IC.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

DESDOBRAMENTOS E CLASSIFICAÇÃO DE
PARES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Marcelo José Saia

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

DESDOBRAMENTOS E CLASSIFICAÇÃO DE
PARES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Marcelo José Saia

Orientador: Prof. Dr. Auster Ruzante

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obtenção
do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos

1983

ABSTRACT

MARCELO JOSÉ SAIA

Adviser: Prof. Dr. Auster Rusante

In this work, we want to establish conditions for the equivalence between a bi-A-orbit and a bi-K-orbit for pairs of germs $(f_1, f_2) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$.

To this end, we make use of the action of bi-isotrope groups and generalize the results of J. Martinet $[M_1]$ for germs $f : (R^n, 0) \longrightarrow (R^m, 0)$.

À
Eda Maria
e ao Bruno

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Dr. Auster Ruzante, pela orientação deste trabalho e pela amizade e confiança depositada em mim desde o início de minha graduação.

À prof. Angela Maria Sitta, pela coorientação de minha iniciação científica e pelo incentivo dado.

Aos professores e amigos do I.C.M.S.C. USP. pelo ensino e apoio dados durante a graduação e pós-graduação.

Aos colegas do I.P.E.A.P.P. UNESP. pelo apoio e condições dadas, para que eu pudesse completar este trabalho.

À Ines, pelo excelente trabalho de datilografia.

E finalmente, à Eda Maria pelo amor e dedicação.

este trabalho dependeu parcialmente de verbas das instituições-FAPESP CAPES e FINEP. para que fosse realizado

INDICE

INTRODUÇÃO I

CAPÍTULO I - PRELIMINARES

I.1. Germes de Aplicações diferenciáveis C^∞	01
I.2. Ação de Grupos em Conjuntos	02
I.3. Bi-Equivalência de contato	03
I.4. Deformações e desdobramentos de Pares	08
I.5. O Bi-K-espaco tangente	10
I.6. Noções de desdobramentos	12
I.7. Lema de Nakayama	14

CAPÍTULO II - A bi-A-Classificação

II.1. Pares de Germes Associados	15
II.2. Pares de Germes Associados a Extensões	17
II.3. A bi-A-Classificação	19
II.4. Ação de grupos de bi-isotropia	27

CAPÍTULO III - Algumas considerações sobre as deformações bi-K-versais.

III.1. Germes de bi-K-codimensão finita	32
III.2. Os módulos $T^k(f_1, f_2)$	33
III.3. Considerações sobre os módulos $T^k(f_1, f_2)$	34
III.4. Proposição	40
III.5. A aplicação: $(\Sigma_1, \Sigma_2) \longrightarrow (F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)}$	46
APÊNDICE.....	50
BIBLIOGRAFIA.....	56

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo principal, estabelecer condições para a equivalência entre uma bi-K-órbita e uma bi-A-órbita.

Tal resultado, quando se considera pares de germes bi-estáveis, já foi estabelecido anteriormente. Vide [E].

Aqui procuramos generalizar tal resultado seguindo de perto as idéias de J. Martinet [M₁], que fez para o caso global, ou seja, germes de funções, e utilizar as ações de grupo de bi-isotropia.

Mais precisamente, para um dado par de germes $(fo_1, fo_2) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ que admite um desdobramento bi-estável, (F_1, F_2) satisfazendo certas condições, vide Capítulo II, e um par de germes (go_1, go_2) bi-K-equivalente a (fo_1, fo_2) , conseguimos uma imersão $i: R^p \times R^q \longrightarrow (R^r \times R^p \times R^q)$, conveniente, transversal a (F_1, F_2) tal que: $i^*(F_1, F_2)$ é bi-A-isomórfo a (go_1, go_2) .

Com isto, conseguimos explicitar a bi-A-classificação na bi-K-órbita de (fo_1, fo_2) .

CAPÍTULO I

1. PRELIMINARES

1.1. Germes de Aplicações Diferenciáveis C^∞

Seja $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ um germe de aplicação C^∞

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Designamos por E_n o anel dos germes de funções C^∞ na origem de R^n .

Seja $E_{n,p}^0 = \{f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0) : f \in C^\infty\}$

Seja μ_n o ideal de E_n , consistindo de todos os germes de aplicações $f: (R^n, 0) \rightarrow (R, 0)$

Temos $E_{n,p}^0$ um E_n -módulo livre

Assim, podemos identificar $E_{n,p}^0$ com $(E_n^0)^p$. Temos ainda $(E_n^0)^p$ um espaço vetorial real.

Para $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, obtemos o homomorfismo

$f^*: E_p \rightarrow E_n$ induzido por f , que a cada $\lambda \in E_p$ associa $\lambda \circ f$.

O ideal de E_n gerado pelas componentes de f será denotado $I(f)$ ou $f^* \mu_p$ ou I_f e será chamado ideal de f .

Se M é um E_n -módulo, ele é munido de uma estrutura de E_p -módulo via f^* . Se $m_1, \dots, m_k$ são elementos de M , o E_n -sub-módulo gerado pelos m_i , será notado $E_n \{m_1, \dots, m_k\}$.

e o E_p -sub-módulo gerado pelos m_i será denotado por

$$F^* E_p \{m_1, \dots, m_k\} \text{ ou } E_p \{m_1, \dots, m_k\},$$

se não causar nenhuma confusão.

1.2. Ação de Grupos em conjuntos

i) Por uma ação de um grupo

G em um conjunto M , entendemos como uma aplicação:

$$\phi : G \times M \rightarrow M$$

$$(g, x) \rightarrow g.x \quad \text{tal que para todo}$$

$$x \in M \text{ e } g, h \in G, \text{ temos:}$$

$$a) 1.x = x$$

$$b) (g h).x = g.(h.x) \quad \text{onde } 1 \text{ denota a identidade de } G.$$

Dado tal ação, podemos definir uma relação de equivalência " $\sim$ " em M , dizendo que $x \sim y$ quando existe um elemento $g \in G$ para o qual $y = g.x$. As classes de equivalência são chamadas órbitas pela ação de G sobre M .

Dado $x \in M$, a órbita por x é por definição a classe de equivalência que contém x , isto é; o conjunto

$$G.x = \{g.x : g \in G\}$$

ii) Ação C^∞ de grupos de Lie em variedades C^∞ .

a) Definição: Um grupo de Lie é um grupo G , que é uma variedade C^∞ , e para a qual a multiplicação.

$G \times G \rightarrow G$ e a inversão $G \rightarrow G$ são aplicações C^∞ .

b) Por uma ação C^∞ de um grupo de Lie numa variedade M , de classe C^∞ , entendemos uma ação $\phi : G \times M \rightarrow M$, para a qual ϕ é C^∞ .

c) Proposição: ver: $[G]$:

Seja $\phi : G \times M \rightarrow M$ uma ação C^∞ de um grupo de Lie numa variedade M , de classe C^∞ .

Para qualquer ponto $x \in M$, a aplicação natural

$\phi_x : G \rightarrow G \cdot x$ do grupo na órbita dada por $g \rightarrow g \cdot x$ é uma submersão.

1.3. Bi-equivalência de contato

Notaremos por $E_{m,p+q}^0$ o conjunto de todos os pares de germes:

$$(f_1, f_2) : (R^m, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

Temos que $E_{m,p+q}^0 = E_m^0 \times \dots \times E_m^0$ ($p+q$ vezes),

1. Definição: germes bi-A-equivalentes

Os pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) dizem-se bi-A-equivalentes quando existem germes de difeomorfismo

$$h : (R^m, 0) \longrightarrow (R^m, 0) \text{ e}$$

$$k : (R^p \times R^q, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0), \text{ com}$$

$$k = k_1 \times k_2, \text{ com } k_1 : (R^p, 0) \longrightarrow (R^p, 0)$$

$$k_2 : (R^q, 0) \longrightarrow (R^q, 0)$$

para os quais, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc}
 (R^m, 0) & \xrightarrow{(f_1, f_2)} & (R^p \times R^q, 0) \\
 \downarrow h & & \downarrow k_1 \times k_2 \\
 (R^m, 0) & \xrightarrow{(g_1, g_2)} & (R^p \times R^q, 0)
 \end{array}$$

ou seja:
$$\begin{cases} k_1 \circ f_1 = g_1 \circ h & e \\ k_2 \circ f_2 = g_2 \circ h \end{cases}$$

2. Definição a) consideremos uma terna

(h, H_1, H_2) , de germes na origem, a qual torna comutativo o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 (R^m, 0) & \xleftarrow{\pi_m} & (R^m \times R^q, 0) & \xleftarrow{i_2} & (R^m, 0) & \xrightarrow{i_1} & (R^m \times R^p, 0) \xrightarrow{\pi_m} (R^m, 0) \\
 \downarrow h & & \downarrow H_2 & & \downarrow h & & \downarrow H_1 & & \downarrow h \\
 (R^m, 0) & \xleftarrow{\pi_m} & (R^m \times R^q, 0) & \xleftarrow{i_2} & (R^m, 0) & \xrightarrow{i_1} & (R^m \times R^q, 0) \xrightarrow{\pi_m} (R^m, 0)
 \end{array}$$

onde:
$$\begin{cases} i_1 = \text{injeção natural: } (R^m, 0) \rightarrow (R^m \times R^p, 0) \\ i_2 = \text{injeção natural: } (R^m, 0) \rightarrow (R^m \times R^q, 0) \end{cases}$$

e π_m : projeção natural em $(R^m, 0)$ dos espaços

$$R^m \times R^p \quad \text{ou} \quad R^m \times R^q$$

com os germes h, H_1, H_2 , inversíveis, nestas condições

(h, H_1, H_2) diz-se uma bi-equivalência de contato ou bi-K-equivalência.

Podemos desta forma, escrever:

$$H_1(x, y) = (h(x), \theta_1(x, y)) \text{ com } \theta_1(x, 0) = 0$$

para $\forall x \in \mathbb{R}^m$ e

$$H_2(x, z) = (h(x), \theta_2(x, z)) \text{ com } \theta_2(x, 0) = 0$$

b). Consideremos também uma bi-K-equivalência como um par de germes inversíveis (h, H) , que faz comutativo o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^m, 0) & \xhookrightarrow{i} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_m} & (\mathbb{R}^m, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xhookrightarrow{i} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) & \xrightarrow{\pi_m} & (\mathbb{R}^m, 0) \end{array}$$

com a condição que $H = (h \circ \pi_m, \theta_1 \circ \pi_{mp}, \theta_2 \circ \pi_{mq})$

onde π_{mq} = projeção natural : $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q, 0)$
e π_{mp} = projeção natural : $(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0)$

Temos então; pela comutatividade do diagrama que:

$$(H(x, y, z) = (h(x), \theta_1(x, y), \theta_2(x, z))) \text{ e}$$

$$\begin{cases} \theta_1(x, 0) = 0 \\ \theta_2(x, 0) = 0 \end{cases}$$

3. Definição : Germes bi-K-equivalentes:

Os pares de germes $(f_1, f_2); (g_1, g_2)$:

$(\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ dizem-se bi-K-equivalentes quan

do existe uma bi-K-equivalência (h, H) para a qual o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (R^m, 0) & \xrightarrow{(I, f_1, f_2)} & (R^m \times R^p \times R^q, 0) \\
 \downarrow h & & \downarrow H = (h \circ \pi_m, \theta_1 \circ \pi_{mp}, \theta_2 \circ \pi_{mq}) \\
 (R^m, 0) & \xrightarrow{(I, g_1, g_2)} & (R^m \times R^p \times R^q, 0) \quad \text{comuta}
 \end{array}$$

isto é:

$$H \circ (I, f_1, f_2) = (I, g_1, g_2) \circ h$$

ou seja:

$$\begin{cases} \theta_1 (I, f_1) = g_1 \circ h \\ \theta_2 (I, f_2) = g_2 \circ h \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO: $[H], [E] : \quad \text{bi-A-equivalência} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{bi-K-equivalência.}$

Lema (1): Seja $\phi: (R^m, 0) \rightarrow (R^m, 0)$ um germe de difeomorfismo, então temos que:

$$\phi^* : E_n \rightarrow E_n \text{ é um isomorfismo de R-álgebra.}$$

Lema (2): Seja $\psi: E_n \rightarrow E_n$ um isomorfismo de R-álgebra, então existe um germe de difeomorfismo $\phi: (R^m, 0) \rightarrow (R^m, 0)$ tal que $\phi^* = \psi$.

4. Definição: Dizemos que (f_1, f_2) e (g_1, g_2) tem ideais isomorficamente induzidos se existe um germe de difeomorfismo

$\phi: (R^m, 0) \rightarrow (R^m, 0)$ para o qual o isomorfismo $\phi^*: E_n \rightarrow E_n$ satisfaz $\phi^*(I_{f_i}) = I_{g_i}$ para $i = 1, 2$.

5. Proposição: $|E|$, $|H|$: (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi-K-equivalentes se e somente se eles tem ideais isomorficamente induzidos.

6. Observação: Se $V_{f_i} = f_i^{-1}(0)$ e $V_{g_i} = g_i^{-1}(0)$, para $i = 1, 2$ temos que $\phi(V_{f_i}) = V_{g_i}$ e $\phi(V_{f_1} \cap V_{f_2}) = (V_{g_1} \cap V_{g_2})$

7. Definição: Bi-C-equivalência

Uma bi-C-equivalência é uma bi-K-equivalência (h, H) , onde h é o germe da identidade.

Neste caso, o diagrama de bi-K-equivalência, simplifica-se para o seguinte diagrama:

onde $H = (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np}, \theta_2 \circ \pi_{nq})$

Da mesma forma dizemos que os pares de germes (f_1, f_2) ;

$(g_1, g_2) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ são bi-C-equivalentes quando existe uma Bi-C-equivalência (I, H) para a qual o diagrama

isto é: $Ho(I, f_1, f_2) = (I, g_1, g_2)$

8. Proposição: $[H], [E]$

Os pares de germes

$$(f_1, f_2); (g_1, g_2) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

São bi-C-equivalentes, se, e somente se,

$I(f_1) = I(g_1)$ e $I(f_2) = I(g_2)$, se e somente se, existem matrizes inversíveis $p \times p$ e $q \times q$: (u_{ij}) e (v_{ij}) , com entradas em E_n , tais que:

$$\begin{cases} f_{1i} = \sum_j u_{ij} g_{1j} ; & 1 \leq i, j \leq p \\ f_{2r} = \sum_s v_{rs} g_{2s} ; & 1 \leq r, s \leq q \end{cases}$$

9. Definição: O conjunto dos pares bi - M - equivalentes a um par de germes (f_1, f_2) será chamado bi - M - órbita de (f_1, f_2) e será denotado $MM = (f_1, f_2)$, onde $M = A, K$ ou C .

1.4. Deformações e Desdobramentos de pares.

1. Definição: Uma deformação a r -parâmetros de um par de germes

$(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é um par de germes

$(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ tal que

$$(f_1, f_2)(0, X) = (f_{01}, f_{02})(X)$$

Sejam (f_1, f_2) e (g_1, g_2) duas deformações a r -parâmetros dos pares de germes (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) respectivamente.

2. Definição: (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são bi - K - equivalentes como deformações, se elas foram bi - K - equivalentes como pares de germes, via uma bi - K - equivalência (ϕ, H) onde $\phi(u, x) = (u, \phi(u, x))$.

Se (f_1, f_2) é uma deformação à r-parâmetros de (f_{01}, f_{02}) e $h : (R^S, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ é um germe C^∞ , nos chamamos $h^*(f_1, f_2)$, (imagem recíproca de (f_1, f_2) por h) à deformação à s-parâmetros de (f_{01}, f_{02}) definida por

$$h^*(f_1, f_2)(v, x) = (f_1(h(v), x), f_2(h(v), x)).$$

Chamamos h uma mudança de parâmetros.

3. (f_1, f_2) e (g_1, g_2) , deformações à r-parâmetros de (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) respectivamente, são bi - K - isomorfos se existe um germe de difeomorfismo $h : (R^r, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ para o qual se tem um dos pares bi - K - equivalente ao par induzido do outro, via h.

Se (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são deformações à r-parâmetros de um mesmo par de germes, elas são bi - K - equivalentes como deformações, se elas forem bi - K - equivalentes via uma bi - K - equivalência (ϕ, H) onde

$$\phi(u, x) = (u, \phi(u, x)) \quad \text{e} \quad \phi(0, x) = x$$

4. Uma deformação à r-parâmetros (f_1, f_2) de (f_{01}, f_{02}) é dita bi - K - versal se qualquer deformação de (f_{01}, f_{02}) à s-parâmetros for bi - K - equivalente à $h^*(f_1, f_2)$, onde $h : (R^S, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ é uma mudança de parâmetros conveniente.

Princípio da Unicidade das deformações versais

Sejam (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) pares de germes bi - K - equivalentes.

Duas deformações bi - K - versais (f_1, f_2) e (g_1, g_2) de (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) respectivamente, ao mesmo número de parâmetros, são bi - K - isomorfas.

1.5. O bi-K-espaço tangente

1. Definição: Dado o par de germes $(f_1, f_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ definimos o bi-K-espaço tangente a (f_1, f_2) como sendo o E_n -módulo $T(f_1, f_2) \subset E_n, p+q$:

$$T(f_1, f_2) = J(f_1, f_2) + [(I(f_1) \cdot E_{n,p}) \times \{0\}] \oplus [\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{n,q})]$$

$$\text{com } J(f_1, f_2) = E_n \cdot \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\}$$

Definimos a bi-K-codimensão de (f_1, f_2) como sendo a codimensão deste subespaço vetorial em $E_n, p+q$

2. Proposição: $|H|, |E|$: Se dois pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ são bi - K - equivalentes, então eles tem a mesma bi - K - codimensão.

3. Exemplos:

a) Seja $(f_1, f_2): (R^2, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$

$$(f_1, f_2): (x, y) = (x, y^2)$$

$$T(f_1, f_2) = \{(1, 0) : (0, y)\} \rightarrow \text{bi-K-cod}(f_1, f_2) = +\infty$$

b) Seja $(f_1, f_2) : (R^2, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$

$$(x, y) \rightarrow (x^2, y^2)$$

$$T(f_1, f_2) = \{(x, 0), (0, y)\} \rightarrow \text{bi-K-cod}(f_1, f_2) = +\infty$$

c) Seja $(f_1, f_2) : (R, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$

$$x \rightarrow (x^2, x^3)$$

$$T(f_1, f_2) = \{(2x, 3x^2), (x^2, 0), (0, x^3)\} \rightarrow \text{bi-K-cod}(f_1, f_2) = 4.$$

Seja (f_1, f_2) uma deformação de r -parâmetros de (f_{01}, f_{02}) .

4. Definição: Dizemos que (f_1, f_2) é bi-K-transversal se

$$R \left\{ (f_1, f_2)_1, \dots, (f_1, f_2)_r \right\} + T(f_{01}, f_{02}) = E_n, \quad p+q \quad \text{onde}$$

$$(f_1, f_2)_i = \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_i}, \frac{\partial f_2}{\partial u_i} \right) \Big|_{u=0}$$

5. Proposição: $|H|, |E|$: Um par de germes (f_{01}, f_{02}) admite uma deformação bi-K-transversal se e somente se tem bi-K-codimensão finita.

6. Proposição: (Apêndice)

Uma deformação (f_1, f_2) de um par de germes (f_{01}, f_{02}) é bi-K-versal se e somente se é bi-K-transversal.

Consequência: Um par de germes (f_{01}, f_{02}) admite uma deformação bi-K-versal se e somente se é de bi-K-codimensão finita.

1.6. Noções de desdobramentos.

1. Definição: Um desdobramento à r -parâmetros de um par de germes $(f_{01}, f_{02}) : (R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é um par de germes

$(F_1, F_2) : (R^r \times R^m, 0) \rightarrow (R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0)$ tal que

$(F_1, F_2)(u, x) = (u, f_1(u, x), u, f_2(u, x))$, onde (f_1, f_2) é uma deformação à r -parâmetros de (f_{01}, f_{02}) .

2. Definição: Dois desdobramentos à r -parâmetros (F_1, F_2) e (G_1, G_2) são bi - A - isomorfos se o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} (R^r \times R^m, 0) & \xrightarrow{(F_1, F_2)} & (R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \theta = \theta_1 \times \theta_2 \\ (R^r \times R^m, 0) & \xrightarrow{(G_1, G_2)} & (R^r \times R^p \times R^r \times R^q, 0) \end{array}$$

onde ϕ = germe de difeomorfismo da forma $\phi(u, x) = (u, \phi(u, x))$ e

$$\phi(0, x) = x \quad e$$

θ = germe de difeomorfismo do tipo produto com

$$\theta_1 : (R^r \times R^p, 0) \rightarrow (R^r \times R^p, 0) \quad e$$

$$\theta_2 : (R^r \times R^q, 0) \rightarrow (R^r \times R^q, 0)$$

3. Definição: Um desdobramento à r -parâmetros (F_1, F_2) é bi - A - trivial quando for bi - A - isomorfo ao desdobramento constante (G_1, G_2) dado por:

$$(G_1, G_2)(u, x) = (u, f_{01}(x), u, f_{02}(x))$$

4. Definição: Um par de germes (f_{01}, f_{02}) é chamado bi - A - estável, se e somente se, todo desdobramento é bi - A - trivial.

5. Definição: Um desdobramento à r-parâmetros do tipo $(s, r-s)$ de um par de germes (f_{01}, f_{02}) é um par de germes

$$(F_1, F_2) : (R^r \times R^m, 0) \rightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0)$$

$$(F_1, F_2)(u, x) = (u_1, \dots, u_s, f_1(u, x), u_{s+1}, \dots, u_n, f_2(u, x))$$

onde (f_1, f_2) é uma deformação à r-parâmetros de (f_{01}, f_{02}) .

6. Definição: Dois desdobramentos à r-parâmetros do tipo $(s, r-s)$

(F_1, F_2) e (G_1, G_2) de dois pares de germes (f_1, f_2) e (g_1, g_2) respectivamente, são bi-A-isomorfos se o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{array}{ccc} (R^r \times R^n, 0) & \xrightarrow{(F_1, F_2)} & (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \theta = \theta_1 \times \theta_2 \\ (R^r \times R^n, 0) & \xrightarrow{(G_1, G_2)} & (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0) \end{array}$$

Com ϕ = difeo local de $R^r \times R^n$ da forma: $\phi(u, x) = (u, \psi(u, x))$

e θ = difeo local do tipo produto cartesiano com

$$\begin{cases} \theta_1 : R^s \times R^p \longrightarrow R^s \times R^p & \text{e} \\ \theta_2 : R^{r-s} \times R^q \longrightarrow R^{r-s} \times R^q \end{cases}$$

I.7. Lema de Nakayama:

Seja R um anel comutativo com unidade 1 e sejam

- 1) E e F R -módulos, com F finitamente gerado.
- 2) $\alpha : E \rightarrow F$, homomorfismo de R -módulo.
- 3) $I \subset R$ um ideal, tal que $1 + z$ é inversível para todo $z \in I$.

Então, se $\alpha(E) + IF = F$, segue que $\alpha(E) = F$.

Corolário (1):

Seja A um E_n -módulo finitamente gerado e seja B um submódulo de A .

Se $\dim_R \frac{A}{M_n^{k+1} A + B} < K$, então

$M_n^k A \subset B$ e B é um E_n -módulo finitamente gerado.

Corolário (2):

Seja A um ideal de E_n

Então:

(1) $\dim_R \frac{E_n}{A} < \infty \iff$ existe $K \geq 1$ tal que $M_n^K \subset A$.

(2) $\dim_R \frac{E_n}{A} = K \longrightarrow M_n^K \subset A$

CAPÍTULO II

2. A BI-A-CLASSIFICAÇÃO

2.1. Pares de germes associados

Seja $(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ uma de formação regular, à r-parâmetros do par (f_{01}, f_{02})

Consideremos os subconjuntos $V_{f_1}, V_{f_2}, (V_{f_1} \cap V_{f_2})$, subvariedades de $R^r \times R^n$, de codimensão $p, q, p+q$ respectivamente, onde $V_{f_i} = f_i^{-1}(0) \quad i = 1, 2$.

Consideremos agora, para $s \leq r \quad s \in \mathbb{Z}^+$, os germes de projeção $\pi_1 : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s, 0)$

$$(u, x) \longrightarrow (u_1, \dots, u_s)$$

e $\pi_2 : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^{r-s}, 0)$

$$(u, x) \longrightarrow (u_{s+1}, \dots, u_r)$$

Agora tomemos os "germes de restrição" π_{f_1} e π_{f_2} , de finidos como $\pi_{f_1} = \pi_1|_{V_{f_1}}$ e $\pi_{f_2} = \pi_2|_{V_{f_2}}$ então:

$$\pi_{f_1} : (V_{f_1}, 0) \subseteq (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s, 0)$$

$$\pi_{f_2} : (V_{f_2}, 0) \subseteq (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^{r-s}, 0), \text{ e podemos}$$

definir, ainda, (π_{f_1}, π_{f_2}) da seguinte maneira.

$$(\pi_{f_1}, \pi_{f_2}) : (V_{f_1} \cap V_{f_2}, 0) \subseteq (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s \times R^{r-s}, 0)$$

$$(u, x) \longrightarrow (u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_r).$$

A partir daí, elaboramos o conceito de "Bi-A-equivalência do

tipo $(s, r-s)$ ", entre os pares de germes associados a (f_1, f_2) e (g_1, g_2) ou seja (π_{f_1}, π_{f_2}) e (π_{g_1}, π_{g_2})

1. Definição: (π_{f_1}, π_{f_2}) e (π_{g_1}, π_{g_2}) são

$(s, r-s)$ bi-A-equivalentes se existe um germe de difeomorfismo.

$$\Phi : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^r \times R^n, 0) \text{ com}$$

$$\Phi : (u, x) = (h_1(u_1, \dots, u_s), h_2(u_{s+1}, \dots, u_r), Q(u, x))$$

Sendo: $h_1 : (R^s, 0) \longrightarrow (R^s, 0)$

$h_2 : (R^{r-s}, 0) \longrightarrow (R^{r-s}, 0)$ de tal maneira que:

$$\begin{cases} \Phi(V_{f_1}) = V_{g_1} \\ \text{e} \\ \Phi(V_{f_2}) = V_{g_2} \end{cases}$$

Consequentemente, $\Phi(V_{f_1} \cap V_{f_2}) = (V_{g_1} \cap V_{g_2})$

2. Observação: Esta definição estende a noção de bi-A-equivalência introduzida por J.P. Dufour.

Em decorrência disso, se

$$(\pi_{f_1}, \pi_{f_2}) : (V_{f_1} \cap V_{f_2}) \longrightarrow (R^s \times R^{r-s}, 0)$$

e

$$(\pi_{g_1}, \pi_{g_2}) : (V_{g_1} \cap V_{g_2}) \longrightarrow (R^s \times R^{r-s}, 0)$$

são $(s, r-s)$ bi-A-equivalentes, os diagramas abaixo, comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 (V_{f_1}, 0) \xrightarrow{\pi_{f_1}} (R^s, 0) & & (V_{f_2}, 0) \xrightarrow{\pi_{f_2}} (R^{r-s}, 0) \\
 \downarrow \phi_1 & e & \downarrow \phi_2 \\
 (V_{\varepsilon_1}, 0) \xrightarrow{\pi_{\varepsilon_1}} (R^s, 0) & & (V_{\varepsilon_2}, 0) \xrightarrow{\pi_{\varepsilon_2}} (R^{r-s}, 0) \\
 & & \downarrow h_2
 \end{array}$$

onde:

$$\phi_1 = \phi|_{V_{f_1}}$$

e

$$\phi_2 = \phi|_{V_{f_2}}$$

2.2. Pares de Germes Associados a Extensões

Seja:

$(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ uma r -deformação de $(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$. Seja a "extensão do tipo $(s, r-s)$ de (f_1, f_2) dada por:

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (u, y, v, z, x) = (-y + f_1(u, v, x), -z + f_2(u, v, x))$$

Notemos que o par associado

$$(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}) : (V_{f_1} \cap V_{f_2}) \longrightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q), \text{ onde}$$

$$\pi_1 : (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p, 0) \text{ e}$$

$$\pi_2 : (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) \longrightarrow (R^{r-s} \times R^q, 0) \text{ são as projeções, pode}$$

ser identificado ao desdobramento do tipo $(s, r-s)$ de (f_{01}, f_{02})

$$(F_1, F_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0)$$

$$(u, x) \longrightarrow (u_1, \dots, u_s, f_1(u, x), u_{s+1}, \dots, u_r, f_2(u, x))$$

3. Observação : Iremos em algumas vezes usar a identificação entre $(V_{f_1} \cap V_{f_2})$ e $(R^r \times R^n)$ ao trabalharmos com (F_1, F_2) , sem fazer menção ao fato.

Podemos notar também, que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é um desdobramento do tipo (p, q) do par (π_{f_1}, π_{f_2})

4. Proposição:

"Se $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é bi-estável, então $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ é uma deformação

bi-K-versal

Demonstração:

Basta adaptarmos a proposição de [E] para o nosso caso:

Temos que:

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (R^p \times R^q \times R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

é uma deformação a $(p+q)$ parâmetros, regular, de

$$(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

Portanto, vale a proposição acima.

2.3. A bi-A-Classificação

Seja $(g_{01}, g_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ um par de germes bi-K-equivalente ao par

$(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ de bi-K-codimensão finita.

Suponhamos que a deformação $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ seja bi-K-versal

suponhamos que a deformação

$(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ de (g_{01}, g_{02}) , bi-K-versal da forma:

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2) : (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2) : (u, y, v, z, x) = (-y + g_1(u, v, x), -z + g_2(u, v, x))$$

tal que ela seja bi-k-isomórfa a

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$, via uma mudança de parâmetros do tipo

$$h : (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0)$$

$$h(u_1, \dots, u_s, y, u_{r-s}, \dots, u_r, z) = (h_1(u, y), h_2(v, z))$$

Com
$$\begin{cases} u = (u_1, \dots, u_s) \\ v = (u_{r-s}, \dots, u_r) \end{cases}$$

ou seja:

h é do tipo $h_1 \times h_2$, com

$$h_1 : (R^s \times R^p, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p, 0) \quad e$$

$h_2 : (R^{r-s} \times R^q, 0) \longrightarrow (R^{r-s} \times R^q, 0)$ e com a hipótese que

$h^2(v_{f_i}) = (v_{f_i})$, nos temos o diagrama abaixo comutando

$$\begin{array}{ccccc}
 (v_{\bar{f}_1} \cap v_{\bar{f}_2}) \subset (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) & \xrightarrow{h_1 \phi} & (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q \times R^n, 0) & \supset & (v_{\bar{g}_1} \cap v_{\bar{g}_2}) \\
 \searrow (\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2}) & & \downarrow (\pi_1, \pi_2) & & \downarrow (\pi_1, \pi_2) & & \searrow (\pi_{\bar{g}_1}, \pi_{\bar{g}_2}) \\
 & & (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0) & \xrightarrow{h_1 \times h_2} & (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0) & &
 \end{array}$$

Com ϕ um difeomorfismo local tal que

$$\left. \begin{array}{l} \phi(v_{\bar{f}_1}) = v_{\bar{g}_1} \\ \phi(v_{\bar{f}_2}) = v_{\bar{g}_2} \end{array} \right\} \implies \phi(v_{\bar{f}_1} \cap v_{\bar{f}_2}) = (v_{\bar{g}_1} \cap v_{\bar{g}_2})$$

e $h_1 \times h_2$ um difeomorfismo local.

Temos então, que $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é bi-A-equivalente à

$$(\pi_{\bar{g}_1}, \pi_{\bar{g}_2}) \text{ do tipo } (s, r-s)$$

Consequentemente, o desdobramento (F_1, F_2) do tipo $(s, r-s)$ associado à $(\pi_{\bar{f}_1}, \pi_{\bar{f}_2})$ é bi-A-equivalente ao desdobramento (G_1, G_2) , associado à $(\pi_{\bar{g}_1}, \pi_{\bar{g}_2})$.

Seja agora, $(\Sigma_{01}, \Sigma_{02}) = \{0\} \times R^p \times \{0\} \times R^q \subset R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q$

Seja $(\Sigma_1, \Sigma_2) = (h_1 \times h_2)^{-1} (\Sigma_{01}, \Sigma_{02})$

Temos que:

i) (Σ_1, Σ_2) é subvariedade de dimensão $p+q$ em

$$R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q$$

ii) (F_1, F_2) é transversal à (Σ_1, Σ_2) na origem.

Demonstração:

i) Como $(\Sigma_1, \Sigma_2) = h^{-1}(\Sigma_{01}, \Sigma_{02})$ e

$(\Sigma_{01}, \Sigma_{02})$ é de codimensão r , temos $\text{cod}_{\mathbb{R}}$

$(\Sigma_1, \Sigma_2) = r$, então $\dim_{\mathbb{R}}(\Sigma_1, \Sigma_2) = p+q$

ii) Preciso mostrar que

$$(F_1, F_2)(0). T_0(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{r-s} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n) + \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \cong \mathbb{R}^{r+p+q}$$

Temos:

$$(F_1, F_2)(u, v, x) = (u_1, \dots, u_s, f_1(u, v, x), u_{s+1}, \dots, u_r, f_2(u, v, x))$$

Então:

$$(F_1, F_2)'(0) = (I_s, f_1'(0), I_{r-s}, f_2'(0)), \text{ ou seja,}$$

sua dimensão é no mínimo $(s) + (r-s) = r$ consequentemente:

$$(F_1, F_2)' T_0(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{r-s} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n) + \mathbb{R}^{p+q} \cong \mathbb{R}^{r+p+q}$$

Portanto (F_1, F_2) é transversal à (Σ_1, Σ_2) na origem.

Consequentemente, $(F_1, F_2)^{-1}(\Sigma_1, \Sigma_2)$

é subvariedade de $(V_{\bar{F}_1} \cap V_{\bar{F}_2})$.

Tomemos agora, $(S_1, S_2) = (F_1, F_2)^{-1}(\Sigma_1, \Sigma_2) \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$.

Temos que $\dim_{\mathbb{R}}(S_1, S_2) = n$ em $(V_{\bar{F}_1} \cap V_{\bar{F}_2}) \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n$.

Definimos agora

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} = (F_1, F_2) \Big|_{(S_1, S_2)}$$

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} : [(S_1, S_2), 0] \longrightarrow [(\Sigma_1, \Sigma_2), 0]$$

Com $\dim_{\mathbb{R}} (S_1, S_2) = n$ e

$$\dim_{\mathbb{R}} (\Sigma_1, \Sigma_2) = p+q$$

O diagrama anterior nos mostra que

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} \text{ é bi-A-equivalente à } (g_{01}, g_{02})$$

Ou seja:

(g_{01}, g_{02}) é bi-A-equivalente à $i^*(F_1, F_2)$ no sentido de produto de fibras com $i : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, uma imersão transversal à (F_1, F_2) .

Exemplo:

1) Seja $(f_{01}, f_{02}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(f_{01}, f_{02})(x) = (x^2, x)$$

Uma deformação bi-K-versal de (f_{01}, f_{02}) é da forma:

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (w, u, y, z, x) = (-y + (-w + ux + x^2), -z + x)$$

Então temos que (F_1, F_2) é da forma:

$$(F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$(F_1, F_2)(w, u, x) = (w, u, -w + ux + x^2, x)$ é um desdobramento do tipo $(2,0)$ de (f_{01}, f_{02})

Seja $(g_{01}, g_{02}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(g_{01}, g_{02})(x) = (x^3 - x^2, x^2 + x) \text{ bi-C-equivalente à } (f_{01}, f_{02}),$$

portanto, bi-K-equivalente.

Uma deformação bi-K-versal de (g_{01}, g_{02}) :

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2) : (w, u, y, z, x) = (-y + (-w + ux + x^3 - x^2, -z + x^2 + x)$$

$$\text{e } (G_1, G_2) \text{ é } (G_1, G_2) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} :$$

$$(G_1, G_2) (w, u, x) = (w, u, -w + ux + x^3 - x^2, x^2 + x)$$

temos (F_1, F_2) bi-A-equivalente à (G_1, G_2)

Se tomarmos a superfície

$$(V_{\bar{F}_1} \cap V_{\bar{F}_2}) \supset (S_1, S_2) \quad \begin{cases} w = 2x^2 \\ u = x^2 \end{cases} \quad \text{temos que:}$$

$$(F_1, F_2) \Big|_{(S_1, S_2)} \text{ é levado ao par}$$

(g_{01}, g_{02}) via o difeomorfismo

$$h_1 \times h_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

com $h_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sendo a identidade e

$$h_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{sendo}$$

$$h_2(x) = x^2 + x$$

$$2) \text{ Seja } (f_{01}, f_{02}) : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0)$$

$$(f_{01}, f_{02}) (x_1, x_2) = (x_1, x_2^2, x_2, x_1^2).$$

Uma deformação bi-K-versal de (f_{01}, f_{02}) é o par

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, 0)$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (u, w, y, z, x) &= (-y_1 + x_1 + u_3 x_2 - w_2, \\
 &- y_2 + x_2^2 + u_4 x_2 - w_2, -z_1 + x_2 + u_1 x_1 - w_3, \\
 &(x_1^2 + u_2 x_1 - w_4) - z_2)
 \end{aligned}$$

Portanto, um desdobramento do tipo $(4,4)$ de (f_{01}, f_{02}) é o par:

$$\begin{aligned}
 (F_1, F_2) (R^8 \times R^2, 0) &\longrightarrow (R^4 \times R^2 \times R^4 \times R^2, 0) \\
 (u, w, x) &\longrightarrow (w_1, w_2, u_3, u_4; \\
 &x_1 + u_3 x_2 - w_1; x_2^2 + u_4 x_2 - w_2; u_1, u_2, w_3, w_4; \\
 &x_2 + u_1 x_1 - w_3, x_1^2 + u_2 x_1 - w_4).
 \end{aligned}$$

Se tomarmos a superfície

$$\begin{aligned}
 (S_1, S_2) &= \begin{cases} u_3 = 1 \\ w_1 = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4 = -x_2 \\ w_2 = -x_1^2 \end{cases} ; \\
 &\quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ w_3 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} w_4 = -x_2^2 \\ u_2 = -x_1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Então:

$$(F_1, F_2) \Big|_{(S_1, S_2)} = (x_2, x_1^2, x_1, x_2^2)$$

Se tomarmos

$$(S'_1, S'_2) = \begin{cases} w_1 = 0 \\ u_3 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_4 = -x_2^2 \\ w_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \\ w_3 = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = 0 \\ w_4 = y^2 \end{cases}$$

$$(f_1, f_2) \Big|_{(S'_1, S'_2)} = (x_1 + x_2^2, x_2^2 - x_2^3, x_2 + x_1^2 + x_2^2, x_1^2 - x_2^2).$$

Seja Θ o conjunto dos germes de subvariedades, de

$R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q$, do tipo produto cartesiano, ou seja

(Σ_1, Σ_2) , com dimensão $\Sigma_1 = p$ e dimensão $\Sigma_2 = q$ em

$R^s \times R^p$ e $R^{r-s} \times R^q$ respectivamente, transversais à (F_1, F_2) .

Teorema:

Seja $(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ um par de germes de bi-K-dimensão finita tal que para qualquer par de germes

$(g_{01}, g_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ pertencente à

bi-K-órbita de (f_{01}, f_{02}) , existe um desdobramento bi-estável do tipo $(s, r-s)$.

Seja (F_1, F_2) , o desdobramento bi-estável de (f_{01}, f_{02}) .

Então: A aplicação $(\Sigma_1, \Sigma_2) \longrightarrow (F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)}$ é uma sobre

jeção de θ sobre a bi-K-órbita de (f_{01}, f_{02}) é menos de uma bi-A-equivalência.

Demonstração:

Para qualquer par de germes (g_{01}, g_{02}) pertencente a bi-K-órbita de (f_{01}, f_{02}) , existe um desdobramento (G_1, G_2) de (g_{01}, g_{02}) do tipo $(s, r-s)$, bi-estável.

Portanto (F_1, F_2) é bi-A-equivalente a (G_1, G_2) , então podemos construir um diagrama como acima, e temos a superfície necessária.

Exemplo 1:

Seja $(f_{01}, f_{02}) : R \longrightarrow R \times R$

$$(f_{01}, f_{02})(x) = (x, x^2 + x)$$

um desdobramento bi-estável do par (f_{01}, f_{02}) do tipo $(0,1)$ é:

$$(F_1, F_2) : R \times R \longrightarrow R \times R^2$$

$$(u, x) \longrightarrow (x, u, x^2 + x + ux + \frac{u^3}{3})$$

a) Seja $(g_{01}, g_{02}) : R \longrightarrow R \times R$

$$(g_{01}, g_{02})(x) = (x, x^2 - \frac{1}{3})$$

Então temos que:

$$(F_1, F_2)(\Sigma_1, \Sigma_2) = (g_{01}, g_{02}) \text{ onde}$$

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) \text{ é a superfície: } u = -1$$

b) Seja

$$(t_{01}, t_{02}) : R \longrightarrow R \times R$$

$$(t_{01}, t_{02})(x) = (x, 2x^2 + x + \frac{x^3}{3})$$

Então:

$$(F_1, F_2)(\Sigma'_1, \Sigma'_2) = (t_{01}, t_{02})$$

Onde:

(Σ'_1, Σ'_2) é a superfície $\{u = x$

Exemplo 2:

Seja:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) : R &\longrightarrow R^2 \times R \\ x &\longrightarrow (0, x^2, x) \end{aligned}$$

Tomemos o desdobramento (F_1, F_2) a $(1,0)$ parâmetros; bi-es
tável.

$$\begin{aligned} (F_1, F_2) : R \times R &\longrightarrow R \times R^2 \times R \\ (u, x) &\longrightarrow (u, z, n, w) = (u, ux, x^2, x) \end{aligned}$$

Seja:

$$(g_{01}, g_{02})(x) = (x^3, x^2, x)$$

então:

$$(g_{01}, g_{02})(x) = (F_1, F_2)(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

onde:

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) \text{ é a superfície } \{u - n = 0$$

Seja

$$(h_{01}, h_{02})(x) = (x^5, x^2, x)$$

Então:

$$(h_{01}, h_{02}) = (F_1, F_2)(\Sigma'_1, \Sigma'_2)$$

Onde:

$$(\Sigma'_1, \Sigma'_2) \text{ é a superfície } u - n^2 = 0$$

2.4. Ação de grupos de bi-isotropia

Sejam (Σ_1, Σ_2) e (Σ'_1, Σ'_2) pertencentes a Θ . Nós verifi
camos que:

$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)}$ e $(F_1, F_2)_{(\Sigma'_1, \Sigma'_2)}$ são bi-A-equivalentes, se e somente se, existem dois difeomorfismos locais ϕ e ψ na origem de R^{r+n} e R^{r+p+q} , com

$$\psi = \psi_1 \times \psi_2 \quad \text{tal que}$$

$$\psi_1 : R^s \times R^p \longrightarrow R^s \times R^p \quad \text{e}$$

$$\psi_2 : R^{r-s} \times R^q \longrightarrow R^{r-s} \times R^q \quad \text{tal que:}$$

$$a) \quad \psi_1 \times \psi_2 \circ (F_1, F_2) \circ \phi^{-1} = (F_1, F_2)$$

$$b) \quad \psi_1 \times \psi_2 (\Sigma_1, \Sigma_2) = (\Sigma'_1, \Sigma'_2)$$

Definição

Seja

$G(F_1, F_2)$ o grupo dos difeomorfismos

$\psi = \psi_1 \times \psi_2$ tal que existe um difeomorfismo

ϕ tal que:

$(\psi_1 \times \psi_2) \circ (F_1, F_2) \circ \phi^{-1} = (F_1, F_2)$; com a operação composição.

Chamamos este grupo, de grupo de bi-isotropia de (f_1, f_2)

Este grupo age sobre o conjunto θ .

Demonstração:

i) Para $\psi_1 \times \psi_2 = I_{s,p} \times I_{r-s,q}$, ou seja a identidade do grupo $G(F_1, F_2)$, temos

$\psi_1 \times \psi_2 (\Sigma_1, \Sigma_2) = (\Sigma_1, \Sigma_2)$ para qualquer (Σ_1, Σ_2) pertencente a θ .

ii) $(\psi \circ \psi') (\Sigma_1, \Sigma_2) = \psi \circ (\psi' (\Sigma_1, \Sigma_2))$ para

$$\begin{cases} \psi = \psi_1 \times \psi_2 \\ \psi' = \psi'_1 \times \psi'_2 \end{cases} \quad \text{pertencentes a } G(f_1, f_2) \text{ e}$$

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) \in \Theta$$

$$\begin{aligned} \Psi (\Psi' (\Sigma_1, \Sigma_2)) &= \Psi (\Psi'_1 \times \Psi'_2 (\Sigma_1, \Sigma_2)) = \\ &= \Psi (\Psi'_1 (\Sigma_1), \Psi'_2 (\Sigma_2)) = \Psi_1 \times \Psi_2 (\Psi'_1 (\Sigma_1), \Psi'_2 (\Sigma_2)) = \\ &= (\Psi_1 (\Psi'_1 (\Sigma_1)), \Psi_2 (\Psi'_2 (\Sigma_2))) = \\ &= (\Psi_1 \circ \Psi'_1 (\Sigma_1), \Psi_2 \circ \Psi'_2 (\Sigma_2)) = \Psi \circ \Psi' (\Sigma_1, \Sigma_2). \end{aligned}$$

Exemplo:

Seja o desdobramento:

$$(F_1, F_2) (u, x) = (u, ux, x^2, x) \quad \text{bi-estável}$$

Sejam

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) : \{u - n = 0 \quad e$$

$$(\Sigma'_1, \Sigma'_2) : \{u - n^2 = 0$$

Se tomarmos:

$$\Psi_1 \times \Psi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

$$\Psi_1 \times \Psi_2 : (p, q, r, w) = (p+p^2, q+qp^2, r, w)$$

e

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Phi (u, x) = (u + u^2, x), \quad \text{difeomorfismos na origem, te}$$

mos que:

$$\Psi_1 \times \Psi_2 \circ (F_1, F_2) \circ \Phi^{-1} = (F_1, F_2)$$

De fato:

$$\Psi_1 \times \Psi_2 \circ (F_1, F_2) (u, x) = (F_1, F_2) \circ \phi (u, x).$$

$$\begin{aligned} \text{pois } \Psi_1 \times \Psi_2 \circ (F_1, F_2) (u, x) &= \Psi_1 \times \Psi_2 (u, ux, x^2, x) = \\ &= (u + u^2, ux + u^2x, x^2, x) = (F_1, F_2) \circ \phi (u, x) = \\ &= (F_1, F_2) (u + u^2, x) = (u + u^2, ux + u^2x, x^2, x) \end{aligned}$$

a) Então $(\Sigma_1, \Sigma_2) = (n, \xi, n, w)$ está na mesma órbita que a superfície $(n + n^2, \xi + \xi n, n, w)$ pois

$$\Psi_1 \times \Psi_2 (\Sigma_1, \Sigma_2) = (n + n^2, \xi n + \xi, n, w)$$

b) Se $(\Sigma'_1, \Sigma'_2) = (n^2, \xi, n, w)$ temos que:

$$\begin{aligned} \Psi_1 \times \Psi_2 (\Sigma'_1, \Sigma'_2) &= (n^2 + n^4, \xi + \xi n^2, n, w) \text{ ou seja} \\ \text{a superfície } (\Sigma^0_1, \Sigma^0_2) &= (n^2 + n^4, \xi + \xi n^2, n, w) \text{ está na órbita de} \\ (\Sigma'_1, \Sigma'_2), \text{ então, } (F_1, F_2)_{(\Sigma^0_1, \Sigma^0_2)} &\text{ é bi-A.equivalente a} \\ (F_1, F_2)_{(\Sigma'_1, \Sigma'_2)}. \end{aligned}$$

Teorema:

A aplicação $(\Sigma_1, \Sigma_2) \longrightarrow (F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)}$ define uma bijeção entre o conjunto das bi-A-órbitas contidas na bi-K-órbita de (fo_1, fo_2) e o conjunto das órbitas $G(F_1, F_2)$ em Θ .

Demonstração:

i) Sobrejeção: sai diretamente do parágrafo anterior.

ii) Injetividade: sejam (Σ_1, Σ_2) e (Σ'_1, Σ'_2) pertencentes à órbitas diferentes.

Suponhamos por absurdo, que $(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)}$ é bi-A-

equivalente a $(F_1, F_2)_{(\Sigma'_1, \Sigma'_2)}$.

Então existem difeomorfismos ϕ e ψ , com $\psi = \psi_1 \times \psi_2$ um difeomorfismo do tipo produto, tal que valem as condições (a) e (b).

Ou seja:

$$a) \quad \psi_1 \times \psi_2 \circ (F_1, F_2) \circ \phi^{-1} = (F_1, F_2)$$

$$b) \quad \psi_1 \times \psi_2 (\Sigma_1, \Sigma_2) = (\Sigma'_1, \Sigma'_2)$$

A condição (a), nos diz que $\psi_1 \times \psi_2$ pertence ao grupo $G(F_1, F_2)$.

A condição (b) nos diz que (Σ'_1, Σ'_2) está na mesma órbita que (Σ_1, Σ_2) .

Mas isto não é possível, por hipótese.

Portanto:

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} \text{ não é bi-A-equivalente a}$$

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma'_1, \Sigma'_2)}$$

iii) A aplicação está bem definida.

Sejam:

(Σ_1, Σ_2) e (Σ'_1, Σ'_2) representantes da mesma órbita em Θ .

Então, existe difeomorfismo ϕ , tal que as condições (a) e (b) são válidas, para um certo difeomorfismo $\psi_1 \times \psi_2$ de $G(F_1, F_2)$.

Portanto:

$$(F_1, F_2)_{(\Sigma_1, \Sigma_2)} \text{ é bi-A-equivalente a } (F_1, F_2)_{(\Sigma'_1, \Sigma'_2)}$$

Ou seja, eles estão na mesma bi-A-órbita.

CAPÍTULO III

3. Algumas considerações sobre as deformações bi-K-versais

3.1. Seja $(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \longrightarrow (R^p \times R^q, 0)$ um par de germes.

Proposição: Uma condição necessária e suficiente para que um par de germes (f_{01}, f_{02}) tenha bi-K-codimensão finita, é que exista um inteiro $k \geq 1$ tal que

$$\mu_n^k \cdot E_{n, p+q} \subseteq T(f_{01}, f_{02})$$

Demonstração: (suficiente)

Suponhamos que exista um inteiro $k \geq 1$ com

$$\mu_n^k \cdot E_{n, p+q} \subseteq T(f_{01}, f_{02}).$$

Então:

$$\dim_R \frac{E_{n, p+q}}{T(f_{01}, f_{02})} \leq \dim_R \frac{E_{n, p+q}}{\mu_n^k \cdot E_{n, p+q}} < +\infty$$

Portanto a bi-K-codimensão de (f_{01}, f_{02}) é finita.

(necessária.)

Suponhamos que o par (f_{01}, f_{02}) seja de bi-K-codimensão finita em $E_{n, p+q}$.

Consideremos a sequência decrescente de E_n - submódulos de $E_{n, p+q}$.

$$T(f_{01}, f_{02}) + \mu_n^0 \cdot E_{n, p+q} \supseteq T(f_{01}, f_{02}) + \mu_n^1 \cdot E_{n, p+q} \supseteq \dots \supseteq T(f_{01}, f_{02})$$

Como (f_{01}, f_{02}) tem bi-K-codimensão finita, a sequência

é estacionária a partir de um certo k . Logo:

$$T(f_{01}, f_{02}) + \mu_n^{k+1} \cdot E_{n, p+q}^0 = T(f_{01}, f_{02}) + \mu_n^k \cdot E_{n, p+q}^0$$

Aplicando o Lema de Nakayama, segue que:

$$\begin{aligned} T(f_{01}, f_{02}) + \mu_n \cdot \mu_n^k E_{n, p+q} &\supseteq T(f_{01}, f_{02}) + \\ &+ \mu_n^k \cdot E_{n, p+q} \supseteq \mu_n^k \cdot E_{n, p+q} \\ \Rightarrow T(f_{01}, f_{02}) &\supseteq \mu_n^k \cdot E_{n, p+q} \end{aligned}$$

Observação:

Podemos tomar $k = c$, onde $c = \text{bi-K-codimensão de } (f_{01}, f_{02})$.

3.2. Os módulos $T^k(f_1, f_2)$

Seja:

$$(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^p, R^q, 0)$$

uma deformação a r -parâmetros de um par de germes (f_{01}, f_{02})

Definimos:

$$\begin{aligned} T^k(f_1, f_2) &= E_{r+n} + \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ &+ \left[(I(f_1) \cdot E_{r+n, p}^0 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, q}^0)) \right] + \\ &+ \mu_r^k \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_r} \right\} \subseteq E_{r+n, p+q} \end{aligned}$$

Nesta definição, os dois primeiros termos são sub. E_{r+m} -
módulos de $E_{r+m, p+q}$ e o terceiro termo, é um sub- E_r -módulo,
pela estrutura induzida da projeção canônica $(u, x) \longrightarrow u$.

3.3. Proposição:

Suponhamos que (f_1, f_2) é uma deformação $\tilde{a}$ r -parâmetros,
bi-K-versal, de (f_{01}, f_{02}) .

Então:

1) $T^k(f_1, f_2)$ é um sub E_{r+n} -módulo de $E_{r+n, p+q}$ ou mais pre-
cisamente:

$$\begin{aligned} T^k(f_1, f_2) &= E_{r+n} \cdot \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ &+ \left[(I(f_1) \cdot E_{r+n, p}) \times \{0\} \right] \oplus \left[\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, p+q}) \right] \\ &+ \mu_r^k \cdot E_{r+n, p+q} \end{aligned}$$

Demonstração:

Como (f_1, f_2) é deformação bi-K-versal, temos:

$$\begin{aligned} E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ + \left[(I(f_1) \cdot E_{r+n, p}) \times \{0\} \right] \oplus \left[\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, q}) \right] + \\ + E_r \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_r} \right\} = \tilde{E}_{r+n, p+q} \end{aligned}$$

Agora, multiplicando cada membro da igualdade acima, por

μ_r^k e considerando todos os espaços como E_r -módulos, temos:

$$\begin{aligned} & \mu_r^k \cdot E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ & + \left((\mu_r^k \cdot I(f_1) \cdot E_{r+n, p}) \times \{0\} \right) \oplus \left(\{0\} \times (\mu_r^k \cdot I(f_2) \cdot E_{r+n, q}) \right) + \\ & + \mu_r^k \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_r} \right\} = \mu_r^k \cdot E_{r+n, p+q} \end{aligned}$$

Agora, somando à cada membro o sub E_{r+n} - módulo:

$$\begin{aligned} & E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ & + \left((I(f_1) \cdot E_{r+n, p}) \times \{0\} \right) \oplus \left(\{0\} \times I(f_2) \cdot E_{r+n, q} \right) \end{aligned}$$

e considerando as inclusões naturais, temos o resultado esperado.

Portanto:

$T^k(f_1, f_2)$ é um sub- E_{r+n} -módulo de $E_{r+n, p+q}^0$

2) $T^k(f_1, f_2)$ é bi-K-invariante, no seguinte sentido:

Se (f_1, f_2) e (g_1, g_2) são duas deformações bi-K-versais à r -parâmetros de dois pares de germes (f_{01}, f_{02}) e (g_{01}, g_{02}) bi-K-equivalentes, então:

$T^k(f_1, f_2)$ e $T^k(g_1, g_2)$ são isomórfos, via um automorfismo de $E_{r+n, p+q}$.

Demonstração:

Seja (g_1, g_2) uma deformação bi-K-versal a r -parâmetros de (g_{01}, g_{02}) , bi-K-equivalente à (f_{01}, f_{02}) .

Temos então, que (f_1, f_2) é bi-K-isomorfo a (g_1, g_2) .

Então nós podemos escrever:

$$(f_1, f_2)(u, x) = M(u, x)(g_1, g_2)(h(u), Q(u, x))$$

com:

$$\phi : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^r \times R^n, 0)$$

$$(u, x) \longrightarrow (h(u), Q(u, x))$$

um germe de difeomorfismo local e

$$M : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow GL(R, P+Q)$$

é um germe de aplicação C^∞ conveniente.

Cada matriz $M(u, x)$, é da forma

$$M(u, x) = \begin{bmatrix} a_{11}(u, x) & \dots & a_{1p}(u, x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(u, x) & \dots & a_{pp}(u, x) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & b_{11}(u, x) & \dots & b_{1q}(u, x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{q1}(u, x) & \dots & b_{qq}(u, x) \end{bmatrix}$$

com:

$$M_1(u, x) = (a_{ij}(u, x)) \text{ matriz } (p \times p), \text{ inversível}$$

e

$$M_2(u, x) = (b_{ij}(u, x)) \text{ matriz } (q \times q), \text{ inversível,}$$

tal que.

$$\begin{cases} f_1(u, x) = M_1(u, x) \cdot g_1(h(u), Q(u, x)) \\ f_2(u, x) = M_2(u, x) \cdot g_2(h(u), Q(u, x)) \end{cases} \text{ e}$$

Seja então a aplicação:

$$E_{r+n, p+q}^0 \longrightarrow E_{r+n, p+q}'$$

$$(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow M \cdot [(\xi_1, \xi_2) \circ \Phi]$$

ela age como um automorfismo de E_{r+n} -módulo ao longo de Φ e um automorfismo de E_r -módulo ao longo de h .

Ela torna invariante $\mu_r^k \cdot E_{r+n, p+q}'$, para qualquer inteiro k .

Ela transforma:

$$[(I(g_1) \cdot E_{r+n, p}') \times \{0\}] \oplus [\{0\} \times (I(g_2) \cdot E_{r+n, q}')] \text{ em:}$$

$$[(I(f_1) \cdot E_{r+n, p}') \times \{0\}] \oplus [\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, q}')] \text{ em:}$$

Enfim, temos que:

$$\begin{aligned} \partial(f_1, f_2) &= \frac{\partial M}{\partial x_i} \cdot (g_1, g_2) \circ \Phi + \\ &+ M \cdot \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \left[\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial x_j} \circ \Phi \right] \end{aligned}$$

Isto nos mostra que:

$$E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ + \left\{ (I(g_1) \cdot E_{r+n, p}^0) \times \{0\} \right\} + \left\{ \{0\} \times (I(g_2) \cdot E_{r+n, q}^0) \right\}$$

é transformado em:

$$E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ + \left\{ (I(f_1) \cdot E_{r+n, p}^0) \times \{0\} \right\} + \left\{ \{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, q}^0) \right\}$$

o que nos dá o resultado esperado.

Neste sentido, $T^k(f_1, f_2)$ não depende da bi-K-órbita de (f_{01}, f_{02}) .

- 3) $T^k(f_1, f_2)$ é de codimensão finita em $E_{r+n, p+q}$ se (f_{01}, f_{02}) é de bi-K-codimensão finita.

Temos por (I) que o E_{r+n} - módulo

$$M = \frac{E_{r+n, p+q}}{E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} +} \\ + \left\{ (I(f_1) \cdot E_{r+n, p}^0) \times \{0\} \right\} + \left\{ \{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+n, q}^0) \right\}$$

é um E_r - módulo de tipo finito, gerado pelas projeções em M , de

$$\left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial u_r} \right\}$$

Então, $\mu_r^k \cdot M$ é de R - codimensão finita em M .

Como $T^k(f_1, f_2)$ é imagem inversa de $\mu_r^k \cdot M$, temos que $T^k(f_1, f_2)$ é de codimensão finita em $E_{r+n, p+q}^v$.

Observação:

Temos que a codimensão de

$T^1(f_1, f_2)$ é igual à bi-K-codimensão de (f_{01}, f_{02})

De fato, temos que:

$$\begin{aligned} T^1(f_1, f_2) = & E_{r+n} \cdot \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\} + \\ & + \left\{ (I(f_1) \cdot E_{r+n, p}^0 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times I(f_2) \cdot E_{r+n, p+q}) \right\} \\ & + \mu_r \cdot E_{r+n, p+q}^v \subset E_{r+n, p+q}^v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(f_{01}, f_{02}) = & E_n \cdot \left\{ \frac{\partial(f_{01}, f_{02})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_{01}, f_{02})}{\partial x_n} \right\} + \\ & + \left\{ (I f_{01} \cdot E_{n, p}^0 \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times I f_{02} \cdot E_{n, q}^0) \right\} \subset E_{n, p+q}^v. \end{aligned}$$

Procedendo como em [H] temos que os únicos módulos que poderiam influir no cálculo da codimensão de $T^1(f_1, f_2)$ e não entram no cálculo da bi-K-codimensão de (f_{01}, f_{02}) são os módulos da forma.

$$\mu_r^k \cdot E_{r+n, p+q}^0 \text{ com } k \geq 1$$

Ou seja, se existir algum módulo deste tipo que não esteja em $T^1(f_1, f_2)$, então a codimensão $T^1(f_1, f_2) >$ bi-K-codimensão $T(f_1, f_2)$, mas todos estes módulos estão contidos em

$\mu_r \cdot E_r^0 + n, p + q$, que faz parte de

$T^1(f_1, f_2)$; portanto

$\text{cod. } T^1(f_1, f_2) = \text{bi-K-codimens\~ao } T(f_{01}, f_{02})$.

3.4.1 Definição: Dizemos que um difeomorfismo $h: (R^r, 0) \rightarrow (R^r, 0)$

é $(k-1)$ chato em relaça\~o \~a identidade se $(h-I) \in \mathcal{M}_r^k E_{r,r}^0$,
onde I é a identidade em R^r .

3.4.2 Proposiça\~o:

Seja $(f_1, f_2) : (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ uma de
formaça\~o \~a r -parâmetros do par de germes (f_{01}, f_{02}) , bi- k -ver
sal.

Supondo que $T^k(f_1, f_2) \supset \mu_{r+n}^\ell \cdot E_{r+n, p+q}$ para um
certo inteiro ℓ .

Seja (E_1, E_2) pertencente \~a $\mu_{r+n}^{\ell+1} \cdot E_{r+n, p+q}^0$.

Seja $(g_1, g_2)(u, x) = (f_1, f_2)(u, x) + (E_1, E_2)(u, x)$

Ent\~ao, (g_1, g_2) é bi- k -isomórfo \~a $h^*(f_1, f_2)$, com
 $h : (R^r, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ um difeomorfismo $(k-1)$ chato na ori
gem, com relaça\~o \~a identidade.

Demonstraça\~o:

Seja o par de germes, da aplicaça\~o

$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (R \times R^r \times R^n; R \times \{0\}) \rightarrow (R^p \times R^q; 0)$

$(\lambda, u, x) \rightarrow (f_1(u, x) + \lambda E_1(u, x), f_2(u, x) + \lambda E_2(u, x))$.

Podemos considerar $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ como um caminho passando
por (f_1, f_2) e (g_1, g_2) pois

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) (0, R^r \times R^n) = (f_1, f_2) \quad e$$

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) (1, R^r \times R^n) = (g_1, g_2)$$

Agora vamos mostrar que para qualquer $\lambda \in R$, temos

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_\lambda = (f_1, f_2) (\lambda, u, x) \quad \text{bi-k-equivalente à}$$

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_\lambda = (f_1, f_2)$$

i) Suponhamos primeiramente que existe um campo de vetores C^∞ , ao longo de $R \times \{0\}$ em $R \times R^r \times R^n$ da forma:

$$X(\lambda, u, x) = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^r \xi_j(\lambda, u) \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_{i=1}^n X_i(\lambda, u, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Satisfazendo as seguintes condições:

$$a) \quad \begin{cases} X(\bar{f}_1) = D\bar{f}_1 \cdot X \in I(\bar{f}_1) \cdot E_{1+r+n}, p \\ X(\bar{f}_2) = D\bar{f}_2 \cdot X \in I(\bar{f}_2) \cdot E_{1+r+n}, p \end{cases}$$

$$b) \quad \xi_j \in \nu_r^k \cdot E_{1+r} \quad ; \quad X_i \in \nu_{r+n} \cdot (E_{1+r+n})$$

Temos que o eixo dos λ é uma trajetória do campo X .

Então, fazendo a integração de X ao longo desta curva, obtemos uma família de difeomorfismos locais

$$\phi_\lambda : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^r \times R^n, 0)$$

Fazemos analogamente para o campo

$$\xi = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u_j},$$

definido sobre $R \times R^r$, obtemos uma família de difeomorfismos locais

$$h_\lambda : (R^r, 0) \longrightarrow (R^r, 0)$$

como os ξ_j são $(k-1)$ chatos ao longo de $R \times \{0\} \subset R \times R^r$, os h_λ são $(k-1)$ chatos na origem, à menos da identidade, para qualquer λ .

Enfim, como X é um levantamento do campo ξ , o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} (R^r \times R^n, 0) & \xrightarrow{\Phi_\lambda} & (R^r \times R^n, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R^r, 0) & \xrightarrow{h_\lambda} & (R^r, 0) \end{array} \quad \text{e a}$$

condição (a), significam que

$$\Phi_\lambda^* [I(\bar{f}_{1\lambda})] = I(f_1)$$

e

$$\Phi_\lambda^* [I(\bar{f}_{2\lambda})] = I(f_2)$$

com $\bar{f}_{i\lambda}(u, x) = \bar{f}_i(\lambda, u, x)$ para $i=1,2$

então, (f_1, f_2) é bi-K-isomórfo a $h^*(\bar{f}_{1\lambda}, \bar{f}_{2\lambda})$.

Tomando $\lambda = 1$, obtemos o resultado esperado.

ii) Precisamos estabelecer a existência do campo X , satisfazendo as condições (a) e (b).

A condição (a) pode ser escrita da seguinte forma:

$$X(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = (E_1, E_2) + \sum_{j=1}^r \xi_j \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial u_j} + \\ + \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial x_i} \in$$

$$\in \left[(I(\bar{F}_1) \cdot E_{1+r+n}, p) \times \{0\} \right] \oplus \left[\{0\} \times (I(\bar{F}_2) \cdot E_{r+n+1}, q) \right]$$

A propriedade será demonstrada, se:

$$(II) E = \mu_{r+n} \cdot E_{1+r+n} \left\{ \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial x_2} \right\} + \\ = \left[(I(\bar{F}_1) \cdot E_{1+r+n}, p) \times \{0\} \right] \oplus \left[\{0\} \times (I(\bar{F}_2) \cdot E_{1+r+n}, q) \right] + \\ + \mu_r^k \cdot E_{1+r} \left\{ \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial u_r} \right\} \supset \mu_{r+n}^{\ell+1} \cdot E_{r+n+1, p+q}$$

pois:

$$i) (E_1, E_2) \in \mu_{r+n}^{\ell+1} \cdot E_{1+r+n, p+q}$$

$$ii) X_i(\lambda, u, x) \cdot \frac{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_2)}{\partial x_i} \in \mu_{r+n} \cdot E_{r+n+1} \cdot \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_n} \right\}$$

para $i = 1, \dots, n$

$$\text{iii)} \quad \xi_j \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial u_j} \in \mu_r^t \cdot E_{1+r} \left\{ \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial u_r} \right\}$$

para $j = 1, \dots, r$.

Como nós temos que

$$\text{i)} \quad \mu_{r+n}^{(E_{1+r+n})} \cdot \left\{ \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial x_n} \right\} \subset$$

$$\subset \left[(I(\bar{f}_1) \cdot E_{r+n+1}, p) \times \{o\} \right] \oplus \left[\{o\} \times (I(\bar{f}_2) \cdot E_{1+r+n}, q) \right]$$

$$\text{ii)} \quad \mu_r^k \cdot E_{1+r} \left\{ \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial u_r} \right\} \subset$$

$$\left[(I(\bar{f}_1) \cdot E_{1+r+n}, p) \times \{o\} \right] \oplus \left[\{o\} \times (I(\bar{f}_2) \cdot E_{1+r+n}, q) \right]$$

Só nos falta a condição (II)

Temos que:

$$E = \mu_{r+n} \cdot E_{r+n+1} \left\{ \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \right\} +$$

$$= \left[I(\bar{f}_1) (E_{r+n+1}, p) \times \{o\} \right] \oplus \left[\{o\} \times I(\bar{f}_2) (E_{r+n+1}, q) \times \{o\} \right] +$$

$$+ \mu_r^t (E_{r+n+1}, p+q) \quad \text{isto se mostra com um argumento}$$

análogo à (3.3.1)

Agora temos:

$$T^k(f_1, f_2) \supset \mu_{r+n}^l \cdot E_{r+n, p+q} ;$$

Temos que:

$$T^k(f_1, f_2) = E_{r+n} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \right\} +$$

$$+ [I(f_1)(E_{r+n, p}) \times \{o\}] \oplus [\{o\} \times I(f_2)(E_{r+n+q})]$$

+ $\mu_r^t \cdot E_{r+n, p+q}^o$; agora por $[B]$, nós temos que:

$$E' = E_{r+n+1} \left\{ \frac{\partial(\bar{f}_1, \bar{f}_2)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n \right\} + [I(\bar{f}_1)(E_{r+n+1, p}) \times \{o\}] +$$

$$+ [\{o\} \times I(f_2) \cdot E_{r+n+1, q}^o] + \mu_r^t (E_{r+n+1, p+q}^o) \supset$$

$$\supset \mu_{r+n}^{\ell} \cdot (E_{r+n+1, p+q})$$

Então:

$$\mu_{r+n} \cdot E' \supset \mu_{r+n}^{\ell+1} (E_{r+n+1, p+q})$$

E como:

$$E \supset \mu_{r+n} \cdot E' \quad \text{temos}$$

$$E \supset \mu_{r+n}^{\ell+1} (E_{r+n+1, p+q})$$

Obs.: Isto foi feito partindo de (λ, o, o) e construído para $\lambda = 0$.

Agora por um argumento de partição da unidade, mostraremos ao longo de $R \times \{o\}$.

iii) Pondo $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_{\lambda, o}(x) = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)_{\lambda}(o, x)$ temos que:

• para todo λ , $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_{\lambda o}$ é bi-K-isomórfo a (f_{01}, f_{02}) e

$$T(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_{\lambda_0} = T(f_{01}, f_{02})$$

- $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_\lambda$ é uma def. bi-K-versal de $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_\lambda$, o
- $(T_r^t(\bar{f}_1, \bar{f}_2)_\lambda \supset \mu_{r+n}^\ell \cdot E_{r+n, p+q}$

Então o argumento (ii) pode ser feito para qualquer valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Isto termina a demonstração.

3.5. Vamos analisar o comportamento da aplicação

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) \xrightarrow{(F_1, F_2)} (\Sigma_1, \Sigma_2)$$

Seja

$$(f_{01}, f_{02}) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$$

um par de germes de bi-K-codimensão finita.

Sejam :

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$$

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (u, y, z, x) \longrightarrow (-y + f_1(u, x); -z + f_2(u, x))$$

uma deformação bi-K-versal de (f_{01}, f_{02})

1. Definição:

Seja

$\ell(k)$, para $k \geq 1$ o menor inteiro tal que:

$$T^k(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \supset \mu_{r+p+q+n}^{\ell(k)-1} \cdot E_{r+p+q+n, p+q}$$

Temos, pela proposição (3.3.), que a função $\ell(t)$ não depende da bi-K-órbita de (f_{01}, f_{02})

Se tomarmos $(E_1, E_2) \in \mu_n^{\ell(k)}$ e pormos:

$$(\bar{g}_1, \bar{g}_2)(u, y, z, x) = (\bar{f}_1(u, y, z, x) + E_1(x); \bar{f}_2(u, y, z, x) + E_2(x))$$

Temos que, pela proposição anterior; $(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ é uma deformação bi-K-versal de:

$(g_{01}, g_{02}) = (f_{01}, f_{02}) + (E_1, E_2)$ é bi-K-isomórfo a $h^*(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$, com h = difeomorfismo local de $R^{r+p+q} - (k-1)$ - chato, a menos da identidade.

Se o difeomorfismo h for do tipo produto cartesiano:

$$h = h_1 \times h_2, \quad \text{com} \quad \begin{cases} h_1 : (R^s \times R^p, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p, 0) \\ e \\ h_2 : (R^{r-s} \times R^q, 0) \longrightarrow (R^{r-s} \times R^p, 0), \end{cases}$$

Temos que os desdobramentos a $(s, r-s)$ parâmetros:

$$(F_1, F_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0)$$

$$(u, x) \longrightarrow (u_1, \dots, u_s, f_1(u, x); u_{s+1}, \dots, u_r, f_2(u, x))$$

de (f_{01}, f_{02}) e

$$(G_1, G_2) : (R^r \times R^n, 0) \longrightarrow R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^p, 0$$

$$(G_1, G_2) : (u, x) = (u_1, \dots, u_s, f_1 + E_1, u_{s+1}, \dots, u_r, f_2 + E_2)$$

de (g_{01}, g_{02}) , são bi-A-isomórfos, ou seja:

$$(G_1, G_2) = h \circ (F_1, F_2) \circ \phi^{-1}$$

com

ϕ = difeomorfismo local na origem de R^{r+n} e

h = difeo local na origem de $R^{s+p} \times R^{r-s+q}$ do tipo produto.

$(k - 1)$ chato em relação à identidade

Em outros termos:

(g_{01}, g_{02}) é bi-A-isomórfo à $(F_1, F_2)(\Sigma_1, \Sigma_2)$, com $(\Sigma_1, \Sigma_2) \in \theta$ é um germe de subvariedade de dimensão $p+q$ tendo um contato de ordem $(k - 1)$ com

$$(\Sigma_{01}, \Sigma_{02}) = \{0\} \times R^p \times \{0\} \times R^q$$

De fato, temos pelo teorema (2.3) que

$$(\Sigma_1, \Sigma_2) = h_1 \times h_2 \circ (\Sigma_{01}, \Sigma_{02})$$

mas

$(\Sigma_{01}, \Sigma_{02})$ é uma superfície tendo por equação:

$$\begin{cases} u = 0 & \text{e onde } u = (u_1, \dots, u_s) \\ v = 0 & \quad \quad v = (u_{s+1}, \dots, u_r) \end{cases}$$

e

$h_1 \times h_2$ é um difeo local $(k-1)$ chato, a menos da identidade.

Então:

$$\begin{aligned} J^{k-1}(h_1 \times h_2 \circ (\Sigma_{01}, \Sigma_{02})) &= 0 \\ \Rightarrow J^{k-1}(\Sigma_1, \Sigma_2) &= J^{k-1}(\Sigma_{01}, \Sigma_{02}) \end{aligned}$$

Então, como o jato de ordem $(k-1)$ de (Σ_1, Σ_2) é igual à zero, nós podemos dizer que (Σ_1, Σ_2) tem uma equação do tipo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \psi_1(y) & \text{com} \quad \psi_1 \in \mu_p^k \cdot E_{p,s}^0 \\ v = \psi_2(z) & \text{com} \quad \psi_2 \in \mu_q^k \cdot E_{q,r-s}^0 \end{array} \right. \quad e$$

O Teorema (2.3) admite, portanto, a seguinte reformulação:

Teorema: Seja $(F_1, F_2) : (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^{s+p} \times R^{r-s+q}, 0)$
um desdobramento bi-estável de uma bi-K-órbita.

Para toda subvariedade $(\Sigma_1, \Sigma_2) \in \Theta$, a imagem do conjunto de subvariedades $\in \Theta$ de contato de ordem $(k-1)$ com (Σ_1, Σ_2) pela aplicação $(\Sigma_1, \Sigma_2) \rightarrow (F_1, F_2)(\Sigma_1, \Sigma_2)$ contém, à menos de bi-A-isomorfismos, uma ℓ -vizinhança de $(F_1, F_2)(\Sigma_1, \Sigma_2)$, constituída de elementos da forma $(g_{01}, g_{02}) = (f_{01}, f_{02}) + (E_1, E_2)$, com $(E_1, E_2) \in \mu_n^\ell \cdot E_{n,p+q}^0$.

APÊNDICE: DEFORMAÇÕES bi - K - VERSAIS E DEFORMAÇÕES bi - K - TRANSVERSAIS.

O objetivo deste apêndice, é dar demonstração de talhada da proposição 1.5.6.

"Uma deformação (f_1, f_2) de um par de germes (f_{01}, f_{02}) é bi - K - versal se e somente se é uma deformação bi - K - transversal".

A demonstração para o caso usual, ou seja, para germes de funções, foi feita em $|M_2|$ e detalhada em $|B|$.

Para o caso de pares de germes, esta proposição foi feita parcialmente em $|H|$ e citada em $|E|$, isto nos motivou a fazer uma demonstração completa, visto que ela nos é muito importante.

Nós seguimos o mesmo esquema feito em $|B|$, mas adaptando-o para o caso de pares.

Dois lemas são importantes para esta demonstração; um deles é o Lema da Redução, feito para pares de germes, por $|E|$.

Lema 1: (da Redução)

Seja $(f_1, f_2) : (R^{r+1} \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ uma deformação a $(r + 1)$ parâmetros de (f_{01}, f_{02}) .

Seja $(f_1, f_2)^0 : (R^r \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ a deformação a p -parâmetros restrição de (f_1, f_2) ao subespaço $(u_0 = 0)$, isto é,

$$(f_1, f_2)^0(u_1, \dots, u_r, x) = (f_1, f_2)(0, u_1, \dots, u_r, x)$$

Seja agora $h : (R^{r+1}, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ e consideremos o germe $h^*(f_1, f_2)^0$ definido da seguinte forma:

$$h^*(f_1, f_2)^0 : (R^{r+1} \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$$

$$(u_0, u_1, \dots, u_r, x) \mapsto (f_1, f_2)^0(h(u), x) = (f_1, f_2)(0, h(u), x)$$

Podemos enunciar então, o

Lema da Redução | E | pag. 38.

Seja X um germe de campo de vetores, na origem de $R^{r+1} \times R^m$, da forma:

$$X = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^r \xi_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^m X_j(u, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad e$$

$X_j(u, 0) = 0$, com X satisfazendo as seguintes condições

$$\begin{cases} D f_1 \cdot X \in f_1^*(\mu_p) \cdot E_{r+1+m, p} \\ D f_2 \cdot X \in f_2^*(\mu_q) \cdot E_{r+1+m, q} \end{cases}$$

Então o par de germes $(f_1, f_2) : (R^{r+1} \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é bi-K-equivalente como deformação ao par $h^*(f_1, f_2)^0$, onde $h : (R^{r+1}, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ é um germe de submersão.

Lema 2:

Seja $(f_1, f_2) : (R^r \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ uma deformação a r -parâmetros de um par de germes $(f_{01}, f_{02}) : (R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$.

Sejam $m_1, \dots, m_t$ pares de germes de aplicações de $(R^r \times R^m, 0) \rightarrow (R^p \times R^q)$ e

$m_i, 0$ suas restrições à $\{0\} \times \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq t$.

Então as seguintes condições são equivalentes:

$$\begin{aligned} \text{a) } E_m \left\{ \frac{\partial(f_{01}, f_{02})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_{01}, f_{02})}{\partial x_m} \right\} + \\ + [(I(f_{01}) \cdot E_{m,p}) \times \{0\}] + [\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{m,q})] + \\ + R\{m_{1,0}, \dots, m_{t,0}\} = E_{m, p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E_{m+r} \left\{ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial x_m} \right\} + [(I(f_1) \cdot E_{r+m,p}) \times \{0\}] + \\ + [\{0\} \times (I(f_2) \cdot E_{r+m,q})] + R\{m_1, \dots, m_t\} = E_{r+m, p+q}. \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração deste lema sai diretamente do lema feito em | B | pág. 16.

Podemos agora demonstrar a proposição 1.5.6.

i) Suponhamos que (f_1, f_2) seja bi - K - versal.

Temos que mostrar que (f_1, f_2) é bi - K - transversal, isto é:

$$R\{(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r\} + T(f_{01}, f_{02}) = E_{m, p+q}.$$

Consideremos um germe (g_{01}, g_{02}) em $E_{m, p+q}$ e a deformação à 1-parâmetro (g_1, g_2) de (f_{01}, f_{02}) dada por

$$(g_1, g_2)(v, x) = (f_{01}, f_{02})(x) + v(g_{01}, g_{02})(x).$$

Por hipótese (g_1, g_2) é bi - K - equivalente (co
mo deformação) à deformação induzida $H = h^*(f_1, f_2)$.

$H = (H_1, H_2)$, com $h(R, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ tendo componentes $h_1, \dots, h_r$.

Assim $H(t, x) = (f_1, f_2)(h(t), x) = (f_1(h(t), x), f_2(h(t), x))$

e

$$\dot{H} = \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial t}(0) \dot{f}_{11} + \dots + \frac{\partial h_r}{\partial t}(0) \dot{f}_{1r}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial h_1}{\partial t}(0) \dot{f}_{21} + \dots + \frac{\partial h_r}{\partial t}(0) \dot{f}_{2r} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial t}(0) (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1 + \dots + \frac{\partial h_r}{\partial t}(0) (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r \right\}, \text{ estabelecendo}$$

que $\dot{H}$ está em $R\{(\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r\}$

Usando o fato que (g_1, g_2) e (H_1, H_2) são bi - K -
equivalentes, segue que existe um germe de difeomorfismo ϕ ,
desdobramento da identidade de R^m , $\phi(v, x) = (v, \varphi(v, x))$ com
 $\varphi(0, x) = x$, tal que

$$\begin{cases} \phi^*(h^*(f_1)^* \mathcal{M}_p) = g_1^* \mathcal{M}_p & \text{e} \\ \phi^*(h^*(f_2)^* \mathcal{M}_q) = g_2^* \mathcal{M}_q \end{cases}$$

$$\rightarrow (h^*(f_1, f_2) \circ \phi)(v, x) = M(v, x) \cdot g_1, g_2(v, x) \rightarrow$$

$$\rightarrow (h^*(f_1, f_2) \circ \phi)(v, x) = M(v, x) \cdot [(f_{01}, f_{02})(x) + \\ + v(g_{01}, g_{02})(x)].$$

Derivando-se em relação a v , fazendo-se $v = 0$ e vendo-se que $M(0, x) = I(x)$, temos que $(\dot{g}_1, \dot{g}_2) = (\dot{H}_1, \dot{H}_2)$ está em $T(f_{01}, f_{02})$ e portanto que $(\dot{g}_1, \dot{g}_2)$ está em $R \left\{ (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_1, \dots, (\dot{f}_1, \dot{f}_2)_r \right\} + T(f_{01}, f_{02})$.

Como $(\dot{g}_1, \dot{g}_2) = (g_{01}, g_{02})$, estabelecemos que (f_1, f_2) é bi - K - transversal.

ii) Suponhamos agora, que (f_1, f_2) é uma deformação bi - K - transversal.

Consideremos $(v, x) \mapsto (f_{01}, f_{02})(x) + (g_1, g_2)(v, x)$, com $(g_1, g_2)(0, x) = 0$ uma deformação qualquer à s -parâmetros de (f_{01}, f_{02}) .

Consideremos agora a deformação soma à $r+s$ -parâmetros.

$$(h_1, h_2)(u, v, x) = (f_1, f_2)(u, x) + (g_1, g_2)(v, x).$$

É suficiente mostrar que a deformação soma é bi - K - isomorfa à imagem recíproca de (f_1, f_2) por uma submersão

$\bar{h} : (R^r \times R^s, 0) \rightarrow (R^r, 0)$; para isso aplica-se s -vezes o Lema da redução juntamente com o Lema 2.

Temos que $(h_1, h_2)|_{v=0} = (f_1, f_2)$ e $(h_1, h_2)|_{u=0} = (g_1, g_2)$

A condição bi - K - transversalidade juntamente com o Lema 2 implicam:

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & E_{r+s+m} \left\{ \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial x_m} \right\} + [(E_{r+s+p} \{e_s, \dots, e_p\}) \times \{0\}] + \\
 & + [\{0\} \times (E_{r+s+q} \{e_1, \dots, e_q\})] + E_{r+s} \left\{ \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial u_r} \right\} = \\
 & = E_{r+s+m, p+q}
 \end{aligned}$$

Consideremos agora a velocidade inicial $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial v_1}$,

da deformação (h_1, h_2) em relação ao parâmetro v_1 .

Temos que $\frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial v_1} \in E_{r+m+s, p+q}$ ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial v_1} \in E_{r+m+s, p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_1} \in E_{r+m+s, q} \end{cases} \quad e$$

E como $E_{r+s+m, p+q}$ se fatora na expressão (*), podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial v_1} &= \sum_{j=1}^n X_j(u, v, x) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial x_j} + (Y, Z) \circ h + \\ &+ \sum_{i=1}^r \mathcal{F}_i(u, v) \frac{\partial(h_1, h_2)}{\partial u_i} \quad \text{com } X_j \in E_{r+m+s} \quad e \\ &\quad \mathcal{F}_i \in E_{r+s} \end{aligned}$$

podemos então, aplicar o Lema da Redução e segue que existe um germe de submersão $\bar{h}_1 : (R^r \times R^s, 0) \rightarrow (R^r \times R^{s-1}, 0)$ tal que (h_1, h_2) é bi-K-isomorfo a $\bar{h} (h_{11}, h_{21})$ onde

$$(h_{11}, h_{21}) = (h_1, h_2) \Big|_{v_1=0}$$

Agora, por recorrências sobre $v_2, \dots, v_s$, conseguimos um germe de submersão $\bar{h} : (R^r \times R^s, 0) \rightarrow (R^r, 0)$ que satisfaz as nossas condições.

BIBLIOGRAFIA

- [H] - PEDROSO, H.A. - "Bi equivalência de contacto" - Dissertação de Mestrado. ICMSC-USP - 1980.
- [G] - GIBSON, C.G. - "Singular Points of Smooth mappings" (Research notes in mathematics; 25) - Pitman Publishing Limited Liverpool - 1979.
- [D] - DUFOUR, J.P. - "Diagrammes d'applications différentiables" Tese de Doutorado - 1979.
- [M₁] - MARTINET, J. - "Déploiements stables des germes de type fini, et détermination finie des applications différentiables" Bol. Soc. Bras. Mat. Vol 7 - nº 2 - 1976.
- [M₂] - MARTINET, J. - "Déploiements versels des applications différentiables et classification des applications stables". Lectures notes in Mathematics - nº 535 - Springer - 1975.
- [E] - SILVA, E. A. - "Classificação de pares bi-estáveis por r -álgebras". Tese de Doutorado - ICMSC-USP - 1982.
- [G₀] - GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN, V. - "Stable mappings and their singularities" - Graduate Texts in Mathematics, - Springer - 1973.
- [B] - BETTINI, L.J. - "Deformação versais e classificação de Aplicações estáveis" - Dissertação de Mestrado - ICMSC-USP - 1977.