exatas de limite inverso de homologia local

Vamos estudar agora, algumas propriedades do limite inverso de homologia local $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M)$, conforme dado na Definição 5.1.1.

Proposição 5.2.1 Sejam R um anel Noetheriano e $\mathfrak{a}, I$ ideais de R . Seja M um R -módulo linearmente compacto. Desta forma, para o sistema inverso de R -módulos linearmente compactos $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$, temos que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = H_i^I\left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M\right),$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração Pela definição, $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M)$. Como temos, pelo Teorema 1.5.12, que limites inversos são comutativos segue que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M).$$

Uma vez que, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos temos, de acordo com o Lema 1.6.5, os isomorfismos para todo $i \geq 0$:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \text{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M) \cong \text{Tor}_i^R\left(R/I^t, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M\right).$$

Portanto, obtemos que

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^t, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right) = \mathrm{H}_i^I \left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right),$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 5.2.2 Note que, se além das hipóteses da Proposição 5.2.1 temos que o R -módulo M é completo com respeito à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica, de acordo com a Definição 2.2.1, então obtemos que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = \mathrm{H}_i^I(M)$.

O próximo resultado, faz um paralelo com a Proposição 2.2.12 (1), conforme veremos a seguir.

Proposição 5.2.3 Seja M um R -módulo, onde R é um anel Noetheriano. Então, para todo $i \geq 0$, temos que o limite inverso de homologia local $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M)$ é I -separado, isto é, temos

$$\bigcap_{s>0} I^s \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) = 0.$$

Demonstração Para um sistema inverso de R -módulos $\{M_t\}_{t \in \mathbb{N}}$, temos que vale a seguinte inclusão $I \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M_t \subseteq \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} IM_t$. Desta forma, obtemos que

$$\bigcap_{s>0} I^s \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \left(I^s \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) \right),$$

e assim, $\bigcap_{s>0} I^s \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) \subseteq \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} I^s \mathrm{H}_i^I(M/\mathfrak{a}^n M)$, onde temos pela definição que

$$\mathrm{H}_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M).$$

Uma vez que limites inversos são comutativos (ver Teorema 1.5.12), segue que

$$\bigcap_{s>0} I^s \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) \subseteq \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} I^s \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M) = 0,$$

pois, $I^s \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M) = 0$, para todo $s \geq t$. ■

O próximo resultado envolve o módulo dual Matlis, como segue.

Proposição 5.2.4 Suponha que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local e Noetheriano. Seja M um R -módulo Artiniano. Então, para todo $i \geq 0$, temos que:

$$\mathrm{D} \left(\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) \right) \cong \mathrm{H}_i^I(\mathrm{D}(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M))).$$

Demonstração Uma vez que M é um R -módulo Artiniano, segue que a família $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos Artinianos e desta forma, temos que

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{H}_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) = \mathrm{H}_i^I \left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right) = \mathrm{H}_i^I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)),$$

pela Proposição 5.2.1. Agora, pelo Lema 1.6.3 (1) e pela Observação 2.2.15 (2), temos que $\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ é um R -módulo Artiniano. Portanto, pelo Lema 2.2.13 (2), temos o isomorfismo:

$$D(H_i^I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M))) \cong H_i^I(D(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M))), \text{ para todo } i \geq 0,$$

como desejado. ■

Observação 5.2.5 Seja M um R -módulo linearmente compacto, com R um anel Noetheriano. Então, temos que:

- (1) $H_i^I(\mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)) \cong \mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)$, se $i = 0, j \geq 0$ e
- (2) $H_i^I(\mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)) \cong 0$, se $i > 0, j \geq 0$.

Isto é uma consequência da Proposição 2.2.20. De fato, temos que:

- (1) $H_i^I(\mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(H_j^I(M/\mathfrak{a}^n M)) \cong 0$, se $i > 0$ e
- (2) $H_i^I(\mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(H_j^I(M/\mathfrak{a}^n M)) \cong \mathfrak{F}_j^{\mathfrak{a},I}(M)$, se $i = 0$

como desejado.

Proposição 5.2.6 Seja M um R -módulo linearmente compacto, com R um anel Noetheriano. Então, para todo $j \geq 0$, temos que:

- (1) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(H_j^I(M)) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (H_j^I(M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n)$, se $i = 0$;
- (2) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(H_j^I(M)) \cong 0$, se $i > 0$.

Demonstração Pelo Lema 1.6.1, temos que $\{\mathrm{Tor}_j^R(R/I^t, M)\}_{t \in \mathbb{N}}$ forma um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos. Note que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(H_j^I(M)) &\cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(H_j^I(M)/\mathfrak{a}^n H_j^I(M)) \\ &\cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \left(\varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, H_j^I(M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \right) \\ &\cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^t, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_j^R(R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \right). \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 1.6.5, temos que:

$$\varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_j^R(R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \cong \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} (\mathrm{Tor}_j^R(R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n)$$

e assim, segue que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(H_j^I(M))$ é igual à

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^t, \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} (\mathrm{Tor}_j^R(R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \right).$$

Desta forma, pelo Lema 1.6.3 (1) e pelo Lema 1.6.5, temos que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(H_j^I(M))$ é isomorfo à:

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, \mathrm{Tor}_j^R(R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n).$$

Uma vez que, pelo Teorema 1.5.12, limites inversos comutam temos que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I} (H_j^I (M)) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} H_i^I (\text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n).$$

Agora, pelo Lema 2.2.14, temos que

$$H_i^I (\text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \cong \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H_i (\bar{x}(k), \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n),$$

onde $\bar{x} = (x_1, \dots, x_r)$ é um conjunto de geradores do ideal I e $\bar{x}(k) = (x_1^k, \dots, x_r^k)$. Uma vez que $\bar{x}(k) \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) = 0$ para todo $k \geq s$, obtemos que

- (1) $\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H_i (\bar{x}(k), \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \cong \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n$, se $i = 0$; e
- (2) $\varprojlim_{k \in \mathbb{N}} H_i (\bar{x}(k), \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \cong 0$, se $i > 0$.

Portanto, $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I} (H_j^I (M)) \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{s \in \mathbb{N}} \text{Tor}_j^R (R/I^s, M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n$, se $i = 0$ e $j \geq 0$, e $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I} (H_j^I (M)) \cong 0$, se $i > 0$ e $j \geq 0$. Desta forma, concluímos a prova. ■

Observação 5.2.7 Note que para $i = 0$ e $j = 0$ na Proposição 5.2.6, temos que $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (H_0^I (M)) \cong \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (M)$. De fato, temos que $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (H_0^I (M)) \cong \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (\Lambda_I (M))$ e desta forma,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (\Lambda_I (M)) &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_0^I (\Lambda_I (M) / \mathfrak{a}^n \Lambda_I (M)) \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_I (\Lambda_I (M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n) \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \Lambda_I (M) \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \otimes_R R/I^t \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} M \otimes_R R/I^k \otimes_R R/I^t \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} M/I^t M \otimes_R R/\mathfrak{a}^n \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_I (M/\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I} (M) \end{aligned}$$

como desejado.

A proposição a seguir, trata do comportamento do R -módulo limite inverso de homologia local quando M é um R -módulo linearmente compacto.

Proposição 5.2.8 Seja M um R -módulo linearmente compacto, onde o anel R é Noetheriano e possui uma estrutura topológica, a qual pode ser sem perda de generalidade a topologia I -ádica. Então, para todo $i \geq 0$, temos que o limite inverso de homologia local $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I} (M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

Demonstração Uma vez que, pela Observação 2.2.15 (1) e (3), para cada inteiro positivo n temos que $M/\mathfrak{a}^n M$ é um R -módulo linearmente compacto segue, pela Proposição 2.2.17, que $H_i^I (M/\mathfrak{a}^n M)$ é um R -módulo linearmente compacto. Portanto, a família $\{H_i^I (M/\mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma um sistema inverso de R -módulos linearmente compactos tendo os R -homomorfismos contínuos. Desta forma, temos, pelo Lema 1.6.3 (2), que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I} (M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I (M/\mathfrak{a}^n M)$ é um R -módulo linearmente compacto, como queríamos demonstrar. ■

5.2.1 Sequências exatas para $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M)$, para $i \geq 0$

Apresentamos alguns resultados que tratam sobre sequências exatas para o limite inverso de homologia local. Antes dos resultados, observemos o seguinte:

Observação 5.2.9 O conjunto de potências $\{\mathfrak{a}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do ideal $\mathfrak{a}$ de R forma uma base de abertos do elemento zero de R . A topologia gerada por esta base de R é a topologia $\mathfrak{a}$ -ádica. Similarmente, dado um R -módulo M , o conjunto $\{\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base de abertos do elemento zero de M definindo a topologia $\mathfrak{a}$ -ádica de M .

Teorema 5.2.10 Seja R um anel Noetheriano e seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos, e suponha que a topologia em $M' \cap \mathfrak{a}^n M$ é equivalente à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica sobre M' . Desta forma, temos uma sequência exata longa de limites inversos de homologia local, dada da seguinte maneira:

$$\dots \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M') \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M'') \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M') \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M'') \rightarrow 0.$$

Demonstração Por hipótese, podemos assumir que M' é um submódulo de M e a sequência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ induz a seguinte sequência:

$$0 \rightarrow \{M' / (M' \cap \mathfrak{a}^n M)\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{M / \mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{M'' / \mathfrak{a}^n M''\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

a qual é uma sequência exata curta de sistemas inversos de R -módulos linearmente compactos, pela Observação 2.2.15 (1) e (3). Pela hipótese de que a topologia em $M' \cap \mathfrak{a}^n M$ é equivalente à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica sobre M' , temos que a sequência exata curta anterior nos fornece uma sequência exata curta de limites inversos, pelo Lema 1.6.4, a qual é dada por:

$$0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M' / \mathfrak{a}^n M' \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M / \mathfrak{a}^n M \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M'' / \mathfrak{a}^n M'' \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 1.6.3 (2), temos que a sequência anterior é uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos. Com esta sequência exata, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local com respeito à um ideal, pela Proposição 2.2.19. Agora, a partir da Proposição 5.2.1, ou da Proposição 2.2.18, nós obtemos o resultado. $\blacksquare$

Observação 5.2.11 Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo finitamente gerado. Neste caso, temos que o R -módulo $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M)$ é nulo para todo $i > 0$. De fato, como R é Noetheriano e M é finitamente gerado então $H_i^I(M / \mathfrak{a}^n M) = 0$ para todo $i > 0$, e para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$, pela Observação 2.2.11 (2). Desta forma, nós obtemos que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a},I}(M) := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(M / \mathfrak{a}^n M) = 0$, para todo $i > 0$.

Corolário 5.2.12 Seja R um anel Noetheriano e seja $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos finitamente gerados e linearmente compactos. Então, temos uma sequência exata curta de limites inversos de homologia local, a qual é dada da seguinte maneira:

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M') \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a},I}(M'') \rightarrow 0.$$

Demonstração Por hipótese, podemos assumir que M' é um submódulo de M , e como M é um R -módulo finitamente gerado temos, pelo Teorema 1.2.6, que a topologia em $M' \cap \mathfrak{a}^n M$ é equivalente à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica sobre M' . Portanto, pelo Teorema 5.2.10 e pela Observação 5.2.11, nós conseguimos obter o resultado. ■

No próximo resultado, nós queremos introduzir uma variante da sequência de Mayer-Vietoris para o limite inverso de homologia local.

Teorema 5.2.13 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e sejam $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ dois ideais de R . Seja M um R -módulo linearmente compacto, e suponha que a topologia $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ -ádica sobre M é equivalente à topologia sobre M dada pela filtração $\{(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n) M\}_{n \in \mathbb{N}}$. Desta forma, existe a sequência exata longa de limites inversos de homologia local, a qual é dada da seguinte maneira:

$$\dots \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{m}}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M) \oplus \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{b}, \mathfrak{m}}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \mathfrak{m}}(M) \rightarrow \dots,$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração Seja $n \in \mathbb{N}$ denotando um número natural qualquer. Então, existe a seguinte sequência exata natural, dada da seguinte forma:

$$0 \rightarrow M/(\mathfrak{a}^n M \cap \mathfrak{b}^n M) \rightarrow M/\mathfrak{a}^n M \oplus M/\mathfrak{b}^n M \rightarrow M/(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n) M \rightarrow 0,$$

a qual é uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos, pela Observação 2.2.15 (1) e (3). Pela hipótese de que a topologia $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ -ádica sobre M é equivalente à topologia sobre M dada pela filtração $\{(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n) M\}_{n \in \mathbb{N}}$, e notando que a topologia $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ -ádica sobre M é equivalente à topologia sobre M dada pela filtração $\{(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}^n) M\}_{n \in \mathbb{N}}$, segue que a sequência exata anterior nos fornece uma sequência exata curta de sistemas inversos de R -módulos linearmente compactos, e pelo Lema 1.6.4 temos uma sequência exata curta de limites inversos, a qual é dada por:

$$0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^n M \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (M/\mathfrak{a}^n M \oplus M/\mathfrak{b}^n M) \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})^n M \rightarrow 0.$$

Pelo Lema 1.6.3 (2), a sequência anterior é uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos. Com esta sequência exata, temos uma sequência exata longa de módulos de homologia local com respeito a um ideal, pela Proposição 2.2.19. Agora, a partir da Proposição 5.2.1, ou da Proposição 2.2.18, nós obtemos o resultado. ■

Temos o seguinte corolário.

Corolário 5.2.14 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo finitamente gerado e linearmente compacto. Desta forma, temos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}, \mathfrak{m}}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M) \oplus \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{b}, \mathfrak{m}}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \mathfrak{m}}(M) \rightarrow 0.$$

Demonstração Uma vez que M é um R -módulo finitamente gerado, temos que a topologia $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ -ádica sobre M é equivalente à topologia sobre M dada pela filtração $\{(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}^n) M\}_{n \in \mathbb{N}}$, de acordo com o Teorema 1.2.6. Portanto, pelo Teorema 5.2.13 e pela Observação 5.2.11, segue o resultado. ■

Além disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.2.15 Seja M um R -módulo linearmente compacto, com R um anel Noetheriano, e suponha que a topologia em $I^t M \cap \mathfrak{a}^n M$ é equivalente à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica sobre $I^t M$. Então, temos que:

- (1) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(\bigcap_{t>0} I^t M) \cong 0$, se $i = 0$;
- (2) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(\bigcap_{t>0} I^t M) \cong \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M)$, se $i > 0$.

Demonstração A partir da sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos, que é dada por:

$$0 \rightarrow I^t M \rightarrow M \rightarrow M/I^t M \rightarrow 0,$$

para todo $t > 0$, nós obtemos, pelo Lema 1.6.4 e pelo Lema 1.6.3 (2), uma sequência exata curta de R -módulos linearmente compactos, a qual é dada por:

$$0 \rightarrow \bigcap_{t>0} I^t M \rightarrow M \rightarrow \Lambda_I(M) \rightarrow 0.$$

Consequentemente, pelo Teorema 5.2.10, nós obtemos uma sequência exata longa da seguinte maneira:

$$\dots \rightarrow \mathfrak{F}_{i+1}^{\mathfrak{a}, I}(\Lambda_I(M)) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(\bigcap_{t>0} I^t M) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(\Lambda_I(M)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{F}_1^{\mathfrak{a}, I}(\Lambda_I(M)) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(\bigcap_{t>0} I^t M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(M) \rightarrow \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(\Lambda_I(M)) \rightarrow 0.$$

Assim, a afirmação segue a partir da Proposição 5.2.6, e da Observação 5.2.7. ■

Observação 5.2.16 Seja M um R -módulo e I um ideal de R . Se M é I -separado, o que significa que $\bigcap_{t>0} I^t M = 0$, então vemos imediatamente que:

- (1) $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(M) \cong \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(\Lambda_I(M))$;
- (2) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) = 0$, se $i > 0$.

5.3 Alguns resultados de Artinianidade de limite inverso de homologia local

Queremos discutir sobre **artinianidade** de limite inverso de homologia local.

Proposição 5.3.1 Seja R um anel Artiniano e seja M um R -módulo Artiniano. Então, temos que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \cong \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^r, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right),$$

para algum $1 \leq r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração Uma vez que R é um anel Artiniano, existe um inteiro positivo $r \geq 1$ tal que $I^t = I^r$, para todo $t \geq r$. Como, pela Definição 5.1.1, temos

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M),$$

segue que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M/\mathfrak{a}^n M)$. Como temos que a família $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos Artinianos e R/I^r é um R -módulo finitamente gerado (pois desde que R é Artiniano segue que é anel Noetheriano), temos, pelo Lema 1.6.5, que

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M/\mathfrak{a}^n M) \cong \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^r, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right),$$

para todo $i \geq 0$.

Portanto, segue que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \cong \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^r, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right)$, para algum inteiro $r \geq 1$, como queríamos demonstrar. ■

Observemos, então, a seguinte consequência.

Corolário 5.3.2 Seja R um anel Artiniano e seja M um R -módulo Artiniano. Se M é completo com respeito à topologia $\mathfrak{a}$ -ádica, então $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i \geq 0$.

Demonstração De fato, pela Proposição 5.3.1, temos que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \cong \mathrm{Tor}_i^R \left(R/I^r, \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \right),$$

para algum $1 \leq r \in \mathbb{Z}$. Uma vez que $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M \cong M$, obtemos que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \cong \mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M)$, para todo $i \geq 0$. Como R/I^r é um R -módulo finitamente gerado (pois R é anel Noetheriano) e M é um R -módulo Artiniano, segue que $\mathrm{Tor}_i^R(R/I^r, M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i \geq 0$, de acordo com a Proposição 2.2.22. Portanto, segue que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i \geq 0$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 5.3.3 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo Artiniano. Então, para um inteiro positivo $s \geq 1$, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M)$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s$;
- (2) $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M)))$, para todo $i < s$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2): Suponha que $i < s$. Uma vez que $\mathfrak{F}_i^{a,m}(M)$ é um R -módulo Artiniano para todo $i < s$, temos que existe um inteiro positivo n tal que temos $\mathfrak{m}^t \mathfrak{F}_i^{a,m}(M) = \mathfrak{m}^n \mathfrak{F}_i^{a,m}(M)$, para todo $t \geq n$. Desta forma, $\mathfrak{m}^n \mathfrak{F}_i^{a,m}(M) = \bigcap_{t \geq 0} \mathfrak{m}^t \mathfrak{F}_i^{a,m}(M) = 0$, uma vez que, pela Proposição 5.2.3, temos que $\mathfrak{F}_i^{a,m}(M)$ é $\mathfrak{m}$ -separado. Portanto,

$$\mathfrak{m} \subseteq \text{Rad}(\text{Ann}_R(\mathfrak{F}_i^{a,m}(M))), \text{ para todo } i < s, \text{ como desejado.}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Uma vez que M é um R -módulo Artiniano temos que a família $\{M/\mathfrak{a}^n M\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema inverso de R -módulos Artinianos. Portanto, $\Lambda_a(M)$ é um R -módulo Artiniano, pelo Lema 1.6.3 (1) e pela Observação 2.2.15 (2). Pela Proposição 5.2.1, segue que $\mathfrak{F}_i^{a,m}(M) = H_i^m(\Lambda_a(M))$ para todo $i \geq 0$. Pela implicação (2) $\Rightarrow$ (1) do Teorema 2.2.23 temos que $H_i^m(\Lambda_a(M))$ é um R -módulo Artiniano, para todo $i < s$. Isto finaliza a prova. ■

Observação 5.3.4 Notamos que na implicação (1) implica (2) na prova do Teorema 5.3.3 nós não precisamos assumir que M é um R -módulo Artiniano.

5.4 Anulamento e não-anulamento de limite inverso de homologia local

Vamos começar com o seguinte resultado.

Proposição 5.4.1 Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo linearmente compacto e semidiscreto, e suponha que para o ideal $\mathfrak{a}$ de R temos que $\text{Soc}(M/\mathfrak{a}M) = 0$. Então, temos $\mathfrak{F}_i^{a,I}(M) = 0$, para todo $i > 0$.

Demonstração Temos que $\text{Soc}(M/\mathfrak{a}^n M) \subseteq \text{Soc}(M/\mathfrak{a}M)$, para todo $n \geq 1$. Uma vez que por hipótese temos que $\text{Soc}(M/\mathfrak{a}M) = 0$ segue que $\text{Soc}(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$, para todo $n \geq 1$. Desta forma, segue que $H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$, para todo $n \geq 1$ e para todo $i > 0$, pelo Lema 2.2.25. Portanto, o limite inverso de homologia local é tal que:

$$\mathfrak{F}_i^{a,I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_i^I(M/\mathfrak{a}^n M) = 0,$$

para todo $i > 0$, como desejado. ■

O seguinte lema é usado na sequência do texto.

Lema 5.4.2 Seja M um R -módulo linearmente compacto e semidiscreto, onde o anel R é Noetheriano. Então, temos que $I(M/\mathfrak{a}^n M) = M/\mathfrak{a}^n M$, para todo $n \geq 1$, se, e somente se, $\mathfrak{F}_0^{a,I}(M) = 0$.

Demonstração Suponha que $I(M/\mathfrak{a}^n M) = M/\mathfrak{a}^n M$, para todo $n \geq 1$; desta forma, pelo Corolário 2.2.6, temos que o completamento I -ádico $\Lambda_I(M/\mathfrak{a}^n M)$ de $M/\mathfrak{a}^n M$ é nulo, para todo $n \geq 1$. Por outro lado, observe que:

$$\Lambda_I(M/\mathfrak{a}^n M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} (R/I^t \otimes_R M/\mathfrak{a}^n M) = \varprojlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Tor}_0^R(R/I^t, M/\mathfrak{a}^n M).$$

Portanto, segue que $H_0^I(M/\mathfrak{a}^n M) = 0$, para todo $n \geq 1$, e assim $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(M) = 0$.

Agora, suponha que $I(M/\mathfrak{a}^n M) \neq M/\mathfrak{a}^n M$, para algum $n \geq 1$; desta forma, pelo Corolário 2.2.6, temos que $H_0^I(M/\mathfrak{a}^n M) \neq 0$. Então, a sequência exata curta de R -módulos

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}^n M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^{n+1} M \rightarrow M / \mathfrak{a}^n M \rightarrow 0,$$

induz um epimorfismo $\Lambda_I(M/\mathfrak{a}^{n+1} M) \rightarrow \Lambda_I(M/\mathfrak{a}^n M) \rightarrow 0$, de R -módulos não nulos, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, o limite inverso $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_I(M/\mathfrak{a}^n M)$ é não nulo, de acordo com a Observação 2.2.7. Segue então que:

$$\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, I}(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_I(M/\mathfrak{a}^n M) = \Lambda_I\left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M\right) = \Lambda_I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)),$$

é não nulo, como queríamos demonstrar. ■

O próximo teorema, usa o conceito de **largura** de um R -módulo M , como já mencionado na seção 2.3 do Capítulo 2.

Teorema 5.4.3 Seja R um anel Noetheriano e seja M um R -módulo linearmente compacto, semidiscreto e tal que $(0 :_{\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)} I) \neq 0$. Então, todas as sequências $\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)$ -coregulares maximais em I possuem o mesmo comprimento. Além disso, temos que:

$$\mathrm{width}_I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)) = \inf \left\{ i \mid \mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) \neq 0 \right\}.$$

Demonstração Pela Proposição 5.2.1, temos que:

$$\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, I}(M) = H_i^I\left(\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} M/\mathfrak{a}^n M\right) = H_i^I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)),$$

para todo $i \geq 0$.

Agora, pelo Teorema 2.2.28, segue que temos:

$$\mathrm{width}_I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)) = \inf \left\{ i \mid H_i^I(\Lambda_{\mathfrak{a}}(M)) \neq 0 \right\},$$

e assim segue o resultado, como desejado. ■

Desta forma, com o que foi feito anteriormente, temos a seguinte consequência.

Corolário 5.4.4 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo semidiscreto e linearmente compacto. Temos que:

- (1) Se M é completo e $(0 :_{\Lambda_{\mathfrak{m}}(M)} I) \neq 0$, então temos que

$$\text{width}_I(\Lambda_{\mathfrak{m}}(M)) = \inf \{i \mid H_i^I(M) \neq 0\}.$$

(2) Se $\mathfrak{a} = 0$ e $(0 :_M I) \neq 0$, então

$$\text{width}_I(M) = \inf \{i \mid H_i^I(M) \neq 0\}.$$

Demonstração (1): De fato, como temos que $\Lambda_{\mathfrak{m}}(M) \cong M$ segue, pelo Teorema 5.4.3, que temos o seguinte:

$$\text{width}_I(M) = \text{width}_I(\Lambda_{\mathfrak{m}}(M)) = \inf \{i \mid H_i^I(M) \neq 0\},$$

como desejado.

(2): Segue imediatamente do Teorema 2.2.28. ■

Observação 5.4.5 Note que, se o ideal $\mathfrak{a}$ é nulo no Teorema 5.4.3 nós retornamos ao resultado usual para o $\text{width}_I(M)$, o qual é dado pelo Teorema 2.2.28.

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado para o caso em que o anel R é local.

Proposição 5.4.6 Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Noetheriano e seja M um R -módulo não nulo, semidiscreto e linearmente compacto. Temos que se $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M) = 0$, para todo $i \geq 0$, então $\mathfrak{m}\Lambda_{\mathfrak{m}}(M) = \Lambda_{\mathfrak{m}}(M) \pmod{\mathfrak{a}^n \Lambda_{\mathfrak{m}}(M)}$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração Suponha que $\mathfrak{F}_i^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M) = 0$, para todo $i \geq 0$. Pela Observação 5.2.7 temos que $\mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(M) = \mathfrak{F}_0^{\mathfrak{a}, \mathfrak{m}}(\Lambda_{\mathfrak{m}}(M))$. Desta forma, pelo Lema 5.4.2, nós obtemos que:

$$\mathfrak{m}\Lambda_{\mathfrak{m}}(M) = \Lambda_{\mathfrak{m}}(M) \pmod{\mathfrak{a}^n \Lambda_{\mathfrak{m}}(M)},$$

para todo $1 \leq n \in \mathbb{N}$, como queríamos demonstrar. ■

Apêndice A

Propriedades do limite direto e do limite inverso

A seguir, vamos apresentar resultados que garantem que tanto o limite direto como o limite inverso existem e são únicos.

A.1 Existência e unicidade do limite direto

O conteúdo desta seção, foi feito de acordo com [34].

Começamos com uma proposição, que garante a **unicidade** do limite direto.

Proposição A.1.1 Quaisquer dois limites diretos de R -módulos, digamos os limites diretos $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$, $(N, \Psi_i)_{i \in \Omega}$, de um mesmo sistema direto de R -módulos $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$, são R -isomorfos.

Demonstração Vamos fazer a prova deste resultado em alguns passos.

Passo (1): Como $(N, \Psi_i)_{i \in \Omega}$ é limite direto de $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$ ele satisfaz a condição (I) da Definição 1.4.2, ou seja, tendo $\Psi_i : M_i \rightarrow N$, $\Psi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow N$ e $\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$ segue que $\Psi_i \equiv \Psi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i}, i}$ se $i \leq \tilde{i}$. Assim, o R -módulo N e a família de R -homomorfismos $\{\Psi_i : M_i \rightarrow N \mid i \in \Omega\}$ satisfazem as hipóteses da **propriedade universal** aplicada para o limite direto $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$ e existe um único R -homomorfismo $\Psi : M \rightarrow N$ tal que $\Psi \circ \Phi_i \equiv \Psi_i, \forall i \in \Omega$ (*).

Passo (2): Analogamente, desde que $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$ é limite direto de $(M_i, \Phi_{\tilde{i}, i})_{i \in \Omega}$ ele satisfaz a condição (I) da Definição 1.4.2: para $\Phi_i : M_i \rightarrow M$, $\Phi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M$ e $\Phi_{\tilde{i}, i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$, segue que $\Phi_i \equiv \Phi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i}, i}$, com $i \leq \tilde{i}$. Assim, o R -módulo M e a família de R -homomorfismos $\{\Phi_i : M_i \rightarrow M \mid i \in \Omega\}$ estão nas hipóteses da **propriedade universal** aplicada para o limite direto $(N, \Psi_i)_{i \in \Omega}$ e existe um único R -homomorfismo $\tilde{\Psi} : N \rightarrow M$ tal que vale o seguinte $\tilde{\Psi} \circ \Psi_i \equiv \Phi_i, \forall i \in \Omega$ (**).

Passo (3): Vamos mostrar que $\tilde{\Psi} \equiv \Psi^{-1}$, o que irá implicar que $\Psi : M \rightarrow N$ é um R -isomorfismo. De fato, como $(N, \Psi_i)_{i \in \Omega}$ satisfaz as hipóteses da **propriedade universal**, existe um único R -homomorfismo $h : N \rightarrow N$ tal que $h \circ \Psi_i \equiv \Psi_i, \forall i \in \Omega$, e como $\text{Id}_N : N \rightarrow N$

também satisfaz $\text{Id}_N \circ \Psi_i \equiv \Psi_i, \forall i \in \Omega$ (**), temos que $h \equiv \text{Id}_N$ (da **unicidade** de h).

Passo (4): Usando o mesmo argumento para o limite direto $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$, concluímos que $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ é o único R -homomorfismo que satisfaz $\text{Id}_M \circ \Phi_i \equiv \Phi_i, \forall i \in \Omega$ (**). Desta forma, $\forall i \in \Omega$, temos que: $\Psi_i \equiv^* \Psi \circ \Phi_i \equiv^{**} (\Psi \circ \tilde{\Psi}) \circ \Psi_i \Rightarrow^{***} \Psi \circ \tilde{\Psi} \equiv \text{Id}_N$, e além disso, $\Phi_i \equiv^{**} \tilde{\Psi} \circ \Psi_i \equiv^* (\tilde{\Psi} \circ \Psi) \circ \Phi_i \Rightarrow^{****} \tilde{\Psi} \circ \Psi \equiv \text{Id}_M$. Portanto, $\Psi : M \rightarrow N$ é um R -isomorfismo, como queríamos demonstrar. ■

Observação A.1.2 Desde que, pela Proposição A.1.1, o limite direto é **único**, a menos de R -isomorfismo, vamos usar as seguintes notações $M = \varinjlim_{i \in \Omega} M_i$ para o limite direto $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$ e o único R -homomorfismo $\Psi : M \rightarrow N$, dado na propriedade universal da Definição 1.4.2, será denotado por $\Psi = \varinjlim_{i \in \Omega} \Psi_i$.

O próximo resultado, nos garante a **existência** do limite direto. Antes de enunciar o resultado, colocamos um lema que será usado na prova do mesmo.

Lema A.1.3 ([21, Capítulo 4, Teorema 1.7]) Seja $\Psi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de R -módulos e seja $C \subset A$ um submódulo de $\text{Ker}(\Psi)$. Então, existe um único homomorfismo de R -módulos $\bar{\Psi} : A/C \rightarrow B$ tal que $\bar{\Psi}(a + C) = \Psi(a)$, para todo $a \in A$; $\text{Im}(\bar{\Psi}) = \text{Im}(\Psi)$ e $\text{Ker}(\bar{\Psi}) = \text{Ker}(\Psi)/C$. $\bar{\Psi}$ é um isomorfismo de R -módulos se, e somente se, Ψ é um epimorfismo de R -módulos e $C = \text{Ker}(\Psi)$. Em particular, temos que $A/\text{Ker}(\Psi) \cong \text{Im}(\Psi)$.

Proposição A.1.4 Dado um sistema direto de R -módulos $(M_i, \Phi_{i,i})_{i \in \Omega}$, temos que sempre existe o seu limite direto: $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$.

Demonstração Dado $(M_i, \Phi_{i,i})_{i \in \Omega}$, vamos denotar por: $M^+ := \bigoplus_{i \in \Omega} M_i$, o seguinte conjunto $M^+ := \{\Phi : \Omega \rightarrow \bigcup_{i \in \Omega} M_i \mid \Phi(i) := x_i \in M_i, \forall i \in \Omega \text{ e } x_i \neq 0_{M_i}\}$, onde $x_i \neq 0_{M_i}$, apenas para um número finito de índices $i \in \Omega$. Definimos, para todo $i \in \Omega$, $\Phi_i^+ : M_i \rightarrow M^+$, da seguinte maneira $\Phi_i^+(x_i) : \Omega \rightarrow \bigcup_{i \in \Omega} M_i$ tal que $\Phi_i^+(x_i)(j) = x_i \in M_i$, se $i = j$ e $\Phi_i^+(x_i)(j) = 0$, se $i \neq j$. Identificamos o elemento $\Phi_i^+(x_i) \in \bigoplus_{i \in \Omega} M_i$ com a Ω -upla: $(\Phi_i^+(x_i)(j))_{j \in \Omega} = (x_j)_{j \in \Omega}$, onde $x_j = x_i$, se $i = j$ e $x_j = 0$, caso contrário.

Vamos mostrar que Φ_i^+ é um **monomorfismo**:

(1) temos que Φ_i^+ é um R -homomorfismo;

(2) além disso, temos que

$$\text{Ker}(\Phi_i^+) := \{x_i \in M_i \mid \Phi_i^+(x_i) : \Omega \rightarrow \bigcup_{i \in \Omega} M_i, \text{ onde } \Phi_i^+(x_i)(j) = 0_{M_j} \in M_j\},$$

ou seja, $\text{Ker}(\Phi_i^+)$ é a família nula, isto é, $(\Phi_i^+(x_i)(j))_{j \in \Omega} = (x_j)_{j \in \Omega}$, onde $x_j = 0_{M_j} \in M_j$, $\forall j \in \Omega$; e assim, em particular, para $i = j$ temos que $x_i = 0_{M_i} \in M_i$, e portanto, $\text{Ker}(\Phi_i^+) = \{0\}$. Logo, Φ_i^+ é um monomorfismo.

Agora, para cada par de índices $i \leq \tilde{i}$, considere a composição $\Phi_{\tilde{i}}^+ \circ \Phi_{i,i} : M_i \rightarrow M^+$, onde temos que $\Phi_{i,i} : M_i \rightarrow M_i$ e $\Phi_{\tilde{i}}^+ : M_{\tilde{i}} \rightarrow M^+$. Além disso, considere o conjunto:

$\langle S \rangle := \left\{ \left(\Phi_{\tilde{i}}^+ \circ \Phi_{\tilde{i},i} \right) (x_i) - \Phi_{\tilde{i}}^+ (x_i) \mid \forall i \leq \tilde{i} \text{ e } \forall x_i \in M_i \right\} \subset M^+$. Temos assim que $\langle S \rangle$ é um submódulo de M^+ e desta forma, podemos considerar o R -módulo quociente: $M^+ / \langle S \rangle := M$ e a projeção natural dada por $\pi : M^+ \rightarrow M^+ / \langle S \rangle$. Então, segue que π é um R -homomorfismo. E considerando a composição, $\pi \circ \Phi_{\tilde{i}}^+ \equiv \Phi_i$, para todo $i \in \Omega$, onde $\Phi_{\tilde{i}}^+ : M_i \rightarrow M^+$ e $\pi : M^+ \rightarrow M$, obtemos uma família de R -homomorfismos $\{\Phi_i : M_i \rightarrow M \mid i \in \Omega\}$. Vamos mostrar que $M = \varinjlim_{i \in \Omega} M_i$. De fato, para cada $i \leq \tilde{i}$, e para todo $x_i \in M_i$, note que $(\Phi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i},i}) (x_i) = \pi \left\{ \left(\Phi_{\tilde{i}}^+ \circ \Phi_{\tilde{i},i} \right) (x_i) \right\} := \left(\Phi_{\tilde{i}}^+ \circ \Phi_{\tilde{i},i} \right) (x_i) + \langle S \rangle = \Phi_{\tilde{i}}^+ (x_i) + \langle S \rangle = \pi \left\{ \Phi_{\tilde{i}}^+ (x_i) \right\} := \Phi_i (x_i)$, ou seja, temos que $\Phi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i},i} \equiv \Phi_i$, $\forall i \leq \tilde{i}$, onde no caso $\Phi_i : M_i \rightarrow M$, $\Phi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow M$ e $\Phi_{\tilde{i},i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$. Portanto, vale a condição (I) da Definição 1.4.2.

Para ver que $(M, \Phi_i)_{i \in \Omega}$ satisfaz a **propriedade universal**, dado N um R -módulo, e dada $\{\Psi_i : M_i \rightarrow N \mid i \in \Omega\}$ uma família de R -homomorfismos tais que $\Psi_{\tilde{i}} \circ \Phi_{\tilde{i},i} \equiv \Psi_i$, onde temos $\Phi_{\tilde{i},i} : M_i \rightarrow M_{\tilde{i}}$, $\Psi_i : M_i \rightarrow N$ e $\Psi_{\tilde{i}} : M_{\tilde{i}} \rightarrow N$, então afirmamos que existe um único R -homomorfismo $\bar{\Psi} : M \rightarrow N$, tal que $\bar{\Psi} \circ \Phi_i \equiv \Psi_i$, para todo $i \in \Omega$. De fato, defina $\Psi : M^+ \rightarrow N$ do seguinte modo:

$$\Psi (x = (x_i)_{i \in \Omega}) = \Psi (x) := \sum_{i \in \Omega} \Psi_i (x_i) \in N, \quad (*)$$

onde $x_i \in M_i$, onde a soma $(*)$ é finita, $\forall i \in \Omega$ e $x_i \neq 0$ para um número finito de índices, o que implica $\Psi_i (x_i) \neq 0$, para os mesmos índices. Temos que: Ψ é um R -homomorfismo e o submódulo $\langle S \rangle \subset \ker (\Psi)$, isto é, $\Psi (x) = 0$, para todo $x \in \langle S \rangle$.

Pelo Lema A.1.3 temos que existe um único homomorfismo de R -módulos $\bar{\Psi} : M \rightarrow N$ tal que vale $\bar{\Psi} (x + \langle S \rangle) = \Psi (x)$, para todo $x \in M^+$. Vamos mostrar que $\bar{\Psi}$ é tal que $\bar{\Psi} \circ \Phi_i \equiv \Psi_i$, $\forall i \in \Omega$, onde no caso $\Psi_i : M_i \rightarrow N$, $\bar{\Psi} : M \rightarrow N$ e $\Phi_i : M_i \rightarrow M$: de fato, para todo $x_i \in M_i$ temos que $(\bar{\Psi} \circ \Phi_i) (x_i) := \bar{\Psi} \left\{ (\pi \circ \Phi_i^+) (x_i) \right\} := \bar{\Psi} \left\{ \Phi_i^+ (x_i) + \langle S \rangle \right\} = \Psi \left\{ \Phi_i^+ (x_i) = (y_i)_{i \in \Omega} \right\} := \sum_{i \in \Omega} \Psi_i (y_i) = \Psi_i (x_i)$ (neste último somatório, somente resta o termo correspondente a $j = i$). Portanto, temos que $\bar{\Psi} \circ \Phi_i \equiv \Psi_i$, para todo $i \in \Omega$, e assim segue que $M = \varinjlim_{i \in \Omega} M_i$. Logo, sempre existe o limite direto de um sistema direto de R -módulos. ■

A.2 Propriedades do limite inverso

Vamos apresentar algumas propriedades importantes do limite inverso.

O próximo resultado, nos garante a **existência** e a **unicidade** do limite inverso.

Proposição A.2.1 Seja $\{M_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema inverso de R -módulos. Então, temos que:

- (a) Existe um limite inverso do sistema inverso $\{M_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (b) Este limite inverso é único no seguinte sentido: Se $(M, \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(N, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são dois limites inversos do mesmo sistema inverso de R -módulos $\{M_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, então existe um único R -homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$, o qual é um isomorfismo de R -módulos, tal que $\psi_n \circ \phi \equiv \phi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração (a) Defina M como o submódulo do produto direto $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n$ de R -módulos consistindo daquelas tuplas (m_n) que satisfazem a condição $\phi_{n+1,n}(m_{n+1}) = m_n$. Seja $\phi_n : M \rightarrow M_n$ denotando a restrição da projeção canônica $\prod_{n \in \mathbb{N}} M_n \rightarrow M_n$. Temos então que $(M, \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um limite inverso.

(b) Suponha que $(M, \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(N, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são dois limites inversos do sistema inverso de R -módulos $\{M_n, \phi_{n+1,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Temos então R -homomorfismos $\phi_n : M \rightarrow M_n$ e $\psi_n : N \rightarrow M_n$. Uma vez que as aplicações $\psi_n : N \rightarrow M_n$ são compatíveis, a propriedade universal do limite inverso $(M, \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mostra que existe um único R -homomorfismo $\psi : N \rightarrow M$ tal que $\phi_n \circ \psi \equiv \psi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, uma vez que as aplicações $\phi_n : M \rightarrow M_n$ são compatíveis e $(N, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um limite inverso, existe um único R -homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\psi_n \circ \phi \equiv \phi_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. A seguir, observe que $\phi_n \circ \text{Id}_M \equiv \phi_n$ e $\phi_n \circ (\psi \circ \phi) \equiv \phi_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que, por definição, existe somente uma aplicação satisfazendo essa propriedade, temos que $\psi \circ \phi \equiv \text{Id}_M$. Similarmente, $\phi \circ \psi \equiv \text{Id}_N$. Desta forma, temos que $\phi : M \rightarrow N$ é um **isomorfismo** de R -módulos, como queríamos demonstrar. ■

Observação A.2.2 Para um ideal I de R , considere o sistema inverso de R -módulos dado por $\{R/I^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com a família de R -homomorfismos $\{\pi_{n+1,n} : R/I^{n+1} \rightarrow R/I^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Temos que $\hat{R}^I \cong \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/I^n$. De fato, seja $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em R , na topologia I -ádica. Escolha um representante $y_n + I^n$ em $\hat{R}^I$, de modo que $y_n + I^n = y_{n+1} + I^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, correspondendo à $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ existe um elemento em $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/I^n$, isto é, existe uma sequência de classes de equivalência:

$$\dots \rightarrow y_{n+2} + I^{n+2} \xrightarrow{\pi_{n+2,n+1}} y_{n+1} + I^{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1,n}} y_n + I^n \rightarrow \dots$$

Nesta correspondência, sequências de Cauchy nulas correspondem ao elemento zero em $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/I^n$. Além disso, esta correspondência preserva as operações do anel. Agora, dado um elemento $y \in \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/I^n$, temos que $y = \{(y_n + I^n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} R/I^n$, e além disso como temos que $y_n + I^n = \pi_{n+1,n}(y_{n+1} + I^{n+1}) = y_{n+1} + I^n$, segue que $y_{n+1} - y_n \in I^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Provamos assim o isomorfismo em questão.

O próximo lema, será usado na sequência.

Lema A.2.3 ([4, Proposição 2.10]) Sejam as sequências exatas curtas de R -módulos e de R -homomorfismos $0 \rightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u'} N \xrightarrow{v'} N'' \rightarrow 0$, e os seguintes R -homomorfismos $f' : M' \rightarrow N'$, $f : M \rightarrow N$ e $f'' : M'' \rightarrow N''$, de tal maneira que o diagrama formado por essas sequências e estes R -homomorfismos é comutativo. Então, existe uma sequência exata da seguinte forma:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(f') \xrightarrow{\bar{u}} \text{Ker}(f) \xrightarrow{\bar{v}} \text{Ker}(f'') \xrightarrow{\bar{d}} \text{Coker}(f') \xrightarrow{\bar{u}'} \text{Coker}(f) \xrightarrow{\bar{v}'} \text{Coker}(f'') \rightarrow 0,$$

em que $\bar{u}$, $\bar{v}$ são restrições de u , v , e $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ são induzidas por u' , v' .

Proposição A.2.4 ([4, Proposição 10.2]) Se $0 \rightarrow \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f} \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{g} \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$ é uma sequência exata de sistemas inversos de R -módulos, então temos que a sequência de limites inversos

$$0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_n,$$

é sempre exata. Se, além disso, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um **sistema inverso sobrejetivo**, isto é, se o R -homomorfismo $A_{n+1} \rightarrow A_n$ é sobrejetivo para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos que:

$$0 \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} B_n \rightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} C_n \rightarrow 0,$$

é uma sequência exata curta de limites inversos.

Demonstração Seja $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e defina $d_A : A \rightarrow A$ a aplicação tal que $\text{Ker}(d_A) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Definimos também B, C e d_B, d_C para os sistemas inversos $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de forma totalmente similar. A sequência exata de sistemas inversos de R -módulos define então uma sequência exata $0 \rightarrow A \xrightarrow{f_n} B \xrightarrow{g_n} C \rightarrow 0$ tal que $f_n \circ d_A \equiv d_B \circ f_n$ e $g_n \circ d_B \equiv d_C \circ g_n$. E consequentemente, pelo Lema A.2.3, temos uma sequência exata:

$$0 \rightarrow \text{Ker}(d_A) \rightarrow \text{Ker}(d_B) \rightarrow \text{Ker}(d_C) \rightarrow \text{Coker}(d_A).$$

Isto prova a primeira parte. Para completar a prova, temos somente que provar que d_A é sobrejetora. Mas isto segue a partir da hipótese de que o sistema inverso de R -módulos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é sobrejetivo. Portanto, d_A é sobrejetora e desta forma $\text{Coker}(d_A) = 0$. ■

Apêndice B

A envoltória injetiva de um módulo

Vamos discutir sobre a envoltória injetiva de um R -módulo qualquer. Começamos com um teorema, que usaremos na sequência.

Teorema B.0.5 ([35, Teorema 3.19]) Um R -módulo E é injetivo se, e somente se, toda sequência exata curta de R -módulos da forma $0 \rightarrow E \xrightarrow{i} B \rightarrow C \rightarrow 0$ cinde. Em particular, temos que $B \cong E \oplus C$.

A próxima definição é importante para obtermos a noção de envoltória injetiva de um dado R -módulo.

Definição B.0.6 (extensão essencial) Sejam $M \subseteq E$ dois R -módulos não nulos. Dizemos que E é uma **extensão essencial** do R -submódulo M se uma das seguintes condições equivalentes ocorrem:

- (1) $M \cap S \neq \{0\}$, para todo $S \subset E$ R -submódulo não nulo, ou seja, todo submódulo não nulo de E possui interseção não nula com M .
- (2) Para todo elemento $0 \neq x \in E$, existe um elemento $r \in R$ tal que $r \cdot x$ é não nulo e $r \cdot x \in M$.
- (3) Para todo R -homomorfismo $\Phi : E \rightarrow N$, onde N é um R -módulo qualquer, se $\Phi|_M : M \rightarrow N$ é injetivo, então $\Phi : E \rightarrow N$ é também um R -homomorfismo injetivo.

Se, além disso, temos que $M \neq E$, então dizemos que E é uma **extensão essencial própria** do R -módulo M .

Definição B.0.7 (extensão essencial maximal) Sejam $M \subseteq E$ dois R -módulos não nulos. Se E é uma extensão essencial própria de M , conforme a Definição B.0.6, tal que E **não** possui extensão essencial própria, então $M \subseteq E$ é denominada uma **extensão essencial maximal**.

A seguinte proposição caracteriza um R -módulo injetivo em termos de extensão essencial.

Proposição B.0.8 ([35, Teorema 3.29 e Teorema 3.30]) Temos que as seguintes afirmações são verdadeiras:

- (1) Um R -módulo M é injetivo se, e somente se, M não possui extensões essenciais próprias.
- (2) As seguintes condições sobre um R -módulo E contendo propriamente um R -módulo M são equivalentes:
 - (a) E é uma extensão essencial maximal de M , conforme a Definição B.0.7;
 - (b) E é uma extensão essencial de M e E é um R -módulo injetivo;
 - (c) E é um R -módulo injetivo e não existe R -módulo injetivo $\tilde{E}$ com $M \subset \tilde{E} \subset E$ e com $\tilde{E} \neq E$.

Além disso, um tal R -módulo E sempre existe.

Definição B.0.9 Um R -módulo E satisfazendo qualquer uma das condições equivalentes do item (2) da Proposição B.0.8, é denominado uma **envoltória injetiva** do R -módulo M . A envoltória injetiva de um R -módulo M será denotada por $E_R(M)$, ou simplesmente por $E(M)$.

B.1 A unicidade da envoltória injetiva de um módulo

O feito anteriormente, nos fornece que dado um R -módulo M sempre existe uma envoltória injetiva para M . Provemos agora, a unicidade desta envoltória injetiva.

Teorema B.1.1 ([35, Teorema 3.31]) Seja um R -módulo E sendo uma envoltória injetiva de um dado R -módulo M .

- (1) Se D é um R -módulo injetivo contendo M , então existe um monomorfismo $\Phi : E \rightarrow D$ que fixa M , ou seja, $\Phi(M) = M$.
- (2) Quaisquer duas envoltórias injetivas de M são R -módulos isomorfos (por um isomorfismo que fixa M).

Demonstração (1): Por D ser um R -módulo injetivo, temos que existe um R -homomorfismo $\Phi : E \rightarrow D$ tal que $\Phi|_M \equiv i$, onde $i : M \rightarrow D$ é a aplicação de inclusão. Desta forma, uma vez que E é uma extensão essencial de M , segue, pela Definição B.0.6, que $\Phi : E \rightarrow D$ é um monomorfismo, como desejado.

(2): Assuma que D é uma outra envoltória injetiva de M . Usando a notação da parte (1) do Teorema B.1.1, afirmamos que Φ é um isomorfismo, isto é, temos que Φ é também sobrejetor. De fato, suponha que Φ não é um epimorfismo; então, devemos ter que $\Phi(E)$ é um somando direto de D , pois D é um R -módulo injetivo, e ele contém M uma vez que Φ fixa M ; assim, isto contraria o fato de D ser uma extensão essencial de M . Portanto, temos que $E \cong D$. ■

Podemos, então, sempre nos referir à envoltória injetiva de um dado R -módulo M .

B.2 Dualidade Matlis

Apresentamos a seguir, o Teorema da Dualidade Matlis.

Teorema B.2.1 (Teorema da Dualidade Matlis) ([8, Teorema 10.2.12]) Suponha que temos $(R, \mathfrak{m})$ um anel local, Noetheriano e completo. Então, para o funtor exato e contravariante $D(-) := \text{Hom}_R(-, E)$, o qual é denominado funtor **Dual Matlis**, onde $E = E_R(R/\mathfrak{m})$ é a envoltória injetiva do corpo residual $R/\mathfrak{m}$, de acordo com a Definição B.0.9, temos que valem as seguintes afirmações:

- (1) Para cada $f \in \text{Hom}_R(E, E)$, existe um único $r_f \in R$ tal que $f(x) = r_fx$, para todo $x \in E$.
- (2) Sempre que N é um R -módulo finitamente gerado, o R -homomorfismo natural dado por

$$\mu_N : N \rightarrow D(D(N)),$$

é um R -isomorfismo e, além disso, temos que $D(N)$ é um R -módulo Artiniano.

- (3) Sempre que M é um R -módulo Artiniano, o R -homomorfismo natural dado por

$$\mu_M : M \rightarrow D(D(M)),$$

é um R -isomorfismo e, além disso, temos que $D(M)$ é um R -módulo Noetheriano.

Apêndice C

A existência das resoluções injetiva e projetiva

Veremos que um R -módulo M qualquer sempre admite uma **resolução injetiva** e também uma **resolução projetiva**. Começamos com um teorema, que irá nos auxiliar nesta tarefa.

Teorema C.0.2 (Critério de Baer) ([35, Teorema 3.20]) Um R -módulo E é injetivo se, e somente se, toda aplicação $\bullet : I \rightarrow E$ que é um homomorfismo de R -módulos, onde I é um ideal qualquer de R , pode ser estendida à R .

Definição C.0.3 Seja M um R -módulo, $m \in M$, e $r \in R$. Dizemos que m é **divisível** por r se existe elemento $n \in M$ tal que $rn = m$. Dizemos que o R -módulo M é **divisível** se cada elemento $m \in M$ é divisível por todo não divisor de zero $r \in R$. (isto é, não existe elemento não nulo $s \in R$ com $rs = 0$.)

O próximo teorema, envolve o conceito de um R -módulo injetivo com a noção de um R -módulo divisível.

Teorema C.0.4 ([35, Teorema 3.23]) Todo R -módulo injetivo E é divisível.

Demonstração Seja $m \in E$ um elemento não nulo qualquer e seja $r_0 \in R$ um não divisor de zero sobre R qualquer. Defina $f : (r_0) \rightarrow E$ da seguinte forma $f(rr_0) = rm$. Assim, note que f é bem definida uma vez que r_0 não é um divisor de zero. Desde que E é um R -módulo injetivo segue, pelo Teorema C.0.2, que existe uma aplicação (a qual é um R -homomorfismo) $g : R \rightarrow E$ estendendo f . Em particular, temos que $m = f(r_0) = g(r_0) = r_0g(1)$, de modo que m é divisível por r_0 . Desta forma, de acordo com a Definição C.0.3, temos que E é um R -módulo divisível. ■

Teorema C.0.5 ([35, Teorema 3.24]) Se R é um domínio de ideais principais, então um R -módulo D é divisível se, e somente se, ele é injetivo.

Demonstração Suponha que o R -módulo D é divisível. Pelo Teorema C.0.2, é suficiente estender todo R -homomorfismo $f : I \rightarrow D$ à R , onde I é um ideal de R . Uma vez que R é um domínio de ideais principais temos que $I = (r_0)$ para algum $r_0 \in R$. Podemos assumir que $I \neq 0$, ou seja, que o elemento $r_0 \neq 0$ e desta forma, r_0 não é um divisor de zero sobre R , pois R é um domínio. Desde que D é divisível, de acordo com a Definição C.0.3, existe um elemento $d \in D$ tal que $r_0 d = f(r_0)$. Defina $g : R \rightarrow D$ por $r \mapsto rd$, e note que g estende f , como desejado.

A recíproca, é o Teorema C.0.4 que foi feito anteriormente. ■

O próximo lema, será importante para o que se segue.

Lema C.0.6 (Eckmann - Schöpf) ([35, Teorema 3.27]) Todo R -módulo M pode ser mergulhado em um R -módulo injetivo. Ou seja, para cada R -módulo M existe um R -módulo injetivo E e uma aplicação $\bullet : M \rightarrow E$ a qual é um R -homomorfismo injetor.

C.1 Existência das resoluções injetiva e projetiva de um módulo

Vamos mostrar que dado um R -módulo M , ele sempre admite uma resolução injetiva e uma resolução projetiva.

Teorema C.1.1 Todo R -módulo M admite uma resolução injetiva.

Demonstração Vamos aplicar sucessivamente o Lema C.0.6. Dado um R -módulo M , pelo Lema C.0.6, existe um R -módulo injetivo I^0 e um R -homomorfismo injetivo $i_0 : M \rightarrow I^0$, onde sem perda de generalidade podemos considerar que i_0 é a aplicação de inclusão; tomamos então o R -módulo $I^0/i_0(M)$ e assim pelo Lema C.0.6 existe um R -módulo injetivo I^1 e um R -homomorfismo injetivo $f_1 : I^0/i_0(M) \rightarrow I^1$; agora tomamos a projeção $p_0 : I^0 \rightarrow I^0/i_0(M)$ e com isso definimos a aplicação $i_1 \equiv f_1 \circ p_0$ e desta forma temos que $i_1 : I^0 \rightarrow I^1$, com $\text{Im}(i_0) = \text{Ker}(i_1)$. Agora, tomamos a projeção $p_1 : I^1 \rightarrow I^1/i_1(I^0)$ e para o R -módulo $I^1/i_1(I^0)$ temos que existe um R -módulo injetivo I^2 e um R -homomorfismo injetivo $f_2 : I^1/i_1(I^0) \rightarrow I^2$; definimos então a aplicação $i_2 \equiv f_2 \circ p_1$, ou seja, temos $i_2 : I^1 \rightarrow I^2$ tal que $\text{Im}(i_1) = \text{Ker}(i_2)$. Continuando procedendo de maneira totalmente análoga ao que já foi feito anteriormente na prova, obtemos uma resolução injetiva para o R -módulo M :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i_0} I^0 \xrightarrow{i_1} I^1 \xrightarrow{i_2} I^2 \xrightarrow{i_3} I^3 \rightarrow \dots,$$

como queríamos demonstrar. ■

Vamos mostrar agora, que qualquer R -módulo M admite uma resolução projetiva. Para tanto, precisamos do seguinte resultado.

Teorema C.1.2 ([35, Teorema 3.3]) Todo R -módulo M é um quociente de um R -módulo livre.

Teorema C.1.3 ([35, Teorema 3.8]) Todo R -módulo M possui uma resolução livre.

Demonstração Pelo Teorema C.1.2, existe um R -módulo livre F_0 e uma sequência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow S_0 \rightarrow F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$.

Similarmente, existe um R -módulo livre F_1 e uma sequência exata curta de R -módulos

$$0 \rightarrow S_1 \rightarrow F_1 \rightarrow S_0 \rightarrow 0,$$

e, por indução, existe um R -módulo livre F_n e uma sequência exata curta de R -módulos

$$0 \rightarrow S_n \rightarrow F_n \rightarrow S_{n-1} \rightarrow 0.$$

Temos então, por essas sequências exatas de R -módulos dadas anteriormente, uma sequência da forma:

$$\dots \rightarrow F_3 \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0, \quad (*)$$

onde cada aplicação d_n é a composição da aplicação $S_{n-1} \rightarrow F_{n-1}$ com a aplicação $F_n \rightarrow S_{n-1}$. Para qualquer n , temos que $\text{Ker}(d_n) = S_n$ e $\text{Im}(d_n) = S_{n-1}$. Consequentemente, obtemos que $\text{Ker}(d_n) = \text{Im}(d_{n+1})$, e assim a sequência anterior $(*)$ é exata. ■

Observação C.1.4 Uma vez que R -módulos livres são R -módulos projetivos, segue que uma resolução livre de um R -módulo M é um tipo especial de uma resolução projetiva para este módulo. Portanto, todo R -módulo M admite uma resolução projetiva.

Apêndice D

Os funtores Ext e Tor

Trataremos de **funtores derivados** e a partir destes funtores obteremos o funtor **extensão** (Ext) e o funtor **torção** (Tor). Começaremos com um teorema, conhecido como **Teorema da Comparação**.

Teorema D.0.5 (Teorema da Comparação) ([36, Teorema 6.6]) Considere os seguintes complexos de cadeias de R -módulos:

$$C_{\bullet} : \dots \rightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} A \rightarrow 0 \quad (*) \text{ e } D_{\bullet} : \dots \rightarrow D_2 \xrightarrow{e_2} D_1 \xrightarrow{e_1} D_0 \xrightarrow{\epsilon'} A' \rightarrow 0 \quad (**),$$

onde temos o R -homomorfismo $f : A \rightarrow A'$. Se cada C_n no complexo $(*)$ é um R -módulo projetivo, para todo n , e se $(**)$ é uma sequência exata, então existe uma aplicação de cadeias $g : C_{\bullet}^A \rightarrow D_{\bullet}^{A'}$, onde $C_{\bullet}^A : \dots \rightarrow C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ e $D_{\bullet}^{A'} : \dots \rightarrow D_2 \rightarrow D_1 \rightarrow D_0 \rightarrow 0$ são os denominados **complexos de cadeias deletados**, tal que para as aplicações $\epsilon : C_0 \rightarrow A$, $f : A \rightarrow A'$, $\epsilon' : D_0 \rightarrow A'$ e $g_0 : C_0 \rightarrow D_0$ temos a seguinte composição:

$$\epsilon' \circ g_0 \equiv f \circ \epsilon.$$

Além disso, quaisquer duas tais aplicações de cadeias, nessa situação, são homotópicas.

Demonstração Vamos fazer a prova em duas partes.

(1): **A existência de g .**

A prova é uma indução sobre n . Se $n = 0$, temos a seguinte situação $D_0 \xrightarrow{\epsilon'} A' \rightarrow 0$ e $f \circ \epsilon : C_0 \rightarrow A'$, e uma vez que ϵ' é um epimorfismo e C_0 é um R -módulo projetivo, existe uma aplicação $g_0 : C_0 \rightarrow D_0$ com $\epsilon' \circ g_0 \equiv f \circ \epsilon$. Para o passo indutivo, considere a seguinte situação

$$C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1}, D_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} D_n \xrightarrow{e_n} D_{n-1}, \text{ e } g_n : C_n \rightarrow D_n, g_{n-1} : C_{n-1} \rightarrow D_{n-1}.$$

Se mostrarmos que $\text{Im}(g_n \circ d_{n+1}) \subset \text{Im}(e_{n+1})$, então teremos a situação

$$D_{n+1} \xrightarrow{e_{n+1}} \text{Im}(e_{n+1}) \rightarrow 0, \text{ e } g_n \circ d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow \text{Im}(e_{n+1}),$$

e como C_{n+1} é um R -módulo projetivo, isso nos fornecerá uma aplicação $g_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D_{n+1}$, com $e_{n+1} \circ g_{n+1} \equiv g_n \circ d_{n+1}$. Para checar essa inclusão, note que a exatidão de $(**)$ nos fornece que $\text{Im}(e_{n+1}) = \text{Ker}(e_n)$, assim é suficiente provar que $e_n \circ g_n \circ d_{n+1} \equiv 0$; mas $e_n \circ e_n \circ d_{n+1} \equiv g_{n-1} \circ d_n \circ d_{n+1} \equiv 0$.

(2): **Se g e h são duas tais aplicações de cadeias, então elas são homotópicas.**

Vamos construir uma homotopia s por indução. Começamos definindo $s_{-1} : C_{-1} \rightarrow D_0$ como a aplicação nula (não há muita escolha aqui, pois $C_{-1} = 0$). Para o passo indutivo, será mostrado que $\text{Im}(h_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \subset \text{Im}(e_{n+2})$, de modo que teremos a seguinte situação:

$$D_{n+2} \xrightarrow{e_{n+2}} \text{Im}(e_{n+2}) \rightarrow 0, \text{ e } h_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow \text{Im}(e_{n+2}).$$

Pela projetividade de C_{n+1} teremos então uma aplicação $s_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D_{n+2}$ satisfazendo a equação desejada. Para checar essa inclusão, note que a exatidão de $(**)$ nos fornece que $\text{Im}(e_{n+2}) = \text{Ker}(e_{n+1})$, de modo que é suficiente mostrar que vale o seguinte:

$$e_{n+1} \circ (h_{n+1} - g_{n+1} - s_n \circ d_{n+1}) \equiv 0.$$

Este último termo é tal que

$$\begin{aligned} e_{n+1} \circ (h_{n+1} - g_{n+1}) - e_{n+1} \circ s_n \circ d_{n+1} &\equiv e_{n+1} \circ (h_{n+1} - g_{n+1}) - (h_n - g_n - s_{n-1} \circ d_n) \circ d_{n+1} \equiv \\ &\equiv e_{n+1} \circ (h_{n+1} - g_{n+1}) - (h_n - g_n) \circ d_{n+1}, \end{aligned}$$

e isto é nulo, uma vez que h e g são aplicações de cadeias. ■

Observação D.0.6 O dual do Teorema D.0.5 também é válido. Neste caso, as sequências são da forma:

$$C^\bullet : 0 \rightarrow A \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots,$$

a sequência $(*)$ é assumida ser exata, e cada termo na sequência $(**)$, salvo o primeiro termo, é assumido ser um R -módulo injetivo.

Definição D.0.7 Se $g : C_\bullet^A \rightarrow D_\bullet^{A'}$ é uma aplicação de cadeias para a qual $f \circ \epsilon \equiv \epsilon' \circ g_0$, de acordo com o Teorema D.0.5, dizemos que g é **sobre** f .

D.1 Funtor derivado à esquerda covariante

Considere um funtor $F : \kappa \rightarrow \tau$ de uma categoria de R -módulos para uma categoria de S -módulos, onde F é um funtor covariante e aditivo.

Definição D.1.1 Para $n \in \mathbb{Z}$, definimos o n -ésimo funtor derivado à esquerda de F , denotado por $\mathfrak{L}_n F : \kappa \rightarrow \tau$, da seguinte maneira:

- (1) Se M for um R -módulo, então tome uma resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de M e considere a resolução projetiva deletada de M , digamos

$$\mathbf{P}_\bullet^M : \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0.$$

A seguir, aplique F à $\mathbf{P}_\bullet^M$ para obter o complexo de cadeias:

$$F(\mathbf{P}_\bullet^M) : \dots \rightarrow F(P_2) \xrightarrow{F(d_2)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \rightarrow 0.$$

Finalmente, vamos tomar o módulo de homologia deste último complexo de cadeias e assim definimos:

$$\mathfrak{L}_n F(M) := H_n(F(\mathbf{P}_\bullet^M)) = \text{Ker}(F(d_n)) / \text{Im}(F(d_{n+1})).$$

- (2) Para completar a definição de $\mathfrak{L}_n F$ devemos descrever sua ação sobre um R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$. Pelo Teorema D.0.5, existe uma aplicação de cadeias $g : \mathbf{P}_\bullet^M \rightarrow \mathbf{P}_\bullet^N$ sobre f . Definimos então:

$$\mathfrak{L}_n F(f) : \mathfrak{L}_n F(M) \rightarrow \mathfrak{L}_n F(N),$$

da seguinte forma

$$\mathfrak{L}_n F(f) = H_n(F(g)),$$

isto é, se $z_n \in \text{Ker}(F(d_n))$, então

$$z_n + \text{Im}(F(d_{n+1})) \mapsto F(g_n)(z_n) + \text{Im}(F(d_{n+1})).$$

Agora, observe que o **Teorema da Comparação** nos diz que $\mathfrak{L}_n F(f)$ é bem definida, pois se $h : \mathbf{P}_\bullet^M \rightarrow \mathbf{P}_\bullet^N$ é uma segunda aplicação de cadeias sobre f , então g e h são homotópicas, consequentemente $F(g)$ e $F(h)$ são homotópicas e assim, pelo Teorema 1.3.4, elas induzem as mesmas aplicações sobre grupos de homologia.

Proposição D.1.2 Se $F : \kappa \rightarrow \tau$ for um funtor aditivo, covariante e exato à direita, então temos que para um R -módulo M qualquer: $\mathfrak{L}_0 F(M) \cong F(M)$.

Demonstração Para um R -módulo M qualquer, tomamos uma resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de M e aplicamos o funtor F à $\mathbf{P}_\bullet^M$. Desta forma, pela definição, temos que:

$$\mathfrak{L}_0 F(M) := \text{Ker}(F(\epsilon)) / \text{Im}(F(d_1)) = F(P_0) / \text{Im}(F(d_1)) = \text{Coker}(F(d_1)),$$

onde $\epsilon : P_0 \rightarrow 0$ é o R -homomorfismo nulo.

E como F é um funtor exato à direita, temos que o R -homomorfismo $F(d_0) : F(P_0) \rightarrow F(M)$ é sobrejetivo e que $\text{Ker}(F(d_0)) = \text{Im}(F(d_1))$. Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo, segue que: $F(M) \cong F(P_0) / \text{Ker}(F(d_0)) = F(P_0) / \text{Im}(F(d_1)) = \text{Coker}(F(d_1))$.

Portanto, $\mathfrak{L}_0 F(M) \cong F(M)$, como queríamos demonstrar. ■

Vamos agora definir o funtor Tor.

Definição D.1.3 (O funtor torção) Seja $F = - \otimes_R M$, para um R -módulo M dado. Então, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que o funtor torção é definido como $\text{Tor}_n^R(-, M) = \mathfrak{L}_n F$.

Em particular, note que:

$$\text{Tor}_n^R(N, M) = \text{Ker}(d_n \otimes \text{Id}_M) / \text{Im}(d_{n+1} \otimes \text{Id}_M),$$

onde temos que:

$$\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow N \rightarrow 0,$$

é uma resolução projetiva do R -módulo N , a qual foi escolhida de modo definitivo.

Observação D.1.4 De acordo com [36, Corolário 6.8], temos que a definição do $\text{Tor}_n^R(M, N)$ é independente da escolha da resolução projetiva do R -módulo M .

D.2 Propriedades básicas do Tor

Os funtores Tor são introduzidos pela razão de que o produto tensorial, em geral, não preserva injetividade de aplicações. Vamos colocar a seguir, algumas propriedades básicas do Tor.

- (1) $\text{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N$, como funtores de duas variáveis.
- (2) $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$, se $n < 0$.
- (3) Se M é um R -módulo projetivo, então $\text{Tor}_n^R(M, N) = 0$, se $n > 0$. Em particular, isto é válido quando M é um R -módulo livre.
- (4) $\text{Tor}_n^R(M, N) \cong \text{Tor}_n^R(N, M)$, como funtores de duas variáveis, para todo $n \geq 0$.
- (5) Tor comuta com soma direta arbitrária, e também comuta com limites diretos.
- (6) Se R é um anel Noetheriano e M, N são R -módulos finitamente gerados, então todos os R -módulos $\text{Tor}_n^R(M, N)$ são finitamente gerados.

O lema a seguir será utilizado em um teorema, que irá tratar de uma importante propriedade do funtor Tor.

Lema D.2.1 ([36, Lema 6.11]) Considere resoluções projetivas para os R -módulos M e N , respectivamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0,$$

e

$$\mathbf{P}'_\bullet : \dots \rightarrow P'_3 \xrightarrow{d'_3} P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{\epsilon'} N \rightarrow 0,$$

e seja a sequência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow M \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{p} N \rightarrow 0$.

Então, podemos construir uma resolução projetiva:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\bullet} : \dots \rightarrow \hat{P}_3 \xrightarrow{\hat{d}_3} \hat{P}_2 \xrightarrow{\hat{d}_2} \hat{P}_1 \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{P}_0 \xrightarrow{\hat{d}_0} A \rightarrow 0$$

para o R -módulo A , e aplicações de cadeias de modo que essas resoluções projetivas: $\mathbf{P}_{\bullet}$, $\hat{\mathbf{P}}_{\bullet}$ e $\mathbf{P}'_{\bullet}$, formam uma sequência exata curta de complexos de cadeias.

Demonstração Defina $\hat{P}_n = P_n \oplus P'_n$, $\iota_n : P_n \rightarrow \hat{P}_n$ por $x \mapsto (x, 0)$, e $p_n : \hat{P}_n \rightarrow P'_n$ por $(x, x') \mapsto x'$. Desta forma, temos que $0 \rightarrow P_n \xrightarrow{\iota_n} \hat{P}_n \xrightarrow{p_n} P'_n \rightarrow 0$, é uma sequência exata curta, para cada n , e $\hat{P}_n$ é um R -módulo projetivo, uma vez que é a soma direta de R -módulos projetivos. Resta então definirmos aplicações $\hat{d}_n : \hat{P}_n \rightarrow \hat{P}_{n-1}$ e $\hat{d}_0 : \hat{P}_0 \rightarrow A$, de modo que a sequência $\dots \rightarrow \hat{P}_1 \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{P}_0 \xrightarrow{\hat{d}_0} A \rightarrow 0$ seja exata e de modo que temos comutatividade nos quadrados dos diagramas formados pelas resoluções projetivas de M , A e N ; essas aplicações são essencialmente $d_n + d'_n$.

Suponhamos que temos uma família de aplicações $\gamma_n : P'_n \rightarrow P_{n-1}$, $n > 0$, e $\gamma_0 : P'_0 \rightarrow A$, sobre a qual vamos impor condições. Defina, $\hat{d}_0 : \hat{P}_0 \rightarrow A$ por $x_0 + x'_0 \mapsto \iota(\epsilon(x_0)) + \gamma_0(x'_0)$, e $\hat{d}_n : \hat{P}_n \rightarrow \hat{P}_{n-1}$, por $x_n + x'_n \mapsto d_n(x_n) + d'_n(x'_n) + \gamma_n(x'_n)$.

Com essas definições, não importa de que maneira as aplicações γ_n são escolhidas, todo quadrado no novo diagrama é comutativo, tendo que verificar somente se $p \circ \hat{d}_0 \equiv \epsilon' \circ p_0$, onde temos que $p_0 : P_0 \oplus P'_0 \rightarrow P'_0$, $\hat{d}_0 : P_0 \oplus P'_0 \rightarrow A$, $p : A \rightarrow N$ e $\epsilon' : P'_0 \rightarrow N$. Queremos então verificar isso, ou, em vista da definição de $\hat{d}_0$, que $p \circ \gamma_0 \equiv \epsilon'$.

Nós também queremos que $\dots \rightarrow \hat{P}_1 \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{P}_0 \xrightarrow{\hat{d}_0} A \rightarrow 0$, seja uma sequência exata, ou seja, $\hat{d}_{n-1} \circ \hat{d}_n \equiv 0$ e $\text{Ker}(\hat{d}_{n-1}) \subseteq \text{Im}(\hat{d}_n)$, $\hat{d}_0 \circ \hat{d}_1 \equiv 0$ e $\text{Ker}(\hat{d}_0) \subseteq \text{Im}(\hat{d}_1)$. Vamos então colocar $\gamma_0 \circ d'_1 \equiv -\iota \circ \epsilon \circ \gamma_1$ e $-d_{n-1} \circ \gamma_n \equiv \gamma_{n-1} \circ d'_n$, para $n \geq 2$. Considere então

$$\dots \rightarrow P'_2 \xrightarrow{d'_2} P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \xrightarrow{\epsilon'} N \rightarrow 0 \quad (*),$$

e também

$$\dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{-d_1} P_0 \xrightarrow{-\iota \circ \epsilon} A \xrightarrow{p} N \rightarrow 0, \quad (**)$$

onde temos que $1_N : N \rightarrow N$ é a aplicação identidade.

Uma vez que cada termo em (*), exceto N , é um R -módulo projetivo, e sendo (**) uma sequência exata, o **Teorema da Comparação** nos fornece aplicações $\gamma_n : P'_n \rightarrow P_{n-1}$, fazendo cada quadrado do diagrama resultante das linhas (*) e (**) ser comutativo, isto é, as equações que queremos são satisfeitas. Finalmente, devemos mostrar que $\dots \rightarrow \hat{P}_2 \xrightarrow{\hat{d}_2} \hat{P}_1 \xrightarrow{\hat{d}_1} \hat{P}_0 \xrightarrow{\hat{d}_0} A \rightarrow 0$, é uma sequência exata. Mas temos justamente construído uma sequência exata de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_{\bullet} \longrightarrow \hat{\mathbf{P}}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{P}'_{\bullet} \longrightarrow 0,$$

de modo que o triângulo exato nos fornece exatidão de

$$\dots \longrightarrow H_n(\mathbf{P}_{\bullet}) \longrightarrow H_n(\hat{\mathbf{P}}_{\bullet}) \longrightarrow H_n(\mathbf{P}'_{\bullet}) \longrightarrow \dots$$

Uma vez que $\mathbf{P}_\bullet$ e $\mathbf{P}'_\bullet$ são sequências exatas, segue que $H_n(\mathbf{P}_\bullet) = 0 = H_n(\mathbf{P}'_\bullet)$; portanto, temos que $H_n(\hat{\mathbf{P}}_\bullet) = 0$, para todo n , isto é, $\hat{\mathbf{P}}_\bullet$ é sequência exata, como desejado. ■

Observação D.2.2 Segue a partir do Lema D.2.1 que

$$0 \rightarrow \mathbf{P}_\bullet^M \rightarrow \hat{\mathbf{P}}_\bullet^A \rightarrow \mathbf{P}_\bullet'^N \rightarrow 0$$

é também uma sequência exata de complexos de cadeias.

onde $\mathbf{P}'_{A'} : \dots \rightarrow P'_1 \xrightarrow{d'_1} P'_0 \rightarrow 0$, $\mathbf{P}_A : \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0$ e $\mathbf{P}''_{A''} : \dots \rightarrow P''_1 \xrightarrow{d''_1} P''_0 \rightarrow 0$ são as denominadas resoluções deletadas.

Teorema D.2.3 ([36, Teorema 8.3]) Se $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$ é uma sequência exata curta de R -módulos e de R -homomorfismos, então temos que, para todo R -módulo A , existe uma sequência exata longa para o Tor da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B') \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B'') \rightarrow \dots \rightarrow \\ \text{Tor}_1^R(A, B') \rightarrow \text{Tor}_1^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_1^R(A, B'') \rightarrow A \otimes_R B' \rightarrow A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B'' \rightarrow 0; \end{aligned}$$

similarmente na outra variável.

Demonstração Sejam $\mathbf{P}'_\bullet : \dots \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow B' \rightarrow 0$ e $\mathbf{P}''_\bullet : \dots \rightarrow P''_1 \rightarrow P''_0 \rightarrow B'' \rightarrow 0$, resoluções projetivas para B' e B'' , respectivamente. Pelo Lema D.2.1, temos que existe uma resolução projetiva para B , digamos $\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow B \rightarrow 0$, que pode ser colocada entre as resoluções anteriores de forma que temos uma sequência exata de complexos.

Desta forma, tomando $\mathbf{P}_\bullet'^{B'}$, $\mathbf{P}_\bullet^B$ e $\mathbf{P}_\bullet''^{B''}$ as resoluções projetivas deletadas, temos uma sequência exata de complexos de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet'^{B'} \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet^B \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet''^{B''} \longrightarrow 0.$$

Aplicando $A \otimes_R -$ à sequência exata de complexos anterior, obtemos a seguinte sequência exata de complexos de cadeias:

$$A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet'^{B'} \longrightarrow A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet^B \longrightarrow A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet''^{B''} \longrightarrow 0,$$

e assim temos que cada linha $A \otimes_R P'_n \rightarrow A \otimes_R P_n \rightarrow A \otimes_R P''_n \rightarrow 0$ é exata. Pelo Lema D.2.1, temos uma sequência exata da forma:

$$\dots \rightarrow H_n \left(A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet'^{B'} \right) \rightarrow H_n \left(A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet^B \right) \rightarrow H_n \left(A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet''^{B''} \right) \rightarrow H_{n-1} \left(A \otimes_R \mathbf{P}_\bullet'^{B'} \right) \rightarrow \dots,$$

isto é, obtemos a sequência exata:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_{n+1}^R(A, B'') \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B') \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_n^R(A, B'') \rightarrow \dots \rightarrow \\ \text{Tor}_1^R(A, B') \rightarrow \text{Tor}_1^R(A, B) \rightarrow \text{Tor}_1^R(A, B'') \rightarrow A \otimes_R B' \rightarrow A \otimes_R B \rightarrow A \otimes_R B'' \rightarrow 0, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema D.2.4 ([28, Lema 2.8]) Seja N um R -módulo finitamente gerado e seja M um R -módulo linearmente compacto. Então, para todo $i \geq 0$, $\text{Tor}_i^R(N, M)$ é um R -módulo linearmente compacto.

D.3 Funtor derivado à direita covariante

Considere um funtor $F : \kappa \rightarrow \tau$ de uma categoria de R -módulos para uma categoria de S -módulos, onde F é um funtor covariante e aditivo.

Para cada R -módulo M , escolhemos uma resolução injetiva:

$$\mathbf{I}^\bullet : 0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow E^2 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow E^{n+1} \rightarrow \dots$$

A seguir, definimos o funtor derivado à direita do funtor covariante F .

Definição D.3.1 Definimos os **funtores derivados à direita covariantes** $\mathfrak{R}^n F$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, sobre módulos M da seguinte maneira:

$$\mathfrak{R}^n F(M) = H^n(F(\mathbf{I}_M^\bullet)) = \text{Ker}(F(d^{n+1})) / \text{Im}(F(d^n)).$$

A definição de $\mathfrak{R}^n F(f)$, para $f : M \rightarrow N$ um R -homomorfismo, se faz justamente como antes. O dual do **Teorema da Comparação** afirma a existência de uma aplicação de cocadeias $g : \mathbf{I}_M^\bullet \rightarrow \mathbf{I}_N^\bullet$ a qual é única sob homotopias, de modo que existem únicas aplicações $H^n(F(\mathbf{I}_M^\bullet)) \rightarrow H^n(F(\mathbf{I}_N^\bullet))$, que são definidas para cada $n \in \mathbb{Z}$, cada uma delas induzida por $F(g)$.

Agora, podemos definir o funtor Ext covariante.

Definição D.3.2 (O funtor extensão covariante) Se $F = \text{Hom}_R(N, -)$, então temos que $\mathfrak{R}^n F = \text{Ext}_R^n(N, -)$ é o funtor Ext covariante. Em particular, segue que:

$$\text{Ext}_R^n(N, M) = \text{Ker}(\text{Hom}(N, d^n)) / \text{Im}(\text{Hom}(N, d^{n-1})),$$

onde $\mathbf{I}^\bullet : 0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \rightarrow \dots$ é a resolução injetiva escolhida do R -módulo M .

Observação D.3.3 De acordo com [36, Corolário 6.9], temos que a definição de $\text{Ext}_R^n(M, N)$ é independente da escolha da resolução injetiva do R -módulo N .

D.4 Funtor derivado à direita contravariante

Definição D.4.1 Sejam κ e τ duas categorias de R -módulos e de S -módulos, respectivamente. Considere que $F : \kappa \rightarrow \tau$ é um funtor contravariante e aditivo. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, o n -ésimo **funtor derivado à direita aditivo e contravariante** $\mathfrak{R}^n F : \kappa \rightarrow \tau$ de F é definido da seguinte maneira:

- (1) Sendo M um R -módulo, escolha uma resolução projetiva $\mathbf{P}_\bullet$ de M e tomando a resolução projetiva deletada de M :

$$\mathbf{P}_\bullet^M : \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow 0,$$

aplicamos o funtor F à $\mathbf{P}_\bullet^M$, obtendo assim o complexo de cocadeias:

$$0 \rightarrow F(P_0) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_1) \xrightarrow{F(d_2)} F(P_2) \rightarrow \dots \xrightarrow{F(d_n)} F(P_n) \rightarrow \dots,$$

e desta forma, definimos $\mathfrak{R}^n F$ sobre módulos M por:

$$\mathfrak{R}^n F(M) := H^n(F(\mathbf{P}_\bullet^M)) = \text{Ker}(F(d_{n+1})) / \text{Im}(F(d_n)).$$

- (2) Se $f : M \rightarrow N$ é um R -homomorfismo, tomemos $\mathbf{P}_\bullet^M$ e $\mathbf{P}_\bullet^N$ as resoluções projetivas deletadas de M e N , respectivamente. E seja $g : \mathbf{P}_\bullet^M \rightarrow \mathbf{P}_\bullet^N$ extensão de f , como no Teorema D.0.5. Definimos então $\mathfrak{R}^n F(f) : H^n(F(\mathbf{P}_\bullet^N)) \rightarrow H^n(F(\mathbf{P}_\bullet^M))$.

Observação D.4.2 Notemos o seguinte:

- (1) Para qualquer R -módulo M , o S -módulo $\mathfrak{R}^n F(M)$ é único a menos de isomorfismo.
- (2) Para qualquer R -homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ temos que o S -homomorfismo $\mathfrak{R}^n F(\phi)$ é unicamente determinado.

A seguir, apresentamos a definição do funtor extensão contravariante.

Definição D.4.3 (O funtor extensão contravariante) Seja M um R -módulo dado. Se $F = \text{Hom}_R(-, M)$ então, para cada $n \in \mathbb{Z}$, definimos o funtor:

$$\mathfrak{R}^n F = \text{Ext}_R^n(-, M) = \mathfrak{R}^n(\text{Hom}_R(-, M)),$$

e o denominamos o funtor extensão, ou funtor Ext , contravariante. Em particular, temos que:

$$\text{Ext}_R^n(N, M) = \text{Ker}(\text{Hom}(d_{n+1}, M)) / \text{Im}(\text{Hom}(d_n, M)),$$

onde $\mathbf{P}_\bullet : \dots \rightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \rightarrow 0$ é a resolução projetiva escolhida de N .

Observação D.4.4 De acordo com [36, Corolário 6.10], temos que a definição de $\text{Ext}_R^n(M, N)$ é independente da escolha da resolução projetiva do R -módulo M .

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aghapournahr, KH. Ahmadi-Amoli, M.Y. Sadeghi, *The concept of (I, J) -Cohen-Macaulay modules*, Journal of Algebraic Systems 3 (2015) 1 - 10.
- [2] M.R. Ahmadi, K. Moslehi, *On vanishing of generalized local homology modules and its duality*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science 1 (2014) 44 - 49.
- [3] L. Alonso Tarrío, A. Jeremías López, J. Lipman, *Local homology and cohomology on schemes*, Annales Scientifiques École Normale Supérieure (4) 30 (1997) 1 - 39.
- [4] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, 1969.
- [5] M.H. Bijan-Zadeh, K. Moslehi, *A generalization of local homology functors*, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science 2 (2012) 62 - 72.
- [6] M.H. Bijan-Zadeh, S. Rasoulyar, *Torsion theory, co-Cohen-Macaulay and local homology*, Bulletin Korean Mathematical Society 39 (2002) 577 - 587.
- [7] M.P. Brodmann, S. Fumasoli, F. Rohrer, *First lectures on local cohomology*, University of Zurich, 2007.
- [8] M.P. Brodmann, R.Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [9] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, 1993.
- [10] N.T. Cuong, T.T. Nam, *A local homology theory for linearly compact modules*, Journal of Algebra 319 (2008) 4712 - 4737.
- [11] N.T. Cuong, T.T. Nam, *The I -adic completion and local homology for Artinian modules*, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society 131 (2001) 61 - 72.
- [12] N.T. Cuong, L.T. Nhan, *On the Noetherian dimension of Artinian modules*, Vietnam Journal of Mathematics 30 (2002) 121 - 130.
- [13] S.M. Fakhruddin, *Linearly compact modules over noetherian rings*, Journal of Algebra 24 (1973) 544 - 550.

- [14] G.M. Greuel, G. Pfister, *A Singular Introduction to Commutative Algebra*, Springer-Verlag, 2002.
- [15] J.P.C. Greenlees, J.P. May, *Derived functors of I -adic completion and local homology*, Journal of Algebra 149 (1992) 438 - 453.
- [16] A. Grothendieck, *Local Cohomology*, Lecture Notes in Mathematics, 20 Springer-Verlag, Berlin/Tokyo/New York, 1967.
- [17] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [18] J. Herzog, N. Zamani, *Duality and vanishing of generalized local cohomology*, Archiv der Mathematik 81 (2003) 512 - 519.
- [19] J. Herzog, *Komplex Auflösungen und Dualität in der lokalen Algebra*, Habilitationsschrift, Universität Regensburg, 1974.
- [20] C. Huneke, *Commutative Algebra I*, University of Kansas, 2012.
- [21] T.W. Hungerford, *Algebra*, Springer-Verlag, 1974.
- [22] S. Lefschetz, *Algebraic Topology*, Colloquium Lectures American Mathematical Society 27 (1942).
- [23] I.G. Macdonald, *Duality over complete local rings*, Pergamon Press 1 (1962) 213 - 235.
- [24] E. Matlis, *The Koszul complex and duality*, Communications in Algebra (1974) 87 - 144.
- [25] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics, No 8, Cambridge University Press, 1986.
- [26] C. Miller, *Twenty-four hours of Local Cohomology*, Syracuse University, 2005.
- [27] M. Muzalewski, W. Skaba, *Submodules and cosets of submodules in left module over associative ring*, Formalized Mathematics (2) 2 (1991) 283 - 287.
- [28] T.T. Nam, *A finiteness result for co-associated and associated primes of generalized local homology and cohomology modules*, Communications in Algebra 37 (2009) 1748 - 1757.
- [29] T.T. Nam, *Generalized local homology for artinian modules*, Algebra Colloquium 19 (2012) 1205 - 1212.
- [30] T.T. Nam, *Left-derived functors of the generalized I -adic completion and generalized local homology*, Communications in Algebra 38 (2010) 440 - 453.
- [31] T.T. Nam, N.M. Tri, *Some properties of generalized local cohomology modules with respect to a pair of ideals*, International Journal of Algebra and Computation 24 (2014) 1043 - 1054.

- [32] D.G. Northcott, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1960.
- [33] A. Ooishi, *Matlis duality and the width of a module*, Hiroshima Mathematical Journal 6 (1976) 573 - 587.
- [34] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite Groups*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [35] J.J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, University of Illinois, Urbana, Academic Press, 1979.
- [36] J.J. Rotman, *Notes on Homological Algebras*, University of Illinois, Urbana, 1968.
- [37] P. Schenzel, *On formal local cohomology and connectedness*, Journal of Algebra 315 (2007) 894 - 923.
- [38] R.Y. Sharp, *A method for the study of artinian modules with an application to asymptotic behavior*, Mathematical Sciences Research Institute Publications 15 (1989) 443 - 465.
- [39] A-M. Simon, *Adic-completion and some dual homological results*, Publications Mathematiques 36 (1992) 965 - 979.
- [40] A-M. Simon, *Some homological properties of complete modules*, Mathematical Proceedings Cambridge Philosophical Society (2) 108 (1990) 231 - 246.
- [41] J. Strooker, *Homological Questions in Local Algebra*, Cambridge University Press, 1990.
- [42] Z. Tang, H. Zakeri, *Co-cohen-macaulay modules and modules of generalized fractions*, Communications in Algebra 22 (1994) 2173 - 2204.
- [43] R. Takahashi, Y. Yoshino, Y. Yoshizawa, *Local cohomology based on a nonclosed support defined by a pair of ideals*, Journal of Pure and Applied Algebra 213 (2009) 582 - 600.
- [44] S. Yassemi, *On the non-vanishing of local cohomology modules*, Czechoslovak Mathematical Journal 47 (1997) 585 - 592.
- [45] N. Zamani, *Generalized local cohomology relative to (I, J)* , Southeast Asian Bulletin of Mathematics 35 (2011) 1045 - 1050.