Singularidades e teoria de invariantes em
bifurcação reversível-equivariante

Patrícia Hernandes Baptistelli

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 14/06/2007

Assinatura:_____

Singularidades e teoria de invariantes em bifurcação reversível-equivariante

*Patrícia Hernandes Baptistelli*¹

Orientadora: *Profa. Dra. Míriam Garcia Manoel*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação da Universidade de São Paulo, como
parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor
em Matemática.

USP - São Carlos
Junho/2007

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq.

*Ao meu marido Paulo e
ao meu filho Pedro.*

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus, por ser minha fonte de paz e pela realização de mais um sonho.

À professora e orientadora Míriam, pela amizade e pela seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

À Ana Paula Dias e Fernando Antoneli, pelas discussões produtivas em Portugal e pela colaboração com o meu projeto de doutorado.

Ao Jacques Furter, pelas importantes sugestões.

Aos amigos que encontrei na universidade. Em especial, aos amigos de pós graduação Luciene, Ana Carla, Grazielle, Benito, Fábio, Hartmann, Thiago e Walter.

A todos os professores que fizeram parte da minha vida acadêmica.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Em especial, ao meu marido Paulo, por toda compreensão e paciência, e ao meu filho querido Pedro, por ser minha fonte de alegria. Amo vocês!

A todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho e que por ventura eu possa não ter lembrado.

Muito obrigada!

Resumo

A proposta deste trabalho é apresentar resultados para o estudo sistemático de sistemas dinâmicos reversíveis-equivariantes, ou seja, em presença simultânea de simetrias e anti-simetrias. Este é o caso em que o domínio e as equações que regem o sistema são invariantes pela ação de um grupo de Lie compacto Γ formado pelas simetrias e anti-simetrias do problema. Apresentamos métodos de teoria de Singularidades e teoria de invariantes para classificar bifurcações a um parâmetro de pontos de equilíbrio destes sistemas. Para isso, separamos o estudo de aplicações Γ –reversíveis-equivariantes em dois casos: auto-dual e não auto-dual. No primeiro caso, a existência de um isomorfismo linear Γ –reversível-equivariante estabelece uma correspondência entre a classificação de problemas Γ –reversíveis-equivariantes e a classificação de problemas Γ –equivariantes associados, para os quais todos os elementos de Γ agem como simetria. Os resultados obtidos para o caso não auto-dual se baseiam em teoria de invariantes e envolvem técnicas algébricas que reduzem a análise ao caso polinomial invariante. Dois algoritmos simbólicos são estabelecidos para o cálculo de geradores para o módulo das funções anti-invariantes e para o módulo das aplicações reversíveis-equivariantes.

Abstract

The purpose of this work is to present results for the systematic study of reversible-equivariant dynamical systems, namely in simultaneous presence of symmetries and reversing symmetries. This is the case when the domain and the equations modeling the system are invariant under the action of a compact Lie group Γ formed by the symmetries and reversing symmetries of the problem. We present methods in Singularities and Invariant theory to classify one-parameter steady-state bifurcations of these systems. For that, we split the study of the Γ -reversible-equivariant mapping into two cases: self-dual and non self-dual. In the first case, the existence of a Γ -reversible-equivariant linear isomorphism establishes a one-to-one correspondence between the classification of Γ -reversible-equivariant problems and the classification of the associated Γ -equivariant problems, for which all elements in Γ act as symmetries. The results obtained for the non self-dual case are based on Invariant theory and involve algebraic techniques that reduce the analysis to the invariant polynomial case. Two symbolic algorithms are established for the computation of generators for the module of anti-invariant functions and for the module of reversible-equivariant mappings.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Teoria de representação	8
1.1.1 Caracter de uma representação	11
1.1.2 Integração de Haar	12
1.2 Teoria de invariantes e teoria equivariante	15
1.2.1 A teoria de representação de grupos e a associação entre os contextos equivariante e reversível-equivariante	16
1.2.2 Séries de Hilbert e fórmulas de Molien	18
1.2.3 Teoria de caracteres para invariantes e equivariantes	20
2 Uma Visão Geral sobre Sistemas Reversíveis-equivariantes	25
2.1 O contexto reversível-equivariante	26
2.2 Exemplos de campos vetoriais reversíveis-equivariantes	27
2.2.1 Campo vetorial $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante	28
2.2.2 Campo vetorial $\mathbb{O}$ –reversível-equivariante	28
2.2.3 Campo vetorial $\mathbf{Z}_n(\delta)$ –reversível-equivariante	30
2.2.4 Campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante	33
2.2.5 Campo vetorial $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante	36
2.2.6 Campo vetorial $\mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante	37
2.2.7 Campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante	37
3 Teoria Invariante e Algoritmos	41
3.1 Teoria de invariantes e teoria de caracter	42
3.1.1 Funções anti-invariantes	42
3.1.2 Fórmulas de caracter	43
3.2 Algoritmo para o cálculo dos anti-invariantes	50
3.3 Algoritmo para o cálculo dos reversíveis-equivariantes	56

3.4	Exemplos	62
4	A Teoria de Singularidades em Bifurcações Reversíveis-equivariantes	65
4.1	Teoria de Singularidades Γ –equivariante	66
4.1.1	A relação de equivalência	66
4.1.2	Teoria de desdobramento e espaços tangentes	70
4.1.3	A demonstração do Teorema 4.1.11	74
4.2	O caso reversível-equivariante	80
4.2.1	Preservação de estabilidade por Γ –equivalência	87
4.3	A classificação de aplicações reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais . .	88
4.3.1	A relação entre as duas classificações	89
4.4	Bifurcação auto-dual com grupo de simetrias generalizado $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	91
4.4.1	Preservação de estabilidade e $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –equivalência	96
4.5	Bifurcação auto-dual com grupo de simetrias generalizado $\mathbf{D}_4$	100
4.5.1	Preservação de estabilidade e $\mathbf{D}_4$ –equivalência	105
4.6	O Lema dos Ramos Equivariantes generalizado	108
5	Decomposição σ–isotópica e o σ–índice	115
5.1	Decomposição σ –isotópica	116
5.2	Análise do σ –índice	120
5.2.1	A fórmula do σ –índice	120
5.2.2	Análise do σ –índice no caso não auto-dual	123
	Referências Bibliográficas	127
	Lista de Notações	131
	Índice Remissivo	133

Introdução

Na teoria de sistemas dinâmicos equivariantes, os fenômenos investigados são estruturados e classificados pela presença de simetria. Na ciência e na engenharia, a simetria entra de forma natural porque configurações geométricas podem ser simétricas. A descrição formal da ocorrência de simetria num modelo matemático se dá através da teoria de representação de grupos. O ponto principal é que o problema permanece inalterado sob a ação do grupo. Primeiro, as equações diferenciais que regem um tal sistema permanecem inalteradas, ou seja, são equivariantes. Segundo, o domínio tem simetria de todos os elementos deste grupo. Além disso, as simetrias do problema podem depender de alguns parâmetros que têm significados físicos, como temperatura, “aspect ratio”, número de Rayleigh, etc, e é esperado que as soluções e outros fenômenos variem de acordo com a variação destes parâmetros. A teoria de bifurcação lida com o estudo da variação do número e estabilidade dessas soluções em função da mudança dos parâmetros e tem sido foco de intensa pesquisa a análise da presença de simetrias na genericidade de tais fenômenos de bifurcação. Do ponto de vista da dinâmica, simetrias levam trajetórias em trajetórias, preservando a orientação no tempo. Em certos casos, há elementos do grupo que podem levar trajetórias em trajetórias revertendo a direção no tempo. Estes elementos são chamados anti-simetrias, ou reversibilidades. Sistemas dinâmicos com tais propriedades, ou seja, na presença de simetrias (equivariâncias) e anti-simetrias (reversibilidades) são chamados sistemas reversíveis-equivariantes. Se Γ é o grupo de todas as simetrias e anti-simetrias do sistema, o subconjunto das simetrias constitui um subgrupo normal Γ_+ de Γ de índice 2.

O estudo de sistemas dinâmicos com simetrias tem se estabelecido como um ramo importante da teoria de sistemas não lineares. O desenvolvimento deste assunto tem sido motivado pela sua eficiência em explicar bifurcações e fenômenos dinâmicos que são observados em uma classe ampla de sistemas que não seriam esperados se as simetrias não fossem levadas em consideração. Por exemplo, as propriedades simétricas dão uma estrutura para a forma geral dos campos de vetores e afetam a genericidade das bifurcações locais. Contribuições importantes nesta linha foram dadas por Golubitsky, Stewart e Schaeffer com o clássico livro [25], Vanderbauwhede [56], e centenas de outros trabalhos que se originaram a partir de então. A presença de anti-simetrias começou a ser investigada menos intensamente, apesar de sua

relevância e aparecimento em muitas aplicações de interesse físico, como em mecânica Hamiltoniana. Na teoria de sistemas dinâmicos, a importância de uma anti-simetria foi primeiro notada por Birkhoff, que usou reversibilidade em seu estudo do problema restrito de três corpos [5]. Depois do trabalho de Birkhoff e de um trabalho isolado de DeVogelaere [16], os trabalhos de Arnol'd, Sevryuk e Devaney [2, 15, 49] deram um grande impulso nesta direção. Até então, a teoria de bifurcação para sistemas reversíveis tinha sido desenvolvida de um modo menos sistemático do que para sistemas equivariantes. Em muitos artigos, a análise se restringe a sistemas puramente reversíveis (sem equivariância). Nos últimos anos tem havido um significativo desenvolvimento da dinâmica puramente reversível (como em [12, 33, 36, 37, 38, 44, 55]).

Mais recentemente tem havido um grande aumento de interesse pelos sistemas que são simultaneamente reversíveis e equivariantes. O formalismo para o estudo de bifurcações reversíveis-equivariantes está atualmente aparecendo. O início deste programa foi essencialmente a classificação de campos vetoriais lineares reversíveis-equivariantes em termos da teoria de representação de grupos feita por Lamb e Roberts [39]. Vários resultados aparecem também em [8, 9, 13, 33]. O presente trabalho está inserido neste contexto.

Nosso objetivo inicial é estudar sistematicamente singularidades associadas a problemas de bifurcação em sistemas de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0, \quad (1)$$

para $x \in V$, V um espaço vetorial de dimensão finita e $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow V$ um germe de aplicação suave a um parâmetro que comuta e anti-comuta com a ação linear de um grupo de Lie compacto Γ , ou seja,

$$g(\gamma x, \lambda) = \sigma(\gamma)\gamma g(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, \quad (2)$$

onde $\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ é uma representação unidimensional não trivial de Γ . O problema de bifurcação Γ -reversível-equivariante a um parâmetro de pontos de equilíbrio de (1) é o estudo da variação do número e estabilidade das soluções de $g(x, \lambda) = 0$ com a variação do parâmetro λ . O ponto de partida é o reconhecimento de um problema Γ -reversível-equivariante como um problema equivariante sob ações distintas de Γ na fonte e na meta. Mais especificamente, a ação de Γ na meta é a ação dual de Γ na fonte (Definição 2.1.1). Isto conduz o nosso trabalho a uma análise separada em dois casos: o caso *auto-dual* e o caso *não auto-dual*.

O formalismo do estudo de bifurcações puramente Γ -equivariantes (tomando $\sigma(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$) desenvolvido em [25], pode ser estendido a este contexto mais geral e, assim como lá, as técnicas aplicadas para analisar, reconhecer e classificar problemas de bifurcação em presença de simetrias e anti-simetrias recaem em técnicas de Singularidades e de teoria de

invariantes. Em todo este estudo, pressupõe-se que as equações estão numa forma reduzida. Tais equações, por sua vez, têm uma forma geral bem determinada uma vez conhecido o grupo de simetrias e anti-simetrias. Para se construir o campo de vetores genérico para uma determinada representação de um grupo sobre um espaço vetorial, é necessário se conhecer a teoria invariante para aquela particular representação. Usando a teoria de classificação de germes finitamente determinados, o campo é representado por um germe de polinômio de um certo grau. Desta forma, para um fixo (mas arbitrário) k , tem-se que construir uma base para o espaço das aplicações polinomiais homogêneas equivariantes (em presença de simetrias) ou reversíveis-equivariantes (em presença de simetrias e anti-simetrias) de grau i para cada $i \leq k$ e então escrever a aplicação polinomial geral de grau k como combinação linear daqueles elementos da base com coeficientes reais. Este é, entretanto, um problema difícil em teoria invariante e, na maioria dos casos, ele é tratável somente através de programas de computação simbólica. Em [23], Gatermann trata em detalhes da teoria invariante algorítmica com aplicações em sistemas dinâmicos equivariantes. Uma questão central nesta linha é, portanto, a obtenção do número de funções polinomiais homogêneas invariantes de um certo grau fixo que são independentes e também do número de aplicações polinomiais homogêneas reversíveis-equivariantes de um certo grau fixo. Fórmulas para o número de invariantes e reversíveis-equivariantes pela ação de um grupo de Lie compacto Γ sobre um espaço vetorial V se tornam muito úteis neste estudo, sendo usadas para se verificar se todos os possíveis invariantes e reversíveis-equivariantes foram obtidos na busca da forma geral do campo de vetores. Sattinger [48] obtém fórmulas para o número de possíveis termos equivariantes em bifurcação de pontos de equilíbrio através do *character* (traço) da representação de Γ . Em [1] Antoneli *et al.* obtém fórmulas que também envolvem o *character* da representação para equivariantes em bifurcação de Hopf. No presente trabalho, obtemos fórmulas alternativas para o cálculo do número de funções anti-invariantes e do número de aplicações reversíveis-equivariantes. O uso destas fórmulas de *character* apresenta vantagens com relação ao uso de matrizes da representação. Por exemplo, o *character* de uma representação é único, ao passo que suas matrizes não. Além disso, os caracteres das representações irredutíveis de muitos grupos finitos aparecem catalogados na literatura e se tornam de uso mais simples que o uso de matrizes. É também fato que o cálculo com caracteres é, hoje em dia, padrão em alguns pacotes de álgebra computacional, como o GAP [22] e o *Singular* [50], de forma que estas fórmulas podem tornar o cálculo dos invariantes e reversíveis-equivariantes mais rápido e mais simples. No programa *Singular* há uma função que calcula os geradores de invariantes, sendo necessário fornecer apenas os geradores do grupo finito, que pode ser matricial ou permutacional. No caso dos geradores equivariantes, é necessário reduzir ao caso de invariantes no espaço cartesiano. No programa GAP há uma função para calcular as séries de Hilbert dos invariantes e dos equivariantes, sendo necessário fornecer, além dos geradores do grupo, o

caracter da representação. Os algoritmos para o cálculo de invariantes apresentados em [53] e para o cálculo de equivariantes apresentados em [57] fazem uso da série de Hilbert, função geradora para a dimensão dos espaços de invariantes e de equivariantes de cada grau, respectivamente, e são desenvolvidos para grupos finitos. Em particular para o caso equivariante, algoritmos são obtidos em [17] quando o grupo de simetrias é um produto coroa, em [18] no contexto de simetrias ocultas, e outros [23, 53, 57].

Os métodos da teoria de Singularidades desenvolvidos aqui consistem de ferramentas algébricas para a classificação de bifurcações reversíveis-equivariantes sob uma relação de equivalência que preserva as simetrias e anti-simetrias de g em (1). Uma vez que o grupo de equivalências é um subgrupo geométrico do grupo $\mathcal{K}$ de equivalência de contato de Mather, ele herda propriedades de $\mathcal{K}$ de forma que os resultados sobre versalidade e determinação finita são válidos neste contexto [14].

No caso auto-dual, existe um isomorfismo linear Γ –reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ que estabelece uma correspondência um-a-um entre as classificações de bifurcações nos contextos puramente equivariante e reversível-equivariante. Além disso, a existência de tal isomorfismo implica que as equações e os ramos de soluções dos diagramas de bifurcação são os mesmos. Por outro lado, a estabilidade das soluções não é preservada em geral. De fato, na presença de anti-simetrias uma solução estável pode ocorrer apenas se seu subgrupo de isotropia não contém anti-simetrias (Lema 2.1.5). Entretanto, o isomorfismo L tem um importante papel na obtenção da estabilidade (ou instabilidade) para um caso a partir do outro.

No caso não auto-dual, não existe uma tal correspondência com o contexto puramente equivariante e nosso trabalho trata da obtenção de ferramentas algébricas da teoria de invariantes para o cálculo dos geradores reversíveis-equivariantes em V . O primeiro passo para o estudo da estrutura de g em (1) satisfazendo (2) é a determinação de tais geradores. Resultados algébricos foram estabelecidos de um modo sistemático reduzindo o estudo ao caso invariante polinomial. Descrevemos um algoritmo simbólico para a determinação de geradores dos anti-invariantes, que são funções a valores reais que não são invariantes pela ação de Γ , mas possuem uma propriedade de equivariância fundamental em nosso contexto. Além disso, outro algoritmo é dado para o cálculo efetivo dos geradores reversíveis-equivariantes em termos dos geradores dos anti-invariantes e dos equivariantes sob a ação do subgrupo Γ_+ formado pelas simetrias de Γ .

A contribuição desta tese está focada em fornecer um método algébrico e em ampliar os métodos de Singularidades para o estudo da estrutura de sistemas dinâmicos não lineares em presença simultânea de simetrias e anti-simetrias. As semelhanças e diferenças entre sistemas puramente equivariantes e sistemas reversíveis-equivariantes tinham sido até o presente momento pouco exploradas. Acreditamos que nosso estudo sistemático sobre a relação entre ambos os contextos foi essencial para esclarecer estes pontos. Este trabalho se insere numa

área promissora e esperamos que os resultados obtidos possam ser de real interesse no estudo local e global de sistemas dinâmicos puramente reversíveis e reversíveis-equivariantes.

O texto é organizado da seguinte forma: No Capítulo 1, introduzimos algumas notações básicas, definições e resultados nos contextos equivariante, reversível e reversível-equivariante. No Capítulo 2, exploramos o comportamento de um sistema diferencial sob a ação simultânea de simetrias e anti-simetrias, analisando a estrutura geral de campos vetoriais reversíveis-equivariantes. Uma série de exemplos no plano foram analisados com a ajuda do software P4 ([3]), para ilustrar diferenças típicas de campos vetoriais puramente equivariantes. No Capítulo 3, combinamos teoria de invariantes e teoria de caracter para obter a dimensão do espaço vetorial de aplicações polinomiais homogêneas anti-invariantes e reversíveis-equivariantes de um dado grau. Além disso, descrevemos os algoritmos tratados, restringindo a análise da teoria reversível-equivariante ao caso invariante polinomial. No Capítulo 4, adaptamos os métodos de Singularidades para a classificação de germes Γ -equivariantes a um parâmetro $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$, para espaços vetoriais de dimensões finitas V e W sob ações arbitrárias de Γ . O caso reversível-equivariante (auto-dual ou não) é então um caso particular de tal teoria. Na Seção 4.3, classificamos problemas de bifurcação reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais. A abordagem da teoria de Singularidades para tal classificação foi baseada na existência do isomorfismo reversível-equivariante L mencionado acima. As classificações para problemas de bifurcação auto-duais $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes no plano (Seções 4.4 e 4.5, respectivamente) foram feitas em detalhes. O caso não auto-dual é mais sutil e a teoria de Singularidades geral desenvolvida na Seção 4.2 deve ser aplicada. No Capítulo 5, fornecemos uma expressão algébrica em termos da integral de Haar sob Γ para o σ -índice $s_V(\Sigma)$ de um subgrupo fechado $\Sigma \subseteq \Gamma$ em V (Definição 4.6.2). Na Subseção 5.2.2, obtemos outra expressão para $s_V(\Sigma)$ em termos dos σ -índices de Σ nos subespaços Γ -irredutíveis não auto-duais de V .

Preliminares

O estudo de muitos fenômenos naturais com propriedades de simetria pode ser significativamente simplificado se tais propriedades são levadas em consideração no modelo matemático. Anti-simetrias são igualmente exploradas na ciência natural e aparece, por exemplo, em mecânica clássica, mecânica quântica e termodinâmica.

A noção convencional de presença de simetria, ou equivariância, em equações diferenciais consiste de transformações no retrato de fase que deixam as equações de movimento invariantes. Tais transformações simétricas aplicam trajetórias de um sistema dinâmico em outras trajetórias do mesmo sistema. Na Figura 1.1(a) todas as rotações em torno da origem são simetrias e na Figura 1.1(b) a reflexão com respeito ao eixo x é uma simetria.

Anti-simetrias em um sistema dinâmico são transformações do retrato de fase que aplicam trajetórias sobre outras trajetórias revertendo a direção no tempo. Obviamente, no retrato de fase esta reversão corresponde a uma inversão das flechas. Na Figura 1.1(a) a reflexão com respeito ao eixo x é uma anti-simetria e na Figura 1.1(b) a rotação de ângulo $\pi/2$ em torno da origem é uma anti-simetria.

Figura 1.1: Retratos de fase de dois tipos de fluxos de campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$ possuindo simetrias e anti-simetrias.

Neste capítulo, discutimos os conceitos que envolvem a ocorrência de simetrias e anti-simetrias em sistemas dinâmicos, começando com a introdução das ferramentas essenciais básicas na teoria de representação de grupos e na teoria de invariantes polinomiais. Também, introduzimos as definições, notações e resultados-chave a respeito das teorias puramente equivariante e reversível-equivariante. Assumimos familiaridade com conceitos elementares de grupo.

1.1 Teoria de representação

As simetrias de um sistema dinâmico regido por equações diferenciais ordinárias ou parciais são especificadas em termos de um grupo de transformações que preservam a estrutura da equação. Este grupo é conhecido como *grupo de simetrias* do sistema e em nosso estudo é essencial descrever sua estrutura abstrata e sua ação no espaço das variáveis.

Seja Γ um grupo de Lie compacto e V um espaço vetorial de dimensão finita. Definimos a *ação* de Γ em V como uma aplicação contínua $\Gamma \times V \rightarrow V$, $(\gamma, x) \mapsto \gamma x$, tal que:

- (a) Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\rho(\gamma) : V \rightarrow V$ definida por $\rho(\gamma)x = \gamma x$ é linear;
- (b) Se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ então $\gamma_1(\gamma_2 x) = (\gamma_1 \gamma_2)x$.

Denotamos por $GL(V)$ o espaço vetorial das aplicações lineares invertíveis $V \mapsto V$. A uma ação de Γ em V corresponde um homomorfismo linear de grupos

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\rightarrow GL(V) \\ \gamma &\mapsto \rho(\gamma) \end{aligned},$$

chamado *representação* de Γ em V . Vamos denotar por (ρ, V) o espaço vetorial V sob a representação ρ de Γ .

A integração de Haar [25, 32, 47] é uma forma de integração sobre grupos localmente compactos invariante sob translação por elementos do grupo e é uma das ferramentas fundamentais em teoria de representação. Considere $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A operação $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$, ou $\int_{\Gamma} f$, é uma *integral de Haar* em Γ se satisfaz:

- (a) Linearidade: $\int_{\Gamma}(af + bg) = a \int_{\Gamma} f + b \int_{\Gamma} g$ onde $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas e $a, b \in \mathbb{R}$;
- (b) Positividade: Se $f(\gamma) \geq 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $\int_{\Gamma} f \geq 0$;
- (c) Invariância por translação:

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma),$$

para todo $\delta \in \Gamma$ fixado.

A integral de Haar existe e é única a menos de uma constante (veja por exemplo, [32, p. 9] ou [47, II, Theorem 1]). Como Γ é compacto, temos $\int_{\Gamma} 1 < \infty$; assim, podemos assumir a integral de Haar normalizada: $\int_{\Gamma} 1 = 1$. Para grupos compactos, toda integral de Haar invariante por translações à esquerda é também invariante por translações à direita ($\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$, para $\delta \in \Gamma$ fixo) e vice-versa. Usando a integral de Haar construímos um produto interno Γ -invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ em V , isto é,

$$\langle \gamma v, \gamma w \rangle_{\Gamma} = \langle v, w \rangle_{\Gamma}, \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ e } v, w \in V,$$

de modo que podemos indentificar Γ com um subgrupo fechado do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ [25, Proposition XII. 1.3]. Portanto, podemos assumir Γ um grupo de Lie compacto agindo ortogonalmente em V .

Fixemos agora um homomorfismo

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}. \quad (1.1)$$

Notemos que σ define uma representação unidimensional de Γ . Denotamos $\Gamma_+ = \ker \sigma$ e Γ_- o complementar de Γ_+ em Γ . Quando σ é sobrejetor, $\Gamma_- \neq \emptyset$ e $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$ é um subgrupo normal de $\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \Gamma_-$ de índice 2. Além disso, a topologia quociente em Γ/Γ_+ induzida de Γ coincide com a topologia discreta em Γ/Γ_+ . Isto implica que σ é, de um modo natural, contínuo e aberto quando $\{-1, 1\}$ é dotado da topologia discreta. Quando σ não é sobrejetor, ou seja, $\Gamma_- = \emptyset$ e $\Gamma_+ = \Gamma$, temos também σ contínuo e aberto.

Motivados pelo estudo da dinâmica reversível-equivariante, damos a seguinte definição:

Definição 1.1.1. *Seja o homomorfismo σ como em (1.1). Então, um elemento de $\Gamma_+ = \ker \sigma$ é chamado simetria de Γ e um elemento de Γ_- é chamado anti-simetria de Γ .*

Notemos que a composição de duas simetrias ou duas anti-simetrias é uma simetria; a composição de uma simetria e uma anti-simetria é uma anti-simetria; se γ é uma simetria (respectivamente, anti-simetria), então γ^{-1} também é. Então, Γ_- não constitui um grupo e é dado por $\Gamma_- = \delta \Gamma_+$, para $\delta \in \Gamma_-$ fixado.

Definição 1.1.2. *Seja ρ uma representação de Γ em V . Dado o homomorfismo σ de (1.1), definimos a representação*

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma} : \Gamma &\rightarrow GL(V) \\ \gamma &\mapsto \sigma(\gamma)\rho(\gamma) \end{aligned} \quad (1.2)$$

como a representação dual de ρ .

A ação correspondente da representação dual ρ_{σ} é chamada *ação dual* de Γ em V e é escrita como $(\gamma, x) \mapsto \rho_{\sigma}(\gamma)x$. Note que $(\rho_{\sigma})_{\sigma} = \rho$.

Duas representações ρ e η de Γ são isomorfas, ou os espaços (ρ, V) e (η, W) são Γ -isomorfos, se existir um isomorfismo linear $A : V \rightarrow W$ tal que

$$A(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)A(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

A estrutura de uma representação de um grupo de Lie compacto em um espaço de dimensão finita permite a decomposição deste espaço em uma soma direta de representações chamadas *irredutíveis*. Isto garante a existência de componentes que combinam todas as representações irredutíveis que estão em uma classe de isomorfismo fixa, chamadas *componentes isotópicas*. Estes resultados são dados nos Teoremas 1.1.3 e 1.1.4 abaixo.

Dizemos que um subespaço $U \subseteq V$ é Γ -invariante se $\gamma u \in U$ para todo $u \in U$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Se além disso, os únicos subespaços Γ -invariantes de U são os triviais $\{0\}$ e U , então a representação de Γ em U é chamada *irredutível* e U é chamado subespaço Γ -irredutível de V . Subespaços Γ -invariantes admitem um complementar em V também Γ -invariante ([25, XII, Proposition 2.1]); segue deste fato o seguinte resultado dado em [25, XII, Corollary 2.2]:

Teorema 1.1.3. (Teorema de redutibilidade completa) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existem subespaços Γ -irredutíveis $U_1, \dots, U_s$ de V tal que*

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s.$$

Existem condições que garantem a unicidade de tal decomposição:

Teorema 1.1.4. ([25, XII, Theorem 2.5]) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V .*

- (a) *A menos de Γ -isomorfismos existe um número finito de subespaços Γ -irredutíveis $U_i \subset V$, $i = 1, \dots, t$, com U_i não Γ -isomorfo a U_j se $i \neq j$.*
- (b) *Seja V_k a soma de todos os subespaços Γ -irredutíveis de V que são Γ -isomorfos a U_k . Então,*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_t. \tag{1.3}$$

Os subespaços V_k acima são chamados *componentes isotópicas* de V e a decomposição (1.3) é chamada *decomposição isotópica*. Por definição, as componentes isotópicas são únicas e têm uma decomposição como uma soma direta de irredutíveis isomorfos. Assim, se $U \subset V$ é um subespaço Γ -irredutível, então $U \subset V_i$ para um único $i \in \{1, \dots, t\}$.

Mencionamos agora duas noções usadas para descrever os aspectos de uma representação de um grupo de Lie compacto, a saber, a *órbita da ação* de Γ em $x \in V$, dada pelo conjunto

$\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$ e o *subgrupo de isotropia* de $x \in V$, definido como

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}.$$

Os subgrupos de isotropia de pontos numa mesma órbita de Γ são conjugados ([25, XIII, Lemma 1.1]):

$$\Sigma_{\gamma x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}.$$

1.1.1 Caracter de uma representação

O *caracter* de uma representação (ρ, V) é uma função que associa a cada elemento de um grupo Γ um elemento do corpo do espaço de representação V . A teoria de caracter é uma ferramenta essencial em teoria invariante e sustenta propriedades importantes do grupo. Parte desta teoria, apresentada a seguir, está contida em [6, 21, 35, 48]. Em particular, para grupos de Lie compactos veja [6].

Dada a representação linear (real ou complexa) ρ de Γ em V , o *caracter* correspondente é uma função $\chi_V : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_V(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)),$$

onde $\text{tr}(\rho(\gamma))$ denota o traço da matriz de $\rho(\gamma)$.

Lema 1.1.5. *Representações isomorfas têm os mesmos caracteres.*

Demonstração: Sejam (ρ, V) e (η, W) duas representações isomorfas segundo o isomorfismo $A : V \rightarrow W$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\rho(\gamma) = A^{-1}\eta(\gamma)A,$$

o que implica em

$$\chi_V(\gamma) = \text{tr}(\rho(\gamma)) = \text{tr}(A^{-1}\eta(\gamma)A) = \text{tr}(\eta(\gamma)) = \chi_W(\gamma),$$

como desejado. □

Para $\gamma, \delta \in \Gamma$ temos

$$\chi_V(\gamma\delta\gamma^{-1}) = \chi_V(\delta),$$

de modo que χ_V é constante nas classes de conjugação de Γ . Além disso, para todo $\gamma \in \Gamma$, se V é um espaço vetorial real sob uma ação ortogonal de Γ , então $\chi_V(\gamma^{-1}) = \chi_V(\gamma)$. Se V é um espaço vetorial complexo sob uma ação ortogonal de Γ , então $\chi_V(\gamma^{-1}) = \chi_V(\bar{\gamma}) = \overline{\chi_V(\gamma)}$.

Para Γ agindo em dois espaços vetoriais de dimensão finita V e W (reais ou complexos), com caracteres χ_V e χ_W , respectivamente, definimos um produto interno sobre caracteres:

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \int_{\Gamma} \chi_V(\gamma) \overline{\chi_W(\gamma)} = \int_{\Gamma} \chi_V(\gamma) \chi_W(\gamma^{-1}).$$

Com respeito a este produto interno, os caracteres de representações irredutíveis não isomorfas são ortonormais e vale a relação $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \langle \chi_W, \chi_V \rangle$ ([35, Proposition 14.5]).

Lembramos agora que o *subespaço de ponto fixo* de um subgrupo Σ de um grupo de Lie compacto Γ em V é o subespaço linear definido por

$$\text{Fix}_V(\Sigma) = \{x \in V : \gamma x = x, \forall \gamma \in \Sigma\}.$$

O seguinte lema fornece uma expressão algébrica para calcular a dimensão de $\text{Fix}_V(\Sigma)$ usando integração de Haar e teoria de caracter ([25, Theorem XIII 2.3]):

Lema 1.1.6. (Fórmula do traço) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo de Lie. Então,*

$$\dim \text{Fix}_V(\Sigma) = \int_{\Sigma} \chi_V(\gamma). \quad (1.4)$$

Se Σ for finito, então (1.4) fica

$$\dim \text{Fix}_V(\Sigma) = \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\gamma \in \Sigma} \text{tr}(\rho(\gamma)),$$

onde $|\Sigma|$ denota a ordem de Σ .

1.1.2 Integração de Haar

Como mencionamos antes, a integração de Haar sustenta propriedades fundamentais em teoria de representação de grupos, algumas delas consequência imediata da existência e unicidade da integral de Haar. Apresentamos a seguir um resultado em teoria de integração sobre grupos localmente compactos.

Seja Υ um grupo e Ω um conjunto arbitrário. Denotamos por Ω^{Υ} o conjunto das funções definidas em Υ com valores em Ω . Se $\epsilon \in \Upsilon$ e $f \in \Omega^{\Upsilon}$, a *translação à esquerda* ϵf é a função em Ω^{Υ} definida por

$$(\epsilon f)(\gamma) = f(\epsilon^{-1}\gamma), \quad \forall \gamma \in \Upsilon.$$

Analogamente, a *translação à direita* $f\epsilon$ é a função em Ω^{Υ} definida por

$$(f\epsilon)(\gamma) = f(\gamma\epsilon^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Upsilon.$$

Dada uma função f a valores reais definida em um espaço topológico M , definimos o *suporte* de f como o fecho do conjunto de pontos em M onde f não se anula. Em outras palavras, o suporte de f pode ser caracterizado como o menor subconjunto fechado fora do qual f se anula identicamente.

Teorema 1.1.7. ([47, II, Section 5]) *Sejam Υ e $\mathcal{K}$ dois grupos localmente compactos e $\pi : \Upsilon \rightarrow \mathcal{K}$ um homomorfismo contínuo e aberto de Υ sobre $\mathcal{K}$ com kernel $\mathcal{H}$. Seja $f : \Upsilon \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com suporte compacto em Υ . Então, a toda integral de Haar invariante por translações à esquerda em $\mathcal{H}$ e a toda integral de Haar invariante por translações à esquerda em $\mathcal{K}$, corresponde uma integral de Haar invariante por translações à esquerda em Υ tal que*

$$\int_{\Upsilon} f(\gamma) = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}(k),$$

onde $\bar{f} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ é a única função contínua tal que

$$\bar{f}(\pi(\gamma)) = \int_{h \in \mathcal{H}} f(\gamma h). \quad (1.5)$$

Demonstração: Definimos

$$\begin{aligned} f' : \Upsilon &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_{\mathcal{H}} f(\gamma h). \end{aligned}$$

A função f' é constante sobre as classes laterais de $\mathcal{H}$ em Υ . De fato, para todo $\bar{h} \in \mathcal{H}$,

$$f'(\gamma \bar{h}) = \int_{\mathcal{H}} f(\gamma \bar{h} h) = \int_{\mathcal{H}} f(\gamma h) = f'(\gamma).$$

Então existe uma única função $\bar{f} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{f}(\pi(\gamma)) = \int_{\mathcal{H}} f(\gamma h) = f'(\gamma).$$

Como f' é contínua em Υ ([47, I, Section 14, Lemma 2]), $\bar{f}$ é contínua em $\mathcal{K}$. Além disso, a imagem por π do suporte de f contém o suporte de $\bar{f}$, que consequentemente, é compacto. Assim, $\bar{f}$ é uma função contínua com suporte compacto em $\mathcal{K}$. Notamos que se $f \geq 0$, então $\bar{f} \geq 0$; se além disso, $f \neq 0$ então $\bar{f} \neq 0$. Se definirmos

$$\int_{\Upsilon} f(\gamma) = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}(k),$$

obtemos uma integral positiva em Υ que é invariante por translações à esquerda. De fato, tome $\epsilon \in \Upsilon$. Então,

$$\epsilon \bar{f}(\pi(\gamma)) = \int_{\mathcal{H}} (\epsilon f)(\gamma h) = \int_{\mathcal{H}} f(\epsilon^{-1} \gamma h) = \bar{f}(\pi(\epsilon^{-1} \gamma)) = \bar{f}(\pi(\epsilon)^{-1} \pi(\gamma)) = (\pi(\epsilon) \bar{f})(\pi(\gamma)),$$

donde $\overline{\epsilon f} = \pi(\epsilon)\bar{f}$. Segue então que

$$\int_{\Upsilon} f(\epsilon^{-1}\gamma) = \int_{\Upsilon} \epsilon f(\gamma) = \int_{\mathcal{K}} \overline{\epsilon f}(k) = \int_{\mathcal{K}} (\pi(\epsilon)\bar{f})(k) = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}(\pi(\epsilon)^{-1}k) = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}(k) = \int_{\Upsilon} f(\gamma).$$

Portanto, se f é contínua com suporte compacto e vale (1.5), a toda integral de Haar invariante por translações à esquerda em $\mathcal{H}$ e a toda integral de Haar invariante por translações à esquerda em $\mathcal{K}$, corresponde uma integral de Haar invariante por translações à esquerda em Υ tal que $\int_{\Upsilon} f(\gamma) = \int_{\mathcal{K}} \bar{f}(k)$. $\square$

A partir do teorema acima, podemos obter o resultado seguinte que será usado nos Capítulos 3 e 5, juntamente com a teoria de caracter, para a obtenção da dimensão de espaços vetoriais de polinômios homogêneos e de subespaços de ponto fixo, respectivamente.

Corolário 1.1.8. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie fechado. Seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua a valores reais. Então,*

$$\int_{\Sigma} f(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} f(\gamma) + \int_{\Sigma_+} f(\delta\gamma) \right],$$

para $\delta \in \Sigma_-$ fixo.

Demonstração: Sejam $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e

$$\begin{aligned} \pi = \sigma|_{\Sigma} : \quad \Sigma &\rightarrow \mathbf{Z}_2 \\ \Sigma_+ &\mapsto 1 \\ \Sigma_- &\mapsto -1 \end{aligned}$$

o homomorfismo contínuo e aberto de Σ sobre $\mathbf{Z}_2$, onde $\Sigma_+ = \Sigma \cap \Gamma_+$ e $\Sigma_- = \Sigma \cap \Gamma_-$. A compacidade de Σ implica que o suporte de f

$$\text{supp } f = \overline{\{\gamma \in \Sigma : f(\gamma) \neq 0\}}$$

é compacto. Então, do Teorema 1.1.7, existe uma única função contínua $\bar{f} : \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\Sigma} f(\gamma) = \int_{\mathbf{Z}_2} \bar{f}(\kappa), \tag{1.6}$$

onde $\bar{f}(\pi(\gamma)) = \int_{\Sigma_+} f(\gamma\bar{\gamma})$, para todo $\gamma \in \Sigma$. Tomamos particularmente a identidade em Σ e fixamos $\delta \in \Sigma_-$ para obter

$$\bar{f}(1) = \int_{\Sigma_+} f(\gamma) \quad \text{e} \quad \bar{f}(-1) = \int_{\Sigma_+} f(\delta\gamma).$$

Portanto, (1.6) torna-se

$$\int_{\Sigma} f(\gamma) = \frac{1}{2}(\bar{f}(1) + \bar{f}(-1)) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} f(\gamma) + \int_{\Sigma_+} f(\delta\gamma) \right],$$

como desejado. □

1.2 Teoria de invariantes e teoria equivariante

Em presença de simetrias a determinação das funções invariantes pela ação do grupo de simetrias Γ sobre o espaço vetorial V é o primeiro passo para o estudo da estrutura de um sistema de equações em V invariantes pela ação de Γ . De igual importância é a obtenção dos geradores das aplicações equivariantes em V . Em alguns casos, obtemos informação sobre tais geradores sem ter que efetivamente calculá-los. Uma das principais ferramentas nesta direção é a *série de Hilbert*, também conhecida como *função geradora de Molien* para a dimensão do espaço de invariantes e de equivariantes de um dado grau.

Nesta seção, apresentamos os resultados essenciais em teoria de invariantes e teoria equivariante de grupos de Lie compactos. Os primeiros são o Teorema de Hilbert-Weyl, que afirma que o anel das funções polinomiais invariantes é gerado por um conjunto finito de elementos, e o Teorema de Schwarz, que fornece uma descrição de germes invariantes de funções C^∞ com base no resultado de Hilbert e Weyl. Também apresentamos o Teorema de Molien e sua versão equivariante, que fornecem fórmulas explícitas para a série de Hilbert como uma integral de Haar sob o grupo. Finalizamos com um resultado de Sattinger [48] que estabelece uma fórmula para a dimensão dos espaços de funções invariantes e aplicações equivariantes de um dado grau. No que segue, Γ é um grupo de Lie compacto agindo linearmente e ortogonalmente em dois espaços vetoriais de dimensão finita V e W , com representações (ρ, V) e (η, W) .

Começamos lembrando que uma função a valores reais $f : V \mapsto \mathbb{R}$ é *invariante* sob a ação do grupo Γ , ou é Γ -*invariante*, se

$$f(\rho(\gamma)x) = f(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V.$$

Denotamos por $\mathcal{P}(\Gamma)$ o anel de polinomiais Γ -invariantes e por $\mathcal{E}(\Gamma)$ o anel dos germes de funções C^∞ na origem Γ -invariantes.

Dizemos que um subconjunto finito de polinomiais Γ -invariantes $u_1, \dots, u_s$ gera $\mathcal{P}(\Gamma)$ se todo polinômio invariante pode ser escrito como uma função polinomial de $u_1, \dots, u_s$. Este conjunto finito de geradores para $\mathcal{P}(\Gamma)$, que não é necessariamente único, é chamado *base de*

Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. Os Teoremas de Hilbert-Weyl e de Schwarz são enunciados como segue ([25, XII, Theorems 4.2 and 4.3]):

Teorema 1.2.1. (Teorema de Hilbert-Weyl) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe uma base de Hilbert finita para $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

Teorema 1.2.2. (Teorema de Schwarz) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Seja $u_1, \dots, u_s$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. Seja $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Então existe um germe suave $h \in \mathcal{E}_s$ tal que $f(x) = h(u_1(x), \dots, u_s(x))$.*

Dizemos que um conjunto de polinomiais Γ -invariantes tem uma *relação* se existe um polinômio não nulo $r : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$r(u_1(x), \dots, u_s(x)) \equiv 0.$$

O anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um *anel polinomial* se ele tem uma base de Hilbert sem relações.

1.2.1 A teoria de representação de grupos e a associação entre os contextos equivariante e reversível-equivariante

Considere um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} + g(x) = 0, \tag{1.7}$$

onde $g : (V, 0) \rightarrow W$ representa um germe de aplicação suave na origem.

Dizemos que uma aplicação $g : V \rightarrow W$ é Γ -equivariante, ou *comuta* com Γ , se

$$g(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \tag{1.8}$$

Lema 1.2.3. (Lema de Schur) *Sejam (ρ, V) e (η, W) representações irredutíveis de Γ e $\varphi : V \rightarrow W$ uma aplicação linear Γ -equivariante. Então, ou φ é invertível ou é identicamente nula.*

Demonstração: Veja [6, II, Theorem 1.10]. □

Denotamos por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ o módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes de V a W sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ e por $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V, W)$ o módulo dos germes de aplicações Γ -equivariantes $g : (V, 0) \rightarrow W$ sob o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$. Dizemos que as aplicações polinomiais Γ -equivariantes $g_1, \dots, g_r$ geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ se qualquer aplicação Γ -equivariante $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ pode ser escrita como

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_r g_r, \tag{1.9}$$

para certos polinomiais $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Se além disso, a relação

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r \equiv 0$$

implica em $f_1 \equiv \dots \equiv f_r \equiv 0$, então dizemos que $g_1, \dots, g_r$ geram livremente o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ sob $\mathcal{P}(\Gamma)$ e que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ é um *módulo livre*. Neste caso, toda $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ tem uma representação única em termos de $g_1, \dots, g_r$ como em (1.9). A definição análoga é feita para $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V, W)$ sob $\mathcal{E}(\Gamma)$. O seguinte teorema [25, XII, §6(c)] é a versão equivariante do Teorema 1.2.1 e do Teorema 1.2.2.

Teorema 1.2.4. (Teorema de Poënar) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então,*

- (a) *existe um conjunto finito de polinomiais Γ -equivariantes $g_1, \dots, g_r$ que gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$;*
- (b) *se $g_1, \dots, g_r$ são geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, então $g_1, \dots, g_r$ geram o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V, W)$ sob o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.*

Quando $(\eta, W) = (\rho, V)$, dizemos que g em (1.8) é *puramente equivariante* (ou simplesmente equivariante) e, neste caso, $\Gamma = \Gamma_+$ é conhecido como o *grupo de simetrias* de g . Um dos aspectos importantes de aplicações puramente equivariantes é que sua equivariância as força ter subespaços lineares invariantes ([25, XIII, Lemma 2.1]). Mais especificamente, se $g : V \rightarrow V$ é uma aplicação puramente equivariante, então

$$g(\text{Fix}_V(\Sigma)) \subseteq \text{Fix}_V(\Sigma),$$

para $\Sigma \subseteq \Gamma$ subgrupo.

Considere o homomorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ dada por (1.1) sobrejetor. Dizemos que uma aplicação $g : V \rightarrow V$ é Γ -reversível-equivariante, ou *comuta e anti-comuta* com Γ , se

$$g(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (1.10)$$

Observação 1.2.5. *A condição de reversibilidade-equivariância dada em (1.10) pode ser escrita como*

$$g(\rho(\gamma)x) = \rho_\sigma(\gamma)g(x), \quad (1.11)$$

onde ρ_σ é a representação dual de Γ em V definida em (1.2). Portanto, segue que uma aplicação Γ -reversível-equivariante é uma aplicação Γ -equivariante de (ρ, V) em (ρ_σ, V) , ou seja, considerando a ação de Γ na meta igual à ação dual de Γ na fonte. O reconhecimento deste fato é o ponto-chave para a obtenção de vários de nossos resultados no contexto reversível-equivariante, que vamos tratar nos próximos capítulos.

No caso reversível-equivariante, Γ_- é diferente de vazio e Γ é chamado *grupo de simetrias generalizado*. Notemos que quando σ em (1.1) não é sobrejetor, g em (1.10) é puramente equivariante e a ação de Γ na meta e na fonte são idênticas. Quando $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_2$ e a identidade é a única simetria de Γ , chamamos g em (1.10) *puramente reversível*. Em ambos os casos puramente equivariante e puramente reversível, para cada $\gamma \in \Gamma$ o retrato de fase de (1.7) é simétrico com respeito ao subespaço de ponto fixo

$$\text{Fix}(\gamma) = \{x \in V : \gamma x = x\},$$

com direção das flechas preservada se $\gamma \in \Gamma_+$ e invertida se $\gamma \in \Gamma_-$. Além disso, se $\gamma \in \Gamma_+$, então $\text{Fix}(\gamma)$ é invariante sob a dinâmica do sistema. Se $\gamma \in \Gamma_-$, $\text{Fix}(\gamma)$ não é invariante sob a dinâmica, mas pode dar origem a órbitas periódicas simétricas, homoclínicas e heteroclínicas. Em particular, se uma órbita regular intercepta $\text{Fix}(\gamma)$ em dois pontos distintos então esta é uma órbita periódica [36].

Em alguns casos o conceito de reversibilidade de um campo vetorial está ligado ao de uma involução. Uma involução é um germe de um difeomorfismo C^∞ na origem $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ satisfazendo $\varphi^2 = Id$. Pelo que vimos acima, um sistema puramente reversível não possui simetrias não triviais e, portanto, sua única anti-simetria deve ser uma involução.

Denotamos por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ o módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes definidos em V sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, por $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ o módulo dos germes de aplicações Γ -equivariantes $h : (V, 0) \mapsto V$ sob o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$, por $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ o espaço de aplicações polinomiais Γ -reversíveis-equivariantes em V sob $\mathcal{P}(\Gamma)$ e por $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$ o espaço de germes de aplicações Γ -reversíveis-equivariantes em V sob $\mathcal{E}(\Gamma)$. É direto que $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ (respectivamente, $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$) é um módulo sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ (respectivamente, $\mathcal{E}(\Gamma)$). Segue do Teorema 1.2.4 que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ (respectivamente, $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$) é um módulo finitamente gerado sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ (respectivamente, $\mathcal{E}(\Gamma)$). Da Observação 1.2.5 segue também que $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ (respectivamente, $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$) é um módulo finitamente gerado sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ (respectivamente, $\mathcal{E}(\Gamma)$).

1.2.2 Séries de Hilbert e fórmulas de Molien

Mencionamos nesta subseção resultados de teoria invariante relacionados às séries de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$. Informações adicionais a respeito da estrutura de $\mathcal{P}(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ são obtidas através de tais resultados. Como consequência dos Teoremas 1.2.2 e 1.2.4, restringimos nossa atenção a polinômios.

Sejam $x_1, \dots, x_n$ coordenadas no espaço vetorial de dimensão finita V sob o corpo $K = \mathbb{R}$

ou $\mathbb{C}$. O anel $\mathcal{P}_V = K[x_1, \dots, x_n]$ é uma álgebra comutativa graduada sob K , ou seja,

$$\mathcal{P}_V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_V^d,$$

onde $\mathcal{P}_V^d$ consiste do espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos de grau d . Uma vez que a ação de Γ em V é linear, se $f \in \mathcal{P}_V^d$, para algum d , então $\gamma f \in \mathcal{P}_V^d$, onde $\gamma f(x) = f(\gamma x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$. Portanto, o espaço $\mathcal{P}(\Gamma)$ tem a estrutura de uma álgebra graduada dada por $\mathcal{P}^d(\Gamma) = \mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{P}_V^d$, isto é,

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}^d(\Gamma).$$

Do mesmo modo, denotemos por $\vec{\mathcal{P}}_V$ o espaço vetorial de aplicações polinomiais em V nas indeterminadas $x_1, \dots, x_n$. $\vec{\mathcal{P}}_V$ tem a estrutura de um módulo graduado sob o anel $\mathcal{P}_V$:

$$\vec{\mathcal{P}}_V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}_V^d,$$

onde $\vec{\mathcal{P}}_V^d$ é o espaço vetorial de todas as aplicações polinomiais homogêneas de grau d . Portanto, os espaços $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ são módulos graduados sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, isto é,

$$\vec{\mathcal{P}}(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) \quad \text{e} \quad \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma),$$

onde $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) = \vec{\mathcal{P}}(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{P}}_V^d$ e $\vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) = \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{P}}_V^d$.

A série de Hilbert da álgebra graduada $\mathcal{P}(\Gamma)$ é uma função geradora para a dimensão do espaço vetorial de invariantes em cada grau e é definida como

$$\Phi_{\Gamma}(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \mathcal{P}^d(\Gamma) t^d. \quad (1.12)$$

O seguinte teorema fornece uma fórmula explícita para a série de Hilbert (1.12) em termos da integral de Haar normalizada sob Γ :

Teorema 1.2.6. (Teorema de Molien) *Seja Γ um grupo de Lie compacto. Então a série de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$ é dada por*

$$\Phi_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\det(1 - t\gamma)},$$

onde γ denota a representação de $\gamma \in \Gamma$ em V .

Demonstração: Veja [53] para a prova no caso finito e [48] para a extensão a um grupo

compacto. □

As séries de Hilbert dos módulos graduados $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ são as funções geradoras para a dimensão dos espaços vetoriais de equivariantes e reversíveis-equivariantes de cada grau, respectivamente, definidas por

$$\Psi_{\Gamma}(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) t^d \quad (1.13)$$

e

$$\tilde{\Psi}_{\Gamma}(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) t^d. \quad (1.14)$$

A generalização do Teorema de Molien para o caso equivariante é dado em [48]:

Teorema 1.2.7. (Teorema de Molien equivariante) *Se Γ um grupo de Lie compacto, então a série de Hilbert de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é dada por*

$$\Psi_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} \frac{\chi_V(\gamma^{-1})}{\det(1 - t\gamma)},$$

onde χ_V é o caracter correspondente à representação de Γ em V .

O Teorema 1.2.7 também vale para o módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes $g : V \rightarrow W$, para ações distintas (não Γ -isomorfas) de Γ em V e em W [57]:

$$\Psi_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} \frac{\chi_W(\gamma^{-1})}{\det(1 - t\gamma_V)}, \quad (1.15)$$

onde γ_V denota a representação de $\gamma \in \Gamma$ em V e χ_W é o caracter correspondente à representação de Γ em W . Assim, obtemos de imediato a fórmula explícita para a série de Hilbert (1.14):

$$\tilde{\Psi}_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma) \chi_V(\gamma^{-1})}{\det(1 - t\gamma)},$$

onde χ_V é o caracter correspondente à representação de Γ em V . Para uma representação ortogonal de Γ , temos ainda $\gamma^{-1} = \gamma^t$ e $\chi_V(\gamma^{-1}) = \chi_V(\gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

1.2.3 Teoria de caracteres para invariantes e equivariantes

No que segue, apresentamos a teoria geral para V e W espaços vetoriais não necessariamente de dimensão finita sob um corpo K de característica nula.

O produto tensorial de V e W é um espaço vetorial $V \otimes W$ juntamente com uma aplicação

bilinear

$$\begin{aligned}\tau : V \times W &\rightarrow V \otimes W \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y\end{aligned}$$

com a seguinte *propriedade de aplicação universal*: dado qualquer espaço vetorial U e uma aplicação bilinear $\beta : V \times W \rightarrow U$, existe uma única aplicação linear $B : V \otimes W \rightarrow U$ tal que $\beta = B \circ \tau$. Tal propriedade determina o produto tensorial a menos de isomorfismos canônicos, que é associativo, comutativo e distributivo. Em particular, o produto n -tensorial $V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V$ é equipado com uma aplicação n -multilinear

$$\begin{aligned}V \times \dots \times V &\rightarrow V \otimes \dots \otimes V \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n.\end{aligned}$$

Consideremos a ação do grupo simétrico $\mathbf{S}_n$ (das permutações de n elementos) em $V^{\otimes n}$ permutando as posições dos fatores no produto tensorial:

$$\pi(x) = \pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi^{-1}(n)}, \quad \forall \pi \in \mathbf{S}_n, x \in V^{\otimes n}.$$

Então, a n -ésima *potência tensorial simétrica*

$$\mathbf{S}^n V = \{x \in V^{\otimes n} : \pi x = x, \forall \pi \in \mathbf{S}_n\} \quad (1.16)$$

é identificada com o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau n .

No nosso contexto, dadas duas representações (ρ, V) e (η, W) de Γ em V e W , respectivamente, definimos de um modo natural a representação de Γ no produto tensorial $V \otimes W$ por $\varsigma : \Gamma \rightarrow GL(V \otimes W)$ onde

$$\varsigma(\gamma)(x \otimes y) = \rho(\gamma)x \otimes \eta(\gamma)y, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, y \in W.$$

Desta construção, obtemos analogamente a representação de Γ em $V^{\otimes n}$ dada por

$$\varsigma(\gamma)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \rho(\gamma)x_1 \otimes \dots \otimes \rho(\gamma)x_n, \quad \forall \gamma \in \Gamma, x_1, \dots, x_n \in V. \quad (1.17)$$

Uma vez que a ação de $\mathbf{S}_n$ em $V^{\otimes n}$ comuta com a ação de Γ acima, $\mathbf{S}^n V$ é um subespaço Γ -invariante de $V^{\otimes n}$ e, portanto, (1.17) induz uma representação de Γ em $\mathbf{S}^n V$. Denotemos por $\mathbf{S}^0 V$ o corpo K sob o qual está definido o espaço vetorial V .

O seguinte teorema ([48, Theorem 5.10]) usa teoria de caracter para obter a dimensão de $\mathcal{P}^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma)$, para cada d :

Teorema 1.2.8. (Sattinger) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial de dimensão finita V com caracter correspondente χ_V e seja $\chi_{(n)}$ o caracter*

da ação induzida de Γ em $\mathbf{S}^n V$. Então

$$\dim \mathcal{P}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \overline{\chi_V(\gamma)}.$$

Finalizamos este capítulo com propriedades de caracteres usadas no desenvolvimento de parte do Capítulo 3. Para isso, definimos a representação de Γ na soma direta $V \oplus W$ dada por $\varrho : \Gamma \rightarrow GL(V \oplus W)$,

$$\varrho(\gamma)(x + y) = \rho(\gamma)x + \eta(\gamma)y, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V, \quad y \in W.$$

Se $V^* = \text{Hom}(V, K)$ é o espaço vetorial dual de V (no sentido da álgebra linear), então existe uma representação natural de Γ em V^* definida por $\rho^* : \Gamma \rightarrow GL(V^*)$,

$$[\rho^*(\gamma)\psi](x) = \psi(\rho(\gamma^{-1})x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V, \quad \psi \in V^*. \quad (1.18)$$

Proposição 1.2.9. ([6, II, Proposition 4.10]) *Sejam (ρ, V) e (η, W) dois espaços vetoriais sob representações distintas de Γ . Então,*

$$(i) \quad \chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W;$$

$$(ii) \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W;$$

$$(iii) \quad \chi_{V^*}(\gamma) = \chi_V(\gamma^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Demonstração: Para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\chi_{V \oplus W}(\gamma) = \text{tr}(\varrho(\gamma)) = \text{tr}(\rho(\gamma) + \eta(\gamma)) = \text{tr}(\rho(\gamma)) + \text{tr}(\eta(\gamma)) = \chi_V(\gamma) + \chi_W(\gamma),$$

o que prova o item (i). De ([6, II, Proposition 3.3]), segue que para quaisquer aplicações lineares $h_1 : V \rightarrow V$ e $h_2 : W \rightarrow W$ temos $\text{tr}(h_1 \otimes h_2) = \text{tr}(h_1)\text{tr}(h_2)$. Logo, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\chi_{V \otimes W}(\gamma) = \text{tr}(\varsigma(\gamma)) = \text{tr}(\rho(\gamma) \otimes \eta(\gamma)) = \text{tr}(\rho(\gamma))\text{tr}(\eta(\gamma)) = \chi_V(\gamma)\chi_W(\gamma),$$

provando o item (ii). Para a prova do item (iii), lembramos primeiramente de ([6, II, Proposition 3.3]) que toda aplicação linear $h : V \rightarrow V$ induz uma aplicação linear $h^* : V^* \rightarrow V^*$ tal que $\text{tr}(h^*) = \text{tr}(h)$. Notemos também que a representação de Γ em V^* definida em (1.18) é a aplicação linear $(\rho(\gamma^{-1}))^* : V^* \rightarrow V^*$ induzida da aplicação $\rho(\gamma^{-1}) : V \rightarrow V$, para cada

$\gamma \in \Gamma$. Segue daí que

$$\chi_{V^*}(\gamma) = \text{tr}(\rho^*(\gamma)) = \text{tr}\left((\rho(\gamma^{-1}))^*\right) = \text{tr}(\rho(\gamma^{-1})) = \chi_V(\gamma^{-1}),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, como desejado.

□

Uma Visão Geral sobre Sistemas Reversíveis-equivariantes

Simetrias e anti-simetrias podem ocorrer simultaneamente em sistemas dinâmicos fisicamente motivados. Um sistema dinâmico que possui simetrias e anti-simetrias é chamado *sistema reversível-equivariante*. Resultados obtidos no estudo de aplicações equivariantes sob a ação de um grupo de simetrias podem ser adaptados ao contexto reversível-equivariante, quando introduzimos a condição extra de reversibilidade e o grupo torna-se um *grupo de simetrias generalizado* $\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \Gamma_-$ (ver Seção 1.1). De fato, uma aplicação Γ -reversível-equivariante $g : V \rightarrow V$ é uma aplicação Γ -equivariante $g : (\rho, V) \rightarrow (\rho_\sigma, V)$ satisfazendo

$$g(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\gamma g(x) = \rho_\sigma(\gamma)g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (2.1)$$

O estudo da teoria reversível-equivariante se divide em dois casos: o caso auto-dual e o caso não auto-dual. Como devemos ver na próxima seção, no caso auto-dual existe uma correspondência natural entre as aplicações reversíveis-equivariantes e puramente equivariantes que possibilita o estudo de um caso a partir do outro. No caso não auto-dual, para o qual não existe uma tal correspondência, desenvolvemos ferramentas algébricas para determinar os geradores reversíveis-equivariantes de $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ dependendo apenas de uma base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Este estudo aparece no Capítulo 3.

Este capítulo é organizado como segue: na Seção 2.1, estabelecemos a correspondência entre as aplicações equivariantes e reversíveis-equivariantes auto-duais sob a ação de um grupo de Lie compacto e obtemos dois resultados (Lema 2.1.2 e Proposição 2.1.4) essenciais para o estudo de tais aplicações. Na Seção 2.2, exibimos as formas gerais de campos vetoriais reversíveis-equivariantes sob a ação de diferentes grupos, descrevendo suas principais propriedades e contrapondo-os com os correspondentes equivariantes. Em particular, ilustramos o efeito causado pela presença simultânea de simetrias e anti-simetrias em tais campos.

2.1 O contexto reversível-equivariante

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial real de dimensão finita V como um grupo de simetrias generalizado e seja (ρ_σ, V) a representação dual de (ρ, V) (Definição 1.1.2). Consideremos

$$\dot{x} + g(x) = 0, \quad (2.2)$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, onde $g : (V, 0) \rightarrow V$ representa o germe de uma aplicação Γ -reversível-equivariante suave na origem.

A próxima definição formaliza a separação da análise de aplicações reversíveis-equivariantes em dois casos:

Definição 2.1.1. *Uma representação (ρ, V) de Γ é chamada auto-dual se é Γ -isomorfa a (ρ_σ, V) , a saber se existe um isomorfismo linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$. Neste caso, também dizemos que V é um espaço auto-dual. Caso contrário, V é chamado não auto-dual.*

Com a existência do isomorfismo reversível-equivariante L determinamos uma condição necessária para que uma representação (ρ, V) de Γ seja não auto-dual:

Lema 2.1.2. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V como um grupo de simetrias generalizado tal que V é auto-dual. Então, toda anti-simetria de Γ tem traço nulo.*

Demonstração: A representação (ρ, V) de Γ é isomorfa à sua representação dual (ρ_σ, V) e, portanto, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\text{tr}(\rho(\gamma)) = \chi_V(\gamma) = \chi_{V_\sigma}(\gamma) = \text{tr}(\rho_\sigma(\gamma)) = \text{tr}(\sigma(\gamma)\rho(\gamma)) = \sigma(\gamma)\text{tr}(\rho(\gamma)), \quad (2.3)$$

a segunda igualdade seguindo do Lema 1.1.5. Se $\gamma \in \Gamma_-$, então (2.3) torna-se

$$\text{tr}(\rho(\gamma)) = -\text{tr}(\rho(\gamma)),$$

ou seja, $\text{tr}(\rho(\gamma)) = 0$. □

No Capítulo 3, fornecemos outra condição necessária para que uma representação de Γ seja não auto-dual, dada em termos da paridade dos coeficientes da série de Hilbert do módulo de equivariantes sob a ação de Γ_+ .

A existência do isomorfismo L também estabelece uma associação de cada aplicação Γ -reversível-equivariante $\tilde{g} : V \rightarrow V$ com uma aplicação puramente Γ -equivariante $g : V \rightarrow V$, que é dada no lema abaixo. Apesar de sua demonstração imediata, este lema nos é fundamental.

Lema 2.1.3. ([9]) *Seja $L : V \rightarrow V$ um isomorfismo linear Γ -reversível-equivariante. Então,*

(i) *$g : V \rightarrow V$ é puramente Γ -equivariante se, e somente se, $\tilde{g} = Lg : V \rightarrow V$ é Γ -reversível-equivariante;*

(ii) *$g(x) = 0$ se, e somente se, $\tilde{g}(x) = 0$.*

Nossa técnica agora se baseia na construção do seguinte isomorfismo de $\mathcal{E}(\Gamma)$ -módulos:

$$\begin{array}{ccc} L^* : \vec{\mathcal{E}}(\Gamma) & \rightarrow & \vec{\mathcal{F}}(\Gamma) \\ g & \mapsto & Lg \end{array} \quad (2.4)$$

Chamamos este isomorfismo o *pullback* de L . Obtemos então o seguinte resultado chave:

Proposição 2.1.4. *No caso auto-dual, os módulos $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$ são isomorfos.*

Usamos o pullback de L no estudo sistemático de bifurcações reversíveis-equivariantes auto-duais que aparece na Seção 4.3.

Do ponto de vista de dinâmica, a equação diferencial (2.2) é invariante pela ação de Γ sob a transformação $(x, t) \mapsto (\gamma x, \sigma(\gamma)t)$. Ou seja, trajetórias do sistema (2.2) são aplicadas sobre trajetórias do mesmo sistema preservando a direção no tempo pelas simetrias e invertendo a direção no tempo pelas anti-simetrias. Em particular, se x_0 é um ponto de equilíbrio de (2.2), então toda sua órbita (de pontos simétricos e anti-simétricos) é formada de pontos de equilíbrio de (2.2). Observamos também que a reversibilidade tem a seguinte implicação nos autovalores de $(dg)_{(x_0)}$:

Lema 2.1.5. ([39, Lemma 1.1]) *Se ξ é um autovalor de uma aplicação linear reversível, então $-\xi$ e seu complexo conjugado $\bar{\xi}$ também são.*

Consequentemente, solução estável ocorre em um sistema dinâmico reversível-equivariante somente se o seu subgrupo de isotopia contém apenas simetrias.

2.2 Exemplos de campos vetoriais reversíveis-equivariantes

Exploramos nesta seção a estrutura de sistemas que são reversíveis com respeito a uma anti-simetria δ e equivariante com respeito a uma representação linear de um grupo de Lie compacto Γ_+ , de modo que o grupo $\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup} \delta \Gamma_+$ seja um grupo de Lie compacto. Lembramos que no contexto reversível-equivariante o grupo de simetrias generalizado Γ pode ser escrito como o produto semi-direto $\Gamma \simeq \Gamma_+ \dot{+} \mathbb{Z}_2$ se, e somente se, Γ contém uma involução. As formas gerais obtidas correspondem a campos vetoriais reversíveis-equivariantes em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ sob a ação de diferentes grupos. A obtenção destas formas é o primeiro passo no processo de

classificação e a validade do Teorema 1.2.4 para aplicações reversíveis-equivariantes restringe os cálculos ao caso polinomial.

Em todos os exemplos, consideramos a ação padrão de Γ em $\mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação de matriz por vetor e denotamos por $\mathcal{R}_\theta$ a rotação de ângulo θ e por I o elemento identidade de Γ .

2.2.1 Campo vetorial $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante

Considere a ação padrão do grupo diedral $\Gamma = \mathbf{D}_n$ em $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ gerada pela conjugação complexa e pela rotação $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$:

$$\kappa z = \bar{z} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}} z = e^{i\frac{2\pi}{n}} z. \quad (2.5)$$

Considere $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_n(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}})$ (grupo cíclico gerado por $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$) e $\delta = \kappa$ uma anti-simetria. Então,

$$\begin{aligned} L: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto iz \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante e, portanto, $V = \mathbb{C}$ segundo a ação de $\mathbf{D}_n$ dada em (2.5) é auto-dual.

Os geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{D}_n(\delta))$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n(\delta))$ são dados por $h_1(z) = z$ e $h_2(z) = \bar{z}^{n-1}$ (ver, por exemplo, [25, XII, Example 5.4(c)]). Via o pullback L^* (2.4), geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}_n(\delta))$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n(\delta))$ são $L^*(h_1)(z) = iz$ e $L^*(h_2)(z) = i\bar{z}^{n-1}$, isto é, um campo vetorial $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante tem a forma

$$g(z) = p(u, v)iz + q(u, v)i\bar{z}^{n-1}, \quad (2.6)$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$ são os geradores dos polinomiais $\mathbf{D}_n(\delta)$ –invariantes de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$ [25, XII, Example 4.1(c)].

O exemplo acima também é apresentado em [13], onde é afirmado que todo campo vetorial $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante tem a forma $izF(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$, com F uma função a valores reais. Como mostramos acima, faltam nesta expressão os termos da forma $i\bar{z}^{n-1}G(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n)$, com G uma função a valores reais.

2.2.2 Campo vetorial $\mathbb{O}$ –reversível-equivariante

A versão $\mathbb{O}$ –equivariante correspondente a este exemplo aparece em [45].

Considere a ação padrão do grupo octaedral $\mathbb{O}$ das simetrias do cubo gerado por

$$\kappa_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

κ_x representa uma reflexão no plano $x = 0$ e S_x, S_y representam, respectivamente, rotações de ângulo $\pi/2$ em torno dos eixos x e y . Tomamos $\delta = \kappa_x$ agindo como anti-simetria e S_x, S_y agindo como simetrias, de modo que o subgrupo $\mathcal{S}_3$ de $\mathbb{O}$ das permutações também é um grupo de simetrias generalizado. Nos cálculos abaixo também usamos as anti-simetrias κ_y, κ_z e a simetria S_z , com as seguintes representações matriciais:

$$\kappa_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\text{tr}(\delta) = 1 \neq 0$, implicando que a presente representação de $\mathbb{O}$ em $\mathbb{R}^3$ é não auto-dual (Lema 2.1.2). Mais que isso: $-\text{I}$ é uma anti-simetria e, portanto, todo campo vetorial linear $\mathbb{O}$ -reversível-equivariante é identicamente nulo.

O seguinte lema é usado para obter a forma geral de um campo vetorial $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\mathbb{O}$ -reversível-equivariante.

Lema 2.2.1. ([45, Lemma A.1]) *Para todo $f \in \mathcal{E}(\mathbb{O})$ existe germe de função $P : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = P(u, v, w)$, onde $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2$ e $w = x^2y^2z^2$.*

Denotemos $\langle \phi(a, b, c) \rangle = \begin{pmatrix} \phi(a, b, c)yz \\ \phi(b, c, a)xz \\ \phi(c, a, b)xy \end{pmatrix}$, onde $a = x^2$, $b = y^2$ e $c = z^2$. Considere a seguinte aplicação polinomial

$$g(x, y, z) = \sum_{ijk} g_{ijk} \langle a^i (b^j c^k - c^j b^k) \rangle, \quad g_{ijk} \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Observe que g satisfaz $g\kappa_x = -\kappa_x g$, $gS_x = S_x g$ e $gS_y = S_y g$ e, consequentemente, é $\mathbb{O}$ -reversível-equivariante.

Reciprocamente, toda aplicação polinomial $\mathbb{O}$ -reversível-equivariante tem a forma (2.7). De fato, suponha $g = (g^1, g^2, g^3)$ uma aplicação polinomial $\mathbb{O}$ -reversível-equivariante. Usando as anti-simetrias κ_x, κ_y e κ_z encontramos que g^1 é par em x , ímpar em y e z ; g^2 é par em y , ímpar em x e z ; g^3 é par em z , ímpar em x e y . Consequentemente, podemos escrever

$$g(x, y, z) = \sum_{ijk} a^i b^j c^k \begin{pmatrix} g_{ijk}^1 yz \\ g_{ijk}^2 xz \\ g_{ijk}^3 xy \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

onde $g_{ijk}^l \in \mathbb{R}$, para $l = 1, 2, 3$.

Usamos agora as transposições $\kappa_x \circ S_z$, $\kappa_y \circ S_x$ e $\kappa_z \circ S_y$, que são anti-simetrias, para obter

$$g_{ikj}^1 = -g_{ijk}^1, \quad g_{kji}^2 = -g_{ijk}^2, \quad g_{jik}^3 = -g_{ijk}^3.$$

Assim (2.8) torna-se

$$g(x, y, z) = \sum_{ijk} \begin{pmatrix} g_{ijk}^1 a^i (b^j c^k - c^j b^k) yz \\ g_{ijk}^2 b^i (a^j c^k - a^k c^j) xz \\ g_{ijk}^3 c^i (a^j b^k - a^k b^j) xy \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Usando novamente as anti-simetrias $\kappa_x \circ S_z$ e $\kappa_z \circ S_y$ em (2.9) obtemos

$$g_{ijk}^2 = g_{ijk}^3 = -g_{ijk}^1 = -g_{ijk}, \quad \forall i, j, k.$$

Assim (2.9) torna-se

$$g(x, y, z) = \sum_{ijk} g_{ijk} \begin{pmatrix} a^i (b^j c^k - c^j b^k) yz \\ b^i (c^j a^k - a^j c^k) xz \\ c^i (a^j b^k - b^j a^k) xy \end{pmatrix} = \sum_{ijk} g_{ijk} \langle a^i (b^j c^k - c^j b^k) \rangle. \quad (2.10)$$

No caso $\mathbb{O}$ -equivariante observamos a existência de termos lineares não triviais nos geradores de $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{O})$. Em nosso contexto, toda $g \in \vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{O})$ possui termos de ordem pelo menos dois e, portanto, os geradores de $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{O})$ devem possuir termos de ordem no mínimo dois. Por isso, como notamos antes, impor que κ_x é uma anti-simetria (e consequentemente κ_y e κ_z) ao invés de uma simetria, como no caso equivariante, implica em termos lineares nulos. Este exemplo ilustra o fato de que reversibilidade juntamente com equivariância pode forçar a uma situação mais degenerada, isto é, autovalores múltiplos nulos podem ser esperados.

2.2.3 Campo vetorial $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -reversível-equivariante

Considere a ação padrão do grupo cíclico $\mathbf{Z}_n(\delta)$ no plano, onde $\delta = \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ é uma anti-simetria. Observe que $\text{tr}(\delta) = 2 \cos(\frac{2\pi}{n})$ é nulo se, e somente se, $n = 4$. Portanto, para $n \neq 4$, a presente representação de $\mathbf{Z}_n(\delta)$ em $\mathbb{C}$ é não auto-dual (Lema 2.1.2). Para $n = 4$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo linear $\mathbf{Z}_4(\delta)$ -reversível-equivariante e a presente representação de $\mathbf{Z}_4(\delta)$ em $\mathbb{C}$ é auto-dual.

Para obter a forma geral de um campo vetorial $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -reversível-equivariante $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, escrevemos

$$g(z) = \sum b_{jk} z^j \bar{z}^k, \quad (2.11)$$

onde $b_{jk} \in \mathbb{C}$. A reversibilidade de g com respeito a δ implica que

$$\sum b_{jk} z^j \bar{z}^k = g(z) = -e^{-\frac{2\pi}{n}i} g(e^{\frac{2\pi}{n}i} z) = -\sum b_{jk} e^{(j-k-1)\frac{2\pi}{n}i} z^j \bar{z}^k.$$

Logo, $e^{(j-k-1)\frac{2\pi}{n}i} = -1$. Assim, n deve ser par, pois $b_{jk} = 0$ a menos que $j \equiv k + 1 + \frac{n}{2} \pmod{n}$. Note que esta restrição implica que campos vetoriais $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -reversíveis-equivariantes não existem se n é ímpar. Observamos que a $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -equivariância não impõe tal restrição sobre n , e existem campos vetoriais $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -equivariantes no plano para todo $n \geq 2$.

Por cálculos diretos concluímos que todo campo vetorial $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -reversível-equivariante toma a forma

$$g(z) = p(u, v) z^{\frac{n}{2}+1} + q(u, v) \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \quad (2.12)$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = Re(z^n)$ são os geradores dos germes $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -invariantes de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{R}$ [19, p. 206] e p, q são polinômios a valores complexos.

Para ilustrar, considere o campo vetorial $\mathbf{Z}_4(\delta)$ -reversível-equivariante

$$g(z) = p(u, v) z^3 + q(u, v) \bar{z} \quad (2.13)$$

para $p(u, v) = q(u, v) = i$. Em coordenadas reais, ele toma a forma

$$g(x, y) = (y - 3x^2y + y^3, x + x^3 - 3xy^2). \quad (2.14)$$

Os pontos de equilíbrios são $(0, 0)$ e $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$. Neste caso, $(0, 0)$ é do tipo sela; $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ são nós estáveis e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ são nós instáveis. Uma simulação numérica usando o software *P4* [3] nos fornece o retrato de fase como na Figura 2.1.

Figura 2.1: Campo vetorial $\mathbf{Z}_4(\delta)$ -reversível-equivariante (2.13) para $p(u, v) = q(u, v) = i$.

Para $p(u, v) = iu$ e $q(u, v) = 1$ em (2.13) temos

$$g(x, y) = (x - 3x^4y - 2x^2y^3 + y^5, -y + x^5 - 2x^3y^2 - 3xy^4). \quad (2.15)$$

Na Figura 2.2 podemos verificar a natureza de pontos de equilíbrios deste campo vetorial:

$$\left(\frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}(\sqrt{2}+1)}{2}, \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2} \right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}(\sqrt{2}+1)}{2}, -\frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2} \right)$$

são focos assintoticamente estáveis,

$$\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}(\sqrt{2}-1)}{2}, -\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}(\sqrt{2}-1)}{2}, \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \right)$$

são focos assintoticamente instáveis e a origem é um equilíbrio do tipo sela.

Figura 2.2: $\mathbf{Z}_4(\delta)$ –reversível-equivariante campo vetorial (2.13) for $p(u, v) = iu$ e $q(u, v) = 1$.

Observamos que para ambos os campos (2.14) e (2.15) a origem é genericamente um ponto de equilíbrio do tipo sela. Isto não é uma coincidência. De fato, no caso $\mathbf{Z}_4(\delta)$ –reversível-equivariante (e apenas par o caso $n = 4$) isto sempre vale: de (2.13), todo campo vetorial linear $\mathbf{Z}_4(R)$ –reversível-equivariante em $\mathbb{C}$ é da forma $g(z) = (a + ib)\bar{z}$, que em coordenadas reais torna-se

$$g(x, y) = (ax + by, bx - ay),$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Os autovalores de g são $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, isto é, sempre um par de autovalores reais de sinais opostos, se $a^2 + b^2 \neq 0$. Portanto, a reversibilidade aqui força o ponto de equilíbrio ser genericamente do tipo sela. Notamos que no correspondente contexto equivariante, para qualquer valor de n a origem não é um ponto de equilíbrio do tipo sela. Em particular, para o caso $n = 4$ temos a forma geral de um campo vetorial linear $\mathbf{Z}_4$ –equivariante dada por

$$h(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Neste caso, os autovalores de h são $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e ao contrário do caso reversível-equivariante, a origem pode ser um centro, um nó ou um foco.

2.2.4 Campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante

Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbf{D}_n$ no plano gerada por (2.5). Consideramos $\delta = \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ uma anti-simetria e κ uma simetria, de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{D}_{\frac{n}{2}}$. Note que na Subseção 2.2.1 temos $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_n(\delta)$, sendo δ uma simetria e κ uma anti-simetria.

Lembramos primeiro que, como todo campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante também é $\mathbf{Z}_n(\delta)$ –reversível-equivariante, não existem campos vetoriais $\mathbf{D}_n$ –reversíveis-equivariantes para n ímpar, pois o mesmo vale para os $\mathbf{Z}_n(\delta)$ –reversíveis-equivariantes. Além disso, $\text{tr}(\delta) = 2\cos(\frac{2\pi}{n})$ é nulo se, e somente se, $n = 4$. Portanto, a presente representação de $\mathbf{D}_n$ em $\mathbb{C}$ é não auto-dual para $n \neq 4$ e auto-dual para $n = 4$, uma vez que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

também é a matriz de um isomorfismo linear $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante. O caso auto-dual $n = 4$ é analisado em detalhes na Seção 4.5.

Por cálculos semelhantes aos da subseção anterior, concluímos que todo campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante para n par toma a forma

$$g(z) = p(u, v)z^{\frac{n}{2}+1} + q(u, v)\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \quad (2.16)$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$ são os geradores dos $\mathbf{D}_n$ –invariantes e p, q são funções a valores reais. Assim, se tomarmos p e q reais em (2.12), obtemos (2.16).

A forma geral (2.16) é reobtida no Capítulo 3 para ilustrar os algoritmos lá desenvolvidos.

Analizamos abaixo dois casos da ação de $\mathbf{D}_n$ no plano para diferentes elementos do grupo agindo como anti-simetrias.

- (a) Considere o campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante (2.16) com $\mathcal{R}_\pi = -I$ como uma anti-simetria. Note que n é necessariamente par, caso contrário $\mathcal{R}_\pi$ não seria elemento de $\mathbf{D}_n$. Logo, escrevemos $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ e notemos que $\delta^m = \mathcal{R}_\pi$. Então, para $\mathcal{R}_\pi$ ser uma anti-simetria é necessário ter o gerador δ como uma anti-simetria e m ímpar, uma vez que a composição de um número par de anti-simetrias é uma simetria. Consequentemente, existem campos vetoriais $\mathbf{D}_n$ –reversíveis-equivariantes na presença da anti-simetria $\mathcal{R}_\pi$ apenas para $n = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, e tal campo vetorial tem a forma

$$g(z) = p(u, v)z^{2(p+1)} + q(u, v)\bar{z}^{2p},$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$ são os geradores dos $\mathbf{D}_n$ –invariantes.

Para ilustrar, considere o campo vetorial $\mathbf{D}_6$ –reversível-equivariante na presença da

anti-simetria $\mathcal{R}_\pi$ com $p(u, v) = u$ e $q(u, v) = 1$. Neste caso,

$$g(z) = z^5 \bar{z} + \bar{z}^2, \quad (2.17)$$

que em coordenadas reais torna-se

$$g(x, y) = (x^6 - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + y^6 + x^2 - y^2, 4x^5y - 4xy^5 - 2xy).$$

A origem é um equilíbrio não hiperbólico e os seis pontos de equilíbrios não triviais são $(0, \pm 1)$ e $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2})$. Novamos usamos o programa *P4* [3] para simular o retrato de fase (Figura 2.3).

Figura 2.3: Campo vetorial $\mathbf{D}_6$ –reversível-equivariante (2.17).

É importante ressaltar que o software *P4* não fornece a natureza dos pontos de equilíbrios, mas apenas o comportamento das órbitas em torno deles. Neste exemplo, usamos a teoria reversível para concluir que os pontos de equilíbrio $(0, \pm 1)$ e $(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1}{2})$ são centros: o ponto $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ está sobre o subespaço de ponto fixo de uma anti-simetria, a saber $\text{Fix}(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}} \circ \kappa)$. Lembramos que uma órbita próxima que intercepta este subespaço duas vezes deve ser uma órbita periódica (Subseção 1.2.1). Consequentemente, este equilíbrio é de fato um centro. Todos os outros cinco equilíbrios não nulos são obtidos por simetria e são, portanto, também do tipo centro.

- (b) Considere o campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante (2.16) com $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ como uma anti-simetria.

Escrevemos $n = 2m$, com $m \in \mathbb{N}$ e notemos que $\delta^{\frac{m}{2}} = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Assim, m deve ser par. Podemos escrever $n = 4(\frac{m}{2})$ com $m \in \mathbb{N}$ par. Além disso, para $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ ser uma anti-simetria, o gerador δ deve ser uma anti-simetria e $\frac{m}{2}$ deve ser ímpar. Como resultado, n é da forma $8p+4$ com $p \in \mathbb{N}$. De (2.16), todo campo vetorial $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante

na presença da anti-simetria $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$ toma a forma

$$g(z) = p(u, v)z^{4p+3} + q(u, v)\bar{z}^{4p+1}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Para ilustrar, tomamos $n = 4$ e

$$g(z) = p(u, v)z^3 + q(u, v)\bar{z}, \quad (2.18)$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^4 + \bar{z}^4$. Escolhendo $p(u, v) = q(u, v) = 1$, obtemos o campo vetorial em coordenadas reais

$$g(x, y) = (x + x^3 - 3xy^2, -y + 3x^2y - y^3),$$

com cinco pontos de equilíbrio: $(0, 0)$ e $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

A origem é do tipo sela e os quatro equilíbrios restantes são do tipo centro (Figura 2.4). Este resultado segue analogamente como no exemplo anterior com base na teoria reversível.

Figura 2.4: Campo vetorial $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante (2.18) para $p(u, v) = q(u, v) = 1$.

Assim como no caso $\mathbf{Z}_4(\delta)$ –reversível-equivariante, no caso $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante a origem é genericamente um ponto de equilíbrio do tipo sela. Mais especificamente, apenas para o caso $n = 4$ temos, sob certas condições, a origem como um ponto de equilíbrio hiperbólico. De fato, a fim de obter um campo vetorial linear $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante exigimos que $p(u, v) = 0$ e $q(u, v) = a \in \mathbb{R}$ em (2.18). Portanto, $g(z) = a\bar{z}$ ou, em coordenadas reais,

$$g(x, y) = (ax, -ay), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Os autovalores da matriz de g são $\lambda_{\pm} = \pm a$ e, conseqüentemente, o equilíbrio é típica-

mente do tipo sela. Se $q(0, 0) = 0$, então um campo vetorial $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante não tem a origem como um equilíbrio hiperbólico. No correspondente contexto equivariante, a origem é genericamente um ponto hiperbólico para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que se considerarmos a ação padrão de $\mathbf{D}_4$ em $\mathbb{C}$ de modo que $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_4(\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}})$ (Subseção 2.2.1), então a Γ_+ –equivariância com a reversibilidade adicional implica em um campo vetorial linear $\mathbf{D}_4(\delta)$ –reversível-equivariante da forma

$$g(x, y) = (-ay, ax), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Assim os autovalores da matriz de g são $\lambda_{\pm} = \pm ia$ e, conseqüentemente, o equilíbrio é tipicamente do tipo centro. Este caso ilustra, portanto, uma mudança da dinâmica local devido à diferença na natureza dos pontos de equilíbrios quando trocamos no grupo de simetrias generalizado uma simetria por uma anti-simetria e vice-versa.

2.2.5 Campo vetorial $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante

Considere a ação padrão do grupo ortogonal $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C}$ gerada pelas rotações $\mathcal{R}_{\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, e pela conjugação complexa κ . Tomamos $\delta = \kappa$ uma anti-simetria e $\mathcal{R}_{\theta}$ uma simetria, para cada $0 \leq \theta < 2\pi$. Neste caso,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante e, portanto, a presente representação de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C}$ é auto-dual.

De [25, XII, Example 5.4(b)], todo campo vetorial $\mathbf{O}(2)$ –equivariante tem a forma

$$h(z) = p(u)z,$$

onde p é um polinômio a valores reais e $u = z\bar{z}$ é o gerador de $\mathcal{P}(\mathbf{O}(2))$. Via o pullback L^* (2.4), todo campo vetorial $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante tem a forma

$$g(z) = L^*(h)(z) = p(u)iz,$$

com $p \in \mathcal{P}(\mathbf{O}(2))$. Portanto, todo campo vetorial linear $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante tem a origem como o único equilíbrio, do tipo centro.

Notemos que não existem campos vetoriais $\mathbf{O}(2)$ –reversíveis-equivariantes com $\mathcal{R}_{\theta}$ agindo como uma anti-simetria e δ agindo como uma simetria.

2.2.6 Campo vetorial $\mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante

Considere a ação padrão do grupo $\mathbb{Z}_2$ no plano gerada pela reflexão

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $\delta = \kappa$ uma anti-simetria, este é um exemplo de um campo vetorial puramente reversível. Além disso, a presente representação de $\mathbb{Z}_2$ no plano é auto-dual, uma vez que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo $\mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante.

Os geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ são dados por $h_1(x, y) = (1, 0)$ e $h_2(x, y) = (0, y)$ (veja, por exemplo, [25, XIV, §3]). Via o pullback L^* (2.4), a forma geral de um campo vetorial $\mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante é dada por

$$g(x, y) = p(u, v)L^*(h_1)(x, y) + q(u, v)L^*(h_2)(x, y) = (q(u, v)y, p(u, v)), \quad (2.19)$$

onde p, q são funções a valores reais e $u = x$, $v = y^2$ são claramente os geradores de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$.

2.2.7 Campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante

Consideramos a ação padrão de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^2$ gerada pelos flips

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ de polinômios $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –invariantes é gerado por $u = x^2$ e $v = y^2$. Além disso, o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ é gerado por $h_1(x, y) = (x, 0)$ e $h_2(x, y) = (0, y)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ ([24, X, §1]). Para explorar o papel das simetrias e anti-simetrias do grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ na forma geral de um campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dividimos a análise nos seguintes casos:

1. Ambos os flips $\delta = \kappa_1$ e κ_2 agem como anti-simetrias: neste caso, $\Gamma_+ = \{I, -I\}$ e

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante, ou seja, a presente representação de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano é auto-dual. Via o pullback L^* (2.4), a forma geral de um campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante é dada por

$$g(x, y) = p(u, v)L^*(h_1)(x, y) + q(u, v)L^*(h_2)(x, y) = (q(u, v)y, p(u, v)x), \quad (2.20)$$

com $p, q \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Portanto, a Γ_+ -equivariância com a reversibilidade adicional implica em um campo vetorial linear $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante da forma

$$g(x, y) = (ay, bx), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Os autovalores da matriz de g são $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{ab}$, isto é, para $ab \neq 0$, ou um par de autovalores reais de sinais opostos ou um par de autovalores puramente imaginários. No correspondente contexto equivariante, ou seja, $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, um campo vetorial linear $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante toma a forma

$$h(x, y) = (ax, by), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Os autovalores da matriz de h são ambos reais, mas não necessariamente de mesmo sinal. Portanto, no caso puramente equivariante temos sempre sela ou nó.

2. $\delta = \kappa_1$ age como uma simetria e κ_2 como uma anti-simetria: neste caso, $-I$ é uma anti-simetria, cujo traço é igual a -2 . Pelo Lema 2.1.2, a presente representação de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano é não auto-dual. Além disso, todo campo vetorial linear $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante é identicamente nulo. Por um simples cálculo obtemos $g_1(x, y) = (1, 0)$ e $g_2(x, y) = (0, xy)$ geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ e, então a forma geral de um campo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante é dada por

$$g(x, y) = (p(u, v), q(u, v)xy), \tag{2.21}$$

com $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$.

3. $\delta = \kappa_1$ age como uma anti-simetria e κ_2 como uma simetria: analogamente ao caso 2., neste caso $-I$ também age como uma anti-simetria e, portanto, a presente representação de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano é não auto-dual. Por cálculos diretos temos $g_1(x, y) = (0, 1)$ e $g_2(x, y) = (xy, 0)$ geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, de modo que todo campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante toma a forma

$$g(x, y) = (p(u, v)xy, q(u, v)), \tag{2.22}$$

com $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$.

Mostramos abaixo que, a menos de Γ -isomorfismos, $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ e $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ não admitem outra representação auto-dual no plano além daquelas dadas nas Subseções 2.2.6 e 2.2.7 (caso

1.), respectivamente.

Considere a ação dual de $\Gamma = \mathbb{Z}_2(\phi)$ no plano, sendo ϕ uma anti-simetria. Lembramos que Γ é um subgrupo do grupo ortogonal $\mathbf{O}(2)$ e notemos que se ϕ é igual a I ou $-I$, então a representação de $\mathbb{Z}_2(\phi)$ no plano é não auto-dual. Como ϕ é uma matriz ortogonal distinta de I e $-I$ e $\phi^2 = I$, então

$$\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

com $a^2 + b^2 = 1$. É fácil ver que ϕ é conjugada a $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja, existe um isomorfismo linear T tal que $\phi = T\kappa T^{-1}$; em outras palavras, existe um $\mathbb{Z}_2$ -isomorfismo entre a representação auto-dual de $\mathbb{Z}_2(\phi)$ no plano e a dada na Subseção 2.2.6. Consequentemente, a menos de $\mathbb{Z}_2$ -isomorfismos, $\mathbb{Z}_2$ não admite outra representação auto-dual além daquela dada na Subseção 2.2.6.

O mesmo resultado vale para $\Gamma = \mathbb{Z}_2(\phi_1) \oplus \mathbb{Z}_2(\phi_2)$ agindo em $\mathbb{R}^2$, com ϕ_1 e ϕ_2 anti-simetrias, pois quaisquer duas matrizes de involuções ortogonais distintas que comutam entre si, nenhuma delas sendo I ou $-I$, são simultaneamente conjugadas a

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato, notemos novamente que se ϕ_1 ou ϕ_2 é igual a I ou $-I$, então a representação de Γ no plano é não auto-dual. Além disso, todo par de matrizes de involuções ortogonais distintas que comutam entre si e distintas de I ou $-I$ é dado por

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},$$

onde $a_1^2 + b_1^2 = 1$. O resultado agora segue do caso anterior. Assim, a menos de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -isomorfismos, a representação auto-dual de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano dada pelos flips κ_1 e κ_2 agindo como anti-simetrias é única.

Com todas as formas gerais obtidas nesta seção ilustramos o fato de que a condição de reversibilidade no lugar da condição de equivariância pode implicar em campos vetoriais mais degenerados, isto é, forçando a ocorrência de autovalores com parte real nula, ou mesmo nulos. Como consequência do Lema 2.1.5, para campos vetoriais no plano, os autovalores de uma aplicação linear reversível são ou nulos, ou um par de autovalores reais de sinais opostos, ou um par de autovalores puramente imaginários. Isto é o que esperamos ver quando tratamos de teoria de bifurcação, isto é, assim como presença de simetrias conduz a problemas de bifurcação mais degenerados do que a ausência de simetrias, observamos no contexto reversível-equivariante que a presença de anti-simetrias pode conduzir a problemas de bifur-

cação mais degenerados do que a presença de simetrias.

Teoria Invariante e Algoritmos

No contexto reversível-equivariante a presença simultânea de simetrias e anti-simetrias implica na existência de um subgrupo normal de índice 2 do grupo de simetrias generalizado Γ . Tal subgrupo, formado pelas simetrias de Γ , é denotado por Γ_+ e tem papel fundamental na obtenção dos geradores para o módulo das aplicações polinomiais Γ –reversíveis-equivariantes $\vec{Q}(\Gamma)$. Também de grande importância na obtenção de tais geradores são funções a valores reais que não são invariantes pela ação de Γ em V , mas possuem uma estrutura particular de equivariância. Tais funções são chamadas Γ –*anti-invariantes*.

O ponto essencial neste capítulo é explorar a relação dos conceitos de reversibilidade e equivariância de um sistema dinâmico com a teoria de invariantes e a teoria equivariante, esta última aplicada à teoria anti-invariante. Esta é a ferramenta principal para entender as aplicações reversíveis-equivariantes do ponto de vista algébrico e estrutural, restringindo a análise proposta neste capítulo ao caso polinomial invariante.

Começamos provando alguns resultados em teoria anti-invariante. Isto é feito na Seção 3.1, onde também combinamos teoria de invariantes e teoria de caracter para obter a dimensão do espaço vetorial de aplicações polinomiais homogêneas equivariantes $(\rho, V) \mapsto (\eta, W)$ de um dado grau. Na Seção 3.2, usamos novamente teoria invariante polinomial na construção dos geradores para o módulo dos anti-invariantes. Descrevemos um algoritmo simbólico para determinar tais geradores usando apenas os elementos da base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Na Seção 3.3, um outro algoritmo é dado para a determinação dos geradores reversíveis-equivariantes de $\vec{Q}(\Gamma)$ em termos dos geradores dos anti-invariantes e dos Γ_+ –equivariantes. Finalizamos com a Seção 3.4, onde fazemos exemplos aplicando os algoritmos.

Na apresentação deste capítulo, Γ é um grupo de Lie compacto agindo como um grupo de simetrias generalizado em um espaço vetorial de dimensão finita V , $\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ é a representação unidimensional de Γ dada por (1.1) e $\Gamma_+ = \ker \sigma$ é o subgrupo normal de Γ de índice 2 das simetrias de Γ . Além disso, o conjunto Γ_- de todas as anti-simetrias de Γ é dado por $\Gamma_- = \delta \Gamma_+$, para $\delta \in \Gamma$ uma anti-simetria qualquer fixada.

3.1 Teoria de invariantes e teoria de caracter

Nesta seção tratamos da teoria anti-invariante polinomial. Em particular, na Subseção 3.1.2, determinamos a dimensão do espaço das funções polinomiais anti-invariantes de um dado grau para uma representação arbitrária de Γ usando a integral de Haar.

3.1.1 Funções anti-invariantes

Seja (ρ, V) o espaço vetorial real de dimensão finita V sob a representação ρ de Γ . Dizemos que uma função a valores reais $\hat{f} : V \mapsto \mathbb{R}$ é *anti-invariante* sob a ação de Γ , ou é Γ -anti-invariante, se

$$\hat{f}(\gamma x) = \sigma(\gamma)\hat{f}(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, \quad (3.1)$$

onde σ é a representação unidimensional de Γ dada por (1.1). Notemos que a condição (3.1) nos diz que uma função a valores reais Γ -anti-invariante é uma função Γ -equivariante de (ρ, V) em $(\sigma, \mathbb{R})$. Por este motivo, resultados para o caso equivariante podem ser usados neste contexto. Também temos que o produto de duas funções polinomiais Γ -anti-invariantes é Γ -invariante. Segue então que o produto de um número ímpar de funções polinomiais Γ -anti-invariantes é Γ -anti-invariante.

A notação usada para o módulo de funções polinomiais Γ -anti-invariantes sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ é $\mathcal{Q}(\Gamma)$. Também, denotamos por $\mathcal{F}(\Gamma)$ o módulo de germes de funções Γ -anti-invariantes $\hat{f} : (V, 0) \mapsto \mathbb{R}$ sob o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$. A existência de um número finito de geradores anti-invariantes para $\mathcal{Q}(\Gamma)$ (respectivamente, $\mathcal{F}(\Gamma)$) sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ (respectivamente, $\mathcal{E}(\Gamma)$) é garantida pelo Teorema 1.2.4. Além disso, temos o seguinte:

Lema 3.1.1. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$ o subgrupo das simetrias de Γ . Tome $\delta \in \Gamma_-$ qualquer fixado. Então,*

$$\mathcal{P}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}(\Gamma_+) : f(\delta x) = f(x), \forall x \in V\}$$

e

$$\mathcal{Q}(\Gamma) = \{f \in \mathcal{P}(\Gamma_+) : f(\delta x) = -f(x), \forall x \in V\}.$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ tal que $f(\delta x) = f(x)$, para todo $x \in V$. Como $\Gamma_- = \delta \Gamma_+$ e $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma_-$ temos $\gamma = \bar{\gamma}\delta$, para algum $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$. Isto implica em

$$f(\gamma x) = f(\bar{\gamma}\delta x) = f(\delta x) = f(x), \quad \forall x \in V,$$

ou seja, $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$.

Considere agora $f \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ tal que $f(\delta x) = -f(x)$, para todo $x \in V$. Então, para todo $\gamma \in \Gamma_-$,

$$f(\gamma x) = f(\bar{\gamma}\delta x) = f(\delta x) = -f(x) = \sigma(\gamma)f(x), \quad \forall x \in V,$$

ou seja, $f \in \mathcal{Q}(\Gamma)$.

As outras inclusões seguem diretamente das definições de $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}(\Gamma)$, respectivamente. $\square$

Segue deste resultado que $\mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{Q}(\Gamma) = \{0\}$ e, portanto, não existe função anti-invariante de grau 0. Além disso, o espaço vetorial $\mathcal{Q}(\Gamma)$ tem a estrutura de um módulo graduado sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, ou seja,

$$\mathcal{Q}(\Gamma) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{Q}^d(\Gamma),$$

onde $\mathcal{Q}^d(\Gamma)$ denota o espaço vetorial dos polinômios homogêneos Γ -anti-invariantes $V \mapsto \mathbb{R}$ de grau d . A *série de Hilbert* do módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ é a função geradora para a dimensão do espaço vetorial de anti-invariantes em cada grau dada por

$$\tilde{\Phi}_{\Gamma}(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \mathcal{Q}^d(\Gamma) t^d. \quad (3.2)$$

Usando a fórmula de Molien dada em (1.15), obtemos uma fórmula explícita para a série de Hilbert de anti-invariantes dada por

$$\tilde{\Phi}_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\gamma)}{\det(1 - t\gamma)}, \quad (3.3)$$

onde γ denota a representação de $\gamma \in \Gamma$ em V .

Na próxima subseção, fazemos uso da teoria de caracter para desenvolver uma fórmula para a dimensão do espaço vetorial de aplicações polinomiais de (ρ, V) a (η, W) de grau d que são equivariantes sob a ação de Γ . Em particular, obtemos a fórmula para o cálculo da dimensão de $\mathcal{Q}^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$, para todo $d \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Fórmulas de caracter

Nesta subseção tomamos V e W espaços vetoriais de dimensão finita sob um corpo K de característica nula. Lembramos que uma aplicação n -multilinear $\beta : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ vezes}} \rightarrow W$ é *simétrica* se

$$\beta \circ \pi = \beta, \quad \forall \pi \in \mathbf{S}_n,$$

isto é, $\beta(x_{\pi^{-1}(1)}, \dots, x_{\pi^{-1}(n)}) = \beta(x_1, \dots, x_n)$. Lembramos que uma função $f : V \rightarrow K$ é uma função polinomial homogênea de grau d se existe uma função d -multilinear simétrica

$$\widehat{f} : \underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ vezes}} \rightarrow K,$$

tal que $f(x) = \widehat{f}(x, \dots, x)$, para todo $x \in V$. Denotando por $L_s^d(V)$ o espaço de todas as funções d -multilineares simétricas de $V \times \dots \times V$ a valores em K , segue que a aplicação

$$\begin{aligned} L_s^d(V) &\rightarrow \mathcal{P}_V^d \\ \widehat{f} &\mapsto f \end{aligned} \quad (3.4)$$

é um isomorfismo.

Analogamente, uma aplicação $F : V \rightarrow W$ é uma aplicação polinomial homogênea de grau d se existe uma aplicação d -multilinear simétrica a valores em W

$$\widehat{F} : \underbrace{V \times \dots \times V}_{d \text{ vezes}} \rightarrow W,$$

tal que $F(x) = \widehat{F}(x, \dots, x)$, para todo $x \in V$. Denotamos por $L_s^d(V, W)$ o espaço de todas as aplicações d -multilineares simétricas de $V \times \dots \times V$ a valores em W e por $\vec{\mathcal{P}}^d(V, W)$ o espaço vetorial de todas as aplicações polinomiais homogêneas $V \mapsto W$ de grau d . A aplicação

$$\begin{aligned} L_s^d(V, W) &\rightarrow \vec{\mathcal{P}}^d(V, W) \\ \widehat{F} &\mapsto F \end{aligned}$$

é um isomorfismo que se reduz a (3.4) quando $W = K$.

Considere agora a d -ésima potência tensorial simétrica $\mathbf{S}^d V$ como definida em (1.16). Podemos caracterizá-la em termos de uma propriedade de aplicação universal:

Proposição 3.1.2. ([30, p. 621]) *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sob K . Então existe um isomorfismo canônico*

$$\text{Hom}(\mathbf{S}^d V, W) \cong L_s^d(V, W). \quad (3.5)$$

Para $V^* = \text{Hom}(V, K)$ o espaço vetorial dual de V , tomamos o isomorfismo canônico ([30, p. 618])

$$\begin{aligned} V^* \otimes W &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ v^* \otimes w &\mapsto \phi \end{aligned}, \quad (3.6)$$

onde $\phi(u) = v^*(u)w$, para todo $u \in V$ e $w \in W$. Combinando os isomorfismos (3.5) e (3.6) temos

$$L_s^d(V, W) \cong \text{Hom}(\mathbf{S}^d V, W) \cong (\mathbf{S}^d V)^* \otimes W,$$

que combinado com o isomorfismo natural $L_s^d(V, W) \mapsto \vec{\mathcal{P}}^d(V, W)$ implica na seguinte identificação:

$$\vec{\mathcal{P}}^d(V, W) \cong (\mathbf{S}^d V)^* \otimes W. \quad (3.7)$$

Defina agora o módulo de aplicações polinomiais $V \mapsto W$ sob o anel $\mathcal{P}_V$ por

$$\vec{\mathcal{P}}(V, W) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}^d(V, W).$$

Como Γ age linearmente em V e W , o espaço vetorial $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ das aplicações polinomiais Γ -equivariantes $V \mapsto W$ também é um módulo graduado sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, isto é,

$$\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W) = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W), \quad (3.8)$$

onde $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W) \cap \vec{\mathcal{P}}^d(V, W)$ denota o espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas Γ -equivariantes $V \mapsto W$ de grau d .

Para simplificar a notação escrevemos $\eta(\gamma)w$ como $\gamma * w$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $w \in W$, onde η é a representação de Γ em W . Definimos a representação induzida de Γ em $\vec{\mathcal{P}}(V, W)$ por $\rho^{\vec{\mathcal{P}}}: \Gamma \rightarrow GL(\vec{\mathcal{P}}(V, W))$, onde

$$[\rho^{\vec{\mathcal{P}}}(\gamma)q](x) = \gamma^{-1} * q(\gamma x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V, q \in \vec{\mathcal{P}}(V, W)$$

para concluir que $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \text{Fix}_{\vec{\mathcal{P}}^d(V, W)}(\Gamma)$. Usando o isomorfismo (3.7) obtemos

$$\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) \cong \text{Fix}_{(\mathbf{S}^d V)^* \otimes W}(\Gamma). \quad (3.9)$$

Temos então o principal resultado desta subseção:

Teorema 3.1.3. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em dois espaços vetoriais de dimensão finita V e W sob o corpo K . Denote por χ_W o caracter correspondente à representação de Γ em W e por $\chi_{(d)}$ o caracter da ação induzida de Γ em $\mathbf{S}^d V$. Então*

$$\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \int_{\Gamma} \chi_d(\gamma^{-1}) \chi_W(\gamma). \quad (3.10)$$

Demonstração: A fórmula do traço (1.4) aplicada ao isomorfismo (3.9) conduz a

$$\begin{aligned}
\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) &= \dim \text{Fix}_{(\mathbf{S}^d V)^* \otimes W}(\Gamma) \\
&= \int_{\Gamma} \chi_{(\mathbf{S}^d V)^* \otimes W}(\gamma) \\
&= \int_{\Gamma} \chi_{(\mathbf{S}^d V)^*}(\gamma) \chi_W(\gamma) \\
&= \int_{\Gamma} \chi_{(\mathbf{S}^d V)}(\gamma^{-1}) \chi_W(\gamma) \\
&= \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma^{-1}) \chi_W(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Note que se V é real e a representação de Γ em V é ortogonal, então $\chi_V(\gamma^{-1}) = \chi_V(\gamma)$. Em particular, segue que

$$\dim_{\mathbb{R}} \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_W(\gamma).$$

Se V é complexo e a representação de Γ em V é ortogonal, então $\chi_V(\gamma^{-1}) = \overline{\chi_V(\gamma)}$ e segue que

$$\dim_{\mathbb{C}} \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \int_{\Gamma} \overline{\chi_{(d)}(\gamma)} \chi_W(\gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \overline{\chi_W(\gamma)}, \quad (3.11)$$

a última igualdade seguindo de [35, Proposition 14.5]. Se, além disso, W é real e a representação de Γ em W é ortogonal, então (3.11) torna-se

$$\dim_{\mathbb{C}} \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_W(\gamma).$$

O Teorema 1.2.8 é um caso particular do Teorema 3.1.3 para $W = \mathbb{R}$ sob a ação trivial de Γ (caso invariante) e para $W = V$ sob ações idênticas de Γ na fonte e na meta (caso puramente equivariante): se Γ age ortogonalmente em um espaço vetorial real V , então

$$\dim \mathcal{P}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \quad (3.12)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma). \quad (3.13)$$

Em [1], os autores provam o Teorema 1.2.8 usando também teoria de invariantes combinada com teoria de caracter.

Corolário 3.1.4. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente e ortogonalmente em um espaço vetorial real de dimensão finita V com caracter correspondente χ_V e denote por $\chi_{(d)}$ o caracter da ação induzida de Γ em $\mathbf{S}^d V$. Então*

$$\dim \mathcal{Q}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) \quad (3.14)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma). \quad (3.15)$$

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.1.3 tomando $(\eta, W) = (\sigma, \mathbb{R})$ para obter (3.14) e tomando $(\eta, W) = (\rho_{\sigma}, V)$ para obter (3.15). $\square$

Para a aplicação das fórmulas (3.12)-(3.15), precisamos calcular o caracter $\chi_{(d)}$ correspondente à ação de Γ em $\mathbf{S}^d V$. Existe uma fórmula recursiva bem conhecida que facilita os cálculos:

$$d\chi_{(d)}(\gamma) = \sum_{i=0}^{d-1} \chi(\gamma^{d-i}) \chi_{(i)}(\gamma), \quad (3.16)$$

onde $\chi_{(0)}(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$. A prova desta fórmula é encontrada em [1, Section 4]. Lembramos que não existe função anti-invariante de grau zero, ou seja, $\dim \mathcal{Q}^0(\Gamma) = 0$. Agora, para cada $d \in \mathbb{N}$, existe uma forte relação entre $\dim \mathcal{P}^d(\Gamma)$ e $\dim \mathcal{Q}^d(\Gamma)$ e entre $\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma)$ e $\dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$, como mostramos abaixo.

Proposição 3.1.5. *Sejam $\mathcal{P}^d(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}^d(\Gamma)$ os espaços vetoriais das funções polinomiais homogêneas Γ -invariantes e Γ -anti-invariantes de grau d , respectivamente. Sejam $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$ os espaços vetoriais das aplicações polinomiais Γ -equivariantes e Γ -reversíveis-equivariantes de grau d , respectivamente. Então,*

$$\dim \mathcal{P}^d(\Gamma) + \dim \mathcal{Q}^d(\Gamma) = \dim \mathcal{P}^d(\Gamma_+) \quad (3.17)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) + \dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) = \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma_+). \quad (3.18)$$

Demonstração: Segue diretamente do Corolário 1.1.8. De fato, para $\delta \in \Gamma_-$ qualquer fixado temos

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{P}^d(\Gamma) &= \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) + \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \right], \\ \dim \mathcal{Q}^d(\Gamma) &= \int_{\Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) - \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \right], \\ \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) &= \int_{\Gamma} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) + \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \chi_V(\delta\gamma) \right], \end{aligned}$$

$$\dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma} \sigma(\gamma) \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) - \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\delta\gamma) \chi_V(\delta\gamma) \right],$$

donde

$$\dim \mathcal{P}^d(\Gamma) + \dim \mathcal{Q}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) = \dim \mathcal{P}^d(\Gamma_+)$$

e

$$\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) + \dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) = \int_{\Gamma_+} \chi_{(d)}(\gamma) \chi_V(\gamma) = \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma_+).$$

□

No Capítulo 2, determinamos uma condição necessária para que uma representação (ρ, V) de Γ seja não auto-dual (Lema 2.1.2). Estabelecemos agora uma outra condição necessária para (ρ, V) ser não auto-dual que leva em consideração a paridade dos coeficientes da série de Hilbert de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$.

Proposição 3.1.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V como um grupo de simetrias generalizado tal que V é auto-dual. Então, as séries de Hilbert de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ definidas em (1.13) e (1.14), respectivamente, são iguais. Além disso, todo coeficiente da série de Hilbert de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ é par.*

Demonstração: Pelo Lema 2.1.2, temos $\chi_V(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \Gamma_-$, o que implica em $\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) = \dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$, para todo $d \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\Psi_{\Gamma}(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) t^d = \sum_{d=0}^{\infty} \dim \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma) t^d = \tilde{\Psi}_{\Gamma}(t).$$

De (3.18), segue também que $\dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma_+) = 2 \dim \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma)$, que é par para todo $d \in \mathbb{N}$. □

Com um procedimento análogo para os invariantes e usando o fato de que, no caso auto-dual, $\chi_{(d)}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \Gamma_-$ e para $d \in \mathbb{N}$ ímpar, segue que $\dim \mathcal{P}^d(\Gamma) = \dim \mathcal{Q}^d(\Gamma)$, para todo $d \in \mathbb{N}$ ímpar. Isto implica que $\dim \mathcal{P}^d(\Gamma_+) = 2 \dim \mathcal{P}^d(\Gamma)$ deve ser par para todo $d \in \mathbb{N}$ ímpar.

Concluimos esta seção aplicando (3.17) e a Proposição 3.1.6 a dois exemplos:

Exemplo 1. Considere a ação padrão do grupo simétrico $\Gamma = \mathbf{S}_2$ no plano gerada por

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomamos $\delta \in \Gamma_-$ de modo que $\Gamma_+ = \{I\}$. Temos $\{x + y, xy\}$ e $\{x, y\}$ bases de Hilbert para

os anéis $\mathcal{P}(\mathbf{S}_2)$ e $\mathcal{P}(\{I\})$, respectivamente. De (3.17), segue que

$$\dim \mathcal{Q}^1(\mathbf{S}_2) = 1, \quad \dim \mathcal{Q}^2(\mathbf{S}_2) = 1, \quad \dim \mathcal{Q}^3(\mathbf{S}_2) = 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{Q}^4(\mathbf{S}_2) = 2.$$

Usando o fato de que $\mathcal{Q}(\mathbf{S}_2)$ é um $\mathcal{P}(\mathbf{S}_2)$ –módulo e que $x^n - y^n$ são anti-invariantes para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da igualdade

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - y^{n-1}) - xy(x^{n-2} - y^{n-2})$$

que $\mathcal{Q}(\mathbf{S}_2) = \mathcal{P}(\mathbf{S}_2)\{x - y\}$.

Pelo Teorema 1.2.7, a série de Hilbert do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}_2)$ é dada por $\Psi_\Gamma(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Além disso,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz de um isomorfismo linear $\mathbf{S}_2$ –reversível-equivariante, implicando que a presente representação de $\mathbf{S}_2$ no plano é auto-dual. Portanto, pela Proposição 3.1.6, a série de Hilbert de $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbf{S}_2)$ é igual a $\tilde{\Psi}_\Gamma(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Ainda, $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}_2)$ é gerado sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{S}_2)$ por $h_1(x, y) = (1, 1)$ e $h_2(x, y) = (x, y)$. Via o pullback L^* (2.4), os geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbf{S}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{S}_2)$ são $L^*(h_1)(x, y) = (1, -1)$ e $L^*(h_2)(x, y) = (x, -y)$.

Exemplo 2. Considere a ação padrão do grupo octaedral $\mathbb{O}$ em $\mathbb{R}^3$ dada na Subseção 2.2.2, onde $\delta = \kappa_x$ é uma anti-simetria e S_x, S_y são simetrias. Portanto, $\Gamma_+ = \mathbf{S}_4$. Usando o programa computacional *Singular*, obtemos os geradores de $\mathcal{P}(\mathbf{S}_4)$ dados por

$$a(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad b(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2, \quad c(x, y, z) = x^2y^2z^2$$

$$\text{e} \quad f(x, y, z) = x^3(yz^5 - y^5z) + y^3(x^5z - xz^5) + z^3(xy^5 - x^5y).$$

Pelo Lema 2.2.1, temos também que a, b e c acima são geradores do anel $\mathcal{P}(\mathbb{O})$. De (3.17),

$$\dim \mathcal{Q}^i(\mathbb{O}) = 0, \forall i = 1, \dots, 8 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{Q}^9(\mathbb{O}) = 1.$$

Notemos que f é o gerador $\mathbb{O}$ –anti-invariante de grau 9. Usando o programa computacional GAP, obtemos a série de Hilbert de $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}_4)$ dada por

$$\Psi_{\mathbf{S}_4}(t) = \frac{t - t^2 + t^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^4)} = t + 2t^3 + t^4 + 4t^5 + 2t^6 + 6t^7 + 4t^8 + \dots,$$

confirmando, pela Proposição 3.1.6, que a presente representação de $\mathbb{O}$ em $\mathbb{R}^3$ é não auto-dual. De fato, o coeficiente $\dim \vec{\mathcal{P}}^1(\mathbf{S}_4) = 1$ é ímpar.

De interesse especial nas duas próximas seções é determinar explicitamente os geradores dos módulos dos anti-invariantes $\mathcal{Q}(\Gamma)$ e dos reversíveis-equivariantes $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, fazendo uso das já conhecidas teorias invariante e equivariante e, em particular, da teoria invariante desenvolvida nesta seção.

3.2 Algoritmo para o cálculo dos anti-invariantes

Nesta seção usamos teoria polinomial de invariantes para mostrar como a estrutura dos invariantes sob a ação de Γ_+ pode ser usada para encontrar os geradores anti-invariantes sob a ação do grupo maior Γ . Mais especificamente, a idéia é usar os geradores da base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ para uma eficiente investigação dos geradores de $\mathcal{Q}(\Gamma)$. Na apresentação desta seção, se $u \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\delta \in \Gamma_-$, denotamos por $\delta u : V \rightarrow \mathbb{R}$ a função polinomial

$$\delta u(x) := u(\delta x), \quad \forall x \in V. \quad (3.19)$$

Começamos estabelecendo uma relação entre os Γ -anti-invariantes e os Γ_+ -invariantes: como $\Gamma_+ \leq \Gamma$, temos $\mathcal{P}(\Gamma)$ um subanel de $\mathcal{P}(\Gamma_+)$, gerando em $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ uma estrutura de $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo. Olhamos então para $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}(\Gamma)$ como $\mathcal{P}(\Gamma)$ -submódulos finitamente gerados de $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Além disso, $\mathcal{P}(\Gamma), \mathcal{Q}(\Gamma) \subseteq \mathcal{P}(\Gamma_+)$ também como espaços vetoriais. A relação mencionada acima é estabelecida como segue:

Teorema 3.2.1. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial real de dimensão finita V e seja $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$ o subgrupo das simetrias de Γ . Então, $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ se decompõe como*

$$\mathcal{P}(\Gamma_+) = \mathcal{P}(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}(\Gamma), \quad (3.20)$$

como $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulos.

Demonstração: Seja $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Dada uma função polinomial $u \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ podemos escrevê-la como

$$u = \frac{1}{2}(u + \delta u) + \frac{1}{2}(u - \delta u). \quad (3.21)$$

Segue do Lema 3.1.1 que

$$u_1 = \frac{1}{2}(u + \delta u) \in \mathcal{P}(\Gamma) \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{2}(u - \delta u) \in \mathcal{Q}(\Gamma).$$

De fato, tome $\gamma \in \Gamma_+$. Como $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$, temos $\delta\gamma = \bar{\gamma}\delta$ para algum $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$ e, portanto,

$$u(\delta\gamma x) = u(\bar{\gamma}\delta x) = u(\delta x), \quad \forall x \in V.$$

Então, para $\gamma \in \Gamma_+$, temos

$$u_1(\gamma x) = \frac{1}{2}(u + \delta u)(\gamma x) = \frac{1}{2}(u(\gamma x) + u(\delta \gamma x)) = \frac{1}{2}(u(x) + u(\delta x)) = u_1(x),$$

$$u_2(\gamma x) = \frac{1}{2}(u - \delta u)(\gamma x) = \frac{1}{2}(u(\gamma x) - u(\delta \gamma x)) = \frac{1}{2}(u(x) - u(\delta x)) = u_2(x).$$

Também,

$$u_1(\delta x) = \frac{1}{2}(u + \delta u)(\delta x) = \frac{1}{2}(u(\delta x) + u(\delta^2 x)) = \frac{1}{2}(u(\delta x) + u(x)) = u_1(x),$$

$$u_2(\delta x) = \frac{1}{2}(u - \delta u)(\delta x) = \frac{1}{2}(u(\delta x) - u(\delta^2 x)) = \frac{1}{2}(u(\delta x) - u(x)) = -u_2(x),$$

o que implica pelo Lema 3.1.1 que $u_1 \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $u_2 \in \mathcal{Q}(\Gamma)$. Agora, $\mathcal{P}(\Gamma) \cap \mathcal{Q}(\Gamma) = \{0\}$, obtendo então (3.20). $\square$

Observação 3.2.2. Lembramos que os anéis $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ têm estrutura de $\mathbb{R}$ -álgebras graduadas e que o espaço vetorial $\mathcal{Q}(\Gamma)$ é um módulo graduado sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{P}(\Gamma)$, $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\mathcal{Q}(\Gamma)$ são gerados por polinômios homogêneos. Agora, é claro que $\mathcal{P}^d(\Gamma)$, $\mathcal{Q}^d(\Gamma) \subseteq \mathcal{P}^d(\Gamma_+)$ como espaços vetoriais e podemos usar as identificações (3.17) e (3.21) para concluir que $\mathcal{P}^d(\Gamma_+) = \mathcal{P}^d(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}^d(\Gamma)$, para todo $d \in \mathbb{N}$, o que se estende à decomposição (3.20).

O teorema anterior implica em:

Teorema 3.2.3. Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V , $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Defina, para todo $j \in \{1, \dots, s\}$,

$$\tilde{u}_j := \frac{1}{2}(u_j - \delta u_j). \quad (3.22)$$

Então, $\{\tilde{u}_j : j = 1, \dots, s\}$ é um conjunto de geradores para o módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Demonstração: Seja $\tilde{u}_j$ como definido em (3.22). Nosso objetivo é mostrar que toda função polinomial $\tilde{u} \in \mathcal{Q}(\Gamma)$ se escreve como

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^s p_i(x) \tilde{u}_i(x), \quad \forall x \in V,$$

com $p_i \in \mathcal{P}(\Gamma)$ para cada i . A prova é feita por indução.

Sejam $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\tilde{u} \in \mathcal{Q}(\Gamma)$ qualquer. Considere a projeção

$$\begin{aligned} \hat{\pi} : \mathcal{P}(\Gamma_+) &\rightarrow \mathcal{Q}(\Gamma) \\ u &\mapsto \frac{1}{2}(u - \delta u) \end{aligned} ,$$

para $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Por definição de $\hat{\pi}$, existe $u \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ tal que

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2}(u - \delta u)(x) = \frac{1}{2}(u(x) - u(\delta x)),$$

para todo $x \in V$. Logo,

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i_1, \dots, i_s} a_{i_1} \dots a_{i_s} \left(u_1^{i_1} \dots u_s^{i_s}(x) - u_1^{i_1} \dots u_s^{i_s}(\delta x) \right), \quad (3.23)$$

com $a_{i_j} \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \dots, s$.

• Para $s = 1$:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i_1} a_{i_1} \left(u_1^{i_1}(x) - u_1^{i_1}(\delta x) \right), \quad (3.24)$$

com $a_{i_1} \in \mathbb{R}$. Temos que

$$u_1^{i_1}(x) - u_1^{i_1}(\delta x) = \left(u_1(x) - u_1(\delta x) \right) \left(\sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(x) u_1^k(\delta x) \right),$$

onde

$$h_{i_1}(x) = \sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(x) u_1^k(\delta x)$$

é um polinômio homogêneo de grau $i_1 - 1$.

Usamos o Lema 3.1.1 para mostrar que $h_{i_1} \in \mathcal{P}(\Gamma)$: como $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma_+$, existe $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$ tal que $u_1(\delta \gamma x) = u_1(\bar{\gamma} \delta x) = u_1(\delta x)$, $\forall x \in V$. Portanto, se $\gamma \in \Gamma_+$,

$$\begin{aligned} h_{i_1}(\gamma x) &= \sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(\gamma x) u_1^k(\delta \gamma x) \\ &= \sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(x) u_1^k(\delta x) = h_{i_1}(x). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} h_{i_1}(\delta x) &= \sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(\delta x) u_1^k(\delta^2 x) \\ &= \sum_{\substack{j, k \in \{0, \dots, i_1-1\} \\ j+k=i_1-1}} u_1^j(\delta x) u_1^k(x) = h_{i_1}(x), \end{aligned}$$

como queríamos. Portanto, (3.24) torna-se

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i_1} a_{i_1} h_{i_1}(x) \left(u_1(x) - u_1(\delta x) \right) = h_1(x) \tilde{u}_1(x),$$

com $h_1 = \sum_{i_1} a_{i_1} h_{i_1} \in \mathcal{P}(\Gamma)$.

• Suponha agora que, para todo $1 \leq n \leq s-1$, vale

$$\sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} \left(u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) - u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) \right) = \sum_{j=1}^n h_j(x) \tilde{u}_j(x),$$

com $h_j \in \mathcal{P}(\Gamma)$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Temos,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}} \left(u_1^{i_1} \dots u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) - u_1^{i_1} \dots u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}} \left[u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) \left(u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) - u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) \right) \right. \\ &\quad \left. + u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) \left(u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) - u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Desde que $u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}, u_{n+1}^{i_{n+1}} \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$, usamos a decomposição (3.20) para escrever

$$u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) = v_{i_1 \dots i_n}(x) + w_{i_1 \dots i_n}(x) \quad \text{e} \quad u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) = v_{i_{n+1}}(x) + w_{i_{n+1}}(x),$$

com $v_{i_1 \dots i_n}, v_{i_{n+1}} \in \mathcal{P}(\Gamma)$ e $w_{i_1 \dots i_n}, w_{i_{n+1}} \in \mathcal{Q}(\Gamma)$. Então,

$$u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) = v_{i_1 \dots i_n}(x) - w_{i_1 \dots i_n}(x) \quad \text{e} \quad u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) = v_{i_{n+1}}(x) - w_{i_{n+1}}(x),$$

donde obtemos

$$u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) - u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) = 2w_{i_1 \dots i_n}(x) \quad \text{e} \quad u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) - u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) = 2w_{i_{n+1}}(x),$$

para todo $x \in V$. Portanto, (3.25) torna-se

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) &= \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}} \left[\left(v_{i_1 \dots i_n}(x) + w_{i_1 \dots i_n}(x) \right) 2w_{i_{n+1}}(x) \right. \\
&\quad \left. + \left(v_{i_{n+1}}(x) - w_{i_{n+1}}(x) \right) 2w_{i_1 \dots i_n}(x) \right] \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}} \left(2v_{i_1 \dots i_n}(x)w_{i_{n+1}}(x) + 2v_{i_{n+1}}(x)w_{i_1 \dots i_n}(x) \right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_{n+1}} a_{i_1} \dots a_{i_{n+1}} \left[v_{i_1 \dots i_n}(x) \left(u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) - u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) \right) \right. \\
&\quad \left. + v_{i_{n+1}}(x) \left(u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) - u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) \right) \right] \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} v_{i_1 \dots i_n}(x) \sum_{i_{n+1}} a_{i_{n+1}} \left(u_{n+1}^{i_{n+1}}(x) - u_{n+1}^{i_{n+1}}(\delta x) \right) \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}} a_{i_{n+1}} v_{i_{n+1}}(x) \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} \left(u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(x) - u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}(\delta x) \right) \\
&\stackrel{\text{indução}}{=} \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} v_{i_1 \dots i_n}(x) \left(h_{n+1}(x) \tilde{u}_{n+1}(x) \right) \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}} a_{i_{n+1}} v_{i_{n+1}}(x) \left(\sum_{j=1}^n h_j(x) \tilde{u}_j(x) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \bar{h}_j(x) \tilde{u}_j(x),
\end{aligned}$$

onde

$$\bar{h}_j = h_j \sum_{i_{n+1}} a_{i_{n+1}} v_{i_{n+1}} \in \mathcal{P}(\Gamma), \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n$$

e

$$\bar{h}_{n+1} = h_{n+1} \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1} \dots a_{i_n} v_{i_1 \dots i_n} \in \mathcal{P}(\Gamma),$$

demonstrando o resultado. $\square$

Corolário 3.2.4. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V . Sejam $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Considere, para cada $j \in \{1, \dots, s\}$, $\tilde{u}_j$ como definido em (3.22). Então, um conjunto de geradores para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo é dado por $\{1, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s\}$.*

Demonstração: Basta usar a decomposição (3.20) e o Teorema 3.2.3. $\square$

Apresentamos então o algoritmo para a determinação dos geradores do módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$:

Algoritmo 1 (cálculo de um conjunto finito de geradores anti-invariantes)

- Fixe o homomorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ e tome $\Gamma_+ = \ker \sigma$ o grupo das simetrias de Γ e Γ_- o complementar de Γ_+ em Γ ;
- Fixe uma anti-simetria $\delta \in \Gamma_-$;
- Tome $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$;
- Para cada $i \in \{1, \dots, s\}$, defina $\tilde{u}_i := \frac{1}{2}(u_i - \delta u_i)$;
- $\{\tilde{u}_i : i = 1, \dots, s\}$ consiste em um conjunto finito de geradores para o módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Finalizamos esta seção com a seguinte observação:

Observação 3.2.5. *Sejam K um corpo fixo de característica p arbitrária e V um espaço vetorial n -dimensional sob K . Fixe $\rho : \Gamma \rightarrow GL(V)$ uma representação de um grupo finito Γ em V com caracter correspondente $\chi : \Gamma \rightarrow K$. Lembramos que $\mathcal{P}_V$ denota o espaço vetorial de todos os polinômios homogêneos em V a valores em K . Smith [51] recentemente combinou teoria de invariantes e teoria de caracter para verificar sob que condições o anel dos invariantes sob a ação de $H = \ker \chi \triangleleft \Gamma$ é Cohen-Macaulay. Para isso, o autor define o módulo de invariantes χ -relativos ¹*

$$K[V]_\chi^\Gamma = \{f \in \mathcal{P}_V : f(\gamma x) = \chi(\gamma)f(x), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

sob o anel

$$K[V]^\Gamma = \{f \in \mathcal{P}_V : f(\gamma x) = f(x), \forall \gamma \in \Gamma\}$$

e analisa a relação entre $K[V]_\chi^\Gamma$ e os H -invariantes $K[V]^H$ através de uma decomposição de $K[V]^\Gamma$ -módulos:

$$K[V]^H = K[V]^\Gamma \oplus K[V]_\chi^\Gamma \oplus \dots \oplus K[V]_{\chi^{m-1}}^\Gamma, \quad (3.26)$$

onde $m = |\Gamma : H|$ é o índice de H em Γ .

Se $\gamma_\chi H$ gera o grupo cíclico Γ/H , então os subespaços $K[V]_{\chi^j}^\Gamma$, para $j = 0, \dots, m-1$, podem ser vistos como os autoespaços correspondentes aos autovalores $\chi(\gamma_\chi)^j$ da ação de γ_χ em $K[V]^H$. Além disso, Smith determina condições sob as quais $K[V]_\chi^\Gamma$ é um módulo livre sob $K[V]^\Gamma$ e, neste caso, revela a escolha única para um gerador de tal módulo [51, Theorem 2.7].

Observe que o módulo dos anti-invariantes $\mathcal{Q}(\Gamma)$ é o módulo de invariantes σ -relativos $\mathbb{R}[V]_\sigma^\Gamma$, com σ o caracter da representação de Γ definido em (1.1). Portanto, segundo Smith,

¹No caso $K = \mathbb{C}$, Stanley [52] fez uma análise extensa de invariantes relativos sob a ação de grupos de reflexão.

se Γ é um grupo finito, o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ e o módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ podem ser vistos como os autoespaços correspondentes aos autovalores 1 e -1 , respectivamente, da ação do elemento $\delta \in \Gamma_-$ em $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ definida como $(\delta, u) \mapsto \delta u$, onde $\delta u \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ é dado em (3.19). Assim, para grupos finitos, a decomposição (3.20) é um caso particular da decomposição (3.26) quando V é real, $\chi = \sigma$ e $H = \Gamma_+$ é o subgrupo normal de Γ de índice $m = 2$. Por outro lado, sob estas últimas condições, a decomposição (3.20) é uma generalização da decomposição (3.26) para grupos de Lie compactos arbitrários.

Na próxima seção, usamos o Corolário 3.2.4 para obter um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

3.3 Algoritmo para o cálculo dos reversíveis-equivariantes

As investigações em dinâmica reversível-equivariante começam com a forma geral do campo de vetores e, portanto, com a determinação dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Este é o objetivo principal desta seção, onde um algoritmo é determinado usando teoria de invariantes combinada com teoria equivariante polinomial. A ênfase em toda parte está na existência de uma decomposição do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ análoga à decomposição (3.20). Essencialmente, os geradores do módulo $\mathcal{Q}(\Gamma)$ (Algoritmo 1) são combinados aos geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$, conhecidos da bem estabelecida teoria equivariante, para então serem projetados sobre o módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$.

Na apresentação desta seção mantemos a notação (3.19) usada para funções polinomiais em $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e introduzimos outra: se h é um polinômio em $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ e $\delta \in \Gamma_-$ fixado, denotamos por $\delta \cdot h : V \rightarrow V$ a aplicação polinomial

$$\delta \cdot h(x) = \delta^{-1}h(\delta x), \quad \forall x \in V. \quad (3.27)$$

Observamos que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ tem estrutura de módulo sob o subanel $\mathcal{P}(\Gamma) \subset \mathcal{P}(\Gamma_+)$ e, portanto, os módulos $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ podem ser vistos como submódulos finitamente gerados de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Tal estrutura é um dos aspectos essenciais para os cálculos realizados nesta seção. Começamos com o seguinte resultado:

Lema 3.3.1. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$ o subgrupo das simetrias de Γ . Tome $\delta \in \Gamma_-$ qualquer fixado. Então,*

$$\vec{\mathcal{P}}(\Gamma) = \{h \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+) : h(\delta x) = \delta h(x), \forall x \in V\}$$

e

$$\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) = \{g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+) : g(\delta x) = -\delta g(x), \forall x \in V\}.$$

Demonstração: Sejam $h, g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ tal que $h(\delta x) = \delta h(x)$ e $g(\delta x) = -\delta g(x)$, para todo $x \in V$. Escreva $\gamma \in \Gamma_-$ como $\gamma = \bar{\gamma}\delta$, para algum $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$. Então,

$$h(\gamma x) = h(\bar{\gamma}\delta x) = \bar{\gamma}h(\delta x) = \bar{\gamma}\delta h(x) = \gamma h(x),$$

$$g(\gamma x) = g(\bar{\gamma}\delta x) = \bar{\gamma}g(\delta x) = -\bar{\gamma}\delta g(x) = -\gamma g(x) = \sigma(\gamma)\gamma g(x),$$

para todo $x \in V$, o que implica que $h \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $g \in \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$. As outras inclusões seguem diretamente das definições de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$. $\square$

Segue deste resultado que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) = \{0\}$ e a relação entre $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ é dada no seguinte teorema:

Teorema 3.3.2. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço vetorial real de dimensão finita V e seja $\Gamma_+ \triangleleft \Gamma$ o subgrupo das simetrias de Γ . Então, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ se decompõe como*

$$\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma), \quad (3.28)$$

como $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulos.

Demonstração: Seja $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Dada uma aplicação polinomial $h \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$, podemos escrevê-la como

$$h = \frac{1}{2}(h + \delta \cdot h) + \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h), \quad (3.29)$$

onde

$$h_1 = \frac{1}{2}(h + \delta \cdot h) \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma) \quad \text{e} \quad h_2 = \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h) \in \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma).$$

Para provar a última afirmação usamos o Lema 3.3.1 e o fato de que Γ_+ é um subgrupo normal de Γ : tome $\gamma \in \Gamma_+$ arbitrário e escreva $\delta\gamma = \bar{\gamma}\delta$, para algum $\bar{\gamma} \in \Gamma_+$. Logo, para todo $x \in V$ temos

$$\delta^{-1}h(\delta\gamma x) = \delta^{-1}h(\bar{\gamma}\delta x) = \delta^{-1}\bar{\gamma}h(\delta x) = \gamma\delta^{-1}h(\delta x),$$

o que implica em

$$h_1(\gamma x) = \frac{1}{2}(h + \delta \cdot h)(\gamma x) = \frac{1}{2}(h(\gamma x) + \delta^{-1}h(\delta\gamma x)) = \frac{1}{2}(\gamma h(x) + \gamma\delta^{-1}h(\delta x)) = \gamma h_1(x),$$

$$h_2(\gamma x) = \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h)(\gamma x) = \frac{1}{2}(h(\gamma x) - \delta^{-1}h(\delta\gamma x)) = \frac{1}{2}(\gamma h(x) - \gamma\delta^{-1}h(\delta x)) = \gamma h_2(x).$$

Além disso,

$$h_1(\delta x) = \frac{1}{2}(h + \delta \cdot h)(\delta x) = \frac{1}{2}(h(\delta x) + \delta^{-1}h(\delta^2 x)) = \delta \left[\frac{1}{2}(\delta^{-1}h(\delta x) + h(x)) \right] = \delta h_1(x),$$

$$h_2(\delta x) = \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h)(\delta x) = \frac{1}{2}(h(\delta x) - \delta^{-1}h(\delta^2 x)) = \delta \left[\frac{1}{2}(\delta^{-1}h(\delta x) - h(x)) \right] = -\delta h_2(x),$$

para todo $x \in V$. Pelo Lema 3.3.1, segue o afirmado. Finalmente, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma) \cap \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) = \{0\}$ implica na decomposição (3.28). $\square$

Observação 3.3.3. *É sabido que os módulos $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$, $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ tem estrutura de módulos graduados sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, restringindo seus geradores a polinômios homogêneos. Concluimos então, usando as identificações (3.18) e (3.29), que*

$$\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$$

como espaços vetoriais, para cada $d \in \mathbb{N}$.

Afirmamos agora o principal resultado deste capítulo:

Teorema 3.3.4. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V , $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Para $\delta \in \Gamma_-$ qualquer fixado, $\tilde{u}_0 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ como em (3.22), defina*

$$\tilde{h}_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} - \delta \cdot h_{ij}),$$

onde $h_{ij} = \tilde{u}_j v_i \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$, para $i = 1, \dots, r$ e $j = 0, \dots, s$. Então

$$\left\{ \tilde{h}_{ij} : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 0, \dots, s \right\}$$

constitui um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Para provar o teorema acima, usamos os dois lemas seguintes:

Lema 3.3.5. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e $\{h_1, \dots, h_m\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Para $\delta \in \Gamma_-$ qualquer fixado,*

$$\left\{ \frac{1}{2}(h_i - \delta \cdot h_i) : i = 1, \dots, m \right\} \tag{3.30}$$

constitui um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ como um $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo.

Demonstração: Sejam $\{h_1, \dots, h_m\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ e $g \in \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ qualquer. Considere a projeção

$$\begin{aligned} \varpi : \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+) &\rightarrow \vec{\mathcal{Q}}(\Gamma) \\ h &\mapsto \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h) \end{aligned} .$$

Por definição de ϖ , existe $h \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ tal que

$$g(x) = \frac{1}{2}(h - \delta \cdot h)(x) = \frac{1}{2}(h(x) - \delta^{-1}h(\delta x)), \quad (3.31)$$

para todo $x \in V$. Temos que h é escrito como

$$h(x) = \sum_{j=1}^m f_j(x)h_j(x),$$

com $f_j \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Portanto, g em (3.31) torna-se

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m f_j(x) (h_j(x) - \delta^{-1}h_j(\delta x)) \\ &= \sum_{j=1}^m f_j(x) \left(\frac{1}{2} (h_j - \delta \cdot h_j)(x) \right), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, como desejado. □

Lema 3.3.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V . Sejam $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Para $\tilde{u}_0 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j$ como em (3.22), temos que*

$$\left\{ \tilde{u}_j v_i : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 0, \dots, s \right\} \quad (3.32)$$

constitui um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo.

Demonstração: Seja $h \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ qualquer. Por hipótese, para todo $x \in V$,

$$h(x) = \sum_{i=1}^r h_i(x) v_i(x), \quad (3.33)$$

onde $h_i \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$. Pelo Corolário 3.2.4, $\{1, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s\}$ é um conjunto de geradores para $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo. Então, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, temos

$$h_i(x) = f_{i0}(x) + \sum_{j=1}^s f_{ij}(x) \tilde{u}_j(x), \quad \forall x \in V, \quad (3.34)$$

onde $f_{ij} \in \mathcal{P}(\Gamma)$, para todo $j \in \{0, \dots, s\}$. Para $\tilde{u}_0 \equiv 1$, substitua (3.34) em (3.33) para obter

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^r \left(f_{i0}(x) + \sum_{j=1}^s f_{ij}(x) \tilde{u}_j(x) \right) v_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(f_{i0}(x) \tilde{u}_0(x) v_i(x) + f_{ij}(x) \tilde{u}_j(x) v_i(x) \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=0, \dots, s}} f_{ij}(x) \left(\tilde{u}_j v_i(x) \right), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$, finalizando a prova. $\square$

Demonstração do Teorema 3.3.4: Sejam $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Pelo Lema 3.3.6, o conjunto

$$\left\{ h_{ij} = \tilde{u}_j v_i : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 0, \dots, s \right\}$$

gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, onde $\tilde{u}_0 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j \in \mathcal{P}(\Gamma_+)$ é definido como em (3.22), para cada $j \in \{1, \dots, s\}$. Definindo $\tilde{h}_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} - \delta \cdot h_{ij})$, o resultado segue do Lema 3.3.5. $\square$

Apresentamos a seguir o algoritmo para a determinação de um conjunto de geradores para o $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$. Dos resultados obtidos até então, ressaltamos que tais geradores dependem unicamente dos elementos de uma base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$ e dos geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$.

Algoritmo 2 (cálculo de um conjunto finito de geradores reversíveis-equivariantes)

- Fixe o homomorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ e tome $\Gamma_+ = \ker \sigma$ o grupo das simetrias de Γ e Γ_- o complementar de Γ_+ em Γ ;
- Fixe uma anti-simetria $\delta \in \Gamma_-$;
- Tome $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$;
- Tome $\{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$;
- Defina $\tilde{u}_0 \equiv 1$ e $\tilde{u}_j := \frac{1}{2}(u_j - \delta u_j)$, para cada $j \in \{1, \dots, s\}$;
- Defina $h_{ij} := \tilde{u}_j v_i$ e $\tilde{h}_{ij} := \frac{1}{2}(h_{ij} - \delta \cdot h_{ij})$, para $i = 1, \dots, r$ e $j = 0, \dots, s$;

- $\{\tilde{h}_{ij} : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 0, \dots, s\}$ constitui um conjunto de geradores para o módulo $\vec{Q}(\Gamma)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

A idéia básica apresentada nos Algoritmos 1 e 2 é converter as situações anti-invariante e reversível-equivariante ao caso polinomial invariante. Para finalizar esta seção, determinamos uma correspondência um-a-um entre funções anti-invariantes em $V \times V$ e aplicações reversíveis-equivariantes em V , usando novamente uma conversão ao caso invariante. Esta correspondência é análoga à apresentada em [25, XII, §6(c)] entre funções invariantes em $V \times V$ e aplicações equivariantes em V .

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno Γ -invariante em (ρ, V) , ou seja, $\langle \gamma x, \gamma y \rangle = \langle x, y \rangle$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x, y \in V$. Defina a ação de Γ em $V \times V$ por $\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x, y \in V$. Seja $g \in \vec{Q}(\Gamma)$ qualquer. Afirmamos que a função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \langle g(x), y \rangle$$

é Γ -anti-invariante. De fato,

$$\begin{aligned} f(\gamma(x, y)) &= f(\gamma x, \gamma y) = \langle g(\gamma x), \gamma y \rangle = \langle \sigma(\gamma) \gamma g(x), \gamma y \rangle = \sigma(\gamma) \langle \gamma g(x), \gamma y \rangle \\ &= \sigma(\gamma) \langle g(x), y \rangle = \sigma(\gamma) f(x, y), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x, y \in V$. Por outro lado, seja $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Γ -anti-invariante segundo a ação de Γ em $V \times V$ definida acima. Então, a aplicação $g : V \rightarrow V$ definida por

$$g(x) = (d_y f)_{x,0}^t, \tag{3.35}$$

onde t indica a transposta, é Γ -reversível-equivariante. De fato, diferencie a relação

$$f(\gamma x, \gamma y) = \sigma(\gamma) f(x, y)$$

com respeito a y e calcule em $y = 0$ para obter

$$(d_y f)_{\gamma x,0} \gamma = \sigma(\gamma) (d_y f)_{x,0}.$$

Logo,

$$\gamma^t g(\gamma x) = \gamma^t (d_y f)_{\gamma x,0}^t = \sigma(\gamma) (d_y f)_{x,0}^t = \sigma(\gamma) g(x)$$

e a ortogonalidade da ação de Γ em V implica que $g \in \vec{Q}(\Gamma)$, como afirmado. Portanto, aplicações polinomiais Γ -reversíveis-equivariantes em V podem ser obtidas pela construção (3.35) a partir de funções polinomiais Γ -anti-invariantes em $V \times V$.

3.4 Exemplos

Nesta seção, aplicamos os Algoritmos 1 e 2 descritos nas Seções 3.2 e 3.3, respectivamente, a fim de encontrar a forma geral de específicos campos vetoriais reversíveis-equivariantes. De um modo geral, devemos aplicar os algoritmos a exemplos em que a representação de Γ em V é não auto-dual, ou seja, quando não existe uma aplicação linear invertível $L : V \rightarrow V$ Γ -reversível-equivariante. Caso contrário, os geradores de $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ são obtidos diretamente dos geradores de $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ via L .

1. Campo vetorial $\mathbf{D}_n$ reversível-equivariante:

Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbf{D}_n$ em $\mathbb{C}$ gerada pela conjugação complexa e pela rotação $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$. Fixe $\delta = \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}} \in \Gamma_-$ e tome $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ uma simetria de modo que $\Gamma_+ = \mathbf{D}_{\frac{n}{2}}$. Lembramos que, neste caso, n deve ser par (veja Subseção 2.2.4).

É sabido ([25, XII, §4]) que o conjunto $\{u_1, u_2\}$, onde $u_1(z) = z\bar{z}$ e $u_2(z) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}$, forma uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$. Por (3.22), obtemos

$$\tilde{u}_1(z) = \frac{1}{2}(u_1(z) - u_1(e^{i\frac{2\pi}{n}}z)) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{u}_2(z) = \frac{1}{2}(u_2(z) - u_2(e^{i\frac{2\pi}{n}}z)) = z^{\frac{n}{2}} + \bar{z}^{\frac{n}{2}}.$$

Logo, $\tilde{u}_2$ é o único gerador do módulo dos anti-invariantes $\mathcal{Q}(\mathbf{D}_n)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n)$. Continuando o processo na construção de um campo vetorial $\mathbf{D}_n$ -reversível-equivariante, definimos $\tilde{u}_0(z) = 1$ e aplicamos os passos do Algoritmo 2: tomamos $\{v_1(z) = z, v_2(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_{\frac{n}{2}})$ ([?, XII, §5]) para obter

$$\begin{aligned} h_{10}(z) &= \tilde{u}_0(z)v_1(z) = z, \\ h_{20}(z) &= \tilde{u}_0(z)v_2(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \\ h_{11}(z) &= \tilde{u}_1(z)v_1(z) = 0, \\ h_{21}(z) &= \tilde{u}_1(z)v_2(z) = 0, \\ h_{12}(z) &= \tilde{u}_2(z)v_1(z) = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}, \\ h_{22}(z) &= \tilde{u}_2(z)v_2(z) = (z\bar{z})^{\frac{n}{2}-1}z + \bar{z}^{n-1}. \end{aligned}$$

Notamos que h_{10} e $h_{22} \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{D}_n)$, de modo que $\tilde{h}_{10} = \tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{21} = \tilde{h}_{22} \equiv 0$. Então,

$$\tilde{h}_{20}(z) = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1} \quad \text{e} \quad \tilde{h}_{12}(z) = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\bar{z})\bar{z}^{\frac{n}{2}-1},$$

o que implica que $z^{\frac{n}{2}+1}$ e $\bar{z}^{\frac{n}{2}-1}$ geram o módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}_n)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n)$. Este resultado

confirma a forma geral (2.16) de um campo vetorial $\mathbf{D}_n$ -reversível-equivariante obtida, por meio de cálculos diretos e extensos, na Subseção 2.2.4.

2. Campo vetorial $\mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante:

Considere a ação padrão do grupo $\Gamma = \mathbb{Z}_2(\kappa)$ no plano gerada pela reflexão $\kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Tome $\delta = \kappa$ o único elemento de Γ_- de modo que $\Gamma_+ = \{I\}$.

Se $u_1(x, y) = x$ e $u_2(x, y) = y$, então $\{u_1, u_2\}$ constitui uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\{I\})$. De (3.22), temos

$$\tilde{u}_1(x, y) = x \quad \text{e} \quad \tilde{u}_2(x, y) = y,$$

implicando que $\{x, y\}$ também é um conjunto de geradores para o módulo dos anti-invariantes $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$. Agora, definimos $\tilde{u}_0(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e tomamos $\{v_1(x, y) = (1, 0), v_2(x, y) = (0, 1)\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Então,

$$\begin{aligned} h_{10}(x, y) &= \tilde{u}_0(x, y)v_1(x, y) = (1, 0), \\ h_{20}(x, y) &= \tilde{u}_0(x, y)v_2(x, y) = (0, 1), \\ h_{11}(x, y) &= \tilde{u}_1(x, y)v_1(x, y) = (x, 0), \\ h_{21}(x, y) &= \tilde{u}_1(x, y)v_2(x, y) = (0, x), \\ h_{12}(x, y) &= \tilde{u}_2(x, y)v_1(x, y) = (y, 0), \\ h_{22}(x, y) &= \tilde{u}_2(x, y)v_2(x, y) = (0, y). \end{aligned}$$

Notemos que $h_{ij} \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2)$, para $i, j = 1, 2$, de modo que $\tilde{h}_{ij} \equiv 0$, para $i, j = 1, 2$. Logo,

$$\tilde{h}_{10}(x, y) = (1, 0) \quad \text{e} \quad \tilde{h}_{20}(x, y) = (0, 1)$$

são os únicos geradores reversíveis-equivariantes do módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$. Portanto, a forma geral de um campo vetorial $\mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante é dada por

$$\tilde{g}(x, y) = (p(u, v, w), q(u, v, w)),$$

onde $u = x^2$, $v = y^2$ e $w = xy$ são os geradores de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2)$ e p, q são funções a valores reais $\mathbb{Z}_2$ -invariantes.

3. Campo vetorial $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante:

Considere a ação padrão de $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano gerada pelos flips

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fixe $\delta = \kappa_1 \in \Gamma_-$ e tome κ_2 uma simetria de modo que $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_2(\kappa_2)$ (caso 3 da Subseção 2.2.7).

O conjunto $\{u_1, u_2\}$, onde $u_1(x, y) = x^2$ e $u_2(x, y) = y$, constitui uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Então, temos

$$\tilde{u}_1(x, y) = \frac{1}{2} \left(u_1(x, y) - u_1(\kappa_1(x, y)) \right) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{u}_2(x, y) = \frac{1}{2} \left(u_2(x, y) - u_2(\kappa_1(x, y)) \right) = y,$$

implicando que $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)\{y\}$. Agora, definimos $\tilde{u}_0(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e tomamos $\{v_1(x, y) = (x, 0), v_2(x, y) = (0, 1)\}$ um conjunto minimal de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma_+)$ sob o anel $\mathcal{P}(\Gamma_+)$. Então,

$$\begin{aligned} h_{10}(x, y) &= \tilde{u}_0(x, y)v_1(x, y) = (x, 0), \\ h_{20}(x, y) &= \tilde{u}_0(x, y)v_2(x, y) = (0, 1), \\ h_{11}(x, y) &= h_{21}(x, y) = 0, \\ h_{12}(x, y) &= \tilde{u}_2(x, y)v_1(x, y) = (xy, 0), \\ h_{22}(x, y) &= \tilde{u}_2(x, y)v_2(x, y) = (0, y). \end{aligned}$$

Notemos de ([24, X, §1]) que $h_{10}, h_{22} \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, de modo que $\tilde{h}_{10} = \tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{21} = \tilde{h}_{22} \equiv 0$. Logo,

$$\tilde{h}_{20}(x, y) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \tilde{h}_{12}(x, y) = (xy, 0)$$

são os geradores reversíveis-equivariantes do $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ -módulo $\vec{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, confirmando a forma normal (2.22) da Subseção 2.2.7.

Se considerarmos a ação padrão de $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano gerada por κ_1 e κ_2 de modo que $\delta = \kappa_2 \in \Gamma_-$ e $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_2(\kappa_1)$, então $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = \mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)\{x\}$ e $\{(1, 0), (0, xy)\}$ são os geradores de $\mathcal{Q}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, confirmando também a forma normal (2.21) da Subseção 2.2.7.

A Teoria de Singularidades em Bifurcações Reversíveis-equivariantes

Este capítulo trata da teoria geral de Singularidades para a classificação de pontos de equilíbrios de bifurcações de aplicações reversíveis-equivariantes. A chave para a obtenção dos resultados é olhar para uma aplicação Γ –reversível-equivariante em V como uma aplicação equivariante com ações apropriadas de Γ na fonte e na meta. De um modo natural, adaptamos a bem conhecida teoria de Singularidades Γ –equivariante de germes de aplicações em V a fim de obter a teoria de Singularidades Γ –equivariante de germes de aplicações entre espaços vetoriais distintos V e W sob ações arbitrárias de Γ . A validade dos resultados no contexto de germes de aplicações reversíveis-equivariantes $V \mapsto V$ segue tomando-se $W = V$ e a representação de Γ em W como a representação dual de Γ em V .

Para a classificação reversível-equivariante, o primeiro passo é definir uma relação de equivalência apropriada de forma a preservar as simetrias e anti-simetrias. Além disso, o desdobramento de um germe deve ter também as mesmas simetrias e anti-simetrias. Novamente, isto é registrado primeiramente para germes de aplicações Γ –equivariantes $V \mapsto W$ e, então, restrito ao caso reversível-equivariante.

Na próxima seção obtemos as ferramentas gerais da teoria de Singularidades na classificação de bifurcações Γ –equivariantes. Na Seção 4.2 apresentamos os resultados da teoria para singularidades reversíveis-equivariantes como caso particular dos resultados da Seção 4.1. A classificação de pontos de equilíbrio de bifurcações Γ –reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais é obtida na Seção 4.3 (Teorema 4.3.3), onde estabelecemos uma correspondência entre as teorias de Singularidades nos casos puramente equivariante e reversível-equivariante auto-dual. Nas duas seções seguintes usamos o Teorema 4.3.3 para deduzir as bifurcações de pontos de equilíbrios para ações auto-duais dos grupos $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (Seção 4.4) e $\mathbf{D}_4$ (Seção 4.5) no plano. Finalizamos o capítulo com a Seção 4.6, onde apresentamos resultados gerais em teoria de bifurcação reversível-equivariante.

4.1 Teoria de Singularidades Γ –equivariante

Sejam (ρ, V) e (η, W) dois espaços vetoriais de dimensão finita sob a ação linear de um grupo de Lie compacto Γ . No que segue, V e W representam (ρ, V) e (η, W) , respectivamente. Nesta seção adaptamos as técnicas da teoria de Singularidades equivariante apresentada em [25], adotando aqui a mesma sequência de idéias. Assumimos familiaridade com definições básicas e conceitos apresentados lá.

Começamos lembrando que um germe de função a um parâmetro $f : (V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto \mathbb{R}$ é Γ –invariante se

$$f(\rho(\gamma)x, \lambda) = f(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V$$

e um germe de aplicação a um parâmetro $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$ é Γ –equivariante se

$$g(\rho(\gamma)x, \lambda) = \eta(\gamma)g(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V.$$

Assumimos que o espaço de parâmetros $\mathbb{R}$ não é afetado pela ação de Γ . Denotamos por $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ o anel dos germes Γ –invariantes, por $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ o módulo dos germes Γ –equivariantes $V \mapsto W$ sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$, por $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ o módulo dos germes Γ –equivariantes em V sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e por $\mathcal{E}_\lambda$ os germes de funções apenas de λ .

Um problema de bifurcação Γ –equivariante é o estudo das soluções de $g(x, \lambda) = 0$, onde $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$ é um germe Γ –equivariante tal que $g(0, 0) = 0$ e cuja derivada $(dg)_{(0,0)}$ com respeito a $x \in V$ na origem é singular. Pela Redução de Liapunov-Schmidt [56], podemos assumir $(dg)_{(0,0)} \equiv 0$.

4.1.1 A relação de equivalência

Começamos com a definição de um novo módulo sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$: defina a representação de Γ em $\text{Hom}(W, W)$ por semelhança como $\mu : \Gamma \rightarrow GL(\text{Hom}(W, W))$, onde

$$[\mu(\gamma)]M = \eta(\gamma)M\eta(\gamma^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad M \in GL(\text{Hom}(W, W)).$$

Considere um germe na origem a valores matriciais

$$S : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \text{Hom}(W, W) \tag{4.1}$$

tal que

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda)\eta(\gamma) = \eta(\gamma)S(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V. \tag{4.2}$$

Obviamente, a condição (4.2) implica em

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda) = \mu(\gamma)S(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V,$$

ou seja, S é uma aplicação equivariante de (ρ, V) a $(\mu, \text{Hom}(W, W))$. Vamos denotar por $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ o módulo de famílias de germes de difeomorfismos (4.1) que satisfazem (4.2).

Observação 4.1.1. Quando $(\eta, W) = (\rho, V)$, é imediato que $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ é o módulo dos germes a valores matriciais Γ -equivariantes $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ do caso puramente equivariante [25]. Quando $(\eta, W) = (\rho_\sigma, V)$, o módulo $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ também coincide com o módulo dos germes a valores matriciais $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ do caso puramente equivariante. De fato, segue diretamente da definição de representação dual que $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ satisfaz

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda)\sigma(\gamma)\rho(\gamma) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)S(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V.$$

Pela linearidade de $S(x, \lambda)$, para cada (x, λ) , temos então que

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda)\rho(\gamma) = \rho(\gamma)S(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V,$$

isto é, $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Pelo Teorema 1.2.4, os módulos $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ são finitamente gerados sob $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Para formular a relação de equivalência em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ seguimos a noção de Mather de equivalência de contato [43]:

Definição 4.1.2. Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ um problema de bifurcação Γ -equivariante. Dizemos que $h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ é Γ -equivalente a g , ou simplesmente equivalente a g , se existirem $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e uma mudança de coordenadas invertível $(x, \lambda) \mapsto (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$, com $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $\Lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ tal que

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)), \quad (4.3)$$

onde

$$(a) \quad X(0, 0) = 0;$$

$$(b) \quad \Lambda(0) = 0 \text{ e } \Lambda'(0) > 0;$$

$$(c) \quad S(0, 0) \text{ e } (dX)_{0,0} \text{ são matrizes invertíveis na componente conexa da identidade em } GL(W) \text{ e } GL(V), \text{ respectivamente.}$$

Quando $\Lambda(\lambda) = \lambda$ dizemos que h é Γ -fortemente equivalente a g .

A menos de troca de coordenadas, os zeros do problema de bifurcação Γ -equivariante $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$ são preservados por Γ -equivalência. As condições (c) e $\Lambda'(0) > 0$ são

condições necessárias para preservar a estabilidade destas soluções. Nos exemplos das Subseções 4.4.1 e 4.5.1, também devemos dar condições suficientes para a estabilidade de soluções hiperbólicas ser invariante por equivalência.

Denote por $\mathfrak{G}$ o grupo de equivalências

$$\mathfrak{G} = \left\{ (S, X, \Lambda) \in \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \times \mathcal{E}_\lambda : S, X, \Lambda \text{ satisfazem as condições (a) – (c)} \right\},$$

com a multiplicação do grupo dada por

$$(S_2, X_2, \Lambda_2) \cdot (S_1, X_1, \Lambda_1) = \left(S_2 \cdot (S_1(X_2, \Lambda_2)), (X_1, \Lambda_1) \cdot (X_2, \Lambda_2) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} S_2 \cdot (S_1(X_2, \Lambda_2))(x, \lambda) &= S_2(x, \lambda) S_1(X_2(x, \lambda), \Lambda_2(\lambda)), \\ (X_1, \Lambda_1) \cdot (X_2, \Lambda_2)(x, \lambda) &= \left(X_1(X_2(x, \lambda), \Lambda_2(\lambda)), \Lambda_1(\Lambda_2(\lambda)) \right). \end{aligned}$$

A ação de $\mathfrak{G}$ em $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ é definida por

$$\left((S, X, \Lambda) \cdot g \right)(x, \lambda) \mapsto S(x, \lambda) g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Para a formulação da teoria geral de Singularidades com respeito à versalidade e determinância finita, é exigido que o grupo de equivalências seja um *subgrupo geométrico* do grupo de contato geral. A noção de subgrupo geométrico, introduzida por Damon em [14], considera quatro propriedades: naturalidade, estrutura de espaço tangente, aplicação exponencial e condição de filtração (ver [14] para mais detalhes). Observamos que $\mathfrak{G}$ como definido acima é de fato um subgrupo geométrico.

Observação 4.1.3. *Quando $(\eta, W) = (\rho, V)$, $\mathfrak{G}$ é o grupo de equivalências do caso puramente equivariante. Quando $(\eta, W) = (\rho_\sigma, V)$, isto é, no contexto reversível-equivariante, o grupo $\mathfrak{G}$ também coincide com o grupo de equivalências do caso puramente equivariante. Isto é uma consequência da Observação 4.1.1, onde observamos que no contexto reversível-equivariante o módulo $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma, V, W)$ coincide com o módulo $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.*

Ainda a respeito da relação de equivalência, observamos que não existe alteração nas classes de equivalência se assumirmos as mudanças de coordenadas na meta como germes a valores matriciais ao invés de difeomorfismos gerais. Isto é obtido como uma adaptação imediata de [25, XIV, Proposition 1.5] ao presente contexto:

Proposição 4.1.4. *Seja $Q : (V \times \mathbb{R} \times W, 0) \rightarrow W$ um germe de uma família parametrizada de difeomorfismos em W (isto é, para cada $(x, \lambda) \in V \times \mathbb{R}$, $Q(x, \lambda, \cdot)$ é um germe de difeomorfismo*

na origem em W) satisfazendo:

(a) $Q(x, \lambda, 0) = 0$

(b) $Q(\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\gamma)y) = \eta(\gamma)Q(x, \lambda, y)$, para todo $\gamma \in \Gamma$.

Tome $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$ um germe Γ -equivariante. Então existe uma matriz S em $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ com $S(0, 0)$ invertível tal que

$$Q(x, \lambda, g(x, \lambda)) = S(x, \lambda)g(x, \lambda).$$

Demonstração: Por (a), podemos usar o teorema de Taylor com parâmetros para escrever

$$Q(x, \lambda, y) = A(x, \lambda, y)y, \quad (4.4)$$

onde A é uma matriz sobre W dependendo suavemente de x, y e λ . Além disso, uma vez que $Q(0, 0, \cdot)$ é um germe de difeomorfismo sobre W temos $A(0, 0, 0)$ invertível. Afirmamos que é possível escolher A em (4.4) que preserve a condição (b), ou seja, tal que

$$A(\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\gamma)y)\eta(\gamma) = \eta(\gamma)A(x, \lambda, y). \quad (4.5)$$

De fato, tome

$$B(x, \lambda, y) = \int_{\Gamma} \eta(\delta^{-1})A(\rho(\delta)x, \lambda, \eta(\delta)y)\eta(\delta).$$

Então, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} B(\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\gamma)y) &= \int_{\Gamma} \eta(\delta^{-1})A(\rho(\delta)\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\delta)\eta(\gamma)y)\eta(\delta) \\ &= \int_{\Gamma} \eta(\gamma(\delta\gamma)^{-1})A(\rho(\delta\gamma)x, \lambda, \eta(\delta\gamma)y)\eta((\delta\gamma)\gamma^{-1}) \\ &= \eta(\gamma) \left[\int_{\Gamma} \eta(\zeta^{-1})A(\rho(\zeta)x, \lambda, \eta(\zeta)y)\eta(\zeta) \right] \eta(\gamma^{-1}) \\ &= \eta(\gamma)B(x, \lambda, y)\eta(\gamma^{-1}), \end{aligned}$$

onde $\zeta = \delta\gamma$. Portanto, B satisfaz (4.5). Agora, a condição (b) implica que

$$Q(x, \lambda, y) = \int_{\Gamma} \eta(\gamma^{-1})Q(\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\gamma)y),$$

que combinado com (4.4) nos dá

$$\begin{aligned} Q(x, \lambda, y) &= \int_{\Gamma} \eta(\gamma^{-1})A(\rho(\gamma)x, \lambda, \eta(\gamma)y)\eta(\gamma)y \\ &= B(x, \lambda, y)y. \end{aligned}$$

Então, podemos escolher A em (4.4) que satisfaça (4.5).

Tome agora $S(x, \lambda) = A(x, \lambda, g(x, \lambda))$. Facilmente concluimos que

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda)\eta(\gamma) = \eta(\gamma)S(x, \lambda)$$

e

$$Q(x, \lambda, g(x, \lambda)) \stackrel{(4.4)}{=} A(x, \lambda, g(x, \lambda))g(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(x, \lambda),$$

como queríamos. □

Observação 4.1.5. *A mesma prova é válida se λ é trocado por um parâmetro multidimensional (λ, α) , onde $\alpha \in \mathbb{R}^p$. Isto será usado na demonstração do Teorema 4.1.11, onde α representa um parâmetro de desdobramento.*

4.1.2 Teoria de desdobramento e espaços tangentes

A teoria de desdobramento é o estudo de famílias parametrizadas das perturbações qualitativamente distintas de um dado germe g . Nesta subseção estendemos as idéias e os conceitos desenvolvidos em [25] no caso puramente equivariante ao contexto de germes de aplicações Γ -equivariantes $(V, 0) \mapsto W$. Em toda parte, denotamos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \mathbb{R}^l$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$, para $l, k \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\mathcal{E}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma)$ o anel das famílias de germes a k parâmetros em $\mathcal{E}_{x, \lambda}(\Gamma)$, por $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma; V, W)$ o $\mathcal{E}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma)$ -módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma; V, W)$ e por $\vec{\mathcal{F}}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma)$ o $\mathcal{E}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma)$ -módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\vec{\mathcal{F}}_{x, \lambda}(\Gamma)$. Analogamente, denotamos por $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma; V, W)$ o $\mathcal{E}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma)$ -módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma; V, W)$, por $\mathcal{E}_{\lambda, \beta}$ o anel das famílias de germes a k parâmetros em $\mathcal{E}_\lambda$ e por $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}$ o anel dos germes $\Phi : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow \mathbb{R}^k$. Finalmente, denotamos por $\vec{\mathcal{M}}_{x, \lambda}(\Gamma)$ o submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma)$ dos germes que se anulam na origem.

No que segue definimos espaço tangente e espaço tangente restrito de um germe Γ -equivariante $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$, ambas as definições derivadas da Γ -equivalência (Definição 4.1.2). Começamos apresentando os conceitos básicos da teoria de desdobramento neste contexto.

Definição 4.1.6. *Um Γ -desdobramento a k parâmetros de um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma; V, W)$ é um germe Γ -equivariante $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda, \beta}(\Gamma; V, W)$ tal que*

$$G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda).$$

Na teoria qualitativa definida por $\mathfrak{G}$ -equivalências é possível determinar, para cada α , quando um Γ -desdobramento a l -parâmetros $H(\cdot, \cdot, \alpha)$ é equivalente a um outro desdobramento $G(\cdot, \cdot, \beta)$. Usando a noção de fatoração, representamos esta idéia na seguinte definição:

Definição 4.1.7. Se $H \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W)$ é um desdobramento a l parâmetros de g e $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ é um desdobramento a k parâmetros de g , dizemos que H se fatora através de G se

$$H(x, \lambda, \alpha) = S(x, \lambda, \alpha)G(X(x, \lambda, \alpha), \Lambda(\lambda, \alpha), A(\alpha)) \quad (4.6)$$

onde

$$(a) \ S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W) \text{ e } S(x, \lambda, 0) = I;$$

$$(b) \ X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma) \text{ e } X(x, \lambda, 0) = x;$$

$$(c) \ \Lambda \in \mathcal{E}_{\lambda,\alpha} \text{ e } \Lambda(\lambda, 0) = \lambda;$$

$$(d) \ A \in \mathcal{E}_{\alpha,\beta} \text{ e } A(0) = 0.$$

Definição 4.1.8. Dizemos que $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ e $H \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W)$ são Γ -isomorfos se (4.6) valer para A um difeomorfismo.

Definição 4.1.9. Um desdobramento G of g é versal se todo desdobramento H de g se fatora através de G . Ele é universal se o número de parâmetros é mínimo. Este número é chamado de codimensão de g .

O grupo $\mathfrak{G}_{un}(k)$ das equivalências em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ é definido como

$$\mathfrak{G}_{un}(k) = \left\{ (S, X, \Lambda, \Phi) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W) \times \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma) \times \mathcal{E}_{\lambda,\beta} \times \mathcal{E}_{\beta,\beta} : (S, X, \Lambda) \text{ é um desdobramento a } k \text{ parâmetros de um elemento em } \mathfrak{G} \text{ e } \Phi \text{ é um germe de difeomorfismo tal que } \Phi(0) = 0 \right\},$$

a ação de $\mathfrak{G}_{un}(k)$ em $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ sendo dada por

$$\left((S, X, \Lambda, \Phi) \cdot G \right)(x, \lambda, \beta) \mapsto S(x, \lambda, \beta)G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), \Phi(\beta)).$$

Agora definimos o *espaço tangente restrito* $\text{RT}(g)$ de um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ como o conjunto de perturbações $p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ tal que $g + tp$ é Γ -fortemente equivalente a g , para t suficientemente pequeno. Portanto,

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda), \quad (4.7)$$

onde $S(x, \lambda, 0) = I$, $X(0, 0, t) = 0$ e $X(x, \lambda, 0) = x$. Diferenciando (4.7) com respeito a t e tomando $t = 0$ obtemos

$$\text{RT}(g) = \{Sg + (dg)X : (S, X) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) \times \vec{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(\Gamma)\}. \quad (4.8)$$

Definimos o *espaço tangente estendido* $T(g)$ de g por

$$T(g) = \{Sg + (dg)X : (S, X) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) \times \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)\} + \mathcal{E}_\lambda g_\lambda. \quad (4.9)$$

Por definição,

$$T(g) = RT(g) + \mathbb{R}\{(dg)Y_1, \dots, (dg)Y_m\} + \mathcal{E}_\lambda g_\lambda,$$

onde Y_i 's geram os germes Γ -equivariantes que não se anulam na origem, módulo aqueles que se anulam na origem.

Na proposição seguinte lembramos a estrutura algébrica de $RT(g)$. Este resultado é o correspondente a [25, XIV, Proposition 1.4] para germes de $(V \times \mathbb{R}, 0)$ em W .

Proposição 4.1.10. *Para $h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$, o espaço $RT(h)$ é um submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ finitamente gerado sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ cujos geradores são dados por*

$$S_1 h, \dots, S_t h; (dh)(X_1), \dots, (dh)(X_s),$$

onde $S_1, \dots, S_t$ geram $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e $X_1, \dots, X_s$ geram $\vec{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Demonstração: Notamos que para $h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ a matriz jacobiana $(dh)_{(x,\lambda)}$ satisfaz a condição de simetria

$$(dh)_{(\rho(\gamma)x,\lambda)} \rho(\gamma) = \eta(\gamma)(dh)_{(x,\lambda)}, \quad (4.10)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Pela definição de espaço tangente restrito, um elemento de $RT(h)$ tem a forma

$$Sh + (dh)X, \quad (4.11)$$

onde $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e $X \in \vec{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(\Gamma)$. Verificamos que $Sh \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$:

$$\begin{aligned} Sh(\rho(\gamma)x, \lambda) &= S(\rho(\gamma)x, \lambda)h(\rho(\gamma)x, \lambda) \\ &= S(\rho(\gamma)x, \lambda)\eta(\gamma)h(x, \lambda) \\ &= \eta(\gamma)S(x, \lambda)h(x, \lambda) \\ &= \eta(\gamma)Sh(x, \lambda). \end{aligned}$$

Do mesmo modo e usando (4.10), obtemos que $(dh)X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$.

Portanto, $RT(h) \subseteq \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$. É imediato que $RT(h)$ tem estrutura de $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ -submódulo e é gerado por

$$S_1 h, \dots, S_t h; (dh)(X_1), \dots, (dh)(X_s).$$

□

O seguinte teorema corresponde a [25, XV, Theorem 2.1] para germes Γ -equivariantes $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$ a um parâmetro. Ele é o principal resultado na teoria de desdobramento e

sua demonstração segue os passos da prova da versão puramente equivariante.

Teorema 4.1.11. (O Teorema do desdobramento Γ –equivariante) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e em W . Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ um desdobramento a k parâmetros de g . Então G é versal se, e somente se,*

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{G_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\}, \quad (4.12)$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$.

É uma consequência direta do teorema acima que a codimensão de g é igual à codimensão de $T(g)$ em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$. A proposição seguinte generaliza [25, XV, Corollary 2.2 e Theorem 7.4], dados para germes puramente equivariantes, ao contexto de germes Γ –equivariantes $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$. O item (a) fornece uma expressão para o desdobramento universal de um germe g de codimensão finita a partir de uma base do complemento de $T(g)$ em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$.

Proposição 4.1.12. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e em W e seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$.*

(a) *Se $W \subseteq \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ é um subespaço vetorial tal que*

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) \oplus W$$

e se $\{p_1, \dots, p_k\}$ é uma base para W , então

$$G(x, \lambda, \beta) = g(x, \lambda) + \sum_{j=1}^k \beta_j p_j(x, \lambda)$$

é um Γ –desdobramento universal de g , com $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$.

(b) *Dois desdobramentos versais $G(x, \lambda, \beta)$ e $H(x, \lambda, \alpha)$ são Γ –isomorfos se, e somente se, eles têm o mesmo número de parâmetros de desdobramentos.*

Demonstração: O item (a) segue diretamente do Teorema 4.1.11. Para o item (b), como não existe condição de equivariância nos parâmetros de desdobramento, a prova é análoga à prova de [25, XV, Theorem 7.4]. $\square$

Segue também do Teorema 4.1.11 o seguinte:

Proposição 4.1.13. *Sejam $f, g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ dois germes de codimensão finita Γ –equivalentes e sejam $F, G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ dois desdobramentos universais de f e g , respectivamente. Então F e G são Γ –equivalentes.*

Demonstração: Por hipótese, existe $(S, X, \Lambda) \in \mathfrak{G}$ tal que

$$f(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)).$$

Como G é um desdobramento versal de g ,

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{G_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\}. \quad (4.13)$$

Considere agora o desdobramento F' de f dado por

$$F'(x, \lambda, \alpha) = S(x, \lambda)G(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), \alpha) \quad (4.14)$$

e o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H : \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) & \rightarrow & \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) \\ h & \mapsto & (S, X, \Lambda) \cdot h \end{array}.$$

Note que $H(g) = f$ e $H(T(g)) = T(f)$. Além disso, para todo $1 \leq i \leq k$ temos

$$F'_{\alpha_i}(x, \lambda, 0) = S(x, \lambda)G_{\alpha_i}(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda), 0) = H(G_{\alpha_i}(x, \lambda, 0)).$$

Portanto, usando o isomorfismo H e (4.13), temos:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) &= H(\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)) \\ &= H(T(g)) + \mathbb{R}\{H(G_{\beta_1}(x, \lambda, 0)), \dots, H(G_{\beta_k}(x, \lambda, 0))\} \\ &= T(f) + \mathbb{R}\{F'_{\alpha_1}(x, \lambda, 0), \dots, F'_{\alpha_k}(x, \lambda, 0)\}, \end{aligned}$$

o que implica, pelo Teorema 4.1.11, que F' também é um desdobramento versal de f . Como o número de parâmetros de F e F' é o mesmo, F e F' são Γ -isomorfos, isto é, existe $(S', X', \Lambda', A') \in \mathfrak{G}_{un}(k)$ tal que

$$F(x, \lambda, \alpha) = S'(x, \lambda, \alpha)F'(X'(x, \lambda, \alpha), \Lambda'(\lambda, \alpha), A'(\alpha)). \quad (4.15)$$

Por (4.14), existe $(\tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{\Lambda}, \tilde{A}) \in \mathfrak{G}_{un}(k)$ tal que (4.15) torna-se

$$F(x, \lambda, \alpha) = \tilde{S}(x, \lambda, \alpha)G(\tilde{X}(x, \lambda, \alpha), \tilde{\Lambda}(\lambda, \alpha), \tilde{A}(\alpha)),$$

isto é, F e G são Γ -equivalentes. □

4.1.3 A demonstração do Teorema 4.1.11

O Teorema do Desdobramento Universal Γ -equivariante é um resultado central na obtenção de um desdobramento versal de um germe Γ -equivariante $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$. De fato, ele

fornece uma condição necessária e suficiente para que um desdobramento de g seja versal. Este resultado generaliza [25, XV, Theorem 2.1], sendo a demonstração de ambos análoga. Notamos que ele foi obtido por nós antes de conhecermos [58], que obtém o teorema para multiparâmetros. A prova que apresentamos abaixo segue exatamente os passos da prova da versão puramente equivariante, fazendo as devidas adaptações. Começamos provando a condição necessária.

Seja $p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ arbitrário e considere o desdobramento a um parâmetro de g da forma $H(x, \lambda, t) = g(x, \lambda) + tp(x, \lambda)$. Suponha $G(x, \lambda, \beta)$ um Γ -desdobramento versal de g . Então, por definição, H se fatora através de G , isto é,

$$g(x, \lambda) + tp(x, \lambda) = S(x, \lambda, t)G(X(x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t), A(t)),$$

onde $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,t}(\Gamma; V, W)$ com $S(x, \lambda, 0) = I$, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,t}(\Gamma)$ com $X(x, \lambda, 0) = x$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ e $A : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$. Diferenciamos a equação acima com respeito a t e avaliamos em $t = 0$ para obter

$$p(x, \lambda) = \dot{S}(x, \lambda, 0)g(x, \lambda) + (dg)_{x,\lambda}\dot{X}(x, \lambda, 0) + g_\lambda(x, \lambda)\dot{\Lambda}(\lambda, 0) + \sum_{j=1}^k G_{\beta_j}(x, \lambda, 0)\dot{A}_j(0).$$

Reescrevemos a igualdade acima como

$$p(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(x, \lambda) + (dg)_{x,\lambda}X(x, \lambda) + g_\lambda(x, \lambda)\Lambda(\lambda) + \sum_{j=1}^k G_{\beta_j}(x, \lambda, 0)\dot{A}_j(0), \quad (4.16)$$

com $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $\Lambda \in \mathcal{E}_\lambda$.

A definição de $T(g)$ dada em (4.9) e a arbitrariedade de p implicam que se G é um Γ -desdobramento versal de g , então

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{G_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\}, \quad (4.17)$$

como desejado.

Para provar que (4.17) também é uma condição suficiente para G ser versal, precisamos de um resultado preliminar.

Definimos para um desdobramento a p -parâmetros K de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$

$$\tilde{T}(K) = \{S(x, \lambda, \delta)K + (d_x K)X(x, \lambda, \delta) : (S, X) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W) \times \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)\}$$

e o espaço tangente estendido

$$T(K) = \tilde{T}(K) + \mathcal{E}_{\lambda,\delta}K_\lambda, \quad (4.18)$$

onde $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$. Note que $T(K)$ não é um $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ -módulo mas $\tilde{T}(K)$ é. Então:

Proposição 4.1.14. *Seja $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$ um germe de codimensão finita em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$ e seja $K : (V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p, 0) \mapsto W$ um desdobramento a p -parâmetros de g , com $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p)$. Tome $q_1, \dots, q_r \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W)$. Então são equivalentes:*

$$i. \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{q_1(x, \lambda, 0), \dots, q_r(x, \lambda, 0)\},$$

$$ii. \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W) = T(K) + \mathcal{E}_\delta\{q_1(x, \lambda, \delta), \dots, q_r(x, \lambda, \delta)\}.$$

Demonstração: A prova deste resultado é a mesma de [25, Corollary XV. 7.2]: tome $\delta = 0$, para provar que *ii.* implica em *i.* Para a recíproca, usamos o resultado [25, XV, Lemma 7.1], que é um caso particular do Teorema de Preparação de Malgrange [25, XV, Theorem 8.1]. $\square$

Para provar a suficiência do resultado, tome $H \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W)$ um desdobramento a l -parâmetros de g . Para $A : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow \mathbb{R}^k$ um germe tal que $A(0) = 0$, definimos o *pullback* $A^*G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W)$ de $G \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$ por $A^*G(x, \lambda, \alpha) = G(x, \lambda, A(\alpha))$. Note que A^*G também é um desdobramento a l -parâmetros de g .

Nosso objetivo agora é mostrar que H se fatora através de G . Para isso, considere o desdobramento a $(k + l)$ -parâmetros de g

$$K(x, \lambda, \beta, \alpha) = G(x, \lambda, \beta) + H(x, \lambda, \alpha) - g(x, \lambda)$$

e tome $\delta = (\beta, \alpha) = (\delta_1, \dots, \delta_p)$, onde $p = k + l$ e $\delta_1 = \beta_1, \dots, \delta_k = \beta_k, \delta_{k+1} = \alpha_1, \dots, \delta_{k+l} = \alpha_l$.

Supondo que $A : (\mathbb{R}^{k+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ seja uma submersão tal que K é Γ -isomorfo a A^*G , então existem $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W)$, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma)$ e $\Lambda \in \mathcal{E}_{\lambda,\delta}$ com $S(x, \lambda, 0) = I$, $X(x, \lambda, 0) = x$ e $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$ tal que

$$K(x, \lambda, \beta, \alpha) = S(x, \lambda, \beta, \alpha)A^*G(X(x, \lambda, \beta, \alpha), \Lambda(\lambda, \beta, \alpha), \beta, \alpha).$$

Para $\beta = 0$,

$$\begin{aligned} H(x, \lambda, \alpha) &= K(x, \lambda, 0, \alpha) \\ &= S(x, \lambda, 0, \alpha)A^*G(X(x, \lambda, 0, \alpha), \Lambda(\lambda, 0, \alpha), 0, \alpha) \\ &= \tilde{S}(x, \lambda, \alpha)G(\tilde{X}(x, \lambda, \alpha), \tilde{\Lambda}(\lambda, \alpha), \tilde{A}(\alpha)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{S}(x, \lambda, \alpha) := S(x, \lambda, 0, \alpha) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma; V, W)$, $\tilde{X}(x, \lambda, \alpha) := X(x, \lambda, 0, \alpha) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\alpha}(\Gamma)$, $\tilde{\Lambda}(\lambda, \alpha) := \Lambda(\lambda, 0, \alpha) \in \mathcal{E}_{\lambda,\alpha}$, $\tilde{A}(\alpha) = A(0, \alpha)$, com $\tilde{S}(x, \lambda, 0) = I$, $\tilde{X}(x, \lambda, 0) = x$ e $\tilde{\Lambda}(\lambda, 0) = \lambda$, o que prova que H se fatora através de G .

Resta mostrar, portanto, que existe uma tal submersão $A : (\mathbb{R}^{k+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$. Fazemos isso por indução sobre l .

De fato, o caso $l = 0$ é óbvio: basta tomar $A = I_k$. Assumimos que o fato vale para $l - 1$, onde $\mathbb{R}^{l-1}$ é mergulhado em $\mathbb{R}^l$ por

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}) \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, 0).$$

Defina $L : V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-1} \rightarrow W$ por

$$L(x, \lambda, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}) = K(x, \lambda, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}, 0).$$

Então, por hipótese de indução, existe uma submersão $B : (\mathbb{R}^{k+l-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ tal que L é Γ -isomorfo a B^*G .

Agora, é suficiente encontrar uma submersão $C : (\mathbb{R}^{k+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{k+l-1}, 0)$ tal que K é Γ -isomorfo a C^*L . Deste modo, podemos tomar a submersão $A = B \circ C : (\mathbb{R}^{k+l}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ e mostrar que K é Γ -isomorfo a A^*G .

Por hipótese,

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{G_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\},$$

que equivale a

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W) = T(g) + \mathbb{R}\{K_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, K_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\}, \quad (4.19)$$

uma vez que $K_{\beta_i}(x, \lambda, 0, \alpha) = G_{\beta_i}(x, \lambda, 0)$, para todo $i = 1, \dots, k$ e $\alpha \in \mathbb{R}^l$. Em particular, para $\alpha = 0$. Pela Proposição 4.1.14,

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W) = T(K) + \mathcal{E}_\delta\{K_{\beta_1}, \dots, K_{\beta_k}\},$$

onde $T(K)$ é como em (4.18). Além disso, $-K_{\delta_p} = -K_{\alpha_l} \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W)$. Por isso,

$$-K_{\delta_p} = SK + (dK)X + \Lambda(\lambda, \delta)K_\lambda + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_i(\delta)K_{\delta_i},$$

onde $\xi_i(\delta) = 0$ para $k+1 \leq i \leq p-1$. Podemos escrever

$$(dK)X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial K}{\partial x_j},$$

onde $X = (X_1, \dots, X_n)$ e $\frac{\partial K}{\partial x_j}$ é o vetor $(\frac{\partial K_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial K_m}{\partial x_j})^t$, para cada $j = 1, \dots, n$. Portanto,

$$-K_{\delta_p} = SK + \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial K}{\partial x_j} + \Lambda(\lambda, \delta)K_\lambda + \sum_{i=1}^{p-1} \xi_i(\delta)K_{\delta_i}, \quad (4.20)$$

onde S e X satisfazem as condições de equivariância apropriadas.

Para $i = 1, \dots, p-1$, considere o sistema de EDOs

$$\begin{cases} \frac{d\delta_p}{dt} = 1 \\ \frac{dx}{dt} = X(x, \lambda, \delta) \\ \frac{d\lambda}{dt} = \Lambda(\lambda, \delta) \\ \frac{d\delta_i}{dt} = \xi_i(\delta) \end{cases} \quad (4.21)$$

e suponha $(\delta_p(t), x(t), \lambda(t), \delta_i(t))$ uma solução. Então (4.20) pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt}K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = -S(x(t), \lambda(t), \delta(t))K(x(t), \lambda(t), \delta(t)). \quad (4.22)$$

Tome as condições iniciais $\delta_p(0) = 0$, $x(0) = x_0$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\delta_i(0) = \delta_{i0}$, $i = 1, \dots, p-1$. Então a curva solução $P(t)$ de (4.21) em $P_0 = (0, x_0, \lambda_0, \delta_{10}, \dots, \delta_{(p-1)0})$ é transversal ao hiperplano $\delta_p = 0$ pois $\frac{d\delta_p}{dt} = 1$.

Defina a aplicação $\varphi : V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{p-1}$ projetando (x, λ, δ) ao longo destas curvas integrais até $\delta_p = 0$. Então φ é suave e a restrição de φ ao hiperplano $\delta_p = 0$ é a identidade. Podemos escrever φ na forma

$$\varphi(x, \lambda, \delta) = (\varrho(x, \lambda, \delta), \Lambda(\lambda, \delta), C(\delta))$$

com $\varrho(x, \lambda, \delta)|_{\delta_p=0} = x$ e $\Lambda(\lambda, \delta)|_{\delta_p=0} = \lambda$. Como $C : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p-1}$, o rank de $(dC)_0$ é no máximo $p-1$ e, por isso, a matriz jacobiana de φ na origem é da forma

$$(d\varphi)_0 = \begin{pmatrix} (d\varrho)_0 & * & * \\ 0 & (d_\lambda \Lambda)_0 & * \\ 0 & 0 & (d_\delta C)_0 \end{pmatrix} = \left(I_{n+p} \quad \left| \quad * \right. \right),$$

implicando que φ é uma submersão com rank $(d\varphi)_0 = n+p$. Também,

- (a) rank $(d_\delta C)_0 = p-1$, por isso C é uma submersão,
- (b) $\det(d_\lambda \Lambda)_0 \neq 0$, por isso $\Lambda(\cdot, \delta)$ é um difeomorfismo para cada δ ,
- (c) $\det(d\varrho)_0 \neq 0$, por isso $\varrho(\cdot, \lambda, \delta)$ é um difeomorfismo para cada (λ, δ) .

Mostramos agora que $\varrho : V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow V$ é um germe puramente equivariante. Para isso,

identificamos t com δ_p ((4.21) implica $\delta_p = t$). De fato,

$$\frac{d}{dt}\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0} = \frac{dx}{dt} = X(x, \lambda, \delta) = X\left(\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0}, \lambda, \delta\right),$$

implica que

$$\frac{d}{dt}\varrho(\rho(\gamma)x, \lambda, \delta)|_{t=0} = X\left(\varrho(\rho(\gamma)x, \lambda, \delta)|_{t=0}, \lambda, \delta\right)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(\gamma)\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0} &= \rho(\gamma)\frac{d}{dt}\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0} \\ &= \rho(\gamma)X\left(\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0}, \lambda, \delta\right) \\ &= X\left(\rho(\gamma)\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0}, \lambda, \delta\right). \end{aligned}$$

Portanto, $\varrho(\rho(\gamma)x, \lambda, \delta)$ e $\rho(\gamma)\varrho(x, \lambda, \delta)$ são ambas soluções de $\frac{dx}{dt} = X(x, \lambda, \delta)$, para $\delta_p = 0$. Além disso,

$$\varrho(\rho(\gamma)x, \lambda, \delta)|_{t=0} = \rho(\gamma)x = \rho(\gamma)\varrho(x, \lambda, \delta)|_{t=0}.$$

Por continuidade e por unicidade de solução,

$$\varrho(\rho(\gamma)x, \lambda, \delta) = \rho(\gamma)\varrho(x, \lambda, \delta),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, como desejado.

Agora, para um dado ponto $Q = (x, \lambda, \delta)$, tome uma curva integral $(x(t), \lambda(t), \delta(t))$ de (4.21) passando por Q e considere o sistema não autônomo

$$\frac{dy}{dt} = -S(x(t), \lambda(t), \delta(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (4.23)$$

De fato, (4.23) depende apenas de $(x(0), \lambda(0), \delta(0))$ juntamente com a condição inicial y_0 , uma vez que $(x(t), \lambda(t), \delta(t))$ é obtido integrando (4.21). Portanto, a solução de (4.23) é da forma $y(t) = Y\left(y_0, t, (x(0), \lambda(0), \delta(0))\right)$. Afirmamos que para t fixo e $(x(0), \lambda(0), \delta(0))$ perto de zero, a aplicação

$$y_0 \mapsto y(t)$$

é um difeomorfismo. De fato, tome $x(0) = \lambda(0) = \delta(0) = 0$. Então (4.21) conduz a

$$x(t) = 0, \quad \lambda(t) = 0, \quad \delta_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, p-1), \quad \delta_p(t) = t.$$

Portanto, para $(x(0), \lambda(0), \delta(0)) = 0$, $(d_y Y)_0$ é não singular. Por continuidade, $(d_y Y)_0$ é não singular para $(x(0), \lambda(0), \delta(0))$ perto de zero.

Agora, por (4.22), $K(x(t), \lambda(t), \delta(t))$ satisfaz (4.23) e, por isso,

$$K(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = Y\left(K(x(0), \lambda(0), \delta(0)), t, (x(0), \lambda(0), \delta(0))\right). \quad (4.24)$$

Além disso, pela definição de φ , se $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{p-1})$ então

$$\varphi(x(t), \lambda(t), \delta(t)) = (x(0), \lambda(0), \tilde{\delta}(0)).$$

Como todo ponto (x, λ, δ) perto do zero tem uma curva integral de (4.21) passando por ele no tempo $t = \delta_p$, podemos reescrever (4.24) como

$$K(x, \lambda, \delta) = E_{x\lambda\delta}(K(\varphi(x, \lambda, \delta), 0))$$

para

$$E_{x\lambda\delta}(y) = Y(y, \delta_p, \varphi(x, \lambda, \delta), 0)$$

uma família de difeomorfismos em W . Então,

$$\begin{aligned} K(x, \lambda, \delta) &= E_{x\lambda\delta}\left(K(\rho(x, \lambda, \delta), \Lambda(\lambda, \delta), C(\delta), 0)\right) \\ &= E_{x\lambda\delta}C^*L(\rho(x, \lambda, \delta), \Lambda(\lambda, \delta), \delta). \end{aligned}$$

Pela Proposição 4.1.4, podemos trocar o difeomorfismo não linear $E_{x\lambda\delta}$ por matrizes $S_{x\lambda\delta}$. Mais especificamente, existe $S \in \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\delta}(\Gamma; V, W)$, com $S(0, 0, 0)$ invertível tal que

$$K(x, \lambda, \delta) = S(x, \lambda, \delta)C^*L(\rho(x, \lambda, \delta), \Lambda(\lambda, \delta), \delta).$$

Portanto, K é Γ -isomorfo a C^*L , onde $C : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ é uma submersão, como queríamos. $\square$

4.2 O caso reversível-equivariante

Nesta seção, afirmamos os resultados de classificação de germes na origem de aplicações $g : (\rho, V) \times \mathbb{R} \rightarrow (\rho_\sigma, V)$ que comutam com a ação de Γ . Eles seguem diretamente dos resultados da seção anterior, uma vez que reconhecemos o problema reversível-equivariante como um problema equivariante sob ações apropriadas na fonte e na meta, isto é, tomando (η, W) como (ρ_σ, V) . Para simplificar e padronizar notação adotamos nesta seção a seguinte convenção: denotamos por g um elemento geral em $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e por $\tilde{g}$ um elemento geral em $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$. Também, denotamos por $\text{RT}(g, \Gamma)$ e $\text{T}(g, \Gamma)$ os espaços tangentes restritos e estendidos de um germe puramente equivariante $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ para fazer distinção com os espaços tangentes $\text{RT}(\tilde{g})$ e

$T(\tilde{g})$ de um germe Γ -reversível-equivariante $\tilde{g}$.

Começamos lembrando da Observação 4.1.3 que o grupo $\mathfrak{G}$ de equivalências que preserva simetrias e anti-simetrias é o mesmo grupo considerado para a classificação puramente equivariante, a saber

$$\mathfrak{G} = \{(S, X, \Lambda) \in \overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \times \overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \times \mathcal{E}_\lambda\}, \quad (4.25)$$

onde X, Λ satisfazem as condições (a) – (b) da Definição 4.1.2 e $S(0, 0)$, $(dX)_{0,0}$ são matrizes invertíveis na componente conexa da identidade em $GL(V)$.

Reafirmamos abaixo a Proposição 4.1.10 para o caso reversível-equivariante.

Proposição 4.2.1. *Para $\tilde{g} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, os geradores do $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ -submódulo $RT(\tilde{g}) \subset \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ são*

$$S_1\tilde{g}, \dots, S_t\tilde{g}; (d\tilde{g})(X_1), \dots, (d\tilde{g})(X_s),$$

onde $S_1, \dots, S_t$ geram $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $X_1, \dots, X_s$ geram $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Observamos que os geradores de $RT(g, \Gamma)$ e $RT(\tilde{g})$ diferem apenas devido às condições simétricas distintas de g e $\tilde{g}$, sendo os elementos S_i 's e X_j 's os mesmos em ambos os casos. O mesmo vale para $T(g, \Gamma)$ e $T(\tilde{g})$.

Reafirmamos abaixo o Teorema 4.1.11 seguindo a notação adotada para a teoria reversível-equivariante:

Teorema 4.2.2. *Sejam $g \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $G \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$ um desdobramento a k parâmetros de g . Então G é versal se e somente se*

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma) = T(\tilde{g}) + \mathbb{R}\{G_{\beta_1}(x, \lambda, 0), \dots, G_{\beta_k}(x, \lambda, 0)\}, \quad (4.26)$$

onde $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$.

Na Tabela 4.1 listamos ações específicas no plano dos grupos $\Gamma = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbf{O}(2)$ e $\mathbf{D}_n$. Consideramos $\mathbf{D}_n$ com $n \geq 3$ para o flip κ agindo como uma reversibilidade, e também $\mathbf{D}_n$ com n par para o flip κ agindo como uma simetria e a rotação $\xi = 2\pi/n$ como uma anti-simetria. Também apresentamos os geradores para o anel de invariantes $\mathcal{E}(\Gamma)$ e para os módulos $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$, $\overrightarrow{\mathcal{F}}(\Gamma)$ e $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ (aqui estamos omitindo a variável de estado e o parâmetro λ na notação destes conjuntos), que são usados para obter a Tabela 4.2. Nesta tabela reproduzimos as informações para os equivariantes a fim de compará-las com as informações dos reversíveis-equivariantes. Em cada um destes exemplos os módulos $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{F}}(\Gamma)$ são livres; assim, existem conjuntos de geradores $g_1, \dots, g_k$ para $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e $\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_l$ para $\overrightarrow{\mathcal{F}}(\Gamma)$ tais que toda aplicação $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ é

unicamente da forma

$$g = a_1g_1 + \cdots + a_rg_k$$

e toda aplicação $\tilde{g} \in \vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$ é unicamente da forma

$$\tilde{g} = b_1\tilde{g}_1 + \cdots + b_l\tilde{g}_l,$$

onde $a_i, b_j \in \mathcal{E}(\Gamma)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$. Escolhemos usar a mesma notação para representar elementos em termos da base dos módulos distintos $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$, a saber

$$g = a_1g_1 + \cdots + a_kg_k \equiv [a_1, \dots, a_k] \in \vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$$

e

$$\tilde{g} = b_1\tilde{g}_1 + \cdots + b_l\tilde{g}_l \equiv [b_1, \dots, b_l] \in \vec{\mathcal{F}}(\Gamma).$$

Os a_i 's e b_j 's, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$, são chamados de *coordenadas invariantes* de g e $\tilde{g}$, respectivamente.

Na Tabela 4.2 apresentamos os geradores de $\text{RT}(g, \Gamma)$ e $\text{RT}(\tilde{g})$ para cada um dos grupos e ações listados na Tabela 4.1. Os cálculos para obter ambas as tabelas são apresentados a seguir e são semelhantes aos apresentados em [25] para o caso puramente equivariante. Também omitimos a dependência dos germes com respeito ao parâmetro λ . Usamos a Proposição 4.2.1 para calcular os geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ para cada caso.

- (a) Considere $\mathbb{Z}_2$ agindo em $\mathbb{R}^2$ como um grupo de simetrias generalizado segundo a ação $\kappa(x, y) = (x, -y)$, onde $\sigma(\kappa) = -1$. Da Subseção 2.2.6, todo $\tilde{g} \in \vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2)$ tem a forma

$$\tilde{g}(x, y) = \left(s(u, v)y, r(u, v) \right),$$

onde s, r são elementos do anel $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2)$ gerado por $u = x$ e $v = y^2$. Pela notação adotada, escrevemos

$$\tilde{g} = r\tilde{g}_1 + s\tilde{g}_2 \equiv [r, s],$$

com $\tilde{g}_1 = (0, 1)$ e $\tilde{g}_2 = (y, 0)$ geradores do módulo $\vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2)$, donde obtemos

$$(d\tilde{g})_{(x,y)} = \begin{pmatrix} s_u y & s + 2vs_v \\ r_u & 2r_v y \end{pmatrix}.$$

De [25, XIV, §3], $X_1 = (u, 0)$, $X_2 = (v, 0)$, $X_3 = (\lambda, 0)$ e $X_4 = (0, y)$ geram $\vec{\mathcal{M}}(\mathbb{Z}_2)$ e

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

geram $\vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2)$ sob o anel $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2)$. Pela Proposição 4.2.1, os geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ são $(d\tilde{g})(X_i)$

Tabela 4.1: Informações para os espaços tangentes restritos para $\Gamma = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbf{O}(2), \mathbf{D}_n$ para $n \geq 3$ e $\mathbf{D}_n$ para n par. Nos quatro primeiros casos, os flips κ , κ_1 e κ_2 são anti-simetrias; no último caso, o flip κ é uma simetria e a rotação $\xi = 2\pi/n$ é uma anti-simetria.

Γ	$\mathbb{Z}_2$ κ $\sigma(\kappa) = -1$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ κ_1 κ_2 $\sigma(\kappa_1) = -1$ $\sigma(\kappa_2) = -1$	$\mathbf{O}(2)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ κ $\sigma(\theta) = 1$ $\sigma(\kappa) = -1$	$\mathbf{D}_n(n \geq 3)$ $\xi = 2\pi/n$ κ $\sigma(\xi) = 1$ $\sigma(\kappa) = -1$	$\mathbf{D}_n(n \text{ even})$ $\xi = 2\pi/n$ κ $\sigma(\xi) = -1$ $\sigma(\kappa) = 1$
V	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
Ação	$\kappa(x, y) = (x, -y)$	$\kappa_1(x, y) = (x, -y)$ $\kappa_2(x, y) = (-x, y)$	$\theta z = e^{i\theta} z$ $\kappa z = \bar{z}$	$\xi z = e^{i\xi} z$ $\kappa z = \bar{z}$	$\xi z = e^{i\xi} z$ $\kappa z = \bar{z}$
geradores de $\mathcal{E}(\Gamma)$	$u = x$ $v = y^2$	$u = x^2$ $v = y^2$	$u = z\bar{z}$	$u = z\bar{z}$ $v = z^n + \bar{z}^n$	$u = z\bar{z}$ $v = z^n + \bar{z}^n$
geradores de $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$	$g_1 = (1, 0)$ $g_2 = (0, y)$	$g_1 = (x, 0)$ $g_2 = (0, y)$	$g_1 = z$	$g_1 = z$ $g_2 = \bar{z}^{n-1}$	$g_1 = z$ $g_2 = \bar{z}^{n-1}$
geradores de $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$	$\tilde{g}_1 = (0, 1)$ $\tilde{g}_2 = (y, 0)$	$\tilde{g}_1 = (0, x)$ $\tilde{g}_2 = (y, 0)$	$\tilde{g}_1 = iz$	$\tilde{g}_1 = iz$ $\tilde{g}_2 = i\bar{z}^{n-1}$	$\tilde{g}_1 = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}$ $\tilde{g}_2 = z^{\frac{n}{2}+1}$
geradores de $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$	$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ $S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{bmatrix}$ $S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$w \in \mathbb{C}$ $S_1(z)w = w$ $S_2(z)w = z^2\bar{w}$	$w \in \mathbb{C}$ $S_1(z)w = w$ $S_2(z)w = z^2\bar{w}$ $S_3(z)w = \bar{z}^{n-2}\bar{w}$ $S_4(z)w = z^n w$	$w \in \mathbb{C}$ $S_1(z)w = w$ $S_2(z)w = z^2\bar{w}$ $S_3(z)w = \bar{z}^{n-2}\bar{w}$ $S_4(z)w = z^n w$

Tabela 4.2: Geradores para os espaços tangentes restritos Γ -reversíveis-equivariantes e Γ -equivariantes para os grupos Γ da Tabela 4.1

Γ	$\text{RT}(g, \Gamma)$	$\text{RT}(\tilde{g})$
$\mathbb{Z}_2$	$[p, 0], [vq, 0], [0, p], [0, q],$ $[up_u, uq_u], [vp_u, vq_u],$ $[\lambda p_u, \lambda q_u], [vp_v, vq_v]$	$[r, 0], [vs, 0], [0, r], [0, s],$ $[ur_u, us_u], [vr_u, vs_u],$ $[\lambda r_u, \lambda s_u], [vr_v, vs_v]$
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	$[p, 0], [0, q], [0, up], [vq, 0],$ $[up_u, uq_u], [vp_v, vq_v]$	$[r, 0], [0, s], [0, ur], [vs, 0],$ $[ur_u, us_u], [vr_v, vs_v]$
$\mathbf{O}(2)$	$[p], [up_u]$	$[r], [ur_u]$
$\mathbf{D}_n$ ($n \geq 3$)	$[p, q], [2up + vq, 0], [u^{n-2}q, p],$ $[vp + 2u^{n-1}q, 0],$ $[2up_u + nvp_v,$ $(n-2)q + (n+1)uq_u + nvq_v],$ $[vp_u + 2nu^{n-1}p_v + (n-2)u^{n-2}q +$ $(n-1)u^{n-1}q_u, vq_u + 2nu^{n-1}q_v]$	$[r, s], [2ur + vs, 0], [u^{n-2}s, r],$ $[vr + 2u^{n-1}s, 0],$ $[2ur_u + nvr_v,$ $(n-2)s + 2us_u + nvs_v],$ $[vr_u + 2nu^{n-1}r_v + (n-2)u^{n-2}s,$ $vs_u + 2nu^{n-1}s_v]$
$\mathbf{D}_n$ ($n \text{ even}$)	$[p, q], [2up + vq, 0], [u^{n-2}q, p],$ $[vp + 2u^{n-1}q, 0],$ $[2up_u + nvp_v,$ $(n-2)q + (n+1)uq_u + nvq_v],$ $[vp_u + 2nu^{n-1}p_v + (n-2)u^{n-2}q +$ $(n-1)u^{n-1}q_u, vq_u + 2nu^{n-1}q_v]$	$[r, s], [2u^{\frac{n}{2}-1}r + vs, 0], [u^2s, r],$ $[0, 2u^{\frac{n}{2}-1}r + vs],$ $[2ur_u + nvr_v - 2r, 2us_u + nvs_v],$ $[vr_u + 2nu^{n-1}r_v + 2u^{\frac{n}{2}}s,$ $vs_u + 2nu^{n-1}s_v]$

e $S_i\tilde{g}$, com $i = 1, \dots, 4$. Então temos:

$$S_1\tilde{g} = (sy, 0) \equiv [0, s], \quad S_2\tilde{g} = (ry, 0) \equiv [0, r], \quad S_3\tilde{g} = (0, vs) \equiv [vs, 0]$$

$$S_4\tilde{g} = (0, r) \equiv [r, 0], \quad (d\tilde{g})X_1 = (us_u y, ur_u) \equiv [ur_u, us_u],$$

$$(d\tilde{g})X_2 = (vs_u y, vr_u) \equiv [vr_u, vs_u] \quad \text{e} \quad (d\tilde{g})X_3 = (\lambda s_u y, \lambda r_u) \equiv [\lambda r_u, \lambda s_u].$$

Como $(d\tilde{g})X_4 = ((s + 2vs_v)y, 2vr_v) \equiv [2vr_v, s + 2vs_v]$, segue que

$$[vr_v, vs_v] = \frac{1}{2}[(d\tilde{g})X_4 - S_1\tilde{g}]$$

é o último gerador de $\text{RT}(\tilde{g})$ da forma $(d\tilde{g})X$.

(b) Considere a ação padrão de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^2$ gerada pelos flips

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ambos agindo como anti-simetrias. Da Subseção 2.2.7, uma aplicação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante no plano é dada por

$$\tilde{g} = r\tilde{g}_1 + s\tilde{g}_2 \equiv [r, s],$$

com $r, s \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, $\tilde{g}_1 = (0, x)$ e $\tilde{g}_2 = (y, 0)$.

De [25], os geradores de $\vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2)$ são $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S_2 = \begin{bmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ xy & 0 \end{bmatrix}$ e $S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e os geradores de $\vec{\mathcal{M}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = \vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ são $X_1(x, y) = (x, 0)$ e $X_2(x, y) = (0, y)$. Pela Proposição 4.2.1, os geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ são:

$$S_1\tilde{g} = (sy, 0) \equiv [0, s], \quad S_2\tilde{g} = (ury, 0) \equiv [0, ur], \quad S_3\tilde{g} = (0, vsx) \equiv [vs, 0]$$

$$S_4\tilde{g} = (0, rx) \equiv [r, 0], \quad (d\tilde{g})X_1 = (2us_u y, (2ur_u + r)x) \equiv [2ur_u + r, 2us_u] \quad \text{e}$$

$$(d\tilde{g})X_2 = ((2vs_v + s)y, 2vr_v x) \equiv [2vr_v, 2vs_v + s].$$

Segue que

$$\frac{1}{2}[(d\tilde{g})X_1 - S_4\tilde{g}] \equiv [ur_u, us_u] \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}[(d\tilde{g})X_2 - S_1\tilde{g}] \equiv [vr_v, vs_v]$$

são os dois últimos geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ listados na Tabela 4.2.

(c) Considere a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em $\mathbb{C}$ gerada por

$$\theta z = e^{i\theta} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z},$$

onde $\theta \in [0, 2\pi]$ age como uma simetria e κ como uma anti-simetria. Da Subseção 2.2.5, todo $\tilde{g} \in \vec{\mathcal{F}}(\mathbf{O}(2))$ tem a forma

$$\tilde{g}(z) = r\tilde{g}_1 \equiv [r],$$

onde r é uma função de $u = z\bar{z}$ a valores reais e $\tilde{g}_1 = iz$ é o gerador do módulo $\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{O}(2))$. De [25], os geradores de $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{O}(2))$ sob a anel $\mathcal{E}(\mathbf{O}(2))$ são dados por $S_1(z)w = w$ e $S_2(z)w = z^2\bar{w}$, onde $w \in \mathbb{C}$. Assim, temos

$$S_1\tilde{g} = \tilde{g} \equiv [r] \quad \text{e} \quad S_2\tilde{g} = -uriz \equiv [-ur].$$

Como $S_2\tilde{g} = -uS_1\tilde{g}$ segue que $[r]$ é o primeiro gerador de $\text{RT}(\tilde{g})$ da forma $S\tilde{g}$.

Além disso, como $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{O}(2)) = \vec{\mathcal{M}}(\mathbf{O}(2))$ segue que $X(z) = z$ é o gerador de $\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{O}(2))$. Por [25, Lema 3.1, p. 182], segue que

$$(d\tilde{g})z = \tilde{g}_z z + \tilde{g}_{\bar{z}} \bar{z},$$

o que implica que $(d\tilde{g})z \equiv [r + 2ur_u]$. Então, pela Proposição 4.2.1, $[r]$ e $[ur_u]$ são os únicos geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$.

(d) Considere a ação padrão de $\mathbf{D}_n$, $n \geq 3$, em $\mathbb{C}$ gerada por

$$\xi z = e^{i\frac{2\pi}{n}} z \quad \text{e} \quad \kappa z = \bar{z}, \quad (4.27)$$

sendo a rotação ξ uma simetria e o flip κ uma anti-simetria. Da Subseção 2.2.1, $\tilde{g}_1 = iz$ e $\tilde{g}_2 = i\bar{z}^{n-1}$ são os geradores de $\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$. Assim, toda $\tilde{g} \in \vec{\mathcal{F}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$ é escrita como

$$\tilde{g}(z) = r(u, v)iz + s(u, v)i\bar{z}^{n-1} \equiv [r, s],$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$ são os geradores de $\mathcal{E}(\mathbf{D}_n(\kappa))$.

Pela Proposição 4.2.1, procuramos os geradores da forma $S\tilde{g}$, onde S é um gerador de $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$. De [25], $S_1(z)w = w$, $S_2(z)w = z^2\bar{w}$, $S_3(z)w = \bar{z}^{n-2}\bar{w}$ e $S_4(z)w = z^n w$ geram $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$ sob $\mathcal{E}(\mathbf{D}_n(\kappa))$. Os quatro primeiros geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ são obtidos de

$$\begin{aligned} S_1(z)\tilde{g} &\equiv [r, s], \quad (S_2(z) + uS_1(z))\tilde{g} \equiv [ur + vs, -us] + [ur, us] \equiv [2ur + vs, 0], \\ S_3(z)\tilde{g} &\equiv [u^{n-2}s, r] \quad \text{e} \quad (S_4(z) + uS_3(z))\tilde{g} \equiv [vr + u^{n-1}s, -ur] + [u^{n-1}s, ur] \equiv \\ &\quad [vr + 2u^{n-1}s, 0]. \end{aligned}$$

Para os geradores da forma $(d\tilde{g})X$, usamos a igualdade $\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_n(\kappa)) = \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_n(\kappa))$ para obter $X_1(z) = z$ e $X_2(z) = \bar{z}^{n-1}$. Novamente por [25, Lema 3.1, p. 182], temos:

$$(d\tilde{g})z = \tilde{g}_z z + \tilde{g}_{\bar{z}} \bar{z} \equiv [2ur_u + nvr_v + r, (n-1)s + 2us_u + nvs_v] \quad \text{e}$$

$$(d\tilde{g})\bar{z}^{n-1} = \tilde{g}_z \bar{z}^{n-1} + \tilde{g}_{\bar{z}} z^{n-1} \equiv [vr_u + 2nu^{n-1}r_v + (n-1)u^{n-2}s, r + vs_u + 2nu^{n-1}s_v].$$

Então, os últimos dois geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ listados na Tabela 4.2 são:

$$(d\tilde{g})z - S_1(z)\tilde{g} \equiv [2ur_u + nvr_v, (n-2)s + 2us_u + nvs_v] \quad \text{e}$$

$$(d\tilde{g})\bar{z}^{n-1} - S_3(z)\tilde{g} \equiv [vr_u + 2nu^{n-1}r_v + (n-2)u^{n-2}s, vs_u + 2nu^{n-1}s_v].$$

- (e) Considere a ação padrão de $\mathbf{D}_n$ em $\mathbb{C}$ gerada por (4.27), sendo agora $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ uma anti-simetria e o flip κ uma simetria. Lembramos que, sob estas condições, não existem campos vetoriais $\mathbf{D}_n$ -reversíveis-equivariantes para n ímpar (Subseção 2.2.4). Toda aplicação $\mathbf{D}_n$ -reversível-equivariante para n par toma a forma

$$\tilde{g}(z) = r(u, v)\bar{z}^{\frac{n}{2}-1} + s(u, v)z^{\frac{n}{2}+1} \equiv [r, s],$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$ são os geradores de $\mathcal{E}(\mathbf{D}_n)$ e r, s são funções a valores reais. Portanto, $\tilde{g}_1 = \bar{z}^{\frac{n}{2}-1}$ e $\tilde{g}_2 = z^{\frac{n}{2}+1}$ são os geradores de $\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{D}_n)$. Novamente, $S_1(z)w = w$, $S_2(z)w = z^2\bar{w}$, $S_3(z)w = \bar{z}^{n-2}\bar{w}$ e $S_4(z)w = z^n w$ são os geradores de $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_n)$ e z e $\bar{z}^{n-1}$ os geradores de $\vec{\mathcal{M}}(\mathbf{D}_n)$ sob o anel $\mathcal{E}(\mathbf{D}_n)$.

Os quatro primeiros geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ são obtidos como segue:

$$S_1(z)\tilde{g} = \tilde{g} \equiv [r, s], \quad (S_3(z) + u^{\frac{n}{2}-1}S_1(z))\tilde{g} \equiv [2u^{\frac{n}{2}-1}r + vs, 0]$$

$$S_2(z)\tilde{g} \equiv [u^2s, r], \quad (S_4(z) + u^{\frac{n}{2}-1}S_2(z))\tilde{g} \equiv [0, 2u^{\frac{n}{2}-1}r + vs],$$

para $S_3(z)\tilde{g} \equiv [u^{\frac{n}{2}-1}r + vs, -u^{\frac{n}{2}-1}s]$ e $S_4(z)\tilde{g} \equiv [-u^{\frac{n}{2}+1}s, u^{\frac{n}{2}-1}r + vs]$. Os últimos dois geradores de $\text{RT}(\tilde{g})$ listados na Tabela 4.2 são:

$$(d\tilde{g})z - \left(\frac{n}{2} + 1\right)S_1(z)\tilde{g} \equiv [2ur_u + nvr_v - 2r, 2us_u + nvs_v] \quad \text{e}$$

$$(d\tilde{g})\bar{z}^{n-1} - \left(\frac{n}{2} - 1\right)S_2(z)\tilde{g} \equiv [vr_u + 2nu^{n-1}r_v + 2u^{\frac{n}{2}}s, vs_u + 2nu^{n-1}s_v],$$

onde ([25, Lema 3.1, p. 182])

$$(d\tilde{g})z \equiv [2ur_u + nvr_v + \left(\frac{n}{2} - 1\right)r, 2us_u + nvs_v + \left(\frac{n}{2} + 1\right)s],$$

$$(d\tilde{g})\bar{z}^{n-1} \equiv [vr_u + 2nu^{n-1}r_v + \left(\frac{n}{2} + 1\right)u^2s, vs_u + 2nu^{n-1}s_v + \left(\frac{n}{2} - 1\right)u^{\frac{n}{2}-2}r].$$

Como visto no Capítulo 2, as representações da Tabela 4.1 correspondentes às ações de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbf{O}(2)$, $\mathbf{D}_n$ (5ª coluna) e $\mathbf{D}_4$ (6ª coluna) são todas representações auto-duais no plano. Além disso, para os grupos diedrais de ordem n , a rotação $\xi = 2\pi/n$ pode ser tomada como

uma anti-simetria apenas se n for par, e estes casos correspondem todos a representações não auto-duais de $\mathbf{D}_n$, com $n \neq 4$.

Finalizamos esta seção mostrando que, assim como no contexto puramente equivariante, em presença simultânea de simetrias e anti-simetrias existem casos onde a estabilidade (ou instabilidade) linear de uma solução para $\tilde{g} = 0$ é um invariante sob Γ -equivalência. O ponto é que, como mencionado, o grupo de equivalências $\mathfrak{G}$ do contexto reversível-equivariante dado em (4.25) é exatamente o mesmo grupo de equivalências do caso puramente equivariante. É importante notar que no contexto sem simetria, estabilidade linear não é um invariante sob equivalência.

4.2.1 Preservação de estabilidade por Γ -equivalência

Discutimos aqui a ocorrência de soluções hiperbólicas estáveis para um problema de bifurcação Γ -reversível-equivariante $\tilde{g} = 0$ e sua persistência sob Γ -equivalência. Lembramos que uma solução hiperbólica (x, λ) da equação $\tilde{g} = 0$ é *estável* se todos os autovalores de $(d\tilde{g})_{(x,\lambda)}$ têm parte real positiva e *instável* se pelo menos um deles tem parte real negativa.

Como mencionado antes, na presença de reversibilidade, estabilidade pode não ocorrer (Lema 2.1.5): uma solução estável ocorre somente se anti-simetrias não pertencem ao seu subgrupo de isotropia. Por outro lado, soluções estáveis são esperadas em bifurcações puramente equivariantes, uma vez que a representação de Γ é genericamente absolutamente irreduzível (ou seja, sob certas condições genéricas, as únicas aplicações lineares que comutam com Γ são múltiplas da identidade). Também, se uma solução perde estabilidade em um ponto de bifurcação, é esperado o aparecimento de novas soluções estáveis com a variação do parâmetro de bifurcação, fenômeno conhecido como *quebra de simetria*.

Seguimos aqui os passos de [25] para mostrar que a estabilidade de uma solução (x_0, λ_0) para $\tilde{g} = 0$, $\tilde{g} \in \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, é preservada por Γ -equivalência precisamente quando é preservada por qualquer Γ -equivalência da forma $S\tilde{g}$. Começamos considerando $\tilde{g}, \tilde{h} \in \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ dois problemas de bifurcação Γ -equivalentes, isto é,

$$\tilde{g}(x, \lambda) = S(x, \lambda)\tilde{h}(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)), \quad (4.28)$$

com $(S, X, \Lambda) \in \mathfrak{G}$ em (4.25). Nosso primeiro passo é determinar quando os sinais das partes reais dos autovalores da matriz de $(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$ são os mesmos daqueles para a matriz de $(d\tilde{h})_{(X_0, \Lambda_0)}$, onde $(X_0, \Lambda_0) = (X(x_0, \lambda_0), \Lambda(\lambda_0))$ é um zero de $\tilde{h}$ sempre que (x_0, λ_0) for um zero de $\tilde{g}$.

Defina, para cada (x, λ) ,

$$\tilde{S}(x, \lambda) = [S(x, \lambda)(dX)_{(x,\lambda)}]^{-1}. \quad (4.29)$$

A condição de equivariância satisfeita por S em (4.28) é dada por

$$S(\rho(\gamma)x, \lambda)\rho(\gamma) = \rho(\gamma)S(x, \lambda), \quad \forall \gamma \in \Gamma, x \in V. \quad (4.30)$$

Em particular, a matriz jacobiana $(dX)_{(x, \lambda)}$ satisfaz (4.30), implicando que, para cada (x, λ) , $\tilde{S}$ em (4.29) também satisfaz (4.30) (o produto de matrizes e a inversa de uma matriz satisfazendo (4.30) satisfaz a mesma condição). Além disso, $\tilde{S}(0, 0)$ é uma matriz invertível na componente conexa da identidade em $GL(V)$, uma vez que $S(0, 0)$ e $(dX)_{(0, 0)}$ também são. Segue então o resultado:

Proposição 4.2.3. *Seja $\tilde{g}$ um problema de bifurcação Γ -reversível-equivariante e seja (x_0, λ_0) uma solução para $\tilde{g} = 0$. Então a estabilidade de (x_0, λ_0) é preservada por Γ -equivariância se, para todo germe a valores matriciais $S \in \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(\Gamma)$ satisfazendo $\det S(0, 0) > 0$, os sinais das partes reais dos autovalores de $S(x_0, \lambda_0)(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$ são os mesmos dos autovalores de $(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$.*

Demonstração: Derivando (4.28) em (x_0, λ_0) e lembrando que $\tilde{h}(X_0, \Lambda_0) = 0$ obtemos

$$(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)} = S(x_0, \lambda_0)(d\tilde{h})_{(X_0, \Lambda_0)}(dX)_{(x_0, \lambda_0)}, \quad (4.31)$$

donde

$$\tilde{S}(x_0, \lambda_0)(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)} = (dX)_{(x_0, \lambda_0)}^{-1}(d\tilde{h})_{(X_0, \Lambda_0)}(dX)_{(x_0, \lambda_0)}, \quad (4.32)$$

para $\tilde{S}$ definido em (4.29). As matrizes $\tilde{S}(x_0, \lambda_0)(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$ e $(d\tilde{h})_{(X_0, \Lambda_0)}$ em (4.32) são semelhantes e portanto têm os mesmos autovalores. Por hipótese, $(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$ e $(d\tilde{h})_{(X_0, \Lambda_0)}$ têm autovalores com parte real de mesmo sinal, como desejado. $\square$

Observação 4.2.4. *Notamos aqui que o sinal do determinante de $(d\tilde{g})_{(x_0, \lambda_0)}$ é preservado por Γ -equivariância (consequência imediata de (4.31)).*

No estudo de problemas de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e $\mathbf{D}_4$ reversíveis-equivariantes que desenvolvemos nas Subseções 4.4.1 e 4.5.1, respectivamente, devemos ver que a estabilidade de algumas soluções é invariante sob Γ -equivariância.

4.3 A classificação de aplicações reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais

Se (ρ, V) é um espaço vetorial auto-dual, então existe um isomorfismo linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ de modo que os espaços (ρ, V) e (ρ_σ, V) são Γ -isomorfos. O isomorfismo L estabelece uma associação de qualquer aplicação Γ -reversível-equivariante $g : V \mapsto V$ com uma aplicação puramente Γ -equivariante $h : V \mapsto V$ (Lema 2.1.3) e induz o

isomorfismo de módulos

$$\begin{aligned} L^* : \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) &\rightarrow \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma) \\ g &\mapsto Lg \end{aligned} \quad (4.33)$$

sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$. Em particular, os conjuntos de zeros de g e Lg são os mesmos. O objetivo desta seção é classificar pontos de equilíbrio de problemas de bifurcação Γ –reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais, por meio de uma correspondência com a teoria de Singularidades puramente equivariante. O pullback L^* é o que determina tal correspondência.

No que segue, indicamos $\rho(\gamma)$ simplesmente por γ .

4.3.1 A relação entre as duas classificações

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V como um grupo de simetrias generalizado tal que V é auto-dual. Os espaços tangentes estendidos $T(g, \Gamma)$ de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $T(L^*g)$ de $L^*g \in \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ não têm estrutura de módulos, mas sendo L^* em particular um isomorfismo entre espaços vetoriais, temos:

Lema 4.3.1. *Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e L^* como definido em (4.33). Então,*

- (a) *os espaços tangentes estendidos $T(g, \Gamma)$ e $T(L^*g)$ são espaços vetoriais isomorfos.*
- (b) *se a codimensão de g é finita, então a codimensão de $L^*g \in \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é igual à codimensão de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.*

Demonstração: Para a parte (a), observe primeiramente que dado $S \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, existe $\tilde{S} \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ tal que $LS = \tilde{S}L$. De fato, definindo

$$\begin{aligned} LSL^{-1} : (V \times \mathbb{R}, 0) &\rightarrow \text{Hom}(V, V) \\ (x, \lambda) &\mapsto LS(x, \lambda)L^{-1} \end{aligned}$$

como L^{-1} é também Γ –reversível-equivariante, temos

$$\begin{aligned} LS(\gamma x, \lambda)L^{-1}\gamma &= LS(\gamma x, \lambda)\sigma(\gamma)\gamma L^{-1} \\ &= \sigma(\gamma)LS(\gamma x, \lambda)\gamma L^{-1} \\ &= \sigma(\gamma)L\gamma S(x, \lambda)L^{-1} \\ &= \sigma(\gamma)^2\gamma LS(x, \lambda)L^{-1} \\ &= \gamma LS(x, \lambda)L^{-1}, \end{aligned}$$

isto é, $\tilde{S} = LSL^{-1} \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.

Considere agora o espaço tangente estendido de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$

$$T(g, \Gamma) = \{Sg + (dg)X : (S, X) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \times \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)\} + \mathcal{E}_\lambda g_\lambda$$

e o espaço tangente estendido de $L^*g \in \vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$

$$T(L^*g) = \{ \bar{S}Lg + d(Lg)\bar{X} : (\bar{S}, \bar{X}) \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \times \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) \} + \mathcal{E}_\lambda Lg_\lambda.$$

Então, para todo $h \in T(g, \Gamma)$,

$$\begin{aligned} L^*h &= L(Sg + (dg)X + \mathbb{R}\{g_\lambda, \lambda g_\lambda\}) \\ &= L Sg + L(dg)X + \mathbb{R}\{Lg_\lambda, L\lambda g_\lambda\} \\ &= \tilde{S}Lg + d(Lg)X + \mathbb{R}\{Lg_\lambda, \lambda Lg_\lambda\}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{S} = LSL^{-1} \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, o que implica que $L^*(T(g, \Gamma)) \subseteq T(L^*g)$. A outra inclusão segue analogamente, então $L^*(T(g, \Gamma)) = T(L^*g)$.

A parte (b) segue diretamente da prova do item (a) e da existência do isomorfismo L^* . Mais precisamente, temos

$$\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma) = L^*(\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)) = L^*(T(g, \Gamma) \oplus W) = T(L^*g) \oplus L^*(W),$$

sendo a última igualdade uma consequência da linearidade e da bijeção de L^* . Como $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ são isomorfos também como espaços vetoriais e $\dim W = \dim L^*(W)$, é claro que a codimensão de $T(g, \Gamma)$ em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ é igual a codimensão de $T(L^*g)$ em $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, e segue o resultado. $\square$

Observação 4.3.2. *Por (a), temos também que $RT(g, \Gamma)$ e $RT(L^*g)$ são espaços vetoriais isomorfos.*

O próximo teorema sintetiza as idéias acima e é o principal resultado a respeito da classificação de bifurcações reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais:

Teorema 4.3.3. *Considere uma representação (ρ, V) de Γ sob a qual V é auto-dual e seja $L : V \rightarrow V$ um isomorfismo linear reversível-equivariante. Então, o pullback L^* definido em (4.33) determina uma correspondência 1-1 entre a classificação de bifurcações de germes em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e em $\vec{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$.*

Portanto, no caso auto-dual, se a classificação de um problema de bifurcação equivariante é bem conhecida, então também é a classificação do correspondente problema de bifurcação reversível-equivariante: formas normais, condições de reconhecimento e desdobramentos universais de bifurcações reversíveis-equivariantes em espaços auto-duais são deduzidos das formas normais, condições de reconhecimento e desdobramentos universais do problema equivariante associado via L .

Com respeito aos diagramas de bifurcação, as equações dos ramos são preservadas, mas claramente isto não vale para a estabilidade de soluções, que deve ser investigada em cada caso. Entretanto, existem muitos exemplos onde é possível estabelecer uma associação para deduzir, de um modo simples, a estabilidade de um caso a partir do outro. Isto é discutido em detalhes nos casos $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbf{D}_4$ que são apresentados nas Seções 4.4 e 4.5, respectivamente.

Para o resto deste capítulo, vamos denotar o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e os módulos $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, $\overleftarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ simplesmente por $\mathcal{E}(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$, $\overleftarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{F}}(\Gamma)$, respectivamente.

4.4 Bifurcação auto-dual com grupo de simetrias generalizado $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Em [41], Manoel e Stewart classificam problemas de bifurcação no plano degenerados que comutam com o grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ até codimensão topológica 2. Na presente seção usamos tais resultados e o Teorema 4.3.3 para deduzir o comportamento de famílias de problemas de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes sob a representação auto-dual de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^2$. Focamos nas semelhanças entre as duas classificações e nas diferenças entre os diagramas de bifurcação em ambos os contextos.

Consideramos a ação padrão de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^2$ gerada pelos flips

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \kappa_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O anel de invariantes $\mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ é gerado por $u = x^2$ e $v = y^2$ e o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ é gerado por $g_1(x, y, \lambda) = (x, 0)$ e $g_2(x, y, \lambda) = (0, y)$. Um problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante em $\mathbb{R}^2$ é dado por $g(x, y, \lambda) = 0$, onde

$$g(x, y, \lambda) = p(u, v, \lambda)g_1(x, y, \lambda) + q(u, v, \lambda)g_2(x, y, \lambda), \quad (4.34)$$

com $p, q \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ tais que $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$.

A representação auto-dual de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano é dada pelos flips κ_1, κ_2 agindo como anti-simetrias, sendo

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz de um isomorfismo linear $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante.

Via o pullback L^* (4.33), geradores para o módulo $\vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ são $g_{i*} = L^*(g_i)$, $i = 1, 2$, isto é, $g_{1*}(x, y, \lambda) = (0, x)$ e $g_{2*}(x, y, \lambda) = (y, 0)$, de modo que um problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante no plano é dado por $g_*(x, y, \lambda) = 0$, onde

$$g_*(x, y, \lambda) = p(u, v, \lambda)g_{1*}(x, y, \lambda) + q(u, v, \lambda)g_{2*}(x, y, \lambda), \quad (4.35)$$

com $p, q \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ tal que $p(0, 0, 0) = q(0, 0, 0) = 0$. Vamos escrever g em (4.34) e g_* em (4.35) via as coordenadas invariantes como $g = pg_1 + qg_2 \equiv [p, q]$ e $g_* = pg_{1*} + qg_{2*} \equiv [p, q]$, respectivamente. Observe que estamos usando a mesma notação para os germes g e g_* nos diferentes módulos sob o mesmo anel; a forma de L nos tem induzido a tal convenção, a fim de manter as expressões no problema do reconhecimento para os reversíveis-equivariantes as mesmas que para os equivariantes.

Como mencionado na Seção 4.3, nos casos auto-duais, o conjunto de zeros de um problema de bifurcação reversível-equivariante é idêntico ao do correspondente problema de bifurcação equivariante; isto é, as equações dos ramos em ambos os contextos são as mesmas (Tabela 4.3). Por outro lado, tipicamente temos uma mudança na natureza dos autovalores. Isto é uma consequência do fato geral de que a presença de anti-simetrias no subgrupo de isotropia de um ramo de solução impõe restrições nos autovalores distintas do que aquelas obtidas quando todos os elementos da isotropia agem como simetrias (Lema 2.1.5). Portanto, ao contrário do caso $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante, onde podemos ter soluções trivial e de modo puro estáveis, no contexto $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante estas soluções nunca são estáveis, uma vez que seus autovalores são ou um par de autovalores reais de sinais opostos, ou moram sobre o eixo imaginário. Entretanto, é importante notar que a natureza (real or complexa) dos autovalores para $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ sobre estes ramos pode ser deduzida dos sinais dos autovalores de $(dg)_{(x,y,\lambda)}$ sobre os ramos de soluções correspondentes (veja Tabela 4.3). Com respeito aos ramos de solução de modo misto, sobre os quais os sinais dos autovalores são determinados pelos sinais do traço e do determinante da matriz $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$, é apenas sobre tais ramos que podemos encontrar um regime estável: como $\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = -\det(dg)_{(x,y,\lambda)}$, soluções estáveis (x, y, λ) devem aparecer nos diagramas de bifurcação reversíveis-equivariantes quando $\det(dg)_{(x,y,\lambda)}$ é negativo. Nós endereçamos à Proposição 4.4.3 para a dedução da natureza de pontos de equilíbrio para os reversíveis-equivariantes a partir dos diagramas associados para os equivariantes dados por [41].

Observação 4.4.1. *As variedades de transição para o problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante g_* coincidem com as variedades de transição para o problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante g . Isto é novamente uma consequência dos fatos de que os ramos de solução são os mesmos e que existe uma relação entre os autovalores de ambos os contextos, de modo que a natureza dos autovalores sobre os ramos de solução de g_* - embora distinta da natureza dos autovalores sobre os ramos de solução de g - muda precisamente onde e quando a estabilidade dos ramos correspondentes de g é trocada.*

A classificação de bifurcações $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariantes apresentada em [41, Theorem 4.1] conduz a sete formas normais, com suas condições de reconhecimento e desdobramentos. Via L^* , o resultado correspondente para bifurcações $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes é então

facilmente obtido e é afirmado no Teorema 4.4.2. As formas normais reversíveis-equivariantes h_{i*} são dadas por $L^*(h_i)$ e, pela notação adotada, as condições de reconhecimento e ocorrência de parâmetros modais que caracterizam cada forma normal h_{i*} têm as mesmas expressões que aquelas que aparecem no problema do reconhecimento para h_i , $i = 2, \dots, 8$, em [41].

Teorema 4.4.2. (Classificação de bifurcações $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes) *Se um germe $g_* \equiv [p, q] \in \vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ satisfaz as condições de reconhecimento da Tabela 4.4 para a forma normal h_{j*} para algum $j = 2, \dots, 8$, então g_* é $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivalente a h_{j*} .*

Para ilustrar, apresentamos a forma normal h_{2*} e descrevemos os diagramas de bifurcação para o desdobramento H_{2*} . Nosso objetivo aqui é principalmente esclarecer o papel de L^* na estabilidade de soluções quando passamos do problema equivariante ao problema reversível-equivariante. Os outros casos seguem o mesmo procedimento e seus diagramas são obtidos diretamente pela associação entre os casos equivariante e reversível-equivariante dada por L^* , com estabilidade dada pela Proposição 4.4.3.

De [41, Theorem 4.1], se um problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante $g \equiv [p, q]$ satisfaz as condições de reconhecimento

$$p_u q_v - p_v q_u = 0, \quad p_u, q_v, p_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_2, p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0, \quad (4.36)$$

onde

$$\rho_2 = q_{uv} p_u p_v^2 - q_{vv} p_u^2 p_v - q_{uu} p_v^3 - p_{uv} q_v p_u p_v + p_{vv} q_v p_u^2 + p_{uu} q_v p_v^2,$$

então g é equivalente à forma normal

$$h_2 = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_4 v + \varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_5 u^2, \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 u + \varepsilon_3 v + \kappa \lambda].$$

Todas as derivadas são calculadas na origem e $\varepsilon_i = \pm 1$, com $\kappa = |\frac{p_v}{p_\lambda q_v}| q_\lambda$, $\text{sin}(\varepsilon_1) = \text{sin}(p_u)$, $\text{sin}(\varepsilon_2) = \text{sin}(p_\lambda)$, $\text{sin}(\varepsilon_3) = \text{sin}(q_v)$, $\text{sin}(\varepsilon_4) = \text{sin}(p_v)$, e $\text{sin}(\varepsilon_5) = \text{sin}(\rho_2 q_v)$. Os termos de desdobramento para h_2 são $[u, 0]$, $[0, \lambda]$ e $[0, 1] \in \vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$. Como uma consequência do Teorema 4.3.3, se $g_* = L^*(g) \equiv [p, q]$ satisfaz as condições de reconhecimento (4.36), então g_* é equivalente à forma normal

$$h_{2*} = [\varepsilon_1 u + \varepsilon_4 v + \varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_5 u^2, \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 u + \varepsilon_3 v + \kappa \lambda].$$

Além disso, os termos de desdobramento para h_{2*} também são $[u, 0]$, $[0, \lambda]$ e $[0, 1] \in \vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, de modo que

$$H_{2*}(x, y, \lambda, \alpha, \beta, \kappa) = [(\varepsilon_1 + \alpha)u + \varepsilon_4 v + \varepsilon_2 \lambda + \varepsilon_5 u^2, \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varepsilon_4 u + \varepsilon_3 v + \kappa \lambda + \beta]$$

Tabela 4.3: Ramos de equilíbrio e estabilidade para bifurcações $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariantes e $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes.

Tipo de Solução	Equação	Estabilidade equivariante (sinais dos autovalores)	Estabilidade reversível-equivariante (sinais dos autovalores)
Trivial	$x = y = 0, \forall \lambda$	$p(0, 0, \lambda), q(0, 0, \lambda)$	$\pm \sqrt{pq(0, 0, \lambda)}$
Modo x	$y = p(u, 0, \lambda) = 0$	$p_u(u, 0, \lambda), q(u, 0, \lambda)$	$\pm \sqrt{p_u q(u, 0, \lambda)}$
Modo y	$x = q(0, v, \lambda) = 0$	$p(0, v, \lambda), q_v(0, v, \lambda)$	$\pm \sqrt{p q_v(0, v, \lambda)}$
Modo misto	$p = q = 0$	$\det(dg) = 4uv(p_u q_v - p_v q_u)$ $\text{tr}(dg) = 2(x^2 p_u + y^2 q_v)$	$\det(dg_*) = 4uv(p_v q_u - p_u q_v)$ $\text{tr}(dg_*) = 2xy(q_u + p_v)$

é o desdobramento de h_{2*} .

Retornamos agora aos diagramas de bifurcação de H_{2*} , quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ e $\kappa < -1$. Escolhemos estes sinais para comparar nossos resultados aos diagramas equivariantes correspondentes em [41, Fig. 4].

Os ramos de soluções para $H_{2*} = [(1+\alpha)u+v-\lambda+u^2, u+v+\kappa\lambda+\beta]$ são os mesmos que para H_2 (o desdobramento de h_2), mas a estabilidade sobre cada ramo deve ser analisada. Como mencionado acima, isto pode ser feito pela correspondência existente entre os autovalores para ambos os contextos. Um ramo de solução de modo misto existe apenas se $\beta > 0$. Sobre tal ramo, quando $\det(dH_{2*})_{(x,y,\lambda)} > 0$, temos

$$\text{sinal } \text{tr}(dH_{2*})_{(x,y,\lambda)} = \text{sinal}(xy),$$

de modo que uma troca de estabilidade ocorre se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$, isto é, em um ponto de bifurcação secundária¹. Neste caso, as partes do ramo com estabilidade “++” são mapeadas sobre as soluções de modo misto com estabilidade “--”, e vice-versa, pelas anti-simetrias κ_1 e κ_2 (mais detalhes na Proposição 4.4.3). Isto é representado nos diagramas pela notação “++/-”.

Na Tabela 4.4 apresentamos a classificação completa de problemas de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes, exibindo as outras formas normais com as respectivas condições de reconhecimento e termos de desdobramento. A notação adotada aqui força esta tabela ser a mesma que a Tabela 2 que aparece em [41, p. 1659].

¹Chamamos bifurcação primária um ponto onde um ramo de soluções (soluções primárias) emerge do ramo da solução trivial. Uma bifurcação secundária é um ponto onde um ramo de soluções emerge de um ramo primário.

Tabela 4.4: Classificação de singularidades $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes. Todas as derivadas são calculadas na origem e $\epsilon_i = \pm 1$ com o sinal dado pela derivada correspondente.

Formas Normais								
$h_{2*} =$	$[\epsilon_1 u + \epsilon_4 v + \epsilon_2 \lambda + \epsilon_5 u^2, \epsilon_1 \epsilon_3 \epsilon_4 u + \epsilon_3 v + \kappa \lambda]$							
$h_{3*} =$	$[\epsilon_1 u + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_4 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda + \epsilon_5 \lambda^2]$							
$h_{4*} =$	$[\epsilon_1 u + \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 v + \epsilon_2 \lambda, \eta u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda + \epsilon_5 \lambda^2]$							
$h_{5*} =$	$[\epsilon_1 u^2 + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_5 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda]$							
$h_{6*} =$	$[\epsilon_1 u + \epsilon_5 v + \epsilon_2 \lambda, \eta u + \epsilon_3 v^2 + \epsilon_4 \lambda]$							
$h_{7*} =$	$[\epsilon_1 u + \epsilon_5 v + \epsilon_2 \lambda^2, \eta u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda]$							
$h_{8*} =$	$[\epsilon_1 u + \mu v + \epsilon_2 \lambda, \epsilon_5 u + \epsilon_3 v + \epsilon_4 \lambda^2]$							

Classificação								
Forma Normal	Condições de reconhecimento	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	Parâmetro Modal	Termos de desdobramento em $\vec{\mathcal{F}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$
h_{2*}	$p_u q_v - p_v q_u = 0$ $p_u, q_v, p_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_2,$ $p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0$	p_u	p_λ	q_v	p_v	$\rho_2 q_v$	$\kappa = \left \frac{p_v}{p_\lambda q_v} \right q_\lambda$	$[u, 0]$ $[0, \lambda]$ $[0, 1]$
h_{3*}	$p_\lambda q_u - p_u q_\lambda = 0$ $p_u, q_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_3,$ $p_u q_v - p_v q_u \neq 0$	p_u	p_λ	q_v	q_λ	$\rho_3 p_\lambda$	$\mu = \left \frac{q_\lambda}{p_\lambda q_v} \right p_v$	$[v, 0]$ $[0, u]$ $[0, 1]$
h_{4*}	$p_v q_\lambda - p_\lambda q_v = 0$ $p_u, q_v, p_\lambda, q_\lambda, \rho_4,$ $p_u q_v - p_v q_u \neq 0$	p_u	p_λ	q_v	q_λ	$\rho_4 p_\lambda$	$\eta = \left \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right q_u$	$[v, 0]$ $[0, u]$ $[0, 1]$
h_{5*}	$p_u = 0$ $p_\lambda, q_v, q_\lambda, p_{uu},$ $p_v q_\lambda - p_\lambda q_v \neq 0$	p_{uu}	p_λ	q_v	q_λ	q_u	$\mu = \left \frac{q_\lambda}{p_\lambda q_v} \right p_v$	$[v, 0]$ $[u, 0]$ $[0, 1]$
h_{6*}	$q_v = 0$ $p_u, p_\lambda, q_\lambda, p_v, q_u, q_{vv},$ $p_u q_\lambda - p_\lambda q_u \neq 0$	p_u	p_λ	q_{vv}	q_λ	p_v	$\eta = \left \frac{p_\lambda}{p_u q_\lambda} \right q_u$	$[0, v]$ $[0, u]$ $[1, 0]$
h_{7*}	$p_\lambda = 0$ $p_u, p_v, q_v, q_\lambda, p_{\lambda\lambda},$ $p_u q_v - p_v q_u \neq 0$	p_u	$p_{\lambda\lambda}$	q_v	q_λ	p_v	$\eta = \left \frac{p_v}{p_u q_v} \right q_u$	$[\lambda, 0]$ $[0, u]$ $[1, 0]$
h_{8*}	$q_\lambda = 0$ $p_u, p_\lambda, q_u, q_v, q_{\lambda\lambda},$ $p_u q_v - p_v q_u \neq 0$	p_u	p_λ	q_v	$q_{\lambda\lambda}$	q_u	$\mu = \left \frac{q_u}{p_u q_v} \right p_v$	$[0, \lambda]$ $[v, 0]$ $[1, 0]$

$$\begin{aligned}
\rho_2 &= q_{uv} p_u p_v^2 - q_{vv} p_u^2 p_v - q_{uu} p_v^3 - p_{uv} q_v p_u p_v + p_{vv} q_v p_u^2 + p_{uu} q_v p_v^2 \\
\rho_3 &= q_{uu} p_\lambda^3 - p_{uu} p_\lambda^2 q_\lambda - q_{u\lambda} p_\lambda^2 p_u + q_{\lambda\lambda} p_\lambda p_u^2 + p_{u\lambda} p_\lambda q_\lambda p_u - p_{\lambda\lambda} p_u^2 q_\lambda \\
\rho_4 &= q_{\lambda\lambda} p_\lambda q_v^2 - p_{vv} p_\lambda q_\lambda^2 - q_{v\lambda} p_\lambda q_\lambda q_v - p_{vv} q_\lambda^3 - p_{\lambda\lambda} q_v^2 q_\lambda + p_{v\lambda} q_\lambda^2 q_v
\end{aligned}$$

Figura 4.1: Variedades de transição e diagramas de bifurcação para a forma normal H_{2*}

4.4.1 Preservação de estabilidade e $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivalência

Nesta subseção discutimos a ocorrência de soluções estáveis e sua persistência sob equivalência para bifurcações $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversíveis-equivariantes. Observamos da Tabela 4.3 que sob a presente ação de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, um ponto de equilíbrio (x, y, λ) é estável se, e somente se, ele é uma solução de modo misto do tipo sela no associado problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante e tal que o traço do jacobiano $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ é positivo. Os equilíbrios sobre os ramos trivial e de modo puro são sempre ou do tipo sela ou puramente imaginários. A próxima proposição nos fornece a natureza de cada solução do problema de bifurcação g_* a partir da estabilidade (ou instabilidade) do mesmo ponto como solução de g . O ponto principal é o papel de L^* na troca da natureza destas soluções para um caso a partir do outro.

Proposição 4.4.3. *Seja g_* um problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante sob a representação auto-dual de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano. Seja (x, y, λ) um zero de g_* . Então temos o seguinte:*

1. *Se (x, y, λ) é uma solução trivial ou de modo puro do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante onde os autovalores são ou ambos positivos ou ambos negativos, então (x, y, λ) é uma solução do tipo sela do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante, denotada nos diagramas por “+ -”;*
2. *Se (x, y, λ) é uma solução trivial ou de modo puro do tipo sela do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante, então (x, y, λ) é uma solução não hiperbólica do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante com autovalores puramente imaginários, denotada nos diagramas por “ $\pm i$ ”;*
3. *Se (x, y, λ) é uma solução de modo misto do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante onde os*

autovalores têm parte real não nula de mesmo sinal, então (x, y, λ) é uma solução do tipo sela do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante, denotada nos diagramas por “+−”;

4. Se (x, y, λ) é uma solução de modo misto do tipo sela do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivariante, então (x, y, λ) é uma solução hiperbólica do problema $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante onde os autovalores têm parte real positiva (se $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} > 0$) ou parte real negativa (se $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} < 0$), denotada nos diagramas por “++” ou “−−”, respectivamente. Para este caso, toda solução de modo misto com estabilidade “++” corresponde a uma outra solução de modo misto (simétrica) com estabilidade “−−”, e vice-versa.

Demonstração: É uma consequência direta dos dados da Tabela 4.3. Para a prova da última afirmação sobre a estabilidade de soluções de modo misto do tipo 4., notamos que se uma solução de modo misto (x, y, λ) para $g_* = 0$ tem estabilidade do tipo “++” (respectivamente “−−”), então as soluções simétricas de modo misto $\kappa_1(x, y, \lambda) = (x, -y, \lambda)$ e $\kappa_2(x, y, \lambda) = (-x, y, \lambda)$ terão estabilidade do tipo “−−” (respectivamente “++”). Isto é verificado comparando o traço do jacobiano sobre a solução (x, y, λ) , a saber

$$\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = 2xy(q_u + p_v),$$

com o traço do jacobiano sobre as soluções $(x, -y, \lambda)$ e $(-x, y, \lambda)$ dado por

$$\text{tr}(dg_*)_{(x,-y,\lambda)} = \text{tr}(dg_*)_{(-x,y,\lambda)} = -2xy(q_u + p_v).$$

Portanto, pelas propriedades simétricas do contexto, as partes sobre o ramo misto com estabilidade “++” são aplicadas sobre as soluções de modo misto com estabilidade “−−”, e vice-versa, pelas anti-simetrias de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. $\square$

Observação 4.4.4. A troca de estabilidade ao longo do ramo de modo misto do tipo 4. mencionada acima ocorre precisamente onde $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ troca de sinal. Para todas as formas normais da Tabela 4.4, $\text{tr}(dh_{i*})_{(x,y,\lambda)} = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$. Sempre representamos esta troca de estabilidade, que ocorre em um ponto de bifurcação secundária, pela notação “++/−−” sobre o ramo misto. Notamos que no contexto equivariante correspondente esta troca de estabilidade sobre o ramo de modo misto ocorre apenas para o desdobramento H_5 , com $\mu < 0$, fora de uma bifurcação secundária, “conduzindo” a um ponto de bifurcação de Hopf (veja [41, Fig. 12, p. 1665]). Para o correspondente reversível-equivariante H_{5*} , tal ponto “não aparece”, uma vez que os autovalores sobre aquele ramo são de sinais opostos.

Como vimos na Subseção 4.2.1, no contexto reversível-equivariante existe um conjunto de condições que podem ser impostas de modo que a estabilidade (ou instabilidade) linear seja invariante por Γ -equivalência. Finalizamos esta subseção dando condições suficientes para es-

tabilidade linear de soluções hiperbólicas para $g_* = 0$ ser invariante por $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivalência. Começamos com o seguinte lema:

Lema 4.4.5. *Seja (x, y, λ) uma solução para $g_* = 0$. Então,*

- (a) *se (x, y, λ) é uma solução trivial ou de modo puro, então $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ é anti-diagonal e seus autovalores, que são ou do tipo sela ou puramente imaginários, são listados na Tabela 4.3 (4ª coluna);*
- (b) *se (x, y, λ) é uma solução de modo misto, então os sinais das partes reais dos autovalores são determinados pelos sinais do determinante e do traço de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ listados na Tabela 4.3 (4ª coluna).*

Demonstração: É uma consequência direta da forma matricial de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$:

$$(dg_*) = \begin{pmatrix} 2q_u xy & q + 2vq_v \\ p + 2up_u & 2p_v xy \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

□

A seguinte proposição é o análogo de [24, X, Proposition 3.2] para bifurcações equivariantes:

Proposição 4.4.6. *Seja g_* um problema de bifurcação $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante no plano e seja (x, y, λ) uma solução hiperbólica para $g_* = 0$. Então a estabilidade de (x, y, λ) é invariante sob $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivalência se qualquer uma das seguintes condições valer:*

- (a) *(x, y, λ) é uma solução trivial ou de modo puro;*
- (b) *(x, y, λ) é uma solução de modo misto e $\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)} < 0$;*
- (c) *(x, y, λ) é uma solução de modo misto e $\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)} > 0$, com $q_u \cdot p_v \geq 0$ na origem.*

Demonstração: A prova segue os passos da prova de [24, X, Proposition 3.2], levando em conta a forma anti-diagonal de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ no lugar da forma diagonal de $(dg)_{(x,y,\lambda)}$ para provar (a). Pela Proposição 4.2.3, é suficiente provar que para toda matriz $S \in \vec{\mathcal{E}}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ satisfazendo $\det S(0, 0, 0) > 0$, os sinais das partes reais dos autovalores de $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ são os mesmos dos autovalores de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$.

Temos

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(u, v, \lambda) & c_2(u, v, \lambda)xy \\ c_3(u, v, \lambda)xy & c_4(u, v, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

com $c_i(u, v, \lambda) \in \mathcal{E}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \dots, 4$. Em particular, $S(0, 0, 0)$ é uma matriz diagonal na componente conexa da identidade e, portanto, podemos assumir suas entradas positivas:

$$c_1(0, 0, 0) > 0 \quad \text{e} \quad c_4(0, 0, 0) > 0. \quad (4.39)$$

Devemos ver que esta é uma condição necessária para garantir que a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -equivalência preserve a estabilidade de certas soluções de $g_* = 0$.

Por (4.38) e (4.39), vemos que ao longo dos ramos de solução trivial ou de modo puro $S(x, y, \lambda)$ é uma matriz diagonal com entradas positivas. A forma anti-diagonal de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ sobre tais ramos juntamente com a condição (4.39) nos garante que a matriz $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ é também anti-diagonal e que a natureza de seus autovalores é a mesma que dos autovalores de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$, o que prova (a).

Consideramos agora o caso (b): como $\det S(x, y, \lambda) > 0$, temos

$$\text{sinal}(\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)}) = \text{sinal}(\det S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}), \quad (4.40)$$

que são negativos por hipótese. Portanto, ambos $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ têm autovalores reais de sinais opostos, como queríamos.

Para o caso (c), a equação (4.40) ainda é válida e ambos os determinantes são positivos. Assim, para checar a preservação de estabilidade precisamos comparar os sinais de $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e de $\text{tr}(S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)})$. De acordo com (4.37), o traço da matriz jacobiana de g_* em uma solução de modo misto é

$$\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = 2xy(q_u + p_v), \quad (4.41)$$

e juntamente com (4.38) também obtemos

$$\text{tr}(S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}) = 2xy[(c_1q_u + c_2up_u) + (c_3vq_v + c_4p_v)], \quad (4.42)$$

com $c_i = c_i(u, v, \lambda)$, $i = 1, \dots, 4$. Os termos c_2up_u e c_3vq_v se anulam na origem e por (4.39) temos

$$\text{sinal}(c_1q_u + c_2up_u) = \text{sinal}(c_1q_u) = \text{sinal}(q_u)$$

e

$$\text{sinal}(c_3vq_v + c_4p_v) = \text{sinal}(c_4p_v) = \text{sinal}(p_v).$$

Assim, os termos correspondentes em (4.41) e (4.42) têm o mesmo sinal. Finalmente, $q_u \cdot p_v \geq 0$ implica que

$$\text{sinal } \text{tr}(S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}) = \text{sinal } \text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)},$$

o que garante que $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ têm autovalores com partes reais de mesmo sinal. $\square$

4.5 Bifurcação auto-dual com grupo de simetrias generalizado $\mathbf{D}_4$

Em [27], Golubitsky e Roberts classificam problemas de bifurcação $\mathbf{D}_4$ -equivariantes no plano até codimensão topológica 2, apresentando formas normais, condições de reconhecimento, desdobramentos universais e diagramas de bifurcação. Nesta seção usamos tais resultados e o Teorema 4.3.3 para obter a classificação de bifurcações $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes no plano quando a rotação $\xi = \pi/2$ age como uma anti-simetria. Como já mencionado, $\mathbf{D}_4$ é o único grupo diedral de ordem par n para o qual $\xi = 2\pi/n$ agindo como uma reversibilidade conduz a uma representação auto-dual. Como devemos ver, do mesmo modo como foi feito na seção anterior para $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, a escolha da notação faz com que as expressões das formas normais, de suas condições de reconhecimento e termos de desdobramento coincidam com as expressões da classificação equivariante que aparece em [27, Table II].

Considere a ação do grupo diedral $\mathbf{D}_4$ em $\mathbb{C}$ gerada por

$$\kappa : z \mapsto \bar{z} \quad \text{e} \quad \xi : z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}} z,$$

onde o flip κ é uma simetria e a rotação ξ é uma anti-simetria, isto é, $\sigma(\kappa) = -\sigma(\xi) = 1$. Pela Subseção 2.2.4, a forma geral de germes a um parâmetro $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes em $\mathbb{C}$ é dada por

$$g_*(z, \lambda) = p(u, v, \lambda)z^3 + q(u, v, \lambda)\bar{z},$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^4 + \bar{z}^4$ são os geradores dos $\mathbf{D}_4$ -invariantes.

Em [27] os autores explicitam a forma geral de germes $\mathbf{D}_4$ -equivariantes a um parâmetro em coordenadas reais:

$$g(x, y, \lambda) = p(N, \Delta, \lambda) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(N, \Delta, \lambda) \delta \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

onde $\delta = y^2 - x^2$ e p, r são elementos do anel $\mathcal{E}(\mathbf{D}_4)$ de germes de funções suaves $\mathbf{D}_4$ -invariantes gerado por $N = x^2 + y^2$ e $\Delta = \delta^2$. Em coordenadas reais,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

é a matriz de um isomorfismo linear $\mathbf{D}_4$ -reversível-equivariante. Via o pullback L^* (4.33), usamos (4.43) para reescrever um germe geral $\mathbf{D}_4$ -reversível-equivariante a um parâmetro:

$$g_*(x, y, \lambda) = r(N, \Delta, \lambda) \delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + p(N, \Delta, \lambda) \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Tabela 4.5: Ramos de equilíbrio e estabilidade para bifurcações $\mathbf{D}_4$ -equivariantes e $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes

Tipo de solução	Equação	Estabilidade equivariante (sinais dos autovalores)	Estabilidade reversível-equivariante (sinais dos autovalores)
Trivial	$x = 0$ $y = 0$	p (twice)	p $-p$
R	$y = 0$ $p - x^2 r = 0$	$p_N - r + x^2(2p_\Delta - r_N) - 2x^4 r_\Delta$ r	$p_N - r + x^2(2p_\Delta - r_N) - 2x^4 r_\Delta$ $-r$
S	$x = y$ $p = 0$	p_N $-r$	$\sqrt{-p_N r}$ $-\sqrt{-p_N r}$
T	$p = 0$ $r = 0$	$\det(dg) = p_\Delta r_N - p_N r_\Delta$ $\text{tr}(dg) = N(p_N - 2\Delta r_\Delta) + \Delta(2p_\Delta - r_N)$	$\det(dg_*) = p_N r_\Delta - p_\Delta r_N$ $\text{tr}(dg_*) = -\delta(p_N - 2\Delta r_\Delta) - \delta N(2p_\Delta - r_N)$

Vamos denotar g em (4.43) e $g_* = L^*(g)$ em (4.45) nas coordenadas invariantes como $g = pg_1 + rg_2 \equiv [p, r]$ e $g_* = pg_{1*} + rg_{2*} \equiv [p, r]$, respectivamente, onde $g_1(x, y, \lambda) = (x, y)$ e $g_2(x, y, \lambda) = \delta(x, -y)$ são os geradores dos $\mathbf{D}_4$ -equivariantes e

$$g_{1*}(x, y, \lambda) = L^*(g_1)(x, y, \lambda) = (x, -y) \quad \text{e} \quad g_{2*}(x, y, \lambda) = L^*(g_2)(x, y, \lambda) = \delta(x, y)$$

são os geradores dos $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes.

Com respeito aos diagramas de bifurcação, as simetrias de um ramo de solução são definidas por seu subgrupo de isotropia. A rede de subgrupos de isotropia de $\mathbf{D}_4$ é dada por $\mathbf{D}_4$, $\mathbb{Z}_2(\kappa)$, $\mathbb{Z}_2(\xi\kappa)$ e $\mathbf{1}$. Seguindo a notação de [27], os ramos de solução com subgrupos de isotropia $\mathbb{Z}_2(\kappa)$, $\mathbb{Z}_2(\xi\kappa)$ e $\mathbf{1}$ são denotados por R , S e T , respectivamente.

Os ramos de solução de $g_* = 0$ coincidem com os ramos de solução de $g = 0$; suas equações e expressões para o estudo de estabilidade de soluções são dadas na Tabela 4.5. Para o presente caso, as soluções com isotropias contendo anti-simetrias moram sobre os ramos trivial e do tipo S e seus autovalores são ou um par de autovalores reais de sinais opostos ou um par de autovalores puramente imaginários (Lema 2.1.5). No caso particular do ramo trivial, a solução $(0, 0, \lambda)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico e sua estabilidade não muda quando λ varia em torno de $\lambda = 0$. Como um resultado, soluções hiperbólicas sobre tais ramos nunca são estáveis. Por outro lado, estabilidade pode ocorrer sobre os ramos de solução dos tipos R e T , uma vez que seus subgrupos de isotropia são gerados apenas por simetrias. Ao longo do ramo T , existem casos onde os dois autovalores de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ trocam de ambos positivos para ambos negativos (ou vice-versa), esta troca ocorrendo em um ponto de bifurcação secundária (como ocorre também ao longo do ramo de modo misto do caso $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$).

Analogamente como para o exemplo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -reversível-equivariante, as variedades de transição para g_* coincidem com as variedades de transição para o problema de bifurcação $\mathbf{D}_4$ -equivariante g (veja Observação 4.4.1).

Tabela 4.6: Desdobramentos universais para bifurcações $\mathbf{D}_4$ -reversíveis-equivariantes

	Desdobramento Universal $[p, r]$	Codimensão Topológica
I	$[-\lambda + mN, 1], m \neq 0, 1$	0
II	$[-\lambda + N^2 + \alpha N, \varepsilon_2]$	1
III	$[-\lambda + (1 + \alpha)N + \varepsilon_2\Delta, 1]$	1
IV	$[-\lambda + \varepsilon_1 N + m\Delta, N + \alpha], m \neq 0$	1
V	$[\lambda^2 + mN + \lambda N + \alpha, \varepsilon_2], m \neq 0, \varepsilon_2$	1
VI	$[-\lambda + N^3 + \beta N^2 + \alpha N, \varepsilon_2]$	2
VII	$[-\lambda + N + \varepsilon_2 N\Delta + \alpha N + \beta\Delta, 1]$	2
VIII	$[-\lambda + N + m\Delta^2 + \beta\Delta, \varepsilon_2 N + \alpha], m \neq 0$	2
IX	$[-\lambda + N, \varepsilon_2\Delta + m\lambda^2 + \beta N + \alpha], m \neq 0$	2
X	$[-\lambda + mN^2 + n\Delta + \alpha N, N + \varepsilon_2\Delta + \beta], mn \neq 0, m + n \neq \frac{1}{2}$	2
XI	$[\lambda^2 + \varepsilon_1 N^2 + m\lambda N + \alpha + \beta N, \varepsilon_2], m \geq 0, m^2 \neq 4\varepsilon_1$	2
XII	$[\lambda^2 + \varepsilon_1 N + \varepsilon_2\Delta + m\lambda N, \varepsilon_1], m \geq 0, m^2 \neq 4\varepsilon_2$	2
XIII	$[\lambda^2 + \varepsilon_1 N + \alpha, \lambda + m\Delta + \beta], m \neq 0$	2
XIV	$[-\lambda^3 + mN + \varepsilon_1\lambda N + \alpha + \beta\lambda, 1], m \neq 0, 1$	2
XV	$[\lambda^2 + mN + \alpha + \beta\lambda N, \varepsilon_1], m \neq 0, \varepsilon_1$	2

Na Tabela 4.6 apresentamos todos os desdobramentos universais de codimensão topológica menor ou igual a 2, com uma escolha de $+1$ ou -1 em algum dos coeficientes $\varepsilon_i = \pm 1$ que aparecem nas formas normais. Esta escolha segue [27], desde que nosso objetivo aqui é explicitar semelhanças e diferenças entre ambos os contextos. Usamos m e n para os parâmetros modais e α e β para os parâmetros de desdobramentos. O desdobramento I corresponde à forma normal não degenerada. As formas normais II - V são germes de codimensão topológica 1 e as formas normais VI - XV são de codimensão topológica 2.

Aqui apresentamos os diagramas de bifurcação para os desdobramentos universais I, IV e VIII (Figuras 4.2, 4.3 e 4.4), incluindo as variedades de transição no plano α, β para o último caso. Para os casos restantes, os diagramas têm a mesma forma que os diagramas para os correspondentes equivariantes, com estabilidade dada pela Proposição 4.5.1. Notamos que para todo problema de bifurcação $\mathbf{D}_4$ -reversível-equivariante, seu ramo de solução trivial tem um par de autovalores reais de sinais opostos, para todo $\lambda \neq 0$ (veja Tabela 4.5). Também, ramos de solução T apenas podem ocorrer para os desdobramentos IV, VIII, IX, X e XIII.

Consideramos então a forma normal I, onde temos $p(N, \Delta, \lambda) = -\lambda + mN$ e $r(N, \Delta, \lambda) = 1$, $m \neq 0, 1$. Os ramos R e S são dados por

$$R: \begin{cases} y &= 0 \\ \lambda &= (m-1)x^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad S: \begin{cases} x &= y \\ \lambda &= 2mx^2 \end{cases}.$$

Os autovalores sobre os ramos R e S são dados por $\nu_1 = m-1$, $\nu_2 = -1 < 0$ e $\eta_1 = \sqrt{-m}$,

$\eta_2 = -\sqrt{-m}$, respectivamente. Examinando os sinais destes autovalores, obtemos três tipos diferentes de diagramas de bifurcação (Figura 4.2). Note que, para a forma normal I, soluções hiperbólicas nunca são estáveis.

Figura 4.2: Diagramas de bifurcação persistentes para o desdobramento da forma normal I: $[-\lambda + mN, 1]$, $m \neq 0, 1$.

Figura 4.3: Diagramas de bifurcação persistentes para o desdobramento da forma normal IV: $[-\lambda + \varepsilon_1 N + m\Delta, N + \alpha]$, $m \neq 0$ and $\varepsilon_1 = 1$.

Vamos agora considerar a forma normal IV. Temos $p(N, \Delta, \lambda) = -\lambda + \varepsilon_1 N + m\Delta$ e $r(N, \Delta, \lambda) = N + \alpha$, $m \neq 0$. Os ramos R, S e T são dados por

$$R: \begin{cases} y &= 0 \\ \lambda &= (\varepsilon_1 - \alpha)x^2 + (m - 1)x^4 \end{cases}, \quad S: \begin{cases} x &= y \\ \lambda &= 2\varepsilon_1 x^2 \end{cases}$$

$$\text{e } T: \begin{cases} N &= -\alpha \\ \lambda &= \varepsilon_1 N + m\Delta. \end{cases}$$

Um ramo T existe apenas se $\alpha < 0$. Como devemos ver na Proposição 4.5.1, soluções T para todas as formas normais dos desdobramentos IV, VIII, IX, X e XIII são soluções hiperbólicas, e fornecemos aqui os detalhes de como pares “++” e “--” ocorrem para o caso IV. Para isso, investigamos o sinal do traço de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ quando seu determinante é positivo, isto é, quando $m < 0$:

$$\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = -\delta(\varepsilon_1 + N(2m - 1)),$$

o que implica que o sinal de $\text{tr}(dg_{*})_{(x,y,\lambda)}$ é dado por $-\delta\varepsilon_1$. Portanto, uma troca de estabilidade do tipo “++” (quando $-\delta\varepsilon_1 > 0$) para “--” (quando $-\delta\varepsilon_1 < 0$) é forçada a ocorrer ao longo do ramo T . Esta troca ocorre em uma bifurcação secundária, a saber na intersecção dos ramos S e T (quando $y = x$), e é representada nos diagramas pela notação “++/-”.

Os três regimes distintos para desdobramentos da forma normal IV para $\varepsilon_1 = 1$ são apresentados na Figura 4.3.

Finalmente, considere a forma normal VIII de modo que $p(N, \Delta, \lambda) = -\lambda + N + m\Delta^2 + \beta\Delta$ e $r(N, \Delta, \lambda) = N + \alpha$, com $m \neq 0$. Neste caso, as variedades de transição determinam cinco regimes, que são apresentados na Figura 4.4. Os ramos R, S e T são dados por

$$R: \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = (1 - \alpha)x^2 + (\beta - 1)x^4 + mx^8 \end{cases}, \quad S: \begin{cases} x = y \\ \lambda = 2x^2 \end{cases}$$

e $T: \begin{cases} N = -\alpha \\ \lambda = N + m\Delta^2 + \beta\Delta. \end{cases}$

Figura 4.4: Variedade de transição e diagramas de bifurcação persistentes para o desdobramento da forma normal VIII: $[-\lambda + N + m\Delta^2 + \beta\Delta, N + \alpha]$, $m \neq 0$.

Novamente, um ramo T existe apenas para $\alpha < 0$ e uma troca de estabilidade de “++” para “--” é forçada a ocorrer ao longo de tal ramo quando ele encontra o ramo S (veja Observação 4.5.2): o jacobiano $(dg_{*})_{(x,y,\lambda)}$ tem determinante positivo quando $m < 0$ e

$$\text{sinal } \text{tr}(dg_{*})_{(x,y,\lambda)} = \text{sinal}(\delta N - \delta - 2\delta N(2m\Delta + \beta)) = -\text{sinal}(\delta).$$

4.5.1 Preservação de estabilidade e $\mathbf{D}_4$ –equivalência

Para a presente representação de $\mathbf{D}_4$ em $\mathbb{C}$, soluções hiperbólicas sobre os ramos trivial e S nunca são estáveis e estabilidade pode ocorrer nos ramos R e T . Na próxima proposição obtemos a natureza de cada equilíbrio para todos os desdobramentos a partir da estabilidade (ou instabilidade) do mesmo ponto como equilíbrio do desdobramento equivariante associado dado em [27].

Proposição 4.5.1. *Seja g_* um problema de bifurcação reversível-equivariante sob a presente representação auto-dual de $\mathbf{D}_4$ em $\mathbb{C}$ e seja (x, y, λ) uma solução para $g_* = 0$. Então, temos o seguinte:*

1. *Se $(x, y, \lambda) = (0, 0, \lambda)$, então ele é um ponto de sela do problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante, denotado nos diagramas por “+ –”;*
2. *Se (x, y, λ) é uma solução R do tipo sela do problema $\mathbf{D}_4$ –equivariante, então (x, y, λ) é uma solução hiperbólica do problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante com autovalores ou ambos positivos ou ambos negativos, denotada nos diagramas por “++” ou “--”, respectivamente;*
3. *Se (x, y, λ) é uma solução S do tipo sela do problema $\mathbf{D}_4$ –equivariante, então (x, y, λ) é uma solução não hiperbólica do problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante com autovalores puramente imaginários, denotada nos diagramas por “ $\pm i$ ”;*
4. *Se (x, y, λ) é uma solução R ou S do problema $\mathbf{D}_4$ –equivariante onde os autovalores são ou ambos positivos ou ambos negativos, então (x, y, λ) é uma sela do problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante, denotada nos diagramas por “+ –”;*
5. *Se (x, y, λ) é uma solução T do problema $\mathbf{D}_4$ –equivariante onde os autovalores têm parte real não nula de mesmo sinal, então (x, y, λ) é uma sela no problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante, denotada nos diagramas por “+ –”;*
6. *Se (x, y, λ) é uma solução T do tipo sela do problema $\mathbf{D}_4$ –equivariante, então (x, y, λ) é uma solução no problema $\mathbf{D}_4$ –reversível-equivariante com autovalores com parte real positiva (se $\text{tr}(dg_*) > 0$) ou parte real negativa (se $\text{tr}(dg_*) < 0$), denotada nos diagramas por “++” ou “--”, respectivamente. Neste caso, a toda solução T com estabilidade “++” corresponde uma outra solução T (simétrica) com estabilidade “--”, e vice-versa.*

Demonstração: É uma consequência direta dos resultados da Tabela 4.5. Para a estabilidade de soluções T do tipo 6., as partes sobre o ramo T com estabilidade “++” ($\text{tr}(dg_*) > 0$)

são aplicadas sobre as soluções T com estabilidade “ $-$ ” ($\text{tr}(dg_*) < 0$), e vice-versa, pelas anti-simetrias de $\mathbf{D}_4$, em particular pela rotação ξ de $\pi/2$. A prova segue os mesmos passos que a demonstração da Proposição 4.4.3, comparando os sinais dos traços de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e de $(dg_*)_{(\xi(x,y,\lambda))}$. $\square$

Observação 4.5.2. *A troca de estabilidade ao longo do ramo T do tipo 6. de “ $++$ ” para “ $--$ ” ocorre precisamente onde $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ troca de sinal. Para os desdobramentos IV, VIII, IX, X e XIII, onde ramos de solução do tipo T podem ocorrer, $\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = 0$ se, e somente se, $\delta = 0$. Portanto, a troca de estabilidade ao longo do ramo T ocorre em um ponto de bifurcação secundária, a saber na intersecção dos ramos T e S ($y = x$), e é representada nos diagramas pela notação “ $++/-$ ” sobre o ramo T .*

Finalmente damos condições suficientes para a estabilidade linear de equilíbrios hiperbólicos de g_* ser invariante por $\mathbf{D}_4$ -equivalência. Para isto, consideramos $S \in \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_4)$, com $S(0,0,0)$ na componente conexa da identidade. Portanto,

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} a + bx^2 & cxy + dx^3y \\ cxy + dxy^3 & a + by^2 \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

com $a, b, c, d \in \mathcal{E}(\mathbf{D}_4)$ e $a(0,0,0) > 0$.

Proposição 4.5.3. *Seja g_* um problema de bifurcação reversível-equivariante no plano e seja (x, y, λ) uma solução hiperbólica para $g_* = 0$. Então a estabilidade de (x, y, λ) é invariante sob $\mathbf{D}_4$ -equivalência se qualquer uma das seguintes condições valer:*

- (a) (x, y, λ) é uma solução trivial;
- (b) (x, y, λ) é do tipo R ou S ;
- (c) (x, y, λ) é do tipo T e $\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)} < 0$;
- (d) (x, y, λ) é do tipo T , $\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)} > 0$, $p_N \neq 0$ com $p_N \cdot p_\Delta \geq 0$, $p_N \cdot r_N \leq 0$ e $p_N \cdot r_\Delta \leq 0$ na origem.

Demonstração: Novamente pela Proposição 4.2.3, a estabilidade é preservada por $\mathbf{D}_4$ -equivalência se, e somente se, ela é preservada por mudança de coordenadas $S \in \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{D}_4)$ na meta. As provas dos casos (a) – (c) seguem os passos da prova de [27, Proposition 3.2], levando em conta a forma de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$: em uma solução trivial,

$$(dg_*)_{(0,0,\lambda)} = \begin{pmatrix} p(0,0,\lambda) & 0 \\ 0 & -p(0,0,\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S(0,0,\lambda) = a(0,0,\lambda)I,$$

com $a(0,0,0) > 0$. Então, $S(0,0,\lambda)(dg_*)_{(0,0,\lambda)}$ é uma matriz diagonal com autovalores de mesmo sinal que aqueles de $(dg_*)_{(0,0,\lambda)}$, o que prova (a).

Para as soluções do tipo R ,

$$(dg_*)_{(x,0,\lambda)} = \begin{pmatrix} (r\delta + p)_x x & 0 \\ 0 & r\delta - p \end{pmatrix},$$

onde r, p e suas derivadas são calculadas no ponto (x, y, λ) em questão. Além disso, (4.46) força $S(x, 0, \lambda)$ ser também uma matriz diagonal. Como $\det S(x, y, \lambda) > 0$, segue o resultado.

Para completar a prova do caso (b), consideramos a matriz de $(dg)_{(x,x,\lambda)}$ que tem a forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}$ e autovalores $\pm\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Novamente, (4.46) força os autovalores de $S(x, x, \lambda)(dg_*)_{(x,x,\lambda)}$ serem iguais a $\pm\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) \det S(x, x, \lambda)}$. Como $\det S(x, y, \lambda) > 0$, segue o resultado.

Consideramos agora o caso (c). Como $\det S(x, y, \lambda) > 0$, temos

$$\text{sinal}(\det(dg_*)_{(x,y,\lambda)}) = \text{sinal}(\det S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}), \quad (4.47)$$

que são negativos por hipótese. Portanto, os autovalores de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ são reais e de sinais opostos.

Para o caso (d), (4.47) ainda é válido e, neste caso, comparamos os traços de $(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$ e de $S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}$, com $S(x, y, \lambda)$ como em (4.46). De (4.45), a matriz jacobiana de g_* em uma solução de modo misto é

$$(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} (p + r\delta)_x x & (p + r\delta)_y x \\ (-p + r\delta)_x y & (-p + r\delta)_y y \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Assim, obtemos

$$\text{tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = -2\delta(p_N + 2Np_\Delta - Nr_N - 2\Delta r_\Delta) \quad (4.49)$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}(S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}) &= -2\delta[(ap_N + bNp_N - dx^2y^2p_N - 4(b+c)x^2y^2p_\Delta + 2(b-c)x^2y^2r_N) \\ &\quad + 2N(ap_\Delta + bNp_\Delta - dx^2y^2p_\Delta) - N(ar_N + bNr_N + dx^2y^2r_N) \\ &\quad - 2\Delta(ar_\Delta + bNr_\Delta + dx^2y^2r_\Delta)]. \end{aligned}$$

Agora, como $a(0,0,0) > 0$ e $p_N \neq 0$, com $p_N \cdot p_\Delta \geq 0$, $p_N \cdot r_N \leq 0$ e $p_N \cdot r_\Delta \leq 0$ na origem, temos

$$\text{sinal tr}(dg_*)_{(x,y,\lambda)} = \text{sinal tr}(S(x, y, \lambda)(dg_*)_{(x,y,\lambda)}).$$

□

4.6 O Lema dos Ramos Equivariantes generalizado

Vimos na Seção 4.3 que a existência de um isomorfismo reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ determina a classificação reversível-equivariante em espaços auto-duais a partir da classificação puramente equivariante correspondente e vice-versa. Entretanto, para a classificação de germes de aplicações reversíveis-equivariantes em espaços não auto-duais não existe uma tal associação direta com a classificação equivariante, de modo que as técnicas da Seção 4.2 devem ser aplicadas. Neste caso, podemos investigar a diferença das dimensões de subespaços de pontos fixos específicos de um subgrupo Σ de Γ , chamado σ -índice de Σ . Isto é feito em detalhes no próximo capítulo usando ferramentas de teoria de representação de grupos de Lie compactos e integração de Haar.

No contexto equivariante, a representação de Γ em V é genericamente absolutamente irredutível ([25, XIII, Proposition 3.2]) e isto implica que $(dg)_{(0,\lambda)}$ é genericamente invertível e hiperbólica, para todo $g \in \vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ e λ não nulo. No nosso contexto, se V é auto-dual e $g_* = Lg \in \vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$, então devemos ter $(dg_*)_{(0,\lambda)} = L(dg)_{(0,\lambda)}$ também genericamente invertível. Entretanto, se V é não auto-dual, então $(dg_*)_{(0,\lambda)}$ é sempre singular, $g_* \in \vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$, e não temos uma condição que garanta bifurcação em todo V . Portanto, neste caso, é natural restringir o estudo de bifurcações de pontos de equilíbrios de g_* a $\ker(dg_*)_{(0,\lambda)}$. O caso não auto-dual em que todas as aplicações lineares Γ -reversíveis-equivariantes são identicamente nulas ($\ker(dg_*)_{(0,\lambda)} = V$) é totalmente degenerado do ponto de vista de bifurcação.

O Lema dos Ramos Equivariantes ([25, XIII, Theorem 3.3]) é uma ferramenta fundamental em teoria de bifurcação equivariante ([25, 26, 48, 56]). No contexto puramente equivariante, ele é o principal resultado sobre existência de ramos de pontos de equilíbrios para uma classe especial de subgrupos de isotropia, chamados *axiais*, sob certas condições técnicas de genericidade. O resultado foi primeiramente formulado por Vanderbauwhede ([56]) para o caso de bifurcação de soluções estacionárias e então estendido a outros contextos, em particular a bifurcação de Hopf ([26]).

Nesta seção, discutimos resultados parciais em teoria de bifurcação reversível-equivariante e apresentamos a generalização do Lema dos Ramos Equivariantes para este contexto. No que segue, Γ é um grupo de Lie compacto agindo como um grupo de simetrias generalizado em V e (ρ_σ, V) é a representação dual de (ρ, V) .

Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante. Então, $\ker A$ é um subespaço Γ -invariante de V . De fato, se $x \in \ker A$, então

$$A(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma A(x) = \sigma(\gamma)\gamma 0 = 0,$$

implicando que $\gamma x \in \ker A$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Além disso, se Γ age irreduzivelmente em V , então ou $\ker A = \{0\}$, ou $\ker A = V$. No primeiro caso, A é invertível e V é um espaço vetorial auto-dual. No segundo caso, $A \equiv 0$ e V é não auto-dual.

Como mencionado acima, a irreduzibilidade absoluta de Γ tem uma importante implicação em bifurcações de pontos de equilíbrios puramente equivariantes, pois determina uma situação genérica. No caso de bifurcações de pontos de equilíbrios reversíveis-equivariantes auto-duais obtemos uma interpretação análoga de genericidade. De fato, o pullback L^* restrito a $GL(V) \cap \vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ é um isomorfismo sobre $GL(V) \cap \vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.6.1. *Seja (ρ, V) uma representação de Γ em V sob a qual V é auto-dual e seja $L : V \rightarrow V$ um isomorfismo linear reversível-equivariante. Dizemos que a representação de Γ em V é σ -absolutamente-irreduzível se as únicas aplicações lineares em V que comutam e anti-comutam com Γ são as múltiplas escalares de L .*

Assim, se (ρ, V) é uma representação auto-dual de Γ em V , então (ρ, V) é absolutamente-irreduzível se, e somente se, (ρ, V) é σ -absolutamente-irreduzível, ou seja, a representação de Γ em V é genericamente σ -absolutamente-irreduzível.

A seguir tratamos do Lema dos Ramos Equivariantes em nosso contexto. Seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo e considere os subespaços de pontos fixos de Σ em (ρ, V) e (ρ_σ, V) , a saber

$$\text{Fix}_V(\Sigma) = \{x \in V : \gamma x = x, \forall \gamma \in \Sigma\}$$

e

$$\text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma) = \{x \in V : \sigma(\gamma)\gamma x = x, \forall \gamma \in \Sigma\}.$$

Notamos que ou $\text{Fix}_V(\Sigma) \cap \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma) = \{0\}$ (se Σ contém pelo menos uma anti-simetria), ou $\text{Fix}_V(\Sigma) = \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma)$ (caso contrário). Σ é chamado *axial* se $\dim \text{Fix}_V(\Sigma) = 1$.

Definição 4.6.2. *Seja Σ um subgrupo de Γ . Então o σ -índice de Σ em V é definido como*

$$s_V(\Sigma) = \dim \text{Fix}_V(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma).$$

Se a ação de Γ em V é absolutamente-irreduzível então $\text{Fix}_V(\Gamma) = \{0\}$ [25, XII, Lemma 3.3] e muitos dos resultados no contexto puramente equivariante derivam deste fato. Se a ação de Γ em V é irreduzível e não trivial então $\text{Fix}_V(\Gamma) = \text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$. Para verificar isto, basta notar que um subespaço de V é invariante segundo ρ se, e somente se, é invariante segundo a representação dual ρ_σ .

A proposição seguinte é a versão reversível-equivariante de [25, XIII, Proposition 2.2]:

Proposição 4.6.3. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V como um grupo de simetrias generalizado. São equivalentes:*

(a) $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$;

(b) Qualquer aplicação Γ -reversível-equivariante $g : V \rightarrow V$ satisfaz $g(0) = 0$;

(c) A única função linear Γ -invariante segundo a representação dual ρ_σ é a função nula.

Demonstração: : (a) $\Rightarrow$ (c) : Seja $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear Γ -invariante segundo ρ_σ . Podemos escrever L na forma

$$L(x) = \langle v, x \rangle,$$

para algum $v \in V$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno Γ -invariante em (ρ_σ, V) , ou seja,

$$\langle \rho_\sigma(\gamma)v, \rho_\sigma(\gamma)w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad v, w \in V.$$

Se $v \in \text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$, então $L(x) = \langle 0, x \rangle = 0$ e (c) estará provado. Mostramos, então, que $v \in \text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma)$. De fato, a invariância de L implica que $L(x) = L(\sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Então,

$$\langle v, x \rangle = \langle v, \sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}x \rangle = \langle \sigma(\gamma)\gamma v, x \rangle, \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V,$$

a última igualdade seguindo da invariância do produto interno. Logo, $\sigma(\gamma)\gamma v = v$, para todo $\gamma \in \Gamma$, como desejado.

(c) $\Rightarrow$ (b) : Seja $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -reversível-equivariante. Defina a função linear $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(x) = \langle g(0), x \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno Γ -invariante em (ρ_σ, V) . Então, L é Γ -invariante segundo ρ_σ . De fato, para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo $x \in V$, temos:

$$\begin{aligned} L(\sigma(\gamma)\gamma x) &= \langle g(0), \sigma(\gamma)\gamma x \rangle = \langle \sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}g(0), x \rangle \\ &= \langle g(\sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}0), x \rangle = \langle g(0), x \rangle \\ &= L(x). \end{aligned}$$

Por hipótese, $L \equiv 0$, o que implica que $g(0) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Definimos a aplicação constante $g : V \rightarrow V$ por $g(x) = v$, para todo $x \in V$ e $v \in \text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma)$ arbitrário. Então,

$$g(\gamma x) = v = \sigma(\gamma)\gamma v = \sigma(\gamma)\gamma g(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma, \quad x \in V,$$

ou seja, g é Γ -reversível-equivariante. Por hipótese, $v = g(0) = 0$ e, portanto, $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$.

□

Teorema 4.6.4. (Lema dos Ramos Equivariantes generalizado) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V como um grupo de simetrias generalizado. Assumimos que*

- a) $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$;
- b) $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo de isotropia axial tal que $s_V(\Sigma) = 0$;
- c) $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow V$ é um problema de bifurcação Γ -reversível-equivariante tal que

$$(dg_\lambda)_{0,0}(v_0) \neq 0,$$

onde $0 \neq v_0 \in \text{Fix}_V(\Sigma)$.

Então, existe um único ramo suave de soluções $(tv_0, \lambda(t))$ para $g(x, \lambda) = 0$, onde cada solução, para $t \neq 0$, tem subgrupo de isotropia Σ .

Demonstração: É imediato que

$$g(\text{Fix}_V(\Sigma) \times \mathbb{R}) \subseteq \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma).$$

Logo, $g(v_0, \lambda) \in \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Supomos $v_0 \neq 0$ e $w_0 \neq 0$ geradores dos subespaços unidimensionais $\text{Fix}_V(\Sigma)$ e $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma)$, respectivamente. Então,

$$g(tv_0, \lambda) = h(t, \lambda)w_0,$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave. Pela Proposição 4.6.3, $g(0, \lambda) = 0$, uma vez que $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Gamma) = \{0\}$. Então,

$$0 = g(0, \lambda) = h(0, \lambda)w_0,$$

o que implica que $h(0, \lambda) = 0$. Aplicando o Teorema de Taylor para h temos

$$g(tv_0, \lambda) = k(t, \lambda)tw_0, \tag{4.50}$$

para $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Derivando ambos os lados de (4.50) com respeito a t e avaliando em $t = 0$ temos

$$(dg)_{0,\lambda}(v_0) = k(0, \lambda)w_0,$$

o que implica que $k(0, 0) = 0$ uma vez que $(dg)_{0,0} = 0$. Agora, derivamos ambos os lados de (4.50) com respeito a λ e, depois, com respeito a t para obter

$$(dg_\lambda)_{tv_0,\lambda}(v_0) = (k_\lambda)'(t, \lambda)tw_0 + k_\lambda(t, \lambda)w_0.$$

Para $t = 0$ e $\lambda = 0$ temos

$$(dg_\lambda)_{0,0}(v_0) = k_\lambda(0, 0)w_0,$$

o que implica, por hipótese, que $k_\lambda(0, 0) \neq 0$.

Logo, temos $k(0, 0) = 0$ e $k_\lambda(0, 0) \neq 0$. Aplicando o Teorema da Função Implícita para resolver $k(t, \lambda) = 0$ para $\lambda = \lambda(t)$ temos

$$g(tv_0, \lambda(t)) = k(t, \lambda(t))tw_0 = 0.$$

Portanto, $(tv_0, \lambda(t)) \in \text{Fix}_V(\Sigma) \times \mathbb{R}$ é um ramo de soluções suaves para $g(x, \lambda) = 0$. Note que cada solução, para $t \neq 0$, tem Σ contido no subgrupo de suas simetrias e anti-simetrias. Como Σ é um subgrupo de isotropia, ele é o grupo de simetrias e anti-simetrias de cada solução $(tv_0, \lambda(t))$. $\square$

Observação 4.6.5. *As condições impostas pelo Teorema 4.6.4 ocorrem com frequência em sistemas dinâmicos reversíveis-equivariantes. Em particular, no caso auto-dual $s_V(\Sigma) = 0$, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$. No próximo capítulo tratamos da ocorrência de $s_V(\Sigma) = 0$ também para o caso não auto-dual.*

Os resultados mostrados acima para aplicações reversíveis-equivariantes (Proposição 4.6.3 e Teorema 4.6.4) são casos particulares de resultados para germes de aplicações Γ -equivariantes $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$. Mais precisamente, para os espaços vetoriais de dimensão finita V e W significando (ρ, V) e (η, W) , respectivamente, temos:

Proposição 4.6.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e em W . São equivalentes:*

- (a) $\text{Fix}_W(\Gamma) = \{0\}$;
- (b) Qualquer aplicação Γ -equivariante $g : V \rightarrow W$ satisfaz $g(0) = 0$;
- (c) A única função linear $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariante segundo a representação η é a função nula.

Teorema 4.6.7. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em V e em W . Assumimos que*

- a) $\text{Fix}_W(\Gamma) = \{0\}$;
- b) $\Sigma \subset \Gamma$ é um subgrupo de isotropia axial tal que $\dim \text{Fix}_W(\Sigma) = 1$;
- c) $g : (V \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow W$ é um problema de bifurcação Γ -equivariante tal que

$$(dg_\lambda)_{0,0}(v_0) \neq 0,$$

onde $0 \neq v_0 \in \text{Fix}_V(\Sigma)$.

Então, existe um único ramo suave de soluções $(tv_0, \lambda(t))$ para $g(x, \lambda) = 0$, onde cada solução, para $t \neq 0$, tem subgrupo de isotropia Σ .

Decomposição σ –isotípica e o σ –índice

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente em um espaço de dimensão finita V . Como mencionado no Capítulo 1, toda representação de um grupo de Lie compacto pode ser decomposta em uma soma direta de representações irredutíveis; em consequência, V pode ser decomposto como

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, \quad (5.1)$$

onde cada bloco isotípico V_i é a soma de todos os subespaços Γ –irredutíveis Γ –isomorfos a um irredutível fixo U_i , $i = 1, \dots, m$. O processo de decomposição de V em blocos isotípicos tem importantes implicações no estudo de problemas de bifurcação equivariantes. De fato, uma vez que toda aplicação linear puramente equivariante definida em V deixa cada bloco isotípico V_i invariante, $i = 1, \dots, m$ ([25, XII, Theorem 3.5]), podemos olhar para as aplicações lineares equivariantes em uma forma diagonal em blocos. No contexto reversível-equivariante, esta propriedade de invariância não vale em geral. Isto é dizer que cada bloco isotípico V_i , $i = 1, \dots, m$ pode não ser deixado invariante por toda aplicação linear Γ –reversível-equivariante. Em [39], os autores constroem correspondentes subespaços que são deixados invariantes por qualquer aplicação linear Γ –reversível-equivariante, chamados *componentes σ –isotípicas* de V . Nosso principal objetivo na próxima seção é completar tal construção e detalhar uma comparação entre ambas.

Na Seção 5.2, fornecemos uma expressão algébrica para o σ –índice $s_V(\Sigma)$ de um subgrupo fechado $\Sigma \subseteq \Gamma$ em V (Definição 4.6.2). Tal expressão aparece na Subseção 5.2.1 e é importante no estudo da estrutura de espaços vetoriais não auto-duais em termos de sua decomposição em blocos isotípicos. Para espaços auto-duais, $s_V(\Sigma)$ é nulo, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$. Entretanto, a recíproca deste fato nem sempre vale. Na Subseção 5.2.2, obtemos uma expressão para $s_V(\Sigma)$ em termos dos σ –índices de Σ nos subespaços Γ –irredutíveis não auto-duais de V e estabelecemos casos especiais em que V é não auto-dual com $s_V(\Sigma) = 0$, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$.

5.1 Decomposição σ –isotípica

Seja (ρ_σ, V) a representação dual de (ρ, V) (Definição 1.1.2) e seja $\{(\rho_1, U_1), \dots, (\rho_m, U_m)\}$ o conjunto de representações irredutíveis de Γ em V tal que cada classe de isomorfismo de representações irredutíveis contém precisamente um dos U_i . No que segue, escrevemos U_i para denotar (ρ_i, U_i) e $(U_i)_\sigma$ para denotar o dual $((\rho_i)_\sigma, U_i)$, onde $\rho_i = \rho|_{U_i}$ e $(\rho_i)_\sigma = \rho_\sigma|_{U_i}$.

Começamos notando que a decomposição de V em componentes isotípicas segundo a representação ρ coincide com a decomposição de V em componentes isotípicas segundo sua representação dual ρ_σ . Isto é dizer que os blocos isotípicos V_i são os mesmos em ambas as decomposições. Para verificar isto, basta notar que:

- (i) um subespaço U_i é irredutível segundo ρ se, e somente se, U_i é irredutível segundo ρ_σ ;
- (ii) dois subespaços U_i e U_j são isomorfos se, e somente se, seus duais $(U_i)_\sigma$ e $(U_j)_\sigma$ são isomorfos (segundo o mesmo isomorfismo).

Com base nestes argumentos, generalizamos ao contexto reversível-equivariante dois resultados úteis ([25, XII, Lemma 3.4, Theorem 3.5]) em teoria de representação de grupos de Lie compactos:

Lema 5.1.1. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V como um grupo de simetrias generalizado. Seja $L : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ –reversível-equivariante e tome $W \subset V$ um subespaço Γ –irredutível. Então $L(W)$ é Γ –invariante e ou $L(W) = \{0\}$ ou as representações de Γ em W e em $L(W)$ são isomorfas. Em outras palavras, se $L(W) \neq \{0\}$, então $L(W)$ é um subespaço Γ –irredutível de V .*

Demonstração: Para mostrar que $L(W)$ é Γ –invariante tome $z \in L(W)$. Então $z = L(w)$, para algum $w \in W$ e $\gamma z = \sigma(\gamma)^2 \gamma L(w) = \sigma(\gamma) L(\gamma w)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. A Γ –invariância de W implica que $\gamma z \in L(W)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, o que prova a afirmação.

Como $\ker L$ é Γ –invariante, temos $\ker L \cap W$ um subespaço Γ –invariante de W . A irredutibilidade de W implica que $\ker L \cap W = W$ ou $\ker L \cap W = \{0\}$. No primeiro caso, $L(W) = \{0\}$. No segundo caso, $L|_W : W \rightarrow L(W)$ é um isomorfismo linear que comuta e anti-comuta com a ação de Γ , implicando que as representações de Γ em W e em $L(W)$ são isomorfas.

Agora, seja $M \subseteq L(W) \neq \{0\}$ um subespaço Γ –invariante. Então, $L^{-1}(M) \subseteq W$ é Γ –invariante, uma vez que $L^{-1}|_{L(W)} : L(W) \rightarrow W$ é uma aplicação linear reversível-equivariante. A irredutibilidade de W implica que ou $L^{-1}(M) = \{0\}$ ou $L^{-1}(M) = W$, ou seja, ou $M = \{0\}$ ou $M = L(W)$ e, portanto, $L(W) \subseteq V$ é Γ –irredutível. $\square$

Corolário 5.1.2. *Sejam U_i e U_j subespaços Γ -irredutíveis de V . Então, $T : U_i \mapsto U_j$ é uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante não nula se, e somente se, $T : U_i \mapsto U_j$ é um isomorfismo linear Γ -reversível-equivariante.*

Demonstração: Notemos primeiramente que este resultado segue diretamente do Lema 1.2.3. A condição suficiente é óbvia. Para provar a condição necessária, suponha $T : U_i \mapsto U_j$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante não nula. Estenda T a uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ não nula de modo que $L|_{U_i} = T$. Pelo Lema anterior, $T : U_i \rightarrow T(U_i)$ é um isomorfismo linear Γ -reversível-equivariante e $\{0\} \neq T(U_i) \subseteq U_j$ é um subespaço Γ -irredutível de V . A irredutibilidade de U_j implica que $T(U_i) = U_j$, provando o resultado. $\square$

Observação 5.1.3. *Assim, uma condição necessária e suficiente para que exista um subespaço irredutível $U_j \subseteq V$ isomorfo ao dual de $U_i \subseteq V$ é que exista uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante não nula $T : V \rightarrow V$ tal que $T|_{U_i} \neq \{0\}$; em outras palavras, para $i \in \{1, \dots, m\}$ e para toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$, temos $L|_{U_i} \equiv 0$ se, e somente se, não existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que U_i é Γ -isomorfo a $(U_j)_\sigma$.*

O Lema 5.1.1 também implica em:

Proposição 5.1.4. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V como um grupo de simetrias generalizado e $L : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante. Decomponha V em componentes isotópicas como em (5.1). Então, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$,*

$$L(V_i) \subset V_j,$$

para algum $j = j(i) \in \{1, \dots, m\}$, e vice-versa.

Demonstração: Para $i \in \{1, \dots, m\}$, escreva

$$V_i = W_{i1} \oplus \dots \oplus W_{i\alpha(i)} \tag{5.2}$$

a soma direta de subespaços Γ -irredutíveis Γ -isomorfos a U_i . Seja $k \in \{1, \dots, \alpha(i)\}$. Pelo Lema 5.1.1, ou $L(W_{ik}) = \{0\}$ ou $L(W_{ik})$ é um subespaço Γ -irredutível Γ -isomorfo (por um isomorfismo equivariante) a U_j , para um único $j \in \{1, \dots, m\}$. Em ambos os casos, $L(W_{ik}) \subset V_j$ e pela linearidade da L segue que

$$L(V_i) = L(W_{i1}) \oplus \dots \oplus L(W_{i\alpha(i)}) \subseteq V_j.$$

Do mesmo modo, para tal j e para $k \in \{1, \dots, \alpha(j)\}$, ou $L(W_{jk}) = \{0\}$ ou $L(W_{jk})$ é um subespaço Γ -irredutível isomorfo a U_l , para um único $l \in \{1, \dots, m\}$. É fácil ver que, no

segundo caso, o irredutível U_i é Γ -isomorfo ao irredutível U_l e, portanto, $l = i$. Assim, $L(W_{jk}) \subset V_i$, para todo $k \in \{1, \dots, \alpha(j)\}$. Novamente pela linearidade da L , segue que

$$L(V_j) = L(W_{j1}) \oplus \dots \oplus L(W_{j\alpha(j)}) \subseteq V_i. \quad \square$$

Temos agora em mãos as ferramentas para descrever o processo de construção de subespaços que são deixados invariantes por toda aplicação linear reversível-equivariante, concretizando assim uma generalização da decomposição isotópica de V ao contexto reversível-equivariante. Seja $L : V \rightarrow V$ uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante arbitrária. Consideramos três casos:

1. U_i é auto dual: neste caso, L satisfaz $L(V_i) \subseteq V_i$. De fato, por hipótese e pela Observação 5.1.5, segue que a componente isotópica V_i é auto-dual. Tome $T : V_i \rightarrow V_i$ um isomorfismo linear reversível-equivariante e escreva L como $L = TT^{-1}L$, onde $T^{-1}L$ é uma aplicação linear puramente equivariante. Então, $T^{-1}L(V_i) \subseteq V_i$ e segue o afirmado.

Seguindo a notação de [39], definimos o subespaço $\widehat{V}_i = V_i$, que é deixado invariante por toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante.

2. U_i é não auto-dual e existe Γ -irredutível U_j , com $j = j(i) \neq i$, tal que U_i é Γ -isomorfo ao dual de U_j : neste caso, L satisfaz $L(V_i) \subseteq V_j$ e vice-versa. De fato, escreva o bloco isotópico V_i correspondente ao irredutível U_i como em (5.2) e seja $k \in \{1, \dots, \alpha(i)\}$ arbitrário. Por hipótese, W_{ik} é Γ -isomorfo ao dual de U_j . Pelo Lema 5.1.1, ou $L(W_{ik}) = \{0\}$ ou W_{ik} é Γ -isomorfo ao dual de $L(W_{ik})$ e, portanto, $L(W_{ik})$ é Γ -isomorfo a U_j . Em ambos os casos, $L(W_{ik}) \subseteq V_j$, para todo $k \in \{1, \dots, \alpha(i)\}$. Pela linearidade da L , segue que

$$L(V_i) = L(W_{i1}) \oplus \dots \oplus L(W_{i\alpha(i)}) \subseteq V_j.$$

Pelo mesmo raciocínio, obtemos $L(V_j) \subseteq V_i$, uma vez que U_j é Γ -isomorfo ao dual de U_i .

Definimos para este caso o subespaço $\widehat{V}_i = V_i \oplus V_j$, que por construção é deixado invariante por L .

3. U_i é não auto-dual e não existe Γ -irredutível U_j tal que U_i é Γ -isomorfo ao dual de U_j : neste caso, $L(V_i) = \{0\}$. De fato, escreva novamente V_i como em (5.2) e tome $k \in \{1, \dots, \alpha(i)\}$ arbitrário. Então, pela Observação 5.1.3, $L(W_{ik}) = \{0\}$ e o resultado segue pela linearidade de L .

Aqui, definimos o subespaço $\widehat{V}_i = V_i$, que é deixado invariante por toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante.

Na Proposição 5.1.4, mostramos que uma aplicação linear Γ -reversível-equivariante L leva uma componente isotípica V_i em uma componente isotípica V_j , para algum $j = j(i)$. Da discussão acima, concluímos que j independe da aplicação L e, portanto, fica bem definida a seguinte construção: existe uma permutação π de $\{1, \dots, m\}$ de ordem 2 tal que

$$\widehat{V}_i = V_i + V_{\pi(i)},$$

onde $V_{\pi(i)} = V_i$ para o caso 1; $V_{\pi(i)} = V_j$ para o caso 2 e $V_{\pi(i)} = \{0\}$ para o caso 3. Cada subespaço $\widehat{V}_i$ é chamado *componente σ -isotípica* ou *bloco σ -isotípico* de V . A decomposição

$$V = \widehat{V}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{V}_l$$

é chamada *decomposição σ -isotípica* de V .

Observação 5.1.5. Como afirmado em ([39]), cada bloco isotípico V_i é auto-dual se, e somente se, o Γ -irredutível U_i correspondente é auto-dual. A seguir, ratificamos esta afirmação: escreva V_i como em (5.2). É claro que se U_i é auto-dual então o irredutível W_{ik} é auto-dual, para todo $k \in \{1, \dots, \alpha(i)\}$. Consequentemente V_i é auto-dual. Por outro lado, suponha o irredutível U_i não auto-dual. Então, para toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ temos, ou $L(V_i) \subseteq V_j$, para algum $j \neq i$ (caso 2.) ou $L(V_i) = \{0\}$ (caso 3.). Em ambos os casos, o bloco isotípico V_i é não auto-dual, como queríamos.

Como aparece em [39], Lamb e Roberts analisam de forma sistemática a estrutura de aplicações lineares reversíveis-equivariantes usando as componentes σ -isotípicas $\widehat{V}_i \subseteq V$. Terminamos esta seção mostrando por que o processo de construção destas componentes dado em [39, Seção 3.2, pp. 272-273] deve ser completado da forma como apresentamos acima.

O problema consiste na possível não existência de uma permutação entre subespaços irredutíveis de V que é usada para a construção dos subespaços invariantes $\widehat{V}_i'$ s. Mais precisamente, de [39] segue que existe uma permutação de ordem 2, lá denotada por σ , no conjunto das classes de isomorfismos de representações irredutíveis $\{(\rho_i, U_i) : i = 1, \dots, k\}$, tal que o dual de U_i é isomorfo a $U_{\sigma(i)}$ e que L leva a componente isotípica V_i na componente isotípica $V_{\sigma(i)}$ e vice-versa. Consequentemente, o subespaço

$$V_i + V_{\sigma(i)} \tag{5.3}$$

é invariante por L . Depois disso os autores afirmam que se U_i é não auto-dual, então V_i e $V_{\sigma(i)}$ são blocos isotípicos distintos e a soma de (5.3) é direta.

É importante notar que pode não existir um subespaço irredutível $(\rho_{\sigma(i)}, U_{\sigma(i)}) \subseteq (\rho_\sigma, V)$ isomorfo ao dual do subespaço irredutível $(\rho_i, U_i) \subseteq (\rho, V)$, como ocorre no caso 3. Neste caso, a permutação σ descrita em [39] deixa de estar bem colocada, pois $V_{\sigma(i)}$ está ausente

na decomposição isotópica de V . Nesta circunstância, é claro que não podemos dizer que V_i e $V_{\sigma(i)}$ são blocos isotópicos distintos, ou que $\widehat{V}_i$ é a soma direta de V_i e $V_{\sigma(i)}$, ou ainda que toda aplicação linear Γ –reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ satisfaz $L(V_i) \subseteq V_{\sigma(i)}$, como mencionados em [39].

Entretanto, isto não compromete a aplicabilidade dos resultados apresentados em [39] e o processo que descrevemos nesta seção, fixando V e a representação de Γ em V , completa o processo descrito em [39].

5.2 Análise do σ –índice

Lembramos que o σ –índice de um subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$ em V é definido como

$$s_V(\Sigma) = \dim \text{Fix}_V(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma).$$

Quando não houver confusão, denotamos o σ –índice de Σ em V por $s(\Sigma)$.

Mencionamos os artigos por Buono, Lamb e Roberts [9, 10] como uma motivação para o que segue: em tais artigos, os autores lidam com campos vetoriais reversíveis-equivariantes e equivariantes, respectivamente, e provam resultados usando o σ –índice de Σ em V . Mais especificamente, em [9] os autores apresentam um resultado que fornece a dimensão de famílias a l –parâmetros de campos vetoriais Γ –reversíveis-equivariantes com constante subgrupo de isotropia Σ em termos de $s(\Sigma)$. Em [10] eles apresentam resultados no conjunto nulo de aplicações Γ –equivariantes usando apenas o σ –índice de um subgrupo de isotropia Σ .

Nesta seção, apresentamos uma expressão algébrica para o cálculo de $s(\Sigma)$ usando integração de Haar, que depende apenas da representação de Σ em V . Em seguida, estabelecemos alguns casos em que V é não auto-dual com σ –índice de Σ nulo, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$.

5.2.1 A fórmula do σ –índice

Como vimos no Capítulo 1, a integral de Haar é ferramenta fundamental em teoria de representação de grupos de Lie compactos e, conseqüentemente, no estudo de sistemas em presença simultânea de simetrias e anti-simetrias. Usamos o Corolário 1.1.8 na obtenção do seguinte teorema, que fornece uma expressão algébrica para $s(\Sigma)$ e conduz a uma comparação entre as dimensões de $\text{Fix}_V(\Sigma)$ e $\text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma)$.

Teorema 5.2.1. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie fechado. Então, para $\delta \in \Sigma_-$ fixado,*

$$s_V(\Sigma) = \int_{\Sigma_+} \text{tr}(\delta\gamma), \quad (5.4)$$

onde $tr(\delta\gamma)$ denota o traço da representação de $\delta\gamma \in \Sigma_-$ em V .

Demonstração: Seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie fechado contendo pelo menos uma anti-simetria de Γ e fixe $\delta \in \Sigma_-$. Consideramos a seguinte função contínua

$$\begin{aligned} tr : \Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto tr(\gamma), \end{aligned}$$

onde $tr(\gamma)$ denota o traço da representação de $\gamma \in \Sigma$ em V . Pelo Corolário 1.1.8,

$$\int_{\Sigma} tr(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} tr(\gamma) + \int_{\Sigma_+} tr(\delta\gamma) \right]. \quad (5.5)$$

Usamos agora o Lema 1.1.6 e a igualdade (5.5) para obter

$$\dim \text{Fix}_V(\Sigma) = \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} tr(\gamma) + \int_{\Sigma_+} tr(\delta\gamma) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \dim \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma) &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} tr(\sigma(\gamma)\gamma) + \int_{\Sigma_+} tr(\sigma(\delta\gamma)\delta\gamma) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_+} tr(\gamma) - \int_{\Sigma_+} tr(\delta\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$s_V(\Sigma) = \dim \text{Fix}_V(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{V_\sigma}(\Sigma) = \int_{\Sigma_+} tr(\delta\gamma),$$

como desejado. □

Se Σ é finito, então (5.4) torna-se

$$s_V(\Sigma) = \frac{1}{|\Sigma_+|} \sum_{\Sigma_+} tr(\delta\gamma), \quad \text{para } \delta \in \Sigma_- \text{ fixado.} \quad (5.6)$$

Note que $\delta\gamma$ percorre o conjunto de todas as anti-simetrias de Σ . Além disso, uma vez que $\Sigma/\Sigma_+ \simeq \mathbf{Z}_2$ temos $|\Sigma_+| = \frac{|\Sigma|}{2}$. Então, podemos reescrever (5.6) como

$$s_V(\Sigma) = \frac{2}{|\Sigma|} \sum_{\Sigma_-} tr(\gamma), \quad (5.7)$$

que nos dá uma fórmula para calcular o σ -índice de um grupo de Lie finito Σ .

Uma vez que a fórmula (5.4) é deduzida do Lema 1.1.6, é claro que o σ -índice de um subgrupo depende de sua representação em V . Como mencionamos, em espaços auto-duais

$s_V(\Sigma) = 0$, para todo subgrupo Σ de Γ . Este fato pode ser agora verificado diretamente da expressão (5.4) juntamente com o fato de que em espaços auto-duais toda anti-simetria tem traço nulo (Lema 2.1.2). Entretanto, pode acontecer $s_V(\Sigma) \neq 0$, positivo ou negativo e, neste caso, V é não auto-dual. Na próxima seção mostramos que a recíproca não vale, ou seja, V não auto-dual não implica necessariamente $s_V(\Sigma) \neq 0$, para todo $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Ilustramos agora o Teorema 5.2.1 com alguns exemplos. Em todos eles, denotamos por $\mathcal{R}_\theta$ a rotação de ângulo θ em torno da origem e por I o elemento identidade de Γ .

Exemplo 5.2.2. Considere a ação padrão de $\mathbf{D}_n$ no plano gerada pela conjugação complexa κ e pela rotação $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ dada em (2.5), com κ uma simetria e $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ uma anti-simetria. Lembramos, da Subseção 2.2.4, que para a presente representação de $\mathbf{D}_n$ não existem campos vetoriais reversíveis-equivariantes quando n é ímpar. Além disso, ela é auto-dual apenas se $n = 4$. Portanto, se $n \neq 4$, pode acontecer $s(\Sigma) \neq 0$, para $\Sigma \subseteq \mathbf{D}_n$ subgrupo.

Os subgrupos de isotropia de $\mathbf{D}_n$ distintos de $\mathbf{1}$ são $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{Z}_2(\kappa)$ e $\mathbf{Z}_2(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}\kappa)$. O subgrupo de isotropia $\mathbf{Z}_2(\kappa)$ não possui anti-simetrias, de modo que $s(\mathbf{Z}_2(\kappa)) = 0$. O subgrupo de isotropia $\mathbf{Z}_2(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}\kappa)$ é gerado por uma anti-simetria que tem traço nulo. Consequentemente, $s(\mathbf{Z}_2(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}\kappa)) = 0$. Toda anti-simetria de $\mathbf{D}_n$ que é a composição da reflexão κ por uma rotação da forma $(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}})^k$, com $1 \leq k \leq n-1$ ímpar, têm traço nulo. Entretanto, as anti-simetrias de $\mathbf{D}_n$ que são rotações da forma $(\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}})^k$, com $1 \leq k \leq n-1$ ímpar, tem traço igual a $2 \cos[\frac{2k\pi}{n}]$. Neste caso, de (5.7),

$$s(\mathbf{D}_n) = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left[\frac{(4m+2)\pi}{n}\right]. \quad (5.8)$$

Para ilustrar, $s(\mathbf{D}_2) = -1$, donde obtemos $\dim \text{Fix}_{\mathbb{C}_\sigma}(\mathbf{D}_2) = 1$. Para todo $n \geq 6$,

$$s(\mathbf{D}_n) = \frac{2}{n} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2 \cdot 3\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{2(n-3)\pi}{n} + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0.$$

Portanto, $s_V(\Sigma) = 0$, para todo subgrupo de isotropia Σ de $\mathbf{D}_n$, se $n \geq 4$.

Exemplo 5.2.3. Considere a ação padrão do grupo cíclico $\mathbf{Z}_n(\delta)$ no plano, onde $\delta = \mathcal{R}_{\frac{2\pi}{n}}$ é uma anti-simetria. Como vimos na Subseção 2.2.3, não existem campos vetoriais $\mathbf{Z}_n(\delta)$ -reversíveis-equivariantes para n ímpar. Além disso, a presente representação de $\mathbf{Z}_n(\delta)$ em $\mathbb{C}$ é não auto-dual para $n \neq 4$ e auto-dual para $n = 4$, ou seja, $s(\mathbf{Z}_4(\delta)) = 0$.

Toda anti-simetria de $\mathbf{Z}_n(\delta)$ tem traço igual a $2 \cos(\frac{2k\pi}{n})$, para $1 \leq k \leq n-1$ ímpar. De (5.7),

$$s(\mathbf{Z}_n(\delta)) = \frac{4}{n} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos\left[\frac{(4m+2)\pi}{n}\right]. \quad (5.9)$$

Para ilustrar, $s(\mathbf{Z}_2(\delta)) = -2$, donde $\text{Fix}_{\mathbb{R}_\sigma^2}(\mathbf{Z}_2(\delta)) = \mathbb{R}^2$. Analogamente ao exemplo anterior,

$$s(\mathbf{Z}_n(\delta)) = \frac{4}{n} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{2.3\pi}{n} + \cdots + \cos \frac{2(n-3)\pi}{n} + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) = 0,$$

para todo $n \geq 6$ par.

Exemplo 5.2.4. Consideramos a ação padrão de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano gerada pelos flips κ_1 e κ_2 como no caso 3. da Subseção 2.2.7.

Os subgrupos de isotropia de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ distintos de $\mathbf{1}$ são $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2(\kappa_1)$ e $\mathbb{Z}_2(\kappa_2)$. Se κ_1 e κ_2 agem como anti-simetrias, então o subgrupo de isotropia $\mathbb{Z}_2(\kappa_2)$ não possui anti-simetrias, de modo que $s(\mathbb{Z}_2(\kappa_2)) = 0$. O subgrupo de isotropia $\mathbb{Z}_2(\kappa_1)$ é gerado por uma anti-simetria que tem traço nulo, implicando $s(\mathbb{Z}_2(\kappa_1)) = 0$. Também por (5.7), $s(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = -1$, o que implica em $\dim \text{Fix}_{\mathbb{R}_\sigma^2}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 1$.

5.2.2 Análise do σ -índice no caso não auto-dual

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita não auto-dual decomposto em blocos isotípicos como em (5.1) e seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie arbitrário. Escrevemos novamente U_i para (ρ_i, U_i) , onde $\{(\rho_1, U_1), \dots, (\rho_m, U_m)\}$ é o conjunto de representações Γ -irredutíveis não isomorfas de Γ em V . Nesta subseção obtemos uma expressão para $s_V(\Sigma)$ em termos dos σ -índices de Σ nos subespaços Γ -irredutíveis U_i não auto-duais de V . Usamos tal expressão para estabelecer alguns casos especiais em que V é não auto-dual e $s_V(\Sigma) = 0$.

Suponha que existe aplicação linear Γ -reversível-equivariante não nula $L : V \rightarrow V$. Isto implica que a representação de Γ em V é redutível, pois caso contrário, pelo Lema 1.2.3, teríamos ou V auto-dual ou V não auto-dual com toda aplicação linear Γ -reversível-equivariante $L : V \rightarrow V$ identicamente nula. Uma vez que V é não auto-dual, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que V_i é não auto-dual e, neste caso, o Γ -irredutível U_i é não auto-dual (veja Observação 5.1.5). Reordenando os U_i 's, se necessário, podemos supor U_i auto-dual para $i \in I = \{1, \dots, k\}$ e não auto-dual para $i \in J = \{k+1, \dots, m\}$. Enfatizamos que I denota nesta subseção o conjunto dos índices i para os quais U_i é auto-dual.

Para $i \in \{1, \dots, m\}$, escreva

$$V_i = W_{i1} \oplus \cdots \oplus W_{i\alpha(i)} \tag{5.10}$$

como a soma direta dos subespaços Γ –irredutíveis Γ –isomorfos a U_i . Segue que

$$\dim \text{Fix}_{V_i}(\Sigma) = \alpha(i) \dim \text{Fix}_{U_i}(\Sigma). \quad (5.11)$$

Desde que

$$\dim \text{Fix}_V(\Sigma) = \sum_{j=1}^m \dim \text{Fix}_{V_j}(\Sigma),$$

o σ –índice de $\Sigma \subseteq \Gamma$ em V pode ser escrito como

$$s_V(\Sigma) = \sum_{i=1}^m s_{V_i}(\Sigma) = \sum_{i=k+1}^m s_{V_i}(\Sigma), \quad (5.12)$$

a última igualdade seguindo do fato de $s_{V_i}(\Sigma) = 0$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Supomos agora que, para todo $i \in J$, existe $j \in J$, $j \neq i$, tal que U_i é Γ –isomorfo ao dual de U_j . Ou seja, existe aplicação linear Γ –reversível-equivariante não nula $L : V \rightarrow V$ tal que $L|_{U_i} \neq \{0\}$, para todo $i \in J$. Então, existe uma permutação π de ordem 2 de elementos em J de modo que $j = \pi(i) \neq i$. Por esta razão, $m - k$ deve ser par e a decomposição σ –isotípica de V fica

$$V = \widehat{V}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{V}_k \oplus \widehat{V}_{k+1} \oplus \dots \oplus \widehat{V}_{\frac{m-k}{2}}, \quad (5.13)$$

onde $\widehat{V}_i = V_i$, para $i \in I$, e $\widehat{V}_i = V_i \oplus V_{\pi(i)}$, para todo $i \in \{k+1, \dots, \frac{m-k}{2}\}$. De (5.12) e (5.13), segue que

$$s_V(\Sigma) = \sum_{i=k+1}^{\frac{m-k}{2}} \left(s_{V_i}(\Sigma) + s_{V_{\pi(i)}}(\Sigma) \right). \quad (5.14)$$

Para dar prosseguimento à teoria, precisamos do seguinte resultado:

Lema 5.2.5. *Sejam U_i e U_j subespaços Γ –irredutíveis distintos (não Γ –isomorfos) de Γ . Se existir uma aplicação linear Γ –reversível-equivariante não nula $L : U_i \rightarrow U_j$, então $\dim \text{Fix}_{U_i}(\Sigma) = \dim \text{Fix}_{(U_j)_\sigma}(\Sigma)$, para todo subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$.*

Demonstração: Pelo Corolário 5.1.2, a aplicação linear $L : U_i \rightarrow U_j$ é um isomorfismo Γ –reversível-equivariante. É claro que $L|_{\text{Fix}_{U_i}(\Sigma)}$ é injetora. Além disso, $L|_{\text{Fix}_{U_i}(\Sigma)}$ é sobrejetora. De fato, seja $w \in \text{Fix}_{(U_j)_\sigma}(\Sigma)$, isto é, $\sigma(\gamma)\gamma w = w$, para todo $\gamma \in \Sigma$. A sobrejetividade de L implica que existe $v \in U_i$ tal que $L(v) = w$. Além disso,

$$L(\gamma v) = \sigma(\gamma)\gamma L(v) = \sigma(\gamma)\gamma w = w = L(v), \quad \forall \gamma \in \Sigma.$$

Como L é injetora, $\gamma v = v$, para todo $\gamma \in \Sigma$, ou seja, $v \in \text{Fix}_{U_i}(\Sigma)$. Logo, $L|_{\text{Fix}_{U_i}(\Sigma)}$ também é um isomorfismo linear Γ –reversível-equivariante e, portanto,

$$\dim \text{Fix}_{U_i}(\Sigma) = \dim \text{Fix}_{(U_j)_\sigma}(\Sigma),$$

para todo subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$. Analogamente, obtemos $\dim \text{Fix}_{U_j}(\Sigma) = \dim \text{Fix}_{(U_i)_\sigma}(\Sigma)$. $\square$

Segue deste resultado que

$$\dim \text{Fix}_{U_{\pi(i)}}(\Sigma) = \dim \text{Fix}_{(U_i)_\sigma}(\Sigma),$$

para todo $i \in \{k+1, \dots, \frac{m-k}{2}\}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} s_{V_{\pi(i)}}(\Sigma) &= \dim \text{Fix}_{V_{\pi(i)}}(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{(V_{\pi(i)})_\sigma}(\Sigma) \\ &= \alpha(\pi(i)) \left(\dim \text{Fix}_{U_{\pi(i)}}(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{(U_{\pi(i)})_\sigma}(\Sigma) \right) \\ &= \alpha(\pi(i)) \left(\dim \text{Fix}_{(U_i)_\sigma}(\Sigma) - \dim \text{Fix}_{U_i}(\Sigma) \right), \end{aligned}$$

onde $\alpha(i)$ denota o número de subespaços Γ -irredutíveis no bloco isotípico V_i como escrito em (5.10). Assim, (5.14) torna-se

$$s_V(\Sigma) = \sum_{i=k+1}^{\frac{m-k}{2}} \left(\alpha(i) - \alpha(\pi(i)) \right) s_{U_i}(\Sigma).$$

Acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5.2.6. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V como um grupo de simetrias generalizado tal que V é não auto-dual e seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie. Seja π uma permutação de ordem 2 de elementos em $\{1, \dots, m\}$ que fixa elementos de $I = \{1, \dots, k\}$ e de modo que V é decomposto em componentes σ -isotípicas*

$$V = \widehat{V}_1 \oplus \dots \oplus \widehat{V}_k \oplus \widehat{V}_{k+1} \oplus \dots \oplus \widehat{V}_m, \quad (5.15)$$

onde $\widehat{V}_i = V_i$, para $i \in I$ e $\widehat{V}_j = V_j \oplus V_{\pi(j)}$, para todo $j \in J = \{k+1, \dots, m\}$. Então, o σ -índice de Σ em V é dado por

$$s_V(\Sigma) = \sum_{j=k+1}^m \left(\alpha(j) - \alpha(\pi(j)) \right) s_{U_j}(\Sigma), \quad (5.16)$$

onde $\alpha(j)$ denota o número de subespaços Γ -irredutíveis U_j no bloco isotípico não auto-dual V_j como escrito em (5.10).

Existem, portanto, condições suficientes que implicam na existência de σ -índices $s_V(\Sigma)$ nulos para espaços não auto-duais V :

Corolário 5.2.7. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita não auto-dual que admite uma decomposição como em (5.15) e seja $\Sigma \subseteq \Gamma$ um subgrupo de Lie. Então, $s_V(\Sigma) = 0$ se qualquer uma das condições valerem:*

- (a) Para cada bloco isotípico V_i não auto-dual de V , o número de subespaços Γ -irredutíveis Γ -isomorfos em V_i é o mesmo que no bloco correspondente $V_{\pi(i)}$;
- (b) V é a soma direta de Γ -irredutíveis distintos (não Γ -isomorfos).

Demonstração: No caso (a), $\alpha(i) = \alpha(\pi(i))$, para todo $i \in \{k+1, \dots, m\}$. Pela expressão (5.16), $s_V(\Sigma) = 0$. No caso (b), $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, onde os blocos isotípicos V_i são os únicos subespaços irredutíveis de V ([25, XII, Corollary 2.6 (b)]). Neste caso, $\alpha(i) = \alpha(\pi(i)) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e novamente o resultado segue de (5.16). $\square$

Notamos que a decomposição σ -isotípica de V como em (5.15) é uma condição necessária para a obtenção da fórmula (5.2.6) e a aplicabilidade do corolário acima: considere, por exemplo, a ação padrão de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ no plano gerada pelos flips κ_1 e κ_2 como na Subseção 2.2.7. Então,

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \oplus V_2,$$

onde $V_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ e $V_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ são $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -irredutíveis distintos. Se κ_1 é uma anti-simetria e κ_2 uma simetria, então V_1 e V_2 são não auto-duais e $\widehat{V}_i = V_i$, $i \in J = \{1, 2\}$. Neste caso, $s(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = -1$ (veja Exemplo 5.2.4) e o Corolário 5.2.7(b) não se aplica.

Referências Bibliográficas

- [1] Antoneli, F., Dias, A. P. S. e Matthews, P. C. [2007] Invariants, Equivariants and Characters in Symmetric Bifurcation Theory. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A, Mathematics, **137**, 01-36.
- [2] Arnol'd, V. I. [1984] Reversible systems. Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, **3**, 1161-1174.
- [3] Artés, J. C., Dumortier, F., Herssens, C. e Llibre, J. [2000] Computer program P4 to study polynomial differential systems numerically. To be included in a book.
- [4] Baptistelli, P. H. e Manoel, M. G. [2005] Some Results on Reversible-Equivariant Vector Fields. Cadernos de Matemática **6**, 237-263.
- [5] Birkhoff, G. D. [1915] The restricted problem of three bodies. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **39**, 265-334.
- [6] Bröcker, T. e Dieck, T. tom [1995] *Representations of compact Lie groups*. Graduate Texts in Mathematics, **98**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg - New York.
- [7] Broer, H.W., Lunter, G. e Venter, G. [1998] Equivariant singularity theory com distinguished parameters: two Hamiltonian case studies in resonance. *Physica D* **111**.
- [8] Bueno, L., Buzzi, C. e Lamb, J.S.W. Reversible equivariant Liapunov centre theorem. Em preparação.
- [9] Bueno, L., Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. Bifurcation e branching of equilibria of reversible equivariant vector fields. Em preparação.
- [10] Bueno, L., Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. On the zero set of smooth G -equivariant maps. Em preparação.
- [11] Buzzi, C. A. [1999] *Formas Normais de campos vetoriais reversíveis*, PhD Thesis, Universidade Estadual de Campinas.

- [12] Buzzi, C. e Teixeira, M.A. [2004] Time-reversible Hamiltonian vector fields com symplectic symmetries. *J. Diff. Eq.* **16**, 559-574.
- [13] Buzzi, C. A. e Lamb, J. S. W. [2005] Reversible equivariant Hopf bifurcation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **175**, 39-84.
- [14] Damon, J. [1984] The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$. *Memoirs of the American Mathematical Society* **306** Providence.
- [15] Devaney, R. L. [1976] Reversible diffeomorphisms and flows, *Trans. Amer. Math. Soc.* **218**, 89-113.
- [16] DeVogelaere, R. [1958] On the structure of periodic solutions of conservative systems, with applications. Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations, **4**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 53-84.
- [17] Dias, A. P. S. e Stewart, I. [2000] Invariant theory for wreath product groups. *Journal of Pure and Applied Algebra* **150**, 61-84.
- [18] Dias, A. P. S. e Stewart, I. [2000] Hilbert series for equivariant mappings restricted to invariant hyperplanes. *Journal of Pure and Applied Algebra* **151**, 89-106.
- [19] Field, M. e Golubitsky, M. [1992] *Symmetry in chaos*. Oxford University Press Inc., NY.
- [20] Field, M. [1996] *Lectures on bifurcations, dynamics e symmetry*, *Pitman Research Notes in Mathematics* **356**, Longman, Harlow.
- [21] Fulton, W e Harris, J. [1991] *Representation Theory. A first course*. Graduate texts in Mathematics **129**, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York.
- [22] GAP - Groups, Algorithms and Programming - a System for Computational Discrete Algebra [2005] ([www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~ gap/](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap/))
- [23] Gatermann, K. [2000] *Computer algebra methods for equivariant dynamical systems*, LNM **1728**, Springer.
- [24] Golubitsky, M. e Schaeffer, D. [1984] *Singularities and Groups in Bifurcations Theory*. Vol. I, Appl. Math. Sci. **51** Springer-Verlag, NY.
- [25] Golubitsky, M., Stewart, I. e Schaeffer, D. [1985] *Singularities e Groups in Bifurcation Theory*. Vol. II, Appl. Math. Sci. **69** Springer-Verlag, NY.
- [26] Golubitsky, M. e Stewart, I. N. [1985] Hopf bifurcation in the presence of symmetry. *Arch. Rational Mech. Anal.* **87**, 107-165.

- [27] Golubitsky, M. e Roberts, M. [1987] A classification of degenerate Hopf bifurcation com $O(2)$ symmetry. *J. Diff. Eq.* **69**, 216-264.
- [28] Golubitsky, M., Krupa, M. e Lim, C. [1991] Time-reversibility and particle sedimentation, *SIAM J. Appl. Math.* **51**, 49-72.
- [29] Golubitsky, M., Marsden, J. E., Stewart, I. e Dellnitz, M. [1995] The constrained Liapunov-Schmidt procedure and periodic orbits. pp. 81-127 de [40].
- [30] Goodman, R. e Wallach, N. R. [2001] *Representations and Invariants of the Classical Groups*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [31] Hansmann, H. [1998] The reversible umbilic bifurcation. *Physica D* **111**.
- [32] Hochschild, G. [1965] *The structure of Lie groups*. Holden-Day, San Francisco.
- [33] Hoveijn, I., Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. [2003] Linear normal form theory in eigenspaces of involutory (anti-)automorphisms. *J. Diff. Eq.* **190**, 182-213.
- [34] Jacquemard, A. e Teixeira, M.A. [2000] On singularities of reversible mappings in $\mathbb{R}^3$. *Dynam. Cont. Discrete Impuls. Systems* **7**, 65-96.
- [35] James, G e Liebeck, M. [2001] *Representations and Characters of Groups*. 2nd ed. Cambridge University Press, New York.
- [36] Lamb, J.S.W. [1992] Reversing symmetries in dynamical systems. *Physica A* **25**, 925-937.
- [37] Lamb, J.S.W. e Capel, H.W. [1995] Local bifurcations on the plane com reversing point group symmetry. *Chaos, Solitons e Fractals* **5**, 271-293.
- [38] Lamb, J.S.W. e Roberts, J.A.G. [1998] Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey. *Physica D* **112**, 1-39.
- [39] Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M. [1999] Reversible equivariant linear systems. *J. Diff. Eq.* **159**, 239-279.
- [40] Langford, W. e Nagata, W. [1995] Normal forms and Homoclinic Chaos (Waterloo, ON, 1992). Fields Inst. Commun. **4**. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [41] Manoel, M. e Stewart, I [1999] Degenerate bifurcations with $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -symmetry. *Int. Journal of Bif. e Chaos* **9**, 1653-1667.
- [42] Manoel, M. e Stewart, I [2000] The classification of bifurcations with hidden symmetries. *Proc. of the London Math. Soc.* **80**, 198-234.

- [43] Mather, J. N. [1968] Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined map germs. *Publ. Math. I. H. E. S.* **35**, 127-156.
- [44] Medrado, J. C. R. e Teixeira, M. A. [1998] Symmetric singularities of reversible vector fields in dimension three. *Physica D* **112**, 122-131.
- [45] Melbourne, I. [1986] A singularity theory analysis of bifurcation problems com octahedral symmetry. *Dynamics and Stability of Systems* **1**, n. **4**.
- [46] Montgomery, D. e Zippin, L. [1955] *Topological transformations groups* (Interscience, new York).
- [47] Nachbin, L. [1976] *The Haar Integral* (Huntington, new York).
- [48] Sattinger, D. H. [1979] *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, LNM **762**, Springer, Berlin, New York.
- [49] Sevryuk, M. B. [1986] *Reversible systems*, LNM **1211**, Springer, Berlin.
- [50] *Singular* [2006] (<http://www.singular.uni-kl.de/>)
- [51] Smith, L. [2006] Free Modules of Relative Invariants and Some Rings of Invariants that are Cohen-Macaulay. *Proc. of the American Math. Soc.* **134**, 2205-2212.
- [52] Stanley, R. P. [1977] Relative invariants of Finite Groups generated by Pseudoreflections. *J. of Algebra* **49**, 134-148.
- [53] Sturmfels, B. [1993] *Algorithms in Invariant Theory*. Springer-Verlag, Vienna.
- [54] Teixeira, M. A. [1977] Generic bifurcation in manifolds with boundary. *J. Diff. Eq.* **25**, 65-89.
- [55] Teixeira, M. A. [1997] Singularities of reversible vector fields. *Physica D* **100**, 101-118.
- [56] Vanderbauwhede, A., [1982] Local bifurcation and symmetry. Research Notes in Mathematics, **75**. Pitman, London.
- [57] Worfolk, P. A. [1994] Zeros of Equivariant Vector Fields: Algorithms for an Invariant Approach. *J. Symb. Comp.*, **17**, 487-511.
- [58] Yangcheng, L. e Jiancheng, Z. [1999] Universal Unfolding of Equivariant Bifurcation Problems with Multiparameter. *Acta Mathematica Sinica*, **42**, n. **6**, 1071 - 1076 (samente versão em chinês).

Lista de Notações

- Γ : grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial V ;
 Γ_+ : subgrupo de Γ formado pelas simetrias;
 Γ_- : conjunto das anti-simetrias de Γ ;
 $GL(V)$: espaço vetorial das aplicações lineares invertíveis $V \mapsto V$;
 (ρ, V) : espaço vetorial V sob a representação ρ de Γ ;
 ρ_σ : representação dual de ρ ;
 χ_V : caracter correspondente à representação de Γ em V ;
 $\text{Fix}_V(\Sigma)$: subespaço de ponto fixo de um subgrupo $\Sigma \subseteq \Gamma$ em (ρ, V) ;
 $\int_\Gamma$: integral de Haar normalizada;
 $\mathcal{P}(\Gamma)$: anel das funções polinomiais Γ -invariantes;
 $\mathcal{E}(\Gamma)$: anel dos germes de funções C^∞ na origem Γ -invariantes;
 $\mathcal{P}_V$: anel das funções polinomiais em V ;
 $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$: $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes $V \mapsto W$;
 $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V, W)$: $\mathcal{E}(\Gamma)$ -módulo dos germes de aplicações Γ -equivariantes $g : (V, 0) \rightarrow W$;
 $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$: $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes definidos em V ;
 $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$: $\mathcal{E}(\Gamma)$ -módulo dos germes de aplicações Γ -equivariantes $h : (V, 0) \mapsto V$;
 $\vec{\mathcal{Q}}(\Gamma)$: $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo das aplicações polinomiais Γ -reversíveis-equivariantes em V ;
 $\vec{\mathcal{F}}(\Gamma)$: $\mathcal{E}(\Gamma)$ -módulo dos germes de aplicações Γ -reversíveis-equivariantes em V ;
 $\mathcal{Q}(\Gamma)$: $\mathcal{P}(\Gamma)$ -módulo das funções polinomiais Γ -anti-invariantes;
 $\mathcal{F}(\Gamma)$: $\mathcal{E}(\Gamma)$ -módulo dos germes de funções Γ -anti-invariantes;
 $\vec{\mathcal{P}}(V, W)$: módulo das aplicações polinomiais $V \mapsto W$ sob o anel $\mathcal{P}_V$;
 $\vec{\mathcal{P}}_V$: módulo das aplicações polinomiais em V sob o anel $\mathcal{P}_V$;
 $\mathcal{P}_V^d$: espaço vetorial das funções polinomiais homogêneas de grau d ;
 $\vec{\mathcal{P}}^d(V, W)$: espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas $V \mapsto W$ de grau d ;
 $\vec{\mathcal{P}}_V^d$: espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas de grau d em V ;
 $L_s^d(V)$: espaço das funções d -multilineares simétricas em $V \times \dots \times V$;
 $L_s^d(V, W)$: espaço das aplicações d -multilineares simétricas de $V \times \dots \times V$ a valores em W ;
 $\vec{\mathcal{P}}^d(\Gamma; V, W)$: espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas Γ -equivariantes $V \mapsto W$ de grau d ;

$\mathcal{Q}^d(\Gamma)$: espaço vetorial dos polinômios homogêneos Γ –anti-invariantes de grau d ;
 $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^d(\Gamma)$: espaço vetorial dos polinômios homogêneos Γ –reversíveis-equivariantes de grau d ;
 $\mathbf{S}_n$: grupo simétrico das permutações de n elementos;
 $\mathbf{S}^n V$: n –ésima potência tensorial simétrica;
 $V^* = \text{Hom}(V, \mathbf{K})$: espaço vetorial dual de V , no sentido da álgebra linear;
 $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$: anel dos germes Γ –invariantes;
 $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$: $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ –módulo dos germes Γ –equivariantes $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto W$;
 $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma) : \mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$ –módulo dos germes Γ –equivariantes $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto V$;
 $\mathcal{E}_\lambda$: germes de funções apenas de λ ;
 $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$: módulo de famílias de germes a valores matriciais $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto \text{Hom}(W, W)$
 Γ –equivariantes sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$: módulo de famílias de germes a valores matriciais $(V \times \mathbb{R}, 0) \mapsto \text{Hom}(V, V)$ Γ –equivariantes
sob o anel $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\mathcal{E}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$: anel das famílias de germes a k parâmetros em $\mathcal{E}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$: $\mathcal{E}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$ –módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$;
 $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma) : \mathcal{E}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$ –módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$: $\mathcal{E}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma)$ –módulo das famílias de germes a k parâmetros em $\overleftrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$;
 $\mathcal{E}_{\lambda,\beta}$: anel das famílias de germes a k parâmetros em $\mathcal{E}_\lambda$;
 $\mathcal{E}_{\alpha,\beta}$: anel dos germes $\Phi : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow \mathbb{R}^k$;
 $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(\Gamma)$: submódulo de $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ dos germes que se anulam na origem;
 $\text{RT}(g)$: espaço tangente restrito de um germe $g \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\text{T}(g)$: espaço tangente estendido de um germe $g \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\text{RT}(g, \Gamma)$: espaço tangente restrito de um germe $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $\text{T}(g, \Gamma)$: espaço tangente estendido de um germe $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$;
 $s_V(\Sigma)$: σ –índice de Σ em V ;
 $\widehat{V}_i$: componente σ –isotópica correspondente ao irreduzível U_i .

Índice Remissivo

- Γ –equivalência, 67
- σ –índice, 109, 120
- Anel polinomial, 16
- Anti-simetria, 9
- Aplicação
 - Γ –equivariante, 16
 - Γ –reversível-equivariante, 17
 - multilinear simétrica, 43
 - puramente equivariante, 17
 - puramente reversível, 18
- Ação, 8
 - dual, 9
 - ortogonal, 9
 - padrão de Γ em $\mathbb{R}^n$, 28
 - órbita da, 10
- Bifurcação
 - primária, 94
 - secundária, 94
- Campo vetorial
 - $\mathbb{O}$ –reversível-equivariante, 30
 - $\mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante, 37
 - $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ –reversível-equivariante, 37, 38
 - $\mathbf{D}_n(\delta)$ –reversível-equivariante, 28
 - $\mathbf{D}_n$ –reversível-equivariante, 33
 - $\mathbf{O}(2)$ –reversível-equivariante, 36
 - $\mathbf{Z}_n(\delta)$ –reversível-equivariante, 31
- Caracter, 11
- Codimensão de um germe, 71
- Componente
 - σ –isotópica, 115, 119
 - isotópica, 10
- Coordenadas invariantes, 82
- Decomposição
 - σ –isotópica, 119
 - isotópica, 10
- Desdobramento, 70
 - Γ –isomorfo, 71
 - universal, 71
 - versal, 71
- Espaço
 - dual, 26
 - não auto-dual, 26
- Espaço tangente
 - estendido, 72
 - restrito, 71
- Função
 - anti-invariante, 42
 - invariante, 15
- Fórmula do traço, 12
- Grupo
 - de equivalências em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda,\beta}(\Gamma; V, W)$, 71
 - de equivalências em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma; V, W)$, 68
 - de simetrias, 17
 - de simetrias generalizado, 18
- Haar
 - integração, 8
- Hilbert

- base de, 16
- série de, 15, 19
- Involução, 18
- Irredutível
 - representação, 10
 - subespaço, 10
- Molien
 - série de, 15
- Módulo livre, 17, 81
- Produto tensorial, 20
- Pullback de L , 27
- Representação, 8
 - σ —absolutamente-irredutível, 109
 - absolutamente irredutível, 87
 - auto-dual, 26
 - dual, 9, 17
- Representações isomorfas, 10
- Simetria, 9
 - quebra de, 87
- Solução
 - estável, 87
 - instável, 87
- Subespaço
 - de ponto fixo, 12
 - invariante, 10
- Subgrupo
 - axial, 109
 - de isotropia, 11
 - geométrico, 68
- Suporte de uma função, 13
- Teorema
 - de Hilbert-Weyl, 16
 - de Molien, 19
 - de Molien Equivariante, 20
 - de Poènaru, 17
 - de redutibilidade completa, 10
 - de Schwarz, 16
 - Translação
 - à direita, 12
 - à esquerda, 12