

---

Grupos split metacíclicos e formas espaciais  
esféricas metacíclicas

*Ligia Laís Fêmina*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

# Grupos split metacíclicos e formas espaciais esféricas metacíclicas

**Ligia Laís Fêmina**

***Orientador:* Prof. Dr. Mauro Flávio Spreafico**

***Coorientador:* Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática .  
*VERSÃO REVISADA*

**USP – São Carlos**  
**Dezembro de 2011**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

F288g Fêmina, Ligia Laís  
Grupos split metacíclicos e formas espaciais  
esféricas metacíclicas / Ligia Laís Fêmina; orientador  
Mauro Flávio Spreafico -- São Carlos, 2011.  
212 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. grupos split metacíclicos. 2. anel de  
cohomologia. 3. torção de Reidemeister. 4. formas  
espaciais esféricas. I. Spreafico, Mauro Flávio,  
orient. II. Título.

*“Comece por fazer o necessário,  
depois o possível, e de repente  
estará por fazer o impossível.”*

São Francisco de Assis



Aos meus pais,  
José Antonio e Sueli,  
dedico.





# Agradecimentos

---

Agradeço, primeiramente a Deus, que sem Ele, nada seria e nem existiria, e por sempre colocar pessoas maravilhosas ao meu lado.

Ao Prof. Dr. Mauro Flávio Spreafico, pelos conhecimentos transmitidos, pela contribuição no desenvolvimento do projeto e pela disponibilidade em sempre ajudar.

Ao Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto, pela sua valiosa contribuição nesse projeto e pela prestatividade em ajudar sempre que necessário.

A comissão julgadora da defesa: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Alice Kimie Miwa Libardi, Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos, Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher e Prof. Dr. Thiago de Melo pelos comentários e sugestões valiosos que contribuíram para o enriquecimento do trabalho.

A minha amiga Ana Paula, pela participação no projeto, pelas inúmeras discussões, pela força, confiança e por estar presente tanto nos momentos de descoberta do projeto como nos momentos de desânimo e dificuldades.

À Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Denise de Mattos pela supervisão no PAE, pelo incentivo e amizade.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do ICMC, pela formação acadêmica.

A todos os funcionários do ICMC, muito obrigada!

À Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Maria Gorete Carreira Andrade, por ter me ensinado a pesquisa, pela amizade e por ter sido imprescindível para a minha decisão de fazer o doutorado.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram e me apoiaram nos meus estudos, e pelos sacrifícios que fizeram para que eu estudasse e tivesse uma boa formação, e pelos conselhos tão valiosos nos momentos de indecisão.

A minha tia Vera e minhas avós pelas orações.

A minha irmã Lívia, pela amizade e momentos de descontrações.

A minha irmã Luana, não só pelos momentos de alegria, como pelo seu trabalho gráfico, sem ela, essa tese não teria figuras tão bonitas!

Ao Douglas, pelo carinho e apoio.

Aos meus amigos Fernando Micena, Marjory, Nazira, Taciana, Tatimi, Suzete e Vinicius, pelas discussões sempre produtivas, inúmeras horas de estudos, amizade e por sempre estarem presentes tanto nos momentos alegres quanto nos momentos difíceis.

A Francielle e demais professores da UFU, pelo apoio e compreensão em todas as vezes que precisei me ausentar para ir para São Carlos.

Aos meus amigos de Mirassol: Fabiana, Karl e Paulinho, que de uma forma ou de outra me ajudaram nesses anos de doutorado.

À CAPES pelos três anos de apoio financeiro.

A todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

# Resumo

---

Neste trabalho, estudamos a ação dos grupos split metacíclicos  $D_{(2h+1)2^l}$  nas esferas. Encontramos uma região fundamental dos espaços quocientes, chamados de Formas Espaciais Esféricas Metacíclicas, que foi utilizada para construirmos um conveniente complexo de cadeias destas formas com o qual calculamos o anel de cohomologia e a torção de Reidemeister. Obtivemos também uma relação entre as diferentes torções encontradas.

Palavras-chaves: grupos split metacíclicos, anel de cohomologia, torção de Reidemeister, formas espaciais esféricas.



# Abstract

---

In this work, we study the action of the split metacyclic groups  $D_{(2h+1)2^l}$  on the spheres. We find a fundamental domain of the quotient spaces, called Metacyclic Spherical Space Forms. Through this region we have built a convenient chain complex of these spaces and we used it to calculate their cohomology ring and Reidemeister torsion. We obtained also a relation between the different torsions found.

Keywords: split metacyclic groups, cohomology ring, Reidemeister torsion, spherical space forms.



# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Sobre anel e ações	1
1.2 (Co)homologia de um complexo de cadeia	4
1.2.1 Sequências exatas	4
1.2.2 Homologia e cohomologia	6
1.3 Resoluções livres	7
1.4 Módulo de homomorfismos	8
1.5 Produto cup	10
1.5.1 Interpretação geométrica	11
1.6 Representação de grupos finitos	13
1.7 Região fundamental	17
1.8 Produto direto e semidireto	18
1.9 Grupo de Whitehead de um grupo	19
1.9.1 Torção de Whitehead de um complexo de cadeia	21
<b>2 Formas espaciais esféricas metacíclicas</b>	<b>23</b>
2.1 Grupos split metacíclicos	23
2.2 Região fundamental para a ação de $D_{(2h+1)2^l}$ em $S^3$	24
2.2.1 Ação de $D_{3,8}$ em $S^3$	27
2.2.2 Ação de $D_{3,16}$ em $S^3$	33
2.2.3 Ação $D_{3,32}$ em $S^3$	37
2.2.4 Ação de $D_{(2h+1)2^l}$ em $S^3$	41
2.3 Complexo de cadeias para a ação de $D_{(2h+1)2^l}$ em $S^3$	79
2.3.1 Ação de $D_{3,8}$ em $S^3$	79
2.3.2 Ação de $D_{3,16}$ em $S^3$	87
2.3.3 Ação de $D_{3,32}$ em $S^3$	101
2.3.4 Ação de $D_{(2h+1)2^l}$ em $S^3$	105
2.4 Ação de $D_{(2h+1)2^l}$ em $S^{4n-1}$	124
2.4.1 Região fundamental e complexo de cadeia	125

<b>3</b>	<b>Homologia das formas espaciais esféricas metacíclicas</b>	<b>145</b>
3.1	Grupos de homologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$	145
3.1.1	Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação trivial	146
3.1.2	Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação não-trivial	153
3.1.3	Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$	160
3.2	Grupos de homologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$	164
3.2.1	Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação trivial	164
3.2.2	Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação não-trivial	167
3.2.3	Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$	169
<b>4</b>	<b>Anel de cohomologia das formas espaciais esféricas metacíclicas</b>	<b>173</b>
4.1	Grupos de cohomologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$	173
4.1.1	Coeficientes em $\mathbb{Z}$	174
4.1.2	Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$	175
4.1.3	Coeficientes em $\mathbb{Z}_p$	175
4.2	Anel de cohomologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$	176
4.2.1	Coeficientes em $\mathbb{Z}$	176
4.2.2	Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$	176
4.2.3	Coeficientes em $\mathbb{Z}_p$	179
<b>5</b>	<b>Cálculo das Torções</b>	<b>180</b>
5.1	Torção de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$	192
5.1.1	Relação entre torções	202
5.2	Torção de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$	207
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>211</b>



# Introdução

---

O problema de espaços de forma esférica de Clifford-Klein, proposto por Killing em 1891, consiste na classificação isométrica de variedades Riemannianas completas de curvatura constante positiva. Por um resultado de Killing e Hopf tais variedades são quocientes de esferas por alguma ação livre de um grupo finito  $G$ .

Uma classificação completa das formas espaciais esféricas foi feita por J. Wolf em (23). Em resumo, dados um grupo finito  $G$  e uma representação ortogonal livre de ponto fixo  $\sigma : G \rightarrow O(n + 1; \mathbb{R})$ , temos uma variedade Riemanniana conexa completa  $S^n/\sigma(G)$ , de dimensão  $n$  e curvatura constante positiva. Por [(23), Teorema 5.1.2], toda variedade Riemanniana conexa completa de curvatura constante positiva é isométrica a uma variedade obtida deste modo e duas representações de  $G$  dão origem a variedades isométricas se, e somente se, são representações equivalentes. Portanto, o problema de classificação das formas espaciais esféricas se divide em duas partes: (1) descrever os possíveis grupos que podem ocorrer e (2) como tais grupos podem agir. Ambas as partes dependem essencialmente da teoria de representação de grupos finitos. A divisão em duas partes foi observada em (22), porém a maior parte do trabalho na busca de tais grupos foi feita em (25) em um outro contexto.

Nesse trabalho, enfatizamos os grupos split metacíclicos (*split metacyclic groups*)

$$D_{(2h+1),2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle, \quad h \geq 1 \text{ e } t \geq 3.$$

Existem diferentes ações do  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$ , resultando em várias formas espaciais esféricas, a qual chamamos formas espaciais esféricas metacíclicas. Essas ações são classificadas em (23). Fizemos uma construção da região fundamental para as diferentes representações das ações dos grupos split metacíclicos sobre a

esfera de dimensão ímpar  $4n-1$ . Essa foi uma das nossas metas nesse projeto, sendo uma continuação do trabalho (10), cujos grupos em questão eram os quaterniônicos ( $t = 2$ ). Entretanto, essa tarefa foi mais complicada, uma vez que os grupos split metacíclicos apresentam uma maquinaria mais sofisticada. Com isso, conseguimos uma descrição completa da estrutura geométrica do complexo celular, resultando em uma descrição explícita do complexo de cadeia de  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$ -módulos associado ao complexo celular.

A relevância desse trabalho é que através da construção do complexo de cadeias coerente com a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  nas esferas, calculamos a torção de Reidemeister e o anel de cohomologia dos espaços quocientes, ou seja, das formas espaciais esféricas metacíclicas.

Assim, uma das aplicações do nosso projeto foi calcular o anel de cohomologia dos espaços de formas esféricas obtidos pelas diferentes ações de  $D_{(2h+1),2^t}$ , através de algumas ferramentas algébricas e geométricas. A teoria de cohomologia foi introduzida em 1930 e uma das vantagens dessa teoria é que os grupos de cohomologia admitem uma estrutura multiplicativa, conhecida como produto cup, o que o torna um anel graduado.

Já a torção de Reidemeister (R-torção) é um importante invariante topológico introduzido originalmente por Reidemeister (17), Franz (5) e Rham (16) para classificar os espaços lenticulados. Através do complexo de cadeia construído para as formas espaciais esféricas metacíclicas, calculamos a R-torção desses espaços para uma dada representação do seu grupo fundamental.

A seguir relatamos sucintamente o objeto de estudo de cada capítulo.

No capítulo 1, colocamos alguns requisitos essenciais para a compreensão do trabalho. Nas quatro primeiras seções que têm como referências principais (2) e (8), introduziremos o conceito de anel grupo  $RG$ , onde  $R$  é um anel comutativo com unidade e  $G$  é um grupo denotado multiplicativamente, a partir do qual definimos  $RG$ -módulos, as definições de homologia e cohomologia de complexo de cadeias, resoluções livres e módulos de homomorfismos. A quinta seção deste capítulo trata da interpretação geométrica do produto cup, ferramenta essencial utilizada para o cálculo do anel de cohomologia das formas espaciais esféricas metacíclicas. As referências são (1), (12) e (13). Terminamos o capítulo com uma introdução a representação de grupos finitos, a definição de região fundamental, bem como a definição de torção de Reidemeister (R-torção). As principais referências são (11) e (23).

No capítulo 2, construímos uma região fundamental das formas espaciais esféricas metacíclicas. Na primeira seção, apresentamos o grupo  $D_{(2h+1),2^t}$  como o produto semidireto de dois grupos cíclicos, bem como as principais relações existentes entre seus geradores. A principal referência é (26). Na seção 2, fazemos um estudo sobre as possíveis representações do grupo split metacíclico (referência (23)).

Construímos uma região fundamental para as diferentes representações das ações dos grupos split metacíclicos sobre a esfera de dimensão  $4n - 1$ , e o complexo de cadeia de  $\mathbb{Z}D_{2^t(2h+1)}$ -módulos associados ao complexo celular. Diferente do caso dos quaterniônicos (referência (10)), no caso dos grupos split metacíclicos a região fundamental e seus respectivos complexos de cadeias são divididos em dois casos:  $2^{t-2} > 2h + 1$  e  $2^{t-2} < 2h + 1$ .

No capítulo 3, através do complexo de cadeia construído no capítulo 2, calculamos os grupos de homologia das formas espaciais esféricas metacíclicas com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , representação trivial e não-trivial, e os grupos de homologia desses espaços com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ .

No capítulo 4, aplicamos a construção do complexo de cadeias feito no capítulo 2, para o cálculo dos grupos de cohomologia e através da interpretação geométrica do produto cup, obtemos o anel de cohomologia das formas espaciais esféricas metacíclicas de dimensão três.

No capítulo 5, calculamos a R-torção desses espaços para uma dada representação do seu grupo fundamental. Esse cálculo é dividido em dois casos:  $2^{t-2} > 2h + 1$  e  $2^{t-2} < 2h + 1$ , finalizamos demonstrando uma relação entre os diferentes resultados obtidos.



# Preliminares

---

Neste capítulo, relatamos alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Destacamos, especialmente, a definição de região fundamental, a interpretação geométrica do produto cup e a torção de Reidemeister, que são essenciais para o entendimento dos resultados obtidos para as formas espaciais esféricas metacíclicas.

## 1.1 Sobre anel e ações

**Definição 1.1.1.** *Um anel de divisão é um anel  $D$  com identidade, tal que:*

- $1 \neq 0$ ;
- *para todo elemento não-nulo  $a \in D$ , existe  $b \in D$  com  $a.b = b.a = 1$*

**Exemplo 1.1.2.** *Todo corpo é um anel de divisão comutativo.*

**Definição 1.1.3.** *Sejam  $R$  um anel comutativo com unidade 1 e  $G$  um grupo denotado multiplicativamente. Seja  $RG$  o  $R$ -módulo livre gerado pelos elementos de  $G$ . Um elemento de  $RG$  é expresso unicamente na forma  $\sum_{g \in G} \alpha_g g$ , onde  $\alpha_g \in R$  e  $\alpha_g = 0$  para quase todo  $g$ . Em  $RG$*

definimos a multiplicação

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h\right) = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh$$

e a soma

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} \beta_g g\right) = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g)g$$

que fazem de  $RG$  um anel com unidade  $1e$ , onde  $e$  é o elemento neutro de  $G$ , chamado de **anel grupo** de  $G$  sobre  $R$ .

**Definição 1.1.4.** *Sejam  $G$  um grupo e  $X$  um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de  $G$  em  $X$  é uma aplicação  $\phi : G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = gx$  satisfazendo, para todo  $x \in X$ , as condições:*

- i)  $ex = x$  ( $e$ : elemento neutro de  $G$ ).
- ii)  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ ,  $\forall g_1, g_2 \in G$ .

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: *uma ação de  $G$  em  $X$  é um homomorfismo  $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{B}(X)$  dado por  $\varphi(g) = \varphi_g$  tal que  $\varphi_g(x) = gx$  onde  $\mathfrak{B}(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é uma bijeção}\}$  é um grupo com a operação de composição.*

**Observação 1.1.5.** *Sempre que tivermos um grupo  $G$  atuando em um conjunto  $X$  chamaremos este conjunto de  $G$ -conjunto.*

**Definição 1.1.6.** *Dizemos que  $X$  é um **G-conjunto livre** se a ação de  $G$  em  $X$  é livre, isto é,  $gx = x$ , para algum  $x \in X$  se, e somente se,  $g = e$ .*

*Dizemos que  $X$  é um **G-conjunto trivial** se a ação de  $G$  em  $X$  é trivial, isto é,  $gx = x$ , para todo  $x \in X$  e para todo  $g \in G$ .*

**Proposição 1.1.7.** *Sejam  $G$  um grupo (multiplicativo) e  $A$  um conjunto não vazio. Então,  $A$  é um  $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) se, e somente se,  $A$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo munido com uma ação de  $G$  em  $A$ .*

**Demonstração:** Seja  $A$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo. Temos que  $A$  consiste de um grupo abeliano munido com um homomorfismo

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{Z}G &\rightarrow \text{End}(A) \\ \beta &\mapsto \rho(\beta) = \varphi_\beta, \end{aligned}$$

onde  $\text{End}(A)$  denota o anel dos homomorfismos de  $A$  e  $\varphi_\beta(a) = \beta.a$ , para todo  $a \in A$ .

Este homomorfismo  $\rho$  induz uma ação de  $G$  em  $A$ , dada pela aplicação

$$\begin{aligned} \phi : G \times A &\rightarrow A \\ (g, a) &\mapsto \phi(g, a) = \rho(g)(a) = g.a, \end{aligned}$$

Além disso, podemos definir um homomorfismo  $\rho^* : \mathbb{Z} \rightarrow \text{End}(A)$ , dado por  $\rho^*(r) = \rho(re)$ , onde  $e$  denota um elemento neutro de  $G$ . Com este homomorfismo  $\rho^*$ , fazemos de  $A$  um  $\mathbb{Z}$ -módulo.

Reciprocamente, dado um  $\mathbb{Z}$ -módulo  $A$  munido de uma ação  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ , temos induzido um homomorfismo  $\rho : \mathbb{Z}G \rightarrow \text{End}(A)$ , dado por

$$\rho\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varphi(g).$$

Este homomorfismo, junto com a estrutura de grupo abeliano do  $\mathbb{Z}$ -módulo  $A$ , faz de  $A$  um  $\mathbb{Z}G$ -módulo, como queríamos.  $\square$

**Observação 1.1.8.** (a) *Seja  $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$  a aplicação aumentação usual, definida por*

$$\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G \text{ e } \varepsilon\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} \alpha_g.$$

(b) *Todo  $\mathbb{Z}$ -módulo  $M$  pode ser visto como um  $\mathbb{Z}G$ -módulo se considerarmos em  $M$  a  $G$ -ação trivial.*

*Em particular, o anel  $\mathbb{Z}$  pode ser visto como um  $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.*

**Definição 1.1.9.** *Sejam  $X$  e  $Y$   $G$ -conjuntos. Uma função  $f : X \rightarrow Y$  é dita ser equivariante se*

$$f(g.x) = g.f(x),$$

*para todo  $g \in G$  e para todo  $x \in X$ .*

**Definição 1.1.10.** *Seja  $X$  um  $G$ -conjunto e  $x \in X$ . Definimos a  $G$ -órbita de  $x$  como o conjunto*

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

**Proposição 1.1.11.** *As órbitas de  $X$  formam uma partição de  $X$ , isto é, existe  $E = \{x_i; i \in I\}$ , conjunto de representantes para as órbitas distintas, tal que*

$$X = \bigcup_{x_i \in E} G(x_i).$$

**Demonstração:** Se  $G(x_i) \cap G(x_j) \neq \emptyset$  então,  $G(x_i) = G(x_j)$ .

Pois,

$$G(x_i) \cap G(x_j) \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in G(x_i) \cap G(x_j) \Rightarrow \exists g, h \in G \mid x = gx_i = hx_j.$$

Seja  $y \in G(x_i)$ .

Então,  $y = g'x_i$ , para algum  $g' \in G$ . Desta forma,  $y = g'g^{-1}gx_i = g'g^{-1}x = g'g^{-1}hx_j = (g'g^{-1}h)x_j$ . Assim,  $y \in G(x_j)$  e, temos  $G(x_i) \subset G(x_j)$ . Analogamente podemos mostrar que  $G(x_j) \subset G(x_i)$ .

Em vista disto, para todo  $x_i, x_j \in G$ , temos  $G(x_i) \cap G(x_j) = \emptyset$  ou  $G(x_i) = G(x_j)$ .

Agora, mostremos que  $X = \bigcup_{x_i \in E} G(x_i)$ .

É claro que  $\bigcup_{x_i \in E} G(x_i) \subset X$ .

Vamos mostrar que  $X \subset \bigcup_{x_i \in E} G(x_i)$ .

Para isto, seja  $x \in X$ . Então,  $x \in G(x)$ . Se  $x \in E$  então,  $x = x_i$ , para algum  $i$ . Logo,  $x \in G(x_i)$ . Se  $x \notin E$  então, como  $E$  representa todas as órbitas distintas, temos que  $G(x) = G(x_k)$ , para algum  $x_k \in E$ . Logo,  $x \in G(x_k)$ . Assim,  $x \in \bigcup_{x_i \in E} G(x_i)$ .

Portanto,  $X \subset \bigcup_{x_i \in E} G(x_i)$ . □

## 1.2 (Co)homologia de um complexo de cadeia

### 1.2.1 Sequências exatas

Seja  $R$  um anel, dado arbitrariamente, com unidade  $1 \neq 0$ .

Escrevemos uma sequência finita ou infinita de homomorfismos de  $R$ -módulos da seguinte forma:

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

Deste modo, para cada módulo que não esteja nos extremos da sequência, por exemplo, para o  $Y$  desta sequência, existe um homomorfismo  $f$  indo para  $Y$  e um homomorfismo  $g$  saindo de  $Y$ . Definimos  $f$  como sendo o **homomorfismo de entrada** e  $g$  como sendo o **homomorfismo de saída** da sequência no módulo  $Y$ .

**Definição 1.2.1.** *Uma sequência exata de  $R$ -módulos é uma sequência, como definida anteriormente, tal que a imagem do homomorfismo de entrada coincide com o núcleo do homomorfismo de saída em todos os módulos, exceto nos extremos da sequência.*

Para exemplificarmos, se considerarmos a sequência

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$



como exata, devemos ter  $Im(f) = Ker(g)$ .

**Observação 1.2.2.** (i) A sequência  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  é exata, se e somente se,  $f$  é um monomorfismo.

(ii) A sequência  $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$  é exata, se e somente se,  $f$  é um epimorfismo.

(iii) Das observações acima vem imediatamente que a sequência:  $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$  é exata, se e somente se,  $f$  é um isomorfismo.

(iv) A sequência  $0 \rightarrow M \rightarrow 0$  é exata, se e somente se,  $M = 0$ .

**Definição 1.2.3.** Toda sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

será chamada **sequência exata curta**.

**Exemplo 1.2.4. (Exemplo de sequência exata curta)**

Consideremos um submódulo  $Y$  de um  $R$ -módulo  $X$  e o módulo quociente  $Q = X/Y$ . Como o homomorfismo inclusão  $i : Y \rightarrow X$  é um monomorfismo, a projeção natural  $p : X \rightarrow Q$  é um epimorfismo e  $Im(i) = Y = Ker(p)$ .

Daí, obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0.$$

**Definição 1.2.5.** Uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

cinde no módulo  $Y$  se, e somente se, o submódulo

$$A = Im(f) = Ker(g)$$

do módulo  $Y$  é um somando direto de  $Y$ . Em outras palavras, a sequência exata cinde no módulo  $Y$  se, e somente se,  $Y$  é decomponível na soma direta de  $A$  e um outro submódulo de  $Y$ .

**Definição 1.2.6.** Dizemos que uma **sequência exata cinde** se esta cinde em cada um de seus módulos, exceto nos seus extremos.

**Teorema 1.2.7.** Se uma sequência exata

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

de homomorfismos de  $R$ -módulos cinde no módulo  $Y$ , então  $Y$  é isomorfo à soma direta

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g).$$

**Demonstração:** (8), I.5.6. □

**Corolário 1.2.8.** Se uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

de homomorfismos de  $R$ -módulos cinde, então  $B$  é isomorfo à soma direta  $A \oplus C$ .

**Demonstração:** (8), I.5.7. □

**Definição 1.2.9.** Uma sequência finita ou infinita

$$\dots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \dots$$

de homomorfismos de  $R$ -módulos, é dita uma **sequência semi-exata** se, e somente se, a imagem do homomorfismo de entrada está contida no núcleo do homomorfismo de saída para todo módulo, exceto nos extremos da sequência ( $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ ).

**Observação 1.2.10.** A sequência é semi-exata se, e somente se, a composição  $g \circ f$  de dois homomorfismos consecutivos  $f$  e  $g$  na sequência é o homomorfismo trivial.

**Observação 1.2.11.** Toda sequência exata de homomorfismos de  $R$ -módulos é semi-exata, mas nem toda sequência semi-exata é exata.

## 1.2.2 Homologia e cohomologia

Os módulos de uma sequência semi-exata  $C$  são usualmente indexados por inteiros crescentes ou por inteiros decrescentes. Se inteiros decrescentes são usados como índices, a sequência semi-exata  $C$  é chamada **Complexo de Cadeia** (ou sequência baixa) e os homomorfismos em  $C$ , serão denotados pelo símbolo  $\partial$  e indexados da mesma forma como nos módulos. Deste modo um complexo de cadeia  $C$  é da seguinte forma:

$$C : \dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

com  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .

Os elementos de  $C_i$  são chamados cadeias  $i$ -dimensionais de  $C$  e os homomorfismos  $\partial_i$  são chamados operadores bordo.

O núcleo de  $\partial_i$  é denotado por  $Z_i(C)$  e chamado módulo  $i$ -dimensional de ciclos de  $C$ . A imagem de  $\partial_{i+1}$  em  $C_i$  é denotada por  $B_i(C)$  e é chamado módulo  $i$ -dimensional de bordos de  $C$ .

**Definição 1.2.12.** *O módulo quociente*

$$H_i(C) = Z_i(C)/B_i(C) = \text{Ker}(\partial_i)/\text{Im}(\partial_{i+1})$$

é denominado **Módulo de Homologia  $i$ -dimensional** de  $C$ .

Quando inteiros crescentes são usados como índices, a sequência semi-exata  $C$  é chamada **Complexo de Cocadeia** (ou sequência superior) e os homomorfismos em  $C$  serão denotados por  $\delta$  e indexados como nos módulos. Desta forma, um complexo de cocadeia  $C$  é da seguinte forma:

$$C : \dots \xrightarrow{\delta^{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+1}} \dots$$

com  $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ . Neste caso, os termos cocadeia, cociclo e cobordo são usados em lugar de cadeia, ciclo, e bordo dos complexos de cadeia. E ainda, sobrescritos são usados no lugar de subscritos.

**Definição 1.2.13.** *O módulo quociente*

$$H^i(C) = Z^i(C)/B^i(C) = \text{Ker}(\delta^i)/\text{Im}(\delta^{i-1})$$

é chamado **Módulo de Cohomologia  $i$ -dimensional** de  $C$ .

## 1.3 Resoluções livres

**Definição 1.3.1.** *Seja  $X$  um  $R$ -módulo arbitrário. Uma resolução de  $X$  sobre  $R$ , ou uma  $R$ -resolução de  $X$ , é uma sequência exata de  $R$ -módulos*

$$C : \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots,$$

a qual satisfaz as seguintes condições:

$$(R1) C_{-1} = X$$

$$(R2) C_n = 0, \forall n < -1$$

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: uma resolução de  $X$  sobre  $R$ , ou uma  $R$ -resolução de  $X$ , é uma sequência exata de  $R$ -módulos

$$C : \dots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} X \longrightarrow 0.$$

**Definição 1.3.2.** A aplicação  $\varepsilon : C_0 \rightarrow X$  é chamada **aplicação aumentação**. Se cada  $C_i$  é livre, dizemos que a **resolução é livre**.

**Notação:**  $\varepsilon : C \rightarrow X$  denotará uma resolução de  $X$ .

**Proposição 1.3.3.** Dado um  $R$ -módulo  $X$  sempre podemos construir uma  $R$ -resolução livre de  $X$ .

**Demonstração:** (8), III.1.1. □

## 1.4 Módulo de homomorfismos

Sejam  $A$  e  $B$   $R$ -módulos à esquerda arbitrários e consideremos o conjunto

$$\Phi = \text{Hom}_R(A, B)$$

de todos os homomorfismos do módulo  $A$  no módulo  $B$ .

Quando não temos problemas de ambiguidade, como é este o caso já que estamos trabalhando com módulos sobre um anel  $R$  fixado, denotaremos simplesmente

$$\Phi = \text{Hom}(A, B).$$

Definamos uma adição (+) no conjunto  $\Phi$ , sendo que para dois homomorfismos  $\phi, \psi : A \rightarrow B$  o homomorfismo

$$\phi + \psi : A \rightarrow B$$

é definido por

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x), \forall x \in A.$$

Esta adição (+) torna  $\Phi$  um grupo abeliano.

Agora, para todo  $\alpha \in R$  e para todo  $\phi \in \Phi$ , consideremos a função

$$\alpha\phi : A \rightarrow B,$$

definida por

$$(\alpha\phi)(x) = \alpha[\phi(x)], \forall x \in A.$$

Podemos verificar que  $\alpha\phi$  é um homomorfismo do módulo  $A$  no módulo  $B$  e a aplicação  $(\alpha, \phi) \mapsto \alpha\phi$  define uma multiplicação escalar

$$\mu : R \times \Phi \rightarrow \Phi$$

no grupo abeliano  $\Phi$ .

Isto torna  $\Phi$  um  $R$ -módulo à esquerda, sendo o elemento neutro de  $\Phi$  o homomorfismo trivial  $0$ .

**Definição 1.4.1.** O  $R$ -módulo  $\Phi = \text{Hom}(A, B)$  é chamado módulo de homomorfismos do módulo  $A$  no módulo  $B$ .

**Proposição 1.4.2.** Para qualquer  $R$ -módulo  $X$  à esquerda, sempre temos

$$\text{Hom}(R, X) \simeq X.$$

**Demonstração:** (8), I.8.1. □

Sejam  $f : A' \rightarrow A$  e  $g : B \rightarrow B'$  homomorfismos de  $R$ -módulos à esquerda e consideremos os módulos  $\text{Hom}(A, B)$  e  $\text{Hom}(A', B')$ . Definamos uma função

$$h : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B') \text{ tal que } h(\phi) = g \circ \phi \circ f, \forall \phi \in \text{Hom}(A, B).$$

Esta função  $h$  é um homomorfismo do módulo  $\text{Hom}(A, B)$  no módulo  $\text{Hom}(A', B')$ , a qual denotamos por  $\text{Hom}(f, g)$ . Se  $g = id$ , denotaremos simplesmente por  $\text{Hom}(f) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B)$ .

**Proposição 1.4.3.** Se  $i : A \rightarrow A$  e  $j : B \rightarrow B$  são homomorfismos idênticos dos  $R$ -módulos à esquerda  $A$  e  $B$ , então

$$\text{Hom}(i, j) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B)$$

é o homomorfismo idêntico do módulo  $\text{Hom}(A, B)$ . Se  $f : A' \rightarrow A$ ,  $f' : A'' \rightarrow A'$ ,  $g : B \rightarrow B'$ ,  $g' : B' \rightarrow B''$  são homomorfismos de  $R$ -módulos à esquerda, então

$$\text{Hom}(f \circ f', g' \circ g) = \text{Hom}(f', g') \circ \text{Hom}(f, g).$$

**Demonstração:** (8), I.8.2. □

**Corolário 1.4.4.** Se  $f : A' \rightarrow A$  e  $g : B \rightarrow B'$  são isomorfismos de  $R$ -módulos à esquerda, então  $\text{Hom}(f, g) : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B')$  também é isomorfismo.

**Demonstração:** (8), I.8.3. □

**Definição 1.4.5.** Seja  $A$  um grupo abeliano, e  $F(A)$  denota o grupo abeliano livre gerado pelos elementos de  $A$ , considere  $R(A)$  o kernel da projeção natural  $F(A) \rightarrow A$ . A seqüência

$$0 \rightarrow R(A) \xrightarrow{\phi} F(A) \rightarrow A \rightarrow 0$$

é chamada de resolução canônica livre de  $A$ . Seja  $\tilde{\phi} = \text{Hom}(\phi)$

O grupo

$$\text{cokernel}(\tilde{\phi}) = \text{Hom}(R(A), B) / \tilde{\phi}(\text{Hom}(F(A), B))$$

é denotado por  $\text{Ext}(A, B)$ .

**Teorema 1.4.6. (Teorema dos Coeficientes Universais para Cohomologia)** *Seja  $C$  um complexo de cadeia livre e seja  $G$  um grupo abeliano, então existe uma sequência exata*

$$0 \leftarrow \text{Hom}(H_p(C), G) \xleftarrow{k} H^p(C; G) \leftarrow \text{Ext}(H_{p-1}(C); G) \leftarrow 0,$$

onde as aplicações são os homomorfismos naturais induzidos pelo complexo de cadeia e a sequência acima cinde. Logo,

$$H^p(C; G) \simeq \text{Hom}(H_p(C), G) \oplus \text{Ext}(H_{p-1}(C); G)$$

**Demonstração:** (13), Teorema 53.1. □

Em (13, §54), temos algumas regras para calcular  $\text{Hom}$  e  $\text{Ext}$ , quando os grupos são finitamente gerados. Resumimos na tabela abaixo, as equivalências que utilizaremos nesse trabalho, onde  $d = \text{mdc}(m, n)$ .

$\text{Hom}(\mathbb{Z}, G) \simeq G$	$\text{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0$
$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}) = 0$	$\text{Ext}(\mathbb{Z}/m, G) \simeq G/mG$
$\text{Hom}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \simeq \mathbb{Z}/d$	$\text{Ext}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/m$
$\text{Ext}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \simeq \mathbb{Z}/d$	

## 1.5 Produto cup

**Definição 1.5.1.** *Seja  $X$  um espaço topológico. Seja  $S^p(X; R) = \text{Hom}(S_p(X, R))$  o grupo das  $p$ -cocadeias singulares de  $X$ , com coeficientes em  $R$ . Definimos uma aplicação*

$$S^p(X; R) \times S^q(X; R) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X; R)$$

da seguinte maneira: Se  $T : \Delta_{p+q} \rightarrow X$  é um  $p + q$ -simplexo singular, seja

$$c^p \cup c^q(T) = c^p(T \circ l(\epsilon_0, \dots, \epsilon_p)) \cdot c^q(T \circ l(\epsilon_p, \dots, \epsilon_{p+q})),$$

a aplicação  $T \circ l(\epsilon_0, \dots, \epsilon_p)$  é apenas a restrição de  $T$  à  $p$ -face  $\Delta_p$  de  $\Delta_{p+q}$ ; que é um  $p$ -simplexo singular em  $X$ . Similarmente,  $T \circ l(\epsilon_p, \dots, \epsilon_{p+q})$  é a restrição de  $T$  à  $q$ -face de  $\Delta_{p+q}$ ; que é um  $q$ -simplexo singular em  $X$ . A multiplicação indicada no lado direito da igualdade é a multiplicação no anel  $R$ .

A cocadeia  $c^p \cup c^q$  é chamada de **produto cup** das cocadeias  $c^p$  e  $c^q$ .

**Definição 1.5.2.** Seja  $H^*(X; R)$  a soma direta  $\bigoplus H^i(X; R)$ . A operação do produto cup torna esse grupo em um anel com elemento unitário. Esse anel é chamada **anel de cohomologia** de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

### 1.5.1 Interpretação geométrica

Nesta seção, o objetivo é explicar uma interpretação geométrica do produto cup.

Primeiramente, relembremos o Teorema da Dualidade de Poincaré.

**Teorema 1.5.3. (Dualidade de Poincaré)** *Seja  $X$  uma variedade compacta, fechada, orientável,  $n$ -dimensional, então para todo  $p$ , existe um isomorfismo*

$$H^p(X; G) \simeq H_{n-p}(X; G),$$

onde  $G$  é um grupo de coeficientes arbitrário. Se  $X$  é não-orientável, existe um isomorfismo

$$H^p(X; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-p}(X; \mathbb{Z}_2),$$

para todo  $p$ .

**Demonstração:** (13), Teorema 65.1. □

Se  $X$  é uma variedade suave fechada orientada, e se  $A$  e  $B$  são subvariedades orientadas de  $X$ , que se interceptam transversalmente, então o produto cup do dual de Poincaré de  $A$  e  $B$  é o dual de Poincaré de  $A \cap B$ , ou seja, o produto cup é o dual de Poincaré da intersecção das subvariedades.

Seja  $X$  uma variedade suave fechada orientável de dimensão  $n$ . Sejam  $A$  e  $B$  subvariedades suaves fechadas orientáveis de dimensão  $n - i$  e  $n - j$ , respectivamente. Suponha que  $A$  e  $B$  se interceptam transversalmente. Isso significa que para todo  $p \in A \cap B$ , a aplicação  $T_p A \oplus T_p B \rightarrow T_p X$  induzida pelas inclusões é sobrejetiva. Essa condição pode ser obtida por pequenas perturbações nos mergulhos de  $A$  e  $B$  em  $X$ . Então  $A \cap B$  é uma subvariedade de dimensão  $n - (i + j)$ .

Considere as classes de homologia  $[A] \in H_{n-i}(X; \mathbb{Z})$ ,  $[B] \in H_{n-j}(X; \mathbb{Z})$  e  $[A \cap B] \in H_{n-i-j}(X; \mathbb{Z})$ . Denotamos o dual de Poincaré de cada classe por  $[A]^* \in H^i(X; \mathbb{Z})$ ,  $[B]^* \in H^j(X; \mathbb{Z})$ , e  $[A \cap B]^* \in H^{i+j}(X; \mathbb{Z})$ .

Nas condições acima, enunciamos o seguinte teorema:

**Teorema 1.5.4.** *O produto cup do dual de Poincaré de A e B é o dual de Poincaré da intersecção:*

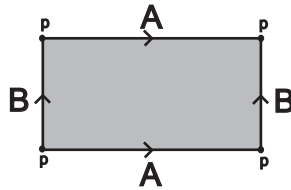
$$[A]^* \cup [B]^* = [A \cap B]^* \in H^{i+j}(X; \mathbb{Z}).$$

**Demonstração:** (1), capítulo VI, seção 11. □

Este teorema só responde parcialmente qual o significado geométrico do produto cup, porque só funciona em uma variedade suave, e além disso nem toda classe de homologia em uma variedade pode ser representada por uma subvariedade. No entanto, este teorema é muito útil.

Analogamente, existe uma versão do Teorema 1.5.4 para variedades não orientáveis, usando  $\mathbb{Z}_2$  como coeficientes.

**Exemplo 1.5.5.** *Seja  $X = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Então  $H_1(T^2) \simeq \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , onde seus geradores são  $[A]$  e  $[B]$  e  $H_0(T^2) \simeq \mathbb{Z}$ , com gerador  $[p]$ .*



Sejam  $[A]^*, [B]^* \in H^1(T^2; \mathbb{Z})$  e  $[p]^* \in H^2(T^2; \mathbb{Z})$  o dual de Poincaré de  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[p]$ , respectivamente. Considerando positiva a orientação anti-horário, temos que  $A \cap B = p$  é orientado positivamente, e  $B \cap A = -p$  é orientada negativamente. Assim, pelo teorema 1.5.4, temos

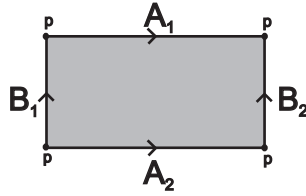
$$[A]^* \cup [B]^* = [A \cap B]^* = [p]^* \quad \text{e} \quad [B]^* \cup [A]^* = [B \cap A]^* = [-p]^* = -[p]^*.$$

Por outro lado,

$$[A]^* \cup [A]^* = [B]^* \cup [B]^* = 0$$

Nas condições do Teorema 1.5.4, para calcular  $[A]^* \cup [A]^*$ , precisamos calcular o número de intersecções de duas subvariedades  $A_1$  e  $A_2$ , que representam a mesma classe  $[A]$  e se interceptam transversalmente. Não podemos escolher  $A_1 = A_2$ , mas podemos escolher  $A_1$  e  $A_2$  paralelos, como nesse caso, logo  $A_1$  e  $A_2$  não se interceptam. Analogamente, para calcular  $[B]^* \cup [B]^*$ , utilizamos  $B_1$  e  $B_2$  que representam a mesma classe  $[B]$  (vide figura abaixo).





## 1.6 Representação de grupos finitos

**Definição 1.6.1.** *Sejam  $G$  um grupo e  $V$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Uma **representação de  $G$  em  $V$**  é um homomorfismo  $\pi$  de  $G$  no grupo das transformações lineares invertíveis de  $V$ ,  $\pi$  é uma representação sobre  $\mathbb{F}$  e  $V$  é chamado o espaço representação de  $\pi$ .*

Se  $V$  é de dimensão finita (e neste caso dizemos que  $\pi$  é de dimensão finita), então a dimensão de  $V$  é chamada de *grau* de  $\pi$ . A representação  $\pi$  é chamada de ‘faithful’ se é injetora.

**Definição 1.6.2.** *Se  $\psi$  é uma representação de  $G$  em um espaço vetorial  $W$  sobre o mesmo corpo  $\mathbb{F}$ , então  $\pi$  e  $\psi$  são **equivalentes** se existe um isomorfismo  $f : V \rightarrow W$  tal que  $f \circ \pi(g) = \psi(g) \circ f$  para todo  $g \in G$ .*

**Definição 1.6.3.** *Se  $U \subseteq V$  é um subespaço  $\pi(G)$  – invariante, então  $\pi'(g) : u \mapsto \pi(g)u$  define uma representação  $\pi' : G \rightarrow U$ . Representações  $\pi'$  desta forma são chamadas de **sub-representações de  $\pi$** . Uma sub-representação  $\pi'$  em  $U$  é **própria** se  $U$  é um subespaço próprio de  $V$ , isto é, se  $0 \subsetneq U \subsetneq V$ . A representação  $\pi$  é chamada **irredutível** se não possui sub-representações próprias.*

**Definição 1.6.4.** *Se  $\{\pi_i\}$  são representações em espaços vetoriais  $\{V_i\}$  sobre  $\mathbb{F}$ , então a soma direta  $\oplus \pi_i$  é a representação na soma direta  $\oplus V_i$  dada por  $(\oplus \pi_i)(g) : \oplus v_i \rightarrow \oplus \pi_i(g)v_i, v_i \in V_i$ . A representação  $\pi$  é **totalmente irredutível** se é equivalente a uma soma direta de representações irredutíveis.*

Consideremos agora um grupo finito  $G$  de ordem  $N$  e representações de  $G$  sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$  ou sobre o corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Uma representação sobre  $\mathbb{R}$  (respectivamente sobre  $\mathbb{C}$ ) é chamada representação real (respectivamente complexa). Se uma representação complexa  $\pi$  é equivalente a  $\sigma$ , para alguma representação real  $\sigma$ , então cometeremos um abuso de linguagem e diremos que  $\pi$  é equivalente a uma representação real.

**Definição 1.6.5.** *As isometrias lineares  $f : V \rightarrow V$  formam um grupo, chamado **grupo ortogonal de  $V$  no caso real e grupo unitário de  $V$  no caso complexo**. Se  $V$  é real (respectivamente complexo), então uma representação de  $G$  em  $V$  é chamada **representação ortogonal***

(respectivamente representação unitária) se sua imagem está contida no grupo ortogonal (respectivamente unitário) de  $V$ . Se  $V$  e  $W$  são reais (respectivamente complexos) e se  $\sigma$  e  $\tau$  são representações de  $G$  em  $V$  e  $W$ , então  $\sigma$  e  $\tau$  são ortogonalmente equivalentes (respectivamente unitariamente equivalentes) se existe uma isometria linear  $f : V \rightarrow W$  tal que  $f \circ \sigma(g) = \tau(g) \circ f$ , para todo  $g \in G$ , e neste caso,  $\sigma$  e  $\tau$  são equivalentes.

**Definição 1.6.6.** Se  $\pi$  é uma representação de um grupo  $G$  e se  $1 \neq g \in G$  implica que  $\pi(g)$  não tem  $+1$  como autovalor, então  $\pi$  é livre de ponto fixo. Um grupo livre de ponto fixo é um grupo finito que possui uma representação livre de ponto fixo.

**Proposição 1.6.7.** Se  $G$  é um grupo livre de ponto fixo que atua na esfera  $S^n$  de dimensão par então  $G = \mathbb{Z}_2$ .

**Demonstração:** (10), proposição 2.6. □

**Observação 1.6.8.** Se  $\pi$  é equivalente a uma representação livre de ponto fixo, então  $\pi$  é livre de ponto de fixo. Se  $\pi$  é livre de ponto fixo, então  $\pi$  é 'faithful' e  $\pi$  é uma soma direta de representações irredutíveis livres de ponto fixo. Se  $\{\pi_i\}$  são livres de ponto fixo, então  $\bigoplus \pi_i$  é livre de ponto fixo.

**Definição 1.6.9.** Seja  $G$  um grupo finito que age livremente sobre a esfera de dimensão  $i$ , ou seja  $S^i$ , chamamos o espaço quociente

$$M = \frac{S^i}{G},$$

de forma espacial esférica de dimensão  $i$ .

**Definição 1.6.10.** Sejam  $G$  um grupo de ordem  $N$  e  $p$  um número primo, então um  $p$ -grupo é um grupo no qual a ordem de todo elemento é uma potência de  $p$ .

Assim, se  $H$  é um subgrupo de  $G$  de ordem  $p^\alpha$ , então  $p^\alpha$  divide  $N$  e  $H$  é um  $p$ -subgrupo de  $G$ . Além disso, se  $p^\alpha$  é a maior potência de  $p$  que divide  $N$ , então  $H$  é chamado de  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$ .

**Definição 1.6.11.** Sejam  $G$  um grupo finito e  $p, q$  primos. Se todo subgrupo de ordem  $pq$  em  $G$  é cíclico, dizemos que  $G$  satisfaz a  $pq$ -condição.

**Teorema 1.6.12.** Seja  $G$  um grupo finito de ordem  $N$  no qual todo subgrupo de Sylow é cíclico. Então  $G$  é gerado por  $\{A, B\}$  com relações

$$A^m = B^n = 1, \quad BAB^{-1} = A^r, \quad N = mn, \quad \text{mdc}((r-1)n, m) = 1, \quad r^n = 1 \pmod{m}. \quad (1.6.1)$$

O grupo comutador  $G'$  é gerado por  $\{A\}$  e o grupo quociente  $G/G'$  é gerado pela classe  $\{BG'\}$ . Seja  $d$  a ordem de  $r$  no grupo multiplicativo de resíduos módulo  $m$  dos inteiros primos com  $m$ . Então  $d$  divide  $n$  e  $G$  satisfaz todas as  $pq$ -condições se, e somente se,  $n/d$  é divisível por todo divisor primo de  $d$ .

Reciprocamente, qualquer grupo dado por 1.6.1 tem ordem  $N$  e todo subgrupo de Sylow é cíclico. Também são equivalentes: (1)  $G$  é cíclico, (2)  $A = 1$ , (3)  $r = 1$ , (4)  $d = 1$ .

**Demonstração:** (23), Teorema 5.4.1. □

Seja  $H$  um grupo, chamamos de grupo derivado o subgrupo comutador  $H' = H^{(1)} = [H, H]$ . Por definição  $H^{(m+1)} = [H^{(m)}, H^{(m)}]$  e

$$H \supset H' \supset H'' \supset \dots \supset H^{(k)} \supset H^{(k+1)} \supset \dots$$

é chamada série derivada. Dizemos que  $H$  é solúvel se  $H^{(m)} = \{1\}$  para algum  $m$ .

**Lema 1.6.13.** *Seja  $G$  um grupo finito com todo subgrupo de Sylow cíclico então  $G$  é solúvel.*

**Demonstração:** (23), lema 5.4.3. □

O seguinte teorema foi provado por Vincent (22, Théorème III\*), utilizando cálculos diretos ao invés de representações induzidas do subgrupo  $H$ ,  $\phi$  denota a função de Euler e todas as representações são complexas de dimensão finita.

**Teorema 1.6.14.** *Seja  $G$  um grupo de ordem  $N$  que satisfaz todas as  $pq$ -condições e tem todo subgrupo de Sylow cíclico. Em outras palavras,  $G$  tem geradores  $\{A, B\}$  com relações  $A^m = B^n = 1, BAB^{-1} = A^r, N = mn = mn'd$  e  $\text{mdc}((r-1)n, m) = 1$ , onde  $d$  é a ordem de  $r$  em  $K_m$  e todo divisor primo de  $d$  divide  $n'$ . Seja  $H$  o subgrupo de  $G$  gerado por  $\{A, B^d\}$ . Então  $H$  é subgrupo cíclico normal de ordem  $mn'$  e índice  $d$  em  $G$ , gerado por  $\{AB^d\}$  e suas representações irredutíveis são de grau 1 e dadas por*

$$\sigma_k(AB^d) = e^{2\pi i k / mn'}.$$

Seja  $\pi_k$  a representação de  $G$  induzida por  $\sigma_k$ , necessariamente de grau  $d$ . Então  $\pi_k$  é equivalente a  $\pi_l$  se, e somente se,  $k \equiv l \pmod{n'}$  e  $k \equiv r^u l \pmod{m}$  com  $0 \leq u < d$ . Além disto, são equivalentes:

- (i)  $\pi$  é uma representação irredutível 'faithful' de  $G$ .
- (ii)  $\pi$  é uma representação irredutível livre de ponto fixo de  $G$ .
- (iii)  $\pi$  é equivalente a alguma  $\pi_k$ , com  $\text{mdc}(k, N) = 1$ .

Em particular, as representações irredutíveis livres de ponto fixo de  $G$  têm grau  $d$  e são em quantia de  $\phi(N)/d^2$ .

**Demonstração:** (23), Teorema 5.5.1. □

**Teorema 1.6.15.** *Seja  $G$  um grupo de ordem  $N$  que tem geradores  $\{A, B\}$  com relações  $A^m = B^n = 1$ ,  $BAB^{-1} = A^r$ ,  $N = mn = mn'd$ , onde  $d$  é a ordem de  $r$  em  $K_m$  e  $\text{mdc}((r-1)n, m) = 1$ , além disso,  $G$  satisfaz todas as  $pq$ -condições e tem todo subgrupo de Sylow cíclico. Dados  $k, l \in \mathbb{Z}$  com  $\text{mdc}(k, m) = 1 = \text{mdc}(l, n)$ , definimos*

$$\pi_{k,l}(A) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{m}} & & & & \\ & e^{\frac{2\pi kri}{m}} & & & \\ & & e^{\frac{2\pi kr^2 i}{m}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\frac{2\pi kr^{d-1} i}{m}} \end{pmatrix} e$$

$$\pi_{k,l}(B) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \\ e^{\frac{2\pi il}{n}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dados  $s, t, u \in \mathbb{Z}$  com  $\text{mdc}(s, m) = 1 = \text{mdc}(t, n)$  e  $t \equiv 1 \pmod{d}$ , definimos  $\psi_{s,t,u}(A) = A^s$  e  $\psi_{s,t,u}(B) = B^t A^u$ . Então:

1. As representações complexas irredutíveis de  $G$  são exatamente as  $\pi_{k,l}$  de grau  $d$  e livres de ponto fixo.
2. Os automorfismos de  $G$  são exatamente os  $\psi_{s,t,u}$ .
3.  $\pi_{k,l}\psi_{s,t,u}$  é equivalente a  $\pi_{sk,tl}$  e  $\pi_{a,b}$  é equivalente a  $\pi_{a',b'}$  se, e somente se,  $b' \equiv b \pmod{n'}$  e  $a' \equiv ar^c \pmod{m}$ , para algum inteiro  $c$  com  $0 \leq c < d$ .
4. Se  $G$  é cíclico então  $\pi_{k,l}$  é equivalente a sua conjugada se, e somente se,  $N \leq 2$ , e neste caso  $\pi_{k,l}$  é equivalente a uma representação real. Se  $G$  não é cíclico, então  $\pi_{k,l}$  não é equivalente a uma representação real e  $\pi_{k,l}$  é equivalente a sua conjugada se, e somente se,  $n' = 2$ .

**Demonstração:** (23), Teorema 5.5.6. □

**Observação 1.6.16.** Neste trabalho, utilizaremos a notação transposta para  $\pi_{k,l}(A)$  e  $\pi_{k,l}(B)$ .

**Teorema 1.6.17.** Seja  $G$  um grupo solúvel finito. Então todo subgrupo abeliano de  $G$  é cíclico se, e somente se,  $G$  é isomorfo a um dos seguinte grupos

Tipo	Geradores	Relações	Condições	Ordem
I	$A, B$	$A^m = B^n = 1$ $BAB^{-1} = A^r$	$m \geq 1, n \geq 1,$ $\text{mdc}(n(r-1), m) = 1$ $r^n \equiv 1 \pmod{m}$	$mn$
II	$A, B, R$	Como em I; e também $R^2 = B^{\frac{n}{2}},$ $RAR^{-1} = A^l, RBR^{-1} = B^k$	Como em I; e também $l^2 \equiv r^{k-1} \equiv 1 \pmod{m}$ $n = 2^u v, u \geq 2,$ $k \equiv -1 \pmod{2^u}$ $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$	$2mn$
III	$A, B, P, Q$	Como em I; e também $P^4 = 1, P^2 = Q^2 = (PQ)^2,$ $AP = PA, AQ = QA$ $BPB^{-1} = Q, BQB^{-1} = PQ$	Como em I; e também $n \equiv 1 \pmod{2}$ $m \equiv 0 \pmod{3}$	$8mn$
IV	$A, B, P, Q, R$	Como em III; e também $R^2 = P^2, RPR^{-1} = QP,$ $RQR^{-1} = Q^{-1}$ $RAR^{-1} = A^l, RBR^{-1} = B^k$	Como em III; e também $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$ $k \equiv -1 \pmod{3}$ $r^{k-1} \equiv l^2 \equiv 1 \pmod{m}$	$16mn$

Além disso, as seguintes condições são equivalentes

1.  $G$  tem uma representação complexa livre de ponto fixo;
2.  $G$  satisfaz todas as pq-condições;
3.  $G$  é do tipo I, II, III ou IV acima, com a seguinte condição adicional: se  $d$  é a ordem de  $r$  no grupo multiplicativo de resíduos módulo  $m$ , dos inteiros primos com  $m$ , então  $\frac{n}{d}$  é divisível por todo divisor primo de  $d$ .

**Demonstração:** (23), Teorema 6.1.11

□

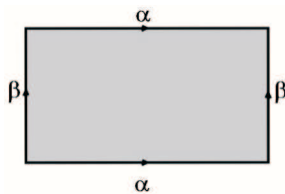
## 1.7 Região fundamental

**Definição 1.7.1.** Dada uma ação de um grupo finito  $G$  em um espaço topológico  $X$ , por homeomorfismos, uma **região fundamental** para esta ação é um subconjunto conexo  $\mathfrak{F}$  de  $X$ ,

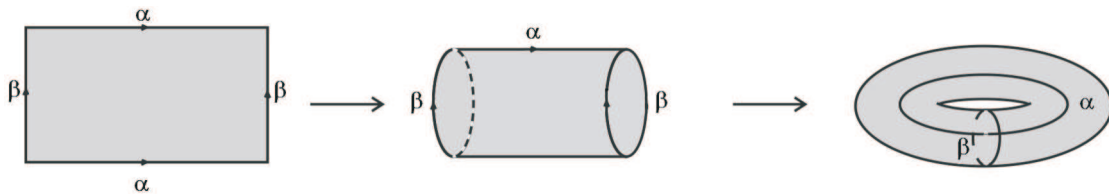
que contém representantes de todas as classes de  $X/G$ , com repetições permitidas apenas na fronteira de  $\mathfrak{F}$ , ou seja, pontos diferentes do interior de  $\mathfrak{F}$  representam classes diferentes de  $X/G$ .

**Observação 1.7.2.**  $X/G$  pode ser obtida de  $\mathfrak{F}$  com identificações apenas na fronteira de  $\mathfrak{F}$ ,  $X = \bigcup_g g\mathfrak{F}$  e  $g\mathfrak{F} \cap g'\mathfrak{F}$  tem interior vazio para todo  $g \neq g' \in G$ .

**Exemplo 1.7.3.** Sejam  $X = \mathbb{R}^2$  e  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  agindo em  $X$  por translações, o quociente  $X/G$  é o toro 2-dimensional. Uma região fundamental para essa ação é representada pela figura abaixo.



Abaixo as identificações nas fronteiras da região fundamental, de modo a obter  $X/G = T^2$ .



## 1.8 Produto direto e semidireto

**Definição 1.8.1.** Se  $H$  e  $K$  são grupos, então o seu produto direto, denotado por  $H \times K$ , é o grupo formado por todos os elementos ordenados  $(h, k)$ , onde  $h \in H$  e  $k \in K$ , com a seguinte operação

$$(h, k) \cdot (h', k') = (hh', kk').$$

**Teorema 1.8.2.** Seja  $G$  um grupo com subgrupos normais  $H$  e  $K$ . Se  $HK = G$  e  $H \cap K = 1$ , então  $G \simeq H \times K$ .

**Demonstração:** (18), Teorema 2.29. □

**Definição 1.8.3.** Seja  $K$  um subgrupo (não necessariamente normal) de  $G$ . Então um subgrupo  $Q$  de  $G$  é um complemento de  $K$  em  $G$  se  $K \cap Q = 1$  e  $KQ = G$ .

**Definição 1.8.4.** Um grupo  $G$  é o produto semidireto de  $K$  por  $Q$ , denotado por  $G = K \rtimes Q$ , se  $K$  é um subgrupo normal de  $G$  e tem complemento  $Q_1 \simeq Q$ .

**Observação 1.8.5.** Se  $Q_1$  é um subgrupo normal, então pelo teorema 1.8.2 temos que  $G$  é o produto direto  $K \times Q_1$ .

**Lema 1.8.6.** Se  $G$  é um produto semidireto de  $K$  por  $Q$ , então existe um homomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$ , definido por

$$\varphi_x(a) = xax^{-1},$$

para todo  $x \in Q$  e  $a \in K$ .

Além disso, para todo  $x, y, 1 \in Q$  e  $a \in K$ ,

$$\varphi_1(a) = a \text{ e } \varphi_x(\varphi_y(a)) = \varphi_{xy}(a).$$

**Demonstração:** (18), Lema 7.21. □

**Definição 1.8.7.** Sejam  $Q$  e  $K$  grupos, e seja  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$  um homomorfismo. Um produto semidireto  $G$  de  $K$  por  $Q$  realiza  $\varphi$  se, para todo  $x \in Q$  e  $a \in K$ ,

$$\varphi_x(a) = xax^{-1}.$$

**Definição 1.8.8.** Considere os grupos  $Q$  e  $K$ , e um homomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$ , defina  $G = K \rtimes_{\varphi} Q$  como sendo o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, x) \in K \times Q$  com a operação

$$(a, x).(b, y) = (a\varphi_x(b), xy).$$

**Teorema 1.8.9.** Considere os grupos  $Q$  e  $K$ , e um homomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$ , então  $G = K \rtimes_{\varphi} Q$  é um produto semidireto de  $K$  por  $Q$  que realiza  $\varphi$ .

**Demonstração:** (18), Teorema 7.22. □

**Teorema 1.8.10.** Se  $G$  é um produto semidireto de  $K$  por  $Q$ , então existe um homomorfismo  $\varphi : Q \rightarrow \text{Aut}(K)$  com  $G \simeq K \rtimes_{\varphi} Q$ .

**Demonstração:** (18), Teorema 7.23. □

## 1.9 Grupo de Whitehead de um grupo

Seja  $R$  um anel associativo com unidade. O grupo (aditivo) de todas as matrizes  $n \times n$  não singulares sobre  $R$  será denotado por  $Gl(n, R)$  (por vezes usaremos uma estrutura de anel). Indetificamos cada  $M \in Gl(n, R)$  com a matriz

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl(n+1, R)$$

e obtemos inclusões  $Gl(1, R) \subset Gl(2, R) \subset \dots$ . A união é chamada *grupo linear geral infinito*, denotado por  $Gl(R)$ .

Uma matriz é chamada *elementar* se coincide com a identidade exceto para um único elemento fora da diagonal principal.

**Lema 1.9.1.** *O subgrupo  $E(R) \subset Gl(R)$  gerado por todas as matrizes elementares é igual ao subgrupo comutador de  $Gl(R)$ .*

**Demonstração:** (11), Lema 1.1. □

Segue que  $E(R)$  é um subgrupo normal de  $Gl(R)$ , com grupo quociente comutativo. O quociente será chamado de *grupo de Whitehead*

$$K_1(R) = \frac{Gl(R)}{E(R)}.$$

Geralmente pensamos em  $K_1(R)$  como um grupo aditivo.

**Definição 1.9.2.** *Seja  $[-1] \in K_1(R)$  o elemento de ordem 2 correspondendo à unidade  $(-1) \in Gl(1, R) \subset Gl(R)$ . O quociente*

$$\widetilde{K}_1(R) = \frac{K_1(R)}{\{[1], [-1]\}}$$

*será chamado de grupo de Whitehead reduzido de  $R$ .*

A classe  $[A]$  em  $K_1(R)$  ou  $\widetilde{K}_1(R)$  é chamada de *torção* da matriz  $A$ , e a projeção é denotada por  $\tau : Gl(R) \rightarrow K_1(R)$  ou  $\tau : Gl(R) \rightarrow \widetilde{K}_1(R)$ .

Seja  $G$  um grupo e  $R$  um anel, considere  $RG$  o anel grupo. Então claramente  $G$  está contido no grupo das unidades  $(RG)^\times = Gl(1, RG) \subset Gl(RG)$ . Sejam  $i : G \rightarrow Gl(R)$  o homomorfismo inclusão, e  $\tau : Gl(R) \rightarrow \widetilde{K}_1(RG)$ , fazendo a composição  $\tau \circ i$ , temos um homomorfismo  $G \rightarrow \widetilde{K}_1(RG)$ , o qual denotamos pela mesma letra  $\tau$  (desde que é apenas uma restrição).

**Definição 1.9.3.** *O grupo de Whitehead de um anel grupo  $RG$  é o grupo abeliano*

$$Wh(RG) = \widetilde{K}_1(RG)/\tau(G).$$

*Em particular, o grupo de Whitehead de um grupo  $G$  é o grupo de Whitehead do anel grupo  $\mathbb{Z}G$ , e será denotado por  $Wh(G)$ . Consideramos  $w : \widetilde{K}_1(RG) \rightarrow Wh(RG)$ , a projeção natural.*



O grupo  $Wh(RG)$  aparece na seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow G/[G, G] \rightarrow \widetilde{K}_1(RG) \rightarrow Wh(RG) \rightarrow 0;$$

desde que  $K_1(RG) = Gl(RG)/[Gl(RG), Gl(RG)]$ .

### 1.9.1 Torção de Whitehead de um complexo de cadeia

Suponha que  $R$  possui número de base invariante, ou seja, se  $M$  é qualquer módulo sobre  $R$  finitamente gerado, então qualquer duas bases de  $M$  tem a mesma cardinalidade. Note que essa afirmação é satisfeita se  $R = \mathbb{Z}G$  é o anel grupo de algum grupo  $G$  (vide (3), 9.2) e se  $R$  é um anel de divisão (vide (3), 9.1).

Todos os módulos considerados são  $R$ -módulos à esquerda finitamente gerados. Seja  $M$  um  $R$ -módulo livre. Sejam  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  e  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  duas bases de  $M$ . Denotamos por  $(y/x)$  a matriz quadrada de ordem  $m$  não singular sobre  $R$ , definida como sendo a matriz  $A$  de mudança de base, isto é,  $(y/x) = A$ , onde  $y_j = A_{j,k}x_k$ , e  $[y/x]$  representa a classe de  $A$  em  $\widetilde{K}_1(R)$ . Seja

$$C : \quad C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0,$$

o complexo de cadeias de comprimento  $m$  de  $R$ -módulos livres (de dimensão finita). Considere  $Z_q = Ker \partial_q$ ,  $B_q = Im \partial_{q+1}$ , e  $H_q(C) = Z_q/B_q$  os grupos de homologia de  $C$ . A fim de definirmos a torção de  $C$ , assumimos que  $B_q$  é um  $R$ -módulo livre para cada  $q$ . Note que se  $R$  é um anel de divisão (em particular um corpo), qualquer módulo sobre  $R$  é livre, e cada submódulo de um módulo livre finitamente gerado, sobre um domínio de ideias principais é livre e finitamente gerado. Consideremos que  $H_q$  é um  $R$ -módulo livre para todo  $q$ .

Para cada  $q$ , fixe uma base  $c_q$  para  $C_q$ , e um conjunto de elementos linearmente independentes  $h_q$  em  $Z_q$ , cuja projeção  $\overline{h}_q$  é base de  $H_q$ . Seja  $b_q$  um conjunto de elementos de  $C_q$  tal que  $\{\partial_q(b_q)\}$  é uma base de  $B_{q-1}$  (claramente isto implica que  $b_q$  é linearmente independente). Usando as inclusões  $0 \subseteq B_q \subseteq Z_q \subseteq C_q$  e os isomorfismos  $Z_q/B_q \simeq H_q$  e  $C_q/Z_q \simeq B_{q-1}$ , vemos que o conjunto de elementos  $\{\partial_{q+1}(b_{q+1}), h_q, b_q\}$  é uma base para  $C_q$ .

**Definição 1.9.4.** *Seja  $C$  um complexo de cadeias de  $R$ -módulos livres. Fixe uma base graduada  $c = \{c_q\}$  e  $\overline{h} = \{\overline{h}_q\}$ . Então a torção de Whitehead do complexo  $C$  com relação a base  $c$  e  $\overline{h}$  é definida como sendo a classe*

$$\tau_W(C; \overline{h}) = \sum_{q=0}^m (-1)^q [\partial_{q+1}(b_{q+1}), h_q, b_q/c_q],$$

em  $\tilde{K}_1(R)$ .

A torção  $\tau_W(C; \bar{h})$  não depende da escolha da base graduada  $b = \{b_q\}$ , (vide (11), pg. 365). Entretanto,  $\tau_W(C; \bar{h})$  depende da base graduada  $\bar{h} = \{\bar{h}_q\}$  da homologia, e não depende da escolha dos ciclos  $h_q \in Z_q$ . Para simplificar a notação escrevemos  $\tau_W(C; h)$  ao invés de  $\tau_W(C; \bar{h})$ .

**Definição 1.9.5. (*R* Torção de um Complexo de Cadeias):** Se o anel  $R$  é comutativo, a torção de Reidemeister do complexo  $C$  com relação à base graduada  $\bar{h} = \{\bar{h}_q\}$  é

$$\tau_R(C; \bar{h}) = \prod_{q=0}^m \det(\partial_{q+1}(b_{q+1}), h_q, b_q/c_q)^{(-1)^q} \in R^\times / \{\pm 1\}.$$

Novamente, para facilitar a notação, escreveremos  $\tau_R(C; h)$ .

# Formas espaciais esféricas metacíclicas

Neste capítulo, apresentamos os grupos split metacíclicos e suas relações. Estudamos a ação destes grupos nas esferas de dimensão ímpar, construímos uma região fundamental e um complexo de cadeias coerente com tal ação a fim de lidarmos com o espaço quociente, o qual chamaremos de forma espacial esférica metacíclica.

## 2.1 Grupos split metacíclicos

Denotaremos por  $D_{(2h+1),2^t}$ , com  $t \geq 2$  e  $h \geq 0$ , o grupo split metacíclico de ordem  $(2h+1) \cdot 2^t$ , com apresentação (26, 2.2)

$$D_{(2h+1),2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle. \quad (2.1.1)$$

O caso trivial  $t = h = 0$  não será considerado. O caso  $h = 0$  é o grupo cíclico  $C_{2^t}$  ( $\mathbb{Z}/2^t$  na notação multiplicativa). O caso  $t = 0$  é o grupo cíclico  $C_{2h+1}$  ( $\mathbb{Z}/(2h+1)$  na notação multiplicativa). No caso  $t = 1$ , temos o grupo diedral  $D_{(2h+1)}$ , considerações sobre tal grupo podem ser vistas em (6). No caso  $t = 2$ , temos  $Q_{4,(2h+1)}$ , ou seja, o grupo dos quatérnios generalizado, cujas ações de  $Q_{4,(2h+1)}$  nas esferas já foi estudado no trabalho (10). Como todos esses casos já foram considerados na literatura, iremos trabalhar com  $t \geq 3$  e  $h \geq 1$ .

Os grupos split metacíclicos tem a seguinte estrutura de produto semidireto (21, 5.2)

$$D_{(2h+1),2^t} \simeq C_{2h+1} \rtimes_{\varphi} C_{2^t},$$

com  $\varphi : C_{2^t} \rightarrow \text{Aut}(C_{2h+1})$ , definido por  $\varphi(1) = -1$ . Isso é mostrado pela sequência exata curta abaixo, a qual cinde:

$$1 \longrightarrow C_{2h+1} \xrightarrow{i} D_{(2h+1),2^t} \xrightleftharpoons[p]{p} C_{2^t} \longrightarrow 1,$$

onde  $i$  é a inclusão do subgrupo normal gerado por  $i(x) = x$ ,  $p(y) = y$  (o gerador de  $C_{2^t}$ ),  $p(x) = 1$ , e a aplicação pela qual a sequência cinde é  $s(y) = y$ .

Note que  $(D_{(2h+1),2^t})_{ab} = C_{2^t}$ .

Podemos obter algumas relações úteis para os grupos split metacíclicos:

$$\begin{array}{lll} yx^s = x^{-s}y & y^{2^s}x = xy^{2^s} & y^{2^{s+1}}x = x^{-1}y^{2^{s+1}} \\ xyx = y & x^s y x^s = y & yxy = x^{-1}y^2 \end{array}$$

Listando os elementos do grupo, temos

$$D_{(2h+1),2^t} = \{1, x, x^2, \dots, x^{2h}, y, xy, x^2y, \dots, x^{2h}y, \dots, x^{2h}y^{2^t-2}, y^{2^t-1}, xy^{2^t-1}, x^2y^{2^t-1}, \dots, x^{2h}y^{2^t-1}\},$$

ou seja,  $|D_{(2h+1),2^t}| = (2h+1) \cdot 2^t$ .

## 2.2 Região fundamental para a ação de $D_{(2h+1),2^t}$ em $S^3$

Os grupos  $D_{(2h+1),2^t}$  são grupos do tipo  $I$  de acordo com a tabela do teorema 1.6.17, com  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $m = 2h+1$ ,  $n = 2^t$ ,  $r = -1$ ,  $d = 2$ ,  $n' = 2^{t-1}$ , e satisfazem as três condições dadas abaixo da tabela, onde  $d$  e  $n'$  estão definidos no teorema 1.6.14. Então, pelo teorema 1.6.15 as representações complexas irredutíveis de  $D_{(2h+1),2^t}$  tem grau 2, são livres de ponto fixo, e são dadas explicitamente por (note que usamos a notação transposta a de (23)):

$$\pi_{k,l}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{2h+1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi ki}{m}} \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_{k,l}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi il}{2^{t-1}}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $k$  e  $l$  são inteiros com  $\text{mdc}(k, 2h+1) = \text{mdc}(l, 2) = 1$ . Pelo mesmo teorema, todos os possíveis automorfismos de  $D_{(2h+1),2^t}$  são da seguinte forma

$$\varphi_{a,b} : \begin{cases} x \mapsto x^a, \\ y \mapsto y^b x^c, \end{cases}$$

com inteiros  $a, b, c$  tal que  $\text{mdc}(a, 2h+1) = \text{mdc}(b, 2) = 1$  e  $b \equiv 1 \pmod{2}$ . Além disso, a composição  $\pi_{k,l}\varphi_{a,b,c}$  é equivalente a  $\pi_{ak,bl}$ , e  $\pi_{k,l}$  é equivalente a  $\pi_{k',l'}$  se, e somente se,  $l' \equiv l \pmod{2^{t-1}}$  e  $k' \equiv \pm k \pmod{2h+1}$ .

Esses fatos nos permitem determinar as representações complexas irredutíveis não equivalentes de  $D_{(2h+1),2^t}$ , as quais são

$$\pi_{k,l} : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2, \mathbb{C}),$$

$$\pi_{k,l} : \begin{cases} x \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{2h+1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi ki}{2h+1}} \end{pmatrix}, \\ y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi li}{2^{t-1}}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

com  $k = 1, 2, \dots, h$ ,  $l = 1, 3, \dots, 2^{t-1} - 1$  e  $\text{mdc}(k, 2h+1) = \text{mdc}(l, 2) = 1$ .

Note que  $l = 1, 3, \dots, 2^{t-1} - 1$ .

Como existem  $2^{t-1}$  números de 1 a  $2^{t-1} - 1$ , e queremos apenas os números ímpares nesse intervalo então, obtemos que o número de representações com  $l$  distintos é  $\frac{2^{t-1}}{2} = 2^{t-2}$ .

Todas essas representações são livres de ponto fixo.

Seja  $S^3$  a esfera unitária no espaço real de dimensão 4.

Existem diferentes ações do grupo  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^3$  resultando em formas espaciais esféricas. Essas ações são classificadas no teorema 1.6.15.

Como de costume, identificamos  $\mathbb{C}^2$  com  $\mathbb{R}^4$  de modo que uma cópia de  $\mathbb{C}$  seja gerada pelos vetores canônicos  $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$  e a outra pelos vetores canônicos  $e_3, e_4 \in \mathbb{R}^2$ . Deste modo, o plano gerado por  $\{e_1, e_2\}$  será chamado de *plano-12* e o plano gerado por  $\{e_3, e_4\}$  será chamado de *plano-34*. Note que o *plano-12* e o *plano-34* interceptam-se apenas na origem.

Sejam  $C_1, C_2$  subconjuntos das circunferências de raio 1 centradas na origem contidas no *plano-12* e no *plano-34*, respectivamente. Dados dois pontos  $A \in C_1$  e  $B \in C_2$ , existem  $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$  tais que  $A = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0, 0)$  e  $B = (0, 0, \cos \beta, \sin \beta)$ , ou seja, as únicas entradas não nulas de  $A$  (resp.  $B$ ) são 1, 2 (resp. 3, 4). Assim, existe um plano em  $\mathbb{C}^2$  passando pela origem e por  $A, B$ , interceptando  $S^3$  em uma circunferência de raio 1. Como os vetores  $\vec{A}, \vec{B}$  são ortogonais, então o menor arco que liga  $A$  a  $B$  tem comprimento  $\pi/2$ . Tais arcos serão usados para a descrição da região fundamental.

**Definição 2.2.1.** Na situação descrita acima, o conjunto de todos os arcos de comprimento  $\pi/2$  que ligam pontos de  $C_1$  com pontos de  $C_2$  será chamado de ‘curved join’ e denotado por  $C_1 \tilde{*} C_2$ .

**Observação 2.2.2.** Difere do ‘join’ convencional pois este último é construído através de segmentos e não de arcos.

Descreveremos o processo de construção da região fundamental, a qual sempre denotaremos por  $\mathfrak{F}_{|G|;k,l}$ , onde  $|G|$  indica a ordem do grupo split metacíclico e  $k, l$  a representação escolhida.

**Afirmção 2.2.1.** A imagem de  $\langle \pi_{1,l}(x) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$  é igual a imagem de  $\langle \pi_{k,l}(x) \rangle$  com  $k \neq 1$  em  $U(2, \mathbb{C})$ , onde

$$\pi_{1,l}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{(2h+1)}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{(2h+1)}} \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_{k,l}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{(2h+1)}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi ki}{(2h+1)}} \end{pmatrix}.$$

De fato,  $\text{mdc}(k, 2h+1) = 1$ , logo  $\pi_{1,l}(x)^k$  também é um gerador do subgrupo cíclico  $\langle \pi_{1,l}(x) \rangle$  de ordem  $2h+1$ .

Note que

$$\pi_{1,l}(x)^k = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{(2h+1)}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{(2h+1)}} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ki}{(2h+1)}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi ki}{(2h+1)}} \end{pmatrix} = \pi_{k,l}(x).$$

Temos que  $\langle \pi_{1,l}(x) \rangle = \langle \pi_{k,l}(x) \rangle$ .

Logo, a imagem de  $\langle \pi_{1,l}(x) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$  é igual a imagem de  $\langle \pi_{k,l}(x) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Afirmção 2.2.2.** A imagem de  $\langle \pi_{k,1}(y) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$  não é igual a imagem de  $\langle \pi_{k,l}(y) \rangle$  com  $l \neq 1$  em  $U(2, \mathbb{C})$ , onde

$$\pi_{k,1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \pi_{k,l}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi li}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fato,  $\text{mdc}(2^t, l) = 1$ , logo  $\pi_{k,1}(y)^l$  também é um gerador do subgrupo cíclico  $\langle \pi_{k,1}(y) \rangle$  de ordem  $2^t$ .

Agora, se  $\gamma$  for um número natural par

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\gamma = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi \gamma i}{2^t-1}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi \gamma i}{2^t-1}} \end{pmatrix},$$

se  $\gamma$  for um número natural ímpar, temos

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi(\gamma+1)i}{2^t-1}} \\ e^{\frac{\pi(\gamma-1)i}{2^t-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para a imagem de  $\langle \pi_{k,1}(y) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$  ser igual a imagem de  $\langle \pi_{k,l}(y) \rangle$  com  $l \neq 1$  em  $U(2, \mathbb{C})$ , deveria existir  $\gamma$  natural tal que  $\text{mdc}(2^t, \gamma) = 1$  e  $\pi_{k,1}(y)^\gamma = \pi_{k,l}(y)$

Mas,

$$\pi_{k,1}(y)^\gamma = \pi_{k,l}(y) \iff \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi(\gamma+1)i}{2^t-1}} \\ e^{\frac{\pi(\gamma-1)i}{2^t-1}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi li}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \gamma + 1 = 2l \\ \gamma - 1 = 0 \end{cases} \iff \gamma = l = 1.$$

Logo,  $\pi_{k,1}(y)^\gamma = \pi_{k,l}(y)$  se, e somente se,  $\gamma = l = 1$ .

Portanto, a imagem de  $\langle \pi_{k,1}(y) \rangle$  em  $U(2, \mathbb{C})$  é diferente da imagem de  $\langle \pi_{k,l}(y) \rangle$  com  $l \neq 1$  em  $U(2, \mathbb{C})$ .

□

Pelas afirmações acima, sem perda de generalidade, consideremos  $k = 1$ , já que a região fundamental não será alterada quando tivermos  $k \neq 1$ .

### 2.2.1 Ação de $D_{3,8}$ em $S^3$

Sejam  $h = 1$  e  $t = 3$  em (2.1.1), ou seja, o grupo split metacíclico

$$D_{3,8} = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2, y^3, \dots, x^2y^6, y^7, xy^7, x^2y^7\}$$

logo,  $|D_{3,8}| = 24$ .

Nas condições do teorema 1.6.15, temos  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $m = 3$ ,  $n = 8$ ,  $r = -1$ ,  $d = 2$ ,  $n' = 4$ . Note que para  $k = 1$ , temos dois possíveis valores para  $l$  que são 1 e 3. Ou seja,

$$\pi_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi i}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

que definem uma  $D_{3,8}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ , quando  $l = 1 = k$ . E quando  $l = 3$  e  $k = 1$  temos

$$\pi_{1,3}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,3}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{3\pi i}{2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

que também definem uma  $D_{3,8}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ .

Construiremos  $\mathfrak{F}_{24;1,l}$  para  $l = 1$  e  $l = 3$ . Iniciaremos com  $l = 1$ .

Seja  $\pi_{1,1} : D_{3,8} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.1). Ou equivalentemente,  $\pi_{1,1}(x), \pi_{1,1}(y) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$\pi_{1,1}(x) \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e$$

$$\pi_{1,1}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma base ordenada sobre  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{C}^2$  é  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ , e nesta base calculamos as ações de  $x, y, xy$  em cada  $e_i$ , obtendo

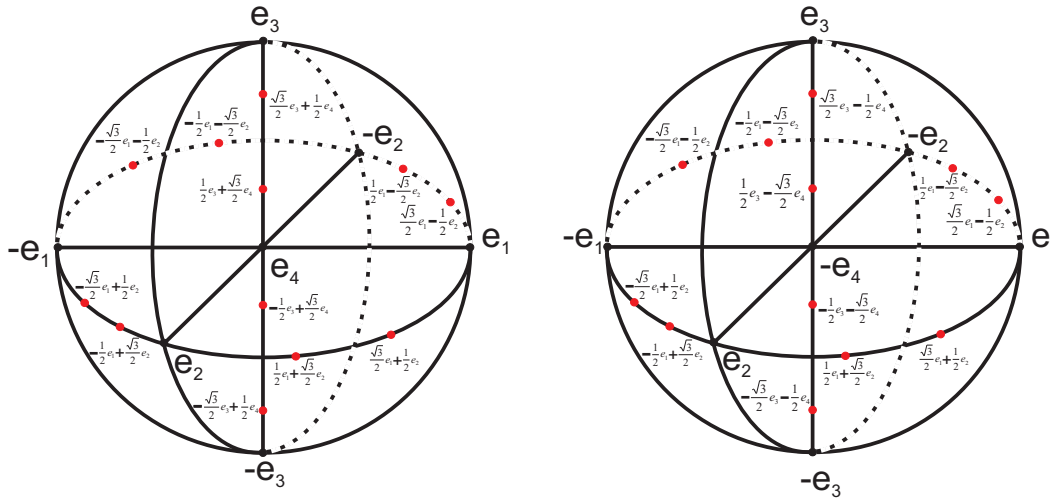
$$\begin{array}{lll} x \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 & y \cdot e_1 = e_3 & xy \cdot e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_4 \\ x \cdot e_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 & y \cdot e_2 = e_4 & xy \cdot e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4 \\ x \cdot e_3 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_4 & y \cdot e_3 = e_2 & xy \cdot e_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \\ x \cdot e_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4 & y \cdot e_4 = -e_1 & xy \cdot e_4 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 \end{array}$$

**Observação 2.2.3.** Notemos que a ação de  $x$  corresponde a uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  no sentido horário (resp. anti-horário) no plano-34 (resp. plano-12), a ação de  $y$  aplica o plano-12 no plano-34 e o plano-34 no plano-12 seguido de uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário, a ação de  $xy$  aplica o plano-12 no plano-34 seguido de uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  no sentido horário e a ação de  $xy$  aplica o plano-34 no plano-12 seguido de uma rotação de  $(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3})$  no sentido anti-horário.



**Observação 2.2.4.** O sentido anti-horário será denotado como positivo e o sentido horário como negativo.

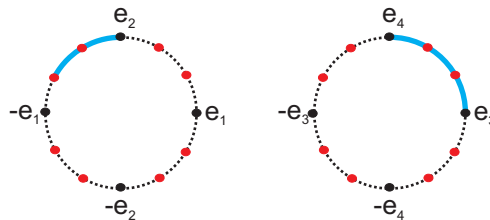
Calculando a ação de todos os elementos do grupo  $D_{3,8}$  em  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$  aparecem todos os pontos que estão na figura abaixo, que é uma representação tridimensional da esfera  $S^3$ .



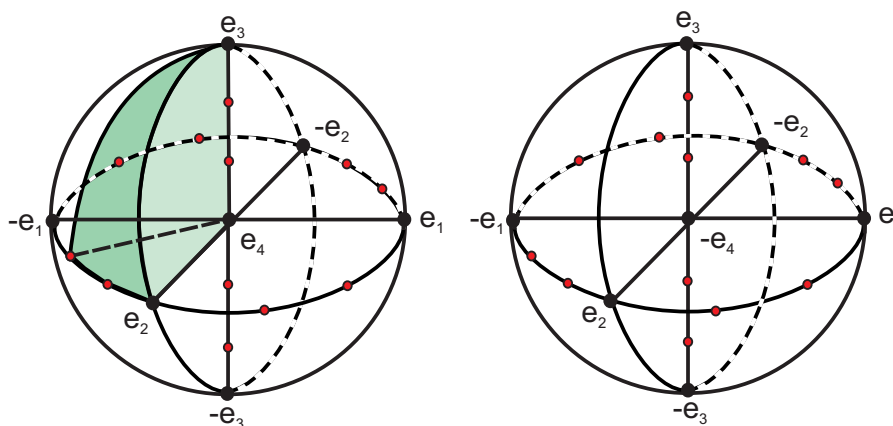
Queremos encontrar a região Fundamental da ação de  $D_{3,8}$  sobre  $S^3$  quando  $l = 1 = k$ , para isso devemos verificar que  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  cobre toda  $S^3$  e que dados  $g, g' \in D_{3,8}$ , com  $g$  e  $g'$  distintos, a ação de  $g$  e a ação de  $g'$  sobre  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  possuem interiores disjuntos. Para melhor visualização desse fato, usaremos o curved join.

Para a região fundamental cobrir toda  $S^3$ , basta fazermos uma conta simples envolvendo volume, ou seja, o volume da região fundamental dever ser igual ao volume da  $S^3$ , o qual denotamos por  $V_{S^3}$ , dividido pela ordem do grupo, pois assim quando aplicarmos cada elemento do grupo  $D_{3,8}$ , teremos que a região fundamental cobrirá toda a  $S^3$ , já que  $g\mathfrak{F} \cap g'\mathfrak{F}$  tem interior vazio, para todo  $g \neq g' \in D_{3,8}$ .

Uma maneira disso ocorrer seria tomarmos a região fundamental como a figura abaixo:



Essa figura representa  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  como  $[e_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2] \ast [e_3, e_4]$ , abaixo a visualização da região fundamental na representação tridimensional da esfera  $S^3$ .

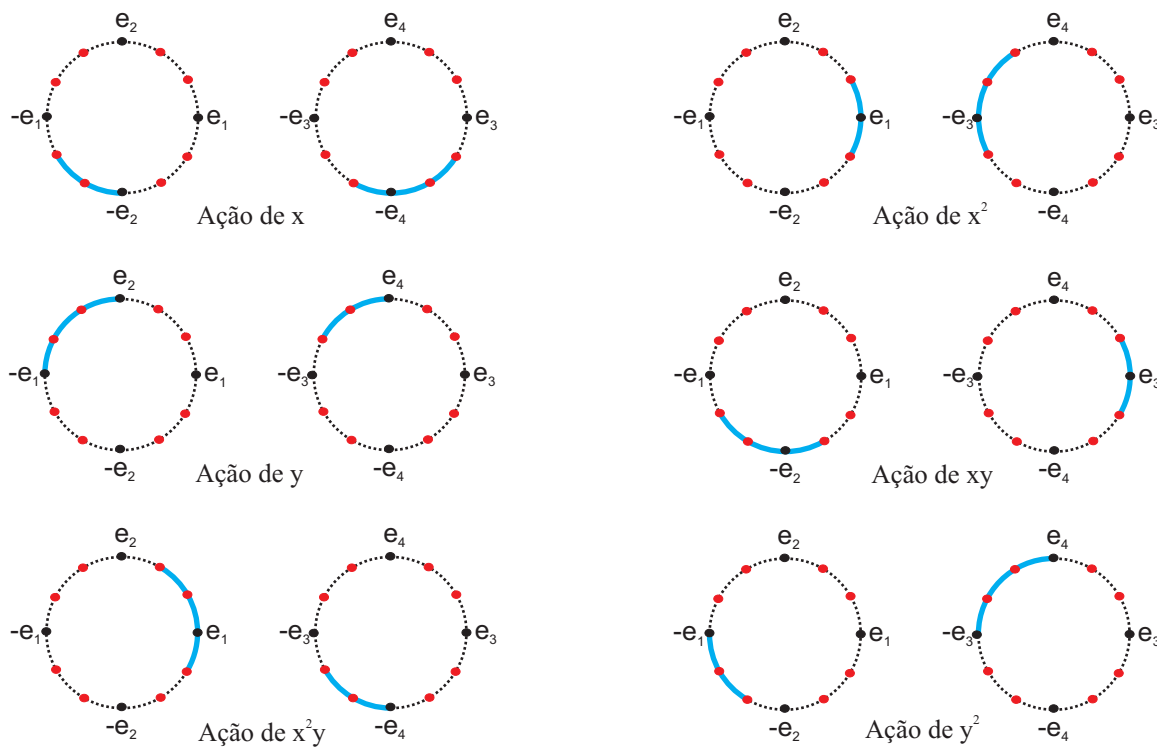


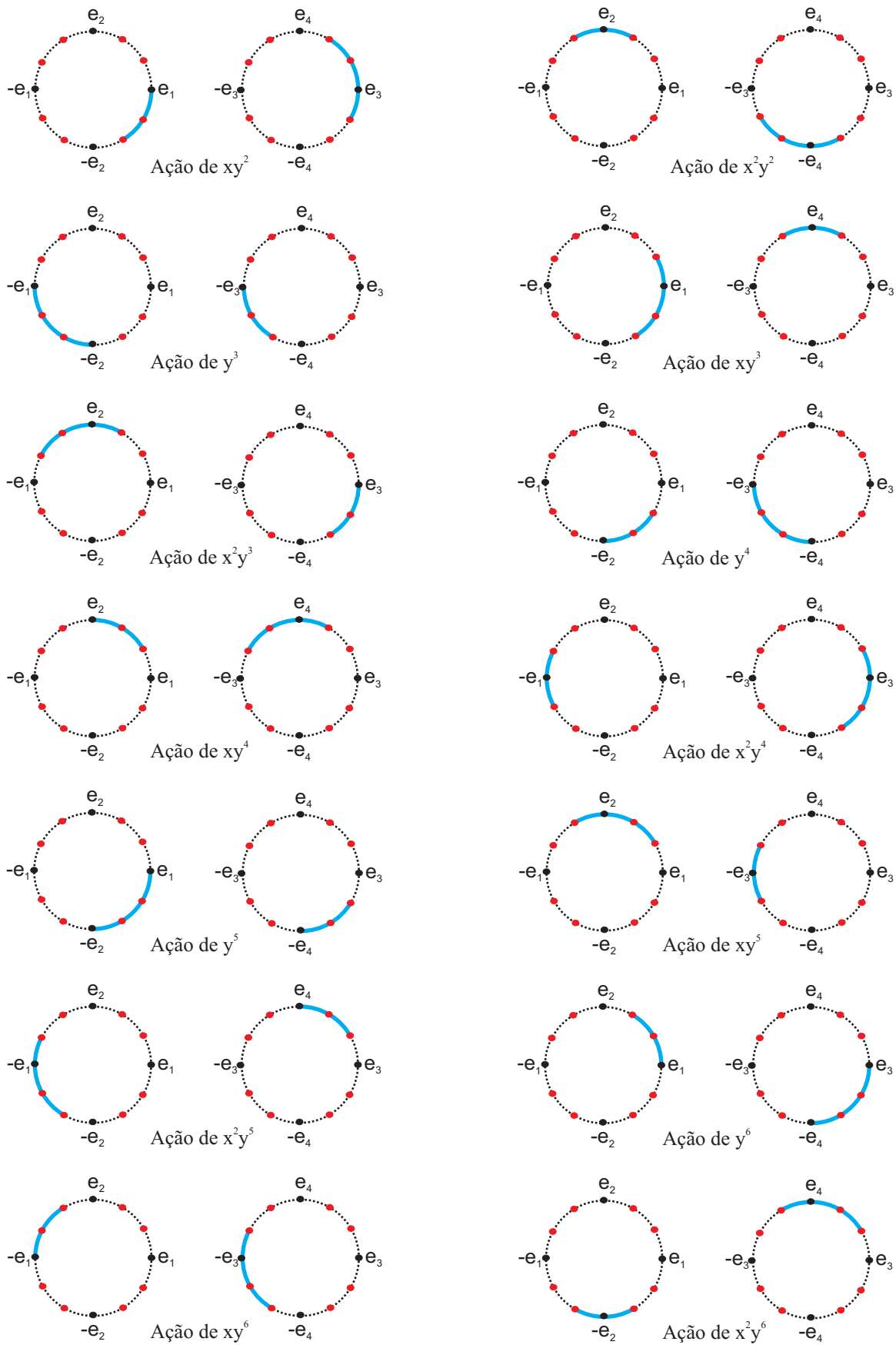
O volume da região acima é  $\frac{2}{12} \cdot \frac{3}{12} V_{S^3} = \frac{1}{24} V_{S^3}$ .

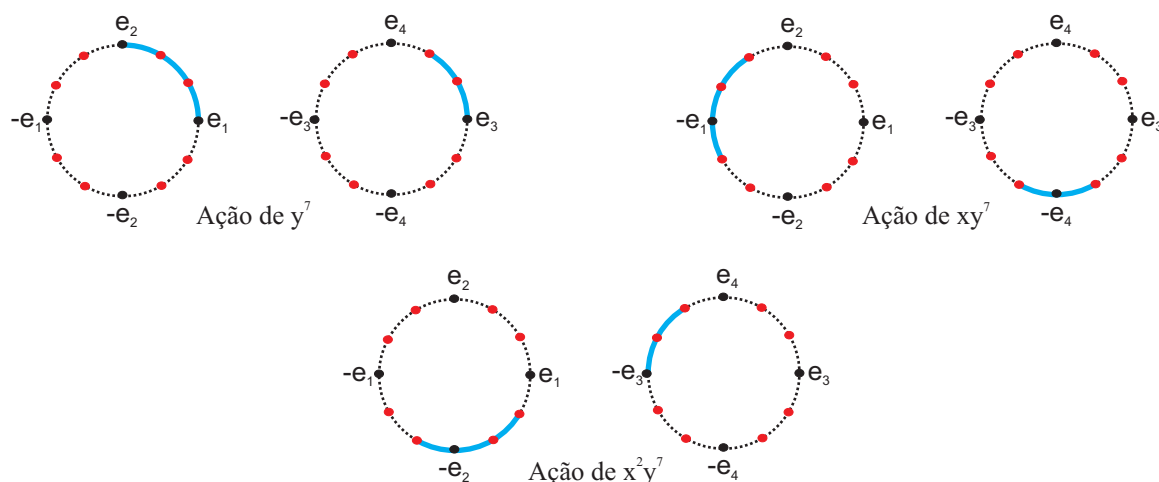
Observemos que cada  $S^1$  na figura acima está dividida em 12 partes. Esse número é facilmente encontrado, uma vez que temos a ação de 24 elementos logo, cada arco terá um ângulo mínimo  $\varepsilon$  que indicará todos os pontos encontrados pela ação de  $D_{3,8}$  sobre os elementos da base. Esse ângulo mínimo é a divisão de  $4\pi$  (uma vez que estamos considerando  $S^3 = S^1 \times S^1$ ) pela ordem do grupo  $D_{3,8}$ .

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{24} = \frac{4\pi}{3 \cdot 8} = \frac{2\pi}{3 \cdot 4} = \frac{2\pi}{12}. \tag{2.2.3}$$

Segue abaixo a ação de todos os elementos de  $D_{3,8}$  sobre  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$ .







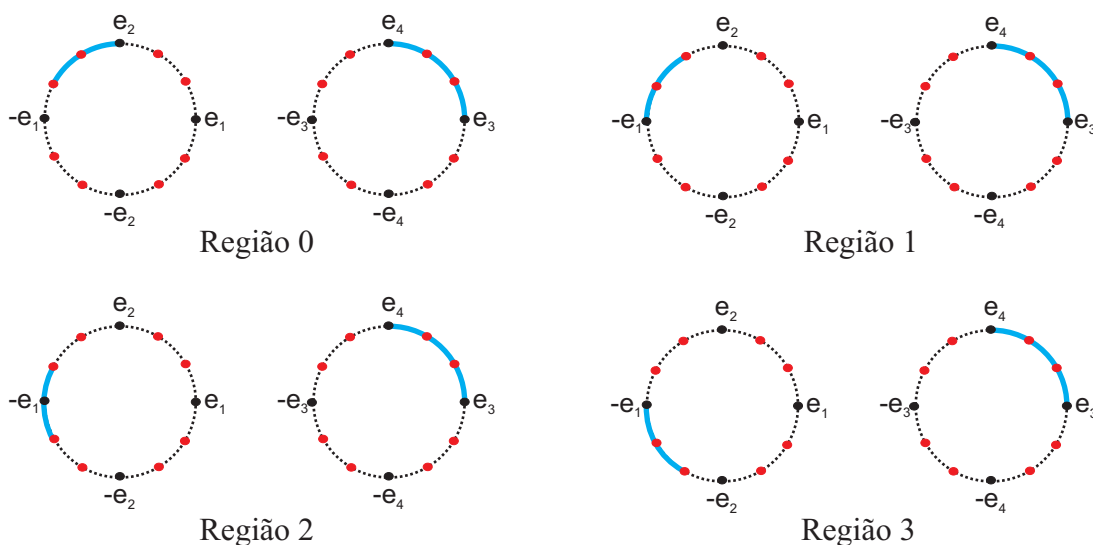
Para ocorrer intersecção entre a região fundamental e sua imagem, pela ação de qualquer elemento não trivial do grupo, deve haver intersecção nos dois arcos do curved join, ou seja, tanto no arco do plano-12 como no arco do plano-34, exceto pelos pontos do bordo do arco.

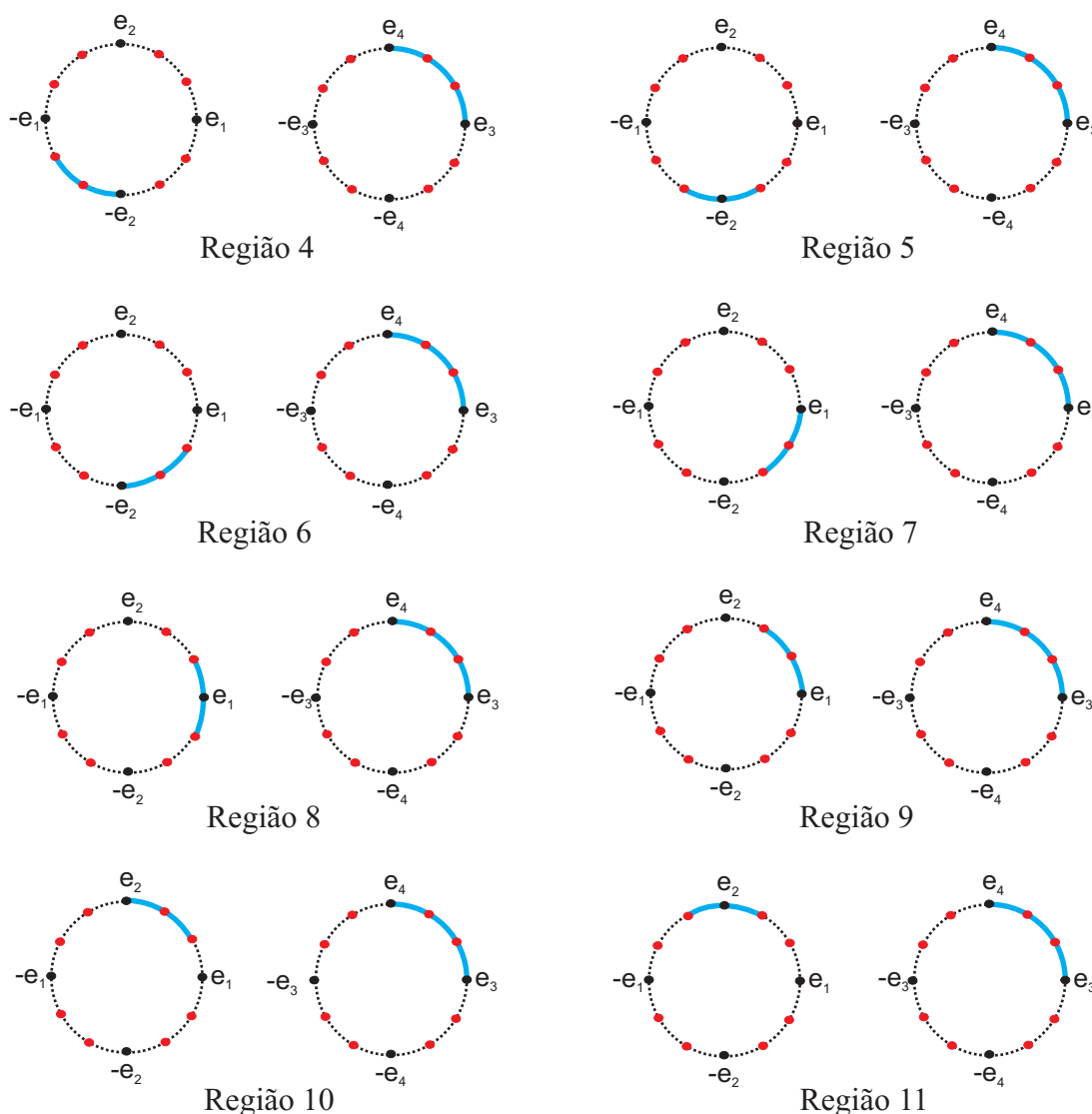
Assim, dados  $g, g' \in D_{3,8}$ , com  $g$  e  $g'$  distintos, a ação de  $g$  e a ação de  $g'$  sobre  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  possuem interiores disjuntos, basta verificar nas figuras acima.

Uma pergunta natural seria se essa é a única possibilidade para a região fundamental da ação de  $D_{3,8}$ , com  $l = 1 = k$ , usando esse procedimento.

A resposta é não!

O número total de possibilidades para a região fundamental é 12, uma vez que para manter o volume da região fundamental é necessário que os comprimentos dos arcos permanecem iguais. Sem perda de generalidade, fixaremos o arco do plano-34 e rotacionaremos o arco do plano-12 percorrendo todas as possibilidades, as quais seguem abaixo:





Fazendo a ação de todos os elementos de  $D_{3,8}$  nas regiões acima, verifica-se que as regiões 0, 2, 4, 6, 8 e 10 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,8}$  com  $l = 1$ . E as regiões 1, 3, 5, 7, 9 e 11 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,8}$  com  $l = 3$ , ou seja,  $\pi_{1,3} : D_{3,8} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.2). Assim, considerando os comprimentos de arcos escolhidos existem exatamente 6 regiões fundamentais distintas para cada  $l$ .

### 2.2.2 Ação de $D_{3,16}$ em $S^3$

Consideremos  $h = 1$  e  $t = 4$  em (2.1.1), ou seja, o grupo split metacíclico

$$D_{3,16} = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2, y^3, \dots, x^2y^{14}, y^{15}, xy^{15}, x^2y^{15}\}$$

logo,  $|D_{3,16}| = 48$ .

Existem diferentes ações do  $D_{3,16}$  em  $S^3$  resultando em formas espaciais esféricas.

No caso  $D_{3,16}$  temos, nas condições do teorema 1.6.15,  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $m = 3$ ,  $n = 16$ ,  $r = -1$ ,  $d = 2$ ,  $n' = 8$ . Temos quatro possíveis valores para  $l$  que são 1, 3, 5 e 7. Ou seja,

$$\pi_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

que definem uma  $D_{3,16}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ , quando  $k = 1$  e  $l = 1$ .

Para  $k = 1$  e  $l = 3$  temos

$$\pi_{1,3}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,3}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{3\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.5)$$

para  $k = 1$  e  $l = 5$  temos

$$\pi_{1,5}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,5}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{5\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.6)$$

e para  $k = 1$  e  $l = 7$  temos

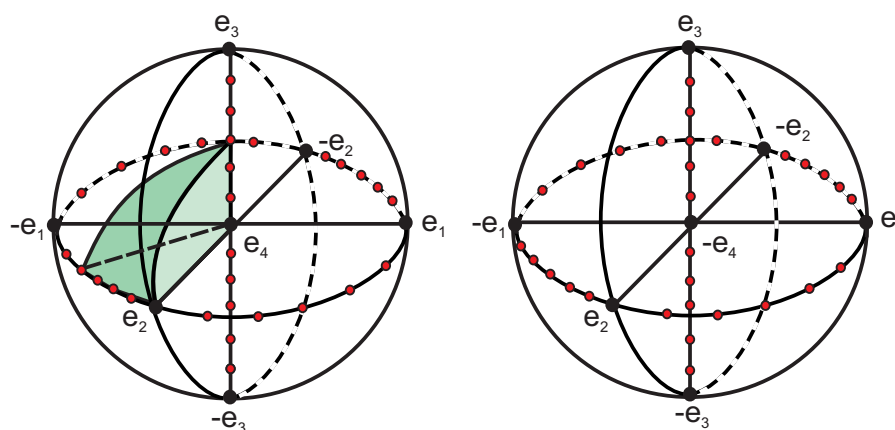
$$\pi_{1,7}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,7}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{7\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.7)$$

que definem uma  $D_{3,16}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ .

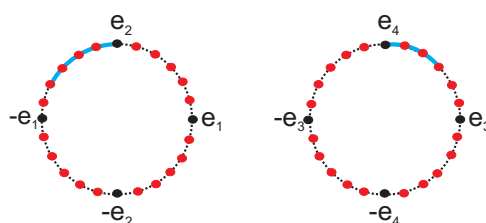
Descreveremos o processo de construção da região fundamental  $\tilde{\mathfrak{F}}_{48;1,l}$  para  $l = 1, 3, 5, 7$ .

Para a região fundamental cobrir toda  $S^3$ , o volume da região fundamental dever ser igual ao volume da  $S^3$  dividido pela ordem do grupo, como visto anteriormente.

Para isso ocorrer tomamos a região fundamental como a figura abaixo:



Também podemos representar a região fundamental, como o join dos seguintes arcos:

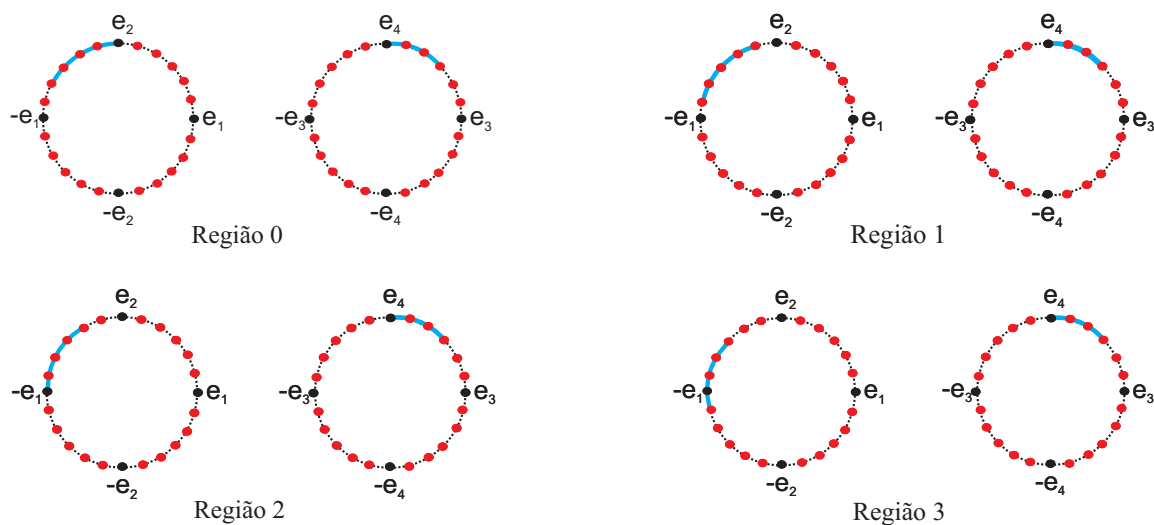


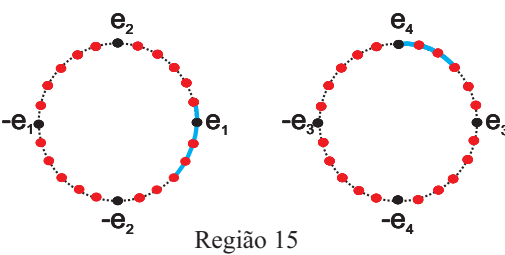
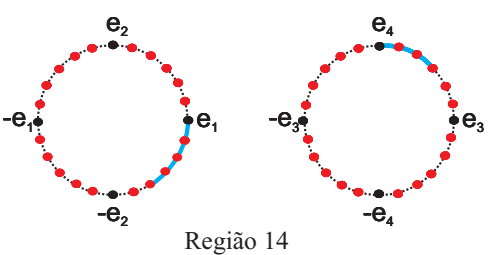
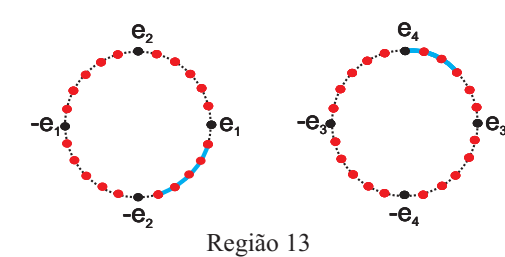
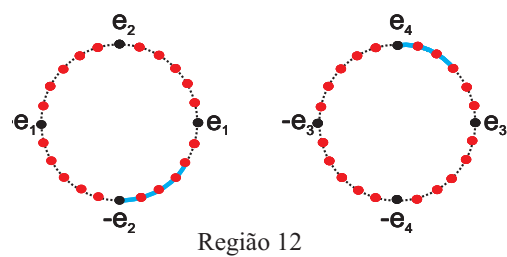
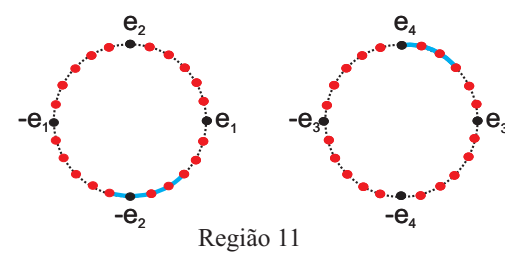
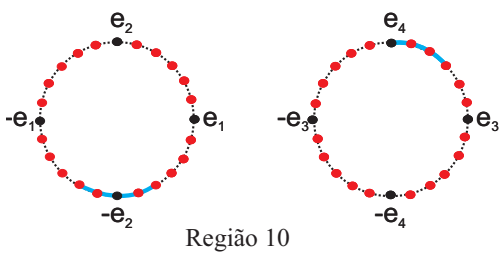
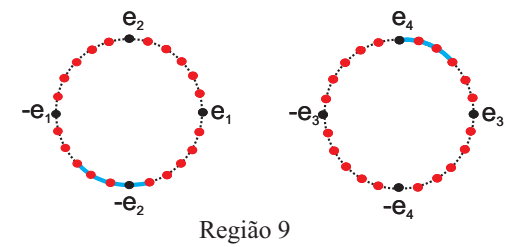
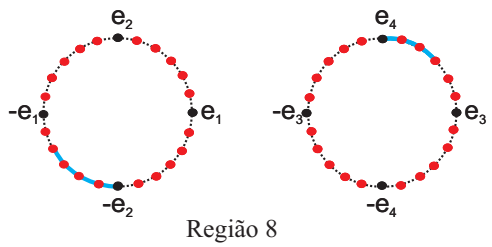
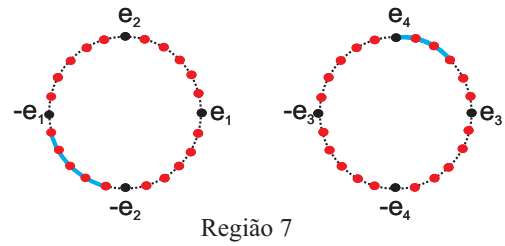
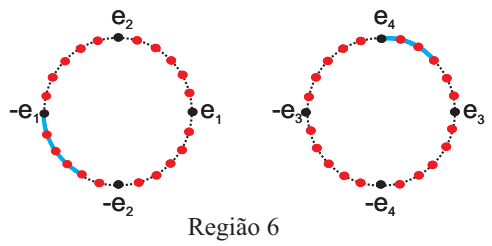
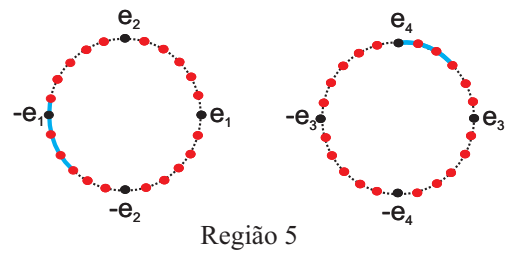
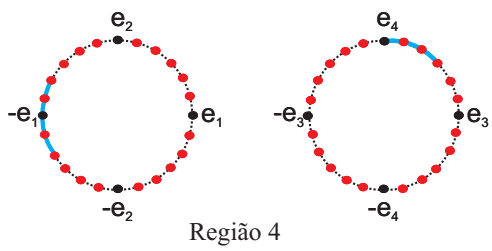
O volume da região acima é  $\frac{4}{24} \cdot \frac{3}{24} V_{S^3} = \frac{1}{48} V_{S^3}$ .

Cada  $S^1$  na figura acima está dividida em  $24\varepsilon$ , uma vez que o ângulo mínimo  $\varepsilon$  é:

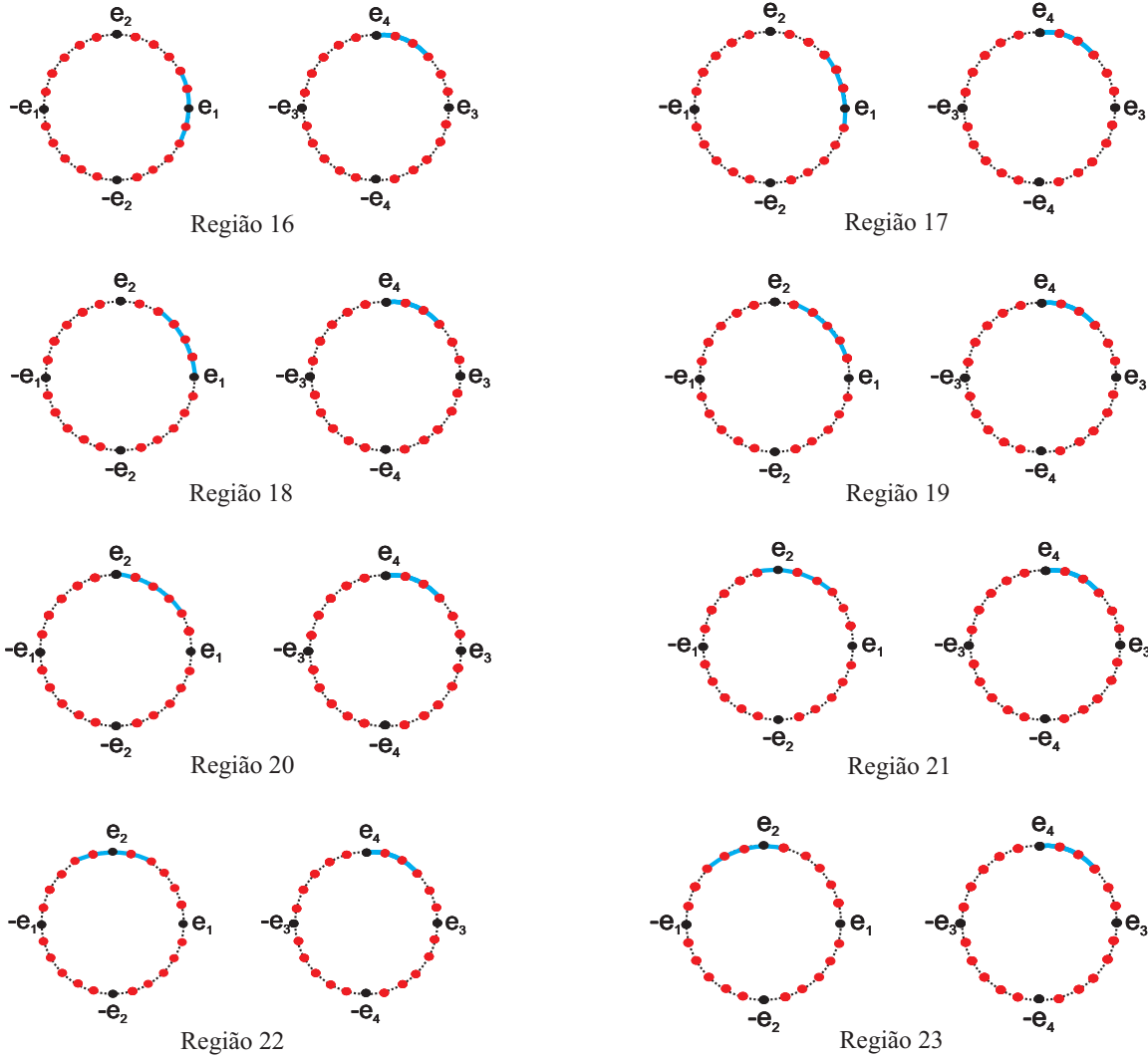
$$\varepsilon = \frac{4\pi}{48} = \frac{4\pi}{3 \cdot 16} = \frac{2\pi}{3 \cdot 8} = \frac{2\pi}{24}. \tag{2.2.8}$$

Fixando o arco do plano-34 e rotacionando o arco do plano-12 temos que o número total de possibilidades para a região fundamental de  $D_{3,16}$  é 24, que são as regiões abaixo:









Fazendo a ação de todos os elementos de  $D_{3,16}$  nas regiões acima, verifica-se que são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 1$ , ou seja,  $\pi_{1,1} : D_{3,16} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.4), as regiões 0, 4, 8, 12, 16 e 20. As regiões 3, 7, 11, 15, 19 e 23 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 3$  ( $\pi_{1,3} : D_{3,16} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.5)). As regiões 2, 6, 10, 14, 18 e 22 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 5$  ( $\pi_{1,5} : D_{3,16} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.6)). E as regiões 1, 5, 9, 13, 17 e 21 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 7$  ( $\pi_{1,7} : D_{3,16} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.7)). Assim, considerando os comprimentos de arcos escolhidos existem exatamente 6 regiões fundamentais distintas para cada  $l$ .

### 2.2.3 Ação $D_{3,32}$ em $S^3$

Consideremos  $h = 1$  e  $t = 5$  em (2.1.1), ou seja, o grupo split metacíclico

$$D_{3,32} = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y, y^2, xy^2, x^2y^2, y^3, \dots, x^2y^{30}, y^{31}, xy^{31}, x^2y^{31}\}$$

logo,  $|D_{3,32}| = 96$ .

Existem diferentes ações do  $D_{3,32}$  em  $S^3$  resultando em formas espaciais esféricas.

No caso  $D_{3,32}$  temos, nas condições do teorema 1.6.15,  $A = x$ ,  $B = y$ ,  $m = 3$ ,  $n = 32$ ,  $r = -1$ ,  $d = 2$ ,  $n' = 16$ . Temos oito possíveis valores para  $l$  que são 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15. Ou seja,

$$\pi_{1,1}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

que definem uma  $D_{3,32}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ , quando  $k = 1$  e  $l = 1$ .

Para  $k = 1$  e  $l = 3$  temos

$$\pi_{1,3}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,3}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{3\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.10)$$

para  $k = 1$  e  $l = 5$  temos

$$\pi_{1,5}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,5}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{5\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.11)$$

para  $k = 1$  e  $l = 7$  temos

$$\pi_{1,7}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,7}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{7\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.12)$$

para  $k = 1$  e  $l = 9$  temos

$$\pi_{1,9}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,9}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{9\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.13)$$

para  $k = 1$  e  $l = 11$  temos

$$\pi_{1,11}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,11}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{11\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.14)$$

para  $k = 1$  e  $l = 13$  temos

$$\pi_{1,13}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,13}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{13\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.15)$$

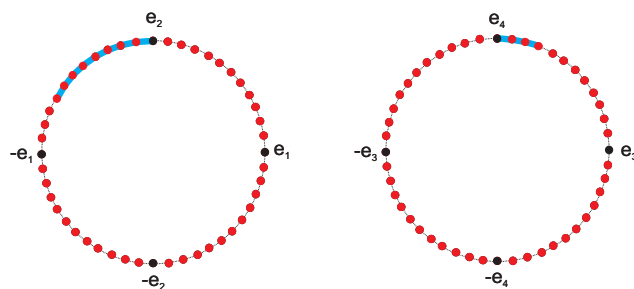
e para  $k = 1$  e  $l = 15$  temos

$$\pi_{1,15}(x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} e \pi_{1,15}(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{15\pi i}{8}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.2.16)$$

que definem uma  $D_{3,32}$ -ação a esquerda sobre  $S^3$ .

Descreveremos o processo de construção da região fundamental  $\mathfrak{F}_{96;1,l}$  para  $l = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ .

A região fundamental deve cobrir toda a  $S^3$ , uma maneira disso ocorrer seria tomarmos a região fundamental como a figura abaixo:

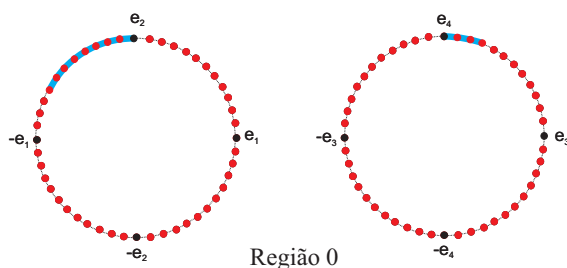


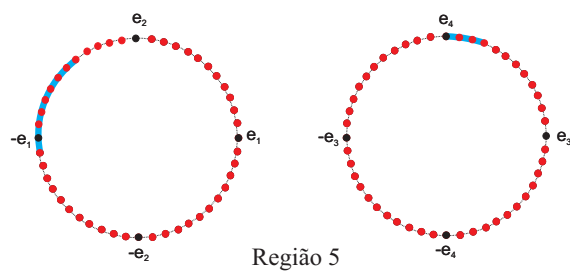
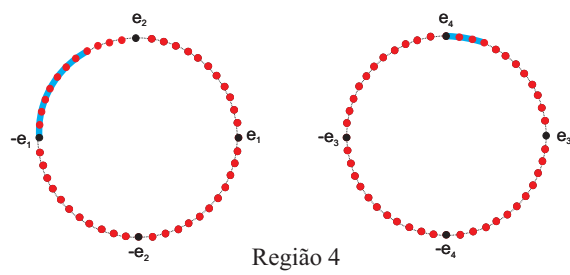
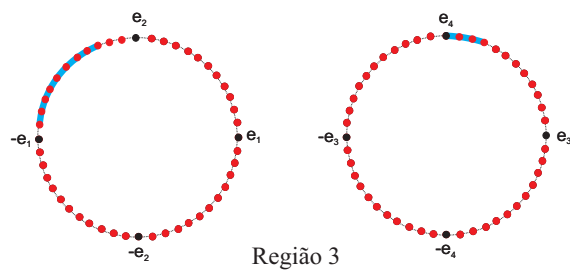
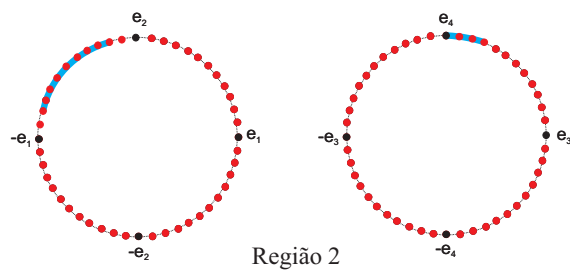
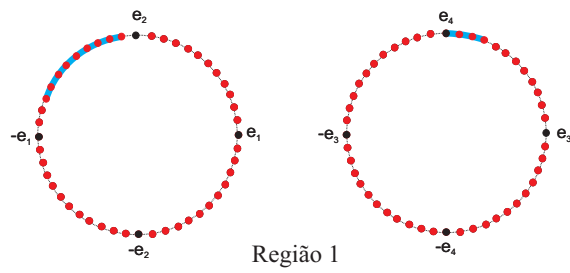
O volume da região acima é  $\frac{8}{48} \cdot \frac{3}{48} V_{S^3} = \frac{1}{96} V_{S^3}$ .

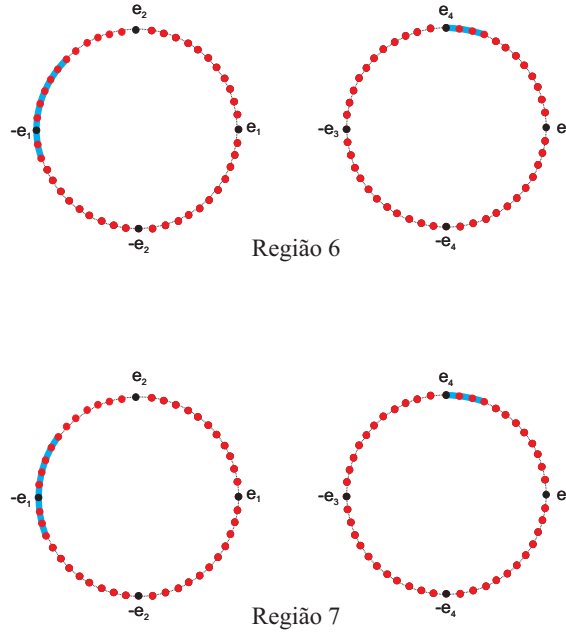
Cada  $S^1$  na figura acima está dividida em 48  $\varepsilon$ , pois

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{96} = \frac{4\pi}{3 \cdot 32} = \frac{2\pi}{3 \cdot 16} = \frac{2\pi}{48}. \quad (2.2.17)$$

O número total de possibilidades para a região fundamental de  $D_{3,32}$  é 48. Abaixo, apresentamos apenas as 8 primeiras possibilidades para tais regiões, uma vez que, como visto nos exemplos anteriores, as regiões fundamentais se repetem no padrão das primeiras, tendo novamente exatamente 6 regiões fundamentais distintas para cada  $l$ , segundo os comprimentos de arcos escolhidos inicialmente.







Fazendo a ação de todos os elementos de  $D_{3,32}$  nas regiões acima, verifica-se que é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 1$ , ou seja,  $\pi_{1,1} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.9), a região 0. A região 3 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 3$  ( $\pi_{1,3} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.10)). A região 6 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 5$  ( $\pi_{1,5} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.11)). A região 1 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 7$  ( $\pi_{1,7} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.12)). A região 4 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 9$  ( $\pi_{1,9} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.13)). A região 7 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 11$  ( $\pi_{1,11} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.14)). A região 2 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 13$  ( $\pi_{1,13} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.15)). E a região 5 é região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  com  $l = 15$  ( $\pi_{1,15} : D_{3,32} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  dada por (2.2.16)).

### 2.2.4 Ação de $D_{(2h+1)2^t}$ em $S^3$

Seja  $D_{(2h+1)2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ , com  $h \geq 1$  e  $t \geq 3$ .

Detalharemos a região fundamental para a ação do grupo  $D_{(2h+1)2^t}$  sobre  $S^3$ . Sem perda de generalidade, consideremos a representação  $k = 1$  e  $l$  arbitrário.

O ângulo mínimo  $\varepsilon$ , que indicará todos os pontos encontrados pela ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  sobre os elementos da base, é encontrado através da divisão de  $4\pi$  (uma vez que estamos considerando  $S^3 = S^1 \times S^1$ ) pela ordem do grupo  $D_{(2h+1),2^t}$ .

Então,

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{(2h+1).2^t} = \frac{2\pi}{(2h+1).2^{t-1}}$$

Logo, cada  $S^1$  é dividida em  $(2h+1).2^{t-1}\varepsilon$ .

Dado  $D_{(2h+1),2^t}$  teremos diferentes representações para  $k = 1$  e  $l$  distintos. Para construirmos a região fundamental, sempre tomaremos no plano-12 um arco de comprimento  $2^{t-2}\varepsilon$  e no plano-34 tomaremos um arco de comprimento  $(2h+1)\varepsilon$ , pois dessa forma o volume da região fundamental será

$$\frac{2^{t-2}}{(2h+1).2^{t-1}} \cdot \frac{2h+1}{(2h+1).2^{t-1}} V_{S^3} = \frac{2^{t-2}}{(2h+1).2^{t-1}} \cdot \frac{1}{2^{t-1}} V_{S^3} = \frac{1}{(2h+1).2^t} V_{S^3},$$

ou seja, a região fundamental cobrirá toda a  $S^3$ .

O número total de possibilidades distintas para a região fundamental é  $(2h+1).2^{t-1}$ , uma vez que para manter o volume da região fundamental é necessário que os comprimentos dos arcos permaneçam iguais. Sem perda de generalidade, fixaremos o arco do plano-34 e rotacionaremos o arco do plano-12 percorrendo todas as possibilidades, as quais são  $(2h+1).2^{t-1}$ .

Cada representação da forma  $k = 1$  e  $l$  arbitrário possui região fundamental distinta de outra representação com  $k = 1$  e  $l$  diferente do anterior. Com os comprimentos de arcos escolhidos, teremos mais de uma região fundamental para cada representação  $k = 1$  e  $l$  arbitrário.

**Afirmção 2.2.3.** *Para cada representação com  $k = 1$  e  $l$  fixo, temos exatamente  $2.(2h+1)$  regiões fundamentais distintas.*

De fato, temos  $(2h+1).2^{t-1}$  possibilidades e  $2^{t-2} l$  distintos, logo

$$\frac{(2h+1).2^{t-1}}{2^{t-2}} = 2.(2h+1) \quad \square$$

Enumeramos as regiões começando no 0, pois assim a primeira região tem no plano-12 o arco começando no  $e_2$ . A região 1 indica que o arco do plano-12 rotacionou  $\varepsilon$  no sentido anti-horário e sempre mantemos o arco do plano-34 na mesma posição. A região 2 indica que o arco do plano-12 rotacionou  $2\varepsilon$  no sentido anti-horário e assim por diante, até a região  $(2h+1).2^{t-1} - 1$  que indica que o arco do plano-12 rotacionou  $[(2h+1).2^{t-1} - 1]\varepsilon$  no sentido anti-horário.

Para descobriremos uma região fundamental para cada  $l$  basta aplicarmos uma fórmula que será especificada abaixo.

Lembrando que  $\text{mdc}(l, 2^t) = 1$ , logo  $l$  é ímpar, ou seja,  $l = 2j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

A nossa região fundamental terá um arco de  $2^{t-2}\varepsilon$  no plano-12 começando a partir de um ponto que rotacionará uma quantia  $z\varepsilon$  do ponto  $e_2$  indo no sentido anti-horário, e no plano-34 tomaremos um arco de  $(2h + 1)\varepsilon$  começando no ponto  $e_4$  indo para o sentido horário. Para calcularmos  $z$  temos a seguinte fórmula:

$$z = j.(2h + 1)$$

Assim, após descobrirmos uma região fundamental para cada  $l$ , teremos as próximas regiões: a  $q$ -região fundamental de  $l$  começa com o arco a  $[(2h + 1)j + q2^{t-2}]\varepsilon$  do ponto  $e_2$  no sentido anti-horário e mantém o arco do plano-34, onde  $q = 0, 1, 2, \dots, 2(2h + 1) - 1$

Para melhor entendimento iremos refazer o caso  $D_{3,16}$ .

**Exemplo 2.2.5.** *Seja  $h = 1$  e  $t = 4$ , ou seja,  $D_{3,16}$ .*

*Cada  $S^1$  será dividida em  $(2h + 1).2^{t-1} = 3.2^3 = 24\varepsilon$ . O número de  $l$  distintos é  $2^{t-2} = 4$ .*

*Para construímos a região fundamental, sempre tomaremos no plano-12 um arco de comprimento  $2^{t-2}\varepsilon = 4\varepsilon$  e no plano-34 um arco de comprimento  $(2h + 1)\varepsilon = 3\varepsilon$ .*

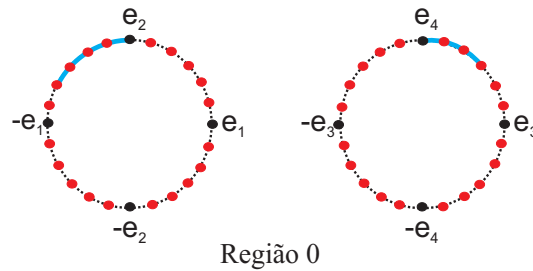
*Sabemos que  $l = 2j + 1$  e como o número de  $l$  distintos é 4, temos  $j = 0, 1, 2, 3$ , ou seja,  $l = 1, 3, 5, 7$ . E cada  $l$  terá exatamente  $2.(2h + 1) = 2.3 = 6$  regiões fundamentais distintas, considerando os arcos escolhidos inicialmente.*

*Vamos calcular  $z$  para cada  $l$ :*

*Para  $l = 1$ , temos  $j = 0$ , então*

$$z = j.(2h + 1) \implies z = 0.3 \implies z = 0$$

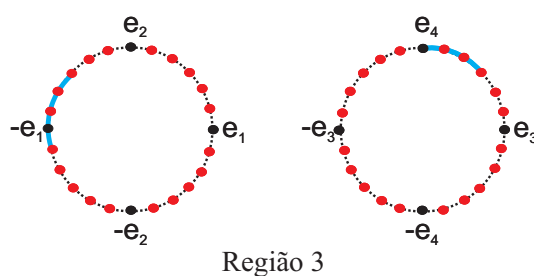
*Deste modo, uma região fundamental para  $l = 1$  é*



*Para  $l = 3$ , temos  $j = 1$ , então*

$$z = j.(2h + 1) \implies z = 1.3 \implies z = 3$$

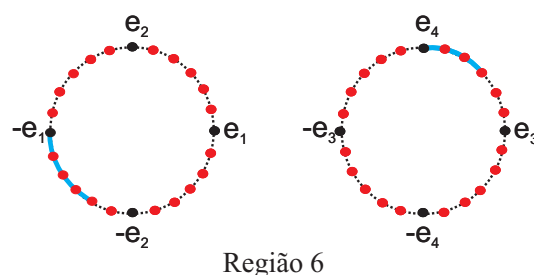
*Logo, uma região fundamental para  $l = 3$  é*



Para  $l = 5$ , temos  $j = 2$ , então

$$z = j.(2h + 1) \implies z = 2.3 \implies z = 6$$

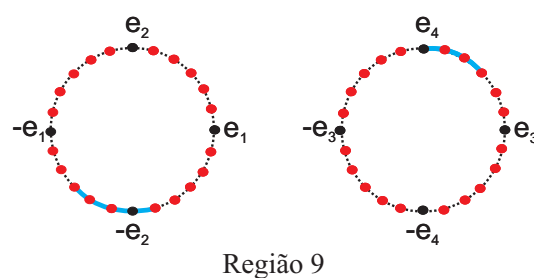
Dessa forma, uma região fundamental para  $l = 5$  é



Para  $l = 7$ , temos  $j = 3$ , então

$$z = j.(2h + 1) \implies z = 3.3 \implies z = 9$$

Assim, uma região fundamental para  $l = 7$  é



Calculamos todas as 6 regiões fundamentais distintas para cada  $l$ .

A  $q$ -região fundamental de  $l$  começa com o arco do plano-12 a  $[(2h + 1)j + q2^{t-2}]\varepsilon = [3j + 4q]\varepsilon$  do ponto  $e_2$  no sentido anti-horário e mantém o arco do plano-34, para  $q = 0, 1, \dots, 2(2h + 1) - 1$ .

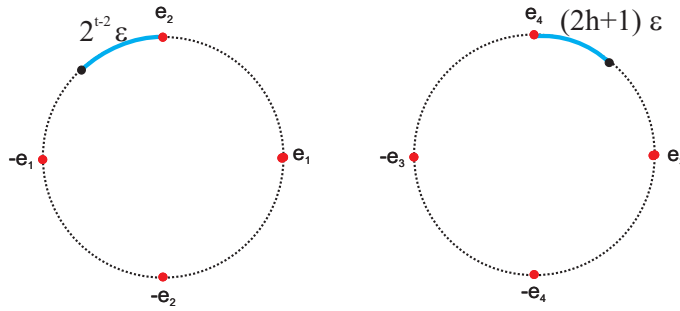
Assim, fazendo os cálculos para todos os  $l$ 's, verifica-se que são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 1$ , as regiões 0, 4, 8, 12, 16 e 20. As regiões 3, 7, 11, 15, 19 e 23 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 3$ . As regiões 2, 6, 10, 14, 18 e 22 são



regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 5$ . E as regiões 1, 5, 9, 13, 17 e 21 são regiões fundamentais para a ação de  $D_{3,16}$  com  $l = 7$ .

Nosso próximo objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema 2.2.6.** *Seja  $D_{(2h+1).2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ , com  $h \geq 1$  e  $t \geq 3$  o grupo metacíclico de ordem  $(2h+1).2^t$ . Considerando a representação  $k = 1 = l$ , temos que a região  $\mathfrak{F}_{(2h+1).2^t;1,1}$  abaixo é uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1).2^t}$  em  $S^3$ , onde  $\varepsilon = \frac{2\pi}{(2h+1).2^{t-1}}$ .*



Antes de enunciar e demonstrar duas proposições necessárias para a prova do resultado acima, vamos descrever as ações dos elementos de  $D_{(2h+1).2^t}$  com representação  $k = 1 = l$ .

Seja  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2$  a 1-esfera unitária  $S^1$  na  $j$ -ésima cópia  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}^2$ . Considere  $A_1$  um arco em  $\Sigma_1$  e  $A_2$  um arco em  $\Sigma_2$ .

A ação de  $x$  em  $A_1 \tilde{*} A_2$  é:

- $x$  rotaciona  $A_1$  em  $2^{t-1}\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_1$ ;
- $x$  rotaciona  $A_2$  em  $2^{t-1}\varepsilon$  no sentido negativo em  $\Sigma_2$ .

A ação de  $y$  em  $A_1 \tilde{*} A_2$  é:

- $y$  move  $A_1$  de  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_2$ ;
- $y$  move  $A_2$  de  $\Sigma_2$  para  $\Sigma_1$  e rotaciona  $A_2$  em  $(2h+1)\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_1$ .

Generalizando, a ação de  $x^\gamma$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$  em  $A_1 \tilde{*} A_2$  é:

- (X1)  $x^\gamma$  rotaciona  $A_1$  em  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_1$ ;

(X2)  $x^\gamma$  rotaciona  $A_2$  em  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$  no sentido negativo em  $\Sigma_2$ .

A ação de  $y^{2^{\rho-1}}$ ,  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1}$  em  $A_1 \tilde{*} A_2$  é:

(Y1)  $y^{2^{\rho-1}}$  move  $A_1$  de  $\Sigma_1$  para  $\Sigma_2$  e rotaciona  $A_1$  em  $(2h+1)(\rho-1)\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_2$ ;

(Y2)  $y^{2^{\rho-1}}$  move  $A_2$  de  $\Sigma_2$  para  $\Sigma_1$  e rotaciona  $A_2$  em  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_1$ .

A ação de  $y^{2^\rho}$ ,  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1} - 1$  em  $A_1 \tilde{*} A_2$  é:

(Y3)  $y^{2^\rho}$  rotaciona  $A_1$  em  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_1$ ;

(Y4)  $y^{2^\rho}$  rotaciona  $A_2$  em  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no sentido positivo em  $\Sigma_2$ .

**Proposição 2.2.7.** a) A ação do elemento  $x^\gamma$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 e no plano-34 é menor que uma volta, onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$ .

b) A ação do elemento  $y^{2^{\rho-1}}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 é menor ou igual a uma volta e no plano-34 é menor que uma volta, onde  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1}$ .

c) A ação do elemento  $x^\gamma y^{2^{\rho-1}}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 é menor que duas voltas e no plano-34 é menor que uma volta, onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$  e  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1}$ .

d) A ação do elemento  $y^{2^\rho}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 e no plano-34 é menor que uma volta, onde  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1} - 1$ .

e) A ação do elemento  $x^\gamma y^{2^\rho}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 é menor que duas voltas e no plano-34 é menor que uma volta, onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$  e  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1} - 1$ .

**Demonstração:** a) A ação do elemento  $x^\gamma$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é uma rotação de  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$  no sentido anti-horário no plano-12, logo

$$2^{t-1}\gamma\varepsilon \leq 2^{t-1}\gamma_{\max}\varepsilon = 2^{t-1} \cdot 2h\varepsilon < (2h+1)2^{t-1}\varepsilon$$

Como  $[2^{t-1}(2h+1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $x^\gamma$  no plano-12 é menor que uma volta.

A ação do elemento  $x^\gamma$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é uma rotação de  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$  no sentido horário no plano-34. Analogamente ao plano-12, temos que a rotação de  $x^\gamma$  no plano-34 é menor que uma volta.

b) Por (Y2) a ação de  $y^{2^{\rho-1}}$  é  $\rho(2h+1)\varepsilon$  no sentido anti-horário no plano-12.

Tomando  $\rho$  máximo, ou seja,  $\rho_{max} = 2^{t-1}$ :

$$[(2h + 1)\rho_{max}]\varepsilon = [2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$$

Como  $[2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa segue que a rotação de  $y^{2\rho-1}$  no plano-12 é menor ou igual a uma volta.

Por (Y1) a ação de  $y^{2\rho-1}$  é  $(\rho - 1)(2h + 1)\varepsilon$  no sentido anti-horário no plano-34.

Tomando  $\rho$  máximo, ou seja,  $\rho_{max} = 2^{t-1}$  temos que a rotação de  $y^{2\rho_{max}-1}$  é:

$$[(\rho_{max} - 1)(2h + 1)]\varepsilon = [(2^{t-1} - 1)(2h + 1)]\varepsilon < [2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$$

Como  $[2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $y^{2\rho-1}$  no plano-34 é menor que 1 volta.

c) A ação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  no plano-12 é de  $[2^{t-1}\gamma + \rho(2h + 1)]\varepsilon$ , uma vez que a ação de  $y^{2\rho-1}$  é  $\rho(2h + 1)\varepsilon$  e a de  $x^\gamma$  é  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$ , ambas no sentido anti-horário ((Y2) e (X1)).

Tomando  $\rho$  e  $\gamma$  máximos, ou seja,  $\rho_{max} = 2^{t-1}$  e  $\gamma_{max} = 2h$  temos que a rotação de  $x^{\gamma_{max}}y^{2\rho_{max}-1}$  é:

$$[2^{t-1}\gamma_{max} + (2h + 1)\rho_{max}]\varepsilon = [2^{t-1}.2h + 2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon = [2^t h + 2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$$

Observe que  $2^t h < 2^{t-1}(2h + 1)$  Assim,

$$2^t h + 2^{t-1}(2h + 1) < 2.2^{t-1}(2h + 1)$$

Assim, para quaisquer  $\rho$  e  $\gamma$  temos,

$$[2^{t-1}\gamma + \rho(2h + 1)]\varepsilon \leq [2^{t-1}\gamma_{max} + \rho_{max}(2h + 1)]\varepsilon < [2.2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon.$$

Como  $[2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  no plano-12 é menor que 2 voltas.

Ao aplicarmos o elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$ , teremos uma rotação de  $[-2^{t-1}\gamma + (\rho - 1)(2h + 1)]\varepsilon$  no plano-34, uma vez que a ação de  $y^{2\rho-1}$  é  $(\rho - 1)(2h + 1)\varepsilon$  no sentido anti-horário e a ação de  $x^\gamma$  é  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$  no sentido horário no plano-34 ((Y1) e (X2)).

Tomando  $\rho$  máximo e  $\gamma$  mínimo, ou seja,  $\rho_{max} = 2^{t-1}$  e  $\gamma_{min} = 1$  temos que a rotação de  $x^{\gamma_{min}}y^{2\rho_{max}-1}$  é:

$$[-2^{t-1}\gamma_{min} + (\rho_{max} - 1)(2h + 1)]\varepsilon = [-2^{t-1} + (2^{t-1} - 1)(2h + 1)]\varepsilon = [(2^t - 2)h - 1]\varepsilon < [2^{t-1}(2h + 1)]\varepsilon$$

Como  $[2^{t-1}(2h+1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  no plano-34 é menor que 1 volta.

d) A ação do elemento  $y^{2\rho}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é uma rotação de  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no sentido anti-horário no plano-12, logo

$$(2h+1)\rho\varepsilon \leq (2h+1)\rho_{\max}\varepsilon = (2h+1).(2^{t-1}-1)\varepsilon < (2h+1)2^{t-1}\varepsilon$$

Como  $[2^{t-1}(2h+1)]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa, temos que a rotação de  $y^{2\rho}$  no plano-12 é menor que uma volta.

A ação do elemento  $y^{2\rho}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-34 é também uma rotação de  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no sentido anti-horário. Analogamente ao plano-12, temos que a rotação de  $(2h+1)\rho\varepsilon$  no plano-34 é menor que uma volta.

e) A ação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  é de  $[\gamma 2^{t-1} + \rho(2h+1)]\varepsilon$  no plano-12, uma vez que a rotação de  $y^{2\rho}$  é  $\rho(2h+1)\varepsilon$  e a de  $x^\gamma$  é  $\gamma 2^{t-1}\varepsilon$ , ambas no sentido anti-horário ((Y3) e (X1)).

Tomando  $\rho$  e  $\gamma$  máximos, ou seja,  $\rho_{\max} = 2^{t-1} - 1$  e  $\gamma_{\max} = 2h$  temos que a rotação de  $x^{\gamma_{\max}} y^{2\rho_{\max}}$  é:

$$\begin{aligned} [\gamma_{\max} 2^{t-1} + \rho_{\max}(2h+1)]\varepsilon &= [2h 2^{t-1} + (2^{t-1} - 1)(2h+1)]\varepsilon = \\ &= [2h 2^{t-1} + 2^{t-1}(2h+1) - 2h - 1]\varepsilon = [2^{t-1}(2h+1) + (2h 2^{t-1} - 2h - 1)]\varepsilon. \end{aligned}$$

Observe que  $2h 2^{t-1} < (2h+1)2^{t-1}$ . Assim,

$$2h 2^{t-1} - 2h - 1 < (2h+1)2^{t-1}$$

Assim, para quaisquer  $\rho$  e  $\gamma$  temos,

$$[\gamma 2^{t-1} + \rho(2h+1)]\varepsilon \leq [\gamma_{\max} 2^{t-1} + \rho_{\max}(2h+1)]\varepsilon < [2^{t-1}(2h+1) + (2h+1)2^{t-1}]\varepsilon = [2(2h+1)2^{t-1}]\varepsilon.$$

Como  $[(2h+1).2^{t-1}]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $x^\gamma y^{2\rho}$  no plano-12 é menor que 2 voltas.

Ao ação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  é de  $[-\gamma 2^{t-1} + \rho(2h+1)]\varepsilon$  no plano-34, uma vez que a rotação de  $y^{2\rho}$  é  $\rho(2h+1)\varepsilon$  no sentido anti-horário e a ação de  $x^\gamma$  é  $\gamma 2^{t-1}\varepsilon$  no sentido horário ((Y4) e (X2)).

Tomando  $\rho$  máximo e  $\gamma$  mínimo, ou seja,  $\rho_{\max} = 2^{t-1} - 1$  e  $\gamma_{\min} = 1$  temos que a rotação de  $x^{\gamma_{\min}} y^{2\rho_{\max}}$  é:

$$\begin{aligned} & [-\gamma_{\min}2^{t-1} + \rho_{\max}(2h+1)]\varepsilon = [-2^{t-1} + (2^{t-1} - 1)(2h+1)]\varepsilon = \\ & = [2^{t-1}(2h+1) - (2h+1) - 2^{t-1}]\varepsilon = [2^{t-1}(2h+1) - ((2h+1) + 2^{t-1})]\varepsilon < [2^{t-1}(2h+1)]\varepsilon \end{aligned}$$

Como  $[(2h+1)2^{t-1}]\varepsilon$  corresponde a uma volta completa temos que a rotação de  $x^\gamma y^{2\rho}$  no plano-34 é menor que 1 volta.  $\square$

**Proposição 2.2.8.** *Não existe intersecção da ação dos elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  sobre  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  com a região original, ou seja,*

- a)  $Int(x^\gamma \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$ , onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$ .
- b)  $Int(y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$ , onde  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1}$ .
- c)  $Int(x^\gamma y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$ , onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$  e  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1}$ .
- d)  $Int(y^{2\rho} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$ , onde  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1} - 1$ .
- e)  $Int(x^\gamma y^{2\rho} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$ , onde  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$  e  $\rho = 1, 2, \dots, 2^{t-1} - 1$ .

**Demonstração:** a) Analisemos os casos em que ocorrem intersecção no plano-12 da região  $Int(x^\gamma \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-12 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $x^\gamma$  é  $2^{t-1}\gamma\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-12 possui comprimento  $2^{t-2}\varepsilon$  e pelo item a) da proposição 2.2.7, existe uma única possibilidade para haver intersecção.

$$1^\circ) 2^{t-1}\gamma = \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2^{t-2} - 1.$$

Assim,

$$\gamma = \frac{\theta}{2^{t-1}} \leq \frac{\theta_{\max}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^{t-1}} < 1$$

Portanto,  $\gamma$  não é inteiro, e como não há intersecção no plano-12, segue que  $Int(x^\gamma \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$

b) Analisemos os casos em que ocorrem intersecção no plano-12 da região  $Int(y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-12 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $y^{2\rho-1}$  é  $(2h+1)\rho\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-12 após a ação de  $y^{2\rho-1}$  possui comprimento  $(2h+1)\varepsilon$ , logo existe uma única possibilidade para haver intersecção.

$$1^\circ) (2h+1)\rho = \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2h+2.$$

Analisemos os casos em que ocorrem intersecção no plano-34 da região  $Int(y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-34 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $y^{2\rho-1}$  é  $(2h+1)(\rho-1)\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-34 após a ação de  $y^{2\rho-1}$  possui comprimento  $2^{t-2}\varepsilon$ , logo

existem 2 possibilidades para haver intersecção, as quais denotaremos por segundo e terceiro caso.

$$2^\circ) (2h + 1)(\rho - 1) = -\theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h + 2.$$

$$3^\circ) (2h + 1)(\rho - 1) = 2^{t-1}(2h + 1) - \theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h + 2.$$

Note que as três possibilidades são possíveis, pois pelo item a) da proposição 2.2.7, a rotação do elemento  $y^{2^{\rho-1}}$  no plano-12 é menor ou igual a uma volta e no plano-34 é menor que uma volta.

Lembramos que para ocorrer intersecção entre a região original e sua imagem pela ação do elemento  $y^{2^{\rho-1}}$  deve haver intersecção nos dois arcos do curved join, ou seja, tanto no arco do plano-12 como no arco do plano-34, exceto pelos pontos do bordo do arco, logo devemos provar que não é possível encontrar  $\rho$  inteiro que satisfaça ao mesmo tempo as equações 1° e 2°, ou 1° e 3°.

Analisemos os casos 1° e 2°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 2°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  inteiro que satisfaça o sistema abaixo:

$$\begin{cases} (2h + 1)\rho = \theta \\ (2h + 1)(\rho - 1) = -\theta' \end{cases}$$

Na primeira equação, temos  $\rho = \frac{\theta}{(2h + 1)}$ .

Como  $\theta = 1, 2, \dots, 2h + 2$ , segue que a única possibilidade de  $\rho$  ser inteiro é termos  $\theta = 2h + 1$ .

Assim,  $\rho = 1$

Na segunda equação temos

$$(2h + 1)(\rho - 1) = -\theta' \iff (2h + 1)\rho = 2h + 1 - \theta' \iff \rho = 1 - \frac{\theta'}{(2h + 1)}.$$

Logo, como  $\theta' = 1, 2, \dots, 2h + 2$ , segue que a única possibilidade de  $\rho$  ser inteiro e termos  $\theta' = 2h + 1$ , ou seja,  $\rho = 0$ .

Portanto, não existe  $\rho$  inteiro que satisfaça as duas equações.

Analisemos os casos 1° e 3°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 3°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  inteiro que satisfaça o sistema abaixo:

$$\begin{cases} (2h+1)\rho = \theta \\ (2h+1)(\rho-1) = 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \end{cases}$$

Como vimos na primeira equação do caso anterior, temos  $\rho = 1$ .

Na segunda equação, temos

$$(2h+1)(\rho-1) = 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \iff (2h+1)\rho = 2h+1 + 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \iff \rho = 1 + 2^{t-1} - \frac{\theta'}{(2h+1)}.$$

Logo, como  $\theta' = 1, 2, \dots, 2h+2$ , segue que a única possibilidade de  $\rho$  ser inteiro é termos  $\theta' = 2h+1$ , ou seja,  $\rho = 2^{t-1}$ .

Portanto, não existe  $\rho$  inteiro que satisfaça as duas equações.

c) Analisemos os casos em que ocorrem intersecção no plano-12 da região  $Int(x^\gamma y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-12 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  é  $[2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho]\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-12 após a ação de  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  possui comprimento  $(2h+1)\varepsilon$ , logo existem 2 possibilidades para haver intersecção.

$$1^\circ) 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2h+2.$$

$$2^\circ) 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2h+2.$$

Analisemos os casos em que ocorrem intersecção no plano-34 da região  $Int(x^\gamma y^{2\rho-1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-34 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  é  $[-2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho-1)]\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-34 após a ação de  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  possui comprimento  $2^{t-2}\varepsilon$ , logo existem 2 possibilidades para haver intersecção, as quais denotaremos por terceiro e quarto caso.

$$3^\circ) -2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho-1) = -\theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h+2.$$

$$4^\circ) -2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho-1) = 2^{t-1}(2h+1) - \theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h+2.$$

Note que as quatro possibilidades são possíveis, pois pelo item b) da proposição 2.2.7, a rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  no plano-12 e no plano-34 é menor que 2 e 1 volta, respectivamente.

Novamente, lembramos que para ocorrer intersecção entre a região original e sua imagem pela ação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho-1}$  deve haver intersecção nos dois arcos do curved join, ou seja, tanto no arco do plano-12 como no arco do plano-34, exceto pelos pontos do bordo do arco, logo devemos provar que não é possível encontrar  $\gamma$  e  $\rho$  inteiros que satisfaçam ao mesmo tempo as equações 1° e 3°, ou 1° e 4°, ou 2° e 3°, ou 2° e 4°.

Analisemos os casos 1° e 3°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 3°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho-1) = -\theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , ficamos com

$$2(2h+1)\rho - (2h+1) = \theta - \theta'$$

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}.$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= \theta \\ 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{1}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= \theta \\ 2^{t-1}\gamma &= \theta - \frac{(2h+1)}{2} - \left[\frac{\theta - \theta'}{2}\right] \\ 2^{t-1}\gamma &= -\frac{(2h+1)}{2} + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta'}{2} \\ \gamma &= -\frac{(2h+1)}{2^t} + \frac{\theta + \theta'}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Neste caso,  $\rho = \frac{1}{2}$ . Dessa forma,  $\rho$  não é um número inteiro.

ii) Suponhamos  $\theta \neq \theta'$ .



Tomando  $\theta_{max} = 2h + 2$  e  $\theta'_{min} = 1$  temos

$$\frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} \leq \frac{\theta_{max} - \theta'_{min}}{2(2h + 1)} = \frac{2h + 2 - 1}{2(2h + 1)} = \frac{1}{2}.$$

Agora, tomando  $\theta_{min} = 1$  e  $\theta'_{max} = 2h + 2$  obtemos

$$\frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} \geq \frac{\theta_{min} - \theta'_{max}}{2(2h + 1)} = \frac{1 - 2h - 2}{2(2h + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

Assim, segue que

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Analisando  $\rho$  temos  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Dessa forma, a única possibilidade é  $\rho = 1$  ( $\theta_{max}$  e  $\theta'_{min}$ ) então

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{(2h + 1)}{2^t} + \frac{1 + 2h + 2}{2^t} \\ \gamma &= \frac{-2h - 1 + 1 + 2h + 2}{2^t} \\ \gamma &= \frac{1}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Logo,  $\gamma$  não é um número inteiro para qualquer  $h \geq 1$ .

Analisemos os casos 1° e 4°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 4°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h + 1)\rho = \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h + 1)(\rho - 1) = 2^{t-1}(2h + 1) - \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , obtemos

$$\begin{aligned} 2(2h + 1)\rho - (2h + 1) &= 2^{t-1}(2h + 1) + \theta - \theta' \\ 2(2h + 1)\rho &= (2^{t-1} + 1)(2h + 1) + \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{2^{t-1} + 1}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= \theta \\
2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{(2^{t-1}+1)}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= \theta \\
2^{t-1}\gamma &= \theta - \frac{(2^{t-1}+1)}{2}(2h+1) - \left[\frac{\theta - \theta'}{2}\right] \\
2^{t-1}\gamma &= -\frac{(2^{t-1}+1)}{2}(2h+1) + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta'}{2} \\
\gamma &= -\frac{(2^{t-1}+1)}{2^t}(2h+1) + \frac{\theta + \theta'}{2^t}.
\end{aligned}$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Obtemos neste caso,  $\rho = \frac{(2^{t-1}+1)}{2}$ . Assim,  $\rho$  não é um número inteiro.

ii) Suponhamos  $\theta \neq \theta'$ .

Analogamente ao que foi feito nos casos 1° e 3°, ficamos com

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Analisando  $\rho$  temos  $2^{t-2} \leq \rho \leq 2^{t-2} + 1$ .

Agora, se  $\rho = 2^{t-2}$  ( $\theta_{min}$  e  $\theta'_{max}$ ) ou  $\rho = 2^{t-2} + 1$  ( $\theta_{max}$  e  $\theta'_{min}$ ) então

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\frac{(2^{t-1}+1)}{2^t}(2h+1) + \frac{1+2h+2}{2^t} \\
\gamma &= \frac{-2^t h - 2^{t-1} + 2}{2^t} \\
\gamma &= -h - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{t-1}}.
\end{aligned}$$

Logo,  $\gamma$  não é um número inteiro qualquer que seja  $h \geq 1$ .

Analisemos os casos 2° e 3°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 2°) e no plano-34 (caso 3°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho - 1) = -\theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$2(2h+1)\rho - (2h+1) = 2^{t-1}(2h+1) + \theta - \theta'$$

$$2(2h+1)\rho = (2^{t-1} + 1)(2h+1) + \theta - \theta'$$

$$\rho = \frac{(2^{t-1} + 1)}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}.$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta$$

$$2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{(2^{t-1} + 1)}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] = 2^{t-1}(2h+1) + \theta$$

$$2^{t-1}\gamma = 2^{t-1}(2h+1) + \theta - \frac{(2^{t-1} + 1)}{2}(2h+1) - \left[\frac{\theta - \theta'}{2}\right]$$

$$2^{t-1}\gamma = \frac{(2^{t-1} - 1)}{2}(2h+1) + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta'}{2}$$

$$\gamma = \frac{(2^{t-1} - 1)}{2^t}(2h+1) + \frac{\theta + \theta'}{2^t}.$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Neste caso temos  $\rho = \frac{(2^{t-1} + 1)}{2}$ , ou seja,  $\rho$  não é um número inteiro.

ii) Suponhamos  $\theta \neq \theta'$ .

De maneira análoga ao que foi feito nos casos 1° e 3°, obtemos

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Dessa forma, analisando  $\rho$  temos  $2^{t-2} \leq \rho \leq 2^{t-2} + 1$ .

Agora, se  $\rho = 2^{t-2}$  ( $\theta_{min}$  e  $\theta'_{max}$ ) ou  $\rho = 2^{t-2} + 1$  ( $\theta_{max}$  e  $\theta'_{min}$ ) então

$$\gamma = \frac{(2^{t-1} - 1)}{2^t}(2h+1) + \frac{1 + 2h + 2}{2^t}$$

$$\gamma = h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{t-1}}.$$

Logo,  $\gamma$  não é um número inteiro para qualquer  $h \geq 1$ .

Analisemos os casos 2° e 4°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 2°) e no plano-34 (caso 4°) ao mesmo tempo, ou seja, devem existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)(\rho-1) = 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho - (2h+1) &= 2^t(2h+1) + \theta - \theta' \\ 2(2h+1)\rho &= (2^t+1)(2h+1) + \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{(2^t+1)}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Agora, calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{(2^t+1)}{2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ 2^{t-1}\gamma &= 2^{t-1}(2h+1) + \theta - \frac{(2^t+1)}{2}(2h+1) - \left[\frac{\theta - \theta'}{2}\right] \\ 2^{t-1}\gamma &= -\frac{1}{2}(2h+1) + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta'}{2} \\ \gamma &= -\frac{(2h+1)}{2^t} + \frac{\theta + \theta'}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Analisando  $\rho$  obtemos,  $\rho = \frac{(2^t+1)}{2}$ , ou seja,  $\rho$  não é um número inteiro.

ii) Suponhamos  $\theta \neq \theta'$ .

De modo análogo ao que foi feito nos casos 1° e 3°, ficamos com

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, analisando  $\rho$  temos  $2^{t-1} \leq \rho \leq 2^{t-1} + 1$ .

Agora, se  $\rho = 2^{t-1}$  ( $\theta_{min}$  e  $\theta'_{max}$ ) ou  $\rho = 2^{t-1} + 1$  ( $\theta_{max}$  e  $\theta'_{min}$ ) então

$$\gamma = -\frac{1}{2^t}(2h+1) + \frac{1+2h+2}{2^t}$$

$$\gamma = \frac{-2h - 1 + 1 + 2h + 2}{2^t}$$

$$\gamma = h + \frac{1}{2^{t-1}}.$$

Dessa forma,  $\gamma$  não é um número inteiro qualquer que seja  $h \geq 1$ .

d) Analisemos quando ocorre intersecção no plano-34 da região  $Int(y^{2\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-34 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $y^{2\rho}$  é  $(2h + 1)\rho\varepsilon$ . Lembremos que o arco que está no plano-34 possui comprimento  $(2h + 1)\varepsilon$  e pelo item d) da proposição 2.2.7, existe uma única possibilidade para haver intersecção.

$$1^\circ) (2h + 1)\rho = (2h + 1)2^{t-1} - \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2h.$$

$$\text{Assim, } \rho = 2^{t-1} - \frac{\theta}{2h + 1}.$$

Uma vez que  $\theta = 1, 2, \dots, 2h$  e temos que  $0 < \frac{2h}{2h + 1} < 1$ , segue que  $\rho$  não é inteiro, e como não há intersecção no plano-34, segue que  $Int(y^{2\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) = \emptyset$

e) Analisemos os casos em que ocorre intersecção no plano-12 da região  $Int(x^\gamma y^{2\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-12 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  é  $[2^{t-1}\gamma + (2h + 1)\rho]\varepsilon$ . Lembremos que o arco do plano-12 possui comprimento  $2^{t-2}\varepsilon$ , logo existem 2 possibilidades para haver intersecção.

$$1^\circ) 2^{t-1}\gamma + (2h + 1)\rho = \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2^{t-2} - 1.$$

$$2^\circ) 2^{t-1}\gamma + (2h + 1)\rho = 2^{t-1}(2h + 1) - \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2^{t-2} - 1.$$

Note que o primeiro caso não possui solução, já que  $\gamma$  e  $\rho$  são inteiros positivos, entretanto pelo item e) da proposição 2.2.7 temos que a rotação  $x^\gamma y^{2\rho}$  é menor que 2 voltas, ou seja, pode ocorrer que a rotação ultrapasse 1 volta inteira, assim podemos reescrever o primeiro caso como:

$$1^\circ) 2^{t-1}\gamma + (2h + 1)\rho = 2^{t-1}(2h + 1) + \theta, \text{ onde } \theta = 1, 2, \dots, 2^{t-2} - 1.$$

O segundo caso é possível, logo não é necessário nenhum ajuste.

Analisemos os casos em que ocorre intersecção no plano-34 da região  $Int(x^\gamma y^{2\rho} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$  com o plano-34 da região  $Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1})$ . A rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  é  $[-2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho]\varepsilon$ . Lembremos que o arco do plano-34 possui comprimento  $(2h+1)\varepsilon$ , logo existem 4 possibilidades para haver intersecção, as quais denotaremos por terceiro, quarto e quinto caso.

$$3^\circ) -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = -\theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h.$$

$$4^\circ) -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h.$$

$$5^\circ) -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = \theta', \text{ onde } \theta' = 1, 2, \dots, 2h.$$

Note que as três possibilidades são possíveis, pois pelo item e) da proposição 2.2.7 a rotação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  no plano-34 é menor que 1 volta.

Novamente, lembramos que para ocorrer intersecção entre a região fundamental e sua imagem pela ação do elemento  $x^\gamma y^{2\rho}$  deve haver intersecção nos dois arcos do curved join, ou seja, tanto no arco do plano-12 como no arco do plano-34, exceto pelos pontos do bordo do arco, logo devemos provar que não é possível ocorrer ao mesmo tempo o caso  $1^\circ$  e  $3^\circ$ , ou  $1^\circ$  e  $4^\circ$ , ou  $1^\circ$  e  $5^\circ$ , ou  $2^\circ$  e  $3^\circ$ , ou  $2^\circ$  e  $4^\circ$ , ou  $2^\circ$  e  $5^\circ$ .

Primeiramente analisemos o caso  $1^\circ$  e  $3^\circ$ :

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso  $1^\circ$ ) e no plano-34 (caso  $3^\circ$ ) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = -\theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) + \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{2^{t-1}(2h+1) + \theta - \theta'}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$-2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = -\theta'$$

$$-2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^{t-1}(2h+1) + \theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] = -\theta'$$

$$-2^{t-1}\gamma = -\theta' - 2^{t-2}(2h+1) - \theta 2^{-1} + \theta' 2^{-1}$$

$$\gamma = \frac{\theta' + 2^{t-2}(2h+1) + 2^{-1}(\theta - \theta')}{2^{t-1}}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2 temos:

$$\gamma = \frac{2\theta' + 2^{t-1}(2h+1) + \theta - \theta'}{2^t}$$

$$\gamma = \frac{\theta' + 2^{t-1}(2h+1) + \theta}{2^t}$$

$$\gamma = h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}.$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t} = h + \frac{1}{2} + \frac{2\theta}{2^t}.$$

Note que

$$\frac{2\theta}{2^t} = \frac{\theta}{2^{t-1}} \leq \frac{\theta_{max}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$h < h + \frac{1}{2} + \frac{2\theta}{2^t} < h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = h + 1,$$

ou seja,  $h < \gamma < h + 1$ , logo  $\gamma$  não inteiro, o que é um absurdo.

ii) Suponhamos  $h < 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}.$$

Note que

$$\frac{\theta}{2^t} \leq \frac{\theta_{\max}}{2^t} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^t} < \frac{2^{t-2}}{2^t} = \frac{1}{4}.$$

Como  $h < 2^{t-3}$  então

$$\frac{\theta'}{2^t} \leq \frac{\theta'_{\max}}{2^t} = \frac{2h}{2^t} = \frac{h}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-3}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-3}}{2^2 \cdot 2^{t-3}} = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$h < h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t} < h + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = h + 1,$$

ou seja,  $h < \gamma < h + 1$ , logo  $\gamma$  não inteiro, o que é um absurdo.

iii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^{t-1} \cdot (2h + 1) + \theta - \theta'}{2(2h + 1)} = 2^{t-2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)}.$$

Tomando  $\theta_{\max} = 2^{t-2} - 1$  e  $\theta'_{\min} = 1$  obtemos

$$\frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} \leq \frac{\theta_{\max} - \theta'_{\min}}{2(2h + 1)} = \frac{2^{t-2} - 1 - 1}{2(2h + 1)} = \frac{2(2^{t-3} - 1)}{2(2h + 1)}.$$

Observe que

$$2h + 1 > h \geq 2^{t-3} > 2^{t-3} - 1,$$

ou seja,  $\frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} < 1$ .

Considerando  $\theta_{\min} = 1$  e  $\theta'_{\max} = 2h$ , temos

$$-1 = \frac{-2(2h + 1)}{2(2h + 1)} < \frac{-(2h - 1)}{2(2h + 1)} = \frac{1 - 2h}{2(2h + 1)} = \frac{\theta_{\min} - \theta'_{\max}}{2(2h + 1)} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)}.$$

Assim,  $-1 < \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)} < 1$ , conseqüentemente,  $\rho = 2^{t-2} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h + 1)}$  não é inteiro.

Analisemos o caso 1° e 4°:



Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 4°) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^t(2h+1) + \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{2^t(2h+1) + \theta - \theta'}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^t(2h+1) + \theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \\ -2^{t-1}\gamma &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' - 2^{t-1}(2h+1) - \theta 2^{-1} + \theta' 2^{-1} \\ \gamma &= \frac{\theta' + 2^{-1}(\theta - \theta')}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\theta' + \theta - \theta'}{2^t} \\ \gamma &= \frac{\theta' + \theta}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t} = \frac{2\theta}{2^t}.$$

Note que

$$\frac{2\theta}{2^t} = \frac{\theta}{2^{t-1}} \leq \frac{\theta_{max}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Lembrando que  $\theta$  é positivo, temos  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ , logo  $\gamma$  não é inteiro, o que é um absurdo.

ii) Suponhamos  $h < 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}.$$

Note que

$$\frac{\theta}{2^t} \leq \frac{\theta_{max}}{2^t} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^t} < \frac{2^{t-2}}{2^t} = \frac{1}{4}.$$

Como  $h < 2^{t-3}$  então

$$\frac{\theta'}{2^t} \leq \frac{\theta'_{max}}{2^t} = \frac{2h}{2^t} = \frac{h}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-3}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-3}}{2^2 \cdot 2^{t-3}} = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\frac{\theta'}{2} + \frac{\theta}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Lembrando que  $\theta$  e  $\theta'$  são positivos, temos  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ , logo  $\gamma$  não é inteiro, o que é um absurdo.

iii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^t(2h+1) + \theta - \theta'}{2(2h+1)} = 2^{t-1} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}.$$

Tomando  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$  e  $\theta'_{min} = 1$  temos

$$\frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} - \theta'_{min}}{2(2h+1)} = \frac{2^{t-2} - 1 - 1}{2(2h+1)} = \frac{2(2^{t-3} - 1)}{2(2h+1)}.$$

Observe que

$$2h+1 > h \geq 2^{t-3} > 2^{t-3} - 1,$$

ou seja,  $\frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} < 1$ .

Considerando  $\theta_{min} = 1$  e  $\theta'_{max} = 2h$  temos

$$-1 = \frac{-2(2h+1)}{2(2h+1)} < \frac{-(2h-1)}{2(2h+1)} = \frac{1-2h}{2(2h+1)} = \frac{\theta_{min} - \theta'_{max}}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}.$$

Assim,  $-1 < \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)} < 1$ , conseqüentemente,  $\rho = 2^{t-1} + \frac{\theta - \theta'}{2(2h+1)}$  não é inteiro.

Analisemos o caso 1° e 5°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 1°) e no plano-34 (caso 5°) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) + \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) + \theta + \theta' \\ \rho &= \frac{2^{t-1}(2h+1) + \theta + \theta'}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= \theta' \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^{t-1}(2h+1) + \theta + \theta'}{2(2h+1)}\right] &= \theta' \\ -2^{t-1}\gamma &= \theta' - 2^{t-2}(2h+1) - \theta 2^{-1} - \theta' 2^{-1} \\ \gamma &= \frac{-\theta' + 2^{-1}(\theta + \theta') + 2^{t-2}(2h+1)}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2 temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-2\theta' + \theta + \theta' + 2^{t-1}(2h+1)}{2^t} \\ \gamma &= \frac{-\theta' + \theta + 2^{t-1}(2h+1)}{2^t} \end{aligned}$$

$$\gamma = h + \frac{1}{2} - \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}.$$

i) Suponhamos  $h < 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = h + \frac{1}{2} - \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}.$$

Tomando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$

$$\frac{\theta}{2^t} - \frac{\theta'}{2^t} \leq \frac{\theta_{max}}{2^t} - \frac{\theta'_{min}}{2^t} = \frac{2^{t-2} - 1 - 1}{2^t} < \frac{2^{t-2}}{2^t} = \frac{1}{4}.$$

Considerando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{min} = 1$ , temos

$$-\frac{1}{2} = \frac{-2^{t-2}}{2^{t-1}} < \frac{-h}{2^{t-1}} = \frac{-2h}{2^t} < \frac{-2h+1}{2^t} = \frac{\theta_{min}}{2^t} - \frac{\theta'_{max}}{2^t} \leq \frac{\theta}{2^t} - \frac{\theta'}{2^t}.$$

Portanto,  $-\frac{1}{2} < \frac{\theta}{2^t} - \frac{\theta'}{2^t} < \frac{1}{4}$ , ou seja,  $h < \gamma < h+1$ , logo  $\gamma$  não inteiro, o que é um absurdo.

ii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^{t-1}(2h+1) + (\theta + \theta')}{2(2h+1)} = 2^{t-2} + \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Tomando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$ , obtemos

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} = \frac{2^{t-2} - 1 + 2h}{2(2h+1)} = \frac{2(2^{t-3} + h - \frac{1}{2})}{2(2h+1)}.$$

Observe que

$$h \geq 2^{t-2} > 2^{t-3} \iff 2h > 2^{t-3} + h \iff 2h+1 > 2h > 2^{t-3} + h > 2^{t-3} + h - \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} < 1.$$

Considerando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{min} = 1$ , temos

$$0 < \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{2 \cdot (2h+1)} = \frac{\theta_{min} + \theta'_{min}}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Portanto,  $0 < \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} < 1$ , ou seja,  $\rho = 2^{t-2} + \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}$  não é inteiro.

Analisemos o caso 2° e 3°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 2°) e no plano-34 (caso 3°) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = -\theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{2^{t-1}(2h+1) - (\theta + \theta')}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= -\theta' \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^{t-1}(2h+1) - \theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= -\theta' \\ -2^{t-1}\gamma &= -\theta' - 2^{t-2}(2h+1) + \theta 2^{-1} + \theta' 2^{-1} \\ \gamma &= \frac{\theta' + 2^{t-2}(2h+1) - 2^{-1}(\theta + \theta')}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2 temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\theta' + 2^{t-1}(2h+1) - (\theta + \theta')}{2^t} \\ \gamma &= \frac{\theta' + 2^{t-1}(2h+1) - \theta}{2^t} \\ \gamma &= h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $h < 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = h + \frac{1}{2} + \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}.$$

Considerando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{min} = 1$ , obtemos

$$\frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t} \leq \frac{\theta'_{max}}{2^t} - \frac{\theta_{min}}{2^t} = \frac{2h-1}{2^t} < \frac{2h}{2^t} = \frac{h}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Tomando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$ , temos

$$-\frac{1}{4} = \frac{-2^{t-2}}{2^t} < \frac{-2^{t-2} + 2}{2^t} = \frac{1 - (2^{t-2} - 1)}{2^t} = \frac{\theta'_{min}}{2^t} - \frac{\theta_{max}}{2^t} \leq \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}.$$

Dessa forma,  $-\frac{1}{4} < \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t} < \frac{1}{2}$ .

Assim,  $h < \gamma < h + 1$ , logo  $\gamma$  não inteiro, o que é um absurdo.

ii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^{t-1}(2h+1) - (\theta + \theta')}{2(2h+1)} = 2^{t-2} - \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Tomando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$ , temos

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} = \frac{2^{t-2} - 1 + 2h}{2(2h+1)} = \frac{2(2^{t-3} + h - \frac{1}{2})}{2(2h+1)}.$$

Note que

$$h \geq 2^{t-2} > 2^{t-3} \iff 2h > 2^{t-3} + h \iff 2h + 1 > 2h > 2^{t-3} + h > 2^{t-3} + h - \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} < 1$$

Considerando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{min} = 1$ , temos

$$0 < \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{2 \cdot (2h+1)} = \frac{\theta_{min} + \theta'_{min}}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Portanto,  $0 < \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} < 1$ , ou seja,  $\rho = 2^{t-2} - \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}$  não é inteiro.

Analisemos o caso 2° e 4°:

Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 2°) e no plano-34 (caso 4°) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^t(2h+1) - \theta - \theta' \\ \rho &= \frac{2^t(2h+1) - (\theta + \theta')}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^t(2h+1) - \theta - \theta'}{2(2h+1)}\right] &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' \\ -2^{t-1}\gamma &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta' - 2^{t-1}(2h+1) + \theta 2^{-1} + \theta' 2^{-1} \\ \gamma &= \frac{\theta' - 2^{-1}(\theta + \theta')}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2 temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\theta' - (\theta + \theta')}{2^t} \\ \gamma &= \frac{\theta' - \theta}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $h < 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}.$$

Tomando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{min} = 1$ , temos

$$\frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t} \leq \frac{\theta'_{max}}{2^t} - \frac{\theta_{min}}{2^t} = \frac{2h-1}{2^t} < \frac{2h}{2^t} = \frac{h}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Agora, considerando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$ , obtemos

$$-\frac{1}{4} = \frac{-2^{t-2}}{2^t} < \frac{-2^{t-2} + 2}{2^t} = \frac{1 - (2^{t-2} - 1)}{2^t} = \frac{\theta'_{min}}{2^t} - \frac{\theta_{max}}{2^t} \leq \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}.$$

Portanto,  $-\frac{1}{4} < \gamma < \frac{1}{2}$ , logo a única possibilidade para  $\gamma$  ser inteiro é  $\gamma = 0$ , mas  $\gamma = 1, 2, \dots, 2h$ , logo é um absurdo.

ii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-2}$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^t(2h+1) - (\theta + \theta')}{2(2h+1)} = 2^{t-1} - \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Considerando  $\theta'_{max} = 2h$  e  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$ , obtemos

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} = \frac{2^{t-2} - 1 + 2h}{2(2h+1)} = \frac{2(2^{t-3} + h - \frac{1}{2})}{2(2h+1)}.$$

Note que

$$h \geq 2^{t-2} > 2^{t-3} \iff 2h > 2^{t-3} + h \iff 2h + 1 > 2h > 2^{t-3} + h > 2^{t-3} + h - \frac{1}{2},$$

ou seja,

$$\frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta_{max} + \theta'_{max}}{2(2h+1)} < 1$$

Tomando  $\theta'_{min} = 1$  e  $\theta_{min} = 1$ , temos

$$0 < \frac{1}{2h+1} = \frac{2}{2 \cdot (2h+1)} = \frac{\theta_{min} + \theta'_{min}}{2(2h+1)} \leq \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}.$$

Portanto,  $0 < \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)} < 1$ , ou seja,  $\rho = 2^{t-1} - \frac{\theta + \theta'}{2(2h+1)}$  não é inteiro.

Analisemos o caso  $2^\circ$  e  $5^\circ$ :



Suponhamos que exista intersecção no plano-12 (caso 2°) e no plano-34 (caso 5°) ao mesmo tempo, ou seja, deve existir  $\rho$  e  $\gamma$  inteiros que satisfaçam o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = 2^{t-1}(2h+1) - \theta \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho = \theta' \end{cases}$$

Cancelando  $2^{t-1}\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} 2(2h+1)\rho &= 2^{t-1}(2h+1) - \theta + \theta' \\ \rho &= \frac{2^{t-1}(2h+1) - \theta + \theta'}{2(2h+1)}. \end{aligned}$$

Calculemos  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\rho &= \theta' \\ -2^{t-1}\gamma + (2h+1)\left[\frac{2^{t-1}(2h+1) - \theta + \theta'}{2(2h+1)}\right] &= \theta' \\ -2^{t-1}\gamma &= \theta' - 2^{t-2}(2h+1) + \theta 2^{-1} - \theta' 2^{-1} \\ \gamma &= \frac{-\theta' + 2^{t-2}(2h+1) + 2^{-1}(\theta' - \theta)}{2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2 temos:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-2\theta' + 2^{t-1}(2h+1) - \theta + \theta'}{2^t} \\ \gamma &= \frac{-\theta' + 2^{t-1}(2h+1) - \theta}{2^t} \\ \gamma &= h + \frac{1}{2} - \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t}. \end{aligned}$$

i) Suponhamos  $\theta = \theta'$ .

Analisemos  $\gamma$ :

$$\gamma = h + \frac{1}{2} - \frac{\theta'}{2^t} - \frac{\theta}{2^t} = h + \frac{1}{2} - \frac{2\theta}{2^t}.$$

Note que

$$\frac{2\theta}{2^t} = \frac{\theta}{2^{t-1}} \leq \frac{\theta_{max}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-2}}{2^{t-1}} = \frac{1}{2}.$$

Logo  $h < \gamma < h + 1$ , assim  $\gamma = h + \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2^{t-1}}$  não é inteiro.

ii) Suponhamos  $h < 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Consideremos  $\frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t}$ .

Veja que

$$\frac{\theta}{2^t} \leq \frac{\theta_{max}}{2^t} = \frac{2^{t-2} - 1}{2^t} < \frac{2^{t-2}}{2^t} = \frac{1}{4}.$$

Como  $h < 2^{t-3}$  então

$$\frac{\theta'}{2^t} \leq \frac{\theta'_{max}}{2^t} = \frac{2h}{2^t} = \frac{h}{2^{t-1}} < \frac{2^{t-3}}{2^{t-1}} = \frac{2^{t-3}}{2^2 \cdot 2^{t-3}} = \frac{1}{4}.$$

Assim,

$$\frac{\theta'}{2} + \frac{\theta}{2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Lembrando que  $\theta$  e  $\theta'$  são positivos temos  $0 < \frac{\theta'}{2^t} + \frac{\theta}{2^t} < \frac{1}{2}$ , logo  $h < \gamma < h + \frac{1}{2}$ , ou seja,  $\gamma$  não é inteiro, o que é um absurdo.

iii) Suponhamos  $h \geq 2^{t-3}$  e  $\theta \neq \theta'$ .

Analisemos  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2^{t-1} \cdot (2h + 1) - \theta + \theta'}{2(2h + 1)} = 2^{t-2} + \frac{\theta' - \theta}{2(2h + 1)}.$$

Tomando  $\theta_{min} = 1$  e  $\theta'_{max} = 2h$ , temos

$$\frac{\theta' - \theta}{2(2h + 1)} \leq \frac{\theta'_{max} - \theta_{min}}{2(2h + 1)} = \frac{2h - 1}{2(2h + 1)} = \frac{2(h - \frac{1}{2})}{2(2h + 1)} < 1.$$

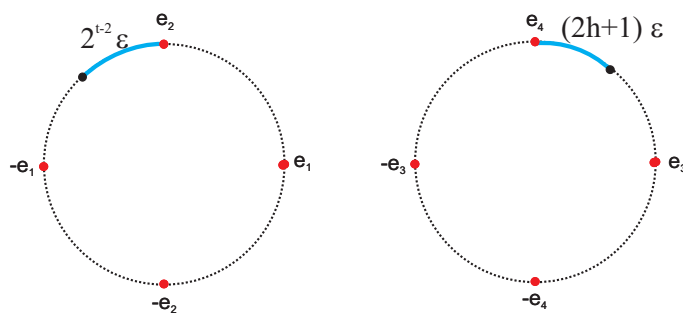
Considerando  $\theta_{max} = 2^{t-2} - 1$  e  $\theta'_{min} = 1$  temos

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{-2(2h + 1)}{2(2h + 1)} < \frac{-2(h - 1)}{2(2h + 1)} = \frac{2(1 - h)}{2(2h + 1)} \leq \frac{2(1 - 2^{t-3})}{2(2h + 1)} = \\ &= \frac{1 - (2^{t-2} - 1)}{2(2h + 1)} = \frac{\theta'_{min} - \theta_{max}}{2(2h + 1)} \leq \frac{\theta' - \theta}{2(2h + 1)}. \end{aligned}$$

Assim,  $-1 < \frac{\theta' - \theta}{2(2h + 1)} < 1$ , conseqüentemente,  $\rho = 2^{t-2} + \frac{\theta' - \theta}{2(2h + 1)}$  não é inteiro.  $\square$

**Demonstração do Teorema 2.2.6:**

Seja  $D_{(2h+1),2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ , com  $h \geq 1$  e  $t \geq 3$  o grupo metacíclico de ordem  $(2h + 1) \cdot 2^t$ . Considerando a representação  $k = 1 = l$ , temos que a região  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^3$ , onde  $\varepsilon = \frac{2\pi}{(2h + 1) \cdot 2^{t-1}}$ .



O volume da região  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é

$$\frac{2^{t-2}}{(2h + 1) \cdot 2^{t-1}} \cdot \frac{2h + 1}{(2h + 1) \cdot 2^{t-1}} \cdot V_{S^3} = \frac{1}{(2h + 1) \cdot 2^t} \cdot V_{S^3},$$

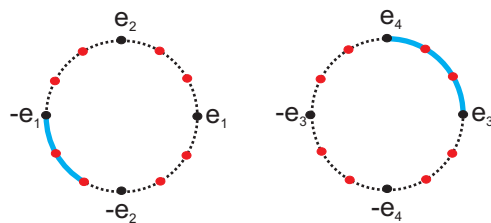
ou seja, a região considerada cobrirá toda a  $S^3$ .

Pela proposição 2.2.8, não haverá intersecção da ação dos elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  sobre  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  e a região original.

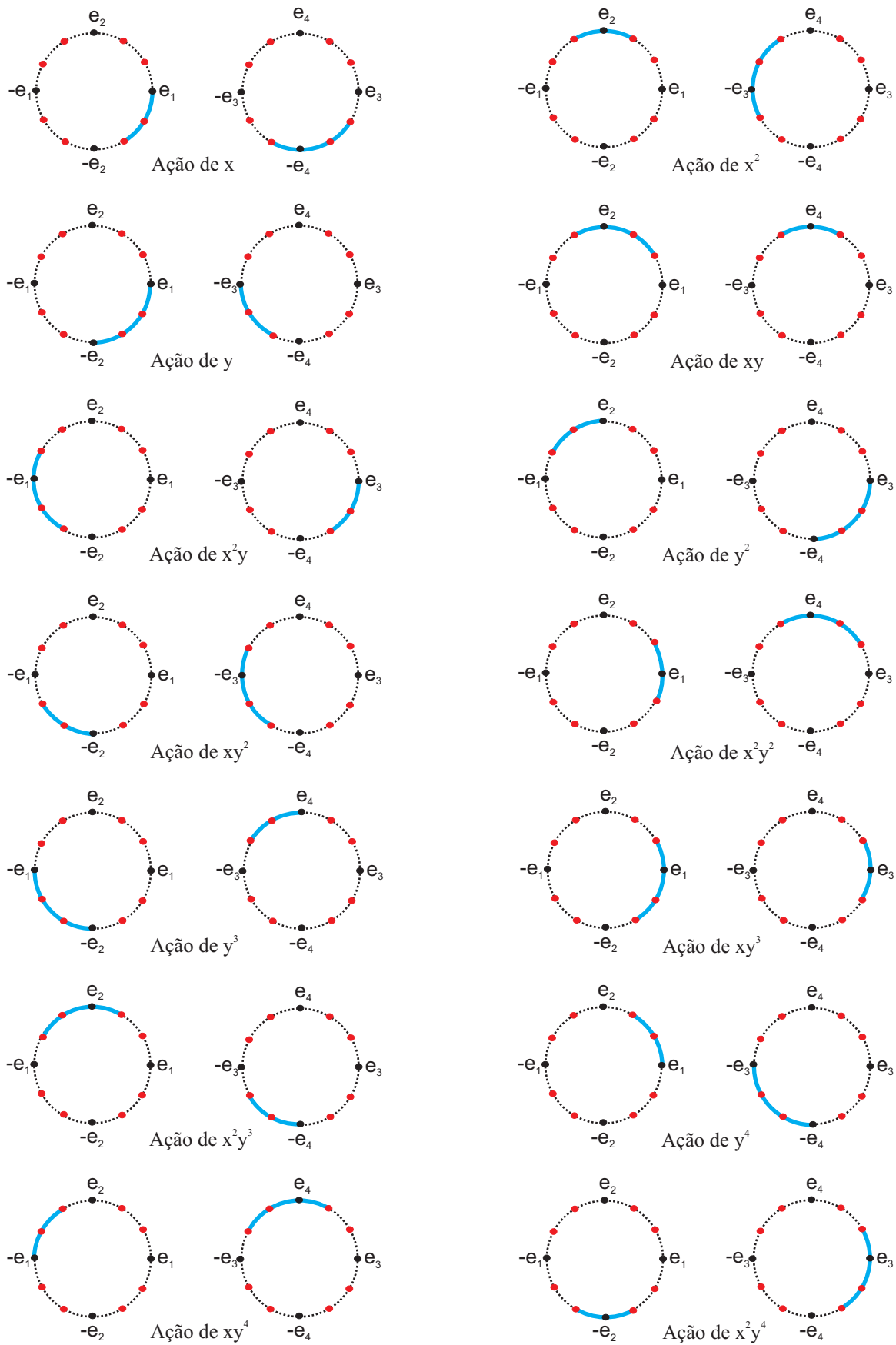
Portanto, a região  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$ , é uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^3$ .  $\square$

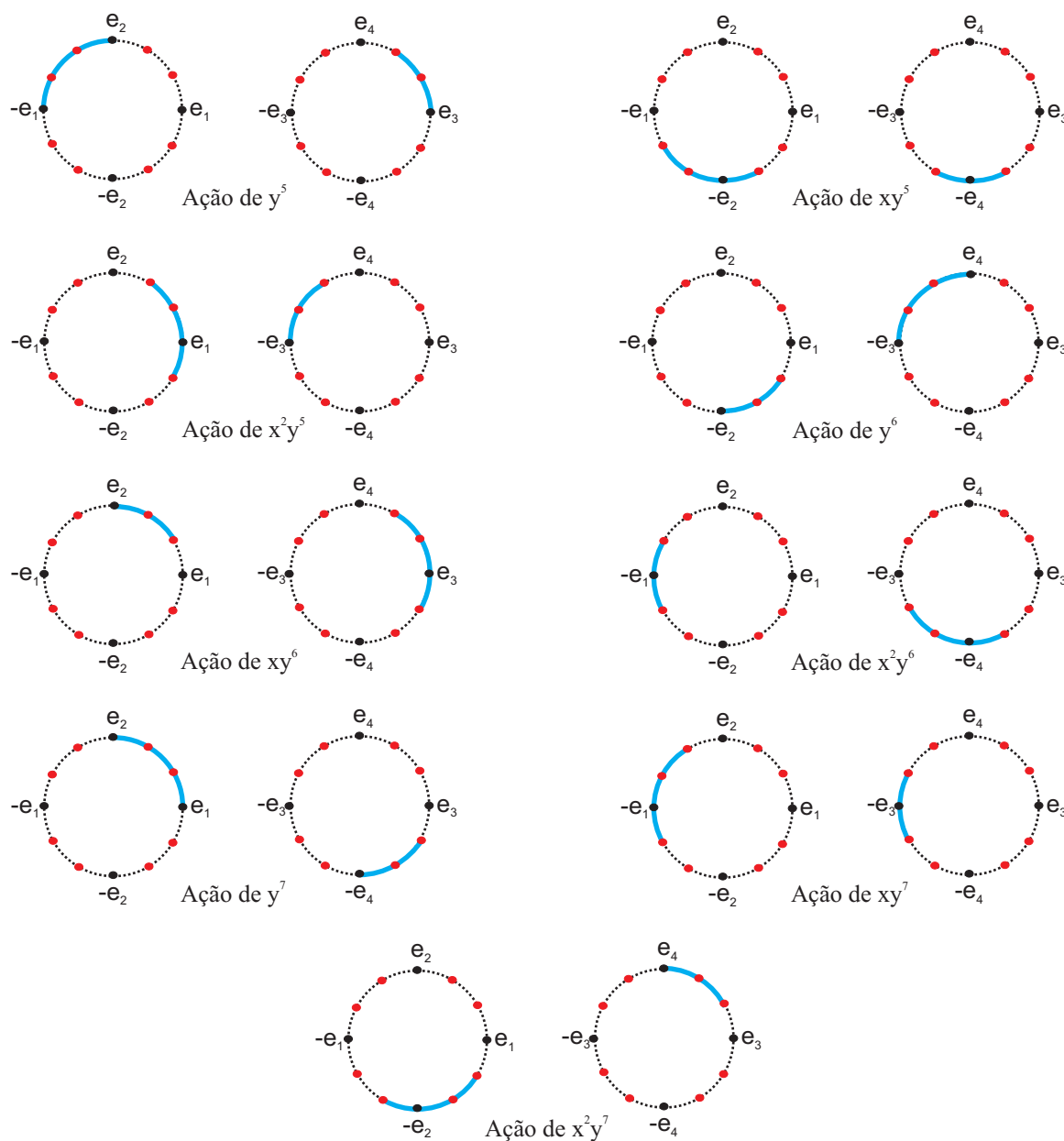
Agora, exemplificaremos a relação que queremos demonstrar no próximo lema:

**Exemplo 2.2.9.** Considere a região  $\mathfrak{F}_{24;1,3}$  representada abaixo:



Segue abaixo a ação de todos os elementos de  $D_{3,8}$  com representação  $k = 1$  e  $l = 3$ .





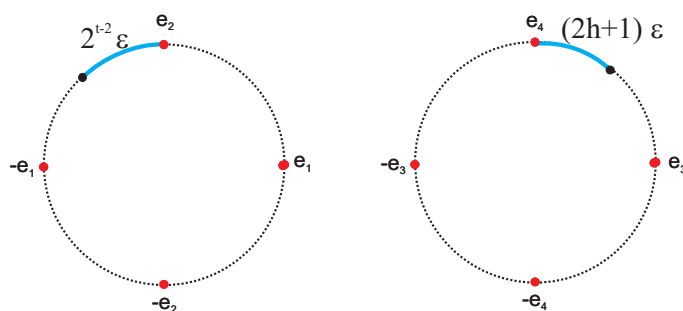
A região  $\mathfrak{F}_{24;1,3}$  corresponde a  $y^2\mathfrak{F}_{24;1,1}$  no plano-12 e a  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  no plano-34, ou seja,  $\mathfrak{F}_{24;1,3} = y^2\mathfrak{F}_{24;1,1} \cap \Sigma_1 \ast \mathfrak{F}_{24;1,1} \cap \Sigma_2$ . Veja as ações dos elementos de  $D_{3,8}$  em  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  na página 30.

Dessa forma, temos a tabela abaixo, que pode ser verificada comparando os desenhos das ações de todos os elementos de  $D_{3,8}$  em  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  visto anteriormente (página 30), e as figuras das ações de  $D_{3,8}$  em  $\mathfrak{F}_{24;1,3}$  acima.

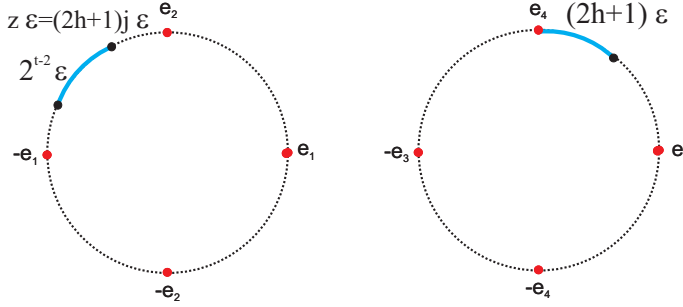
<i>Plano-12</i>	<i>Plano-34</i>	<i>Ação</i>
$y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$\tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$Id \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$Id \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^3 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^4 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^2 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^6 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$xy^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$xy^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$
$x^2 y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^5 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,1}$	$x^2 y^7 \tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$

Com base no exemplo visto acima, enunciamos e demonstramos o lema abaixo:

**Lema 2.2.10.** *Considere a região Fundamental  $\tilde{\mathcal{F}}_{(2h+1) \cdot 2^l; 1,1}$  abaixo para a representação  $k = 1 = l$  da ação de  $D_{(2h+1) \cdot 2^l}$  em  $S^3$ :*



Para a representação  $l = 2j + 1$ , com  $j \neq 0$ , considere a seguinte região  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$ :



Dado  $x^\gamma y^\rho \in D_{(2h+1),2^t}$ , temos

$$x^\gamma y^\rho \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l} = x^\gamma y^{l\rho+2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} x^\gamma y^{l\rho} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2,$$

onde  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, 2$  corresponde a 1-esfera unitária  $S^1$  na  $j$ -ésima cópia  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}^2$ , ou seja, aplicar  $x^\gamma y^\rho$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde ao arco de  $x^\gamma y^{l\rho+2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12, e ao arco de  $x^\gamma y^{l\rho} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-34.

**Demonstração:** Quando aplicamos  $y^{2j}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  temos uma rotação de  $(2h+1)j\epsilon$  no sentido anti-horário no plano-12 (vide (Y3)), logo  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde a  $y^{2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 e a  $Id \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-34, ou seja,

$$\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l} = y^{2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2.$$

Como  $l = 2j + 1$ , com  $j \neq 0$ , a ação de  $y$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$ , leva o arco do plano-34 para o plano-12 rotacionando  $(2h+1)l\epsilon$  e, leva o arco do plano-12 para o plano-34 sem rotação.

A ação de  $y$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde a ação de  $y^{l+2j}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12, uma vez que a ação de  $y^{l+2j}$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  leva o arco do plano-34 para o plano-12 rotacionando  $(2h+1)l\epsilon$ .

De fato, considere  $y^{2\rho+1}$ ,  $\rho \in \mathbb{N}$ , a ação de  $y^{2\rho+1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no arco do plano-34, leva esse arco para o plano-12 seguido de uma rotação  $(2h+1)(\rho+1)\epsilon$  (vide (Y2)). Assim como  $l+2j = 4j+1 = 2(2j)+1$ , então o  $y^{l+2j}$  rotaciona  $(2h+1)(2j+1)\epsilon = (2h+1)l\epsilon$ .

Agora, o arco do plano-12 de  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde ao arco do plano-12 de  $y^{2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$ , dessa forma, a ação de  $y$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  no arco do plano-12 corresponde a ação de  $yy^{2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} = y^{2j+1} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} = y^l \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$ , lembrando que  $y^l \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  leva o arco do plano-12 para o plano-34. Ou seja, temos a seguinte tabela

Plano-12	Plano-34	Ação
$y^{2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$	$\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$	$Id \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$
$y^{l+2j} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$	$y^l \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$	$y \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$

Note que

$$y^2 \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l} = y(y \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l}) = y(y^{l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} y^l \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2).$$

Agora,

$$y(y^{l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1) = y^{l+2j+1} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2 = y^{2l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2$$

$$y(y^l \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2) = y^{l+2j+l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 = y^{2l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1,$$

lembrando que ação de  $y$  troca os arcos de plano, isto é, leva o arco do plano-12 para o plano-34 e leva o arco do plano-34 para o plano-12 seguido de uma rotação  $(2h+1)l\varepsilon$  em  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l}$ , a qual vimos que corresponde a  $y^{l+2j}$  em  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$ .

Ou seja,

Plano-12	Plano-34	Ação
$y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$Id \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l}$
$y^{l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$y^l \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$y \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l}$
$y^{2l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$y^{2l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1}$	$y^2 \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,l}$

Consideremos a seguinte **hipótese de indução**:

$$y^{\rho-1} (y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2) = y^{(\rho-1)l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} y^{(\rho-1)l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2$$

**Tese de Indução:**

$$y^\rho (y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2) = y^{\rho l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} y^{\rho l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2$$

De fato,

$$\begin{aligned} y^\rho (y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2) &= y(y^{\rho-1} (y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2)) \stackrel{H.I}{=} \\ &= y(y^{(\rho-1)l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} y^{(\rho-1)l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2) \stackrel{\text{aplicando } y}{=} \\ &= y^{\rho l+2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} y^{\rho l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1),2^l;1,1} \cap \Sigma_2 \end{aligned}$$



Note que  $x^\gamma$  rotaciona  $2^{t-1}\gamma\mathcal{E}$  no sentido anti-horário no plano-12 e  $2^{t-1}\gamma\mathcal{E}$  no sentido horário no plano-34, tanto em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  como em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$ , logo  $x^\gamma\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde a

$$x^\gamma(y^{2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2) = x^\gamma y^{2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} x^\gamma\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2.$$

Portanto, dado  $x^\gamma y^\rho \in D_{(2h+1),2^t}$  então a ação de  $x^\gamma y^\rho$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  corresponde a  $x^\gamma y^{\rho+2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-12 e  $x^\gamma y^{\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  no plano-34.  $\square$

**Teorema 2.2.11.** *Seja  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  a região especificada no lema anterior, então  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  é uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  com representação  $k = 1$  e  $l = 2j + 1$ ,  $j \neq 0$ .*

**Demonstração:** Consideremos  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  a região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  com  $k = 1 = l$ , especificada no teorema 2.2.6.

Dado  $x^\gamma y^\rho \in D_{(2h+1),2^t}$ , aplicando  $x^\gamma y^\rho$  em  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l} = y^{2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2$ , temos pelo lema anterior

$$x^\gamma y^\rho \mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l} = x^\gamma y^{\rho+2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_1 \tilde{*} x^\gamma y^{\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1} \cap \Sigma_2,$$

Se

$$Int(x^\gamma y^{\rho+2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(y^{2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_1 = \emptyset \text{ ou}$$

$$Int(x^\gamma y^{\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_2 = \emptyset,$$

para todo  $x^\gamma y^\rho \in D_{(2h+1),2^t}$ , então  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,l}$  será região fundamental para representação  $k = 1$  e  $l = 2j + 1$ ,  $j \neq 0$ .

Suponhamos que

$$Int(x^\gamma y^{\rho+2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(y^{2j}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset.$$

Multiplicando por  $y^{-2j}$  obtemos

$$Int(x^\gamma y^{\rho l}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset.$$

Pelo Teorema 2.2.6 provamos que  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é região fundamental para  $k = 1 = l$  então

$$Int(x^\gamma y^{\rho l}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_2 = \emptyset.$$

Por outro lado, suponhamos que

$$Int(x^\gamma y^{\rho}\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap Int(\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}) \cap \Sigma_2 \neq \emptyset.$$

Novamente, como  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;1,1}$  é região fundamental para  $l = 1$  temos

$$\text{Int}(x^\gamma y^{\rho l} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}) \cap \text{Int}(\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}) \cap \Sigma_1 = \emptyset.$$

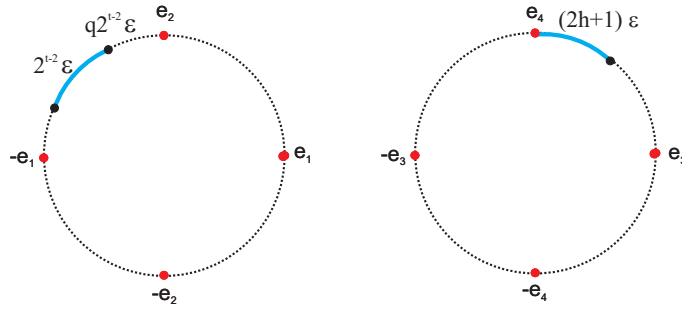
Multiplicando por  $y^{2j}$ :

$$\text{Int}(x^\gamma y^{\rho l + 2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}) \cap \text{Int}(y^{2j} \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}) \cap \Sigma_1 = \emptyset.$$

Portanto,  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}$  é região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1).2^t}$  com representação  $k = 1$  e  $l = 2j + 1$ ,  $j \neq 0$ .  $\square$

O próximo teorema nos diz que a região fundamental não é única.

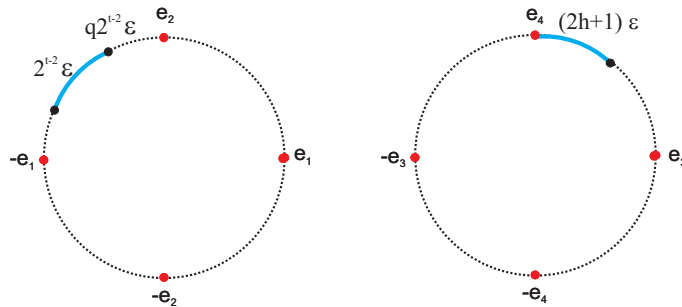
**Teorema 2.2.12.** *Seja  $D_{(2h+1).2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ ,  $h \geq 1$  e  $t \geq 3$  o grupo metacíclico de ordem  $(2h+1).2^t$ . Considerando a representação  $k = 1 = l$ , temos que a região abaixo (a qual denotaremos por  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}^q$ , onde  $q = 0, 1, \dots, 2(2h+1) - 1$ ) é uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1).2^t}$  sobre  $S^3$ .*



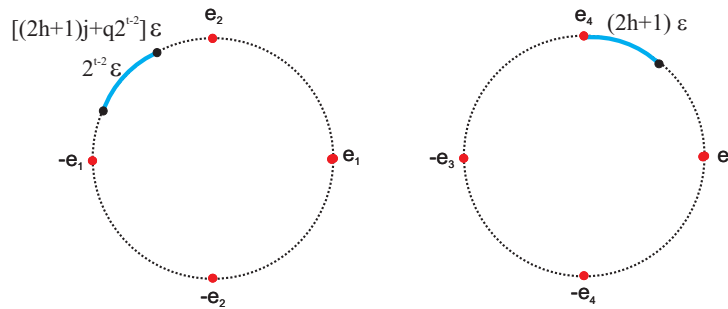
Por convenção  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}^0 = \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}$ .

**Demonstração:** É análoga a prova do teorema 2.2.6, o qual considerava a região  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}^0 = \tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}$ , uma vez que os comprimentos de arcos são os mesmos, e apenas mudamos a posição do arco do plano-12, rotacionando-o por um múltiplo de seu comprimento, o que conservará os resultados (proposições 2.2.7 e 2.2.8) necessários para a prova.  $\square$

**Corolário 2.2.13.** *Seja  $D_{(2h+1).2^t} = \langle x, y \mid x^{2h+1} = y^{2^t} = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$ ,  $h \geq 1$  e  $t \geq 3$  o grupo metacíclico de ordem  $(2h+1).2^t$ . Se a região abaixo  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;1,1}^q$ , onde  $q = 0, 1, \dots, 2(2h+1) - 1$*



é uma região fundamental para a representação  $k = 1$  e  $l = 1$ . Então a região abaixo  $\mathfrak{F}_{(2h+1).2^t;1,1}^q$



é uma região fundamental para representação  $k = 1$  e  $l = 2j + 1, j \neq 0$

**Demonstração:** Segue lema 2.2.10 e do teorema 2.2.11. □

**Observação 2.2.14.** Consideramos sempre  $k = 1$ , mas os resultados são válidos para  $k$  arbitrário e  $l = 2j + 1, j \in \mathbb{N}$ .

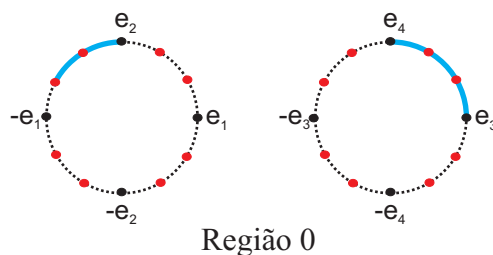
### 2.3 Complexo de cadeias para a ação de $D_{(2h+1).2^t}$ em $S^3$

Estudaremos a ação de  $D_{(2h+1).2^t}$  na esfera de dimensão três, construiremos um complexo de cadeias coerente com tal ação, a fim de lidarmos com o espaço quociente, ou seja, a forma espacial esférica.

**Observação 2.3.1.** Sem perda de generalidade, consideremos  $q = 0$  nas regiões fundamentais  $\mathfrak{F}_{(2h+1).2^t;1,1}^q$  associadas as diferentes representações das ações de  $D_{(2h+1).2^t}$  em  $S^3$  (vide corolário 2.2.13 e observação 2.2.14).

#### 2.3.1 Ação de $D_{3,8}$ em $S^3$

Primeiramente consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,8}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 1$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,8}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{24;1,1} = [e_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2] \ast [e_3, e_4]$  representada abaixo:



Como todas as regiões fundamentais sempre se mantiveram no plano-34 o arco começando em  $e_4$ , é natural que escolhamos  $e_4$  como sendo a 0-célula fundamental.

Logo, precisamos descobrir dois elementos fundamentais para determinarmos os outros pontos que aparecem na região fundamental.

O primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $\beta \frac{\pi}{2} = \beta 3\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha \frac{2\pi}{3} = -\alpha 4\varepsilon$  no plano-34, uma vez que  $\varepsilon = \frac{\pi}{6}$  (vide equações 2.2.1 e 2.2.3). Observe que a potência de  $y$  é par, pois assim a ação de  $y$  não troca o ponto de plano. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 4\varepsilon + \beta 3\varepsilon \pmod{12} \iff -1 = -4\alpha + 3\beta \pmod{12} \iff \alpha = 1 \text{ e } \beta = 1$$

Ou seja, o elemento procurado é  $xy^2$ .

Note que a equação é  $\pmod{12}$ , já que cada  $S^1$  está dividida em 12 partes.

Assim, os pontos no plano-34 no sentido horário são  $e_4, xy^2e_4, (xy^2)^2e_4, (xy^2)^3e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $e_4, xy^2e_4, x^2y^4e_4, y^6e_4$ .

Observe que sempre  $e_2 = y^{2^t-1}e_4$ . Assim, como nesse caso  $t = 3$  temos,  $e_2 = y^7e_4$ .

O segundo elemento, que será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^7e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $\beta' 3\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha' 4\varepsilon$  no plano-12. Novamente, a potência de  $y$  é par, pois assim a ação de  $y$  não troca o ponto de plano. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha' 4\varepsilon + \beta' 3\varepsilon \pmod{12} \iff 1 = 4\alpha' + 3\beta' \pmod{12} \iff \alpha' = 1 \text{ e } \beta' = 3$$

O elemento procurado é  $xy^6$ .

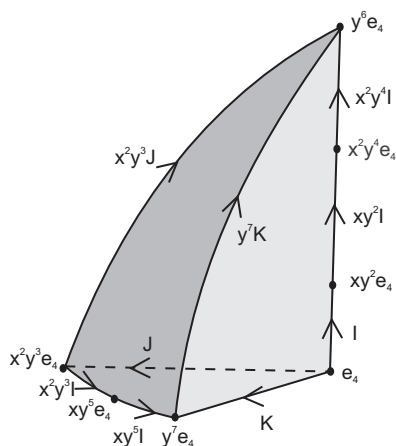
Assim, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $y^7e_4, (xy^6)y^7e_4, (xy^6)^2y^7e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $y^7e_4, xy^5e_4, x^2y^3e_4$ .

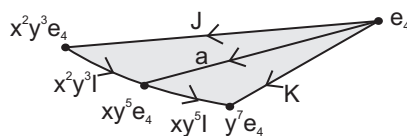
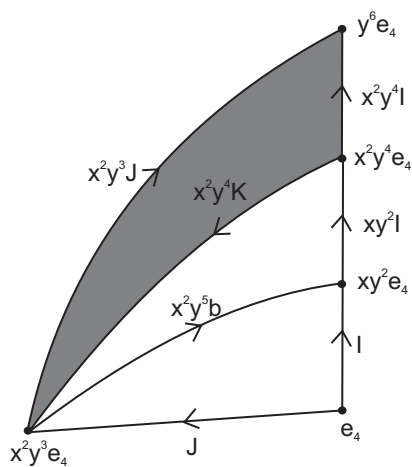
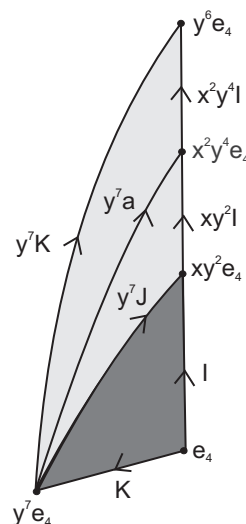
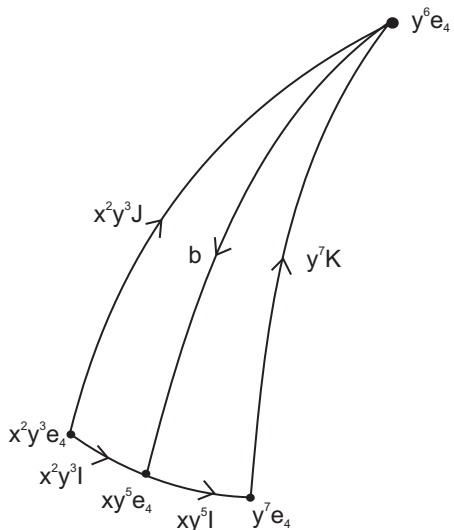
Pelas relações do  $D_{3,8}$ , escolhamos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \tilde{*} xy^2e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2y^3e_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^7e_4.$$

Deste modo,  $\mathfrak{F}_{24;1,1}$  é mostrado na figura abaixo com as 0-células e 1-células em função das células fundamentais.



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.



Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$c_0 = e_4, \quad c_{1,1} = I, \quad c_{1,2} = J, \quad c_{1,3} = K, \quad c_{2,1} = y^7 e_4 \tilde{*} y^6 e_4 \tilde{*} x^2 y^3 e_4$$

$$c_{2,2} = xy^2 e_4 \tilde{*} y^6 e_4 \tilde{*} y^7 e_4, \quad c_{2,3} = e_4 \tilde{*} xy^2 e_4 \tilde{*} y^7 e_4$$

$$c_3 = (x^2 y^3 + xy^5)I \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,8}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.1)$$

onde os bordos são

$$\partial_1(c_{1,1}) = (xy^2 - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = (x^2 y^3 - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = (y^7 - 1)c_0$$

$$\partial_2(c_{2,1}) = (x^2 y^3 + xy^5)c_{1,1} - x^2 y^3 c_{1,2} + y^7 c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = (xy^2 + x^2 y^4)c_{1,1} + y^7 c_{1,2} - y^7 c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = c_{1,1} - y^7 c_{1,2} - c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = (1 - x^2 y^5)c_{2,1} + (1 - y)c_{2,2} + (1 - x^2 y^4)c_{2,3}$$

**Observação 2.3.2.** Sempre que calcularmos a composição  $\partial_i \circ \partial_{i+1}$ , utilizaremos a notação matricial  $[\partial_i \circ \partial_{i+1}] = [\partial_{i+1}] \cdot [\partial_i]$ .

**Afirmção 2.3.1.** O complexo de cadeias 2.3.1 é semi-exato.

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2 y^3 + xy^5 & -x^2 y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2 y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2 y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\bullet (x^2 y^3 + xy^5)(xy^2 - 1) - x^2 y^3(x^2 y^3 - 1) + y^7(y^7 - 1) = x^2 y^3 xy^2 + xy^5 xy^2 - x^2 y^3 - xy^5 - x^2 y^3 x^2 y^3 + x^2 y^3 + y^7 y^7 - y^7 = xy^5 + y^7 - xy^5 - y^6 + y^6 - y^7 = 0.$$

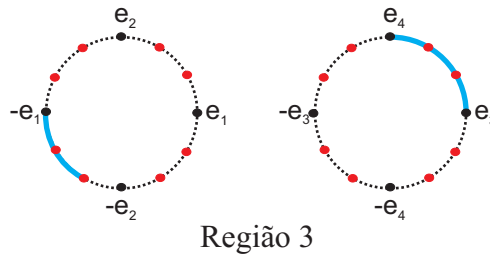
- $(xy^2 + x^2y^4)(xy^2 - 1) + y^7(x^2y^3 - 1) - y^7(y^7 - 1) = xy^2xy^2 - xy^2 + x^2y^4xy^2 - x^2y^4 + y^7x^2y^3 - y^7 - y^7y^7 + y^7 = x^2y^4 - xy^2 + y^6 - x^2y^4 + xy^2 - y^7 - y^6 + y^7 = 0.$
- $xy^2 - 1 - y^7(x^2y^3 - 1) - (y^7 - 1) = xy^2 - 1 - y^7x^2y^3 + y^7 - y^7 + 1 = xy^2 - xy^2 = 0.$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(1 - x^2y^5)(x^2y^3 + xy^5) + (1 - y)(xy^2 + x^2y^4) + (1 - x^2y^4) = x^2y^3 + xy^5 - x^2y^5x^2y^3 - x^2y^5xy^5 + xy^2 + x^2y^4 - yxy^2 - yx^2y^4 + 1 - x^2y^4 = x^2y^3 + xy^5 - 1 - xy^2 + xy^2 + x^2y^4 - x^2y^3 - xy^5 + 1 - x^2y^4 = 0.$
- $(1 - x^2y^5)(-x^2y^3) + (1 - y)y^7 + (1 - x^2y^4)(-y^7) = -x^2y^3 + x^2y^5x^2y^3 + y^7 - yy^7 - y^7 + x^2y^4y^7 = -x^2y^3 + 1 - 1 + x^2y^3 = 0.$
- $(1 - x^2y^5)y^7 + (1 - y)(-y^7) + (1 - x^2y^4)(-1) = y^7 - x^2y^5y^7 - y^7 + yy^7 - 1 + x^2y^4 = -x^2y^4 + 1 - 1 + x^2y^4 = 0. \quad \square$

Agora, consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,8}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 3$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,8}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{24;1,3} = [-e_1, -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2] \ast [e_3, e_4]$  representada abaixo:



Assim como fizemos no caso anterior, vamos descobrir os dois elementos fundamentais para determinarmos os outros pontos que aparecem na região fundamental.

Lembramos que o primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 9\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 4\varepsilon$  no plano-34, de acordo com (vide equação 2.2.2). Nesse caso, esse

elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 4\varepsilon + \beta 9\varepsilon \pmod{12} \iff -1 = -4\alpha + 9\beta \pmod{12} \iff \alpha = -2 \text{ e } \beta = -1$$

O elemento é  $x^{-2}y^{-2} = xy^6$ .

Dessa forma, os pontos no plano-34 no sentido horário são  $e_4, xy^6e_4, (xy^6)^2e_4, (xy^6)^3e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $e_4, xy^6e_4, x^2y^4e_4, y^2e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'}y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^7e_4$  no primeiro ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta'3\varepsilon = 9\beta'\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha'4\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha'4\varepsilon + \beta'9\varepsilon \pmod{12} \iff 1 = 4\alpha' + 9\beta' \pmod{12} \iff \alpha' = 1 \text{ e } \beta' = 1$$

Assim, obtemos  $x^{\alpha'}y^{2\beta'} = xy^2$ .

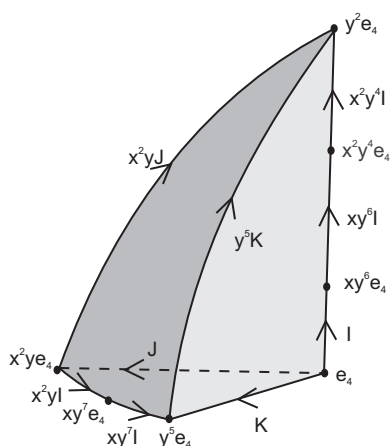
Os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $(xy^2)^3y^7e_4, (xy^2)^4y^7e_4, (xy^2)^5y^7e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $y^5e_4, xy^7e_4, x^2ye_4$ .

Através das relações do  $D_{3,8}$ , escolhemos como 1-células fundamentais:

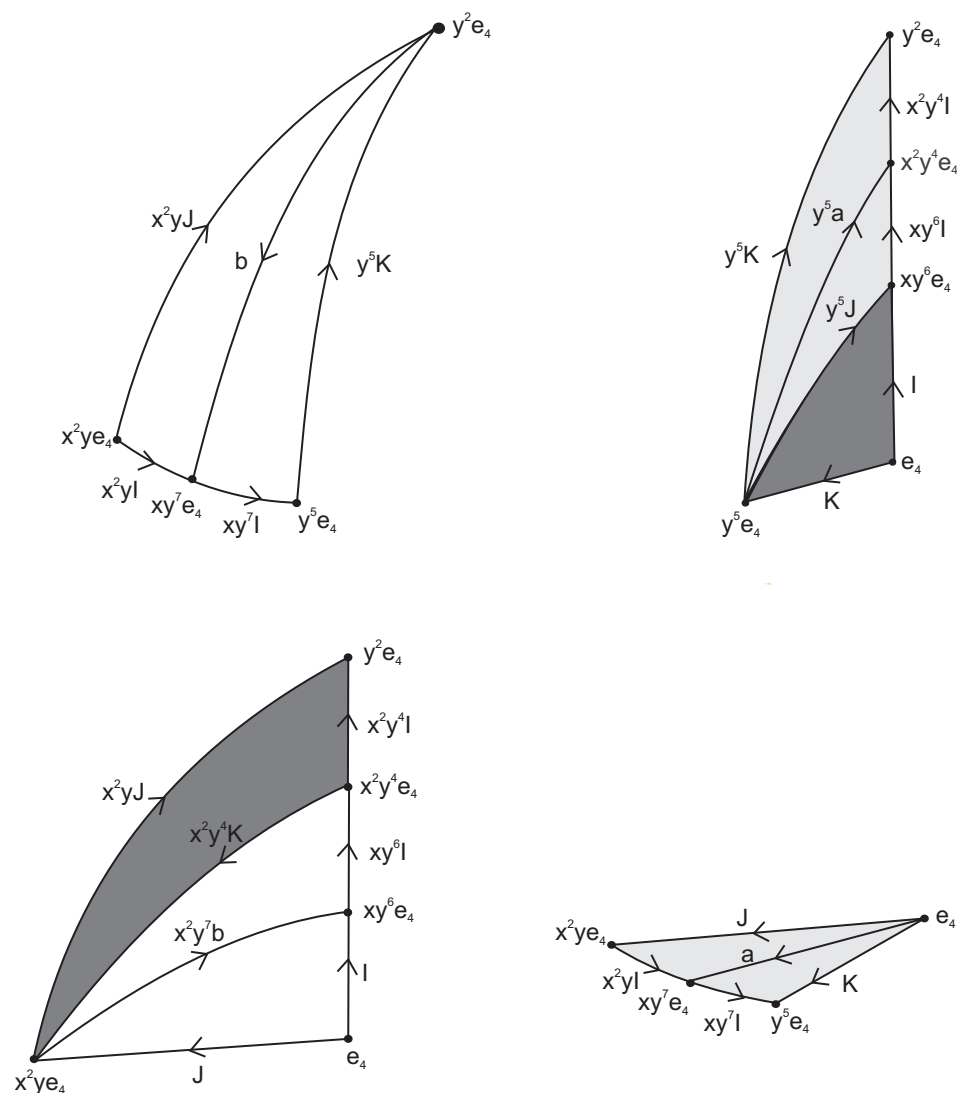
$$I = e_4 \tilde{*} xy^6e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2ye_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^5e_4.$$

Deste modo,  $\tilde{\mathcal{F}}_{24;1,3}$  é mostrado na figura abaixo:



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.





Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$c_0 = e_4, \quad c_{1,1} = I, \quad c_{1,2} = J, \quad c_{1,3} = K, \quad c_{2,1} = y^5e_4 \tilde{*} y^2e_4 \tilde{*} x^2ye_4$$

$$c_{2,2} = xy^6e_4 \tilde{*} y^2e_4 \tilde{*} y^5e_4, \quad c_{2,3} = e_4 \tilde{*} xy^6e_4 \tilde{*} y^5e_4$$

$$c_3 = (1 + xy^6 + (xy^6)^2)I \tilde{*} (x^2y + xy^7)I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,8}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.2)$$

onde os bordos são

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{1,1}) &= (xy^6 - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,2}) &= (x^2y - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,3}) &= (y^5 - 1)c_0 \\ \partial_2(c_{2,1}) &= (x^2y + xy^7)c_{1,1} - x^2yc_{1,2} + y^5c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,2}) &= (xy^6 + x^2y^4)c_{1,1} + y^5c_{1,2} - y^5c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,3}) &= c_{1,1} - y^5c_{1,2} - c_{1,3} \\ \partial_3(c_3) &= (1 - x^2y^7)c_{2,1} + (1 - y^3)c_{2,2} + (1 - x^2y^4)c_{2,3} \end{aligned}$$

**Afirmção 2.3.2.** *O complexo de cadeias 2.3.2 é semi-exato.*

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y + xy^7 & -x^2y & y^5 \\ xy^6 + x^2y^4 & y^5 & -y^5 \\ 1 & -y^5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^6 - 1 \\ x^2y - 1 \\ y^5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(x^2y + xy^7)(xy^6 - 1) - x^2y(x^2y - 1) + y^5(y^5 - 1) = x^2yxy^6 - x^2y + xy^7xy^6 - xy^7 - x^2yx^2y + x^2y + y^5y^5 - y^5 = xy^7 - x^2y + y^5 - xy^7 - y^2 + x^2y + y^2 - y^5 = 0.$
- $(xy^6 + x^2y^4)(xy^6 - 1) + y^5(x^2y - 1) - y^5(y^5 - 1) = xy^6xy^6 - xy^6 + x^2y^4xy^6 - x^2y^4 + y^5x^2y - y^5 - y^5y^5 + y^5 = x^2y^4 - xy^6 + y^2 - x^2y^4 + xy^6 - y^5 - y^2 + y^5 = 0.$
- $(xy^6 - 1) - y^5(x^2y - 1) - (y^5 - 1) = xy^6 - 1 - y^5x^2y + y^5 - y^5 + 1 = xy^6 - xy^6 = 0.$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^7 & 1 - y^3 & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y + xy^7 & -x^2y & y^5 \\ xy^6 + x^2y^4 & y^5 & -y^5 \\ 1 & -y^5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

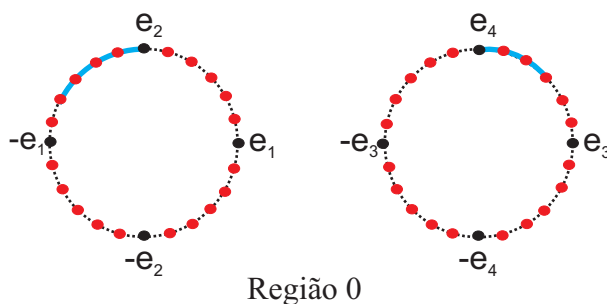
De fato,

- $(1 - x^2y^7)(x^2y + xy^7) + (1 - y^3)(xy^6 + x^2y^4) + (1 - x^2y^4) = x^2y + xy^7 - x^2y^7x^2y - x^2y^7xy^7 + xy^6 + x^2y^4 - y^3xy^6 - y^3x^2y^4 + 1 - x^2y^4 = x^2y + xy^7 - 1 - xy^6 + xy^6 - x^2y - xy^7 + 1 = 0.$

- $(1 - x^2y^7)(-x^2y) + (1 - y^3)y^5 + (1 - x^2y^4)(-y^5) = -x^2y + x^2y^7x^2y + y^5 - y^3y^5 - y^5 + x^2y^4y^5 = -x^2y + 1 - 1 + x^2y = 0.$
- $(1 - x^2y^7)y^5 + (1 - y^3)(-y^5) + (1 - x^2y^4)(-1) = y^5 - x^2y^7y^5 - y^5 + y^3y^5 - 1 + x^2y^4 = -x^2y^4 + 1 - 1 + x^2y^4 = 0.$   $\square$

### 2.3.2 Ação de $D_{3,16}$ em $S^3$

Agora, consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,16}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 1$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,16}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{48;1,1} = [e_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2] \approx [\frac{\sqrt{2}}{2}e_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_4, e_4]$  representada abaixo:



Novamente, vamos descobrir os dois elementos fundamentais para determinarmos os outros pontos que aparecem na região fundamental.

O primeiro elemento da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 3\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 8\varepsilon$  no plano-34, de acordo com a equação 2.2.4. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 8\varepsilon + \beta 3\varepsilon \pmod{24} \iff -1 = -8\alpha + 3\beta \pmod{24} \iff \alpha = 2 \text{ e } \beta = 5$$

O elemento é  $x^2y^{10}$ .

Assim, os pontos no plano-34 no sentido horário são  $e_4, x^2y^{10}e_4, (x^2y^{10})^2e_4, (x^2y^{10})^3e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $e_4, x^2y^{10}e_4, xy^4e_4, y^{14}e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{15}e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta' 3\varepsilon = 3\beta'\varepsilon$  e

a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha'8\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha'8\varepsilon + \beta'3\varepsilon \pmod{24} \iff 1 = 8\alpha' + 3\beta' \pmod{24} \iff \alpha' = 2 \text{ e } \beta' = 3$$

Logo, o elemento procurado é  $x^2y^6$ .

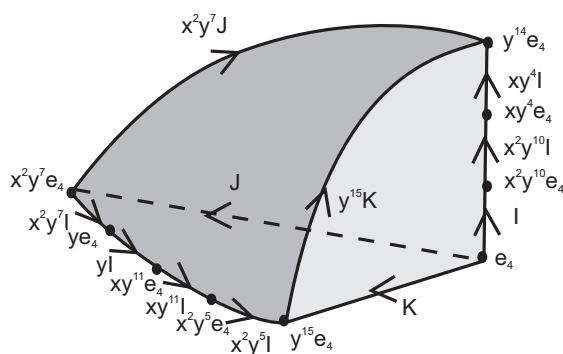
Os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $y^{15}e_4$ ,  $(x^2y^6)y^{15}e_4$ ,  $(x^2y^6)^2y^{15}e_4$ ,  $(x^2y^6)^3y^{15}e_4$ ,  $(x^2y^6)^4y^{15}e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $y^{15}e_4$ ,  $x^2y^5e_4$ ,  $xy^{11}e_4$ ,  $ye_4$ ,  $x^2y^7e_4$ .

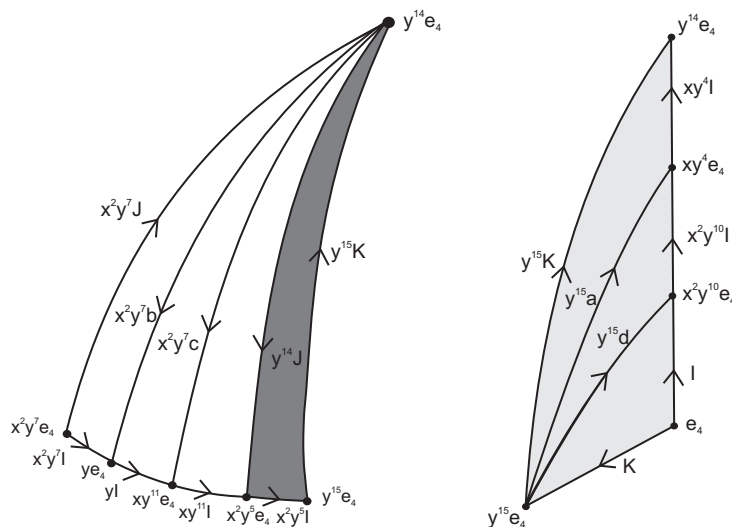
Pelas relações do  $D_{3.16}$ , escolhemos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \tilde{*} x^2y^{10}e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2y^7e_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^{15}e_4.$$

Deste modo,  $\mathfrak{F}_{48;1,1}$  é mostrado na figura abaixo:



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.





$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^7 + y + xy^{11} & -x^2y^7 - y^{14} & 0 \\ x^2y^5 & y^{14} & y^{15} \\ 1 + x^2y^{10} + xy^4 & 0 & -y^{15} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^{10} - 1 \\ x^2y^7 - 1 \\ y^{15} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

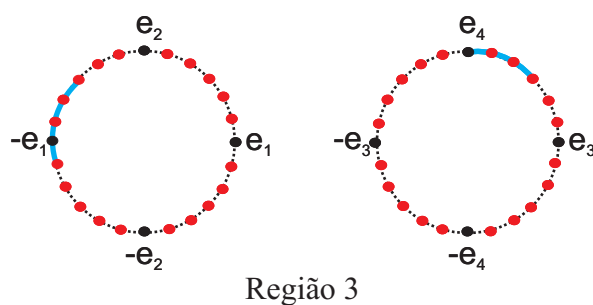
- $(x^2y^7 + y + xy^{11})(x^2y^{10} - 1) + (-x^2y^7 - y^{14})(x^2y^7 - 1) = x^2y^7x^2y^{10} - x^2y^7 + yx^2y^{10} - y + xy^{11}x^2y^{10} - xy^{11} - x^2y^7x^2y^7 + x^2y^7 - y^{14}x^2y^7 + y^{14} = y + xy^{11} - y + x^2y^5 - xy^{11} - y^{14} - x^2y^5 + y^{14} = 0.$
- $x^2y^5(x^2y^{10} - 1) + y^{14}(x^2y^7 - 1) + y^{15}(y^{15} - 1) = x^2y^5x^2y^{10} - x^2y^5 + y^{14}x^2y^7 - y^{14} + y^{15}y^{15} - y^{15} = y^{15} - x^2y^5 + x^2y^5 - y^{14} + y^{14} - y^{15} = 0.$
- $(1 + x^2y^{10} + xy^4)(x^2y^{10} - 1) + (-y^{15} - 1)(y^{15} - 1) = x^2y^{10} - 1 + x^2y^{10}x^2y^{10} - x^2y^{10} + xy^4x^2y^{10} - xy^4 - y^{15}y^{15} + y^{15} - y^{15} + 1 = xy^4 + y^{14} - xy^4 - y^{14} = 0.$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^9 & 1 - y^2 & 1 - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^7 + y + xy^{11} & -x^2y^7 - y^{14} & 0 \\ x^2y^5 & y^{14} & y^{15} \\ 1 + x^2y^{10} + xy^4 & 0 & -y^{15} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(1 - x^2y^9)(x^2y^7 + y + xy^{11}) + (1 - y^2)(x^2y^5) + (1 - y)(1 + x^2y^{10} + xy^4) = x^2y^7 + y + xy^{11} - x^2y^9x^2y^7 - x^2y^9y - x^2y^9xy^{11} + x^2y^5 - y^2x^2y^5 + 1 + x^2y^{10} + xy^4 - y - yx^2y^{10} - yxy^4 = x^2y^7 + xy^{11} - 1 - x^2y^{10} - xy^4 + x^2y^5 - x^2y^7 + 1 + x^2y^{10} + xy^4 - xy^{11} - x^2y^5 = 0.$
- $(1 - x^2y^9)(-x^2y^7 - y^{14}) + (1 - y^2)y^{14} = -x^2y^7 - y^{14} + x^2y^9x^2y^7 + x^2y^9y^{14} + y^{14} - y^2y^{14} = -x^2y^7 + 1 + x^2y^7 - 1 = 0$
- $(1 - y^2)y^{15} + (1 - y)(-y^{15} - 1) = y^{15} - y^2y^{15} - y^{15} - 1 + 1 + y = -y + y = 0 \quad \square$

Agora, consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,16}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 3$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,16}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{48;1,3}$  representada abaixo:



O primeiro elemento da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 9\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 8\varepsilon$  no plano-34. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 8\varepsilon + \beta 9\varepsilon \pmod{24} \iff -1 = -8\alpha + 9\beta \pmod{24} \iff \alpha = -1 \text{ e } \beta = -1$$

Assim, o elemento procurado é  $x^{-1}y^{-2} = x^2y^{14}$ .

Dessa forma, os pontos no plano-34 no sentido horário são

$$e_4, x^2y^{14}e_4, (x^2y^{14})^2e_4, (x^2y^{14})^3e_4.$$

Usando as relações, obtemos  $e_4, x^2y^{14}e_4, xy^{12}e_4, y^{10}e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{15}e_4$  no primeiro ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta' 3\varepsilon = 9\beta'\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha' 8\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha' 8\varepsilon + \beta' 9\varepsilon \pmod{24} \iff 1 = 8\alpha' + 9\beta' \pmod{24} \iff \alpha' = 2 \text{ e } \beta' = 1$$

O segundo elemento é  $x^2y^2$ .

Portanto, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são

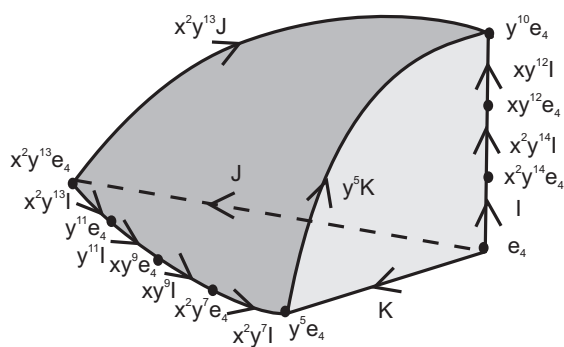
$$(x^2y^2)^3y^{15}e_4, (x^2y^2)^4y^{15}e_4, (x^2y^2)^5y^{15}e_4, (x^2y^2)^6y^{15}e_4, (x^2y^2)^7y^{15}e_4.$$

Usando as relações, obtemos  $y^5e_4, x^2y^7e_4, xy^9e_4, y^{11}e_4, x^2y^{13}e_4$ .

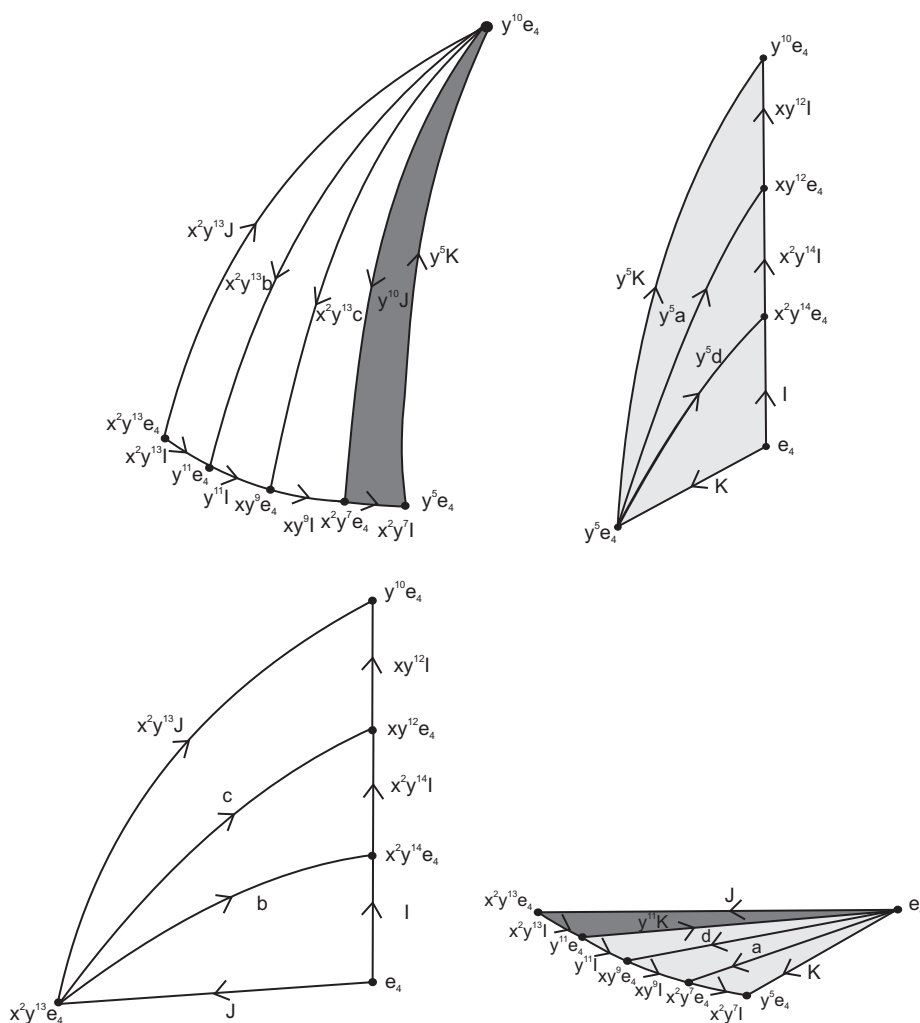
Pelas relações do  $D_{3,16}$ , escolhamos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \tilde{*} x^2y^{14}e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2y^{13}e_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^5e_4.$$

Deste modo,  $\mathfrak{F}_{48;1,3}$  é mostrado na figura abaixo:



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.



Escolhemos, dentre as células, acima um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$c_0 = e_4, \quad c_{1,1} = I, \quad c_{1,2} = J, \quad c_{1,3} = K, \quad c_{2,1} = x^2y^{13}e_4 \approx x^2y^7e_4 \approx y^{10}e_4$$



$$c_{2,2} = x^2y^7e_4 \tilde{*} y^5e_4 \tilde{*} y^{10}e_4, \quad c_{2,3} = y^5e_4 \tilde{*} e_4 \tilde{*} y^{10}e_4$$

$$c_3 = (1 + x^2y^{14} + (x^2y^{14})^2)I \tilde{*} (x^2y^{13} + y^{11} + xy^9 + x^2y^7)I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,16}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.4)$$

onde os bordos são

$$\partial_1(c_{1,1}) = (x^2y^{14} - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = (x^2y^{13} - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = (y^5 - 1)c_0$$

$$\partial_2(c_{2,1}) = (x^2y^{13} + y^{11} + xy^9)c_{1,1} - (x^2y^{13} + y^{10})c_{1,2}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = x^2y^7c_{1,1} + y^{10}c_{1,2} + y^5c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = (1 + x^2y^{14} + (x^2y^{14})^2)c_{1,1} - (y^5 + 1)c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = (1 - x^2y^3)c_{2,1} + (1 - y^6)c_{2,2} + (1 - y^{11})c_{2,3}$$

**Afirmção 2.3.4.** *O complexo de cadeias 2.3.4 é semi-exato.*

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^{13} + y^{11} + xy^9 & -x^2y^{13} - y^{10} & 0 \\ x^2y^7 & y^{10} & y^5 \\ 1 + x^2y^{14} + xy^{12} & 0 & -y^5 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^{14} - 1 \\ x^2y^{13} - 1 \\ y^5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\bullet (x^2y^9 + y^{11} + xy^9)(x^2y^{14} - 1) + (-x^2y^{13} - y^{10})(x^2y^{13} - 1) = x^2y^{13}x^2y^{14} - x^2y^{13} + y^{11}x^2y^{14} - y^{11} + xy^9x^2y^{14} - xy^9 - x^2y^{13}x^2y^{13} + x^2y^{13} - y^{10}x^2y^{13} + y^{10} = y^{11} + xy^9 - y^{11} + x^2y^7 - xy^9 - y^{10} - x^2y^7 + y^{10} = 0.$$

$$\bullet x^2y^7(x^2y^{14} - 1) + y^{10}(x^2y^{13} - 1) + y^5(y^5 - 1) = x^2y^7x^2y^{14} - x^2y^7 + y^{10}x^2y^{13} - y^{10} + y^5y^5 - y^5 = y^5 - x^2y^7 + x^2y^7 - y^{10} + y^{10} - y^5 = 0$$

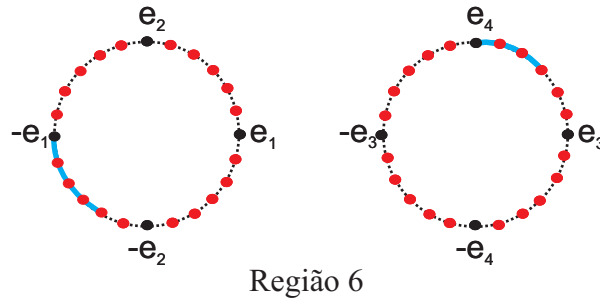
$$\bullet (1 + x^2y^{14} + xy^{12})(x^2y^{14} - 1) + (-y^5 - 1)(y^5 - 1) = x^2y^{14} - 1 + x^2y^{14}x^2y^{14} - x^2y^{14} + xy^{12}x^2y^{14} - xy^{12} - y^5y^5 + y^5 - y^5 + 1 = xy^{12} + y^{10} - xy^{12} - y^{10} = 0$$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^3 & 1 - y^6 & 1 - y^{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^{13} + y^{11} + xy^9 & -x^2y^{13} - y^{10} & 0 \\ x^2y^7 & y^{10} & y^5 \\ 1 + x^2y^{14} + xy^{12} & 0 & -y^5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(1 - x^2y^3)(x^2y^{13} + y^{11} + xy^9) + (1 - y^6)x^2y^7 + (1 - y^{11})(1 + x^2y^{14} + xy^{12}) = x^2y^{13} + y^{11} + xy^9 - x^2y^3x^2y^{13} - x^2y^3y^{11} - x^2y^3xy^9 + x^2y^7 - y^6x^2y^7 + 1 + x^2y^{14} + xy^{12} - y^{11} - y^{11}x^2y^{14} - y^{11}xy^{12} = x^2y^{13} + xy^9 - 1 - x^2y^{14} - xy^{12} + x^2y^7 - x^2y^{13} + 1 + x^2y^{14} + xy^{12} - xy^9 - x^2y^7 = 0.$
- $(1 - x^2y^3)(-x^2y^{13} - y^{10}) + (1 - y^6)y^{10} = -x^2y^{13} - y^{10} + x^2y^3x^2y^{13} + x^2y^3y^{10} + y^{10} - y^6y^{10} = -x^2y^{13} + 1 + x^2y^{13} - 1 = 0.$
- $(1 - y^6)y^5 + (1 - y^{11})(-y^5 - 1) = y^5 - y^{11} - y^5 - 1 + y^{16} + y^{11} = -1 + 1 = 0. \quad \square$

Agora, consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,16}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 5$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,16}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{48;1,5}$  representada abaixo:



O primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 15\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 8\varepsilon$  no plano-34. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 8\varepsilon + \beta 15\varepsilon \pmod{24} \iff -1 = -8\alpha + 15\beta \pmod{24} \iff \alpha = 2 \text{ e } \beta = 1$$

O primeiro elemento é  $x^2y^2$ .

Assim, os pontos no plano-34 no sentido horário são

$$e_4, x^2y^2e_4, (x^2y^2)^2e_4, (x^2y^2)^3e_4.$$

Usando as relações, obtemos  $e_4, x^2y^2e_4, xy^4e_4, y^6e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'}y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{15}e_4$  no primeiro ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta'3\varepsilon = 15\beta'\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha'8\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha'8\varepsilon + \beta'15\varepsilon \pmod{24} \iff 1 = 8\alpha' + 15\beta' \pmod{24} \iff \alpha' = 2 \text{ e } \beta' = -1$$

Portanto, o elemento procurado é  $x^2y^{-2} = x^2y^{14}$ .

Assim, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $(x^2y^{14})^6y^{15}e_4, (x^2y^{14})^7y^{15}e_4, (x^2y^{14})^8y^{15}e_4, (x^2y^{14})^9y^{15}e_4, (x^2y^{14})^{10}y^{15}e_4$ .

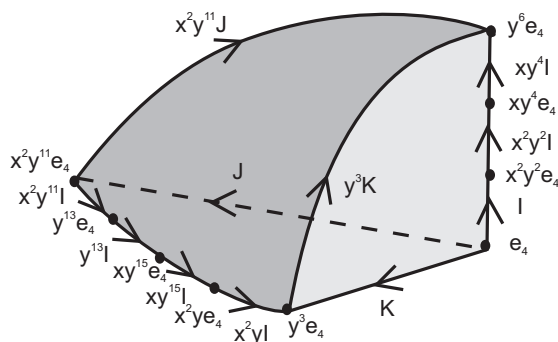
Usando as relações, obtemos

$$y^3e_4, x^2ye_4, xy^{15}e_4, y^{13}e_4, x^2y^{11}e_4.$$

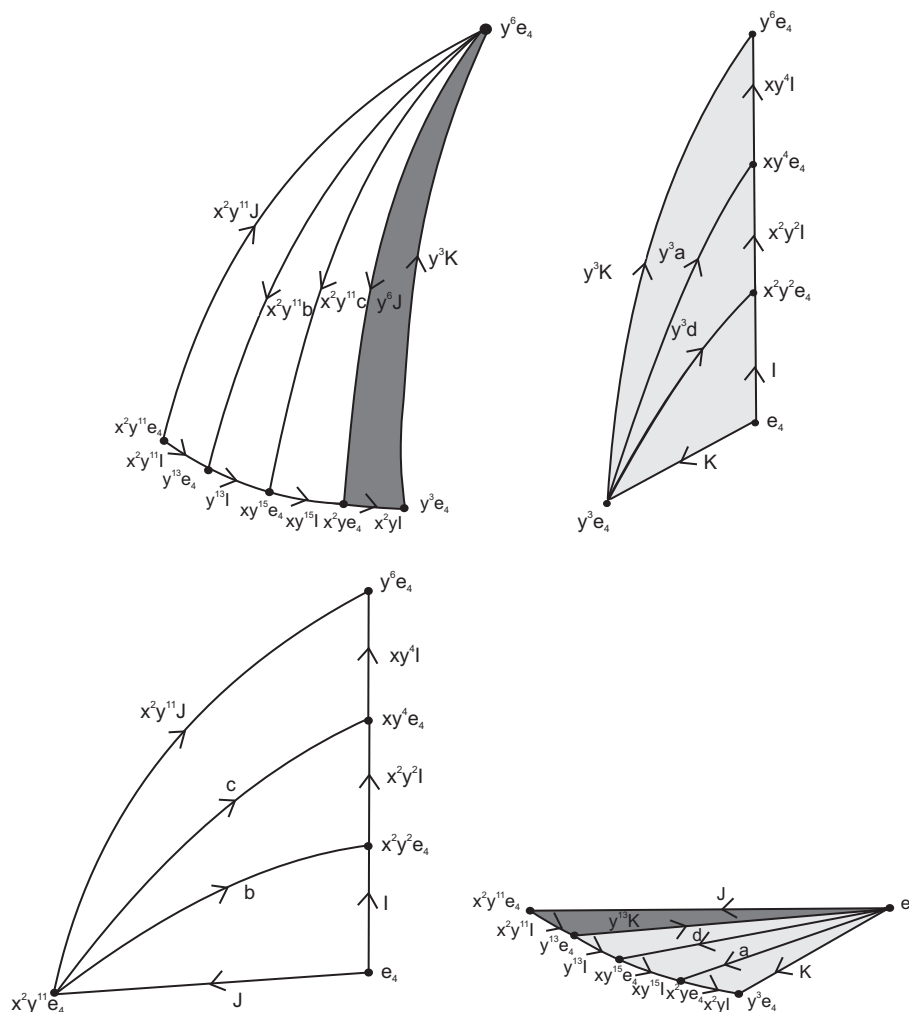
Através das relações do  $D_{3,16}$ , escolhemos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \tilde{*} x^2y^2e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2y^{11}e_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^3e_4.$$

Deste modo,  $\mathfrak{F}_{48;1,5}$  é mostrado na figura abaixo:



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.



Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$c_0 = e_4, \quad c_{1,1} = I, \quad c_{1,2} = J, \quad c_{1,3} = K, \quad c_{2,1} = x^2y^{11}e_4 \tilde{*} x^2ye_4 \tilde{*} y^6e_4$$

$$c_{2,2} = x^2ye_4 \tilde{*} y^3e_4 \tilde{*} y^6e_4, \quad c_{2,3} = y^3e_4 \tilde{*} e_4 \tilde{*} y^6e_4$$

$$c_3 = (1 + x^2y^2 + (x^2y^2)^2)I \tilde{*} (x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15} + x^2y)I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,16}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.5)$$

onde os bordos são

$$\begin{aligned}\partial_1(c_{1,1}) &= (x^2y^2 - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,2}) &= (x^2y^{11} - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,3}) &= (y^3 - 1)c_0 \\ \partial_2(c_{2,1}) &= (x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15})c_{1,1} - (y^6 + x^2y^{11})c_{1,2} \\ \partial_2(c_{2,2}) &= x^2yc_{1,1} + y^6c_{1,2} + y^3c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,3}) &= (1 + x^2y^2 + (x^2y^2)^2)c_{1,1} - (y^3 + 1)c_{1,3} \\ \partial_3(c_3) &= (1 - x^2y^5)c_{2,1} + (1 - y^{10})c_{2,2} + (1 - y^{13})c_{2,3}\end{aligned}$$

**Afirmção 2.3.5.** *O complexo de cadeias 2.3.5 é semi-exato.*

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15} & -y^6 - x^2y^{11} & 0 \\ x^2y & y^6 & y^3 \\ 1 + x^2y^2 + xy^4 & 0 & -y^3 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^2 - 1 \\ x^2y^{11} - 1 \\ y^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15})(x^2y^2 - 1) + (-y^6 - x^2y^{11})(x^2y^{11} - 1) = x^2y^{11}x^2y^2 - x^2y^{11} + y^{13}x^2y^2 - y^{13} + xy^{15}x^2y^2 - xy^{15} - y^6x^2y^{11} + y^6 - x^2y^{11}x^2y^{11} + x^2y^{11} = y^{13} + xy^{15} - y^{13} + x^2y - xy^{15} - x^2y + y^6 - y^6 = 0.$
- $x^2y(x^2y^2 - 1) + y^6(x^2y^{11} - 1) + y^3(y^3 - 1) = x^2yx^2y^2 - x^2y + y^6x^2y^{11} - y^6 + y^6 - y^3 = y^3 - x^2y + x^2y - y^3 = 0.$
- $(1 + x^2y^2 + xy^4)(x^2y^2 - 1) + (-y^3 - 1)(y^3 - 1) = x^2y^2 - 1 + x^2y^2x^2y^2 - x^2y^2 + xy^4x^2y^2 - xy^4 - y^6 + y^3 - y^3 + 1 = xy^4 + y^6 - xy^4 - y^6 = 0.$

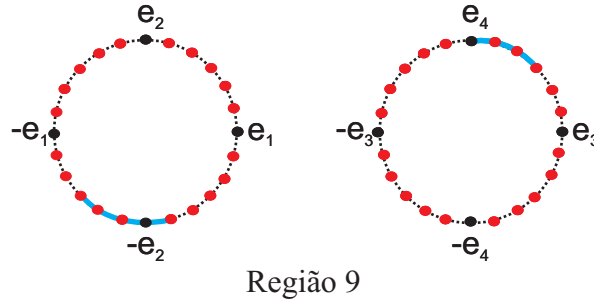
$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y^{10} & 1 - y^{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15} & -y^6 - x^2y^{11} & 0 \\ x^2y & y^6 & y^3 \\ 1 + x^2y^2 + xy^4 & 0 & -y^3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(1 - x^2y^5)(x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15}) + (1 - y^{10})x^2y + (1 - y^{13})(1 + x^2y^2 + xy^4) = x^2y^{11} + y^{13} + xy^{15} - x^2y^5x^2y^{11} - x^2y^5y^{13} - x^2y^5xy^{15} + x^2y - y^{10}x^2y + 1 + x^2y^2 + xy^4 - y^{13} - y^{13}x^2y^2 - y^{13}xy^4 = x^2y^{11} + xy^{15} - 1 - x^2y^2 - xy^4 + x^2y - x^2y^{11} + 1 + x^2y^2 + xy^4 - xy^{15} - x^2y = 0.$

- $(1 - x^2y^5)(-y^6 - x^2y^{11}) + (1 - y^{10})y^6 = -y^6 - x^2y^{11} + x^2y^5y^6 + x^2y^5x^2y^{11} + y^6 - y^{10}y^6 = -x^2y^{11} + x^2y^{11} + 1 - 1 = 0.$
- $(1 - y^{10})y^3 + (1 - y^{13})(-y^3 - 1) = y^3 - y^{13} - y^3 - 1 + y^{16} + y^{13} = -1 + 1 = 0. \quad \square$

Agora, consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,16}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 7$ . Como vimos, uma região fundamental para a ação de  $D_{3,16}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{48;1,7}$  representada abaixo:



O primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 21\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 8\varepsilon$  no plano-34. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 8\varepsilon + \beta 21\varepsilon \pmod{24} \iff -1 = -8\alpha + 21\beta \pmod{24} \iff \alpha = 8 \text{ e } \beta = 3$$

O elemento procurado é  $x^8 y^6 = x^2 y^6$ .

Assim, os pontos no plano-34 no sentido horário são

$$e_4, x^2 y^6 e_4, (x^2 y^6)^2 e_4, (x^2 y^6)^3 e_4.$$

Usando as relações, obtemos  $e_4, x^2 y^6 e_4, xy^{12} e_4, y^2 e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{15} e_4$  no primeiro ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta' 3\varepsilon = 21\beta' \varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha' 8\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha' 8\varepsilon + \beta' 21\varepsilon \pmod{24} \iff 1 = 8\alpha' + 21\beta' \pmod{24} \iff \alpha' = 2 \text{ e } \beta' = 5$$

Dessa forma, o elemento procurado é  $x^2 y^{10}$ .

Assim, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são

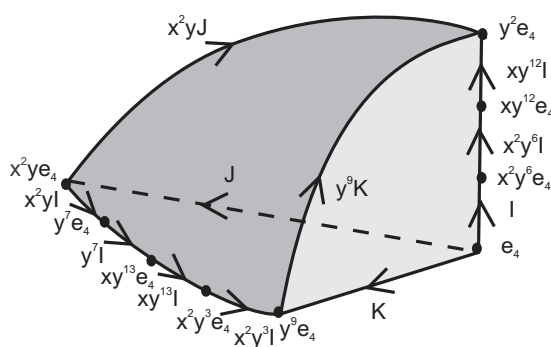
$$(x^2y^{10})^9y^{15}e_4, (x^2y^{10})^{10}y^{15}e_4, (x^2y^{10})^{11}y^{15}e_4, (x^2y^{10})^{12}y^{15}e_4, (x^2y^{10})^{13}y^{15}e_4.$$

Usando as relações, obtemos  $y^9e_4, x^2y^3e_4, xy^{13}e_4, y^7e_4, x^2ye_4$ .

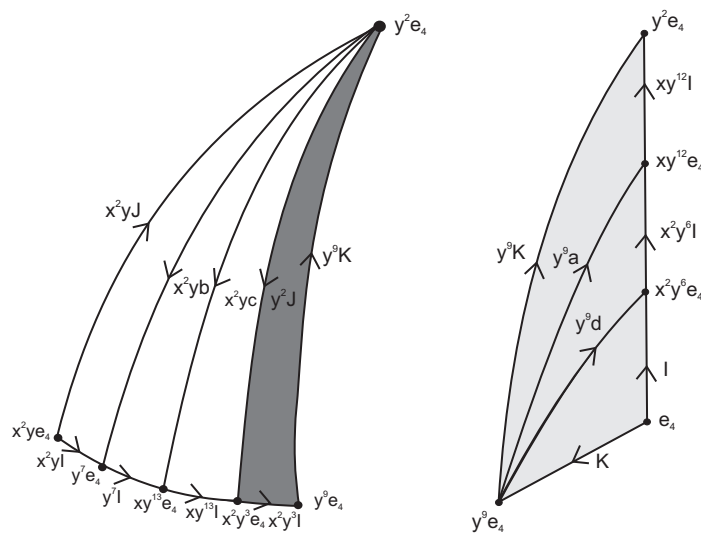
Pelas relações do  $D_{3,16}$ , escolhemos como 1-células fundamentais:

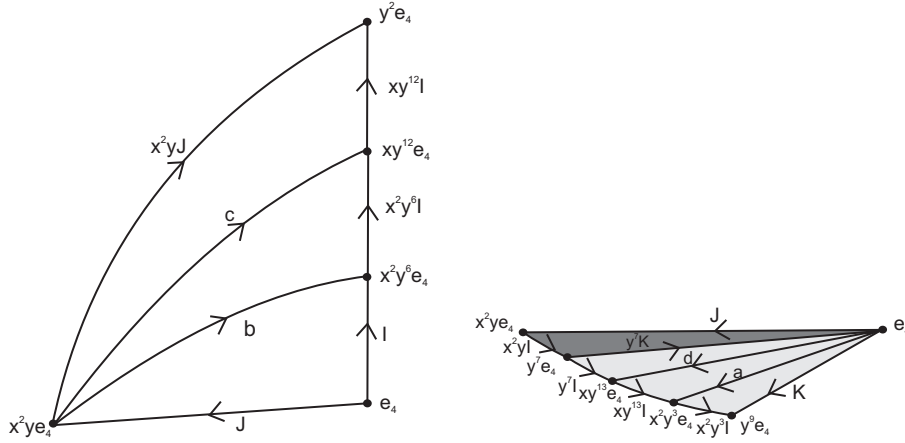
$$I = e_4 \tilde{*} x^2y^6e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2ye_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^9e_4.$$

Deste modo,  $\tilde{\mathcal{F}}_{48;1,7}$  é mostrado na figura abaixo:



Abaixo, temos cada face da região fundamental e suas identificações.





Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$c_0 = e_4, \quad c_{1,1} = I, \quad c_{1,2} = J, \quad c_{1,3} = K, \quad c_{2,1} = x^2ye_4 \approx x^2y^3e_4 \approx y^2e_4$$

$$c_{2,2} = x^2y^3e_4 \approx y^9e_4 \approx y^2e_4, \quad c_{2,3} = y^9e_4 \approx e_4 \approx y^2e_4$$

$$c_3 = (1 + x^2y^6 + (x^2y^6)^2)I \approx (x^2y + y^7 + xy^{13} + x^2y^3)I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,16}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,16}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.6)$$

onde os bordos são

$$\partial_1(c_{1,1}) = (x^2y^6 - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = (x^2y - 1)c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = (y^9 - 1)c_0$$

$$\partial_2(c_{2,1}) = (x^2y + y^7 + xy^{13})c_{1,1} - (y^2 + x^2y)c_{1,2}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = x^2y^3c_{1,1} + y^2c_{1,2} + y^9c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = (1 + x^2y^6 + (x^2y^6)^2)c_{1,1} - (y^9 + 1)c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = (1 - x^2y^{15})c_{2,1} + (1 - y^{14})c_{2,2} + (1 - y^7)c_{2,3}$$

**Afirmção 2.3.6.** O complexo de cadeias 2.3.6 é semi-exato.



$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y + y^7 + xy^{13} & -y^2 - x^2y & 0 \\ x^2y^3 & y^2 & y^9 \\ 1 + x^2y^6 + xy^{12} & 0 & -y^9 - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^6 - 1 \\ x^2y - 1 \\ y^9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(x^2y + y^7 + xy^{13})(x^2y^6 - 1) + (-y^2 - x^2y)(x^2y - 1) = x^2yx^2y^6 - x^2y + y^7x^2y^6 - y^7 + xy^{13}x^2y^6 - xy^{13} - y^2x^2y + y^2 - x^2yx^2y + x^2y = y^7 + xy^{13} - y^7 + x^2y^3 - xy^{13} - x^2y^3 + y^2 - y^2 = 0.$
- $x^2y^3(x^2y^6 - 1) + y^2(x^2y - 1) + y^9(y^9 - 1) = x^2y^3x^2y^6 - x^2y^3 + y^2x^2y - y^2 + y^9y^9 - y^9 = y^9 - x^2y^3 + x^2y^3 - y^2 + y^2 - y^9 = 0.$
- $(1 + x^2y^6 + xy^{12})(x^2y^6 - 1) + (-y^9 - 1)(y^9 - 1) = x^2y^6 - 1 + x^2y^6x^2y^6 - x^2y^6 + xy^{12}x^2y^6 - xy^{12} - y^9y^9 + y^9 - y^9 + 1 = xy^{12} + y^2 - xy^{12} - y^2 = 0.$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^{15} & 1 - y^{14} & 1 - y^7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y + y^7 + xy^{13} & -y^2 - x^2y & 0 \\ x^2y^3 & y^2 & y^9 \\ 1 + x^2y^6 + xy^{12} & 0 & -y^9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

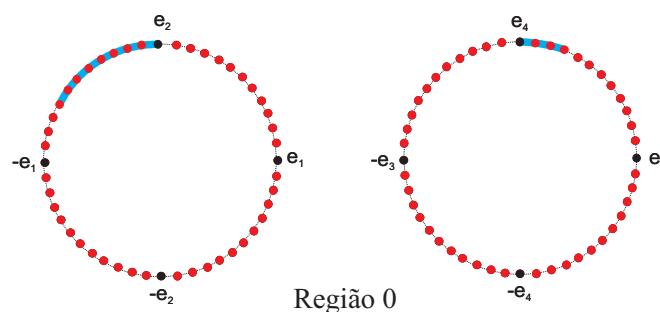
De fato,

- $(1 - x^2y^{15})(x^2y + y^7 + xy^{13}) + (1 - y^{14})x^2y^3 + (1 - y^7)(1 + x^2y^6 + xy^{12}) = x^2y + y^7 + xy^{13} - x^2y^{15}x^2y - x^2y^{15}y^7 - x^2y^{15}xy^{13} + x^2y^3 - y^{14}x^2y^3 + 1 + x^2y^6 + xy^{12} - y^7 - y^7x^2y^6 - y^7xy^{12} = x^2y + xy^{13} - 1 - x^2y^6 - xy^{12} + x^2y^3 - x^2y + 1 + x^2y^6 + xy^{12} - xy^{13} - x^2y^3 = 0.$
- $(1 - x^2y^{15})(-y^2 - x^2y) + (1 - y^{14})y^2 = -y^2 - x^2y + x^2y^{15}y^2 + x^2y^{15}x^2y + y^2 - y^{14}y^2 = -x^2y + x^2y + 1 - 1 = 0.$
- $(1 - y^{14})y^9 + (1 - y^7)(-y^9 - 1) = y^9 - y^{14}y^9 - y^9 - 1 + y^{16} + y^7 = -y^7 - 1 + 1 + y^7 = 0. \quad \square$

### 2.3.3 Ação de $D_{3,32}$ em $S^3$

Consideremos o grupo metacíclico  $D_{3,32}$  com a representação  $k = 1$  e  $l = 1$ . Faremos apenas esse caso, pois como vimos no grupo  $D_{3,8}$  e  $D_{3,16}$  as identificações dos lados das regiões fundamentais e a quantidade de células são mantidas, independente da representação escolhida para o grupo em questão, mudando apenas os bordos.

Uma região fundamental para a ação de  $D_{3,32}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{96;1,1}$  representada abaixo:



Novamente, vamos descobrir os dois elementos fundamentais para determinarmos os outros pontos que aparecem na região fundamental.

Lembramos que o primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, agora a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $l\beta 3\varepsilon = 3\beta\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 16\varepsilon$  no plano-34. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha 16\varepsilon + \beta 3\varepsilon \pmod{48} \iff -1 = -16\alpha + 3\beta \pmod{48} \iff \alpha = 1 \text{ e } \beta = 5$$

O elemento procurado é  $xy^{10}$ .

Logo, os pontos no plano-34 no sentido horário são  $e_4, xy^{10}e_4, (xy^{10})^2e_4, (xy^{10})^3e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $e_4, xy^{10}e_4, x^2y^{20}e_4, y^{30}e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{31}e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que agora a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $l\beta' 3\varepsilon = 3\beta'\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha' 16\varepsilon$  no plano-12. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha' 16\varepsilon + \beta' 3\varepsilon \pmod{48} \iff 1 = 16\alpha' + 3\beta' \pmod{48} \iff \alpha' = 1 \text{ e } \beta' = 11$$

Assim, o elemento procurado é  $xy^{22}$ .

Dessa forma, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $y^{31}e_4, (xy^{22})y^{31}e_4, (xy^{22})^2y^{31}e_4, (xy^{22})^3y^{31}e_4, (xy^{22})^4y^{31}e_4, (xy^{22})^5y^{31}e_4, (xy^{22})^6y^{31}e_4, (xy^{22})^7y^{31}e_4, (xy^{22})^8y^{31}e_4$ .

Usando as relações, obtemos  $y^{31}e_4, xy^{21}e_4, x^2y^{11}e_4, ye_4, xy^{23}e_4, x^2y^{13}e_4, y^3e_4, xy^{25}e_4, x^2y^{15}e_4$ .

Usando as relações do  $D_{3,32}$ , temos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \tilde{*} xy^{10}e_4 \quad J = e_4 \tilde{*} x^2y^{15}e_4 \quad K = e_4 \tilde{*} y^{31}e_4.$$

Deste modo,  $\mathfrak{F}_{96;1,1}$  é mostrado na figura abaixo:



$$c_{2,2} = x^2y^{13}e_4 \tilde{*} y^{31}e_4 \tilde{*} y^{30}e_4, \quad c_{2,3} = y^{31}e_4 \tilde{*} e_4 \tilde{*} y^{30}e_4$$

$$c_3 = (1 + xy^{10} + x^2y^{20})I \tilde{*} (x^2y^{15} + xy^{25} + y^3 + x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21})I$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,32}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,32}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,32}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,32}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,32}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0, \quad (2.3.7)$$

onde os bordos são

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{1,1}) &= (xy^{10} - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,2}) &= (x^2y^{15} - 1)c_0 \\ \partial_1(c_{1,3}) &= (y^{31} - 1)c_0 \\ \partial_2(c_{2,1}) &= (x^2y^{15} + xy^{25} + y^3)c_{1,1} - (x^2y^{15} + y^{30})c_{1,2} \\ \partial_2(c_{2,2}) &= (x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21})c_{1,1} + y^{30}c_{1,2} + y^{31}c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,3}) &= (1 + xy^{10} + (xy^{10})^2)c_{1,1} - (y^{31} + 1)c_{1,3} \\ \partial_3(c_3) &= (1 - x^2y^{17})c_{2,1} + (1 - y^2)c_{2,2} + (1 - y)c_{2,3} \end{aligned}$$

**Afirmção 2.3.7.** *O complexo de cadeias 2.3.7 é semi-exato.*

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^{15} + xy^{25} + y^3 & -x^2y^{15} - y^{30} & 0 \\ x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21} & y^{30} & y^{31} \\ 1 + xy^{10} + x^2y^{20} & 0 & -y^{31} - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^{10} - 1 \\ x^2y^{15} - 1 \\ y^{31} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(x^2y^{15} + xy^{25} + y^3)(xy^{10} - 1) + (-x^2y^{15} - y^{30})(x^2y^{15} - 1) = x^2y^{15}xy^{10} - x^2y^{15} + xy^{25}xy^{10} - xy^{25} + y^3xy^{10} - y^3 - x^2y^{15}x^2y^{15} + x^2y^{15} - y^{30}x^2y^{15} + y^{30} = xy^{25} + y^3 - xy^{25} + x^2y^{13} - y^3 - y^{30} - x^2y^{13} + y^{30} = 0.$

- $(x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21})(xy^{10} - 1) + y^{30}(x^2y^{15} - 1) + y^{31}(y^{31} - 1) = x^2y^{13}xy^{10} - x^2y^{13} + xy^{23}xy^{10} - xy^{23} + yxy^{10} - y + x^2y^{11}xy^{10} - x^2y^{11} + xy^{21}xy^{10} - xy^{21} + y^{30}x^2y^{15} - y^{30} + y^{31}y^{31} -$

$$-y^{31} = xy^{23} - x^2y^{13} + y - xy^{23} + x^2y^{11} - y + xy^{21} - x^2y^{11} + y^{31} - xy^{21} + x^2y^{13} - y^{30} + y^{30} - y^{31} = 0.$$

$$\bullet (1 + xy^{10} + x^2y^{20})(xy^{10} - 1) + (-y^{31} - 1)(y^{31} - 1) = xy^{10} - 1 + xy^{10}xy^{10} - xy^{10} + x^2y^{20}xy^{10} - x^2y^{20} - y^{31}y^{31} + y^{31} - y^{31} + 1 = x^2y^{20} + y^{30} - x^2y^{20} - y^{30} = 0.$$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^{17} & 1 - y^2 & 1 - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^{15} + xy^{25} + y^3 & -x^2y^{15} - y^{30} & 0 \\ x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21} & y^{30} & y^{31} \\ 1 + xy^{10} + x^2y^{20} & 0 & -y^{31} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\bullet (1 - x^2y^{17})(x^2y^{15} + xy^{25} + y^3) + (1 - y^2)(x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21}) + (1 - y)(1 + xy^{10} + x^2y^{20}) = x^2y^{15} + xy^{25} + y^3 - x^2y^{17}x^2y^{15} - x^2y^{17}xy^{25} - x^2y^{17}y^3 + x^2y^{13} + xy^{23} + y + x^2y^{11} + xy^{21} - y^2x^2y^{13} - y^2xy^{23} - y^3 - y^2x^2y^{11} - y^2xy^{21} + 1 + xy^{10} + x^2y^{20} - y - yxy^{10} - yx^2y^{20} = x^2y^{15} + xy^{25} - 1 - xy^{10} - x^2y^{20} + x^2y^{13} + xy^{23} + x^2y^{11} + xy^{21} - x^2y^{15} - xy^{25} - x^2y^{13} - xy^{23} + 1 + xy^{10} + x^2y^{20} - x^2y^{11} - xy^{21} = 0.$$

$$\bullet (1 - x^2y^{17})(-x^2y^{15} - y^{30}) + (1 - y^2)y^{30} = -x^2y^{15} - y^{30} + x^2y^{17}x^2y^{15} + x^2y^{17}y^{30} + y^{30} - y^2y^{30} = -x^2y^{15} + 1 + x^2y^{15} - 1 = 0.$$

$$\bullet (1 - y^2)y^{31} + (1 - y)(-y^{31} - 1) = y^{31} - y^2y^{31} - y^{31} - 1 + y^{32} + y = -y - 1 + 1 + y = 0. \quad \square$$

### 2.3.4 Ação de $D_{(2h+1),2^t}$ em $S^3$

Com base em todos os exemplos vistos anteriormente, podemos generalizar o complexo de cadeias para a ação do grupo  $D_{(2h+1),2^t}$  na esfera de dimensão três, através do seguinte resultado:

**Teorema 2.3.3.** *Considerando a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  na esfera de dimensão três, com representação  $k \in \mathbb{N}$  e  $l = 2j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , onde  $\text{mdc}(k, 2h + 1) = 1$  e  $\text{mdc}(l, 2^t) = 1$ , temos o seguinte complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células,*

três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0.$$

Sejam  $z = (2h + 1)j$  e inteiros  $\alpha, \beta, \alpha'$  e  $\beta'$  que satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{cases} -\varepsilon = -\alpha k 2^{t-1} \varepsilon + \beta l (2h + 1) \varepsilon \pmod{(2h + 1) \cdot 2^{t-1}} \\ \varepsilon = \alpha' k 2^{t-1} \varepsilon + \beta' l (2h + 1) \varepsilon \pmod{(2h + 1) \cdot 2^{t-1}} \end{cases}$$

Se  $2h + 1 > 2^{t-2}$ , as células são

$$\begin{aligned} c_0 &= e_4 \\ c_{1,1} &= e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta}) e_4 \\ c_{1,2} &= e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4 \\ c_{1,3} &= e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\ c_{2,1} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4 \\ c_{2,2} &= (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \\ c_{2,3} &= e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \\ c_3 &= [1 + x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] I \tilde{*} [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^t-1} + \\ &\quad + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] I, \end{aligned}$$

e os bordos são:

$$\begin{aligned} \partial_1(c_{1,1}) &= [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] c_0 \\ \partial_1(c_{1,2}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] c_0 \\ \partial_1(c_{1,3}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] c_0 \\ \partial_2(c_{2,1}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} c_{1,2} + \\ &\quad + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,2}) &= [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] c_{1,1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,2} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,3}) &= [1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1}] c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,2} - c_{1,3} \\ \partial_3(c_3) &= [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}] c_{2,1} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1}] c_{2,2} + [1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}}] c_{2,3} \end{aligned}$$

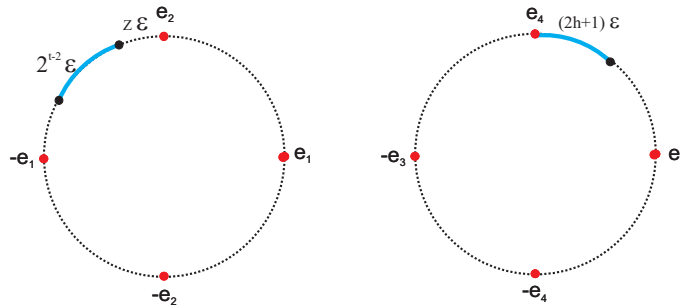
Se  $2^{t-2} > 2h + 1$ , as células são

$$\begin{aligned}
c_0 &= e_4 \\
c_{1,1} &= e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta}) e_4 \\
c_{1,2} &= e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4 \\
c_{1,3} &= e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\
c_{2,1} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4 \\
c_{2,2} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} e_4 \\
c_{2,3} &= e_4 \tilde{*} (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \tilde{*} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \\
c_3 &= [1 + x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] I \tilde{*} [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^t-1} + \\
&\quad + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] I
\end{aligned}$$

e os bordos são:

$$\begin{aligned}
\partial_1(c_{1,1}) &= [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] c_0 \\
\partial_1(c_{1,2}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] c_0 \\
\partial_1(c_{1,3}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] c_0 \\
\partial_2(c_{2,1}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}] c_{1,2} \\
\partial_2(c_{2,2}) &= [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1}] c_{1,1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} c_{1,2} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,3} \\
\partial_2(c_{2,3}) &= [1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + 1] c_{1,3} \\
\partial_3(c_3) &= [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}] c_{2,1} + [1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1}] c_{2,2} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1}] c_{2,3}.
\end{aligned}$$

De fato, como vimos uma região fundamental para a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  sobre  $S^3$  é  $\mathfrak{F}_{(2h+1),2^t;k,l}$  representada abaixo:



Lembrando que  $z = j(2h + 1)$ , uma vez que estamos considerando  $q = 0$  nas regiões

fundamentais  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;k,l}^q$  associadas as diferentes representações das ações de  $D_{(2h+1).2^t}$  em  $S^3$  (vide observação 2.3.1).

Como todas as regiões fundamentais sempre mantiveram no plano-34 o arco começando em  $e_4$ , é natural que escolhamos  $e_4$  como sendo a 0-célula fundamental.

Precisamos descobrir os dois elementos fundamentais para determinarmos os outros pontos que aparecem na região fundamental.

O primeiro elemento, o qual será da forma  $x^\alpha y^{2\beta}$ , é aquele que leva o ponto  $e_4$  no próximo ponto do arco escolhido no plano-34. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta}$  é  $\beta l(2h+1)\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^\alpha$  é  $-\alpha 2^{t-1}\varepsilon$  no plano-34. Observe que a potência de  $y$  é par, pois assim a ação de  $y$  não troca o ponto de plano. Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha k 2^{t-1} \varepsilon + \beta l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

Assim, os pontos no plano-34 no sentido horário são  $e_4$ ,  $(x^\alpha y^{2\beta})e_4$ ,  $(x^\alpha y^{2\beta})^2 e_4$ ,  $(x^\alpha y^{2\beta})^3 e_4$ , ...,  $(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4$ .

Observe que sempre  $e_2 = y^{2^{t-1}} e_4$ .

O segundo elemento, o qual será da forma  $x^{\alpha'} y^{2\beta'}$ , é aquele que leva o ponto  $e_2 = y^{2^{t-1}} e_4$  nos pontos do arco escolhido no plano-12. Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido anti-horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta'}$  é  $\beta' l(2h+1)\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'}$  é  $\alpha' 2^{t-1}\varepsilon$  no plano-12. Observe que a potência de  $y$  é par, pois assim a ação de  $y$  não troca o ponto de plano. Esse elemento nesse caso, precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha' k 2^{t-1} \varepsilon + \beta' l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

Assim, os pontos no plano-12 no sentido anti-horário são  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4$ ,  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} e_4$ ,  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} e_4$ , ...,  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4$ .

Temos como 1-células fundamentais:

$$I = e_4 \ast x^\alpha y^{2\beta} e_4 \quad J = e_4 \ast (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4 \quad K = e_4 \ast (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4.$$

Deste modo,  $\tilde{\mathfrak{F}}_{(2h+1).2^t;k,l}$  é dada pelo seguinte curved join:

$$[1 + x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] I \ast [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}] I$$

**Observação 2.3.4.** *Nos exemplos anteriores, estávamos escrevendo a última parcela desse join como  $[(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}}] I$ , pois considerávamos o sentido das flechas, porém na generalização optamos pelo contrário, apenas para as potências ficarem*

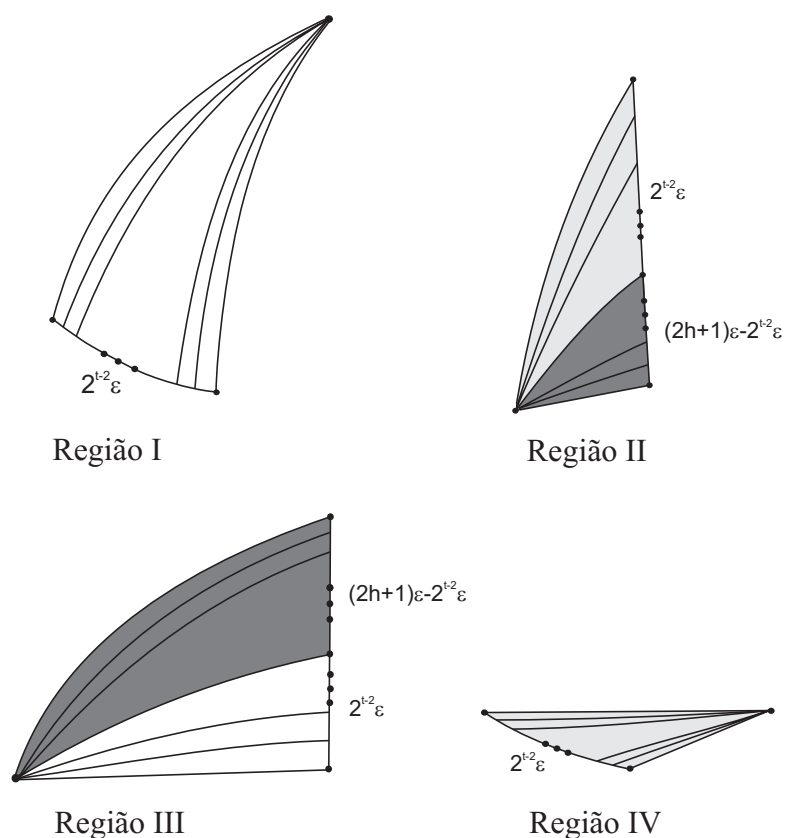


*crescentes.*

Independente da representação do grupo  $D_{(2h+1) \cdot 2^t}$ , teremos as seguintes identificações de cada face da região fundamental:

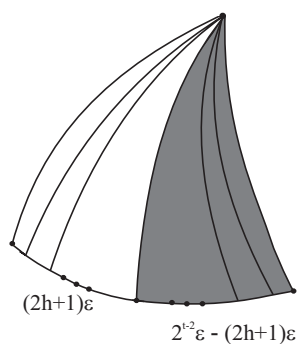
$$1^\circ) 2h + 1 > 2^{t-2}$$

Na Região I, os  $2^{t-2}\varepsilon$  são identificados com os  $2^{t-2}\varepsilon$  finais da Região III, os  $2^{t-2}\varepsilon$  da Região II são identificados com a Região IV, os  $(2h + 1)\varepsilon - 2^{t-2}\varepsilon$  da Região II são identificados com os primeiros  $(2h + 1)\varepsilon - 2^{t-2}\varepsilon$  da Região III.

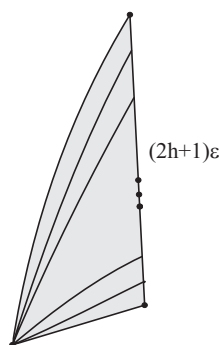


$$2^\circ) 2^{t-2} > 2h + 1$$

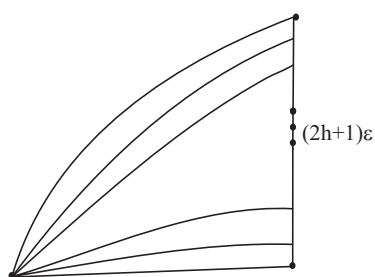
Na Região I, os primeiros  $(2h + 1)\varepsilon$  são identificados com os  $(2h + 1)\varepsilon$  da Região III, os  $2^{t-2}\varepsilon - (2h + 1)\varepsilon$  da Região I são identificados com os primeiros  $2^{t-2}\varepsilon - (2h + 1)\varepsilon$  da Região IV, a Região II é identificada com os  $(2h + 1)\varepsilon$  finais da Região IV.



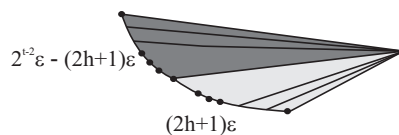
Região I



Região II



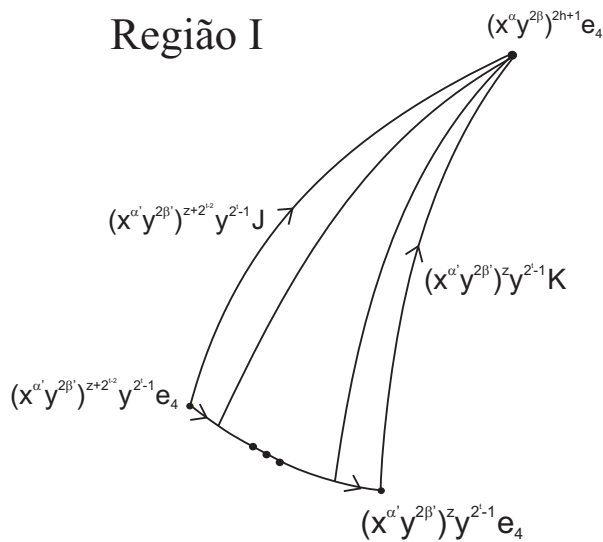
Região III



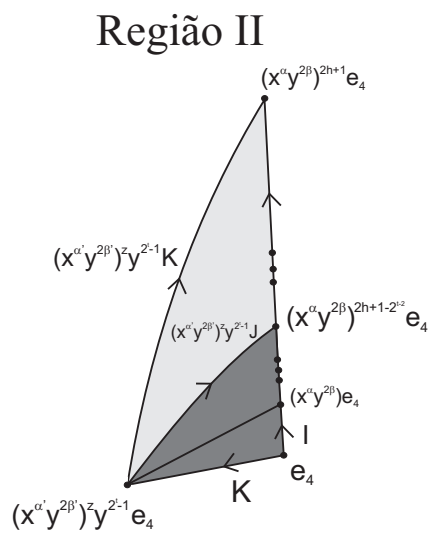
Região IV

Agora, descreveremos as células de cada caso:

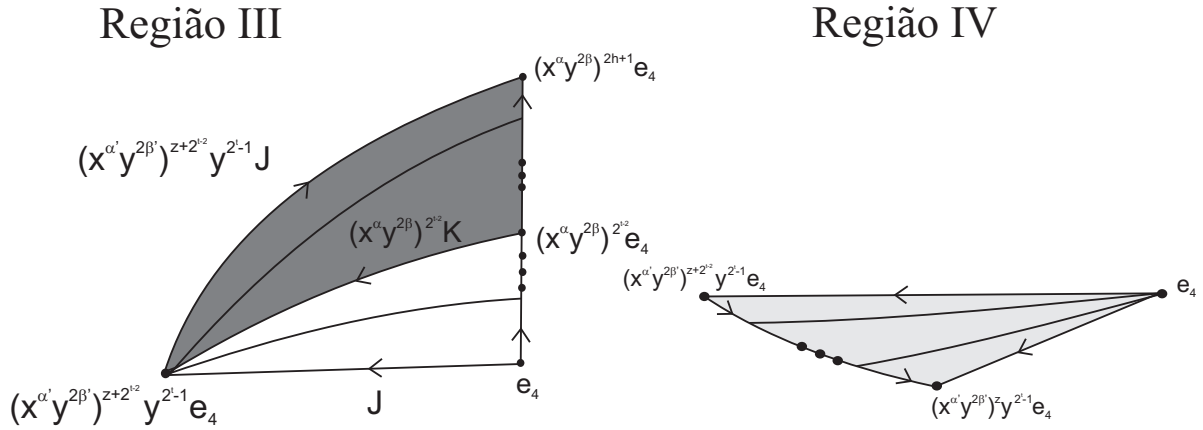
1°)  $2h + 1 > 2^{t-2}$



Região I



Região II



Acima temos cada lado da região fundamental com suas respectivas nomeações, considerando as relações do grupo metacíclico  $D_{(2h+1),2^t}$ .

Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$\begin{aligned}
c_0 &= e_4 \\
c_{1,1} &= I \\
c_{1,2} &= J \\
c_{1,3} &= K \\
c_{2,1} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4 \approx (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4 \\
c_{2,2} &= (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4 \approx (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4 \\
c_{2,3} &= e_4 \approx (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4 \\
c_3 &= [1 + x^{\alpha} y^{2\beta} + (x^{\alpha} y^{2\beta})^2 + \dots + (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2h}] I \approx [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + \\
&\quad + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}] I
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_0 \rangle \rightarrow 0,$$

onde os bordos são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\begin{aligned} \partial_2(c_{2,1}) = & [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} c_{1,2} + \\ & + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3} \end{aligned}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}}]c_{2,3}$$

**Afirmação 2.3.8.** *O complexo de cadeias acima é semi-exato.*

Antes de começarmos a calcular  $[\partial_1 \circ \partial_2]$  e  $[\partial_2 \circ \partial_3]$  faremos algumas considerações, as quais serão de grande valia para mostrar as igualdades desejadas.

$$\cdot x^{2h+1} = 1 = y^{2^t}$$

$$\cdot x^z = 1.$$

De fato,

$$x^z = x^{(2h+1)j} = (x^{2h+1})^j = 1^j = 1.$$

□

$$\cdot \alpha' = \alpha \pmod{(2h+1)}$$

De fato, na região II temos que  $K = [e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4]$  e na região III obtemos que  $(x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} K = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4]$ . Agora,

$$(x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} K = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} e_4, (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} \cdot (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4] = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} e_4, x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta+2\beta'z-1} e_4]$$

Assim,

$$x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta+2\beta'z-1} e_4 = (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4.$$

Como  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4 = x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta'z+2^{t-1}\beta'-1} e_4$ , obtemos

$$x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta+2\beta'z-1} e_4 = x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta'z+2^{t-1}\beta'-1} e_4 \iff x^{2^{t-2}\alpha} = x^{2^{t-2}\alpha'} \iff$$

$$\iff 2^{t-2}\alpha = 2^{t-2}\alpha' \pmod{(2h+1)} \iff \alpha = \alpha' \pmod{(2h+1)}.$$

□

$$\cdot \beta' = 2^{t-1} - \beta$$

De fato, temos as seguintes equações:

$$(I) \quad -\varepsilon = -\alpha 2^{t-1} \varepsilon + \beta l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

$$(II) \quad \varepsilon = \alpha' 2^{t-1} \varepsilon + \beta' l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

Como  $\alpha = \alpha'$ , obtemos

$$(I) \quad -\varepsilon = -\alpha 2^{t-1} \varepsilon + \beta l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

$$(II) \quad \varepsilon = \alpha 2^{t-1} \varepsilon + \beta' l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

Substituindo (II) em (I), temos

$$-\alpha 2^{t-1} \varepsilon - \beta' l(2h+1)\varepsilon = -\alpha 2^{t-1} \varepsilon + \beta l(2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

$$-\beta' l(2h+1) = \beta l(2h+1) \pmod{(2h+1).2^{t-1}} \iff (\beta + \beta')l(2h+1) = 0 \pmod{(2h+1).2^{t-1}}$$

Assim,  $(\beta + \beta')l(2h+1)$  é múltiplo de  $(2h+1).2^{t-1}$ , ou seja,

$$(\beta + \beta')l(2h+1) = (2h+1).2^{t-1}\eta, \quad \eta \in \mathbb{Z} \iff (\beta + \beta')l = 2^{t-1}\eta$$

Agora,  $l$  é ímpar, isso implica que  $l \neq 2^{t-1}$ . Além disso, como a ordem de  $y$  é  $2^t$  e  $2\beta$  é potência de  $y$ , obtemos que  $2\beta < 2^t$ . Analogamente,  $2\beta' < 2^t$ . Dessa forma,

$$\beta < 2^{t-1} \text{ e } \beta' < 2^{t-1} \iff \beta + \beta' < 2.2^{t-1} \iff \beta + \beta' < 2^t.$$

Pelas considerações acima, temos  $\beta + \beta' = 2^{t-1}$ , ou seja,  $\beta' = 2^{t-1} - \beta$ . □

$$\cdot y^{-2^{t-1}\beta} = y^{2^{t-1}\beta}.$$

De fato,

$$y^{2^{t-1}} \cdot y^{2^{t-1}} = y^{2^{t-1}+2^{t-1}} = y^{2 \cdot 2^{t-1}} = y^{2^t} = 1,$$

ou seja,  $y^{-2^{t-1}} = y^{2^{t-1}}$ .

Assim,

$$y^{-2^{t-1}\beta} = (y^{-2^{t-1}})^\beta = (y^{2^{t-1}})^\beta = y^{2^{t-1}\beta}.$$

□

$$\cdot y^{-4\beta z-2} = y^{2\beta(2h+1)}$$

De fato, na região III temos que  $J = [e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4]$  e na região II obtemos que  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} J = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4, (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4]$ . Agora,

$$\begin{aligned} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} J &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \cdot [e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4] \stackrel{\alpha=\alpha'}{=} \\ &= (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \cdot [e_4, (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} e_4] = y^{-2\beta z-1} \cdot [e_4, x^{\alpha 2^{t-2}} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} e_4] = \\ &= [y^{-2\beta z} e_4, x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} e_4]. \end{aligned}$$

Assim,

$$x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} = (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} e_4.$$

Como  $(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} = x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta}$ , obtemos

$$x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} = x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta}.$$

Portanto,  $y^{-4\beta z-2} = y^{2\beta(2h+1)}$ .

□

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \\ (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \\ 1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\cdot \begin{pmatrix} (x^\alpha y^{2\beta}) - 1 \\ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} - 1 \\ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\bullet \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + \left[ -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} \right] \\ &\cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} - 1 \right] + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} - 1 \right] = \\ &= \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+1} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+3} y^{-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + \\ &+ \left[ -(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right] \cdot \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - 1 \right] + (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \cdot \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1 \right] = \\ &= y^{-2\beta z} x^\alpha y^{-2\beta-1} x^\alpha y^{2\beta} + y^{-2\beta z} x^{2\alpha} y^{-4\beta-1} x^\alpha y^{2\beta} + y^{-2\beta z} x^{3\alpha} y^{-6\beta-1} x^\alpha y^{2\beta} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + y^{-2\beta z} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} x^\alpha y^{2\beta} - y^{-2\beta z} x^\alpha y^{-2\beta-1} - y^{-2\beta z} x^{2\alpha} y^{-4\beta-1} - y^{-2\beta z} x^{3\alpha} y^{-6\beta-1} - \dots \\
& \dots - y^{-2\beta z} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} - y^{-2\beta z} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} y^{-2\beta z} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + y^{-2\beta z} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + \\
& + y^{-2\beta z-1} y^{-2\beta z-1} - y^{-2\beta z-1} = \\
& = y^{-2\beta z-2\beta-1+2\beta} + x^\alpha y^{-2\beta z-4\beta-1+2\beta} + x^{2\alpha} y^{-2\beta z-6\beta-1+2\beta} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1+2\beta} - \\
& - x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} - x^{2\alpha} y^{-2\beta z-4\beta-1} - x^{3\alpha} y^{-2\beta z-6\beta-1} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} + \\
& + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} + y^{-4\beta z-2} - y^{-2\beta z-1} = \\
& = y^{-2\beta z-1} + x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + x^{2\alpha} y^{-2\beta z-4\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1+2\beta} - x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} - \\
& - x^{2\alpha} y^{-2\beta z-4\beta-1} - x^{3\alpha} y^{-2\beta z-6\beta-1} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - y^{-4\beta z-2} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} + \\
& + y^{-4\beta z-2} - y^{-2\beta z-1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}] \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] + \\
& + [-(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}] \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] = \\
& = \left[ (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + [(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1}] \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - 1] + \\
& + [-(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1}] \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1] = \\
& = (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}+1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}+2} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} - \\
& - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}+1} - \dots - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} + y^{-2\beta z-1} \cdot [x^{\alpha 2^{t-2}} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - 1] - y^{-2\beta z-1} \cdot [y^{-2\beta z-1} - 1] = \\
& = y^{2\beta(2h+1)} - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} - y^{-2\beta z-1} - y^{-4\beta z-2} + y^{-2\beta z-1} = \\
& = y^{-4\beta z-2} - x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} + x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} - y^{-4\beta z-2} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] - \\
& - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] = \\
& = x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} - 1 - (x^\alpha y^{2\beta}) - \dots - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h-2^{t-2}} - \\
& - (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - 1] - [(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1] = \\
& = (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} - 1 - y^{-2\beta z-1} \cdot [x^{\alpha 2^{t-2}} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - 1] - (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} + 1 = \\
& = x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} - x^{-\alpha 2^{t-2}} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} + y^{-2\beta z-1} - y^{-2\beta z-1} = \\
& = x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} = 0.
\end{aligned}$$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} & 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1} & 1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\ (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\ 1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} \right]^{-1} \right] \cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-1}-(2h+1)} y^{2^t-1} + \right. \\
& \left. + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-1}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} \right] + \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \right]^{-1} \right] \cdot \\
& \left[ (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{(2h+1)-2^{t-2}+2^{t-1}-(2h+1)-1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{(2h+1)-2^{t-2}-(2h+1)+2^{t-1}} + \dots \right. \\
& \left. \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} \right] + \left[ 1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} \right] \cdot \left[ 1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1} \right] = \\
& = \left[ 1 - \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right]^{-1} \right] \cdot \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+1} y^{-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-1}-(2h+1)} y^{-1} + \right. \\
& \left. + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-1}-(2h+1)+1} y^{-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right] + \left[ 1 - \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \right]^{-1} \right] \cdot \\
& \left[ x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^{t-1}\beta-2\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} + \dots + x^{2h\alpha} y^{4h\beta} \right] + \\
& + \left[ 1 - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} \right] \cdot \left[ 1 + \dots + x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta-2\beta} \right] = \\
& = \left[ 1 - (x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1})^{-1} \right] \cdot \left[ x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-1}\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-1} + \right. \\
& \left. + x^{2^{t-1}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} \right] + \left[ 1 - y^{2\beta z+1} \right] \cdot \left[ x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + \dots \right. \\
& \left. + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} + \dots + x^{2h\alpha} y^{4h\beta} \right] + 1 + \dots + x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta-2\beta} - \\
& - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} - \dots - x^{-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2\beta} = \\
& = \left[ 1 - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2\beta z+2^{t-1}\beta+1} \right] \cdot \left[ x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-1}\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-1} + \right. \\
& \left. + x^{2^{t-1}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} \right] + x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + \dots \\
& + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} + \dots + x^{2h\alpha} y^{4h\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta+2\beta z+1} - \dots \\
& - x^{-2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta+2\beta z+1} - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta z+1+2^{t-1}\beta} - \dots - x^{-2h\alpha} y^{2\beta z+1+4\beta h} + 1 + \dots \\
& + x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta-2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} - \dots - x^{-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2\beta} = \\
& = x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-1}\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-1} + x^{2^{t-1}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z+2\beta(2h+1)-2\beta-1} + \dots \\
& + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} - \dots - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta+2\beta(2h+1)} - x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta+2\beta(2h+1)-2\beta} - \dots - 1 + \\
& + x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} + \dots \\
& + x^{-\alpha} y^{-4\beta z-2-2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - \dots - x^{-2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta+2\beta z+1} - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta z+2^{t-1}\beta+1} - \dots - x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + \\
& + 1 + \dots + x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta-2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} - \dots - x^{-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2\beta} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} - \dots - x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2\beta(2h+1)} - x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2\beta(2h+1)-2\beta} - \dots \\
& - 1 + x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2^t-1\beta-2\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} + \dots + x^{-\alpha} y^{2(2h+1)\beta-2\beta} + \\
& + 1 + \dots + x^{-2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2^{t-1}\beta-2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta} - \dots - x^{-\alpha} y^{2\beta(2h+1)-2\beta} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} \right]^{-1} \right] \cdot \left[ -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} \right] + \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \right]^{-1} \right] \cdot (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + \\
& + \left[ 1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} \right] \cdot \left[ -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \right] = \\
& = -(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} + \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - \\
& - \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \right]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} = \\
& = -y^{-2z\beta} (x^\alpha y^{-2\beta})^{2^{t-2}} y^{-1} + \left[ y^{-2z\beta} (x^\alpha y^{-2\beta})^{2^{t-2}} y^{-1} \right]^{-1} y^{-2z\beta} (x^\alpha y^{-2\beta})^{2^{t-2}} y^{-1} - \left[ y^{-2z\beta-1} \right]^{-1} y^{-2z\beta-1} + \\
& + (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}} y^{-2z\beta-1} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} + \left[ x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} \right]^{-1} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} - y^{2z\beta+1} y^{-2z\beta-1} + \\
& + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta-2z\beta-1} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta+2z\beta+1} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} - 1 + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^t-1\beta-2z\beta-1} =
\end{aligned}$$



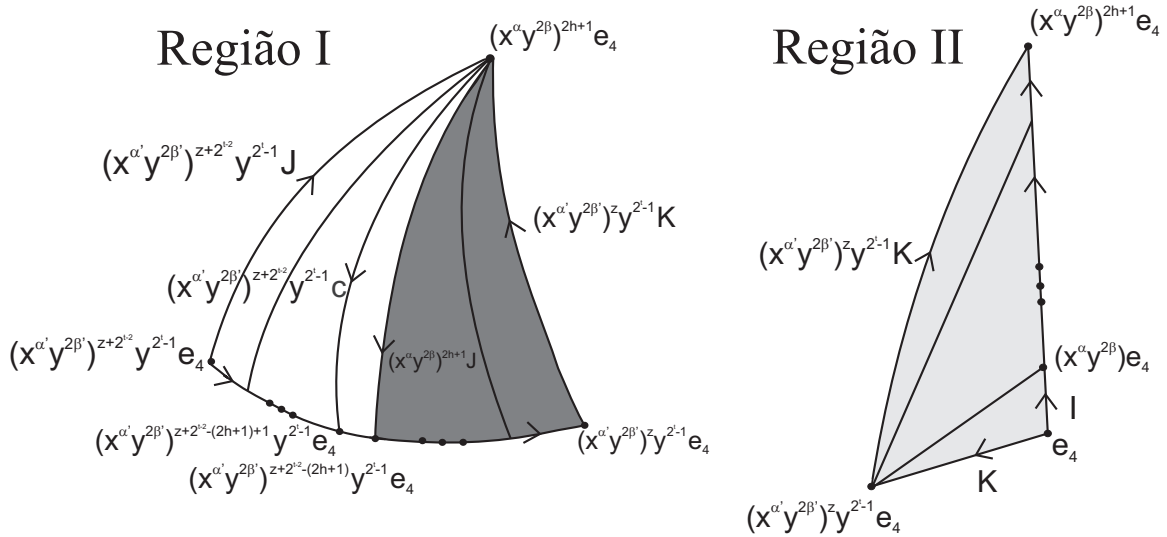
$$= -x^{2^{t-2}}\alpha y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha-2^{t-2}}\alpha y^{2^{t-1}\beta+2z\beta+1-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} - 1 + x^{2^{t-2}}\alpha y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} = 1 - 1 = 0.$$

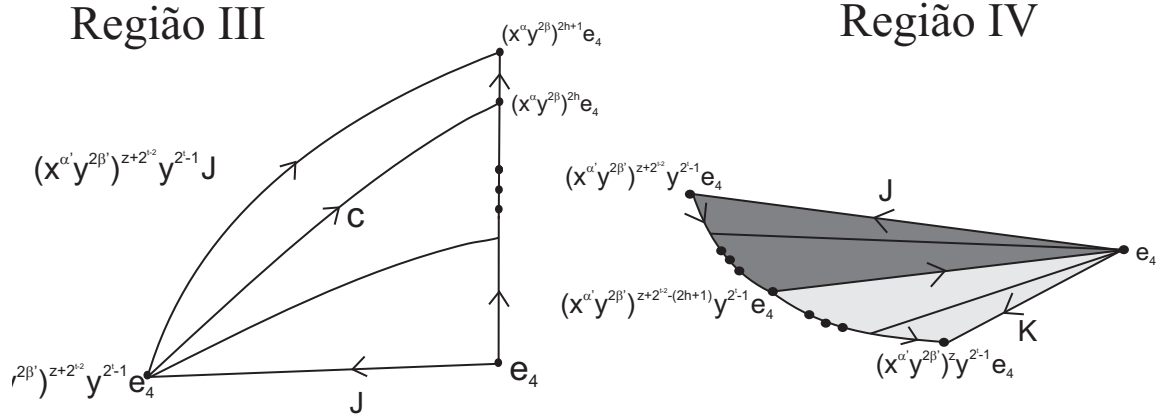
$$\begin{aligned} & \bullet \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} \right]^{-1} \right] \cdot (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} + \left[ 1 - \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \right]^{-1} \right] \cdot \left[ - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \right] - 1 + (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2^{t-2}} = \\ &= (x^{\alpha} y^{-2\beta})^z y^{-1} - \left[ (x^{\alpha} y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} \right]^{-1} \cdot (x^{\alpha} y^{-2\beta})^z y^{-1} - (x^{\alpha} y^{-2\beta})^z y^{-1} + \left[ (x^{\alpha} y^{-2\beta})^z y^{-1} \right]^{-1} \cdot (x^{\alpha} y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1 + (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2^{t-2}} = \\ &= - \left[ y^{-2z\beta} (x^{\alpha} y^{-2\beta})^{2^{t-2}} y^{-1} \right]^{-1} y^{-2z\beta-1} + \left[ y^{-2z\beta-1} \right]^{-1} y^{-2z\beta-1} - 1 + (x^{\alpha} y^{2\beta})^{2^{t-2}} = \\ &= - \left[ x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-2z\beta-1} \right]^{-1} y^{-2z\beta-1} + y^{2z\beta+1-2z\beta-1} - 1 + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta} = \\ &= -x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta+2z\beta+1} y^{-2z\beta-1} y^{-2z\beta-1} + 1 - 1 + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta} = \\ &= -x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta} = 0. \end{aligned}$$

**Observação 2.3.5.** *O complexo é exato em todas as dimensões, exceto 0 e 3.*

$$2^\circ) 2^{t-2} > 2h + 1$$

Abaixo temos cada lado da região fundamental com suas respectivas nomeações, considerando as relações do grupo metacíclico  $D_{(2h+1),2^t}$ :





Escolhemos, dentre as células acima, um conjunto de representantes (células fundamentais) em cada dimensão:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= e_4 \\
 c_{1,1} &= I \\
 c_{1,2} &= J \\
 c_{1,3} &= K \\
 c_{2,1} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} e_4 \approx (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4 \\
 c_{2,2} &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \approx (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} e_4 \\
 c_{2,3} &= e_4 \approx (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4 \approx (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} e_4 \\
 c_3 &= [1 + x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}] I \approx [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^t-1} + \\
 &\quad + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] I
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células e uma 3-célula:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_0 \rangle \rightarrow 0,$$

onde os bordos são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\partial_2(c_{2,1}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]c_{1,2}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1}]c_{1,1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} c_{1,2} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + 1]c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,3}$$

**Afirmação 2.3.9.** *O complexo de cadeias acima é semi-exato.*

Antes de começarmos a calcular  $[\partial_1 \circ \partial_2]$  e  $[\partial_2 \circ \partial_3]$  faremos algumas considerações, as quais serão de grande valia para mostrar as igualdades desejadas.

$$\cdot x^{2h+1} = 1 = y^{2^t}$$

$$\cdot x^z = 1.$$

Justificativa análoga ao primeiro caso.

$$\cdot x^{-2h\alpha} = x^\alpha.$$

De fato,

$$x \cdot x^{2h} = x^{2h+1} = 1,$$

ou seja,  $x^{-2h} = x$ .

Logo,

$$x^{-2h\alpha} = (x^{-2h})^\alpha = (x)^\alpha = x^\alpha.$$

$$\cdot \alpha' = \alpha \pmod{(2h+1)}$$

De fato, na região III temos que  $c = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} e_4, (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} e_4]$  e na região I obtemos que  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} c = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} e_4]$ .

Agora,

$$\begin{aligned} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} c &= x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1} c = x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1} [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} e_4, (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} e_4] = \\ &= x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1} [x^{2^{t-2}\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1} e_4, x^{2h\alpha} y^{4\beta h} e_4] = [y^{4\beta' z-2}, x^{2^{t-2}\alpha'-2h\alpha} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1+4\beta h}] \end{aligned}$$

Assim,

$$x^{2^{t-2}\alpha'-2h\alpha} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1+4\beta h} = (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^{t-1}} e_4$$

Como  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^{t-1}} e_4 = x^{2^{t-2}\alpha'+\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-(2h+1)\beta'+\beta'} e_4$ , obtemos

$$x^{2^{t-2}\alpha'-2h\alpha} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-1+4\beta h} = x^{2^{t-2}\alpha'+\alpha'} y^{2\beta' z+2^{t-1}\beta'-(2h+1)\beta'+\beta'} e_4 \iff x^{2^{t-2}\alpha'-2h\alpha} = x^{2^{t-2}\alpha'+\alpha'} \iff$$

$$\begin{aligned} \iff x^{-2h\alpha} = x^\alpha \\ \iff x^{2^{t-2}\alpha'+\alpha} = x^{2^{t-2}\alpha'+\alpha'} \iff \alpha = \alpha' \pmod{(2h+1)}. \end{aligned}$$

□

•  $\beta' = 2^{t-1} - \beta$

Justificativa análoga ao primeiro caso.

•  $y^{-2^{t-1}\beta} = y^{2^{t-1}\beta}$ .

Justificativa análoga ao primeiro caso.

•  $y^{-4\beta z-2} = y^{2\beta(2h+1)}$

De fato, na região IV temos que  $K = [e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4]$  e na região I obtemos que  $(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} K = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4, (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} e_4]$ .

Dessa forma,

$$\begin{aligned} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} K &= (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} \cdot [e_4, (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} e_4] = \\ &= (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \cdot [e_4, (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} e_4] = y^{-2\beta z-1} \cdot [e_4, y^{-2\beta z-1} e_4] = \\ &= [y^{-2\beta z-1} e_4, y^{-4\beta z-2} e_4]. \end{aligned}$$

Assim,

$$y^{-4\beta z-2} = (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}.$$

Como,  $(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} = y^{2\beta(2h+1)}$ .

Portanto,

$$y^{-4\beta z-2} = y^{2\beta(2h+1)}.$$

$$\begin{aligned}
& [\partial_1 \circ \partial_2] = \\
& = \begin{pmatrix} (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} & 0 \\ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} & (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\ 1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} & 0 & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1 \end{pmatrix} \\
& \cdot \begin{pmatrix} (x^\alpha y^{2\beta}) - 1 \\ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1 \\ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De fato,

- $$\begin{aligned}
& \bullet [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+2} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-1} y^{2^t-1} + \\
& + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + [-(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}] \cdot \\
& \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] = \\
& = [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+2} y^{-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-1} y^{-1} + \\
& + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1}] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + [-(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - y^{2\beta(2h+1)}] \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - 1] = \\
& = [x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha+2\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-4\beta-1} + \dots \\
& + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1}] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + [-x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - y^{2\beta(2h+1)}] \cdot \\
& \cdot [x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - 1] = \\
& = x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-2\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+4\beta-1} + \\
& + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1+2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha+2\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-4\beta-1} - \dots \\
& - x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - y^{-4\beta z-2^t\beta-2} + x^{\alpha 2^{t-2}} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - \\
& - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} + y^{2(2h+1)\beta} = \\
& = x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - y^{-4\beta z-2} + x^{\alpha 2^{t-2}} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - \\
& - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} + y^{2(2h+1)\beta} = \\
& = -y^{2(2h+1)\beta} + y^{2(2h+1)\beta} = 0.
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
& \bullet [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)-1} y^{2^t-1} + \\
& + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1}] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1] + \\
& + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \cdot [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] = \\
& = [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+1} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2} y^{-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)-1} y^{-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{-1}] \cdot \\
& \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + y^{2(2h+1)\beta} \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{-1} - 1] + (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} \cdot [y^{-2\beta z-1} - 1] = \\
& = [x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + x^{2\alpha} y^{-2\beta z-4\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha} y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta+2\beta-1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^{2^{t-2}\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + y^{2(2h+1)\beta} \cdot [x^{2^{t-2}\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} - 1] + \\
& +y^{-2\beta z-1} \cdot [y^{-2\beta z-1} - 1] = \\
& = y^{-2\beta z-1} + x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha-2\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta+4\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha-\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1+2\beta} - \\
& -x^\alpha y^{-2\beta z-2\beta-1} - x^{2\alpha}y^{-2\beta z-4\beta-1} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha-\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta+2\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} + \\
& +x^{2^{t-2}\alpha}y^{-2\beta z-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - y^{2(2h+1)\beta} + y^{-4\beta z-2} - y^{-2\beta z-1} = \\
& = y^{-2\beta z-1} - y^{2(2h+1)\beta} + y^{-4\beta z-2} - y^{-2\beta z-1} = \\
& = -y^{2(2h+1)\beta} + y^{2(2h+1)\beta} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} \right] \cdot [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1] + \left[ -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1 \right] \cdot \\
& \cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1 \right] = \\
& = x^\alpha y^{2\beta} + (x^\alpha y^{2\beta})^2 + (x^\alpha y^{2\beta})^3 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} - 1 - x^\alpha y^{2\beta} - (x^\alpha y^{2\beta})^2 - \dots - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} + \\
& + \left[ -(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1 \right] \cdot \left[ (x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1} - 1 \right] = \\
& = y^{2(2h+1)\beta} - 1 + \left[ -y^{-2\beta z-1} - 1 \right] \cdot \left[ y^{-2\beta z-1} - 1 \right] = \\
& = y^{2(2h+1)\beta} - 1 - y^{-4\beta z-2} + y^{-2\beta z-1} - y^{-2\beta z-1} + 1 = \\
& = y^{2(2h+1)\beta} - y^{2(2h+1)\beta} = 0.
\end{aligned}$$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \left( 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \quad 1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1} \quad 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1} \right).$$

$$\begin{pmatrix}
(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} & 0 \\
(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} & (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} & (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} \\
1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} & 0 & -(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \right] \cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+(2h+1)} y^{2^t-1} + \right. \\
& + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} \left. \right] + \left[ 1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1} \right] \cdot \left[ (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \right. \\
& \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} \left. \right] + \\
& + \left[ 1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1} \right] \cdot \left[ 1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} \right] = \\
& = (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+(2h+1)} y^{2^t-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots \\
& + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} - \dots - [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \cdot \\
& \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}} y^{2^t-1} + \\
& + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} - [y^{2(2h+1)\beta}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+1} y^{2^t-1} - \dots \\
& - [y^{2(2h+1)\beta}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}} y^{2^t-1} - [y^{2(2h+1)\beta}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2(2h+1)-2^{t-2}+1} y^{2^t-1} - \dots - [y^{2(2h+1)\beta}]^{-1} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1} + 1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} - [y^{-2z\beta-1}]^{-1} - \\
& - [y^{-2z\beta-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta}) - \dots - [y^{-2z\beta-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta})^{2(2h+1)-2^{t-2}-1} - [y^{-2z\beta-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta})^{2(2h+1)-2^{t-2}} - \dots \\
& - [y^{-2z\beta-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta})^{2h} = \\
& = y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} + \dots + y^{-2z\beta} y^{-2(2h+1)\beta-1} + y^{-2z\beta} y^{-2(2h+1)\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} + \dots \\
& + y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} - [y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1}]^{-1} \cdot y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} - \dots \\
& - [y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1}]^{-1} \cdot y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + y^{-2z\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} + \dots \\
& + y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - y^{-2(2h+1)\beta} y^{-2z\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} - \dots \\
& - y^{-2(2h+1)\beta} y^{-2z\beta-4(2h+1)\beta} x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta-1} - y^{-2(2h+1)\beta} y^{-2z\beta-4(2h+1)\beta} x^{-2^{t-2}\alpha} y^{2^{t-1}\beta} x^\alpha y^{-2\beta-1} - \dots \\
& \dots - y^{-2(2h+1)\beta} y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} + 1 + x^\alpha y^{2\beta} + \dots + x^{2h\alpha} y^{4h\beta} - y^{2z\beta+1} - \\
& - y^{2z\beta+1} x^\alpha y^{2\beta} - \dots - y^{2z\beta+1} y^{4(2h+1)\beta} x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta} x^{-\alpha} y^{-2\beta} - y^{2z\beta+1} y^{4(2h+1)\beta} x^{-2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta} - \dots - y^{2z\beta+1} x^{2h\alpha} y^{4h\beta} = \\
& = x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} + \dots + y^{-2z\beta} y^{-2(2h+1)\beta-1} + x^\alpha y^{-2z\beta-2(2h+1)\beta-2\beta-1} + \dots \\
& + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1} x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} - \dots \\
& - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + x^\alpha y^{-2z\beta-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - \\
& - x^\alpha y^{-2(2h+1)\beta-2z\beta-2\beta-1} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + 1 + x^\alpha y^{2\beta} + \dots + x^{2h\alpha} y^{4h\beta} - y^{2z\beta+1} - \\
& - x^{-\alpha} y^{2z\beta+1+2\beta} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{2z\beta+1+4(2h+1)\beta-2^{t-1}\beta-2\beta} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+1+4(2h+1)\beta-2^{t-1}\beta} - \dots \\
& - x^{-2h\alpha} y^{2z\beta+1+4h\beta} = \\
& = x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-2\beta-1} + \dots + y^{2z\beta+1} + x^\alpha y^{2z\beta-2\beta+1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} - \\
& - x^{-\alpha} y^{4h\beta} - \dots - 1 + x^\alpha y^{-2z\beta-2\beta-1} + \dots + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - x^\alpha y^{2z\beta-2\beta+1} - \dots - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + \\
& + 1 + x^\alpha y^{2\beta} + \dots + x^{-\alpha} y^{4h\beta} - y^{2z\beta+1} - x^{-\alpha} y^{2z\beta+1+2\beta} - \dots \\
& - x^{2^{t-2}\alpha+\alpha} y^{-2z\beta+2(2h+1)\beta-2^{t-1}\beta-2\beta-1} - x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta+2(2h+1)\beta-1} - \dots - x^\alpha y^{-2z\beta-2\beta-1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 - [(x^\alpha y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \right] \cdot [-(x^\alpha y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}] + \left[ 1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1} \right] \cdot \\
& \cdot [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}] = \\
& = -(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} + [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + \\
& + [(x^\alpha y^{-2\beta})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1} \cdot (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} = \\
& = -y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + [y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1}]^{-1} \cdot y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + [y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1}]^{-1} \cdot \\
& \cdot y^{2(2h+1)\beta} - [y^{2(2h+1)\beta}]^{-1} \cdot y^{2(2h+1)\beta} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1} y^{-2z\beta} x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2^{t-1}\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1} y^{2(2h+1)\beta} - \\
& - y^{-2(2h+1)\beta+2(2h+1)\beta} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + 1 + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1} y^{2(2h+1)\beta} - 1 = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1+2(2h+1)\beta} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{2z\beta+2^{t-1}\beta+1-4z\beta-2} = \\
& = -x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} + x^{2^{t-2}\alpha} y^{-2z\beta-2^{t-1}\beta-1} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \left[ 1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1} \right] \cdot (x^\alpha y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + \left[ 1 - [(x^\alpha y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1} \right] \cdot [-(x^\alpha y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1] = \\
& = (1 - y^{-2(2h+1)\beta}) \cdot [(x^\alpha y^{-2\beta})^z y^{-1}] + \left[ 1 - (y^{-2z\beta-1})^{-1} \right] \cdot (-y^{-2z\beta-1} - 1) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - y^{-2(2h+1)\beta}).(y^{-2z\beta-1}) + (1 - y^{2z\beta+1}).(-y^{-2z\beta-1} - 1) = \\
&= y^{-2z\beta-1} - y^{-2(2h+1)\beta-2z\beta-1} - y^{-2z\beta-1} - 1 + y^0 + y^{2z\beta+1} = \\
&= -y^{-2(2h+1)\beta-2z\beta-1} - 1 + 1 + y^{2z\beta+1} = \\
&= -y^{-(4z\beta-2)-2z\beta-1} + y^{2z\beta+1} = \\
&= -y^{2z\beta+1} + y^{2z\beta+1} = 0.
\end{aligned}$$

**Observação 2.3.6.** *O complexo é exato em todas as dimensões, exceto 0 e 3.*

## 2.4 Ação de $D_{(2h+1).2^t}$ em $S^{4n-1}$

Inicialmente, introduziremos algumas notações que serão utilizadas daqui em diante.

Como de costume, identificamos  $\mathbb{C}^n$  com o  $\mathbb{R}^{2n}$  de modo que cada cópia de  $\mathbb{C}$  seja gerada pelos vetores canônicos  $e_i, e_{i+1} \in \mathbb{R}^{2n}$ . Deste modo, o plano gerado por  $\{e_p, e_q\}$  será chamado de plano-pq.

Sejam  $\Sigma_j$  a 1-esfera unitária  $S^1$  na  $j$ -ésima cópia de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}^{2n}$  e  $\Sigma^j = \Sigma_1 \tilde{*} \dots \tilde{*} \Sigma_j$ , com  $\Sigma^0 = \emptyset$ , de modo que a esfera unitária  $S^{4n-1}$  nada mais é que  $\Sigma^{2n} = \Sigma_1 \tilde{*} \dots \tilde{*} \Sigma_{2n}$ .

Considere os pontos  $v_j = e^{\frac{\pi i}{2}} \in \Sigma_{2j}$ ,  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  inteiros (não necessariamente distintos) com  $\text{mdc}(k_j, 2h+1) = 1$  e  $l_1, l_2, \dots, l_n$  inteiros (também não necessariamente distintos) com  $\text{mdc}(l_j, 2^t) = 1$ .

Considere o elemento  $x^{\alpha_j} y^{2\beta_j}$ , que leva o ponto  $v_j$  no próximo ponto do arco escolhido no  $\Sigma_{2j}$ . Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta_j}$  é  $\beta_j l_j (2h+1)\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha_j}$  é  $-\alpha_j 2^{t-1} k_j \varepsilon$  no  $\Sigma_{2j}$ .

Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$-\varepsilon = -\alpha_j 2^{t-1} k_j \varepsilon + \beta_j l_j (2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}} \quad (2.4.1)$$

Considere o elemento  $x^{\alpha'_j} y^{2\beta'_j}$ , que leva o ponto  $y^{2^{t-1}} v_j$  no próximo ponto do arco escolhido no plano  $\Sigma_{2j-1}$ . Precisamos que esse elemento tenha uma rotação de  $\varepsilon$  no sentido horário, lembrando que a rotação do elemento  $y^{2\beta'_j}$  é  $\beta'_j l'_j (2h+1)\varepsilon$  e a rotação do elemento  $x^{\alpha'_j}$  é  $\alpha'_j 2^{t-1} k'_j \varepsilon$  no  $\Sigma_{2j-1}$ .

Nesse caso, esse elemento precisa satisfazer a seguinte equação:

$$\varepsilon = \alpha'_j 2^{t-1} k'_j \varepsilon + \beta'_j l'_j (2h+1)\varepsilon \pmod{(2h+1).2^{t-1}} \quad (2.4.2)$$

Também utilizaremos a notação  $z_j$ , onde  $z_j = p_j.(2h+1)$ , e  $l_j = 2p_j + 1, p_j \in \mathbb{N}$ . Além



disso, consideremos os seguintes arcos  $I_j = [v_j, x^{\alpha_j} y^{2\beta_j} v_j]$ ,  $J_j = [v_j, (x^{\alpha'_j} y^{2\beta'_j})^{z_j+2^{t-2}} y^{2^t-1} v_j]$ ,  $K_j = [v_j, (x^{\alpha'_j} y^{2\beta'_j})^{z_j} y^{2^t-1} v_j]$ , os quais serão relevantes para a construção da região fundamental.

A ação do grupo  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$  é dada pela representação

$$\pi = \pi_{k_1, l_1} \oplus \pi_{k_2, l_2} \oplus \pi_{k_3, l_3} \oplus \dots \oplus \pi_{k_n, l_n} : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2n, \mathbb{C}), \quad (2.4.3)$$

onde  $\pi_{k_j, l_j} : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  é dada por

$$\pi_{k_j, l_j}(x) \equiv \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi k_j i}{2h+1}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi k_j i}{2h+1}} \end{pmatrix} e \pi_{k_j, l_j}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi l_j i}{2^t-1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tal representação faz com que a ação de  $x$  seja uma rotação de  $\frac{2\pi k_j}{2h+1}$  no sentido horário (respectivamente anti-horário) em  $\Sigma_{2j}$  (respectivamente  $\Sigma_{2j-1}$ ). A ação de  $y$  aplica  $\Sigma_{2j-1}$  em  $\Sigma_{2j}$  e  $\Sigma_{2j}$  em  $\Sigma_{2j-1}$  seguido de uma rotação de  $\frac{2\pi l_j}{2^t-1}$  no sentido anti-horário.

### 2.4.1 Região fundamental e complexo de cadeia

Considerando a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$  descrita acima, a região fundamental da ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$  é:

$$1^\circ) 2h+1 > 2^{t-2}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{(2h+1)2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} = & \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} \Sigma_{2n-3} \tilde{*} \Sigma_{2n-2} \tilde{*} [1 + x^{\alpha_n} y^{2\beta_n} + (x^{\alpha_n} y^{2\beta_n})^2 + \dots + (x^{\alpha_n} y^{2\beta_n})^{2^h}] I_n \tilde{*} \\ & \tilde{*} [(x^{\alpha'_n} y^{2\beta'_n})^{z_n+1} y^{2^t-1} + (x^{\alpha'_n} y^{2\beta'_n})^{z_n+2} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_n} y^{2\beta'_n})^{z_n+2^{t-2}} y^{2^t-1}] I_n \end{aligned}$$

cujas células fundamentais são

$$\begin{aligned}
c_{4q-1} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} [1 + x^{\alpha_q} y^{2\beta_q} + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^2 + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h}] I_q \tilde{*} [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+1} y^{2^t-1} + \\
&\quad + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1}] I_q \\
c_{4q-2,1} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1}] I_q \tilde{*} (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1} v_q \\
c_{4q-2,2} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} v_q \tilde{*} [(x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1}] I_q \\
c_{4q-2,3} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} v_q + [1 + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q}) + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}}] I_q \\
c_{4q-3,1} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} \emptyset \tilde{*} I_q \\
c_{4q-3,2} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} J_q \tilde{*} \emptyset \\
c_{4q-3,3} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} K_q \tilde{*} \emptyset \\
c_{4q-4} &= \sum^{2q-2} \tilde{*} \emptyset \tilde{*} v_q
\end{aligned}$$

com operadores bordo dados por

$$\begin{aligned}
[\partial_{4q-1}] &= \left( 1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1}]^{-1} \quad 1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1}]^{-1} \quad 1 - (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2^{t-2}} \right) \\
[\partial_{4q-2}] &= \begin{pmatrix} (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1} & (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} \\ (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h} & (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} & -(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} \\ 1 + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}-1} & -(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} & -1 \end{pmatrix} \\
[\partial_{4q-3}] &= \begin{pmatrix} (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q}) - 1 \\ (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^t-2} y^{2^t-1} - 1 \\ (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1} - 1 \end{pmatrix} \\
[\partial_{4q-4}] &= \left( (1 + x + \dots + x^{2h})(1 + y + \dots + y^{2^t-1}) \right)
\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$ :

$$\begin{aligned}
\cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-1} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\
\xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \quad (2.4.4)
\end{aligned}$$

**Afirmção 2.4.1.** *O complexo de cadeias acima é semi-exato.*

A demonstração que  $\partial_{4q-3} \circ \partial_{4q-2} = 0$  e  $\partial_{4q-2} \circ \partial_{4q-1} = 0$  é análoga a demonstração de  $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$  e  $\partial_2 \circ \partial_3 = 0$  da afirmação 2.3.8, respectivamente.

Resta provar que  $\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4} = 0$  e  $\partial_{4q-4} \circ \partial_{4q-3} = 0$ .

$$[\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4}] = [\partial_{4q-4}] \cdot [\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$[\partial_{4q-4}] = \left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) = 1+x+x^2+\dots+x^{2h}+y+xy+x^2y+\dots+x^{2h}y+\dots+x^{2h}y^{2^t-2}+y^{2^t-1}+xy^{2^t-1}+x^2y^{2^t-1}+\dots+x^{2h}y^{2^t-1}.$$

Isto é, a multiplicação acima resulta na soma de todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$ . Assim,

$$\left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

Uma vez que, ao multiplicarmos  $\partial_{4q-4}$  por 1, teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal positivo e ao multiplicarmos  $\partial_{4q-4}$  por  $[(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal negativo, ou seja, a soma desses elementos será zero.

Analogamente,

$$\left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t-1}]^{-1}) = 0,$$

e

$$\left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2^{t-2}}) = 0.$$

Agora,

$$[\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4}] = [\partial_{4q-4}] \cdot [\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$[\partial_{4q-4}] = \left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) = 1+x+x^2+\dots+x^{2h}+y+xy+x^2y+\dots+x^{2h}y+\dots+x^{2h}y^{2^t-2}+y^{2^t-1}+xy^{2^t-1}+x^2y^{2^t-1}+\dots+x^{2h}y^{2^t-1}.$$

Isto é, a multiplicação acima resulta na soma de todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$ . Assim,

$$((x^{\alpha_q} y^{2\beta_q}) - 1) \left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}} y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

Uma vez que, ao multiplicarmos  $(x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})$  por  $\partial_{4q-4}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal positivo e ao multiplicarmos  $-1$  por  $\partial_{4q-4}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal negativo, ou seja, a soma desses elementos será zero.

Analogamente,

$$((x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1} - 1) \left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0,$$

e

$$((x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q}y^{2^t-1} - 1) \left( (1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1}) \right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

□

$$2^\circ) 2h + 1 < 2^{t-2}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(2h+1)2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} = & \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \dots \tilde{*} \Sigma_{2n-3} \tilde{*} \Sigma_{2n-2} \tilde{*} [1 + x^{\alpha_n}y^{2\beta_n} + (x^{\alpha_n}y^{2\beta_n})^2 + \dots + (x^{\alpha_n}y^{2\beta_n})^{2h}] I_n \tilde{*} \\ & \tilde{*} [(x^{\alpha'_n}y^{2\beta'_n})^{z_n+1}y^{2^t-1} + (x^{\alpha'_n}y^{2\beta'_n})^{z_n+2}y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_n}y^{2\beta'_n})^{z_n+2^{t-2}}y^{2^t-1}] I_n \end{aligned}$$

cujas células fundamentais são

$$\begin{aligned} c_{4q-1} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} [1 + x^{\alpha_q}y^{2\beta_q} + (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^2 + \dots + (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^{2h}] I_q \tilde{*} \\ & \tilde{*} [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+1}y^{2^t-1} + (x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2}y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}] I_q \\ c_{4q-2,1} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}-(2h+1)+1}y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}] I_q \tilde{*} (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^{2h+1} v_q \\ c_{4q-2,2} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+1}y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}-(2h+1)}y^{2^t-1}] I_q \tilde{*} (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^{2h+1} v_q \\ c_{4q-2,3} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} (x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q}y^{2^t-1} v_q \tilde{*} [1 + (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q}) + \dots + (x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^{2h+1}] I_q \\ c_{4q-3,1} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} \emptyset \tilde{*} I_q \\ c_{4q-3,2} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} J_q \tilde{*} \emptyset \\ c_{4q-3,3} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} K_q \tilde{*} \emptyset \\ c_{4q-4} &= \Sigma^{2q-2} \tilde{*} \emptyset \tilde{*} v_q \end{aligned}$$

com operadores bordo dados por

$$\begin{aligned}
[\partial_{4q-1}] &= \left( 1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2}} y^{2^t - 1}]^{-1} \quad 1 - [(x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1}]^{-1} \quad 1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t - 1}]^{-1} \right) \\
[\partial_{4q-2}] &= \begin{pmatrix} (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2} - (2h+1) + 1} y^{2^t - 1} + \dots + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2}} y^{2^t - 1} & -(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2}} y^{2^t - 1} - (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1} & 0 \\ (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 1} y^{2^t - 1} + \dots + (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2} - (2h+1)} y^{2^t - 1} & (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h+1} & (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t - 1} \\ 1 + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q}) + \dots + (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q})^{2h} & 0 & -(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t - 1} - 1 \end{pmatrix} \\
[\partial_{4q-3}] &= \begin{pmatrix} (x^{\alpha_q} y^{2\beta_q}) - 1 \\ (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2}} y^{2^t - 1} - 1 \\ (x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q} y^{2^t - 1} - 1 \end{pmatrix} \\
[\partial_{4q-4}] &= \left( (1 + x + \dots + x^{2h})(1 + y + \dots + y^{2^t - 1}) \right)
\end{aligned}$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t}$

$$\begin{aligned}
\cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-1} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\
\rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1),2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \quad (2.4.5)
\end{aligned}$$

**Afirmção 2.4.2.** *O complexo acima é semi-exato.*

A demonstração que  $\partial_{4q-3} \circ \partial_{4q-2} = 0$  e  $\partial_{4q-2} \circ \partial_{4q-1} = 0$  é análoga a demonstração de  $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$  e  $\partial_2 \circ \partial_3 = 0$  da afirmação 2.3.9, respectivamente.

Resta provar que  $\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4} = 0$  e  $\partial_{4q-4} \circ \partial_{4q-3} = 0$ .

$$[\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4}] = [\partial_{4q-4}] \cdot [\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$[\partial_{4q-4}] = \left( (1 + x + \dots + x^{2h})(1 + y + \dots + y^{2^t - 1}) \right) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2h} + y + xy + x^2y + \dots + x^{2h}y + \dots + x^{2h}y^{2^t - 2} + y^{2^t - 1} + xy^{2^t - 1} + x^2y^{2^t - 1} + \dots + x^{2h}y^{2^t - 1}.$$

Isto é, a multiplicação acima resulta na soma de todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$ . Assim,

$$\left( (1 + x + \dots + x^{2h})(1 + y + \dots + y^{2^t - 1}) \right) \cdot \left( 1 - [(x^{\alpha'_q} y^{2\beta'_q})^{z_q + 2^{t-2}} y^{2^t - 1}]^{-1} \right) = 0.$$

Uma vez que, ao multiplicarmos  $\partial_{4q-4}$  por 1, teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal positivo e ao multiplicarmos  $\partial_{4q-4}$  por  $[(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal negativo, ou seja, a soma desses elementos será zero.

Analogamente,

$$\left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) \cdot (1 - [(x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})^{2h+1}]^{-1}) = 0,$$

e

$$\left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

Agora,

$$[\partial_{4q-1} \circ \partial_{4q-4}] = [\partial_{4q-4}] \cdot [\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$[\partial_{4q-4}] = \left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) = 1+x+x^2+\dots+x^{2h}+y+xy+x^2y+\dots+x^{2h}y+\dots+x^{2h}y^{2^t-2}+y^{2^t-1}+xy^{2^t-1}+x^2y^{2^t-1}+\dots+x^{2h}y^{2^t-1}.$$

Isto é, a multiplicação acima resulta na soma de todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$ . Assim,

$$\left((x^{\alpha_q}y^{2\beta_q}) - 1\right) \left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

Uma vez que, ao multiplicarmos  $(x^{\alpha_q}y^{2\beta_q})$  por  $\partial_{4q-4}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal positivo e ao multiplicarmos  $-1$  por  $\partial_{4q-4}$ , teremos todos os elementos de  $D_{(2h+1),2^t}$  com sinal negativo, ou seja, a soma desses elementos será zero.

Analogamente,

$$\left((x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1} - 1\right) \left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0,$$

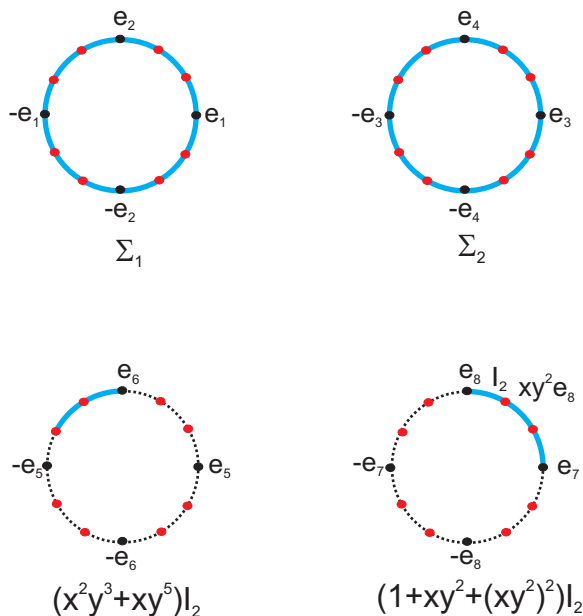
e

$$\left((x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q}y^{2^t-1} - 1\right) \left((1+x+\dots+x^{2h})(1+y+\dots+y^{2^t-1})\right) \cdot (1 - [(x^{\alpha'_q}y^{2\beta'_q})^{z_q+2^{t-2}}y^{2^t-1}]^{-1}) = 0.$$

□

Apresentamos alguns exemplos para melhor entendimento.

**Exemplo 2.4.1.** Considere a figura abaixo:



Seja  $\Sigma_2$  uma cópia de  $S^1$  no plano-34 possuindo uma decomposição celular com doze 0-células  $\{e_4, xy^2e_4, \dots, (xy^2)^{11}e_4\}$  e doze 1-células  $\{e_4 \tilde{*} xy^2e_4, xy^2[e_4 \tilde{*} xy^2e_4], \dots, (xy^2)^{11}[e_4 \tilde{*} xy^2e_4]\}$ .

Note que  $\Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2$  é uma 3-esfera.

A região fundamental da ação de  $D_{3,8}$  em  $S^7$  com representação  $k_1 = 1 = l_1$  e  $k_2 = 1 = l_2$  será

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{3,8;1,1,1,1} = \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (x^2y^3 + xy^5)I_2 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_2,$$

onde  $I_2 = e_8 \tilde{*} xy^2e_8$ .

Note que  $(x^2y^3 + xy^5)I_2 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_2$  se comporta da mesma forma que na região  $\tilde{\mathfrak{F}}_{8;1,1}$  (ação de  $D_{3,8}$  com representação  $k = 1 = l$  em  $S^3$ ), permitindo o uso das decomposições já obtidas anteriormente. As células fundamentais são especificadas abaixo, levando em consideração as identificações obtidas nas faces da região  $\tilde{\mathfrak{F}}_{8;1,1}$ . Consideremos

$$I_1 = e_4 \tilde{*} xy^2e_4, J_1 = e_4 \tilde{*} x^2y^3e_4, K_1 = e_4 \tilde{*} y^7e_4,$$

$$J_2 = e_8 \tilde{*} x^2y^3e_8 \text{ e } K_2 = e_8 \tilde{*} y^7e_8$$

As células fundamentais são:

$$\begin{aligned}
c_7 &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (x^2y^3 + xy^5)I_2 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_2 \\
c_{6,1} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (x^2y^3 + xy^5)I_2 \tilde{*} y^6e_8 \\
c_{6,2} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} y^7e_8 \tilde{*} (xy^2 + (xy^2)^2)I_2 \\
c_{6,3} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} y^7e_8 \tilde{*} I_2 \\
c_{5,1} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} I_2 \\
c_{5,2} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} J_2 \tilde{*} \emptyset \\
c_{5,3} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} K_2 \tilde{*} \emptyset \\
c_4 &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} e_8 \\
c_3 &= (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \\
c_{2,1} &= (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} y^6e_4 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} y^6e_4 \\
c_{2,2} &= y^7e_4 \tilde{*} I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = y^7e_4 \tilde{*} I_1 \\
c_{2,3} &= y^7e_4 \tilde{*} (xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = y^7e_4 \tilde{*} (xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \\
c_{1,1} &= \emptyset \tilde{*} I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = I_1 \\
c_{1,2} &= J_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = J_1 \\
c_{1,3} &= K_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = K_1 \\
c_0 &= \emptyset \tilde{*} e_4 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = e_4
\end{aligned}$$

E os operadores bordos são dados por

$$[\partial_7] = [\partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_6] = [\partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_5] = [\partial_1] = \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix}$$

e



$$[\partial_4] = \left( (1+x+x^2)(1+y+y^2+y^3+y^4+y^5+y^6+y^7) \right)$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,8}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células, uma 3-célula, uma 4-célula, três 5-células, três 6-células e uma 7-célula.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_7 \rangle \xrightarrow{\partial_7} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{6,1}, c_{6,2}, c_{6,3} \rangle \xrightarrow{\partial_6} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{5,1}, c_{5,2}, c_{5,3} \rangle \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_4 \rangle \xrightarrow{\partial_4} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \\ \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Afirmção 2.4.3.** *O complexo de cadeias acima é semi-exato.*

$$[\partial_5 \circ \partial_6] = [\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

- $(x^2y^3 + xy^5)(xy^2 - 1) - x^2y^3(x^2y^3 - 1) + y^7(y^7 - 1) = x^2y^3xy^2 + xy^5xy^2 - x^2y^3 - xy^5 - x^2y^3x^2y^3 + x^2y^3 + y^7y^7 - y^7 = xy^5 + y^7 - xy^5 - y^6 + y^6 - y^7 = 0.$
- $(xy^2 + x^2y^4)(xy^2 - 1) + y^7(x^2y^3 - 1) - y^7(y^7 - 1) = xy^2xy^2 - xy^2 + x^2y^4xy^2 - x^2y^4 + y^7x^2y^3 - y^7 - y^7y^7 + y^7 = x^2y^4 - xy^2 + y^6 - x^2y^4 + xy^2 - y^7 - y^6 + y^7 = 0.$
- $xy^2 - 1 - y^7(x^2y^3 - 1) - (y^7 - 1) = xy^2 - 1 - y^7x^2y^3 + y^7 - y^7 + 1 = xy^2 - xy^2 = 0.$

$$[\partial_6 \circ \partial_7] = [\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

- $(1 - x^2y^5)(x^2y^3 + xy^5) + (1 - y)(xy^2 + x^2y^4) + (1 - x^2y^4) = x^2y^3 + xy^5 - x^2y^5x^2y^3 - x^2y^5xy^5 + xy^2 + x^2y^4 - yxy^2 - yx^2y^4 + 1 - x^2y^4 = x^2y^3 + xy^5 - 1 - xy^2 + xy^2 + x^2y^4 - x^2y^3 - xy^5 + 1 - x^2y^4 = 0.$

$$\bullet (1 - x^2y^5)(-x^2y^3) + (1 - y)y^7 + (1 - x^2y^4) \cdot (-y^7) = -x^2y^3 + x^2y^5x^2y^3 + y^7 - yy^7 - y^7 + x^2y^4y^7 = -x^2y^3 + 1 - 1 + x^2y^3 = 0.$$

$$\bullet (1 - x^2y^5)y^7 + (1 - y)(-y^7) + (1 - x^2y^4)(-1) = y^7 - x^2y^5y^7 - y^7 + yy^7 - 1 + x^2y^4 = -x^2y^4 + 1 - 1 + x^2y^4 = 0.$$

$$[\partial_3 \circ \partial_4] = \left( (1 + x + x^2)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

$$\bullet (1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - x^2y^5) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - x^2y^5 - xy^6 - x^2y^7 - x - x^2y - xy^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 - x^2y^6 - y^7 - x^2 - y - x^2y^2 - y^3 - x^2y^4 - xy^5 - y^6 - xy^7 - 1 - xy - y^2 - xy^3 - y^4 = 0.$$

$$\bullet (1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - 1 - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 - x^2 = 0.$$

$$\bullet (1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - x^2y^4) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - x^2y^4 - xy^5 - x^2y^6 - xy^7 - x^2 - xy - x^2y^2 - xy^3 - y^4 - x^2y^5 - y^6 - x^2y^7 - 1 - x^2y - y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 - xy^6 - y^7 - x - y - xy^2 - y^3 = 0.$$

$$[\partial_4 \circ \partial_5] = \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix} \cdot \left( (1 + x + x^2)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

$$\bullet (xy^2 - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x + xy + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 + x^2 + x^2y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + 1 + y - 1 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0.$$

$$\bullet (x^2y^3 - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x + xy + xy^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + 1 + y + y^2 - 1 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0.$$

$$\bullet (y^7 - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = y^7 + 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + x^2y^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + xy^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 - 1 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0. \quad \square$$

**Exemplo 2.4.2.** *Considere a ação de  $D_{3,8}$  em  $S^7$  com representação com  $l_1 = 1 = k_1$ ,  $l_2 = 3$  e  $k_2 = 1$ , ou seja, a ação do grupo  $D_{3,8}$  em  $S^7$  é dada pela representação*

$$\pi = \pi_{1,1} \oplus \pi_{1,3} : D_{3,8} \rightarrow U(2, \mathbb{C}),$$

onde  $\pi_{1,1} : D_{3,8} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  é dado por

$$\pi_{1,1}(x) \equiv \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \text{ e } \pi_{1,1}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

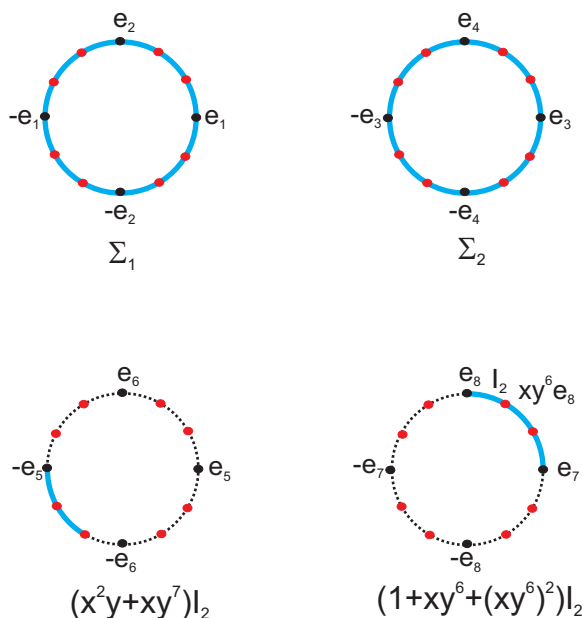
e  $\pi_{1,3} : D_{3,8} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  é dado por

$$\pi_{1,3}(x) \equiv \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \text{ e } \pi_{1,3}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{6\pi i}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A região fundamental da ação de  $D_{3,8}$  em  $S^7$  com representação  $\pi = \pi_{1,1} \oplus \pi_{1,3}$  será

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{3,8;1,1,1,3} = \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (1 + xy^6 + (xy^6)^2)I_2 \tilde{*} (x^2y + xy^7)I_2$$

onde  $I_2 = e_8 \tilde{*} xy^6 e_8$ .



Note que  $(x^2y + xy^7)I_2 \tilde{*} (1 + xy^6 + (xy^6)^2)I_2$  se comporta da mesma forma que na região  $\tilde{\mathfrak{F}}_{3,8;1,3}$  (ação de  $D_{3,8}$  com representação  $k = 1$  e  $l = 3$  em  $S^3$ ), permitindo o uso das decomposições já obtidas anteriormente. Temos que

$$\begin{aligned} I_1 &= e_4 \tilde{*} xy^2 e_4 \\ J_1 &= e_4 \tilde{*} x^2 y^3 e_4 \\ K_1 &= e_4 \tilde{*} y^7 e_4 \\ I_2 &= e_8 \tilde{*} xy^6 e_8 \\ J_2 &= e_8 \tilde{*} x^2 y e_8 \\ K_2 &= e_8 \tilde{*} y^5 e_8 \end{aligned}$$

As células fundamentais são especificadas abaixo:

$$\begin{aligned}
c_7 &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (x^2y + xy^7)I_2 \tilde{*} (1 + xy^6 + (xy^6)^2)I_2 \\
c_{6,1} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} (x^2y + xy^7)I_2 \tilde{*} y^2e_8 \\
c_{6,2} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} y^5e_8 \tilde{*} (xy^6 + (xy^6)^2)I_2 \\
c_{6,3} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} y^5e_8 \tilde{*} I_2 \\
c_{5,1} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} I_2 \\
c_{5,2} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} J_2 \tilde{*} \emptyset \\
c_{5,3} &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} K_2 \tilde{*} \emptyset \\
c_4 &= \Sigma_1 \tilde{*} \Sigma_2 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} e_8 \\
c_3 &= (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} (1 + xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \\
c_{2,1} &= (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} y^6e_4 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = (x^2y^3 + xy^5)I_1 \tilde{*} y^6e_4 \\
c_{2,2} &= y^7e_4 \tilde{*} I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = y^7e_4 \tilde{*} I_1 \\
c_{2,3} &= y^7e_4 \tilde{*} (xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = y^7e_4 \tilde{*} (xy^2 + (xy^2)^2)I_1 \\
c_{1,1} &= \emptyset \tilde{*} I_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = I_1 \\
c_{1,2} &= J_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = J_1 \\
c_{1,3} &= K_1 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = K_1 \\
c_0 &= \emptyset \tilde{*} e_4 \tilde{*} \emptyset \tilde{*} \emptyset = e_4
\end{aligned}$$

*E os operadores bordos são dados por*

$$[\partial_7] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^7 & 1 - y^3 & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_6] = \begin{pmatrix} x^2y + xy^7 & -x^2y & y^5 \\ xy^6 + x^2y^4 & y^5 & -y^5 \\ 1 & -y^5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_5] = \begin{pmatrix} xy^6 - 1 \\ x^2y - 1 \\ y^5 - 1 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_4] = \left( (1 + x + x^2)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7) \right)$$

$$[\partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix}$$

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$[\partial_1] = \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix}$$

Obtemos o complexo de cadeias sobre o anel  $\mathbb{Z}D_{3,8}$ , possuindo apenas uma 0-célula, três 1-células, três 2-células, uma 3-célula, uma 4-célula, três 5-células, três 6-células e uma 7-célula.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_7 \rangle \xrightarrow{\partial_7} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{6,1}, c_{6,2}, c_{6,3} \rangle \xrightarrow{\partial_6} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{5,1}, c_{5,2}, c_{5,3} \rangle \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_4 \rangle \xrightarrow{\partial_4} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \\ \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{3,8}\langle c_0 \rangle \rightarrow 0 \end{aligned}$$

**Afirmção 2.4.4.** O complexo de cadeias acima é semi-exato.

$$[\partial_1 \circ \partial_2] = \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^2 - 1 \\ x^2y^3 - 1 \\ y^7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

- $(x^2y^3 + xy^5)(xy^2 - 1) - x^2y^3(x^2y^3 - 1) + y^7(y^7 - 1) = x^2y^3xy^2 + xy^5xy^2 - x^2y^3 - xy^5 - x^2y^3x^2y^3 + x^2y^3 + y^7y^7 - y^7 = xy^5 + y^7 - xy^5 - y^6 + y^6 - y^7 = 0.$
- $(xy^2 + x^2y^4)(xy^2 - 1) + y^7(x^2y^3 - 1) - y^7(y^7 - 1) = xy^2xy^2 - xy^2 + x^2y^4xy^2 - x^2y^4 + y^7x^2y^3 - y^7 - y^7y^7 + y^7 = x^2y^4 - xy^2 + y^6 - x^2y^4 + xy^2 - y^7 - y^6 + y^7 = 0.$
- $xy^2 - 1 - y^7(x^2y^3 - 1) - (y^7 - 1) = xy^2 - 1 - y^7x^2y^3 + y^7 - y^7 + 1 = xy^2 - xy^2 = 0.$

$$[\partial_2 \circ \partial_3] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y^3 + xy^5 & -x^2y^3 & y^7 \\ xy^2 + x^2y^4 & y^7 & -y^7 \\ 1 & -y^7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

- $(1 - x^2y^5)(x^2y^3 + xy^5) + (1 - y)(xy^2 + x^2y^4) + (1 - x^2y^4) = x^2y^3 + xy^5 - x^2y^5x^2y^3 - x^2y^5xy^5 + xy^2 + x^2y^4 - yxy^2 - yx^2y^4 + 1 - x^2y^4 = x^2y^3 + xy^5 - 1 - xy^2 + xy^2 + x^2y^4 - x^2y^3 - xy^5 + 1 - x^2y^4 = 0.$
- $(1 - x^2y^5)(-x^2y^3) + (1 - y)y^7 + (1 - x^2y^4)(-y^7) = -x^2y^3 + x^2y^5x^2y^3 + y^7 - yy^7 - y^7 + x^2y^4y^7 = -x^2y^3 + 1 - 1 + x^2y^3 = 0.$
- $(1 - x^2y^5)y^7 + (1 - y)(-y^7) + (1 - x^2y^4)(-1) = y^7 - x^2y^5y^7 - y^7 + yy^7 - 1 + x^2y^4 = -x^2y^4 + 1 - 1 + x^2y^4 = 0.$

$$[\partial_3 \circ \partial_4] = \begin{pmatrix} (1 + x + x^2)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - x^2y^5 & 1 - y & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

- $(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - x^2y^5) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - x^2y^5 - xy^6 - x^2y^7 - x - x^2y - xy^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 - x^2y^6 - y^7 - x^2 - y - x^2y^2 - y^3 - x^2y^4 - xy^5 - y^6 - xy^7 - 1 - xy - y^2 - xy^3 - y^4 = 0.$
- $(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - y) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - 1 - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 - x^2 = 0.$
- $(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7)(1 - x^2y^4) = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 - x^2y^4 - xy^5 - x^2y^6 - xy^7 - x^2 - xy - x^2y^2 - xy^3 - y^4 - x^2y^5 - y^6 - x^2y^7 -$

$$-1 - x^2y - y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 - xy^6 - y^7 - x - y - xy^2 - y^3 = 0.$$

$$[\partial_4 \circ \partial_5] = \begin{pmatrix} xy^6 - 1 \\ x^2y - 1 \\ y^5 - 1 \end{pmatrix} \cdot \left( (1 + x + x^2)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

$$\begin{aligned} & \bullet (xy^6 - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x^2 + x^2y + \\ & + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = xy^6 + xy^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + x^2y^6 + \\ & + x^2y^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + y^6 + y^7 + 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 - 1 - \\ & - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - \\ & - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (x^2y - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + \\ & + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + \\ & + x^2y^7 + x^2 + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \\ & + y^6 + y^7 + 1 - 1 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - \\ & - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet (y^5 - 1)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6 + y^7 + x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4 + xy^5 + xy^6 + \\ & + xy^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7) = y^5 + y^6 + y^7 + 1 + y + \\ & + y^2 + y^3 + y^4 + x^2y^5 + x^2y^6 + x^2y^7 + x^2 + x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 + x^2y^4 + xy^5 + xy^6 + xy^7 + x + xy + \\ & + xy^2 + xy^3 + xy^4 - 1 - y - y^2 - y^3 - y^4 - y^5 - y^6 - y^7 - x - xy - xy^2 - xy^3 - xy^4 - xy^5 - \\ & - xy^6 - xy^7 - x^2 - x^2y - x^2y^2 - x^2y^3 - x^2y^4 - x^2y^5 - x^2y^6 - x^2y^7 = 0. \end{aligned}$$

$$[\partial_5 \circ \partial_6] = \begin{pmatrix} x^2y + xy^7 & -x^2y & y^5 \\ xy^6 + x^2y^4 & y^5 & -y^5 \\ 1 & -y^5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xy^6 - 1 \\ x^2y - 1 \\ y^5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*De fato,*

$$\bullet (x^2y + xy^7)(xy^6 - 1) - x^2y(x^2y - 1) + y^5(y^5 - 1) = x^2yxy^6 - x^2y + xy^7xy^6 - xy^7 - x^2yx^2y + x^2y + y^5y^5 - y^5 = xy^7 - x^2y + y^5 - xy^7 - y^2 + x^2y + y^2 - y^5 = 0.$$

$$\bullet (xy^6 + x^2y^4)(xy^6 - 1) + y^5(x^2y - 1) - y^5(y^5 - 1) = xy^6xy^6 - xy^6 + x^2y^4xy^6 - x^2y^4 + y^5x^2y - y^5 - y^5y^5 + y^5 = x^2y^4 - xy^6 + y^2 - x^2y^4 + xy^6 - y^5 - y^2 + y^5 = 0.$$

$$\bullet (xy^6 - 1) - y^5(x^2y - 1) - (y^5 - 1) = xy^6 - 1 - y^5x^2y + y^5 - y^5 + 1 = xy^6 - xy^6 = 0.$$



$$[\partial_6 \circ \partial_7] = \begin{pmatrix} 1 - x^2y^7 & 1 - y^3 & 1 - x^2y^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2y + xy^7 & -x^2y & y^5 \\ xy^6 + x^2y^4 & y^5 & -y^5 \\ 1 & -y^5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De fato,

$$\bullet (1 - x^2y^7)(x^2y + xy^7) + (1 - y^3)(xy^6 + x^2y^4) + (1 - x^2y^4) = x^2y + xy^7 - x^2y^7x^2y - x^2y^7xy^7 + xy^6 + x^2y^4 - y^3xy^6 - y^3x^2y^4 + 1 - x^2y^4 = x^2y + xy^7 - 1 - xy^6 + xy^6 - x^2y - xy^7 + 1 = 0.$$

$$\bullet (1 - x^2y^7)(-x^2y) + (1 - y^3)y^5 + (1 - x^2y^4)(-y^5) = -x^2y + x^2y^7x^2y + y^5 - y^3y^5 - y^5 + x^2y^4y^5 = -x^2y + 1 - 1 + x^2y = 0.$$

$$\bullet (1 - x^2y^7)y^5 + (1 - y^3)(-y^5) + (1 - x^2y^4)(-1) = y^5 - x^2y^7y^5 - y^5 + y^3y^5 - 1 + x^2y^4 = -x^2y^4 + 1 - 1 + x^2y^4 = 0.$$

□

**Definição 2.4.3. (Forma Espacial Esférica Metacíclica)** Seja  $D_{(2h+1),2^t}$  o grupo split metacíclico de ordem  $(2h + 1) \cdot 2^t$ . Sejam  $k_1, k_2, \dots, k_n$  e  $l_1, l_2, \dots, l_n$  inteiros (não necessariamente distintos) com  $\text{mdc}(l_j, 2^t) = 1 = \text{mdc}(k_j, 2h + 1)$ . Com a ação de  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$  descrita anteriormente, formamos o espaço quociente

$$\mathfrak{D}((2h + 1) \cdot 2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n) = \frac{S^{4n-1}}{\pi(D_{(2h+1),2^t})}$$

chamado de forma espacial esférica metacíclica.

A ação do grupo  $D_{(2h+1),2^t}$  em  $S^{4n-1}$  é dada pela representação

$$\pi = \pi_{k_1, l_1} \oplus \pi_{k_2, l_2} \oplus \pi_{k_3, l_3} \oplus \dots \oplus \pi_{k_n, l_n} : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2n, \mathbb{C}), \quad (2.4.6)$$

onde  $\pi_{k_j, l_j} : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2, \mathbb{C})$  é dada por

$$\pi_{k_j, l_j}(x) \equiv \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi k_j i}{m}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi k_j i}{m}} \end{pmatrix} e \pi_{k_j, l_j}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{2\pi l_j i}{n}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para facilitar a notação, denotaremos  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$  e  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , assim:

$$\pi_{k_j, l_j}(x) \equiv \begin{pmatrix} \zeta^{k_j} & 0 \\ 0 & \zeta^{-k_j} \end{pmatrix} e \pi_{k_j, l_j}(y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & \xi^{l_j} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, para qualquer  $(z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) \in S^{4n-1}$  temos que:

$$\pi(x)(z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n})$$

$$\pi(y)(z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1})$$

**Proposição 2.4.4.** *Qualquer forma espacial esférica metacíclica é homeomorfa a uma do tipo  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n)$ , onde  $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n < (2h+1)$  e  $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_n < 2^t$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, mostremos que

$$\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, l_s, \dots, l_n) \sim \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, -k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, -l_s, \dots, l_n).$$

Considerando  $f : S^{4n-1} \rightarrow S^{4n-1}$  o homeomorfismo definido por

$$f(z_1, \dots, z_{2n}) = (z_1, z_2, \dots, \overline{z_{2s-1}}, \overline{z_{2s}}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}),$$

vemos que  $f$  é equivariante com as ações  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , as quais são definidas por

$$\pi_1(x)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n})$$

$$\pi_1(y)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1})$$

$$\pi_2(x)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{-k_s} z_{2s-1}, \zeta^{k_s} z_{2s}, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n})$$

$$\pi_2(y)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = (\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{-l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} f(\pi_1(x)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) &= f(\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n}) = \\ &= (\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{-k_s} \overline{z_{2s-1}}, \zeta^{k_s} \overline{z_{2s}}, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(x)(f(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) &= \pi_2(x)(z_1, z_2, \dots, \overline{z_{2s-1}}, \overline{z_{2s}}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = \\ &= (\zeta^{k_1} z_1, \zeta^{-k_1} z_2, \dots, \zeta^{-k_s} \overline{z_{2s-1}}, \zeta^{k_s} \overline{z_{2s}}, \dots, \zeta^{k_n} z_{2n-1}, \zeta^{-k_n} z_{2n}). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$f(\pi_1(x)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) = \pi_2(x)(f(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})).$$

Temos também que

$$\begin{aligned} f(\pi_1(y)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) &= f(\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1}) = \\ &= (\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{-l_s} \overline{z_{2s}}, \overline{z_{2s-1}}, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(y)(f(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) &= \pi_2(y)(z_1, z_2, \dots, \overline{z_{2s-1}}, \overline{z_{2s}}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n}) = \\ &= (\xi^{l_1} z_2, z_1, \dots, \xi^{-l_s} \overline{z_{2s}}, \overline{z_{2s-1}}, \dots, \xi^{l_n} z_{2n}, z_{2n-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(\pi_1(y)(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})) = \pi_2(y)(f(z_1, z_2, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2n-1}, z_{2n})).$$

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^{4n-1} & \xrightarrow{f} & S^{4n-1} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, l_s, \dots, l_n) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, -k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, -l_s, \dots, l_n), \end{array}$$

definindo assim os espaços  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, l_s, \dots, l_n)$  e  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, -k_s, \dots, k_n, l_1, \dots, -l_s, \dots, l_n)$ . Tomando o quociente, temos o homeomorfismo desejado.

Por fim, mostremos que

$$\mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_u, \dots, k_s, \dots, \dots, l_u, \dots, l_s, \dots) \sim \mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_s, \dots, k_u, \dots, \dots, l_s, \dots, l_u, \dots).$$

Seja  $h : S^{4n-1} \rightarrow S^{4n-1}$  o homeomorfismo definido por

$$h(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots) = (\dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots).$$

Temos que  $h$  é equivariante com as ações  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , as quais são definidas por

$$\pi_1(x)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots) = (\dots, \zeta^{k_u} z_{2u-1}, \zeta^{-k_u} z_{2u}, \dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots)$$

$$\pi_1(y)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots) = (\dots, \xi^{l_u} z_{2u}, z_{2u-1}, \dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots)$$

$$\pi_2(x)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots) = (\dots, \zeta^{k_s} z_{2u-1}, \zeta^{-k_s} z_{2u}, \dots, \zeta^{k_u} z_{2s-1}, \zeta^{-k_u} z_{2s}, \dots)$$

$$\pi_2(y)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots) = (\dots, \xi^{l_s} z_{2u}, z_{2u-1}, \dots, \xi^{l_u} z_{2s}, z_{2s-1}).$$

De fato,

$$\begin{aligned} h(\pi_1(x)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) &= h(\dots, \zeta^{k_u} z_{2u-1}, \zeta^{-k_u} z_{2u}, \dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots) = \\ &= (\dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots, \zeta^{k_u} z_{2u-1}, \zeta^{-k_u} z_{2u}, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(x)(h(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) &= \pi_2(x)(\dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots) = \\ &= (\dots, \zeta^{k_s} z_{2s-1}, \zeta^{-k_s} z_{2s}, \dots, \zeta^{k_u} z_{2u-1}, \zeta^{-k_u} z_{2u}, \dots). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$h(\pi_1(x)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) = \pi_2(x)(h(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)).$$

Temos também que

$$\begin{aligned} h(\pi_1(y)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) &= h(\dots, \xi^{l_u} z_{2u}, z_{2u-1}, \dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots) = \\ &= (\dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots, \xi^{l_u} z_{2u}, z_{2u-1}, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(y)(h(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) &= \pi_2(y)(\dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots) = \\ &= (\dots, \xi^{l_s} z_{2s}, z_{2s-1}, \dots, \xi^{l_u} z_{2u}, z_{2u-1}, \dots). \end{aligned}$$

Logo,

$$h(\pi_1(y)(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)) = \pi_2(y)(h(\dots, z_{2u-1}, z_{2u}, \dots, z_{2s-1}, z_{2s}, \dots)).$$

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} S^{4n-1} & \xrightarrow{h} & S^{4n-1} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_u, \dots, k_s, \dots, \dots, l_u, \dots, l_s, \dots) & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_s, \dots, k_u, \dots, \dots, l_s, \dots, l_u, \dots), \end{array}$$

definindo assim os espaços  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_u, \dots, k_s, \dots, \dots, l_u, \dots, l_s, \dots)$  e  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; \dots, k_s, \dots, k_u, \dots, \dots, l_s, \dots, l_u, \dots)$ . Tomando o quociente, temos o homeomorfismo desejado.

Portanto, o lema fica provado. ■

# Homologia das formas espaciais esféricas metacíclicas

Neste capítulo, utilizamos o complexo de cadeias construído no capítulo anterior e calculamos os grupos de homologia das formas espaciais esféricas metacíclicas com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  (representação trivial e não-trivial) e coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ .

## 3.1 Grupos de homologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$

Vamos calcular os grupos de homologia de  $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1) = \frac{S^3}{\pi(D_{(2h+1).2^t})}$ , com representações  $\tau : D_{(2h+1).2^t} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . As possíveis representações para  $D_{(2h+1).2^t}$  devem preservar as relações do grupo, ou seja, devem satisfazer as seguintes equações:

- $\tau(x)^{2h+1} = \tau(x^{2h+1}) = \tau(1) = 1$
- $\tau(y)^{2^t} = \tau(y^{2^t}) = \tau(1) = 1$
- $\tau(x)\tau(y)\tau(x) = \tau(xy x) = \tau(y)$

Apenas duas satisfazem as condições, que são a representação trivial e uma representação não trivial,  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$  e  $\tau_y(x, y) \rightarrow (1, -1)$ , respectivamente.

### 3.1.1 Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação trivial

Consideremos a representação trivial com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , ou seja,  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$ .

1º)  $2h + 1 > 2^{t-2}$

Para isto, relembremos o seguinte complexo de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Os bordos mencionados no complexo de cadeias acima são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\begin{aligned} \partial_2(c_{2,1}) = & [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} c_{1,2} + \\ & + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3} \end{aligned}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{2^{t-2}+z} y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}}]c_{2,3}.$$

Lembramos que, esses bordos são válidos para todas as representações  $k \in \mathbb{N}$  e  $l = 2j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , onde  $z = j(2h + 1)$ ,  $\text{mdc}(k, 2h + 1) = 1$  e  $\text{mdc}(l, 2^t) = 1$ .

Para facilitar a notação denotaremos  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ , simplesmente, por  $\mathfrak{D}$ .

Calculemos então a homologia:

- $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}, \text{ pois } [\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}]}{\mathbb{Z}[2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3}, 2^{t-2}c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}, (2h + 1 - 2^{t-2})c_{1,1} - c_{1,2} - c_{1,3}]}$$

Considere

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2^{t-2} & -1 & 1 \\ 2^{t-2} & 1 & -1 \\ 2h+1-2^{t-2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}\}$  para  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{c_{1,3}, c_{1,2}, c_{1,1}\}$ , temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz mudança de base tem determinante  $-1$ .

$$\partial(c_{2,1}) = 2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3} = \omega_1 - \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3$$

$$\partial(c_{2,2}) = 2^{t-2}c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3} = -\omega_1 + \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3$$

$$\partial(c_{2,3}) = (2h+1-2^{t-2})c_{1,1} - c_{1,2} - c_{1,3} = -\omega_1 - \omega_2 + (2h+1-2^{t-2})\omega_3.$$

Agora, fazendo a mudança de base de  $\{c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3}\}$  para  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{c_{2,1}, c_{2,1} + c_{2,2}, c_{2,1} + c_{2,3}\}$ , obtemos a matriz mudança de base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é 1.

Assim,

$$\partial(\delta_1) = \omega_1 - \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3$$

$$\partial(\delta_2) = 2.2^{t-2}\omega_3 = 2^{t-1}\omega_3$$

$$\partial(\delta_3) = -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3.$$

Logo,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]}{\mathbb{Z}[\omega_1 - \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3, 2^{t-1}\omega_3, -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3]}.$$

Fazendo uma mudança de base de  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  para  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{\omega_1 - \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3, \omega_2 - \omega_3, \omega_3\}$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2^{t-2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é 1.

Dessa forma,

$$\partial(\delta_1) = \omega_1 - \omega_2 + 2^{t-2}\omega_3 = \psi_1$$

$$\partial(\delta_2) = 2^{t-1}\omega_3 = 2^{t-1}\psi_3$$

$$\partial(\delta_3) = -2\psi_2 + (2h-1)\psi_3.$$

Assim,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \psi_2, \psi_3]}{\mathbb{Z}[\psi_1, 2^{t-1}\psi_3, -2\psi_2 + (2h-1)\psi_3]}.$$

Fazendo agora a mudança de base de  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$  para  $\{\psi_1, \mu_1, \mu_2\} = \{\psi_1, -2\psi_2 + (2h-1)\psi_3, -\psi_2 + h\psi_3\}$  temos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2h-1 \\ 0 & -1 & h \end{pmatrix},$$

que possui determinante 1.

$$\partial(\delta_1) = \psi_1$$

$$\partial(\delta_2) = 2^{t-1}\psi_3 = -2^{t-1}\mu_1 + 2^t\mu_2$$

$$\partial(\delta_3) = \mu_1.$$

Dessa forma,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[\psi_1, -2^{t-1}\mu_1 + 2^t\mu_2, \mu_1]}.$$

E finalmente, fazendo uma mudança de base de  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  para  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{\delta_1, 2^{t-1}\delta_3 + \delta_2, \delta_3\}$ , temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{t-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz mudança de base tem determinante 1.

$$\partial(\sigma_1) = \partial(\delta_1) = \psi_1$$

$$\partial(\sigma_2) = 2^{t-1}\delta_3 + \delta_2 = 2^t\mu_2$$

$$\partial(\sigma_3) = \partial(\delta_3) = \mu_1.$$

Logo,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[\psi_1, 2^t\mu_2, \mu_1]} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\mu_2]}{\mathbb{Z}[2^t\mu_2]} \simeq \mathbb{Z}_{2^t}.$$

•  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$



$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0, \text{ pois}$$

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2^{t-2} & -1 & 1 \\ 2^{t-2} & 1 & -1 \\ 2h+1-2^{t-2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

possui o determinante não nulo, portanto  $\partial_2$  é injetor, ou seja,  $\text{Ker } \partial_2 = \{0\}$ .

•  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}, \text{ pois } [\partial_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ , considerando  $2h+1 > 2^{t-2}$ ,  $k$  e  $l$  arbitrários, é

$$H_i(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 3; \\ \mathbb{Z}_{2^t}, & i = 1; \\ 0, & i = 2. \end{cases}$$

$$2^\circ) 2h+1 < 2^{t-2}$$

Para isto, relembremos o seguinte complexo de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Neste caso, os bordos mencionados no complexo de cadeias acima são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\partial_2(c_{2,1}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]c_{1,2}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1}]c_{1,1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1} c_{1,2} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + 1]c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{2^{t-2}+z} y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,3}.$$

Novamente, esses bordos são válidos para todas as representações consideradas e iremos denotar a forma espacial esférica, simplesmente, por  $\mathfrak{D}$ .

Calculemos a homologia:

- $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}, \text{ pois } [\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}]}{\mathbb{Z}[(2h+1)c_{1,1} - 2c_{1,2}, (2^{t-2} - (2h+1))c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3}, (2h+1)c_{1,1} - 2c_{1,3}]}$$

Considere

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2h+1 & -2 & 0 \\ 2^{t-2} - (2h+1) & 1 & 1 \\ 2h+1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}\}$  para  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,1}\}$ , temos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz mudança de base tem determinante  $-1$ .

$$\partial(c_{2,1}) = (2h+1)c_{1,1} - 2c_{1,2} = -2\omega_1 + (2h+1)\omega_3$$

$$\partial(c_{2,2}) = [2^{t-2} - (2h+1)]c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} = \omega_1 + \omega_2 + [2^{t-2} - (2h+1)]\omega_3$$

$$\partial(c_{2,3}) = (2h+1)c_{1,1} - 2c_{1,3} = -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3.$$

Assim,

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2h+1 \\ 1 & 1 & 2^{t-2} - (2h+1) \\ 0 & -2 & 2h+1 \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo a mudança de base de  $\{c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3}\}$  para  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{c_{2,1} + 2c_{2,2}, c_{2,2}, c_{2,3}\}$ , obtemos a matriz mudança de base

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é 1.

Assim,

$$\partial(\delta_1) = \partial(c_{2,1} + 2c_{2,2}) = 2\omega_2 + [2^{t-1} - (2h+1)]\omega_3$$

$$\partial(\delta_2) = \omega_1 + \omega_2 + [2^{t-2} - (2h+1)]\omega_3$$

$$\partial(\delta_3) = -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3.$$

Logo,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \omega_3]}{\mathbb{Z}[2\omega_2 + (2^{t-1} - (2h+1))\omega_3, \omega_1 + \omega_2 + (2^{t-2} - (2h+1))\omega_3, -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  para  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{\omega_1 + \omega_2 + [2^{t-2} - (2h+1)]\omega_3, -\omega_2 + \omega_3, \omega_3\}$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2^{t-2} - (2h+1) \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma,

$$\partial(\delta_1) = 2\omega_2 + [2^{t-1} - (2h+1)]\omega_3 = -2\psi_2 + [2^{t-1} - (2h-1)]\psi_3$$

$$\partial(\delta_2) = \omega_1 + \omega_2 + [2^{t-1} - (2h+1)]\omega_3 = \psi_1$$

$$\partial(\delta_3) = -2\omega_2 + (2h+1)\omega_3 = 2\psi_2 + (2h-1)\psi_3.$$

Assim,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \psi_2, \psi_3]}{\mathbb{Z}[-2\psi_2 + (2^{t-1} - (2h-1))\psi_3, \psi_1, 2\psi_2 + (2h-1)\psi_3]}.$$

Fazendo agora a mudança de base de  $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$  para  $\{\psi_1, \mu_1, \mu_2\} = \{\psi_1, \psi_2 + h\psi_3, 2\psi_2 + (2h-1)\psi_3\}$  obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2h-1 \end{pmatrix}$$

que possui determinante  $-1$ .

$$\partial(\delta_1) = 2^t\mu_1 - (2^{t-1} + 1)\mu_2$$

$$\partial(\delta_2) = \psi_1$$

$$\partial(\delta_3) = \mu_2.$$

Dessa forma,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[2^t\mu_1 - (2^{t-1} + 1)\mu_2, \psi_1, \mu_2]}$$

Obtemos,

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 0 & 2^t & -2^{t-1} - 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, fazendo a mudança de base de  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$  para  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{(2^{t-1} + 1)\delta_3 + \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{t-1} + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz mudança de base tem determinante 1.

Logo,

$$\partial(\sigma_1) = \partial((2^{t-1} + 1)\delta_3 + \delta_1) = (2^{t-1} + 1)\mu_2 + 2^t\mu_1 - (2^{t-1} + 1)\mu_2 = 2^t\mu_1$$

$$\partial(\sigma_2) = \partial(\delta_2) = \psi_1$$

$$\partial(\sigma_3) = \partial(\delta_3) = \mu_2.$$

Assim,

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\psi_1, \mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[2^t\mu_1, \psi_1, \mu_2]} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\mu_1]}{\mathbb{Z}[2^t\mu_1]} \simeq \mathbb{Z}_{2^t}.$$

•  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0, \text{ pois}$$

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2h+1 & -2 & 0 \\ 2^{t-2} - (2h+1) & 1 & 1 \\ 2h+1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

possui o determinante não nulo, portanto  $\partial_2$  é injetor, ou seja,  $\text{Ker } \partial_2 = \{0\}$ .

•  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

$$H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\mathbb{Z}}{\{0\}} = \mathbb{Z}, \text{ pois } [\partial_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ , considerando  $2h+1 < 2^{t-2}$ ,  $k$  e  $l$  arbitrários, é

$$H_i(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 3; \\ \mathbb{Z}_{2^t}, & i = 1; \\ 0, & i = 2. \end{cases}$$

### 3.1.2 Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação não-trivial

Faremos agora, o cálculo das homologias de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  para a representação não-trivial  $\tau_y : (x, y) \rightarrow (1, -1)$ , com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ .

$$1^\circ) 2h+1 > 2^{t-2}$$

Recordemos o complexo de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Os bordos mencionados no complexo de cadeias acima são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} - 1]c_0$$

$$\begin{aligned} \partial_2(c_{2,1}) = & [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^{t-1}} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2} y^{2^{t-1}} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^{t-1}} c_{1,2} + \\ & + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3} \end{aligned}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}-1}]c_{1,1} - (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}} c_{1,2} - c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{2^{t-2}+z} y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^{t-1}}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - (x^\alpha y^{2\beta})^{2^{t-2}}]c_{2,3}.$$

Calculemos a homologia:

- $H_0(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

$$H_0(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}[c_0]}{\mathbb{Z}[-2c_0]} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2, \text{ pois } [\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- $H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_1$ :

Seja  $\sigma$  uma 1-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3)$ .

$$\partial_1(\sigma) = -2a_2c_0 - 2a_3c_0 = -2(a_2 + a_3)c_0$$

$$\sigma \in \text{Ker } \partial_1 \iff \partial_1(\sigma) = 0 \iff a_2 = -a_3.$$

Assim,  $\sigma = a_1c_{1,1} + a_2c_{1,2} - a_2c_{1,3} = a_1c_{1,1} + a_2(c_{1,2} - c_{1,3})$ .

Portanto,  $\text{Ker } \partial_1 \simeq \mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2} - c_{1,3}]$ .

Como

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} -2^{t-2} & 1 & -1 \\ 2^{t-2} & -1 & 1 \\ (2h+1) - 2^{t-2} & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

temos que  $\text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}[2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3}, (2h+1 - 2^{t-2})c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}]$ .

$$\text{Logo, } H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2} - c_{1,3}]}{\mathbb{Z}[2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3}, (2h+1 - 2^{t-2})c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}]}.$$

Para facilitar denotamos  $c_{1,1}$  por  $w_1$  e  $c_{1,2} - c_{1,3}$  por  $w_2$ , ou seja,

$$H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}[w_1, w_2]}{\mathbb{Z}[2^{t-2}w_1 - w_2, (2h+1 - 2^{t-2})w_1 + w_2]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{w_1, w_2\}$  para  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{2^{t-2}w_1 - w_2, w_1\}$ , temos

$$\begin{pmatrix} 2^{t-2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, a matriz mudança de base tem determinante 1.

Dessa forma,

$$\partial(c_{2,2}) = 2^{t-2}w_1 - w_2 = \mu_1$$

$$\partial(c_{2,3}) = (2h+1 - 2^{t-2})w_1 + w_2 = -\mu_1 + (2h+1)\mu_2$$

De fato,

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2^{t-2} & -1 \\ 2h+1-2^{t-2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2h+1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[\mu_1, -\mu_1 + (2h+1)\mu_2]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{2,2}, c_{2,3}\}$  para  $\{\delta_1, \delta_2\} = \{c_{2,2}, c_{2,2} + c_{2,3}\}$ , obtemos a matriz mudança de base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que possui determinante 1.

Assim,

$$\partial(\delta_1) = \partial(c_{2,2}) = \mu_1$$

$$\partial(\delta_2) = \partial(c_{2,2} + c_{2,3}) = (2h+1)\mu_2.$$

Portanto,

$$H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[\mu_1, (2h+1)\mu_2]} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\mu_2]}{\mathbb{Z}[(2h+1)\mu_2]} \simeq \mathbb{Z}_{(2h+1)}.$$

•  $H_2(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} -2^{t-2} & 1 & -1 \\ 2^{t-2} & -1 & 1 \\ (2h+1)-2^{t-2} & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Analisemos  $\text{Ker } \partial_2$  :

Seja  $\sigma$  uma 2-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3)$ , temos que

$$\begin{aligned} \partial_2(\sigma) &= a_1(-2^{t-2}c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}) + a_2(2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3}) + a_3[(2h+1-2^{t-2})c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}] \\ &= [-2^{t-2}a_1 + 2^{t-2}a_2 + (2h+1-2^{t-2})a_3]c_{1,1} + (a_1 - a_2 + a_3)c_{1,2} + (-a_1 + a_2 - a_3)c_{1,3} \end{aligned}$$

$$\sigma \in \text{Ker } \partial_2 \iff \begin{cases} -2^{t-2}a_1 + 2^{t-2}a_2 + (2h+1-2^{t-2})a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2^{t-2}a_1 + 2^{t-2}a_2 + (2h+1-2^{t-2})a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda linha por  $2^{t-2}$ , obtemos

$$\iff \begin{cases} -2^{t-2}a_1 + 2^{t-2}a_2 + (2h+1-2^{t-2})a_3 = 0 \\ 2^{t-2}a_1 - 2^{t-2}a_2 + 2^{t-2}a_3 = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira linha com a segunda, temos

$$\iff \begin{cases} -2^{t-2}a_1 + 2^{t-2}a_2 + (2h+1-2^{t-2})a_3 = 0 \\ 2^{t-2}a_3 = 0 \end{cases}$$

Segue que  $a_3 = 0$  e  $a_1 = a_2$ .

Logo,  $\sigma = a_1c_{2,1} + a_2c_{2,2} + a_3c_{2,3} = a_1c_{2,1} + a_1c_{2,2} = a_1(c_{2,1} + c_{2,2})$ .

Dessa forma,  $\text{Ker } \partial_2 = \mathbb{Z}[c_{2,1} + c_{2,2}]$ .

Observe que

$$[\partial_3] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $\text{Im } \partial_3 = \mathbb{Z}[2c_{2,1} + 2c_{2,2}] = \mathbb{Z}[2(c_{2,1} + c_{2,2})]$ .

$$\text{Portanto, } H_2(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3} = \frac{\mathbb{Z}[c_{2,1} + c_{2,2}]}{\mathbb{Z}[2(c_{2,1} + c_{2,2})]} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_3(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_3] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analisemos  $\text{ker } \partial_3$  :

Seja  $\sigma$  uma 3-cadeia representada por  $a$ , temos que

$$\partial_3(\sigma) = 2ac_{2,1} + 2ac_{2,2} = 2a(c_{2,1} + c_{2,2})$$

$$\sigma \in \text{ker } \partial_3 \iff a = 0.$$

Assim,  $\text{Ker } \partial_3 = \{0\}$ .

$$\text{Logo, } H_3(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$



Portanto, a homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ , considerando  $2h+1 > 2^{t-2}$ ,  $k$  e  $l$  arbitrários, é

$$H_i(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & i = 0, 2; \\ \mathbb{Z}_{(2h+1)}, & i = 1; \\ 0, & i = 3. \end{cases}$$

2º)  $2h+1 < 2^{t-2}$

Para isto, relembremos o seguinte complexo de cadeias:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Neste caso, os bordos mencionados no complexo de cadeias acima são:

$$\partial_1(c_{1,1}) = [(x^\alpha y^{2\beta}) - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\partial_1(c_{1,3}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} - 1]c_0$$

$$\begin{aligned} \partial_2(c_{2,1}) = & [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}} y^{2^t-1} + \\ & + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]c_{1,2} \end{aligned}$$

$$\partial_2(c_{2,2}) = [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+1} y^{2^t-1} + \dots + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{z+2^{t-2}-(2h+1)} y^{2^t-1}]c_{1,1} + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}c_{1,2} + (x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}c_{1,3}$$

$$\partial_2(c_{2,3}) = [1 + (x^\alpha y^{2\beta}) + \dots + (x^\alpha y^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1} + 1]c_{1,3}$$

$$\partial_3(c_3) = [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^{2^{t-2}+z} y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,1} + [1 - [(x^\alpha y^{2\beta})^{2h+1}]^{-1}]c_{2,2} + [1 - [(x^{\alpha'} y^{2\beta'})^z y^{2^t-1}]^{-1}]c_{2,3}.$$

Calculemos a homologia:

- $H_0(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

$$H_0(M; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}[c_0]}{\mathbb{Z}[-2c_0]} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2, \text{ pois } [\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- $H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_1$ :

Seja  $\sigma$  uma 1-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3)$ .

$$\partial_1(\sigma) = -2a_2c_0 - 2a_3c_0 = -2(a_2 + a_3)c_0$$

$$\sigma \in \text{Ker } \partial_1 \iff \partial_1(\sigma) = 0 \iff a_2 = -a_3.$$

Assim,  $\sigma = a_1c_{1,1} + a_2c_{1,2} - a_2c_{1,3} = a_1c_{1,1} + a_2(c_{1,2} - c_{1,3})$ .

Portanto,  $\text{Ker } \partial_1 \simeq \mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2} - c_{1,3}]$ .

Como

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} -(2h+1) & 0 & 0 \\ -2^{t-2} + (2h+1) & 1 & -1 \\ 2h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que  $\text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}[(2h+1)c_{1,1}, (-2^{t-2} + 2h+1)c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}]$ .

$$\text{Logo, } H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}[c_{1,1}, c_{1,2} - c_{1,3}]}{\mathbb{Z}[(2h+1)c_{1,1}, (-2^{t-2} + 2h+1)c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}]}.$$

Para facilitar denotamos  $c_{1,1}$  por  $w_1$  e  $c_{1,2} - c_{1,3}$  por  $w_2$ , ou seja,

$$H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}[w_1, w_2]}{\mathbb{Z}[(2h+1)w_1, (2h+1 - 2^{t-2})w_1 + w_2]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{w_1, w_2\}$  para  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{(2h+1 - 2^{t-2})w_1 + w_2, w_1\}$ , temos

$$\begin{pmatrix} 2h+1 - 2^{t-2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que, a matriz mudança de base tem determinante  $-1$ .

Dessa forma,

$$\partial(c_{2,2}) = (2h+1 - 2^{t-2})w_1 + w_2 = \mu_1$$

$$\partial(c_{2,3}) = (2h+1)w_1 = (2h+1)\mu_2$$

De fato,

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} 2h+1-2^{t-2} & 1 \\ 0 & 2h+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2h+1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$H_1(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\mathbb{Z}[\mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}[\mu_1, (2h+1)\mu_2]} \simeq \frac{\mathbb{Z}[\mu_2]}{\mathbb{Z}[(2h+1)\mu_2]} \simeq \mathbb{Z}_{(2h+1)}.$$

•  $H_2(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_2] = \begin{pmatrix} -(2h+1) & 0 & 0 \\ -2^{t-2} + (2h+1) & 1 & -1 \\ 2h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Analisemos  $\text{Ker } \partial_2$  :

Seja  $\sigma$  uma 2-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3)$ , temos que

$$\begin{aligned} \partial_2(\sigma) &= -(2h+1)a_1c_{1,1} + a_2[(-2^{t-2} + 2h+1)c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3}] + (2h+1)a_3c_{1,1} \\ &= [-(2h+1)a_1 + (-2^{t-2} + 2h+1)a_2 + (2h+1)a_3]c_{1,1} + a_2c_{1,2} - a_2c_{1,3} \end{aligned}$$

$$\sigma \in \text{Ker } \partial_2 \iff \begin{cases} -(2h+1)a_1 + (-2^{t-2} + 2h+1)a_2 + (2h+1)a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ -a_2 = 0 \end{cases}$$

Segue que  $a_2 = 0$  e  $a_1 = a_3$ .

Logo,  $\sigma = a_1c_{2,1} + a_2c_{2,2} + a_3c_{2,3} = a_1c_{2,1} + a_1c_{2,3} = a_1(c_{2,1} + c_{2,3})$ .

Dessa forma,  $\text{Ker } \partial_2 = \mathbb{Z}[c_{2,1} + c_{2,3}]$ .

Observe que

$$[\partial_3] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ou seja,  $\text{Im } \partial_3 = \mathbb{Z}[2c_{2,1} + 2c_{2,3}] = \mathbb{Z}[2(c_{2,1} + c_{2,3})]$ .

$$\text{Portanto, } H_2(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3} = \frac{\mathbb{Z}[c_{2,1} + c_{2,3}]}{\mathbb{Z}[2(c_{2,1} + c_{2,3})]} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_3(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Considere

$$[\partial_3] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Analisemos  $\ker \partial_3$  :

Seja  $\sigma$  uma 3-cadeia representada por  $a$ , temos que

$$\partial_3(\sigma) = 2ac_{2,1} + 2ac_{2,3} = 2a(c_{2,1} + c_{2,3})$$

$$\sigma \in \ker \partial_3 \iff a = 0.$$

Assim,  $\text{Ker } \partial_3 = \{0\}$ .

$$\text{Logo, } H_3(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

Portanto, a homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ , considerando  $2h+1 < 2^{t-2}$ ,  $k$  e  $l$  arbitrários, é

$$H_i(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & i = 0, 2; \\ \mathbb{Z}_{(2h+1)}, & i = 1; \\ 0, & i = 3. \end{cases}$$

### 3.1.3 Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

Vamos calcular os grupos de homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1) = \frac{S^3}{\pi(D_{(2h+1).2^t})}$ , com a representação trivial  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$ .

1°)  $2h+1 > 2^{t-2}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}_2\langle c_{21}, c_{22}, c_{23} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2\langle c_{11}, c_{12}, c_{13} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Usando a representação trivial, os bordos são:

$$\partial_1(c_{11}) = 0$$

$$\partial_1(c_{12}) = 0$$

$$\partial_1(c_{13}) = 0$$

$$\partial_2(c_{21}) = -c_{12} + c_{13}$$

$$\partial_2(c_{22}) = c_{12} - c_{13}$$

$$\partial_2(c_{23}) = c_{11} - c_{12} - c_{13}$$

$$\partial_3(c_{33}) = 0$$

Vamos calcular os grupos de homologia:

- $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_0]}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

- $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[-c_{12} + c_{13}, c_{12} - c_{13}, c_{11} - c_{12} - c_{13}]}.$$

Considere  $[\partial_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{21}, c_{22}, c_{23}\}$  para  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{c_{21}, c_{21} + c_{22}, c_{21} + c_{23}\}.$

Assim,

$$\partial(\delta_1) = \partial(c_{21}) = -c_{12} + c_{13}$$

$$\partial(\delta_2) = \partial(c_{21} + c_{22}) = 0$$

$$\partial(\delta_3) = \partial(c_{21} + c_{23}) = c_{11} - 2c_{12} = c_{11}.$$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[-c_{12} + c_{13}, c_{11}]} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[-c_{12} + c_{13}]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{12}, c_{13}\}$  para  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{c_{12}, -c_{12} + c_{13}\},$  obtemos

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[\mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}_2[\mu_2]} \simeq \mathbb{Z}_2[\mu_1] \simeq \mathbb{Z}_2.$$

- $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3}.$$

Seja  $\sigma$  uma 2-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3),$  temos que

$$\begin{aligned} \partial_2(\sigma) &= a_1(-c_{12} + c_{13}) + a_2(c_{12} - c_{13}) + a_3(c_{11} - c_{12} - c_{13}) \\ &= a_3c_{11} + (-a_1 + a_2 - a_3)c_{12} + (a_1 - a_2 - a_3)c_{13}. \end{aligned}$$

Assim  $\sigma$  pertence a  $\text{Ker } \partial_2$  se, e somente se,  $\begin{cases} a_3 = 0 \\ a_1 = a_2 \end{cases}$

Logo,  $\sigma = a_1c_{21} + a_1c_{22} = a_1(c_{21} + c_{22}).$

$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2(c_{21} + c_{22})}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_3]}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

Portanto,  $H_i(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .

**Observação 3.1.1.** O gerador do  $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_{12}$ , o gerador do  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_{21} + c_{22}$  e o gerador do  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_3$ .

2°)  $2h + 1 < 2^{t-2}$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}_2\langle c_{21}, c_{22}, c_{23} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}_2\langle c_{11}, c_{12}, c_{13} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}_2\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Considerando a representação trivial, os bordos são:

$$\partial_1(c_{11}) = 0$$

$$\partial_1(c_{12}) = 0$$

$$\partial_1(c_{13}) = 0$$

$$\partial_2(c_{21}) = c_{11}$$

$$\partial_2(c_{22}) = c_{11} + c_{12} + c_{13}$$

$$\partial_2(c_{23}) = c_{11}$$

$$\partial_3(c_{33}) = 0$$

Calculemos os grupos de homologia:

•  $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_0]}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{11} + c_{12} + c_{13}, c_{11}]} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{11} + c_{12} + c_{13}]}.$$

$$\text{Considere } [\partial_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{21}, c_{22}\}$  para  $\{\delta_1, \delta_2\} = \{c_{21}, c_{22} - c_{21}\}$ .

Assim,

$$\partial(\delta_1) = \partial(c_{21}) = c_{11}$$

$$\partial(\delta_2) = \partial(c_{22} - c_{21}) = c_{12} + c_{13}.$$

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[c_{11}, c_{12} + c_{13}]} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2[c_{12}, c_{13}]}{\mathbb{Z}_2[c_{12} + c_{13}]}.$$

Fazendo a mudança de base de  $\{c_{12}, c_{13}\}$  para  $\{\mu_1, \mu_2\} = \{c_{12}, c_{12} + c_{13}\}$ , obtemos

$$H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2[\mu_1, \mu_2]}{\mathbb{Z}_2[\mu_2]} \simeq \mathbb{Z}_2[\mu_1] \simeq \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_2}{\text{Im } \partial_3}.$$

Seja  $\sigma$  uma 2-cadeia representada por  $(a_1, a_2, a_3)$ , temos que

$$\partial_2(\sigma) = a_1(c_{11}) + a_2(c_{11} + c_{12} + c_{13}) + a_3(c_{11}) = (a_1 + a_2 + a_3)c_{11} + a_2c_{12} + a_2c_{13}.$$

Assim  $\sigma$  pertence a  $\text{Ker } \partial_2$  se, e somente se,  $\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -a_3 \end{cases}$

Logo,  $\sigma = a_1c_{21} - a_1c_{23} = a_1(c_{21} - c_{23})$ .

$$H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\mathbb{Z}_2(c_{21} - c_{23})}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

$$H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_3}{\text{Im } \partial_4} = \frac{\mathbb{Z}_2[c_3]}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

Portanto,  $H_i(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .

**Observação 3.1.2.** O gerador do  $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_{12}$ , o gerador do  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_{21} - c_{23}$  e o gerador do  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  é  $c_3$ .

### 3.2 Grupos de homologia de $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$

Calculemos os grupos de homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ , com representações  $\tau : D_{(2h+1).2^t} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ . Como vimos anteriormente, existem duas representações possíveis, que são a representação trivial e a representação não trivial,  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$  e  $\tau_y(x, y) \rightarrow (1, -1)$ , respectivamente.

#### 3.2.1 Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação trivial

Seja  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$  a representação trivial.

1°)  $2h+1 > 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-1} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} 2^{t-2} & -1 & 1 \\ 2^{t-2} & 1 & -1 \\ (2h+1) - 2^{t-2} & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \begin{pmatrix} (2h+1).2^t \end{pmatrix},$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 > 2^{t-2}$ , obtemos



$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq 0,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{2^t},$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$ :

•  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_{4q-4}$ , seja  $\sigma$  uma  $(4q-4)$ -cadeia representada por  $a$ .

$$\partial_{4q-4}(\sigma) = (2h+1).2^t a = 0 \iff a = 0.$$

Logo,  $\text{Ker } \partial_{4q-4} = \{0\}$ .

$$\text{Portanto, } H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

•  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-1} \simeq \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\partial_{4q-1}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-4} \simeq (2h+1)2^t \mathbb{Z}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\mathbb{Z}}{(2h+1)2^t \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{(2h+1).2^t}.$$

2°)  $2h+1 < 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} 2h+1 & -2 & 0 \\ 2^{t-2} - (2h+1) & 1 & 1 \\ (2h+1) & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \left( (2h+1).2^t \right),$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 < 2^{t-2}$ , obtemos

$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq 0,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{2^t},$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$ :

- $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_{4q-4}$ , seja  $\sigma$  uma  $(4q-4)$ -cadeia representada por  $a$ .

$$\partial_{4q-4}(\sigma) = (2h+1).2^t a = 0 \iff a = 0.$$

Logo,  $\text{Ker } \partial_{4q-4} = \{0\}$ .

$$\text{Portanto, } H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

- $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-1} \simeq \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\partial_{4q-1}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-4} \simeq (2h+1)2^t \mathbb{Z}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\mathbb{Z}}{(2h+1)2^t \mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{(2h+1).2^t}.$$

### 3.2.2 Coeficientes em $\mathbb{Z}$ e representação não-trivial

Seja  $\tau_y : (x, y) \rightarrow (1, -1)$  a representação não-trivial.

1°)  $2h+1 > 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} -2^{t-2} & 1 & -1 \\ 2^{t-2} & -1 & 1 \\ (2h+1) - 2^{t-2} & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 > 2^{t-2}$ , obtemos

$$H_0(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq 0,$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_{(2h+1)},$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$ :

- $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-4} \simeq \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-3} \simeq 2\mathbb{Z}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2.$$

- $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_{4q-1}$ , seja  $\sigma$  uma  $(4q-1)$ -cadeia representada por  $a$ .

$$\partial_{4q-1}(\sigma) = 2ac_{4q-2,1} + 2ac_{4q-2,2} = 2a(c_{4q-2,1} + c_{4q-2,2}) = 0 \iff a = 0.$$

Logo,  $\text{Ker } \partial_{4q-1} = \{0\}$ .

$$\text{Portanto, } H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

2°)  $2h+1 < 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} -(2h+1) & 0 & 0 \\ -2^{t-2} + (2h+1) & 1 & -1 \\ 2h+1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 < 2^{t-2}$ , obtemos

$$H_0(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq 0,$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) \simeq \mathbb{Z}_{(2h+1)},$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$ :

•  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-4} \simeq \mathbb{Z}$ , uma vez que  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-3} \simeq 2\mathbb{Z}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}})$

Analisemos o  $\text{Ker } \partial_{4q-1}$ , seja  $\sigma$  uma  $(4q-1)$ -cadeia representada por  $a$ .

$$\partial_{4q-1}(\sigma) = 2ac_{4q-2,1} + 2ac_{4q-2,3} = 2a(c_{4q-2,1} + c_{4q-2,3}) = 0 \iff a = 0.$$

Logo,  $\text{Ker } \partial_{4q-1} = \{0\}$ .

$$\text{Portanto, } H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \widetilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = 0.$$

### 3.2.3 Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

Vamos calcular os grupos de homologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$ , com a representação trivial  $\tau_0 : (x, y) \rightarrow (1, 1)$  e coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ .

1°)  $2h+1 > 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 > 2^{t-2}$  e coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ , obtemos

$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ :

- $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-4} \simeq \mathbb{Z}_2$ , pois  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula.

Portanto,

$$H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\mathbb{Z}_2}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

- $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-1} \simeq \mathbb{Z}_2$ , uma vez que  $\partial_{4q-1}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-4} \simeq \{0\}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\mathbb{Z}_2}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

2°)  $2h+1 < 2^{t-2}$

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}_2 D_{(2h+1).2^t} \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Os operadores bordo são dados por

$$[\partial_{4q-1}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-2}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-3}] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$[\partial_{4q-4}] = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},$$

exceto por  $\partial_0 = 0$ .

Analogamente, ao cálculo da homologia de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com  $2h+1 < 2^{t-2}$  e coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ , obtemos

$$H_{4n-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-2}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

$$H_{4q-3}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2,$$

Resta calcular  $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$  e  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ :

- $H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-4} \simeq \mathbb{Z}_2$ , pois  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula.

Portanto,

$$H_{4q-4}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-4}}{\text{Im } \partial_{4q-3}} = \frac{\mathbb{Z}_2}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$

•  $H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$

O  $\text{Ker } \partial_{4q-1} \simeq \mathbb{Z}_2$ , uma vez que  $\partial_{4q-1}$  é a aplicação nula.

Além disso, note que  $\text{Im } \partial_{4q-4} \simeq \{0\}$ .

Dessa forma,

$$H_{4q-1}(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \frac{\text{Ker } \partial_{4q-1}}{\text{Im } \partial_{4q-4}} = \frac{\mathbb{Z}_2}{\{0\}} = \mathbb{Z}_2.$$



# Anel de cohomologia das formas espaciais esféricas metacíclicas

Neste capítulo, utilizamos o complexo de cadeias construído no capítulo 2, para calcular os grupos de cohomologia das formas espaciais esféricas metacíclicas de dimensão três com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_p$ , e através da interpretação geométrica do produto cup abordada no capítulo 1, calculamos o anel de cohomologia desses espaços com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_2$  e  $\mathbb{Z}_p$ , onde  $p$  é primo.

## 4.1 Grupos de cohomologia de $\mathfrak{D}((2h + 1).2^t; k_1, l_1)$

Considere o complexo de cadeias abaixo:

$$C : 0 \longrightarrow \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \\ \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}D_{(2h+1).2^t}\langle c_0 \rangle \longrightarrow 0.$$

Seja  $2h + 1 > 2^t$ , considerando a representação trivial, temos que os bordos mencionados no

complexo de cadeia acima são:

$$\begin{aligned}\partial_1(c_{1,1}) &= 0 \\ \partial_1(c_{1,2}) &= 0 \\ \partial_1(c_{1,3}) &= 0 \\ \partial_2(c_{2,1}) &= 2^{t-2}c_{1,1} - c_{1,2} + c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,2}) &= 2^{t-2}c_{1,1} + c_{1,2} - c_{1,3} \\ \partial_2(c_{2,3}) &= (2h+1 - 2^{t-2})c_{1,1} - c_{1,2} - c_{1,3} \\ \partial_3(c_3) &= 0\end{aligned}$$

### 4.1.1 Coeficientes em $\mathbb{Z}$

Calculamos a cohomologia do complexo de cadeia  $C$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , usando o teorema dos coeficientes universais para cohomologia (teorema 1.4.6).

Para  $q = 0$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_0(C), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{-1}(C); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}$$

Para  $q = 1$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_1(C), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_0(C); \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \simeq 0$$

Para  $q = 2$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_2(C), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_1(C); \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(0; \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}) \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}_{2^t} \simeq \mathbb{Z}_{2^t}$$

Para  $q = 3$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(H_3(C), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_2(C); \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}$$

Portanto,

$$H^q(C; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0, 3 \\ 0 & \text{se } q = 1 \\ \mathbb{Z}_{2^t} & \text{se } q = 2 \end{cases}$$

### 4.1.2 Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

Agora, calculemos a cohomologia do complexo de cadeia  $C$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$ .

Para  $q = 0$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(H_0(C), \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(H_{-1}(C); \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_2) \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}_2$$

Para  $q = 1$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(H_1(C), \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(H_0(C); \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}_2$$

Para  $q = 2$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(H_2(C), \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(H_1(C); \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(0; \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}_2) \simeq 0 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$$

Para  $q = 3$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(H_3(C), \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Ext}(H_2(C); \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_2) \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}_2$$

Portanto,  $H^q(C; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ ,  $0 \leq q \leq 3$ .

### 4.1.3 Coeficientes em $\mathbb{Z}_p$

Finalmente, calculemos a cohomologia do complexo de cadeia  $C$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_p$ , onde  $p$  é primo,  $p > 2$ .

Para  $q = 0$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(H_0(C), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_{-1}(C); \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_p) \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}_p$$

Para  $q = 1$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(H_1(C), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_0(C); \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_p) \simeq 0$$

Para  $q = 2$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(H_2(C), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_1(C); \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(0; \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(\mathbb{Z}_{2^t}; \mathbb{Z}_p) \simeq 0$$

Para  $q = 3$ , temos

$$H^q(C; \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(H_3(C), \mathbb{Z}_p) \oplus \text{Ext}(H_2(C); \mathbb{Z}_p) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}_p) \oplus 0 \simeq \mathbb{Z}_p$$

Portanto,

$$H^q(C; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \text{se } q = 0, 3 \\ 0 & \text{se } q = 1, 2 \end{cases}$$

**Observação 4.1.1.** Lembramos que calcular a cohomologia do complexo de cadeias  $C$ , nada mais é, do que calcular a cohomologia da forma espacial esférica metacíclica  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$ .

## 4.2 Anel de cohomologia de $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$

Nesta seção, vamos calcular o anel de cohomologia.

### 4.2.1 Coeficientes em $\mathbb{Z}$

O anel de cohomologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}$  é  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma^2, \sigma^3]/(2^t\sigma^2 = 0)$ .

De fato,

$$H^q(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = 0, 3 \\ 0 & \text{se } q = 1 \\ \mathbb{Z}_{2^t} & \text{se } q = 2 \end{cases}$$

Assim, segue a tabela com o produto cup em  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z})$ .

$\cup$	$\sigma^0$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\sigma^0$	$\sigma^0$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\sigma^2$	$\sigma^2$	0	0
$\sigma^3$	$\sigma^3$	0	0

### 4.2.2 Coeficientes em $\mathbb{Z}_2$

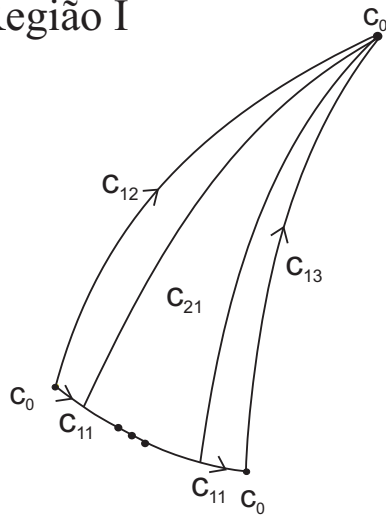
O anel de cohomologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_2$  é  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3]/(\sigma^1 \cup \sigma^1 = 0, \sigma^1 \cup \sigma^2 = \sigma^3)$ .

De fato,

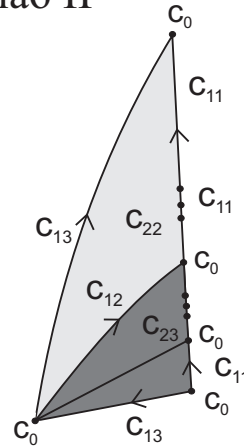
$$H^q(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{se } q = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } q = 1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } q = 2 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } q = 3 \end{cases}$$

1º)  $2h + 1 > 2^{t-2}$

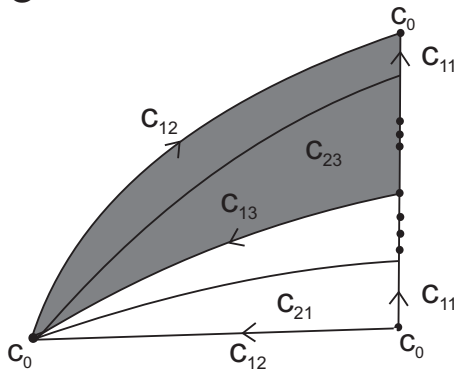
Região I



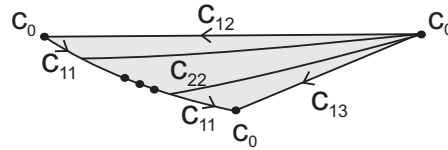
Região II



Região III



Região IV



Sejam  $\sigma^q$  o gerador de  $H^q(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ , para todo  $q$ .

Vimos que  $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_0]$ ,  $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_{12}]$ ,  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_{21} + c_{22}]$  e  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_3]$  (vide seção 3.1.3).

Sejam  $[c_0]^* \simeq \sigma^3$ ,  $[c_{12}]^* = \sigma^2$  e  $[c_{21} + c_{22}]^* = \sigma^1$  e  $[c_3]^* = \sigma^0$  o dual de Poincaré de  $[c_0]$ ,  $[c_{12}]$ ,  $[c_{21} + c_{22}]$  e  $[c_3]$ , respectivamente.

Claramente,  $\sigma^0$  é o elemento neutro de  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ .

Considerando positiva a orientação anti-horário, pelo teorema 1.5.4, temos que

$$\sigma^1 \cup \sigma^2 = [c_{21} + c_{22}]^* \cup [c_{12}]^* = [(c_{21} + c_{22}) \cap c_{12}]^* = [c_0]^* \in H^3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$$

Logo,  $\sigma^1 \cup \sigma^2 = \sigma^3$ .

Analogamente,  $\sigma^2 \cup \sigma^1 = \sigma^3$ .

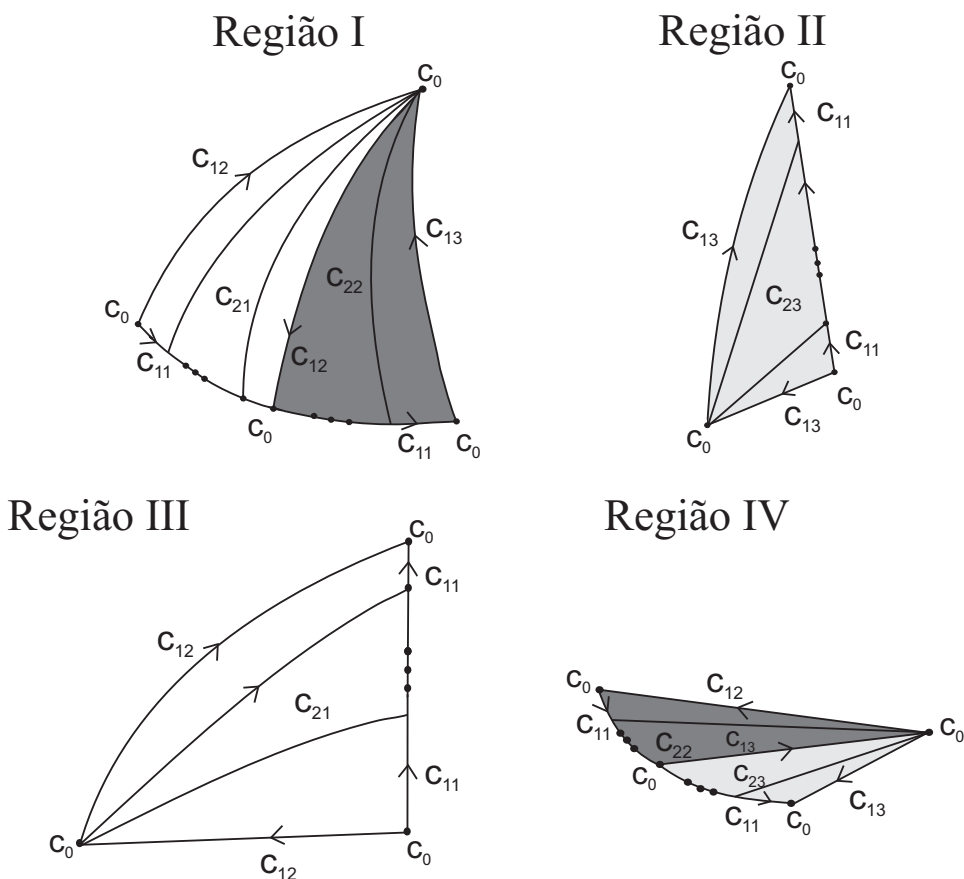
Por outro lado,

$$\sigma^1 \cup \sigma^1 = [c_{21} + c_{22}]^* \cup [c_{21} + c_{22}]^* = [(c_{21} + c_{22}) \cap (c_{21} + c_{22})]^* = [c_{11}]^* \simeq 0 \in H^2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2),$$

uma vez que  $[c_{11}]$  é homóloga a 0, pois  $\partial(c_{22} + c_{23}) = c_{11}$ .

Para ver que a intersecção acima é  $c_{11}$ , consideramos um representante de  $c_{21} + c_{22}$  na região I e II e outro, na região III e IV.

2º)  $2h + 1 < 2^{t-2}$



Sejam  $\sigma^q$  o gerador de  $H^q(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ , para todo  $q$ .

Vimos que  $H_0(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_0]$ ,  $H_1(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_{12}]$ ,  $H_2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_{21} - c_{23}]$  e  $H_3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ , com gerador  $[c_3]$  (vide seção 3.1.3).

Sejam  $[c_0]^* \simeq \sigma^3$ ,  $[c_{12}]^* = \sigma^2$  e  $[c_{21} - c_{23}]^* = \sigma^1$  e  $[c_3]^* = \sigma^0$  o dual de Poincaré de  $[c_0]$ ,  $[c_{12}]$ ,  $[c_{21} - c_{23}]$  e  $[c_3]$ , respectivamente.

Claramente,  $\sigma^0$  é o elemento neutro de  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ .

Considerando positiva a orientação anti-horário, pelo teorema 1.5.4, temos que

$$\sigma^1 \cup \sigma^2 = [c_{21} - c_{23}]^* \cup [c_{12}]^* = [(c_{21} - c_{23}) \cap c_{12}]^* = [c_0]^* \in H^3(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$$

Logo,  $\sigma^1 \cup \sigma^2 = \sigma^3$ .

Analogamente,  $\sigma^2 \cup \sigma^1 = \sigma^3$ .

Por outro lado,

$$\sigma^1 \cup \sigma^1 = [c_{21} - c_{23}]^* \cup [c_{21} - c_{23}]^* = [(c_{21} - c_{23}) \cap (c_{21} - c_{23})]^* = [c_{12} - c_{13}]^* \simeq 0 \in H^2(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2),$$

já que  $[c_{12} - c_{13}]$  é homóloga a 0, pois  $\partial(c_{21} + c_{22}) = c_{12} - c_{13}$ .

Para ver que a intersecção acima é  $c_{12} - c_{13}$ , consideramos um representante de  $c_{21} - c_{23}$  na região I e II e outro, na região III e IV.

Assim, segue a tabela com o produto cup em  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_2)$ .

$\cup$	$\sigma^0$	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\sigma^0$	$\sigma^0$	$\sigma^1$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
$\sigma^1$	$\sigma^1$	0	$\sigma^3$	0
$\sigma^2$	$\sigma^2$	$\sigma^3$	0	0
$\sigma^3$	$\sigma^3$	0	0	0

### 4.2.3 Coeficientes em $\mathbb{Z}_p$

O anel de cohomologia de  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$  com coeficientes em  $\mathbb{Z}_p$  é  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}[\sigma^3]/(p \cdot \sigma^3 = 0)$ .

De fato,

$$H^q(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & \text{se } q = 0, 3 \\ 0 & \text{se } q = 1, 2 \end{cases}$$

Assim, segue a tabela com o produto cup em  $H^*(\mathfrak{D}; \mathbb{Z}_p)$ .

$\cup$	$\sigma^0$	$\sigma^3$
$\sigma^0$	$\sigma^0$	$\sigma^3$
$\sigma^3$	$\sigma^3$	0

## Cálculo das Torções

Neste capítulo, calculamos a torção de Reidemeister para formas espaciais esféricas metacíclicas, utilizando uma dada representação do seu grupo fundamental, esse cálculo foi dividido em dois casos, finalizamos demonstrando uma relação dos resultados obtidos.

Quando definimos as formas espaciais esféricas metacíclicas, fizemos uso da representação complexa  $\pi : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2n, \mathbb{C})$ , definida na equação (2.4.6). Como  $\pi_1(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)) \simeq D_{(2h+1),2^t}$ , faremos o cálculo da  $R$  torção utilizando a seguinte representação em  $U(2, \mathbb{C})$

$$\rho : D_{(2h+1),2^t} \rightarrow U(2, \mathbb{C}),$$

onde

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \rho(y) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{2^{t-1}}i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\pi}{2^{t-1}}i} \end{pmatrix}. \quad (5.0.1)$$

Para facilitar a notação, utilizaremos a seguinte identificação

$$\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \eta, \text{ onde } \eta = e^{\frac{\pi}{2^{t-1}}i}. \end{cases}$$

Portanto, os complexos de cadeia de  $\mathbb{Z}[D_{(2h+1),2^t}]$ -módulos (equações (2.4.4) e (2.4.5)) passam a ser complexos de cadeia de  $\mathbb{Z}[\mathbb{C}]$ -módulos (ou seja,  $\mathbb{C}$ -módulos) e além disso deverá ser



acíclico. Provemos isto.

**Proposição 5.0.1.** *O complexo de cadeias de  $\mathbb{Z}[\mathbb{C}]$ -módulos*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{4q-1} \rangle &\xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ &\xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned} \quad (5.0.2)$$

com operadores bordo dados por

$$1^\circ) \quad 2h + 1 > 2^{t-2}$$

$$\partial_{4q-1} = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} & 1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q} \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}-1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-4} = ((2h + 1)(1 + \eta + \dots + \eta^{2^t - 1})) = ((2h + 1).0) = (0)$$

$$2^\circ) \quad 2h + 1 < 2^{t-2}$$

$$\partial_{4q-1} = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{-2\beta_q(2h+1)} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-2} =$$

$$\begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & 0 & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_{4q-4} = ((2h+1)(1 + \eta + \dots + \eta^{2^t-1})) = ((2h+1).0) = (0)$$

é acíclico.

**Demonstração:** Já temos que o complexo acima é semi-exato quando  $2h+1 > 2^{t-2}$  e  $2h+1 < 2^{t-2}$  (Afirmações (2.4.1) e (2.4.2)).

$$1^\circ) 2h+1 > 2^{t-2}$$

•  $Ker \partial_{4q-1}$

$$\partial_{4q-1} = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} & 1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q} \end{pmatrix}$$

Seja uma  $(4q-1)$ -cadeia representada por  $d$  pertencente ao  $Ker \partial_{4q-1}$ , então

$$d(1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1})c_{4q-2,1} = 0$$

$$d(1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1})c_{4q-2,2} = 0$$

$$d(1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})c_{4q-2,3} = 0$$

Dessa forma, temos  $d = 0$ .

Logo,  $Ker \partial_{4q-1} = 0$ , ou seja,  $dim(Ker \partial_{4q-1}) = 0$ .

•  $Im \partial_{4q-1}$

Como a matriz do  $\partial_{4q-1}$  tem posto 1, segue que  $dim(Im \partial_{4q-1}) = 1$ .

•  $Ker \partial_{4q-2}$

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} & -1 \end{pmatrix}$$

Considere uma  $(4q-2)$ -cadeia  $\sigma$  representada por  $(d, e, f)$ , então

$$\begin{aligned}
\partial_{4q-2}(\sigma) &= \partial_{4q-2}(d c_{4q-2,1} + e c_{4q-2,2} + f c_{4q-2,3}) \\
&= d[(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,2} + \\
&\quad + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}] + e[((\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h})c_{4q-3,1} + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,2} - \\
&\quad - (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}] + f[(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}})c_{4q-3,1} - (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,2} - c_{4q-3,3}] \\
&= d[(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,2} + \\
&\quad + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}] + e[((\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h})c_{4q-3,1} + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,2} - \\
&\quad - (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}] + f[(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}})c_{4q-3,1} - (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,2} - c_{4q-3,3}] \\
&= [d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e((\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h}) + \\
&\quad + f(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}})]c_{4q-3,1} + [-d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - \\
&\quad - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})]c_{4q-3,2} + [d(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - f]c_{4q-3,3}
\end{aligned}$$

A  $(4q - 2)$ -cadeia  $\sigma$  pertence ao  $Ker \partial_{4q-2}$  se, e somente se,

$$\begin{cases}
d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e((\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h}) + \\
+ f(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}}) = 0 \\
-d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) = 0 \\
d(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - f = 0
\end{cases}$$

Somando a segunda com a terceira equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
d(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{-2\beta_q z_q - 1}) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1) &= 0 \\
d(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{-2\beta_q z_q - 1}) &= f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1) \\
d &= \frac{f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)}{(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{-2\beta_q z_q - 1})}.
\end{aligned}$$

Substituindo tal valor encontrado anteriormente para  $d$  na terceira equação, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{-\eta^{-2\beta_q z_q - 1}(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)}{\eta^{-2\beta_q z_q - 1}(-\eta^{-2^{t-1}\beta_q} + 1)}f - \eta^{-2\beta_q z_q - 1}e - f &= 0 \\
\eta^{-2\beta_q z_q - 1}e &= \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)}{(-\eta^{-2^{t-1}\beta_q} + 1)}f - f
\end{aligned}$$

$$e = \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + 1)}{(-\eta^{-2^{t-1}\beta_q} + 1)(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} f - \frac{f}{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})}.$$

Dessa forma, temos

$$\sigma = \left[ \frac{f(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + 1)}{(-\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} \right] c_{4q-2,1} + \left[ \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + 1)}{(-\eta^{-2^{t-1}\beta_q} + 1)(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} f - \frac{f}{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} \right] c_{4q-2,2} + f c_{4q-2,3}$$

$$\sigma = \left[ \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + 1)}{(-\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} c_{4q-2,1} + \left( \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + 1)}{(-\eta^{-2^{t-1}\beta_q} + 1)(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} - \frac{1}{(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})} \right) c_{4q-2,2} + c_{4q-2,3} \right] f.$$

Assim,  $\dim (Ker \partial_{4q-2}) = 1$ .

Portanto, como vimos que o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-1}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-2}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (Im \partial_{4q-1}) = \dim (Ker \partial_{4q-2}) = 1$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-1} = Ker \partial_{4q-2}$ .

•  $Im \partial_{4q-2}$

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2\beta_q} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} & -\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} & \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} \\ (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} & -\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h-2^{t-2}} & -\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} & -1 \end{pmatrix}$$

Somando a primeira linha com a segunda linha da matriz anterior, teremos a segunda linha da nova matriz, equivalente a matriz inicial. E, fazendo  $(\eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})$  multiplicado pela terceira linha e somado com a primeira linha da matriz anterior, obtemos a terceira linha da nova matriz. Dessa forma, a matriz obtida pelas equações citadas anteriormente é a seguinte:

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2\beta_q} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} & -\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} & \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} \\ (*) & -\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} & 0 \\ (**) & -\eta^{-4\beta_q z_q^{-2} - 2^{t-1}\beta_q} - \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(*) = \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2\beta_q} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} + (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h}$$

$$(**) = \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} + 2\beta_q} + \dots + \eta^{4\beta_q h - 2^{t-1}\beta_q - 2\beta_q z_q^{-1}} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2\beta_q} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q}$$

Agora, somando  $(\eta^{-4\beta_q z_q^{-2}} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q})$  multiplicado pela segunda linha da matriz anterior, com  $(-\eta^{-2\beta_q z_q^{-1} - 2^{t-1}\beta_q} + \eta^{-2\beta_q z_q^{-1}})$  multiplicado pela terceira linha da matriz anterior, obtemos a terceira linha da nova matriz abaixo:

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (*) & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{-2\beta_q z_q - 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como a matriz anterior possui posto dois, segue que  $\dim (Im \partial_{4q-2}) = 2$ .

•  $Ker \partial_{4q-3}$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Considere uma  $(4q - 3)$ -cadeia  $\sigma$  representada por  $(d, e, f)$ , então

$$\begin{aligned} \partial_{4q-3}(\sigma) &= \partial_{4q-3}(d c_{4q-3,1} + e c_{4q-3,2} + f c_{4q-3,3}) \\ &= d(\eta^{2\beta_q} - 1)c_{4q-4} + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)c_{4q-4} + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)c_{4q-4} \\ &= [d(\eta^{2\beta_q} - 1) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)]c_{4q-4} \end{aligned}$$

A  $(4q - 3)$ -cadeia  $\sigma$  pertence ao  $Ker \partial_{4q-3}$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(\eta^{2\beta_q} - 1) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1) &= 0 \\ d(\eta^{2\beta_q} - 1) &= -e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1) \\ d &= -\frac{e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} - \frac{f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} \end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \left[ -\frac{e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} - \frac{f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} \right] c_{4q-3,1} + e c_{4q-3,2} + f c_{4q-3,3} \\ \sigma &= \left[ -\frac{(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} c_{4q-3,1} + c_{4q-3,2} \right] e + \left[ -\frac{(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} c_{4q-3,1} + c_{4q-3,3} \right] f. \end{aligned}$$

Logo,  $\dim (Ker \partial_{4q-3}) = 2$ .

Portanto, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-2}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-3}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (Im \partial_{4q-2}) = \dim (Ker \partial_{4q-3}) = 2$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-2} = Ker \partial_{4q-3}$ .

- $Im \partial_{4q-3}$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1} \beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Somando  $(-\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)$  multiplicado pela primeira linha, com  $(\eta^{2\beta_q} - 1)$  multiplicado pela terceira linha da matriz anterior, teremos a terceira linha da seguinte matriz:

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1} \beta_q - 1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora, somando  $(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1} \beta_q - 1} + 1)$  multiplicado pela primeira linha da matriz anterior, com  $(\eta^{2\beta_q} - 1)$  multiplicado pela segunda linha da matriz anterior, obtemos a segunda linha da nova matriz abaixo:

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como a matriz anterior possui posto um, segue que  $dim (Im \partial_{4q-3}) = 1$

- $Ker \partial_{4q-4}$

$$\partial_{4q-4} = ((2h+1)(1 + \eta + \dots + \eta^{2^t - 1})) = ((2h+1).0) = (0)$$

Como  $\partial_{4q-4} = 0$ , temos que  $Ker \partial_{4q-4} = \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \langle c_{4q-4} \rangle$ , ou seja,  $dim (Im \partial_{4q-4}) = 1$ .

Portanto, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-3}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-4}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $dim (Im \partial_{4q-3}) = dim (Ker \partial_{4q-4}) = 1$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-3} = Ker \partial_{4q-4}$ .

- $Im \partial_{4q-4}$

Como  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula, segue que  $dim (Im \partial_{4q-4}) = 0$ .

Novamente, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-4}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-1}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $dim (Im \partial_{4q-4}) = dim (Ker \partial_{4q-1}) = 0$ . Dessa forma,

$Im \partial_{4q-4} = Ker \partial_{4q-1}$ .

$$2^\circ) 2h + 1 < 2^{t-2}$$

•  $Ker \partial_{4q-1}$

$$\partial_{4q-1} = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{-2\beta_q(2h+1)} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} \end{pmatrix}$$

Seja uma  $(4q - 1)$ -cadeia representada por  $d$  pertencente ao  $Ker \partial_{4q-1}$ , então

$$d \left( 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} \right) c_{4q-2,1} = 0$$

$$d \left( 1 - \eta^{-2\beta_q(2h+1)} \right) c_{4q-2,2} = 0$$

$$d \left( 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} \right) c_{4q-2,3} = 0$$

Dessa forma, temos  $d = 0$ .

Logo,  $Ker \partial_{4q-1} = 0$ , ou seja,  $dim (Ker \partial_{4q-1}) = 0$ .

•  $Im \partial_{4q-1}$

Como a matriz do  $\partial_{4q-1}$  é linearmente independente, segue que  $dim (Im \partial_{4q-1}) = 1$ .

•  $Ker \partial_{4q-2}$

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & 0 & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Considere uma  $(4q - 2)$ -cadeia  $\sigma$  representada por  $(d, e, f)$ , então

$$\begin{aligned} \partial_{4q-2}(\sigma) &= \partial_{4q-2}(d c_{4q-2,1} + e c_{4q-2,2} + f c_{4q-2,3}) \\ &= d[(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)})c_{4q-3,2}] + \\ &+ e[(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (\eta^{2\beta_q(2h+1)})c_{4q-3,2} + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}] + \\ &+ f[(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h})c_{4q-3,1} + (-\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)c_{4q-3,3}] \\ &= [d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \\ &+ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1}) + f(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h})]c_{4q-3,1} + [d(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)}) + \\ &+ e(\eta^{2\beta_q(2h+1)})]c_{4q-3,2} + [e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) + f(-\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)]c_{4q-3,3}. \end{aligned}$$

A  $(4q - 2)$ -cadeia  $\sigma$  pertence ao  $\text{Ker } \partial_{4q-2}$  se, e somente se,

$$\begin{cases} d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \\ \quad + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1}) + f(1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h}) = 0 \\ d(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)}) + e(\eta^{2\beta_q(2h+1)}) = 0 \\ e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) + f(-\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1) = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, segue que

$$e(\eta^{2\beta_q(2h+1)}) = d(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2\beta_q(2h+1)})$$

$$d = \frac{e(\eta^{2\beta_q(2h+1)})}{(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2\beta_q(2h+1)})}$$

Pela terceira equação, obtemos

$$e(\eta^{-2\beta_q z_q - 1}) = f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)$$

$$f = \frac{(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})e}{(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)}$$

Assim, temos que

$$\sigma = \left( \frac{\eta^{2\beta_q(2h+1)}e}{\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2\beta_q(2h+1)}} \right) c_{4q-2,1} + e c_{4q-2,2} + \left( \frac{\eta^{-2\beta_q z_q - 1}e}{\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1} \right) c_{4q-2,3}$$

$$\sigma = \left[ \left( \frac{\eta^{2\beta_q(2h+1)}}{\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2\beta_q(2h+1)}} \right) c_{4q-2,1} + c_{4q-2,2} + \left( \frac{\eta^{-2\beta_q z_q - 1}}{\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1} \right) c_{4q-2,3} \right] e$$

Logo,  $\dim (\text{Ker } \partial_{4q-2}) = 1$ .

Portanto, como o complexo é semi-exato, a  $\text{Im } \partial_{4q-1}$  está contida no  $\text{Ker } \partial_{4q-2}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (\text{Im } \partial_{4q-1}) = \dim (\text{Ker } \partial_{4q-2}) = 1$ . Dessa forma,  $\text{Im } \partial_{4q-1} = \text{Ker } \partial_{4q-2}$ .



•  $Im \partial_{4q-2}$

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & 0 & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Primeiramente, trocando a primeira linha com a segunda linha da matriz anterior, obtemos:

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ 1 + \eta^{2\beta_q} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & 0 & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Agora, multiplicando  $(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1)$  pela primeira linha e somando com a terceira linha, multiplicada pelo elemento  $(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})$  da matriz anterior, obtemos a terceira linha da nova matriz abaixo:

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ (*) & \eta^{-2\beta_q z_q - 1 + 2(2h+1)\beta_q} + \eta^{2(2h+1)\beta_q} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(*) = \eta^{-4\beta_q z_q - 2\beta_q - 2} + \dots + \eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2(2h+1)\beta_q - 2} + \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2(2h+1)\beta_q - 1} + \eta^{-2\beta_q z_q - 1} + \eta^{2\beta_q - 2\beta_q z_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 1 + 4h\beta_q}.$$

Finalmente, fazemos a seguinte operação elementar: multiplicamos a terceira linha por  $(-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2(2h+1)\beta_q})$  e somamos com a segunda linha, multiplicada pelo elemento  $(-\eta^{-2\beta_q z_q - 1 + 2(2h+1)\beta_q} + \eta^{2(2h+1)\beta_q})$ , para obtermos a terceira linha da nova matriz, equivalente a anterior.

Logo,

$$\partial_{4q-2} = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1} & \eta^{2\beta_q(2h+1)} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2\beta_q(2h+1) - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2\beta_q(2h+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Como a matriz final possui posto dois, segue que a  $\dim (Im \partial_{4q-2}) = 2$ .

•  $Ker \partial_{4q-3}$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Considere uma  $(4q - 3)$ -cadeia  $\sigma$  representada por  $(d, e, f)$ , então

$$\begin{aligned} \partial_{4q-3}(\sigma) &= \partial_{4q-3}(d c_{4q-3,1} + e c_{4q-3,2} + f c_{4q-3,3}) \\ &= d(\eta^{2\beta_q} - 1)c_{4q-4} + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)c_{4q-4} + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)c_{4q-4} \\ &= [d(\eta^{2\beta_q} - 1) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)]c_{4q-4} \end{aligned}$$

A  $(4q - 3)$ -cadeia  $\sigma$  pertence ao  $Ker \partial_{4q-3}$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} d(\eta^{2\beta_q} - 1) + e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) + f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1) &= 0 \\ d(\eta^{2\beta_q} - 1) &= -e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1) \\ d &= \frac{-e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\sigma = \left( \frac{-e(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1) - f(\eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1)}{(\eta^{2\beta_q} - 1)} \right) c_{4q-3,1} + e c_{4q-3,2} + f c_{4q-3,3}$$

$$\sigma = \left[ \frac{-\eta^{-2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q - 1} + 1}{\eta^{2\beta_q} - 1} c_{4q-3,1} + c_{4q-3,2} \right] e + \left[ \frac{-\eta^{-2\beta_q z_q - 1} + 1}{\eta^{2\beta_q} - 1} c_{4q-3,1} + c_{4q-3,3} \right] f$$

Logo,  $\dim (Ker \partial_{4q-3}) = 2$ .

Portanto, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-2}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-3}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (Im \partial_{4q-2}) = \dim (Ker \partial_{4q-3}) = 2$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-2} = Ker \partial_{4q-3}$ .

•  $Im \partial_{4q-3}$

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 1} - 1 \end{pmatrix}$$

Agora, multiplicando  $(\eta^{2\beta_q - 1})$  pela terceira linha e somando com a primeira linha, multiplicada pelo elemento  $-(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})$  da matriz anterior, obtemos a terceira linha da nova matriz abaixo:

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, fazemos a seguinte operação elementar: multiplicamos a segunda linha por  $(\eta^{2\beta_q - 1})$  e somamos com a primeira linha, multiplicada pelo elemento  $-(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - 1)$ , para obtermos a segunda linha da nova matriz, equivalente a anterior.

$$\partial_{4q-3} = \begin{pmatrix} \eta^{2\beta_q} - 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como a matriz final possui posto um, segue que a  $\dim (Im \partial_{4q-3}) = 1$ .

- $Ker \partial_{4q-4}$

$$\partial_{4q-4} = ((2h+1)(1 + \eta + \dots + \eta^{2^t-1})) = ((2h+1).0) = (0)$$

Como  $\partial_{4q-4} = 0$ , temos que  $Ker \partial_{4q-4} = \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{4q-4} \rangle$ , ou seja,  $\dim (Im \partial_{4q-4}) = 1$ .

Portanto, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-3}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-4}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (Im \partial_{4q-3}) = \dim (Ker \partial_{4q-4}) = 1$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-3} = Ker \partial_{4q-4}$ .

- $Im \partial_{4q-4}$

Como  $\partial_{4q-4}$  é a aplicação nula, segue que  $\dim (Im \partial_{4q-4}) = 0$ .

Novamente, como o complexo é semi-exato, a  $Im \partial_{4q-4}$  está contida no  $Ker \partial_{4q-1}$ , e pelos resultados obtidos acima, temos que a  $\dim (Im \partial_{4q-4}) = \dim (Ker \partial_{4q-1}) = 0$ . Dessa forma,  $Im \partial_{4q-4} = Ker \partial_{4q-1}$ .

Concluimos, pelos resultados vistos anteriormente, que o complexo é exato em ambos os casos. □

## 5.1 Torção de $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$

Calculemos a  $R$  torção  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1))$  da forma espacial esférica  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1) = \frac{S^3}{\rho(D_{(2h+1).2^t})}$ , considerando a representação  $\rho$  descrita na equação (5.0.1).

Dessa forma, temos o seguinte complexo

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_3 \rangle \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{2,1}, c_{2,2}, c_{2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3} \rangle \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\mathbb{C}]\langle c_0 \rangle \rightarrow 0 \quad (5.1.1)$$

Lembramos que os bordos são definidos diferentemente para  $(2h+1) > 2^{t-2}$  e  $(2h+1) < 2^{t-2}$ . Pela proposição (5.0.1), temos que o complexo acima é exato, em ambos os casos.

Agora podemos calcular a  $R$  torção  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1))$ :

1°)  $(2h+1) > 2^{t-2}$

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \{c_{2,1}; c_{2,2}\} \\ b_1 &= \{(\eta^{2\beta} - 1)^{-1} c_{1,1}\} \\ b_0 &= \emptyset \end{aligned}$$

Então, aplicando a construção detalhada na seção (1.9), temos

$$\begin{aligned} B_3 &= \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset \\ B_2 &= \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^{2\beta z + 2^{t-1}\beta + 1})c_{2,1} + (1 - \eta^{2\beta z + 1})c_{2,2} + (1 - \eta^{2^{t-1}\beta})c_{2,3}\} \\ B_1 &= \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^{-2\beta z - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1})c_{1,1} - (\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1})c_{1,2} + \\ &\quad + (\eta^{-2\beta z - 1})c_{1,3}; [(\eta^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta})^{2h}]c_{1,1} + (\eta^{-2\beta z - 1})c_{1,2} - (\eta^{-2\beta z - 1})c_{1,3}\} \\ B_0 &= \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\} \end{aligned}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned} (B_2 b_2/c_2) &= \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta z + 2^{t-1}\beta + 1} & 1 - \eta^{2\beta z + 1} & 1 - \eta^{2^{t-1}\beta} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (B_1 b_1/c_1) &= \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta z - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1} & -\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1} & \eta^{-2\beta z - 1} \\ (\eta^{2\beta})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta})^{2h} & \eta^{-2\beta z - 1} & -\eta^{-2\beta z - 1} \\ (\eta^{2\beta} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cujos determinantes são:

$$\begin{aligned} \det(B_2 b_2/c_2) &= 1 - \eta^{2^{t-1}\beta} \\ \det(B_1 b_1/c_1) &= (\eta^{-4\beta z - 2^{t-1}\beta - 2})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1} - (\eta^{-4\beta z - 2})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1} \\ &= (\eta^{-4\beta z - 2^{t-1}\beta - 2} - \eta^{-4\beta z - 2})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) &= \frac{|\det(B_2 b_2/c_2)|}{|\det(B_1 b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^{2^{t-1}\beta}|}{|(\eta^{-4\beta z - 2^{t-1}\beta - 2} - \eta^{-4\beta z - 2})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1}|} = \\ &= \frac{|(1 - \eta^{2^{t-1}\beta})(\eta^{2\beta} - 1)|}{|-(\eta^{-4\beta z - 2})(1 - \eta^{-2^{t-1}\beta})|} \stackrel{-2^{t-1}\beta = 2^{t-1}\beta}{=} \frac{|(1 - \eta^{2^{t-1}\beta})(\eta^{2\beta} - 1)|}{|(\eta^{-4\beta z - 2})(1 - \eta^{2^{t-1}\beta})|} = \\ &= \frac{|\eta^{2\beta} - 1|}{|\eta^{-4\beta z - 2}|} = |\eta^{2\beta} - 1|. \end{aligned}$$

Portanto,  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = |\eta^{2\beta} - 1|$ .

Antes de fazermos o segundo caso, iremos fazer alguns exemplos.

**Exemplo 5.1.1.** Seja  $\mathfrak{D}(3.8; 1, 1) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.8})}$ .

Escolhamos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^2 - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^5)c_{2,1} + (1 - \eta)c_{2,2} + (1 - \eta^4)c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^3 + \eta^5)c_{1,1} - \eta^3 c_{1,2} + \eta^7 c_{1,3}; (\eta^2 + \eta^4)c_{1,1} + \eta^7 c_{1,2} - \eta^7 c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 b_3/c_{31}) = [1]$$

$$(B_0 b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^5 & 1 - \eta & 1 - \eta^4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 \ b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta^3 + \eta^5) & -\eta^3 & \eta^7 \\ (\eta^2 + \eta^4) & \eta^7 & -\eta^7 \\ (\eta^2 - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 \ b_2/c_2) = 1 - \eta^4$$

$$\det(B_1 \ b_1/c_1) = (\eta^2 - \eta^6)(\eta^2 - 1)^{-1}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 1)) &= \frac{|\det(B_2 \ b_2/c_2)|}{|\det(B_1 \ b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^4|}{|(\eta^2 - \eta^6)(\eta^2 - 1)^{-1}|} \\ &= \frac{|1 - \eta^4||\eta^2 - 1|}{|\eta^2(1 - \eta^4)|} = \frac{|\eta^2 - 1|}{|\eta^2|} = |\eta^2 - 1|. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.1.2.** Seja  $\mathfrak{D}(3.8; 1, 3) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.8})}$ .

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^6 - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^7)c_{2,1} + (1 - \eta^3)c_{2,2} + (1 - \eta^4)c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta + \eta^7)c_{1,1} - \eta c_{1,2} + \eta^5 c_{1,3}; (\eta^6 + \eta^4)c_{1,1} + \eta^5 c_{1,2} - c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 \ b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 \ b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^7 & 1 - \eta^3 & 1 - \eta^4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta + \eta^7) & -\eta & \eta^5 \\ (\eta^6 + \eta^4) & \eta^5 & -\eta^5 \\ (\eta^6 - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 b_2/c_2) = 1 - \eta^4$$

$$\det(B_1 b_1/c_1) = (\eta^6 - \eta^2)(\eta^6 - 1)^{-1}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 3)) &= \frac{|\det(B_2 b_2/c_2)|}{|\det(B_1 b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^4|}{|(\eta^6 - \eta^2)(\eta^6 - 1)^{-1}|} \\ &= \frac{|1 - \eta^4||\eta^6 - 1|}{|-\eta^2(1 - \eta^4)|} = \frac{|\eta^6 - 1|}{|-\eta^2|} = |\eta^6 - 1|. \end{aligned}$$

Finalmente, calculemos a R torção  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1))$  para o segundo caso:

$$2^\circ) (2h+1) < 2^{t-2}$$

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^{2\beta} - 1)^{-1} c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos



$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^{2\beta z + 2^{t-1}\beta + 1})c_{2,1} + (1 - \eta^{-2(2h+1)\beta})c_{2,2} + (1 - \eta^{2\beta z + 1})c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta + 2(2h+1)\beta - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1})c_{1,1} + (-\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1} - \eta^{2(2h+1)\beta})c_{1,2}; (\eta^{-2\beta z - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta + 2(2h+1)\beta - 1})c_{1,1} + (\eta^{2(2h+1)\beta})c_{1,2} + (\eta^{-2\beta z - 1})c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta z + 2^{t-1}\beta + 1} & 1 - \eta^{-2(2h+1)\beta} & 1 - \eta^{2\beta z + 1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (*) & -\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1} - \eta^{2(2h+1)\beta} & 0 \\ (**) & \eta^{2(2h+1)\beta} & \eta^{-2\beta z - 1} \\ (\eta^{2\beta} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(*) = \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta + 2(2h+1)\beta - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1}$$

$$(**) = \eta^{-2\beta z - 2\beta - 1} + \dots + \eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta + 2(2h+1)\beta - 1}$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 b_2/c_2) = 1 - \eta^{2\beta z + 1}$$

$$\det(B_1 b_1/c_1) = -(\eta^{-2\beta z - 2^{t-1}\beta - 1} + \eta^{2(2h+1)\beta})(\eta^{-2\beta z - 1})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tau(\tau(D((2h+1).2^t; k, l))) &= \frac{|\det(B_2 b_2/c_2)|}{|\det(B_1 b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}|}{|-(\eta^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} + \eta^{2(2h+1)\beta})(\eta^{-2\beta z-1})(\eta^{2\beta} - 1)^{-1}|} = \\
&= \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}| |\eta^{2\beta} - 1|}{|\eta^{-2\beta z-2^{t-1}\beta-1} + \eta^{2(2h+1)\beta}| |\eta^{-2\beta z-1}|} = \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}| |\eta^{2\beta} - 1|}{|\eta^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2} + \eta^{-4\beta z-2-2\beta z-1}|} = \\
&= \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}| |\eta^{2\beta} - 1|}{|(\eta^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2})(1 + \eta^{-4\beta z-2-2\beta z-1+4\beta z+2+2^{t-1}\beta})|} = \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}| |\eta^{2\beta} - 1|}{|\eta^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2}| |1 + \eta^{-2\beta z-1+2^{t-1}\beta}|} = \\
&= \frac{|(1 - \eta^{2\beta z+1})(\eta^{2\beta} - 1)|}{|(\eta^{-4\beta z-2^{t-1}\beta-2})(1 + \eta^{-2\beta z-1+2^{t-1}\beta})|} = \frac{|(1 - \eta^{2\beta z+1})(\eta^{2\beta} - 1)|}{|(1 + \eta^{-2\beta z-1+2^{t-1}\beta})|}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = \frac{|(1 - \eta^{2\beta z+1})(\eta^{2\beta} - 1)|}{|(1 + \eta^{-2\beta z-1+2^{t-1}\beta})|}$ .

Para melhor entendimento, exemplificaremos esse caso.

**Exemplo 5.1.3.** Seja  $\mathfrak{D}(3.16; 1, 1) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.16})}$ .

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^{10} - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^9)c_{2,1} + (1 - \eta^2)c_{2,2} + (1 - \eta)c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^7 + \eta + \eta^{11})c_{1,1} + (-\eta^7 - \eta^{14})c_{1,2}; \eta^5c_{1,1} + \eta^{14}c_{1,2} + \eta^{15}c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^9 & 1 - \eta^2 & 1 - \eta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 \ b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta^7 + \eta + \eta^{11}) & (-\eta^7 - \eta^{14}) & 0 \\ \eta^5 & \eta^{14} & \eta^{15} \\ (\eta^{10} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 \ b_2/c_2) = 1 - \eta$$

$$\det(B_1 \ b_1/c_1) = -(\eta^7 + \eta^{14})(\eta^{15})(\eta^{10} - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 1)) &= \frac{|\det(B_2 \ b_2/c_2)|}{|\det(B_1 \ b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta|}{|-(\eta^7 + \eta^{14})(\eta^{15})(\eta^{10} - 1)^{-1}|} = \\ &= \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|-(\eta^6 + \eta^{13})|} = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|-\eta^6(1 + \eta^7)|} = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^7|}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.1.4.** Seja  $\mathfrak{D}(3.16; 1, 3) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.16})}$ .

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^{14} - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^3)c_{2,1} + (1 - \eta^6)c_{2,2} + (1 - \eta^{11})c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^{13} + \eta^{11} + \eta^9)c_{1,1} + (-\eta^{13} - \eta^{10})c_{1,2}; \eta^7c_{1,1} + \eta^{10}c_{1,2} + \eta^5c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 \ b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 \ b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 \ b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^3 & 1 - \eta^6 & 1 - \eta^{11} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 \ b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta^{13} + \eta^{11} + \eta^9) & (-\eta^{13} - \eta^{10}) & 0 \\ \eta^7 & \eta^{10} & \eta^5 \\ (\eta^{14} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 \ b_2/c_2) = 1 - \eta^{11}$$

$$\det(B_1 \ b_1/c_1) = -(\eta^{13} + \eta^{10})(\eta^5)(\eta^{14} - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 3)) &= \frac{|\det(B_2 \ b_2/c_2)|}{|\det(B_1 \ b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^{11}|}{|-(\eta^{13} + \eta^{10})(\eta^5)(\eta^{14} - 1)^{-1}|} = \\ &= \frac{|1 - \eta^{11}||\eta^{14} - 1|}{|-(\eta^2 + \eta^{15})|} = \frac{|1 - \eta^{11}||\eta^{14} - 1|}{|-\eta^2(1 + \eta^{13})|} = \frac{|1 - \eta^{11}||\eta^{14} - 1|}{|1 + \eta^{13}|}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.1.5.** Seja  $\mathfrak{D}(3.16; 1, 5) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.16})}$ .

Escolhamos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^2 - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^5)c_{2,1} + (1 - \eta^{10})c_{2,2} + (1 - \eta^{13})c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta^{11} + \eta^{13} + \eta^{15})c_{1,1} + (-\eta^6 - \eta^{11})c_{1,2}; \eta c_{1,1} + \eta^6 c_{1,2} + \eta^3 c_{4q-3,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 \ b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 \ b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 \ b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^5 & 1 - \eta^{10} & 1 - \eta^{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 \ b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta^{11} + \eta^{13} + \eta^{15}) & (-\eta^6 - \eta^{11}) & 0 \\ \eta & \eta^6 & \eta^3 \\ (\eta^2 - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 \ b_2/c_2) = 1 - \eta^{13}$$

$$\det(B_1 \ b_1/c_1) = -(\eta^{11} + \eta^6)(\eta^3)(\eta^2 - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 5)) &= \frac{|\det(B_2 \ b_2/c_2)|}{|\det(B_1 \ b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^{13}|}{|-(\eta^{11} + \eta^6)(\eta^3)(\eta^2 - 1)^{-1}|} = \\ &= \frac{|1 - \eta^{13}||\eta^2 - 1|}{|-(\eta^{14} + \eta^9)|} = \frac{|1 - \eta^{13}||\eta^2 - 1|}{|-\eta^{14}(1 + \eta^{-5})|} = \frac{|1 - \eta^{13}||\eta^2 - 1|}{|1 + \eta^{11}|}. \end{aligned}$$

**Exemplo 5.1.6.** Seja  $\mathfrak{D}(3.16; 1, 7) = \frac{S^3}{\rho(D_{3.16})}$ .

Escolhamos as bases da seguinte maneira:

$$b_3 = \{c_3\}$$

$$b_2 = \{c_{2,1}; c_{2,2}\}$$

$$b_1 = \{(\eta^6 - 1)^{-1}c_{1,1}\}$$

$$b_0 = \emptyset$$

Então, aplicando a construção descrita na seção (1.9), temos

$$B_3 = \{\partial_0(b_0)\} = \emptyset$$

$$B_2 = \{\partial_3(b_3)\} = \{(1 - \eta^{15})c_{2,1} + (1 - \eta^{14})c_{2,2} + (1 - \eta^7)c_{2,3}\}$$

$$B_1 = \{\partial_2(b_2)\} = \{(\eta + \eta^7 + \eta^{13})c_{1,1} + (-\eta^2 - \eta)c_{1,2}; \eta^3c_{1,1} + \eta^2c_{4q-3,2} + \eta^9c_{1,3}\}$$

$$B_0 = \{\partial_1(b_1)\} = \{c_0\}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_3 b_3/c_3) = [1]$$

$$(B_0 b_0/c_0) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões 2 e 1, e serão apresentadas abaixo:

$$(B_2 b_2/c_2) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{15} & 1 - \eta^{14} & 1 - \eta^7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_1 b_1/c_1) = \begin{pmatrix} (\eta + \eta^7 + \eta^{13}) & (-\eta^2 - \eta) & 0 \\ \eta^3 & \eta^2 & \eta^9 \\ (\eta^6 - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_2 b_2/c_2) = 1 - \eta^7$$

$$\det(B_1 b_1/c_1) = -(\eta^2 + \eta)(\eta^9)(\eta^6 - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 7)) &= \frac{|\det(B_2 b_2/c_2)|}{|\det(B_1 b_1/c_1)|} = \frac{|1 - \eta^7|}{|-(\eta^2 + \eta)(\eta^9)(\eta^6 - 1)^{-1}|} = \\ &= \frac{|1 - \eta^7||\eta^6 - 1|}{|-(\eta^{11} + \eta^{10})|} = \frac{|1 - \eta^7||\eta^6 - 1|}{|-\eta^{10}(\eta + 1)|} = \frac{|1 - \eta^7||\eta^6 - 1|}{|\eta + 1|}. \end{aligned}$$

### 5.1.1 Relação entre torções

Nesta seção, mostraremos que há apenas uma R-torção independente da representação  $k$  e  $l$  escolhida. Primeiramente, analisemos quando  $(2h+1) > 2^{t-2}$ . Temos que

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = |\eta^{2\beta} - 1|.$$

**Proposição 5.1.7.** *Existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^c$ , de forma que*

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)),$$

com  $k$  e  $l$  arbitrários.

**Demonstração:** Quando  $k = 1 = l$ , temos

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = |\eta^{2\beta_1} - 1|.$$

Para  $l$  e  $k$  arbitrários, se existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^c$ , então

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = |\eta^{2\beta_2 c} - 1|.$$

Estamos considerando  $\beta_1$  para  $l = 1 = k$  e  $\beta_2$  para  $k$  e  $l$  arbitrários.

Como queremos  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l))$ , segue que  $2\beta_2 c = 2\beta_1 \pmod{2^t}$ .

Além disso, pela equação 2.4.1, temos

$$\begin{aligned} -1 &= -\alpha_i k_i 2^{t-1} + \beta_i l_i (2h+1) \pmod{(2h+1).2^{t-1}} \\ \alpha_i k_i 2^{t-1} - \beta_i l_i (2h+1) - 1 &= 0 \pmod{(2h+1).2^{t-1}}. \end{aligned}$$

Agora, sendo  $\alpha_i k_i 2^{t-1} - 1$  ímpar, e como queremos

$$\alpha_i k_i 2^{t-1} - \beta_i l_i (2h+1) - 1 = 0 \pmod{(2h+1).2^{t-1}},$$

devemos ter  $-\beta_i l_i (2h+1)$  ímpar. Como  $l_i$  e  $(2h+1)$  são ímpares, segue que  $\beta_i$  é ímpar.

Logo,  $(\beta_i, 2^t) = 1$  e assim,  $\beta_i$  é inversível com relação à multiplicação.

Dessa forma,  $2c = 2\beta_1 \beta_2^{-1} \pmod{2^t}$ .

Note que  $c = \beta_1 \beta_2^{-1} \pmod{2^t}$  satisfaz a equação acima.

Portanto, existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^{\beta_1 \beta_2^{-1}}$ , de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)),$$

com  $k$  e  $l$  arbitrários. ■

**Exemplo 5.1.8.** Sejam  $\tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 1)) = |\eta^2 - 1|$ , onde  $l_1 = 1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 5$ , e  $\tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 3)) = |\eta^6 - 1|$ , onde  $l_2 = 3$ ,  $z_2 = 3$ ,  $\beta_2 = -1$  (exemplos (5.1.1) e (5.1.2)). Neste caso, o valor encontrado para  $c$  é o seguinte:

$$c = \beta_1 \beta_2^{-1} \pmod{2^t} \Leftrightarrow c = 5 \cdot (-1)^{-1} \pmod{8} \Leftrightarrow c = 5 \cdot 7 \pmod{8} \Leftrightarrow c = 35 \pmod{8} \Leftrightarrow c = 3,$$

ou seja, pela proposição anterior segue que, existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^3$  de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 3)) = |(\eta^3)^6 - 1| = |\eta^{18} - 1| = |\eta^2 - 1| = \tau(\mathfrak{D}(3.8; 1, 1)).$$

Agora, analisemos quando  $(2h+1) < 2^{t-2}$ . Temos que

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = \frac{|1 - \eta^{2\beta z+1}||\eta^{2\beta} - 1|}{|1 + \eta^{-2\beta z-1+2^{t-1}\beta}|}.$$

**Proposição 5.1.9.** Existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^c$ , de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)),$$

com  $k$  e  $l$  arbitrários.

**Demonstração:** Quando  $l = 1 = k$ , temos  $z = 0$  e assim,

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \frac{|1 - \eta||\eta^{2\beta_1} - 1|}{|1 + \eta^{-1+2^{t-1}\beta_1}|}.$$

Para  $k$  e  $l$  arbitrários, se existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^c$ , então

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)) = \frac{|1 - \eta^{(2\beta_2 z_2 + 1)c}||\eta^{2\beta_2 c} - 1|}{|1 + \eta^{(-2\beta_2 z_2 - 1 + 2^{t-1}\beta_2)c}|}.$$

Estamos considerando  $\beta_1$  para  $l = 1 = k$  e  $\beta_2$  para  $k$  e  $l$  arbitrários.

Como queremos,  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l))$ , obtemos

$$\begin{cases} 2\beta_2 z_2 c + c = 1 \pmod{2^t} & (I) \\ 2\beta_2 c = 2\beta_1 \pmod{2^t} & (II) \\ -2\beta_2 z_2 c - c + 2^{t-1}\beta_2 c = -1 + 2^{t-1}\beta_1 \pmod{2^t} & (III) \end{cases}$$

Note que se valem as duas primeiras equações acima, a terceira equação também vale.

De fato, da equação (I) temos,

$$2\beta_2 z_2 c + c = 1 \pmod{2^t} \Leftrightarrow -2\beta_2 z_2 c - c = -1 \pmod{2^t} \quad (1)$$

e da equação (II) temos,

$$2\beta_2 c = 2\beta_1 \pmod{2^t} \Leftrightarrow 2^{t-1}\beta_2 c = 2^{t-1}\beta_1 \pmod{2^t}. \quad (2)$$



Somando as equações (1) e (2), obtemos a equação (III), como queríamos.

Dessa forma, basta considerarmos apenas as equações (I) e (II) iniciais.

Substituindo a equação (II) na equação (I), obtemos

$$2\beta_1 z_2 + c = 1 \pmod{2^t} \Leftrightarrow c = -2\beta_1 z_2 + 1 \pmod{2^t}.$$

Observe que para  $c$  satisfazer as três equações precisamos que

$$2\beta_2(-2\beta_1 z_2 + 1) = 2\beta_1 \pmod{2^t}, \quad (3)$$

ou seja, que a equação (II) seja satisfeita.

De fato, vimos anteriormente que  $y^{-4\beta_2 z_2 - 2} = y^{2\beta_2(2h+1)}$ , ou seja:

$$-4\beta_2 z_2 - 2 = 2\beta_2(2h+1) \pmod{2^t}. \quad (4)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 2\beta_2(-2\beta_1 z_2 + 1) = 2\beta_1 \pmod{2^t} &\Leftrightarrow -4\beta_2 z_2 \beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_1 = 0 \pmod{2^t} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow [2\beta_2(2h+1) + 2]\beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_1 = 0 \pmod{2^t} &\Leftrightarrow 2\beta_2(2h+1)\beta_1 + 2\beta_1 + 2\beta_2 - 2\beta_1 = 0 \pmod{2^t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\beta_2[\beta_1(2h+1) + 1] = 0 \pmod{2^t}. \end{aligned}$$

Se provarmos que  $(\beta_1(2h+1) + 1)$  é múltiplo de  $2^{t-1}$ , a igualdade acima é válida.

Sabemos que,

$$\begin{aligned} -1 = -\alpha_1 k_1 2^{t-1} + \beta_1 l_1 (2h+1) \pmod{(2h+1).2^{t-1}} &\stackrel{l=1}{\Leftrightarrow} \beta_1(2h+1) - \alpha_1 k_1 2^{t-1} + 1 = 0 \pmod{(2h+1).2^{t-1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \beta_1(2h+1) + 1 - \alpha_1 k_1 2^{t-1} = n(2h+1)2^{t-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta_1(2h+1) + 1 = n(2h+1)2^{t-1} + \alpha_1 k_1 2^{t-1} \Leftrightarrow \beta_1(2h+1) + 1 = 2^{t-1}[n(2h+1) + \alpha_1 k_1]. \end{aligned}$$

Portanto,  $(\beta_1(2h+1) + 1)$  é múltiplo de  $2^{t-1}$ , assim

$$2\beta_2[\beta_1(2h+1) + 1] = 0 \pmod{2^t}.$$

Logo, vale

$$2\beta_2(-2\beta_1 z_2 + 1) = 2\beta_1 \pmod{2^t}.$$

Agora, substituindo o valor encontrado para  $c$  na equação (I), obtemos

$$2\beta_2 z_2 (-2\beta_1 z_2 + 1) + (-2\beta_1 z_2 + 1) \stackrel{(3)}{=} 2\beta_1 z_2 - 2\beta_1 z_2 + 1 \pmod{2^t} = 1 \pmod{2^t}.$$

Assim, a equação (I) fica satisfeita.

Portanto, existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^{-2\beta_1 z_2 + 1}$ , de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; 1, 1)) = \tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k, l)),$$

com  $k$  e  $l$  arbitrários.

**Exemplo 5.1.10.** Sejam  $\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 1)) = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^7|}$ , onde  $l_1 = 1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 5$ , e

$\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 3)) = \frac{|1 - \eta^{11}||\eta^{14} - 1|}{|1 + \eta^{13}|}$ , onde  $l_2 = 3$ ,  $z_2 = 3$ ,  $\beta_2 = -1$  (exemplos (5.1.3) e (5.1.4)).

Neste caso, o valor encontrado para  $c$  é o seguinte:

$$c = -2\beta_1 z_2 + 1 \pmod{2^t} \Leftrightarrow c = -2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \pmod{16} \Leftrightarrow c = -29 \pmod{16} \Leftrightarrow c = 3 \pmod{16},$$

ou seja, pela proposição anterior segue que, existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^3$  de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 3)) = \frac{|1 - (\eta^3)^{11}||(\eta^3)^{14} - 1|}{|1 + (\eta^3)^{13}|} = \frac{|1 - \eta^{33}||\eta^{42} - 1|}{|1 + \eta^{39}|} = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^7|} = \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 1)).$$

**Exemplo 5.1.11.** Sejam  $\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 1)) = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^7|}$ , onde  $l_1 = 1$ ,  $z_1 = 0$ ,  $\beta_1 = 5$ , e

$\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 5)) = \frac{|1 - \eta^{13}||\eta^2 - 1|}{|1 + \eta^{11}|}$ , onde  $l_2 = 5$ ,  $z_2 = 6$ ,  $\beta_2 = 1$  (exemplos (5.1.3) e (5.1.5)).

Neste caso, o valor encontrado para  $c$  é o seguinte:

$$c = -2\beta_1 z_2 + 1 \pmod{2^t} \Leftrightarrow c = -2 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \pmod{16} \Leftrightarrow c = -59 \pmod{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = -11 \pmod{16} \Leftrightarrow c = 5 \pmod{16},$$

ou seja, pela proposição anterior segue que, existe um automorfismo  $\eta \rightarrow \eta^5$  de forma que

$$\tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 5)) = \frac{|1 - (\eta^5)^{13}||(\eta^5)^2 - 1|}{|1 + (\eta^5)^{11}|} = \frac{|1 - \eta^{65}||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^{55}|} = \frac{|1 - \eta||\eta^{10} - 1|}{|1 + \eta^7|} = \tau(\mathfrak{D}(3.16; 1, 1)).$$

## 5.2 Torção de $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n)$

Calculemos a  $R$  torção  $\tau(\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n))$  da forma espacial esférica  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n) = \frac{S^{4n-1}}{\rho(D_{(2h+1).2^t})}$ , considerando a representação  $\rho$  descrita em (5.0.1).

Dessa forma, temos o seguinte complexo

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \langle c_{4q-1} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \langle c_{4q-2,1}, c_{4q-2,2}, c_{4q-2,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \\ \xrightarrow{\partial_{4q-2}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \langle c_{4q-3,1}, c_{4q-3,2}, c_{4q-3,3} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-3}} \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \langle c_{4q-4} \rangle \xrightarrow{\partial_{4q-4}} \cdots \end{aligned}$$

Lembramos que os bordos são definidos diferentemente para  $(2h+1) > 2^{t-2}$  e  $(2h+1) < 2^{t-2}$ . Pela proposição (5.0.1), temos que o complexo acima é exato, em ambos os casos.

Agora podemos calcular a  $R$  torção  $\tau(D((2h+1).2^t; k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_n))$ :

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} b_{4q-1} &= \{c_{4q-1}\} \\ b_{4q-2} &= \{c_{4q-2,1}; c_{4q-2,2}\} \\ b_{4q-3} &= \{(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} c_{4q-3,1}\} \\ b_{4q-4} &= \emptyset \end{aligned}$$

Então, aplicando a construção detalhada na seção (1.9), temos

$$\begin{aligned} B_{4q-1} &= \{\partial_{4q-4}(b_{4q-4})\} = \emptyset \\ B_{4q-2} &= \{\partial_{4q-1}(b_{4q-1})\} = \{(1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1})c_{4q-2,1} + (1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1})c_{4q-2,2} + (1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})c_{4q-2,3}\} \\ B_{4q-3} &= \{\partial_{4q-2}(b_{4q-2})\} = \{(\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,1} - (\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,2} + \\ &\quad + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}; [(\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h}]c_{4q-3,1} + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,2} - (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}\} \\ B_{4q-4} &= \{\partial_{4q-3}(b_{4q-3})\} = \{c_{4q-4}\} \end{aligned}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$\begin{aligned} (B_{4q-1} b_{4q-1} / c_{4q-1}) &= [1] \\ (B_{4q-4} b_{4q-4} / c_{4q-4}) &= [1] \end{aligned}$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões  $4q-2$  e  $4q-3$ , e serão apresentadas abaixo:

$$(B_{4q-2} b_{4q-2}/c_{4q-2}) = \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} & 1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B_{4q-3} b_{4q-3}/c_{4q-3}) = \begin{pmatrix} \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (\eta^{2\beta_q})^{2h+1-2^{t-2}} + \dots + (\eta^{2\beta_q})^{2h} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} & -\eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_{4q-2} b_{4q-2}/c_{4q-2}) = 1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q}$$

$$\begin{aligned} \det(B_{4q-3} b_{4q-3}/c_{4q-3}) &= (\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} - (\eta^{-4\beta_q z_q - 2})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} = \\ &= (\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2} - \eta^{-4\beta_q z_q - 2})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \tau(D((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n)) &= \prod_{q=1}^n \frac{|\det(B_{4q-2} b_{4q-2}/c_{4q-2})|}{|\det(B_{4q-3} b_{4q-3}/c_{4q-3})|} = \\ &= \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q}|}{|(\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2} - \eta^{-4\beta_q z_q - 2})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1}|} = \prod_{q=1}^n \frac{|(1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})(\eta^{2\beta_q} - 1)|}{|-(\eta^{-4\beta_q z_q - 2})(1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})|} = \\ &\stackrel{-2^{t-1}\beta_q = 2^{t-1}\beta_q}{=} \prod_{q=1}^n \frac{|(1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})(\eta^{2\beta_q} - 1)|}{|(\eta^{-4\beta_q z_q - 2})(1 - \eta^{2^{t-1}\beta_q})|} = \prod_{q=1}^n \frac{|\eta^{2\beta_q} - 1|}{|\eta^{-4\beta_q z_q - 2}|} = \prod_{q=1}^n |\eta^{2\beta_q} - 1|. \end{aligned}$$

$$2^\circ) (2h+1) < 2^{t-2}$$

Escolhemos as bases da seguinte maneira:

$$b_{4q-1} = \{c_{4q-1}\}$$

$$b_{4q-2} = \{c_{4q-2,1}; c_{4q-2,2}\}$$

$$b_{4q-3} = \{(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} c_{4q-3,1}\}$$

$$b_{4q-4} = \emptyset$$

Então, aplicando a construção detalhada na seção (1.9), temos

$$\begin{aligned}
B_{4q-1} &= \{\partial_{4q-4}(b_{4q-4})\} = \emptyset \\
B_{4q-2} &= \{\partial_{4q-1}(b_{4q-1})\} = \{(1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1})c_{4q-2,1} + (1 - \eta^{-2(2h+1)\beta_q})c_{4q-2,2} + (1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1})c_{4q-2,3}\} \\
B_{4q-3} &= \{\partial_{4q-2}(b_{4q-2})\} = \{(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (-\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \\
&\quad - \eta^{2(2h+1)\beta_q})c_{4q-3,2}; (\eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1})c_{4q-3,1} + (\eta^{2(2h+1)\beta_q})c_{4q-3,2} \\
&\quad + (\eta^{-2\beta_q z_q - 1})c_{4q-3,3}\} \\
B_{4q-4} &= \{\partial_{4q-3}(b_{4q-3})\} = \{c_{4q-4}\}
\end{aligned}$$

As matrizes de mudança de base são:

$$(B_{4q-1} \ b_{4q-1}/c_{4q-1}) = [1]$$

$$(B_{4q-4} \ b_{4q-4}/c_{4q-4}) = [1]$$

As outras matrizes relevantes de mudança de base (distintas da matriz identidade) ocorrem nas dimensões  $4q-2$  e  $4q-3$ , e serão apresentadas abaixo:

$$\begin{aligned}
(B_{4q-2} \ b_{4q-2}/c_{4q-2}) &= \begin{pmatrix} 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 2^{t-1}\beta_q + 1} & 1 - \eta^{-2(2h+1)\beta_q} & 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
(B_{4q-3} \ b_{4q-3}/c_{4q-3}) &= \begin{pmatrix} (*) & -\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} - \eta^{2(2h+1)\beta_q} & 0 \\ (**) & \eta^{2(2h+1)\beta_q} & \eta^{-2\beta_q z_q - 1} \\ (\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$(*) = \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1}$$

$$(**) = \eta^{-2\beta_q z_q - 2\beta_q - 1} + \dots + \eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q + 2(2h+1)\beta_q - 1}$$

cujos determinantes são:

$$\det(B_{4q-2} \ b_{4q-2}/c_{4q-2}) = 1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}$$

$$\det(B_{4q-3} \ b_{4q-3}/c_{4q-3}) = -(\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2(2h+1)\beta_q})(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1}.$$

Logo,

$$\tau(D((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n)) = \prod_{q=1}^n \frac{|\det(B_{4q-2} \ b_{4q-2}/c_{4q-2})|}{|\det(B_{4q-3} \ b_{4q-3}/c_{4q-3})|} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}|}{| - (\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2(2h+1)\beta_q})(\eta^{-2\beta_q z_q - 1})(\eta^{2\beta_q} - 1)^{-1} |} = \\
&= \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}| |\eta^{2\beta_q} - 1|}{|\eta^{-2\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 1} + \eta^{2(2h+1)\beta_q}| |\eta^{-2\beta_q z_q - 1}|} = \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}| |\eta^{2\beta_q} - 1|}{|\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2} + \eta^{-4\beta_q z_q - 2 - 2\beta_q z_q - 1}|} = \\
&= \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}| |\eta^{2\beta_q} - 1|}{|(\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2})(1 + \eta^{-4\beta_q z_q - 2 - 2\beta_q z_q - 1 + 4\beta_q z_q + 2 + 2^{t-1}\beta_q})|} = \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}| |\eta^{2\beta_q} - 1|}{|\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2}| |1 + \eta^{-2\beta_q z_q - 1 + 2^{t-1}\beta_q}|} = \\
&= \prod_{q=1}^n \frac{|1 - \eta^{2\beta_q z_q + 1}| |\eta^{2\beta_q} - 1|}{|\eta^{-4\beta_q z_q - 2^{t-1}\beta_q - 2}| |1 + \eta^{-2\beta_q z_q - 1 + 2^{t-1}\beta_q}|}.
\end{aligned}$$

**Observação 5.2.1.** Podemos considerar, no cálculo das torções de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n)$ , as mesmas relações vistas no cálculo das torções de  $\mathfrak{D}((2h+1).2^t; k_1, l_1)$

# Referências Bibliográficas

---

- [1] BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. New York: Springer, 1993.
- [2] BROWN, K. S. *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] COHEN, M. M. *A Course in Simple-Homotopy Theory*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [4] DOLD, A. *Lectures on Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1972.
- [5] FRANZ, W. Über die Torsion einer Überdeckung, *J. Reine Angew. Math*, v. 173, p. 245-254, 1935.
- [6] HAMBLETON, I.; PEDERSEN, E. K. Bounded Surgery and Dihedral Group Actions on Spheres, *Journal of the American Mathematical Society*, v. 4, p. 105-126, 1991.
- [7] HIRSCH, M. W. *Differential Topology*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [8] HU, S.T. *Introduction to Homological Algebra*. São Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.
- [9] MAUNDER, C. R. F. *Algebraic Topology*. London: Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [10] MELO, T. de; *Torção de Reidemeister das formas espaciais esféricas*. 2009.89 f. Tese (Doutorado em Matemática)- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2009.
- [11] MILNOR, J. Whitehead Torsion, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 72, p. 358-426, 1966.
- [12] MILNOR, J.; STASHEFF, J. *Characteristic Classes*. Princeton, N.J: Princeton University Press, 1974.

- [13] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology*. New York: The Benjamin - Cummings Publishing Company, 1984.
- [14] NETO, O. M.; MELO, T. de; SPREAFICO, M. *Cellular Decomposition of Quaternionic Spherical Space Forms*. Preprint, 2011.
- [15] NIVEN, I. *An Introduction to the Theory of Numbers*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [16] RHAM, G. Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiables, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, v. 2, p. 51-67, 1950.
- [17] REIDEMEISTER, K. *Homotopieringe und Linseräume*, *Hamburger Abhandl.* 11 (1935) 102-109.
- [18] ROTMAN, J. J. *An Introduction to the Theory of Groups*. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [19] ROTMAN, J. J. *The Theory of Groups*. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1976.
- [20] SERRE, J. P. *Linear Representations of Finite Groups*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [21] TOMODA, S.; ZVENGROWSKI, P. Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds. *Geometry and Topology Monographs*, v. 14, p. 519-556, 2008.
- [22] VINCENT, G. Les groupes linéaires finis sans points fixes, *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 20, p. 117-171, 1947.
- [23] WOLF, J. A. *Spaces of constant curvature*. McGraw-Hill, Inc., 1967.
- [24] ZASSENHAUS, H. *The Theory of Groups*. New York: Chelsea Publishing Company, 1949.
- [25] ZASSENHAUS, H. *Über endliche Fastkörper*, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, **11** (1935), 187-220.
- [26] ZIMMERMANN, B. On The Classification of Finite Groups Acting on Homology 3-Spheres. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 217, n. 2, p. 387-395, 2004.



# Índice Remissivo

---

- $\mathbb{Z}G$ -módulos, 2
- ação, 2
- anel de cohomologia, 11
- anel de divisão, 1
- anel grupo, 1
- aplicação aumentação, 8
- cohomologia de um complexo de cocadeia, 7
- complemento, 18
- complexo de cadeia, 6
- complexo de cocadeia, 7
- curved join, 25
- dualidade de Poincaré, 11
- Ext, 9
- forma espacial esférica, 14
- forma espacial esférica metacíclica, 141
- função equivariante, 3
- G-órbita, 3
- G-conjunto, 2
- G-conjunto livre, 2
- G-conjunto trivial, 2
- grupo de Whitehead, 20
- grupo de Whitehead de um anel grupo, 20
- grupo de Whitehead reduzido, 20
- grupo derivado, 15
- grupo dos quatérnios generalizado, 23
- grupo solúvel, 15
- grupos de cohomologia, 173
- grupos de homologia, 145
- grupos split metacíclicos, 23
- homologia de um complexo de cadeia, 7
- módulo de homomorfismos, 8, 9
- p-grupo, 14
- p-subgrupo de Sylow, 14
- produto cup, 10
- produto direto, 18
- produto semidireto, 18
- região fundamental, 17
- representação de grupos finitos, 13
- resolução, 7
- resolução livre, 8
- sequência exata, 4
- sequência exata cinde, 5
- sequência exata curta, 5
- sequência semi-exata, 6
- teorema dos coeficientes universais, 10
- torção de Reidemeister do complexo  $C$ , 22
- torção de Whitehead, 21