Grupos de tranças do espaço projetivo

Vinicius Casteluber Laass

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Grupos de tranças do espaço projetivo

Vinicius Casteluber Laass

Orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Abril / 2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L111g Laass, Vinicius Casteluber
 Grupos de tranças do espaço projetivo / Vinicius
Casteluber Laass; orientador Oziride Manzoli Neto --
São Carlos, 2011.
80 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

 1. Grupos de tranças. 2. Espaço projetivo. 3.
Espaços de configuração. 4. Apresentação de grupos. I.
Manzoli Neto, Oziride , orient. II. Título.

*Aos meus
irmãos Gabriel
e Diogo.*

Agradecimentos

Uma vez, quando fazia o ensino médio, no Cefetes de Vitória, fui perguntar a professora Vânia, que era minha professora de matemática, se era verdade que professor de matemática morria de fome. E ela disse, “olhe para mim, eu tenho cara de quem passa fome”, e eu ri. Ela falou muito sobre matemática, sobre a graduação dela e como ela gostava de ensinar matemática. Eu me empolguei e resolvi fazer matemática. Mas lembro ela dizendo que um colega dela fez pós - graduação em matemática pura e que isso era coisa de doido. Hoje é minha vez de perguntar, “professora Vânia, eu tenho cara de doido?”. Espero que ela não responda sinceramente. Serei eternamente grato a professora Vânia por aquela conversa.

Gostaria de agradecer muito também aos professores da UFES, Ana Claudia e Ricardo, que diferentemente da professora Vânia, não disseram que pós - graduação em matemática era coisa de doido, mas me incentivaram e deram conselhos.

Agradeço ao professor Magno, que durante a sua aula de Estruturas Algébricas, resolveu dar um exemplo de um grupo de construção não trivial. Era um tal de grupo fundamental.

E para completar o time de professores da UFES, agravo muitíssimo ao professor Luiz Fernando, pelos papos e pelo belo curso de Espaços Métricos. Sem sombra de dúvidas foi o curso mais legal que fiz na graduação e que mais me incentivou a procurar saber o que era uma tal de topologia.

Já em São Carlos, conheci o professor Oziride, que me encantou com seus desenhos numa palestra do verão e logo após aceitou me orientar. Obrigado professor Oziride por ter me proposto o tema “Grupos de Tranças”. Nas palavras do próprio Oziride, “o tema é duro, mas é divertidíssimo”.

Já nesse “mundo topológico”, gostaria de agradecer a todos os participantes do grupo de topologia de São Paulo, pelos encontros, e por ter tido a chance de conhecer pessoas tão gente boa.

Quanto aos amigos, faltam palavras... Andreza, Nelson, Rafael, Carlos, Northon, Alex, Greciane, Jorge, Ferraz. Simplesmente obrigado por vocês existirem. Espero que estes não fiquem com ciúmes, mas seria uma indelicadeza se eu não dedicasse a 3 pessoas, um parágrafo para cada um.

Ao Renato, mais que um amigo, um irmão, obrigado pelo conselhos pessoais e matemáticos.

Ao Apoenã, popular Popô, obrigado pelas conversas de botecos.

A Thaís, que por definição é uoh, que sempre esteve com seu ombro amigo a disposição, muito obrigado.

Meus agradecimentos aos docentes e funcionários da USP - São Carlos, sempre tão atenciosos, e ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Deixei para falar de duas pessoas por último. Gostaria de escrever não um parágrafo, mas várias páginas sobre elas, mas como não é possível... Ao meu pai, Sérgio, e a minha mãe, Dora, minha eterna gratidão por terem se empenhado tanto para me oferecer a melhor educação. Obrigado pelo carinho e por estarem sempre presentes, mesmo que a 1300 quilômetros de distância.

Por fim, agradeço a Deus, por ter me dado a oportunidade de fazer o mestrado e por ter colocado todas as pessoas que citei na minha vida.

Resumo

Dada uma superfície M , definiremos os grupos de tranças de M , denotado por $B_n(M)$, geometricamente e usando a noção de espaços de configuração. Mostraremos a equivalência das definições. Na mesma linha de raciocínio, definiremos os grupos de tranças puras de superfícies $P_n(M)$. Apresentaremos as propriedades mais importantes dos grupos de tranças do plano e mostraremos que $B_n(\mathbb{R}^2)$ injeta em $B_n(M)$, para muitas superfícies M . Mais detalhadamente, obteremos a apresentação de $B_n(\mathbb{RP}^2)$ e $P_n(\mathbb{RP}^2)$.

Abstract

For a surface M , we define the braid groups of M , $B_n(M)$, geometrically and using the notion of configuration spaces. We show the equivalence of these definitions. In the sequence, we define the pure braid group of M , $P_n(M)$. We present the most important properties of braid groups of the plane and we show that $B_n(\mathbb{R}^2)$ embeds in $B_n(M)$, for almost all M . In a more detailed fashion, we present $B_n(\mathbb{RP}^2)$ and $P_n(\mathbb{RP}^2)$.

Sumário

1	Pré-Requisitos	13
1.1	Fibração e Sequência Exata de Homotopia	13
1.2	Espaços de Configuração	15
1.3	Método de Reidemeister - Schreier	20
1.4	Apresentação de uma extensão	27
1.5	Grupos Dicíclicos	29
1.6	Alguns resultados sobre grupos	30
2	Grupos de Tranças de uma Superfície	33
2.1	Introdução	33
2.2	Grupos de Tranças Geométrico	33
2.3	Grupos de Tranças e Espaços de Configuração	37
3	Grupos de Tranças do Plano	43
3.1	Introdução	43
3.2	Apresentação de $B_n(\mathbb{R}^2)$	43
3.3	Apresentação de $P_n(\mathbb{R}^2)$	45
3.4	$B_n(\mathbb{R}^2)$ como subgrupo de $B_n(M)$	49
4	Grupos de Tranças do Plano Projetivo	57
4.1	Introdução	57
4.2	Propriedades de $G_n(\mathbb{RP}^2)$	58
4.3	Propriedades de $B_n(\mathbb{RP}^2)$	65
4.4	O isomorfismo entre $G_n(\mathbb{RP}^2)$ e $B_n(\mathbb{RP}^2)$	69

5	Grupos de Tranças Puras do Espaço Projetivo	73
----------	--	-----------

Introdução

Os grupos de tranças do plano $\mathbb{R}^2$ foram definidos por Artin em [1] e muito estudados em [2] e [3]. Fox, em [4], definiu o grupo de tranças para qualquer espaço topológico, generalizando a definição dada por Artin. Em [5], Birman mostrou que se o espaço topológico em questão for uma variedade diferenciável de dimensão maior ou igual que 3, então a teoria de tranças é de pouco interesse. Por este motivo, os grupos de tranças de superfícies tem sido amplamente estudados.

O grupo de n -tranças de uma superfície M , denotado por $B_n(M)$, surge da seguinte maneira: escolhamos um conjunto X de n pontos distintos de M . Em $M \times [0, 1]$, ligamos os pontos de $X \times 0$ aos pontos de $X \times 1$ por n caminhos. O produto de tranças é definido por concatenação e re-escalamento. As deformações permitidas são homotopias de cordas individuais de tal modo que, durante o processo, cordas distintas nunca se intersectam. Existe um homomorfismo natural de $B_n(M)$ no grupo de permutações de n letras. O núcleo deste homomorfismo é o grupo de n -tranças puras de M , denotado por $P_n(M)$.

O objetivo geral desta dissertação é mostrar algumas diferenças entre o grupo de tranças do plano e o grupo de tranças do espaço projetivo. O trabalho está dividido em cinco capítulos.

No primeiro capítulo, expomos alguns pré-requisitos necessários para uma boa leitura desta dissertação, os quais destacamos Espaços de Configuração, Método de Reidemeister - Schreier e Método de apresentação de uma extensão. É esperado que o leitor tenha uma familiaridade com os conceitos de homotopia, grupo fundamental, espaços de recobrimento e apresentação de grupos.

Na primeira seção do capítulo 2, faremos a definição formal de uma trança e de uma trança pura de uma superfície. Esta construção engloba a definição de Artin para o caso em que a superfície for o plano. Definiremos os grupos de tranças de uma

superfície, bem como os grupos de tranças puras. Na seção 2, definiremos os grupos de tranças tais como Fox definiu. Ainda na mesma seção, mostraremos a equivalência de definições.

Nas seções 1 e 2 do capítulo 3, faremos um resumo sobre as apresentações de $B_n(\mathbb{R}^2)$ e $P_n(\mathbb{R}^2)$, respectivamente. Na seção 3, mostraremos que $B_n(\mathbb{R}^2)$ injeta em $B_n(M)$ para um número grande de superfícies.

Nos capítulos 4 e 5, obteremos apresentações dos grupos de tranças do espaço projetivo e dos grupos de tranças puras do espaço projetivo.

Pré-Requisitos

1.1 Fibração e Sequência Exata de Homotopia

Generalizando a construção do grupo fundamental de um espaço topológico, temos os grupos de homotopia de dimensão mais alta. Nesta seção faremos um breve comentário sobre estes grupos e sobre a sequência exata de homotopia de uma fibração. As referências indicadas para este assunto são [12] e [14].

Sejam $I^0 = \{0, 1\}$ e $\partial I^0 = \{0\}$ e para cada $n \geq 1$, sejam $I^n = \underbrace{[0, 1] \times \dots \times [0, 1]}_{n\text{-vezes}}$ e ∂I^n o bordo de I^n .

Para cada $n \geq 0$, seja $\mathcal{C}_n(X, x^0) = \{\alpha : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x^0) \mid \alpha \text{ é contínua}\}$, sendo X um espaço topológico e x^0 um ponto fixado de X .

Fixemos $n \geq 1$.

Se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_n(X, x^0)$, então a função contínua $\alpha * \beta : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x^0)$, definida por

$$\alpha * \beta(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

é chamada o produto de α por β e pertence a $\mathcal{C}_n(X, x^0)$.

α é dita equivalente a β , se existe uma homotopia de pares $H : (I^n \times [0, 1], \partial I^n \times [0, 1]) \rightarrow (X, x^0)$, tal que $H(t, 0) = \alpha(t)$ e $H(t, 1) = \beta(t)$ e neste caso escrevemos $\alpha \cong \beta$.

$\cong$ é uma relação de equivalência. O conjunto $\mathcal{C}_n(X, x^0)/\cong$ com a operação induzida $*$ é um grupo, chamado o grupo de homotopia de dimensão n de X com ponto base x^0 e denotado por $\pi_n(X, x^0)$. Notemos que quando $n = 1$, temos o grupo fundamental de X com ponto base x^0 .

Se $f : (X, x^0) \rightarrow (Y, y^0)$ é uma função contínua, então a função $f_* : \pi_n(X, x^0) \rightarrow \pi_n(Y, y^0)$, definida por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, é um homomorfismo de grupos, chamado homomorfismo induzido por f .

Se $p : (E, e^0) \rightarrow (B, b^0)$ é uma aplicação de recobrimento, então $p_* : \pi_n(E, e^0) \rightarrow \pi_n(B, b^0)$ é injetora para $n = 1$ e é isomorfismo para todo $n \geq 2$.

Os grupos de homotopia são invariantes por equivalência de homotopia. Mais precisamente, se $f : (X, x^0) \rightarrow (Y, y^0)$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : \pi_n(X, x^0) \rightarrow \pi_n(Y, y^0)$ é isomorfismo.

Para $n \geq 2$, $\pi_n(X, x^0)$ é grupo abeliano.

Se x^0 e x^1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X , então $\pi_n(X, x^0)$ e $\pi_n(X, x^1)$ são isomorfos para todo n .

Se X é um espaço topológico contrátil e $x^0 \in X$, então $\pi_n(X, x^0)$ é trivial para todo $n \geq 1$.

O conjunto $\pi_0(X, x^0)$ é definido de modo análogo aos conjuntos $\pi_n(X, x^0)$, entanto não tem estrutura de grupo. A cardinalidade do conjunto $\pi_0(X, x^0)$ é igual a cardinalidade do conjunto de componentes conexas por caminho de X .

Se $f : (X, x^0) \rightarrow (Y, y^0)$ é uma função contínua, então $f_* : \pi_0(X, x^0) \rightarrow \pi_0(Y, y^0)$ dada por $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ é uma função bem definida, chamada induzida de f em π_0 .

Um função contínua e sobrejetora $p : E \rightarrow B$ é dita uma fibração localmente trivial com fibra típica F , se para cada $x \in B$, existe uma vizinhança aberta $U \ni x$ e um homeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$, tal que se $p_U : U \times F \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator, então é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow p_U & \swarrow p \\ & U & \end{array}$$

A vizinhança U é dita uma vizinhança distinguida de x . O homeomorfismo ϕ é chamado de trivialização local. Notemos que F é homeomorfo a $p^{-1}(x)$, para cada $x \in B$, logo existe um mergulho $i : F \rightarrow E$. Portanto, podemos considerar F como subespaço de E e $i : F \rightarrow E$ como sendo a inclusão.

Seja $p : (E, e^0) \rightarrow (B, b^0)$ uma fibração localmente trivial com fibra típica F . Então, para todo $n \geq 1$, existe uma função $\partial : \pi_n(B, b^0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, e^0)$, que é homomorfismo para $n \geq 2$, tal que a seguinte sequência é exata:

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e^0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e^0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b^0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e^0) \xrightarrow{i_*} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{p_*} \pi_2(B, b^0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F, e^0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e^0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b^0) \xrightarrow{\partial} \\ \pi_0(F, e^0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e^0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b^0) \end{aligned}$$

Na ponta final, definimos o núcleo de uma função como sendo o conjunto de todos os elementos que são mandados na classe da função constante.

A sequência acima é chamada sequência exata de homotopia associada a fibração p .

A sequência exata de homotopia satisfaz uma condição de naturalidade, no seguinte sentido: sejam $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$ fibrações localmente triviais com fibras típicas F e F' respectivamente. Sejam $i : F \rightarrow E$ e $i' : F' \rightarrow E'$ as inclusões. Suponhamos que existam aplicações contínuas $f : F \rightarrow F'$, $e : E \rightarrow E'$ e $b : B \rightarrow B'$, tais que tornam comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (F, e^0) & \xrightarrow{i} & (E, e^0) & \xrightarrow{p} & (B, b^0) \\ \downarrow f & & \downarrow e & & \downarrow b \\ (F', f(e^0)) & \xrightarrow{i'} & (E', e(e^0)) & \xrightarrow{p'} & (B', b(b^0)) \end{array}$$

Então, é comutativo o seguinte diagrama (omitimos os pontos bases):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(F) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow e_* & & \downarrow b_* \\ \cdots & \xrightarrow{\partial'} & \pi_n(F') & \xrightarrow{i'_*} & \pi_n(E') & \xrightarrow{p'_*} & \pi_n(B') \xrightarrow{\partial'} \pi_{n-1}(F') \xrightarrow{i'_*} \cdots \end{array}$$

1.2 Espaços de Configuração

Definição 1.2.1. Dado um espaço topológico X , o conjunto $F_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X \times \dots \times X \mid x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$, munido da topologia induzida, é chamado de Espaço de Configuração de n pontos ordenados de X .

Os espaços de configuração são de grande importância na teoria de Tranças, e sendo nosso interesse em grupos de Tranças de Superfícies, **fixemos um superfície topológica conexa e sem bordo M** e vamos fazer algumas considerações sobre $F_n(M)$. Neste caso, $F_n(M)$ é uma variedade conexa de dimensão $2n$. Logo, seus grupos de homotopia independem do ponto base.

Agora, para cada m inteiro não negativo, seja $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ um conjunto de m pontos distintos de M . Notemos que Q_0 é o conjunto vazio. No estudo dos espaços de configuração é importante considerarmos o espaço

$$F_{m,n}(M) := F_n(M - Q_m)$$

Notemos que $F_{m,n}(M)$ também é variedade de dimensão $2n$.

Se $Q'_m = \{q'_1, \dots, q'_m\}$ é outro subconjunto de pontos dois a dois distintos de M , é bem sabido que existe um homeomorfismo de M que manda Q_m em Q'_m . Logo $M - Q_m$ é homeomorfo a $M - Q'_m$ e portanto $F_n(M - Q_m)$ é homeomorfo a $F_n(M - Q'_m)$, ou seja, a escolha do conjunto Q_m é irrelevante.

Notemos que $F_{0,n}(M) = F_n(M)$ e $F_{m,1} = (M - Q_m)$.

O próximo teorema é de grande importância no estudo dos Grupos de Tranças.

Teorema 1.2.2 (Fadell e Neuwirth). *Suponhamos $n \geq 2$ e $1 \leq r < n$. Então as aplicações*

$$\epsilon, \pi : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,r}(M),$$

definidas por

$$\epsilon(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r)$$

$$\pi(x_1, \dots, x_{n-r}, x_{n-r+1}, \dots, x_n) = (x_{n-r+1}, \dots, x_n),$$

são fibrações localmente triviais com fibra típica $F_{m+r,n-r}(M)$.

Prova: Vamos fazer apenas a prova que ϵ é um fibração localmente trivial. A prova que π é fibração localmente trivial é totalmente análoga.

Seja $x^0 = (x_1^0, \dots, x_r^0) \in F_{m,r}(M)$. Primeiro vamos mostrar que $\epsilon^{-1}(x)$ é homeomorfo a $F_{m+r,n-r}(M)$.

Seja $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\}$ o conjunto usado para construir $F_{m,n}(M)$ e $F_{m,r}(M)$. Notemos que $\epsilon^{-1}(x^0) = \{(x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}) \mid y_i \in M - Q_m \text{ e todas as coordenadas são diferentes}\}$.

Ponhamos $Q_{m+r} = Q_m \cup \{x_1^0, \dots, x_r^0\}$. Então

$$F_{m+r,n-r}(M) = \{(y_1, \dots, y_{n-r}) \mid y_i \in M - Q_{m+r} \text{ e } y_i \neq y_j \text{ se } i \neq j\}$$

e é claro que aplicação $h : F_{m+r,n-r}(M) \rightarrow \epsilon^{-1}(x^0)$, dada por

$$h(y_1, \dots, y_{n-r}) = (x_1^0, \dots, x_r^0, y_1, \dots, y_{n-r}),$$

é um homeomorfismo.

Agora vamos mostrar que ϵ é localmente trivial em torno de x^0 .

Sendo M superfície, então para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe uma vizinhança U_i de x_i^0 com as seguintes propriedades:

- (a) U_i é homeomorfa ao disco aberto unitário;
- (b) $\overline{U_i}$ é homeomorfo ao disco fechado unitário;
- (c) $\overline{U_i} \cap Q_m = \emptyset$;
- (d) $\overline{U_k} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ se $k \neq j$.

Figura 1.1: os abertos U_i

Notemos que $U = U_1 \times \dots \times U_r$ é um subconjunto de $F_{m,r}$ e é uma vizinhança aberta de x^0 .

Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, seja $\theta_i : U_i \times \overline{U_i} \rightarrow \overline{U_i}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

- (i) $\theta_i^x : \overline{U_i} \rightarrow \overline{U_i}$ dada por $\theta_i^x(y) = \theta_i(x, y)$ é um homeomorfismo que fixa o bordo de U_i (que é homeomorfo ao círculo unitário);
- (ii) $\theta_i^x(x) = x_i^0$.

Na observação a seguir mostramos que tais funções existem.

Pela construção dos U_i 's e das θ_i 's, está bem definida a aplicação

$$\theta : U \times M \rightarrow M$$

dada por

$$\theta(x_1, \dots, x_r, y) = \begin{cases} \theta_i^{x_i}(y), & \text{se } y \in U_i \\ y, & \text{se } y \notin U_1 \cup \dots \cup U_r \end{cases}$$

Notemos que para cada $x = (x_1, \dots, x_r) \in U$, então a função $\theta^x : M \rightarrow M$, definida por $\theta^x(y) = \theta(x_1, \dots, x_r, y)$ é um homeomorfismo.

Definimos $\Phi : U \times F_{m+r, n-r}(M) \rightarrow \epsilon^{-1}(U)$ por:

$$\Phi(\underbrace{x_1, \dots, x_r}_x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x_1, \dots, x_r, (\theta^x)^{-1}(y_1), \dots, (\theta^x)^{-1}(y_{n-r})).$$

Vamos mostrar que Φ é bem definida. Primeiro vamos mostrar que as coordenadas de $\Phi(x, y_1, \dots, y_{n-r})$ são duas a duas diferentes.

Como $x \in U \subset F_{m,r}(M)$, então $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$;

Se $i \neq j$, então $y_i \neq y_j$, pois $y_i, y_j \in F_{m+r, n-r}(M)$ e sendo $(\theta^x)^{-1}$ homeomorfismo, então $(\theta^x)^{-1}(y_i) \neq (\theta^x)^{-1}(y_j)$.

Suponhamos que algum $x_i = (\theta^x)^{-1}(y_j)$. Então $\theta^x(x_i) = y_j$. Mas $x_i \in U_i$. Logo $\theta^x(x_i) = \theta_i^{x_i}(x_i) = x_i^0$, pelas definições de θ e $\theta_i^{x_i}$ e portanto $x_i^0 = y_j$, o que é um absurdo, pois $y_j \in M - Q_{m+r}$ e $x_i^0 \in Q_{m+r}$. Segue que $x_i \neq (\theta^x)^{-1}(y_j)$.

Agora vamos mostrar que nenhuma das coordenadas de Φ pertence a Q_m .

Para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $x_i \notin Q_m$, pois $x = (x_1, \dots, x_r) \in U \subset F_{m,r}(M)$.

Suponhamos que algum $(\theta^x)^{-1}(y_j) = q_i$, com $q_i \in Q_m$, o que implica $y_j = \theta^x(q_i)$. Como $q_i \notin U_1 \cup \dots \cup U_r$, então $\theta^x(q_i) = q_i$ e portanto $y_j = q_i$, o que é um absurdo, pois $y_j \in M - Q_{m+r}$ e $Q_m \subset Q_{m+r}$.

Agora, definimos $\Psi : \epsilon^{-1}(U) \rightarrow U \times F_{m+1, n-r}(M) = U_1 \times \dots \times U_r \times F_{m+1, n-r}(M)$ por

$$\Psi(\underbrace{x_1, \dots, x_r}_x, y_1, \dots, y_{n-r}) = (x, \theta^x(y_1), \dots, \theta^x(y_r)) = (x_1, \dots, x_r, \theta^x(y_1), \dots, \theta^x(y_r))$$

Por argumentos semelhantes aos anteriores mostra-se que Ψ está bem definida. É fácil ver Φ e Ψ são inversas uma da outra. Logo são homeomorfismos.

Também é fácil ver que se $p : U \times F_{m+r, n-r}(M) \rightarrow U$ é a projeção em U , então o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} U \times F_{m+r, n-r}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \epsilon^{-1}(U) \\ & \searrow p & \swarrow \epsilon \\ & U & \end{array}$$

Portanto, Φ é localmente trivial em torno de x^0 . ■

Figura 1.2: função θ

Para mostrar que existem funções θ_i com as propriedades exigidas no teorema, notemos que é suficiente mostrar que existe uma função $\theta : D \times \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ (D é o disco unitário aberto do plano) tal que:

(i) Para cada $u \in D$, $\theta^u : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$, definida por $\theta^u(v) = \theta(u, v)$ é um homeomorfismo que fixa $\partial\overline{D} = \mathbb{S}^1$;

(ii) $\theta^u(u) = 0$ (origem), para todo $u \in D$.

Tal função é construída da seguinte maneira:

Seja $(u, v) \in D$. Se $u = v$, colocamos $\theta(u, v) = 0$ (a propriedade (ii) já está satisfeita). Se $u \neq v$, então $v - u \neq 0$ e existe um único $t = t(u, v)$

positivo tal que $\partial_{u,v} := u + t.(v - u) \in \mathbb{S}^1$. Definimos $\theta(u, v) = \frac{1}{t}.\partial_{u,v}$. A figura 1.2 nos mostra a interpretação geométrica da função θ .

Observação 1.2.3. (Recordando) Seja S_n o conjunto de todas as bijeções de $\{1, \dots, n\}$. Se $s, s' \in S_n$, então definindo o produto $s.s' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ por $s.s'(i) = s' \circ s(i)$, S_n torna-se um grupo com esta operação, chamado *Grupo das Permutações de n letras*, ou simplesmente, *Grupo das Permutações*, quando o índice n estiver subentendido. Se $s \in S_n$, a notação $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ s(1) & \dots & s(n) \end{pmatrix}$ representa totalmente a função s .

Para cada $i = 1, \dots, n-1$, o elemento $s_i \in S_n$ definido por:

$$s_i(j) = \begin{cases} j, & \text{se } j \neq i, i+1 \\ i, & \text{se } j = i+1 \\ i+1, & \text{se } j = i \end{cases}$$

é chamado uma transposição e denotado por $(i, i+1)$. As transposições geram S_n e valem as seguintes relações:

- (i) $s_i.s_j = s_j.s_i$, se $|i - j| \geq 2$;
- (ii) $s_i.s_{i+1}.s_i = s_{i+1}.s_i.s_{i+1}$;
- (iii) $s_i^2 = Id$.

O próximo teorema é de simples verificação:

Teorema 1.2.4. A função $\mu : F_n(M) \times S_n \rightarrow F_n(M)$ definida por

$$\mu(x_1, \dots, x_n, s) = (x_{s(1)}, \dots, x_{s(n)})$$

é uma ação livre a direita.

Definição 1.2.5. O espaço $C_n(M) = F_n(M)/S_n$, munido da topologia quociente, é chamado o Espaço de Configuração de n pontos não ordenados de X .

Corolário 1.2.6. A projeção natural $p : F_n(X) \rightarrow C_n(X)$ é um recobrimento regular a $n!$ -folhas.

1.3 Método de Reidemeister - Schreier

Seja H um subgrupo de $G = \langle X \mid \mathfrak{R} \rangle$. Será possível conseguir uma apresentação de H a partir da apresentação de G ? A resposta é afirmativa se tivermos um conjunto de representantes das classe laterais à esquerda de H em G com um certa propriedade especial, chamada propriedade de *Schreier*. Este processo é chamado de *Método de Reidemeister - Schreier*. Nesta seção vamos dar um descrição deste método (incluindo as demonstrações).

Começemos primeiro com o caso de um subgrupo L de um grupo livre $F(X)$.

Definição 1.3.1. Dizemos que $x = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in F(X)$ está escrita na forma reduzida, ou simplesmente, é uma palavra reduzida, se $\epsilon_i = \pm 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \neq 1$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Se $x = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in F(X)$ é uma palavra reduzida, o tamanho de x é, por definição, o número n .

Definição 1.3.2. Um conjunto de Schreier de L é um subconjunto $S \subseteq F(X)$, consistindo exatamente de um representante de cada classe lateral à esquerda de L em $F(X)$ com as seguintes propriedades:

- (i) O representante da classe L é a palavra vazia 1;
 - (ii) Se $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in S$ é uma palavra reduzida, então $x_2^{\epsilon_2} \dots x_n^{\epsilon_n} \in S$.
- Dizemos que os elementos de S possuem a propriedade de Schreier.

Segue da definição que se $x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in S$ é uma palavra reduzida, então $x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n} \in S$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Se S é um conjunto de Schreier de L , então **dado** $x \in F(X)$, **denotaremos por** $\bar{x} \in S$ **o representante da classe** xL . A pergunta que se põe é: será que sempre existe um conjunto de Schreier de L ? O lema abaixo dá a resposta:

Lema 1.3.3. Se L é um subgrupo de $F(X)$, então existe um conjunto de Schreier de L .

Prova: Dada uma classe lateral à esquerda de L em $F(X)$, digamos S , chamaremos tamanho de S o tamanho da menor palavra reduzida contida em S . A prova é construtiva, usando indução no tamanho das classes. Para a classe L , que é a única de tamanho zero, ponhamos 1 como seu representante, ou seja, se $x \in L$, $\bar{x} = 1$. Se S_1 é uma classe de tamanho 1, então existe uma palavra reduzida de tamanho 1 em S_1 , digamos $x_1^{\epsilon_1}$. Ponhamos esta palavra como representante desta classe. Fazemos esta construção para todas as classes de tamanho 1. Se S_2 é uma classe de tamanho 2, então existe uma palavra reduzida $x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2} \in S_2$. Notemos que $x_2^{\epsilon_2}$ é uma palavra reduzida de tamanho 1. Logo, pertence a uma classe de tamanho menor ou igual que 1, e portanto, já existe $\overline{x_2^{\epsilon_2}}$. Pela definição de classe lateral a esquerda, existe $x \in L$, tal que $\overline{x_2^{\epsilon_2}} = x_2^{\epsilon_2}x \Rightarrow x_1^{\epsilon_1}\overline{x_2^{\epsilon_2}} = x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}x \Rightarrow x_1^{\epsilon_1}\overline{x_2^{\epsilon_2}} \in x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}L = S_2$. Como $\overline{x_2^{\epsilon_2}}$ é uma palavra reduzida de tamanho menor ou igual a 1 e $x_1^{\epsilon_1}\overline{x_2^{\epsilon_2}} \in S_2$, então $x_1^{\epsilon_1}\overline{x_2^{\epsilon_2}}$ é uma palavra reduzida de tamanho 2. Ponhamos $x_1^{\epsilon_1}\overline{x_2^{\epsilon_2}}$ como representante da classe S_2 . Fazemos esta construção para todas as classes de tamanho 2. O processo segue indutivamente e assim obtemos um conjunto de Schreier de L . ■

Sejam $F(X)$ um grupo livre, L um subgrupo de $F(X)$ e S um conjunto de Schreier de L . Agora, sejam

$$Y = \{(x, s) \in X \times S \mid \overline{xs} \neq xs\},$$

$F(Y)$ o grupo livre gerado por Y e $\phi : F(Y) \rightarrow L$ o homomorfismo definido na base por

$$\phi(x, s) = (\overline{xs})^{-1}xs$$

e estendido por linearidade.

Notemos que ϕ está bem definida. De fato, $(\overline{xs})^{-1}xsL = (\overline{xs})^{-1}(xsL) = (\overline{xs})^{-1}(\overline{xs}L) = (\overline{xs})^{-1}\overline{xs}L = L$.

Teorema 1.3.4 (Nielsen - Schreier). ϕ é um isomorfismo entre L e $F(Y)$.

Notemos que o teorema de Nielsen - Schreier fornece uma apresentação para L e uma demonstração que todo subgrupo de um grupo livre é livre. Antes de fazermos a prova, enunciaremos o seguinte resultado que será usado muitas vezes na demonstração do teorema:

Lema 1.3.5. Se $a, b \in F(X)$, então $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$.

Prova: $\overline{b}L = bL \Rightarrow a\overline{b}L = abL \Rightarrow \overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$. ■

Prova:(Nielsen - Schreier) A demonstração será construir um homomorfismo $\psi : L \rightarrow F(Y)$ inverso de ϕ . Seja $x = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in L$ escrita na forma reduzida. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, definimos

$$s_i = \begin{cases} \overline{x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}}, & \text{se } i \neq n+1 \\ 1, & \text{se } i = n+1 \end{cases}$$

Notemos que $s_1 = \overline{x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \bar{x} = 1$, pois $x \in L$.

Se $i < n$, pelo lema 1.3.5, temos $s_i = \overline{x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \overline{x_i^{\epsilon_i} \overline{x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}}} = \overline{x_i^{\epsilon_i} s_{i+1}}$. Esta relação também vale para $i = n$. De fato, $s_n = \overline{x_n^{\epsilon_n}} = \overline{x_n^{\epsilon_n} 1} = \overline{x_n^{\epsilon_n} s_{n+1}}$. Portanto

$$s_i = \overline{x_i^{\epsilon_i} s_{i+1}} \text{ para todo } i = 1, \dots, n \quad (*)$$

Agora, seja $a_i = (\overline{x_i^{\epsilon_i} s_{i+1}})^{-1} x_i^{\epsilon_i} s_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$.

Notemos que

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n &= (\overline{x_1 s_2})^{-1} x_1^{\epsilon_1} s_2 (\overline{x_2^{\epsilon_2} s_3})^{-1} x_2^{\epsilon_2} s_3 \dots (\overline{x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} s_n})^{-1} x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} s_n (\overline{x_n^{\epsilon_n} s_{n+1}})^{-1} x_n^{\epsilon_n} s_{n+1} \\ &\stackrel{(*)}{=} s_1^{-1} x_1^{\epsilon_1} s_2 s_2^{-1} x_2^{\epsilon_2} s_3 s_3^{-1} \dots s_{n-1} s_{n-1}^{-1} x_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} s_n s_n^{-1} x_n^{\epsilon_n} s_{n+1} = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} = x. \end{aligned}$$

Suponhamos $a_i \neq 1$.

Se $\epsilon_i = 1$, então $1 \neq a_i = (\overline{x_i s_{i+1}})^{-1} x_i s_{i+1} = \phi(x_i, s_{i+1})$.

$$\begin{aligned} \text{Se } \epsilon_i = -1, \text{ então, usando } (*) \text{ e o lema 1.3.5, } 1 \neq a_i &= (\overline{x_i^{-1} s_{i+1}})^{-1} x_i^{-1} s_{i+1} \\ &= [s_{i+1}^{-1} x_i x_i^{-1} s_{i+1}]^{-1} \\ &= [(\overline{s_{i+1}})^{-1} x_i s_i]^{-1} \\ &= [(\overline{x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x_i s_i]^{-1} \\ &= [(\overline{x_i x_i^{-1} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x_i s_i]^{-1} \\ &= [(\overline{x_i x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x_i s_i]^{-1} \\ &= [(\overline{x_i s_i})^{-1} x_i s_i]^{-1} = [\phi(x_i, s_i)]^{-1}. \end{aligned}$$

Observação 1.3.6. Notemos que os argumentos acima mostram que os elementos do conjunto $\{(\overline{xs})^{-1}xs \mid x \in X, s \in S\}$ geram o grupo L .

$$\text{Definimos } V_i = \begin{cases} (x_i, s_{i+1}), & \text{se } a_i \neq 1, \epsilon_i = 1 \\ (x_i, s_i)^{-1}, & \text{se } a_i \neq 1, \epsilon_i = -1 \\ 1, & \text{se } a_i = 1 \end{cases}$$

e $\psi(x) = V_1 \dots V_n$.

Vamos dispor todos os elementos utilizados para construir ψ numa tabela, a qual chamamos de *tabela de inversão de x* .

$x_1^{\epsilon_1}$	$\dots$	$x_i^{\epsilon_i}$	$\dots$	$x_n^{\epsilon_n}$	
$s_1 = 1$	$\dots$	s_i	$\dots$	s_n	$s_{n+1} = 1$
a_1	$\dots$	a_i	$\dots$	a_n	
V_1	$\dots$	V_i	$\dots$	V_n	

Observação 1.3.7. Para definir ψ , exigimos que $x = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$ estivesse na forma reduzida. Entretanto, não é necessário. Suponhamos x escrita da forma

$$x = x_1^{\epsilon_1} \dots x_{i-1}^{\epsilon_{i-1}} x^\epsilon x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n},$$

a qual não é reduzida.

Montando a tabela de inversão de x escrita desta última maneira, temos:

$x_1^{\epsilon_1}$	$\dots$	$x_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}$	x^ϵ	$x^{-\epsilon}$	$x_i^{\epsilon_i}$	$\dots$	$x_n^{\epsilon_n}$	
$s_1 = 1$	$\dots$	s_{i-1}	s_i	s	s_i	$\dots$	s_n	$s_{n+1} = 1$
a_1	$\dots$	a_{i-1}	a	a'	a_i	$\dots$	a_n	
V_1	$\dots$	V_{i-1}	V	V'	V_i	$\dots$	V_n	

$$s = \overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}}$$

$$a = (\overline{x^\epsilon s})^{-1} x^\epsilon s = (\overline{x^\epsilon x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x^\epsilon \overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}} = (\overline{x^\epsilon x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x^\epsilon \overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}}$$

$$= (\overline{x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x^\epsilon \overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}}$$

$$a' = (\overline{x^{-\epsilon} s_i})^{-1} x^{-\epsilon} s_i = (\overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x^{-\epsilon} \overline{x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}} = (\overline{x^{-\epsilon} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x^{-\epsilon} \overline{x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}}$$

$$\Rightarrow a' = a^{-1}.$$

Se $a = 1$, então $a' = 1$ e portanto $V = V' = 1$.

Se $a \neq 1$ e $\epsilon = 1$, então $a' \neq 1$ e $-\epsilon = -1$. Neste caso, $V = (x, s)$ e $V' = (x, s)^{-1}$.

Se $a \neq 1$ e $\epsilon = -1$, então $a' \neq 1$ e $-\epsilon = 1$. Neste caso, $V = (x, s_i)^{-1}$ e $V' = (x, s_i)$.

Em todo caso $V' = V^{-1}$ e portanto $V_1 \dots V_{i-1} V V' V_i \dots V_n = V_1 \dots V_{i-1} V_i \dots V_n = \psi(x)$.

Da observação acima, segue que ψ é homomorfismo e da maneira que foi construída, segue que $\phi \circ \psi = Id_L$.

Para concluir a demonstração, resta mostrarmos que $\psi \circ \phi = Id_{F(Y)}$. Como $F(Y)$ é livre, basta mostrarmos esta afirmação para os geradores de $F(Y)$, ou seja, os elementos de Y . Seja então $(x, s) \in Y \Rightarrow (\overline{xs})^{-1} xs \neq 1$. Sejam $s = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$ e $\overline{xs} = \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}$ escritas na forma reduzida. Usaremos fortemente o fato que s e $\overline{xs}$ tem a propriedade de Schreier e o lema 1.3.5.

Vamos montar a tabela de inversão $\phi(x, s) = (\overline{xs})^{-1} xs = \tilde{x}_m^{-\gamma_m} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}$.

$\tilde{x}_m^{-\gamma_m}$	$\dots$	$\tilde{x}_i^{-\gamma_i}$	$\dots$	$\tilde{x}_1^{-\gamma_1}$	x	$x_1^{\epsilon_1}$	$\dots$	$x_j^{\epsilon_j}$	$\dots$	$x_n^{\epsilon_n}$	
$\tilde{s}_m = 1$	$\dots$	$\tilde{s}_i$	$\dots$	$\tilde{s}_1$	s'	s_1	$\dots$	s_j	$\dots$	s_n	$s_{n+1} = 1$
$\tilde{a}_m$	$\dots$	$\tilde{a}_i$	$\dots$	$\tilde{a}_1$	a	a_1	$\dots$	a_j	$\dots$	a_n	
$\tilde{V}_m$	$\dots$	$\tilde{V}_i$	$\dots$	$\tilde{V}_1$	V	V_1	$\dots$	V_j	$\dots$	V_n	

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_i &= \overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} x \bar{s}} = \overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} x \bar{s}} \\
&= \overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \dots \tilde{x}_1^{-\gamma_1} \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_i^{\gamma_i} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}} = \overline{x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}} = x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} \\
s' &= \overline{x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \overline{x \bar{s}} = \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} \\
s_j &= \overline{x_j^{\epsilon_j} \dots x_n^{\epsilon_n}} = x_j^{\epsilon_j} \dots x_n^{\epsilon_n} \\
\text{Se } i \neq 1, \tilde{a}_i &= (\overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} s_{i-1}})^{-1} \tilde{x}_i^{-\gamma_i} s_{i-1} = (\overline{\tilde{x}_i^{-\gamma_i} \tilde{x}_i^{\gamma_i} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}})^{-1} \tilde{x}_i^{-\gamma_i} \tilde{x}_i^{\gamma_i} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} \\
&= (\overline{\tilde{x}_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}})^{-1} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} = (x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m})^{-1} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} = 1 \\
\tilde{a}_1 &= (\overline{\tilde{x}_1^{-\gamma_1} s'})^{-1} \tilde{x}_1^{-\gamma_1} s' = (\overline{\tilde{x}_1^{-\gamma_1} \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}})^{-1} \tilde{x}_1^{-\gamma_1} \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} \\
&= (\overline{\tilde{x}_2^{\gamma_2} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m}})^{-1} \tilde{x}_2^{\gamma_2} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} = (\tilde{x}_2^{\gamma_2} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m})^{-1} \tilde{x}_2^{\gamma_2} \dots \tilde{x}_m^{\gamma_m} = 1 \\
\tilde{V}_i &= 1, \text{ para todo } i = 1, \dots, m \\
a &= (\overline{x s_1})^{-1} x s_1 = (\overline{x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} = (\overline{x \bar{s}})^{-1} x \bar{s} \neq 1 \\
V &= (x, s_1) = (x, x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}) = (x, s) \\
a_j &= (\overline{x_j^{\epsilon_j} s_{j+1}})^{-1} x_j^{\epsilon_j} s_{j+1} = (\overline{x_j^{\epsilon_j} x_{j+1}^{\epsilon_{j+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x_j^{\epsilon_j} x_{j+1}^{\epsilon_{j+1}} \dots x_n^{\epsilon_n} = (x_j^{\epsilon_j} \dots x_n^{\epsilon_n})^{-1} x_j^{\epsilon_j} \dots x_n^{\epsilon_n} = 1 \\
V_i &= 1, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi(\phi(x, s)) = \tilde{V}_m \dots \tilde{V}_1 V V_1 \dots V_n = V = (x, s)$ e isto encerra a demonstração. ■

Agora vamos tratar do caso geral de um subgrupo H de um grupo $G = \langle X \mid \mathfrak{R} \rangle$.

Seja $\lambda : F(X) \rightarrow G$ a projeção natural. Logo, o núcleo de λ é o menor subgrupo normal de $F(X)$ que contém as palavras de $\mathfrak{R}$, o qual denotamos por $\langle \mathfrak{R}^{F(X)} \rangle$. Isto significa que temos a seguinte sequência exata:

$$1 \longrightarrow \langle \mathfrak{R}^{F(X)} \rangle \xrightarrow{i} F(X) \xrightarrow{\lambda} G \longrightarrow 1$$

Seja $L = \lambda^{-1}(H) \subset F(X)$. O lema 1.3.3 diz que existe um conjunto de Schreier S de L e o teorema de Nilsen - Schreier fornece um isomorfismo $\phi : F(Y) \rightarrow L$. Definimos $\mu = \lambda \circ \phi : F(Y) \rightarrow H$. Temos então o seguinte diagrama comutativo, cuja sequência na horizontal é exata:

$$\begin{array}{ccccc}
& & L = \lambda^{-1}(H) & & \\
& \nearrow \phi & & \searrow \lambda|_L & \\
1 \longrightarrow \ker \mu & \xrightarrow{i} & F(Y) & \xrightarrow{\mu} & H \longrightarrow 1 \\
& \nwarrow \phi^{-1} & & &
\end{array}$$

Se encontrarmos um subconjunto $\mathfrak{S} \subset F(Y)$, tal que o menor subgrupo normal contendo $\mathfrak{S}$ seja igual a $\ker \mu$, então teremos uma apresentação para H .

Seja então $v \in \ker \mu \Rightarrow \phi(v) \in \ker \lambda = \langle \mathfrak{R}^{F(X)} \rangle$. Logo

$$\phi(v) = (u_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} u_1) \dots (u_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} u_n),$$

com $u_i \in F(X)$, $r_i \in \mathfrak{R}$ e $\epsilon_i = \pm 1$.

Cada u_i pertence a alguma classe lateral à esquerda de L em $F(X)$, logo $u_i = s_i \tilde{u}_i$ para algum $\tilde{u}_i \in L$ e para algum $s_i \in S$ e portanto

$$\phi(v) = [(s_1 \tilde{u}_1)^{-1} r_1^{\epsilon_1} s_1 \tilde{u}_1] \dots [(s_n \tilde{u}_n)^{-1} r_n^{\epsilon_n} s_n \tilde{u}_n] = [\tilde{u}_1^{-1} (s_1^{-1} r_1^{\epsilon_1} s_1) \tilde{u}_1] \dots [\tilde{u}_n^{-1} (s_n^{-1} r_n^{\epsilon_n} s_n) \tilde{u}_n]$$

Cada $(s_i^{-1} r_i s_i) \in \ker \lambda$ e como $\ker \lambda \subseteq L$, então podemos aplicar ϕ^{-1} em $(s_i^{-1} r_i s_i)$. Colocando $v_i = \phi^{-1}(\tilde{u}_i)$, então

$$v = v_1^{-1} [\phi^{-1}(s_1^{-1} r_1 s_1)]^{\epsilon_1} v_1 \dots v_n^{-1} [\phi^{-1}(s_n^{-1} r_n s_n)]^{\epsilon_n} v_n.$$

Isto mostra que se definirmos $\mathfrak{S} = \{\phi^{-1}(s^{-1} r s) \mid s \in S, r \in \mathfrak{R}\}$, então $\ker \mu \subset \langle \mathfrak{S}^{F(Y)} \rangle$, sendo $\langle \mathfrak{S}^{F(Y)} \rangle$ o menor subgrupo normal de $F(Y)$ que contém $\mathfrak{S}$.

Agora se $q \in \mathfrak{S}$, então $q = \phi^{-1}(s^{-1} r s)$, para algum $s \in S$ e algum $r \in \mathfrak{R}$. Então

$$\mu(q) = \lambda(\phi(\phi^{-1}(s^{-1} r s))) = \lambda(s^{-1} r s) = 1.$$

Logo $q \in \ker \mu$, o que mostra que $\mathfrak{S} \subset \ker \mu$ e como $\ker \mu$ é subgrupo normal de $F(Y)$, então $\langle \mathfrak{S}^{F(Y)} \rangle \subset \ker \mu$.

Isto mostra o:

Teorema 1.3.8 (Reidemeister - Schreier). *O subgrupo H pode ser apresentado como $\langle Y \mid \mathfrak{S} \rangle$, sendo $\mathfrak{S} = \{\phi^{-1}(s^{-1} r s) \mid s \in S, r \in \mathfrak{R}\}$.*

Vamos transformar todo este arcabouço teórico apresentado até aqui num método mais prático, justificando cada passagem.

Como ϕ é isomorfismo, então $H = F(Y) / \langle \mathfrak{S} \rangle \approx L / \phi(\langle \mathfrak{S} \rangle) \approx L / \langle \phi(\mathfrak{S}) \rangle$. Agora $\phi(\mathfrak{S}) = \{s^{-1} r s \mid s \in S, r \in \mathfrak{R}\}$, pela definição do conjunto $\mathfrak{S}$.

Pela observação 1.3.6, o conjunto $\{(\overline{x s})^{-1} x s \mid x \in X, s \in S\}$ gera L . Portanto, para obter uma nova apresentação de H resta apenas escrever cada elemento de $\phi(\mathfrak{S})$ em termos destes geradores de L . Mas isto é feito também usando a observação 1.3.6.

É possível simplificar ainda mais este processo.

Suponhamos $xL = x'l$. Logo, existe $l \in L$, tal que $x = x'l \Rightarrow \lambda(x) = \lambda(x')\lambda(l)$. Como $L = \lambda^{-1}(H)$, então $\lambda(l) \in H$ e portanto $\lambda(x)H = \lambda(x')H$. Isto mostra que está bem definida a função

$$\tilde{\lambda} : F(X)/L \rightarrow G/H$$

$$(xL) \mapsto \lambda(x)H$$

Por argumentos semelhantes, mostra-se que esta função é uma bijeção, logo $[F(X) : L] = [G : H]$.

Podemos então definir um conjunto de Schreier de H da seguinte maneira:

Definição 1.3.9. Dizemos que $M \subset G$ é um conjunto de Schreier de H se $M = \lambda(S)$, sendo S um conjunto de Schreier de L .

Como $\tilde{\lambda}$ é bijeção, então a cardinalidade de M é igual a cardinalidade de S e o conjunto M é um sistema completo de representantes das classes laterais à esquerda de H em G .

Se $g \in G$, também denotamos por $\bar{g}$ o elemento de M que representa a classe lateral gH .

Temos então o seguinte resultado:

Lema 1.3.10. Se $x \in F(X)$, então $\lambda(\bar{x}) = \overline{\lambda(x)}$.

Prova: Seja $x \in F(X)$. Como $\bar{x}L = xL$ e $\tilde{\lambda}$ é bem definida, então $\lambda(\bar{x})H = \lambda(x)H$, ou seja, $\lambda(\bar{x})$ e $\lambda(x)$ pertencem a mesma classe lateral a esquerda e portanto $\overline{\lambda(\bar{x})} = \overline{\lambda(x)}$. Mas $\lambda(\bar{x}) \in M$, logo $\overline{\lambda(\bar{x})} = \lambda(\bar{x})$. Segue o resultado. ■

Vale o seguinte resultado, totalmente análogo ao lema 1.3.5.

Lema 1.3.11. Se $a, b \in G$, então $\overline{ab} = \overline{a}\bar{b}$.

Vamos mostrar como os lemas 1.3.10 e 1.3.11 facilitam os cálculos para achar a apresentação de H .

Sejam $s = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \in S$ e $r = \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_n^{\gamma_n} \in \mathfrak{R}$ palavras reduzidas. Então $s^{-1}rs \in \phi(\mathfrak{S})$. Vamos montar a tabela de inversão de $s^{-1}rs$.

$x_n^{-\epsilon_n}$	...	$x_i^{-\epsilon_i}$	...	$x_1^{-\epsilon_1}$	$\tilde{x}_1^{\gamma_1}$	...	$\tilde{x}_j^{\gamma_j}$	...	$\tilde{x}_m^{\gamma_m}$	$x_1^{\epsilon_1}$	...	$x_i^{\epsilon_i}$	...	$x_n^{\epsilon_n}$	
s_n	...	s_i	...	s_1	r_1	...	r_j	...	r_m	s'_1	...	s'_i	...	s'_n	$s'_{n+1} = 1$
a_n	...	a_i	...	a_1	b_1	...	b_j	...	b_m	a'_1	...	a'_i	...	a'_n	

$$\begin{aligned}
s_i &= \overline{x_i^{-\epsilon_i} \dots x_1^{-\epsilon_1} \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_n^{\gamma_n} x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}} \stackrel{1.3.10}{=} \overline{\lambda(x_i^{-\epsilon_i} \dots x_1^{-\epsilon_1} \tilde{x}_1^{\gamma_1} \dots \tilde{x}_n^{\gamma_n} x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n})} \\
&= \overline{\lambda(x_i^{-\epsilon_i} \dots x_1^{-\epsilon_1}) \lambda(r) \lambda(x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n})} \stackrel{\lambda(r)=1}{=} \overline{\lambda(x_i^{-\epsilon_i} \dots x_1^{-\epsilon_1} x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n})} \stackrel{1.3.10}{=} \overline{x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}} \stackrel{s \in S}{=} \\
&= x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_i &= \overline{(x_i^{-\epsilon_i} s_{i-1})^{-1} x_i^{-\epsilon_i} s_{i-1}} = \overline{(x_i^{-\epsilon_i} x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n})^{-1} x_i^{-\epsilon_i} x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}} = \overline{(x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n})^{-1} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}} \\
&\stackrel{s \in S}{=} (x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n})^{-1} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n} = 1.
\end{aligned}$$

$$s'_i = \overline{x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}} \stackrel{s \in S}{=} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n}$$

$$a'_i = (\overline{x_i^{\epsilon_i} s'_{i+1}})^{-1} x_i^{\epsilon_i} s'_{i+1} = (\overline{x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n}})^{-1} x_i^{\epsilon_i} x_{i+1}^{\epsilon_{i+1}} \dots x_n^{\epsilon_n} \stackrel{s \in S}{=} (x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n})^{-1} x_i^{\epsilon_i} \dots x_n^{\epsilon_n} = 1.$$

Portanto, só precisamos calcular os r_j 's e os b_j 's.

1.4 Apresentação de uma extensão

Consideremos a seguinte sequência exata de grupos e homomorfismos:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\mu} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} G \longrightarrow 1.$$

Neste caso, $\tilde{G}$ é chamado uma extensão de G por A .

Suponhamos que A e G admitam, respectivamente, as apresentações $\langle Y \mid \mathcal{S} \rangle$ e $\langle X \mid \mathcal{R} \rangle$. Então, a sequência acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$1 \longrightarrow \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle \xrightarrow{\mu} \tilde{G} \xrightarrow{\nu} \langle X \mid \mathcal{R} \rangle \longrightarrow 1.$$

Nesta seção, vamos mostrar que é possível obter uma apresentação de $\tilde{G}$ a partir das apresentações de A e G .

Seja

$$\tilde{Y} = \{\tilde{y} := \mu(y) \mid y \in Y\}$$

e para cada $s \in \mathcal{S}$, seja $\tilde{s}$ a palavra obtida de s substituindo cada gerador $y \in Y$ por $\tilde{y} \in \tilde{Y}$. Notemos que como μ é homomorfismo, cada $\tilde{s}$ representa o elemento neutro em $\tilde{G}$. Seja

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{s} \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Como a imagem de μ é igual ao núcleo de ν , então para cada $x \in X$, existe $\tilde{x} \in \tilde{G} - \text{Im}\mu$, tal que $\nu(\tilde{x}) = x$. Seja

$$\tilde{X} = \{\tilde{x} \mid x \in X\}.$$

Agora, para cada palavra $r \in \mathcal{R}$, seja $\tilde{r}$ a palavra obtida de r trocando cada gerador $x \in X$ por $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Novamente, notemos que $\tilde{r} \in \text{Ker}\nu$, já que ν é homomorfismo. Como $\text{Ker}\nu = \text{Im}\mu$, então para cada $\tilde{r}$, existe $v_r \in \tilde{G}$, que é uma palavra escrita em termos dos elementos de $\tilde{Y}$, tal que $\tilde{r} = v_r$. Seja

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{r}v_r^{-1} \mid r \in \mathcal{R}\}.$$

Desde que $\text{Im}\mu = \text{Ker}\nu$ e $\text{Ker}\nu$ é um subgrupo normal de $\tilde{G}$, cada conjugado $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}$ pertence a imagem de μ . Logo, existe uma palavra, digamos $w_{x,y}$, escrita em termos de $\tilde{y}$, tal que $\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x} = w_{x,y}$. Seja

$$\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{x}^{-1}\tilde{y}\tilde{x}w_{x,y}^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Com todos estes conjuntos em mãos, temos o

Teorema 1.4.1. $\tilde{G}$ é isomorfo ao grupo $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \mid \tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{T}} \rangle$. (1)

Prova: Seja D o grupo definido através da apresentação (1). Consideremos a associação

$$\begin{aligned} \theta : D &\rightarrow \tilde{G} \\ \tilde{x} &\mapsto \tilde{x} & \tilde{y} &\mapsto \tilde{y} \end{aligned}$$

e estendida por lineariadade. Como todas as relações de D valem em $\tilde{G}$, via a associação θ , então θ é um homomorfismo bem definido. Vamos mostrar que θ é um isomorfismo. A restrição do homomorfismo θ ao subgrupo gerado por $\tilde{Y}$, induz um bem definido homomorfismo

$$\begin{aligned} \theta_1 : \langle \tilde{Y} \rangle &\rightarrow \text{Im}\mu \approx A \\ \tilde{y} &\mapsto y \end{aligned}$$

Como todas as relações de $\mathcal{S}$ valem em $\langle \tilde{Y} \rangle$, via a associação $y \mapsto \tilde{y}$, então θ_1 é um isomorfismo. A presença das relações $\tilde{\mathcal{T}}$ em D implica que $\langle \tilde{Y} \rangle$ é um subgrupo normal de D e desde que $\theta(\langle \tilde{Y} \rangle) \subset \text{Im}\nu = \text{Ker}\mu$, então θ induz um bem definido homomorfismo

$$\begin{aligned} \theta_2 : D / \langle \tilde{Y} \rangle &\rightarrow \tilde{G} / \text{Im}\mu \approx G \\ [\tilde{x}] &\mapsto x \end{aligned}$$

A presença das relações $\tilde{\mathcal{R}}$ implica que é bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_2 : G &\rightarrow D / \langle \tilde{Y} \rangle \\ x &\mapsto [\tilde{x}] \end{aligned}$$

e é claro que $\bar{\theta}_2 = \theta_2^{-1}$. Da maneira como foram construídos os homomorfismos θ , θ_1 e θ_2 , segue que é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \langle Y \mid \mathcal{S} \rangle & \xrightarrow{\mu} & \tilde{G} & \xrightarrow{\nu} & \langle X \mid \mathcal{R} \rangle \longrightarrow 1 \\ \uparrow & & \uparrow \theta_1 & & \uparrow \theta & & \uparrow \theta_2 \\ 1 & \longrightarrow & \langle \tilde{Y} \rangle & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{j} & D / \langle \tilde{Y} \rangle \longrightarrow 1 \end{array}$$

sendo i e j , respectivamente, a inclusão e a projeção natural. Como as sequências na horizontal são exatas e θ_1 e θ_2 são isomorfismos, pelo lema dos cinco, θ é isomorfismo. ■

1.5 Grupos Dicíclicos

Seja $m > 1$. No conjunto de $4m$ elementos

$$A = \{1, x, \dots, x^{2m-1}, y, xy, \dots, x^{2m-1}y\}$$

definimos a seguinte operação

$$\begin{aligned} 1 \text{ é o elemento neutro, } x^a x^b &= x^{a+b}, x^a(x^b y) = x^{a+b} y, (x^a y)x^b = x^{a-b} y, \\ (x^a y)(x^b y) &= x^{a-b+m} y, \end{aligned}$$

sendo $0 \leq a, b \leq 2m-1$ e as potências de x consideradas módulo $2m$.

Com argumentos combinatórios, prova-se que A , munido da operação acima, é um grupo, chamado *Grupo Díciclico de ordem $4m$* .

Observemos que $x^{2m} = x^0 = 1$, $yy = (x^0 y)(x^0 y) = x^{0-0+m} = x^m$ e $yyyy = (yy)(yy) = x^m x^m = x^{2m} = 1 \Rightarrow y^{-1} = yyy = y(yy) = yx^m$.

Uma outra construção do grupo díciclico de ordem $4m$ é a seguinte:

Considere o grupo cíclico de ordem $2m$, $\mathbb{Z}_{2m} = \langle s \mid s^{2m} = 1 \rangle$. O grupo díciclico de ordem $4m$, denotado por Dic_{4m} , é construído adicionando a $\mathbb{Z}_{2m}$ mais um gerador de ordem 4, digamos t , e as relações $t^2 = s^m$ e $t^{-1}st = s^{-1}$, ou seja,

$$Dic_{4m} = \langle s, t \mid s^{2m} = 1, t^2 = s^m (*), t^{-1}st = s^{-1} (**) \rangle$$

A primeira relação é consequência das outras duas. De fato, $s^m \stackrel{(*)}{=} t^2 = t^{-1}t^2t \stackrel{(*)}{=} t^{-1}s^mt = (t^{-1}st)^m \stackrel{(**)}{=} s^{-m} \Rightarrow s^{2m} = 1$. Portanto

$$Dic_{4m} = \langle s, t \mid t^2 = s^m, t^{-1}st = s^{-1} \rangle.$$

Vamos mostrar que as duas definições coincidem, isto é, $Dic_{4m} \approx A$.

Consideremos o homomorfismo $\eta : Dic_{4m} \rightarrow A$, definido na base por $\eta(s) = x$ e $\eta(t) = y$ e estendido por linearidade. Pelo que foi observado, η é bem definido.

Agora consideremos $\nu : A \rightarrow Dic_{4m}$, definido por $\nu(x^c) = s^c$ e $\nu(x^d y) = s^d t$, $0 \leq c, d \leq 2m-1$. Usando as relações de Dic_{4m} , mostra-se que ν é homomorfismo de grupos.

É claro que η e ν são homomorfismos inversos um do outro.

Um outra apresentação para Dic_{4m} é $B = \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^m \rangle$. Para mostrar isto, consideremos os homomorfismos que são definidos na base da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\varphi : B &\rightarrow Dic_{4m} \\ r &\mapsto ts^{-1} \\ v &\mapsto t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi : Dic_{4m} &\rightarrow B \\ s &\mapsto r^{-1}v \\ t &\mapsto v\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\varphi(r^2) &= (ts^{-1})^2 = ts^{-1}(ts^{-1}) = ts^{-1}st = t^2 = \varphi(v^2) \\ \varphi[(r^{-1}v)^m] &= (st^{-1}t)^m = s^m = t^2 = \varphi(v^2) \\ \psi(t^2) &= v^2 = (r^{-1}v)^m = \psi(s^m) \\ \psi(t^{-1}st) &= v^{-1}r^{-1}vv = v^{-1}r^{-1}v^2 = v^{-1}r^{-1}r^2 = v^{-1}r = \psi(s^{-1}).\end{aligned}$$

Isto mostra que φ e ψ estão bem definidas e é fácil ver que $\varphi = \psi^{-1}$.

Vamos mostrar que para $m = 2$, $Dic_{4.2} = Dic_8 \approx \mathcal{Q}_8$, sendo $\mathcal{Q}_8$ o grupo dos quatérnios.

Consideremos $\mathcal{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ com a regra usual de operação $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Definimos $\mu : \mathcal{Q}_8 \rightarrow \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^2 \rangle \approx Dic_8$, da seguinte maneira:

$$1 \mapsto 1, -1 \mapsto r^2, \pm i \mapsto r^{\pm 1}, \pm j \mapsto rv^{-1}, \pm k \mapsto v^{\pm 1}.$$

Usando as relações de $\langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^2 \rangle$, mostra-se que μ é homomorfismo.

Agora definimos $\delta : \langle r, v \mid r^2 = v^2 = (r^{-1}v)^2 \rangle \rightarrow \mathcal{Q}_8$ na base por

$$\delta(r) = i, \delta(v) = k$$

e estendemos por linearidade.

É fácil mostrar que δ está bem definida e que $\delta = \mu^{-1}$.

1.6 Alguns resultados sobre grupos

Lema 1.6.1. *Se $F := F(x_1, \dots, x_n)$ é um grupo livre de rank $n > 1$, então F é isomorfo a $\mathcal{I}_F$, sendo $\mathcal{I}_F$ o grupo dos automorfismo internos de F .*

Prova: Consideremos o homomorfismo $\mathcal{I} : F \rightarrow \mathcal{I}_F$ que associa x_i ao automorfismo interno

$$\mathcal{I}_{x_i} : F \rightarrow F$$

$$x \mapsto x_i x x_i^{-1}$$

e estendido por lineariadade. Vamos mostrar que $\mathcal{I}$ é isomorfismo, ou equivalentemente, que $\mathcal{I}$ é bijeção. Claramente $\mathcal{I}$ é sobrejetora. Seja $a \in F$ tal que $\mathcal{I}_a = Id$. Então, para todo $x \in F$, $axa^{-1} = x \Rightarrow ax = xa$, ou seja, a pertence ao centro de F . Mas sendo F um grupo livre de rank maior que 1, seu centro é trivial. Logo $a = 1$ e como a é arbitrário, segue que $\mathcal{I}$ é injetora. ■

Lema 1.6.2. *Suponhamos que a sequência de grupos e homomorfismos*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H \longrightarrow 1$$

seja exata. Suponhamos ainda que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ seja a multiplicação por $n \neq 0$. Então, o homomorfismo $\bar{g} : \mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z} \rightarrow G$, dado por $\bar{g}([x]) = g(x)$, é bem definido e a sequência

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z} \xrightarrow{\bar{g}} G \xrightarrow{h} H \longrightarrow 1$$

é exata.

Prova: Vamos mostrar a boa definição de $\bar{g}$. Se $[x] = [x']$, então $x - x' = kn$. Então, $g(x) \cdot [g(x')]^{-1} = g(x - x') = g(kn) = g(f(k))$. Como a imagem de f é igual ao núcleo de g , segue que $g(x) \cdot [g(x')]^{-1} = 1 \Rightarrow \bar{g}([x]) = g(x) = g(x') = \bar{g}([x'])$. $\bar{g}$ é claramente homomorfismo, já que g o é. É claro também que a imagem de $\bar{g}$ está contida no núcleo de h . Agora seja $x \in G$, tal que $h(x) = 1$. Como a imagem de g é igual ao núcleo de h , então existe $b \in \mathbb{Z}$, tal que $g(b) = x$. Logo, $\bar{g}([b]) = g(b) = x$ e portanto o núcleo de h está contido no núcleo na imagem de $\bar{g}$. h é sobrejetora por hipótese. Ainda resta mostrar que $\bar{g}$ é injetora. Seja $[x] \in \mathbb{Z}/|n|\mathbb{Z}$ tal que $\bar{g}([x]) = 1 \Rightarrow g(x) = 1$. Como a imagem de f é igual ao núcleo de g , então existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $na = x \Rightarrow 0 = [na] = [x]$, e portanto $\bar{g}$ é injetora. ■

Grupos de Tranças de uma Superfície

2.1 Introdução

Neste capítulo vamos fazer a definição formal de uma trança de uma superfície através de duas maneiras e vamos mostrar que estas definições são de certo modo equivalentes. Na mesma linha de raciocínio, vamos definir os grupos de tranças de uma superfície.

Em todo este capítulo M denotará um superfície topológica conexa sem bordo.

2.2 Grupos de Tranças Geométrico

Nesta seção vamos formalizar a ideia intuitiva de uma trança; como duas tranças podem ser classificadas “como sendo a mesma trança” e construir o n -ésimo Grupo de Tranças de uma superfície.

Sejam n um inteiro positivo e $\{P_1, \dots, P_n\}$ um conjunto de pontos dois a dois distintos de M .

Definição 2.2.1. *Uma n -trança sobre M baseada em $\{P_1, \dots, P_n\}$ é uma n -upla $b = (b_1, \dots, b_n)$ de caminhos $b_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, que cumprem as seguintes condições:*
(1) *Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $b_i(0) = (P_i, 0)$ e $b_i(1) = (P_j, 1)$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$;*

(2) Para todo $t \in [0, 1]$, o conjunto $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$ tem n pontos distintos.

Cada caminho b_i é chamado a i -ésima corda da trança, ou simplesmente, uma corda da trança.

O conjunto de todas as n -tranças sobre M baseadas em $\{P_1, \dots, P_n\}$ será denotado por $\mathcal{B}_n(M)$.

Quando não houver perigo de confusão, diremos que um elemento de $\mathcal{B}_n(M)$ é simplesmente uma *trança*.

Figura 2.1: 2-trança do plano

Figura 2.2: 3-trança da esfera

Figura 2.3: não é um trança

As figuras 2.1 e 2.2 mostram uma 2-trança do plano e uma 3-trança da esfera, respectivamente. Na verdade, estas figuras representam a imagem de 2 caminhos em $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ e de 3 caminhos em $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ que cumprem a definição de trança. **Chamaremos a imagem dos caminhos que compõem uma trança de esquema da trança.** A figura 2.3 mostra um caminho em $Q \times [0, 1]$ que não cumpre a condição (2) da definição de trança, sendo Q o quadrado unitário aberto do plano.

Dada uma trança $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{B}_n(M)$, podemos associar uma permutação $\bar{\alpha}(b) \in S_n$, chamada permutação da trança b , da seguinte maneira:

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $b_i(1) = (P_j, 1)$. Definimos $\bar{\alpha}(b)(i) = j$. De fato $\bar{\alpha}(b)$ é uma permutação pela condição (2) da definição de trança.

Se $\bar{\alpha}(b)$ é a permutação trivial, então b é dita uma *trança pura*. A trança da figura 2.1 é uma 2-trança pura, enquanto a trança da figura 2.2 não é pura.

Consideremos $\Pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ a projeção no primeiro fator. Dada uma n -trança $b = (b_1, \dots, b_n)$, denotaremos por $\Pi_M(b) := (\Pi_M \circ b_1, \dots, \Pi_M \circ b_n)$ a n -upla de caminhos em M .

Dadas duas tranças $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ em $\mathcal{B}_n(M)$, vamos associar uma terceira trança ab , chamada produto da trança a com a trança b .

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja $(ab)_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, dada por $(ab)_i(t) = ((\Pi_M \circ a_i) * (\Pi_M \circ b_{\bar{\alpha}(a)(i)})(t), t)$, sendo que $*$ denota a justaposição de caminhos e $\bar{\alpha}(a)$ a permutação da trança a . Definimos $ab = ((ab)_1, \dots, (ab)_n)$.

A figura 2.4 dá uma ideia geométrica do produto de tranças.

Figura 2.4: produto de tranças

Este produto de tranças não fornece uma estrutura de grupo a $\mathcal{B}_n(M)$, pois não existe um elemento neutro bem definido. Entretanto, existe uma relação de equivalência em $\mathcal{B}_n(M)$, a qual definimos abaixo, que torna o conjunto das classes um grupo com a operação induzida.

Definição 2.2.2. Dadas duas tranças $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ em $\mathcal{B}_n(M)$ com mesma permutação, dizemos que a é equivalente a b , e denotamos $a \cong b$, se existem aplicações contínuas $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, tais que:

- (i) Para todo $s \in [0, 1]$, se definirmos $f_i^s : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ por $f_i^s(t) = F_i(t, s)$, então $F^s = (f_1^s, \dots, f_n^s)$ é uma n -trança baseada em $\{P_1, \dots, P_n\}$, com mesma permutação de a (e consequentemente de b);
- (ii) $F^0 = a$ e $F^1 = b$.

Intuitivamente, duas tranças são equivalentes, se podemos deformar continuamente as cordas de uma nas cordas da outra sem que cordas distintas se toquem e durante a deformação os extremos ficam fixos. A figura 2.5 mostra duas 3-tranças do plano que não são equivalentes, pois não tem mesma permutação. A figura 2.6 mostra duas 2-tranças do plano em que não é possível deformar continuamente as cordas de uma nas cordas da outra. Ao longo desta dissertação veremos muitas tranças equivalentes.

Teorema 2.2.3. A relação $\cong$ é uma relação de equivalência e o conjunto $B_n(M) := \mathcal{B}_n(M) / \cong$ é um grupo com o produto induzido, chamado o grupo de n -tranças de M ou grupo de tranças com n cordas de M .

Figura 2.5: tranças que não tem mesma permutação

Figura 2.6: tranças com mesma permutação, mas que não são equivalentes

Prova: A demonstração é totalmente análoga a que mostra que o conjunto das classes de homotopia dos laços com ponto base fixado de um espaço topológico com a operação justaposição de caminhos é um grupo (Grupo Fundamental) e citamos [13] como referência. ■

Observação 2.2.4. A trança $1 = (k_1, \dots, k_n)$, sendo $k_i(t) = (P_i, t)$ para todo $t \in [0, 1]$, representa a classe de equivalência do elemento neutro de $B_n(M)$. Se $b = (b_1, \dots, b_n)$ é uma n -trança, então a trança $b^{-1} = (b_1^{-1}, \dots, b_n^{-1})$, sendo $b_i^{-1} : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ o caminho definido por $b_i^{-1}(t) = (\Pi_M \circ b_{\bar{\alpha}(b)^{-1}(i)}(1 - t), t)$, é tal que $[b^{-1}] = [b]^{-1}$. As tranças representadas nas figuras 2.5 e 2.6 são tais que suas classes de equivalência são inversa uma da outra.

Notemos que se $a \cong b$, então a permutação de a é igual a permutação de b . Logo, a função $\alpha : B_n(M) \rightarrow S_n$ dada por $\alpha([b]) = \bar{\alpha}(b)$ está bem definida. Pela definição de produto de tranças, segue que α é um homomorfismo.

Definição 2.2.5. O núcleo do homomorfismo α é chamado grupo de n -tranças puras de M ou grupo de tranças puras com n cordas de M e denotado por $P_n(M)$.

Teorema 2.2.6. $B_n(M)/P_n(M)$ é isomorfo a S_n .

Prova: Pelo teorema dos isomorfismos, basta mostrar que α é sobrejetora. E para mostrar que α é sobrejetora, basta mostrar que se $(i, i+1) \in S_n$ é uma transposição, existe uma trança a , tal que $\bar{\alpha}(a) = (i, i+1)$, pois as transposições geram S_n . Sendo M superfície topológica conexa sem bordo, então existem caminhos $A_i, A_{i+1} : [0, 1] \rightarrow M$ tais que $A_i(0) = A_{i+1}(1) = P_i$, $A_i(1) = A_{i+1}(0) = P_{i+1}$, $A_i(t) \neq A_{i+1}(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ e $A_i(t), A_{i+1}(t) \neq P_j$ para todo $j \neq i, i+1$. A trança $a = (a_1, \dots, a_n)$, sendo $a_j : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ definidos por

$$a_j(t) = \begin{cases} (A_i(t), t), & \text{se } j = i \\ (A_{i+1}(t), t), & \text{se } j = i+1 \\ (P_j, t), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cumpramos $\bar{\alpha}(a) = (i, i+1)$

■

Notemos que na definição do grupo de n -tranças de M , não fizemos menção ao conjunto de pontos $\{P_1, \dots, P_n\}$, pois a escolha destes pontos não altera a estrutura algébrica deste grupo. Mais precisamente: se $\{P'_1, \dots, P'_n\}$ é outro conjunto de n pontos distintos de M e $B_n^\lambda(M)$ é o grupo de n -tranças de M , mas agora construído a partir destes novos pontos, então $B_n(M)$ e $B_n^\lambda(M)$ são isomorfos. Este fato será mostrado na próxima seção.

2.3 Grupos de Tranças e Espaços de Configuração

Nesta seção vamos dar uma nova definição dos Grupos de Tranças de uma superfície através da noção de Espaços de Configuração. O caminho aqui é de certo modo, reverso do tópico anterior, pois aqui primeiro definimos os Grupos de Tranças e depois uma trança.

Definição 2.3.1. *Seja $[x^0] = [(x_1^0, \dots, x_n^0)]$ um ponto fixado de $C_n(M)$. O grupo $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ é chamado grupo das n -tranças de M ou grupo de tranças com n cordas de M . Quando n estiver subentendido, chamaremos este grupo simplesmente de grupo de tranças de M .*

O grupo de tranças de M não depende do ponto base escolhido. De fato, como observado na seção “Espaços de Configuração”, o espaço $F_n(M)$ é conexo e sendo variedade, então é conexo por caminhos. Sendo a projeção $p : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$ um recobrimento (corolário 1.2.6), portanto contínua e sobrejetora, então $C_n(M)$ é conexo por caminhos.

Se $[b] \in \pi_1(C_n(M), [x^0])$, então o caminho $b : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$ é dito uma trança com n cordas de M .

Precisamos mostrar que esta nova definição de trança e de grupo de tranças “coincide” com a anterior e isto é dado pelo

Teorema 2.3.2. *Seja $[x^0] = [(x_1^0, \dots, x_n^0)] \in C_n(M)$. Então os grupos $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ e $B_n(M)$ são isomorfos, sendo $B_n(M)$ o grupo de n -tranças de M , construído com base nos pontos $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$.*

Prova: A prova será construir homomorfismos $\lambda : \pi_1(C_n(M), [x^0]) \rightarrow B_n(M)$ e $\mu : B_n(M) \rightarrow \pi_1(C_n(M), [x^0])$ tais que $\mu \circ \lambda = Id_{\pi_1(C_n(M), [x^0])}$ e $\lambda \circ \mu = Id_{B_n(M)}$.

Sejam $\beta \in \pi_1(C_n(M), [x^0])$ e $b : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$ um caminho fechado tal que $[b] = \beta$. Sendo a projeção natural $p : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$ um recobrimento, existe um único levantamento de b pelo ponto $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, digamos $\bar{b} : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$. Notemos que $\bar{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))$, sendo b_i caminhos em M tais que se $i \neq j$, então $b_i(t) \neq b_j(t)$, para todo $t \in [0, 1]$. Notemos ainda que sendo b um caminho fechado, então existe uma única permutação $s \in S_n$, tal que $b_i(1) = x_{s(i)}^0$. Logo, definindo $a_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ por $a_i(t) = (b_i(t), t)$, temos que $a = (a_1, \dots, a_n)$ é uma n -trança sobre M baseada em $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$. Definimos $\lambda(\beta) = [a]$.

Precisamos mostrar que λ está bem definida, no sentido que se $b^\vee$ é outro laço em $C_n(M)$ que representa a classe β , então a trança construída a partir de $b^\vee$, digamos $a^\vee$, é tal que $[a] = [a^\vee]$.

Seja $\bar{b}^\vee$ o único levantamento de $b^\vee$ a partir de x^0 . Novamente, notemos que $\bar{b}^\vee(t) = (\bar{b}_1^\vee(t), \dots, \bar{b}_n^\vee(t))$, sendo $\bar{b}_i^\vee$ caminhos em M tais que se $i \neq j$, então $\bar{b}_i^\vee(t) \neq \bar{b}_j^\vee(t)$, para todo $t \in [0, 1]$. A trança construída a partir de $\bar{b}^\vee$ é $a^\vee = (a_1^\vee, \dots, a_n^\vee)$, sendo $a_i^\vee(t) = (\bar{b}_i^\vee(t), t)$.

Como p é recobrimento e $\beta = [b] = [b^\vee]$, então $\bar{b}_i^\vee(1) = x_{s(i)}^0 = b_i^\vee(1)$ e existe uma homotopia $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow F_n(M)$, tal que $F(t, 0) = \bar{b}(t)$, $F(t, 1) = \bar{b}^\vee(t)$, $F(0, s) = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $F(1, s) = (x_{s(1)}^0, \dots, x_{s(n)}^0)$. Logo, se denotarmos $F(t, s) = (f_1(t, s), \dots, f_n(t, s))$, então estão bem definidas as funções $F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, dadas por $F_i(t, s) = (f_i(t, s), t)$. Notemos que as funções F_i 's cumprem as condições (i) e (ii) da definição 2.2.2 para as tranças a e $a^\vee$. Logo, $[a] = [a^\vee]$ e a função λ está bem definida.

Agora vamos mostrar que λ é homomorfismo. Sejam $[c]$ e $[d]$ pertencentes a $\pi_1(C_n(M), x^0)$ e $\bar{c}$ e $\bar{d}$ os levantamentos a partir de x^0 dos laços c e d , respectivamente. Escrevendo $\bar{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ e $\bar{d}(t) = (d_1(t), \dots, d_n(t))$, então as tranças construídas a partir de $\bar{c}$ e $\bar{d}$ são, respectivamente, $T^c = (T_1^c, \dots, T_n^c)$ e $T^d = (T_1^d, \dots, T_n^d)$, sendo $T_i^c : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ definida por $T_i^c(t) = (c_i(t), t)$ e $T_i^d : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$

definida por $T_i^d(t) = (d_i(t), t)$, $i = 1, \dots, n$. Logo, por definição

$$\lambda([c]) = [T^c] \text{ e } \lambda([d]) = [T^d].$$

Se s é a permutação da trança T^c , então a i -ésima corda da trança $T^c T^d$ é dada pelo caminho definido por $T_i^c T_{s(i)}^d(t) = (c_i * d_{s(i)}(t), t)$. Agora notemos que o caminho definido por $(c_1 * d_{s(1)}(t), \dots, c_n * d_{s(n)}(t))$ é um levantamento do laço $c * d$ e a trança construída a partir deste caminho é justamente $T^c T^d$. Logo

$$\lambda([c][d]) = \lambda([c * d]) = [T^c T^d] = [T^c][T^d] = \lambda([c])\lambda([d])$$

e portanto λ é homomorfismo.

O homomorfismo μ é construído da seguinte maneira: se $[a] \in B_n(M)$ é uma n -trança baseada em $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$, então $a = (a_1, \dots, a_n)$, sendo a_i caminhos em $M \times [0, 1]$, $a_i(0) = (x_i^0, 0)$ e $a_i(1) = (x_{s(i)}^0, 1)$, para algum $s \in S_n$. Sendo $\Pi_M : M \times [0, 1] \rightarrow M$ a projeção no primeiro fator, temos que $\Pi_M(a) : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$ dado por $\Pi_M(a)(t) = (\Pi_M \circ a_1(t), \dots, \Pi_M \circ a_n(t))$ é um caminho com ponto inicial $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, bem definido por causa da condição (2) da definição de trança. Notemos que $p \circ \Pi_M(a) : [0, 1] \rightarrow C_n(M)$ é um laço com ponto base $[x^0] = [(x_1^0, \dots, x_n^0)]$.

Definimos $\mu([a]) = [p \circ \Pi_M(a)]$. Através de argumentos totalmente análogos aos anteriores mostra-se que μ está bem definida, é um homomorfismo de grupos e é fácil ver que realmente λ e μ são inversas uma da outra. ■

Corolário 2.3.3. *Se $B_n(M)$ e $B_n^\lambda(M)$ são grupos de n -tranças de M construídos a partir de $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ e $\{x_1^1, \dots, x_n^1\}$, respectivamente, então $B_n(M)$ e $B_n^\lambda(M)$ são isomorfos.*

Prova: Colocando $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$, temos pelo teorema que $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ e $\pi_1(C_n(M), [x^1])$ são isomorfos a $B_n(M)$ e $B_n^\lambda(M)$, respectivamente. Mas $C_n(M)$ é conexo por caminhos, logo $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ e $\pi_1(C_n(M), [x^1])$ são isomorfos. Segue o resultado. ■

Dado uma trança $\beta \in \pi_1(C_n(M), [x^0])$, $\beta = [b]$, podemos associar uma permutação $s(\beta)$, da seguinte maneira: $s(\beta) = \alpha \circ \lambda([b])$, sendo α o homomorfismo definido na seção anterior e λ o homomorfismo definido na demonstração do teorema 2.3.2. Segue que a função $s : \pi_1(C_n(M), [x^0]) \rightarrow S_n$, dada por $s(\beta) = \alpha \circ \lambda(\beta)$ está bem definida e é um homomorfismo.

Como na seção anterior, temos a seguinte:

Definição 2.3.4. *O núcleo do homomorfismo s é chamado de grupo de n -tranças puras de M ou grupo de tranças puras de M com n cordas.*

Observação 2.3.5. Notemos que o grupo de n -tranças puras de M , no sentido da definição acima, é isomorfo a $P_n(M)$, por causa da definição de s e pelo fato de λ ser isomorfismo. Mais ainda, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.6. *O grupo de n -tranças puras de M é isomorfo a $\pi_1(F_n(M), x^0)$.*

Prova: Pela observação acima, basta construir homomorfismos $\gamma : \pi_1(F_n(M), x^0) \rightarrow P_n(M)$ e $\eta : P_n(M) \rightarrow \pi_1(F_n(M), x^0)$, tais que $\gamma \circ \eta = Id_{P_n(M)}$ e $\eta \circ \gamma = Id_{\pi_1(F_n(M), x^0)}$. Seja $\alpha \in \pi_1(F_n(M), x^0)$, $\alpha = [a]$. $a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$, sendo $a_i : [0, 1] \rightarrow M$ laços com ponto base x_i^0 e tais que se $i \neq j$, então $a_i(t) \neq a_j(t)$. Logo $\bar{a} = (\bar{a}_1(t), \dots, \bar{a}_n(t))$, sendo $\bar{a}_i \rightarrow M \times [0, 1]$ dadas por $\bar{a}_i(t) = (a_i(t), t)$, é uma n -trança pura. Definimos $\gamma(\alpha) = \bar{a}$. A demonstração que γ está bem definida e é um homomorfismo é totalmente análoga a que a função λ do teorema 2.3.2 está bem definida e é um homomorfismo. Agora se $[b] \in P_n(M)$, então $b = (b_1, \dots, b_n)$, sendo $b_i : [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$ caminhos tais que $b_i(0) = (x_i^0, 0)$, $b_i(1) = (x_i^0, 1)$ e se $i \neq j$, então $b_i(t) \neq b_j(t)$, para todo $t \in [0, 1]$. Definimos $\eta([b]) = [\Pi_M \circ b]$, sendo $\Pi_M \circ b : [0, 1] \rightarrow F_n(M)$ dada por $\Pi_M \circ b(t) = (\Pi_M \circ b_1(t), \dots, \Pi_M \circ b_n(t))$. Novamente, a demonstração que η está bem definida e é um homomorfismo são análogas a que μ do teorema 2.3.2 está bem definida. É fácil ver γ e η são inversas uma da outra. ■

Corolário 2.3.7. *Se $[b] \in \pi_1(C_n(M), [x^0])$ é tal que $s([b])$ é a permutação trivial, então o levantamento de b (pelo recobrimento $p : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$) é um laço com ponto base x^0 .*

Prova: Segue diretamente da construção dos isomorfismos λ e γ dos teoremas 2.3.2 e 2.3.6. ■

Corolário 2.3.8. $\pi_1(C_n(M), [x^0])/p_*(\pi_1(F_n(M), x^0))$ é isomorfo a S_n , sendo p_* a induzida nos grupo fundamentais do recobrimento $p : F_n(M) \rightarrow C_n(M)$.

Prova: Sendo p recobrimento, então $\pi_1(F_n(M), x^0)$ é isomorfo a $p_*(\pi_1(F_n(M), x^0))$. Pelo teorema 2.3.6, $\pi_1(F_n(M), x^0)$ é isomorfo a $P_n(M)$. Como $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ é isomorfo a $B_n(M)$, segue do teorema 2.2.6 que $\pi_1(C_n(M), [x^0])/p_*(\pi_1(F_n(M), x^0))$ é isomorfo a S_n . ■

Observação 2.3.9. O grupo de 1-tranças de M é igual ao $\pi_1(M)$. Isto decorre diretamente do fato de $F_1(M) = M$.

Em todo restante desta dissertação não faremos distinção entre os grupos $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ e $B_n(M)$, que serão chamados de grupos de n -tranças de M ou grupo de tranças com n cordas de M . Da mesma maneira, não faremos distinção entre os grupos $\pi_1(F_n(M), x^0)$ e $P_n(M)$, que serão chamados de grupos de n -tranças puras de M ou grupo de tranças com n cordas de M .

Um elemento que representa a classe de equivalência de alguma trança, também será chamado *trança*, quando não houver perigo de confusão. Se β é uma trança, independente se estivermos olhando como elemento de $\pi_1(C_n(M), [x^0])$ ou $B_n(M)$, então a permutação de β será denotada por $\alpha(\beta)$ em todo restante desta dissertação.

A vantagem de se olhar uma trança como elemento de $B_n(M)$ é a intuição geométrica a qual não se tem muito em $\pi_1(C_n(M), [x^0])$. Entretanto, olhando uma trança como elemento deste último grupo, temos todas as boas propriedades da teoria de grupo fundamental e recobrimento a disposição.

Grupos de Tranças do Plano

3.1 Introdução

No capítulo anterior fizemos um estudo dos grupos de tranças de uma superfície topológica conexa e sem bordo. Neste capítulo, vamos particularizar esta discussão para o caso clássico $\mathbb{R}^2$, que é de grande importância, pelo fato que $B_n(\mathbb{R}^2)$ pode ser considerado de maneira natural como subgrupo de $B_n(M)$ para uma quantidade grande de superfícies. Este fato será formalizado na última seção.

Apresentações de $B_n(\mathbb{R}^2)$ e $P_n(\mathbb{R}^2)$ serão dadas nas seções 1 e 2, respectivamente. Não faremos a demonstração destas apresentações, apenas algumas justificativas geométricas. Estas demonstrações estão feitas em detalhes em [6], [7] e [8].

3.2 Apresentação de $B_n(\mathbb{R}^2)$

Seja $n \geq 2$ e consideremos o conjunto de pontos $\{(1, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Fixemos $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e consideremos os caminhos $a_i, a_{i+1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por:

$$a_i(t) = (i + t, -\sin(\pi t)) \text{ e } a_{i+1}(t) = (i + 1 - t, \sin(\pi t))$$

Na figura 3.1 as linhas vermelha e verde representam, respectivamente, as imagens dos caminhos a_i e a_{i+1} .

Figura 3.1: imagem dos caminhos a_i e a_{i+1}

Figura 3.2: trança σ_i

Agora, para cada $j = 1, \dots, n$, seja $b_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ o caminho definido por:

$$b_j(t) = \begin{cases} (a_i(t), t), & \text{se } j = i; \\ (a_{i+1}(t), t), & \text{se } j = i + 1; \\ ((j, 0), t), & \text{se } j \neq i, i + 1. \end{cases}$$

A i -ésima trança de Artin, denotada por σ_i , é a trança $(b_i, \dots, b_n)$.

Na figura 3.2, temos um esquema da trança σ_i , sendo que as linhas vermelha e verde representam, respectivamente, a i -ésima e a $(i + 1)$ -ésima corda.

A importância das tranças de Artin é que elas geram $B_n(\mathbb{R}^2)$.

Figura 3.3: relação (i)

Figura 3.4: relação (ii)

Os esquemas das figuras 3.3 e 3.4 mostram que as tranças de Artin estão sujeitas as seguintes relações:

- (i) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, sempre que $|i - j| \geq 2$;
- (ii) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Estas relações são chamadas de relações de Artin e definem um completo sistema de relações para $B_n(\mathbb{R}^2)$, isto é, todas as outras relações provêm destas.

Temos então o:

Teorema 3.2.1. $B_n(\mathbb{R}^2)$ admite a seguinte apresentação:

Geradores: $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$

Relações: (i) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, sempre que $|i - j| \geq 2$;

(ii) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

3.3 Apresentação de $P_n(\mathbb{R}^2)$

Seja $n \geq 2$. Consideremos em $P_n(\mathbb{R}^2)$, para $1 \leq i < j \leq n$, as seguintes tranças:

$$a_{i,j} := \sigma_i^{-1} \dots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^2 \sigma_{j-1} \dots \sigma_i.$$

As figuras 3.5 e 3.6 mostram, respectivamente, os esquemas das tranças $a_{i,j}$ e $a_{i,j}^{-1}$, sendo que as linhas verde e vermelha representam a j -ésima e a i -ésima corda.

A importância das tranças $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ é que elas geram $P_n(\mathbb{R}^2)$.

Seja b uma n -trança pura. Vamos dar uma ideia geométrica de como b se escreve como produto das tranças $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ e suas inversas.

Troquemos a primeira corda de b por um segmento vertical, sem “enlaçamentos” com as demais cordas e chamemos de c_1 a nova trança. Seja $a_1 = b c_1^{-1} \Rightarrow b = a_1 c_1$. Por construção, se retirarmos a primeira corda de a_1 , podemos identificar as demais cordas com a $(n - 1)$ -trança trivial.

Agora, troquemos a segunda corda de c_1 por um segmento vertical, sem “enlaçamentos” com as demais cordas e chamemos de c_2 a nova trança. Seja $a_2 = c_1 c_2^{-1} \Rightarrow c_1 = a_2 c_2 \Rightarrow b = a_1 a_2 c_2$. Por construção, se retirarmos as duas primeiras cordas de a_2 , podemos identificar as demais cordas com a $(n - 2)$ -trança trivial. Continuando este processo, obtemos que $b = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$, sendo que cada trança pura a_i é tal que se

Figura 3.5: $a_{i,j}$

Figura 3.6: $a_{i,j}^{-1}$

Figura 3.7: b Figura 3.8: c_1 Figura 3.9: a_1 Figura 3.10: b
penteadada

retirarmos as i primeiras cordas, podemos identificar as demais cordas com a $(n - i)$ -trança trivial. As tranças do tipo a_i são chamadas tranças penteadas e a decomposição que obtivemos de b é chamada um penteamento da trança.

Nas figuras 3.7, 3.8, 3.9 e 3.10 exemplificamos este processo, sendo b um 4-trança.

A figura 3.11 nos dá uma ideia de como cada trança penteadada pode ser escrita como produto das tranças $\{a_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ e suas inversas.

Figura 3.11: trança penteadada como produto de $a_{i,j}$

As figuras 3.12, 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16 nos mostram que valem as seguintes relações em $P_n(\mathbb{R}^2)$ (o símbolo $\rightleftharpoons$ significa que os elementos comutam):

- (a) $a_{r,s} \rightleftharpoons a_{i,j}$, se $r < s < i < j$;
- (b) $a_{r,s} \rightleftharpoons a_{i,j}$, se $i < r < s < j$;
- (c) $a_{r,s}a_{r,j}a_{r,s}^{-1} = a_{s,j}^{-1}a_{r,j}a_{s,j}$, se $r < s < j$;
- (d) $a_{r,s}a_{s,j}a_{r,s}^{-1} = a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}$, se $r < s < j$;
- (e) $a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j} \rightleftharpoons a_{r,i}$, se $r < s < i < j$.

Estas relações definem um sistema completo de relações para $P_n(\mathbb{R}^2)$, isto é, todas as outras relações são provenientes destas. Mostremos que a relação (e) é equivalente a relação (e') $a_{r,i}a_{s,j}a_{r,i}^{-1} = a_{i,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}^{-1}a_{r,j}a_{i,j}$, se $r < s < i < j$. De fato,

Figura 3.12: relação (a)

Figura 3.13: relação (b)

Figura 3.14: relação (c)

Figura 3.15: relação (d)

Figura 3.16: relação (e)

$$\begin{aligned}
(e) &\Leftrightarrow a_{r,i}a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j} = a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j}a_{r,i} \\
&\Updownarrow \\
&a_{r,i}a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j}a_{r,i}^{-1} = a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j} \\
&\Updownarrow \\
&(a_{r,i}a_{i,j}^{-1}a_{r,i}^{-1})a_{r,i}a_{s,j}a_{r,i}^{-1}(a_{r,i}a_{i,j}a_{r,i}^{-1}) = a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j} \\
&\Updownarrow \\
&a_{r,i}a_{s,j}a_{r,i}^{-1} = (a_{r,i}a_{i,j}a_{r,i}^{-1})a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j}(a_{r,i}a_{i,j}^{-1}a_{r,i}^{-1}) \\
&\Updownarrow (d) \\
a_{r,i}a_{s,j}a_{r,i}^{-1} &= (a_{i,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}a_{r,j}a_{i,j})a_{i,j}^{-1}a_{s,j}a_{i,j}(a_{i,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}a_{r,j}a_{i,j}) \Leftrightarrow (e').
\end{aligned}$$

Renomeando os índices, podemos resumir estas relações de acordo com o

Teorema 3.3.1. $P_n(\mathbb{R}^2)$ admite a seguinte apresentação:

Geradores: $a_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$

Relações:

$$a_{r,s}a_{i,j}a_{r,s}^{-1} = \begin{cases} a_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j \text{ ou } r < s < i < j \\ a_{i,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}a_{r,j}a_{i,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ a_{s,j}^{-1}a_{i,j}a_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}a_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j \end{cases}$$

3.4 $B_n(\mathbb{R}^2)$ como subgrupo de $B_n(M)$

Em toda esta seção, M denotará um superfície topológica conexa, compacta e sem bordo.

Seja $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ um mergulho topológico. Então, e induz um mergulho $\bar{e} : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow M \times [0, 1]$, dado por $\bar{e}(x, t) = (e(x), t)$. Este mergulho por sua vez, induz um homomorfismo $\tilde{e}_n : B_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_n(M)$, dado por

$$\tilde{e}_n(b = (b_1, \dots, b_n)) = (\bar{e} \circ b_1, \dots, \bar{e} \circ b_n)$$

O principal resultado desta seção é mostrar que $\tilde{e}_n$ é injetora se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$.

Em todo o restante desta dissertação, $\tilde{e}_n$ denotará este homomorfismo.

Vamos redefinir o homomorfismo $\tilde{e}_n$ em termos de Espaços de Configuração e fixar algumas notações para demonstrar o resultado.

Novamente, sendo M um superfície topológica, fixemos um mergulho topológico $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$.

Seja $Q_m = \{q_1, \dots, q_m\} \subset e(\mathbb{R}^2)$ um conjunto de m pontos distintos de M . Consideremos $F_{m,n}(M) = F_n(M - Q_m)$ e $F_{m,n}(\mathbb{R}^2) = F_n(\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_m))$.

É fácil ver que a aplicação

$$e_{m,n} : F_{m,n}(\mathbb{R}^2) \rightarrow F_{m,n}(M)$$

definida por

$$e_{m,n}(x_1, \dots, x_n) = (e(x_1), \dots, e(x_n))$$

é um mergulho topológico.

Quando $m = 0$, $e_{m,n} = e_{0,n}$ induz um bem definido mergulho topológico $e_n : C_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_n(M)$, dado por $e_n([(x_1, \dots, x_n)]) = [e_{0,n}(x_1, \dots, x_n)]$, que torna comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{e_{0,n}} & F_n(M) \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ C_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{e_n} & C_n(M) \end{array}$$

sendo p_1 e p_2 as projeções naturais.

A induzida em nível de π_1 de e_n é o homomorfismo $\tilde{e}_n : B_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_n(M)$ e o resultado principal desta seção é o

Teorema 3.4.1. *Se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então $\tilde{e}_n$ é injetora para todo n .*

Aplicando o funtor π_1 no diagrama anterior, e lembrando que $P_n(M) = \pi_1(F_n(M))$ e $B_n(M) = \pi_1(C_n(M))$, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{e_{0,n}^*} & P_n(M) \\ \downarrow p_1^* & & \downarrow p_2^* \\ B_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\tilde{e}_n} & B_n(M) \end{array}$$

Notemos que se $\beta \in B_n(\mathbb{R}^2)$, então $\alpha(\beta) = \alpha(\tilde{e}_n(\beta))$, pela própria definição de $\tilde{e}_n$. Logo, se $\beta \notin P_n(\mathbb{R}^2)$, então $\alpha(\tilde{e}_n(\beta))$ não é a permutação trivial. Notemos ainda que $\tilde{e}_n$ restrita a $P_n(\mathbb{R}^2)$ pode ser considerada como $e_{0,n}^*$ pelo que já foi discutido no capítulo 2. Logo, temos o

Teorema 3.4.2. *$\tilde{e}_n : B_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow B_n(M)$ é injetor se, e somente se, $e_{0,n}^* : P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_n(M)$ é injetor.*

Portanto, para provar o teorema 3.4.1, basta que provemos o

Teorema 3.4.3. *Se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então $e_{0,n}^* : P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_n(M)$ é injetor para todo n .*

Antes de iniciarmos a demonstração, vamos provar alguns resultados.

Lema 3.4.4. *Se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então $\pi_2(M - Q_m) = \pi_3(M - Q_m) = 1$ para todo $m \geq 0$.*

Prova: Se $m = 0$, então $M - Q_m = M$. Como $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então o recobrimento universal de M é o $\mathbb{R}^2$, o qual é contrátil. Como uma aplicação de recobrimento induz um isomorfismo nos grupos de homotopia de dimensão maior ou igual que 2, segue que $\pi_3(M) = \pi_2(M) = 1$. Se $m \neq 0$, pelo teorema de classificação de superfícies, $M - Q_m$ é homeomorfo a um polígono do plano menos uma quantidade m de pontos de seu interior, passado a quociente onde os vértices estão todos identificados e as arestas estão identificadas aos pares de modo conveniente. Agora, todo espaço desta forma tem o mesmo tipo de homotopia que um grafo. A figura 3.17 dá uma ideia deste fato quando M é a superfície orientável de gênero 2 (bitoro) e claramente este argumento se generaliza para as outras superfícies. O resultado segue agora do fato que

Figura 3.17: deformação de $M - Q_m$ num grafo

o recobrimento universal de um grafo é uma árvore, que é sempre contrátil e novamente, um recobrimento induz isomorfismo nos grupos de homotopia de dimensão maior ou igual que 2. ■

Lema 3.4.5. *Se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então $\pi_2(F_n(M)) = 1$ para todo $n \geq 1$.*

Prova: Se $n = 1$, o resultado segue direto do lema 3.4.4 e do fato que $F_1(M) = M$. Suponhamos então $n > 1$. Consideremos a fibração $\pi : F_{m,n}(M) \rightarrow F_{m,1}(M) = M - Q_m$, definida no teorema de Fadell e Neuwirth (teo 1.2.2), cuja fibra típica é $F_{m+1,n-1}(M)$. A sequência exata de homotopia associada a π é

$$\dots \quad \pi_3(M - Q_m) \longrightarrow \pi_2(F_{m+1,n-1}(M)) \longrightarrow \pi_2(F_{m,n}(M)) \longrightarrow \pi_2(M - Q_m) \longrightarrow \dots$$

Pelo lema 3.4.4, segue que $\pi_2(F_{m+1,n-1}(M)) \approx \pi_2(F_{m,n}(M))$. (*)

Novamente, pelo lema 3.4.4 temos que

$$1 = \pi_2(M - Q_{n-1}) = \pi_2(F_{n-1,1}(M)) \overset{*}{\approx} \pi_2(F_{n-2,2}(M)) \overset{*}{\approx} \dots \overset{*}{\approx} \pi_2(F_{0,n}(M)) = \pi_2(F_n(M))$$

Segue o resultado. ■

Observação 3.4.6. O lema 3.4.4 também vale para o caso da superfície M ser o $\mathbb{R}^2$. De fato, para $m = 0$ é óbvio e $\mathbb{R}^2$ menos uma quantidade finita de pontos tem o mesmo tipo de homotopia que a figura oito generalizada, que é um grafo. Veja a figura 3.18. O restante da argumentação é idêntica ao do lema 3.4.4. Assim, a mesma argumentação do lema 3.4.5 vale para $\mathbb{R}^2$ e portanto $\pi_2(F_n(\mathbb{R}^2)) = 1$ para todo $n \geq 1$.

Figura 3.18: $\mathbb{R}^2$ menos uma quantidade finita de pontos deformando na figura oito generalizada

Lema 3.4.7. Se $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, então $e_{m,1}^* : \pi_1(\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_m)) \rightarrow \pi_1(M - Q_m)$ é injetora para todo $m \geq 0$, sendo $e_{m,1}^*$ a induzida do mergulho $e_{m,1}$.

Figura 3.19: Aberto
 U

Figura 3.20: Aberto
 V

Figura 3.21: gerador
de $\pi_1(U \cap V)$

Prova: Se $m = 0$, então a afirmação é verdadeira, pois $Q_m = \emptyset$ e $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 1$. Suponhamos então $m > 0$. Pelo teorema de classificação de superfícies, consideremos $M -$

Q_m o espaço quociente de um polígono menos uma quantidade m de pontos do interior deste polígono, segundo o qual os lados que constituem o bordo estão identificados dois a dois e todos os vértices estão identificados em um único ponto. Consideremos em $M - Q_m$ os abertos U e V , conforme as figuras 3.19 e 3.20 respectivamente. Notemos que o aberto V tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de S^1 . A figura 3.22 nos dá uma ideia deste fato quando M é o bitoro, mas é fácil ver que este argumento vale para todas as superfícies. Logo, $\pi_1(V)$ é livre de rank finito, digamos k (este k depende do gênero da superfície e se ela é orientável ou não). Denotemos por $y_1, \dots, y_k$ os geradores deste grupo. Agora notemos que $\pi_1(U)$ é livre de rank m e que os geradores são loops que circulam cada ponto retirado de M , digamos $x_1, \dots, x_m$. Na figura 3.21 está representado um gerador de $\pi_1(U \cap V)$ (é fácil ver que $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia que S^1). Como $M \neq \mathbb{S}^2, \mathbb{RP}^2$, a inclusão deste gerador em $\pi_1(V)$ é um elemento não nulo, ou seja, é uma palavra não nula em termos dos geradores $y_1, \dots, y_k$, digamos y . Já a inclusão em $\pi_1(U)$ é igual ao produto dos geradores numa certa ordem e sem perda de generalidade, podemos supor que seja $x_1 \dots x_m$. Logo, pelo teorema de Van Kampen, $\pi_1(M - Q_m) = \langle y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_m \mid y = x_1 \dots x_m \rangle$. Sejam $x'_1, \dots, x'_m$ os geradores do grupo livre $\pi_1(\mathbb{R}^2 - Q_m)$. Pela definição do mergulho $e_{m,1}$, sem perda de generalidade, podemos supor que $e_{m,1}^*(x'_i) = x_i$, para todo $i = 1, \dots, m$. Logo, para mostrarmos que $e_{m,1}^*$ é injetora, basta mostrarmos que o subgrupo de $\pi_1(M - Q_m)$ gerado por $x_1, \dots, x_m$ é livre de rank m . Ora, mas se este subgrupo não fosse livre, então existiria uma relação não trivial envolvendo apenas os geradores $x_1, \dots, x_m$ de $\pi_1(M - Q_m)$, mas não existe de acordo com a apresentação que obtivemos, e assim, concluimos que $e_{m,1}^*$ é injetora. ■

Figura 3.22:
bitoro
deformando no
bouquet de S^1

Provados estes lemas, vamos a

Prova:[teorema 3.4.3] Seja $n \geq 1$ e sejam $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n+1}^0) \in F_{0,n+1}(\mathbb{R}^2)$, $x' = (x_2^0, \dots, x_{n+1}^0)$ e $Q_n = \{e(x_2^0), \dots, e(x_{n+1}^0)\}$. Notemos que é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 (\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_n), x_1^0) & \xrightarrow{i_1} & (F_{0,n+1}(\mathbb{R}^2), x) & \xrightarrow{\pi} & (F_{0,n}(\mathbb{R}^2), x') \\
 \downarrow e_{n,1} & & \downarrow e_{0,n+1} & & \downarrow e_{0,n} \\
 (M - Q_n, e_{n,1}(x_1^0)) & \xrightarrow{i_2} & (F_{0,n+1}(M), e_{0,n+1}(x)) & \xrightarrow{\pi'} & (F_{0,n}(M), e_{0,n}(x'))
 \end{array}$$

sendo $i_1 : \mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_n) \rightarrow F_{0,n+1}(\mathbb{R}^2)$ e $i_2 : M - Q_n \rightarrow F_{0,n+1}(M)$ definidas por

$$i_1(a) = (a, x_2^0, \dots, x_{n+1}^0) \text{ e } i_2(b) = (b, e(x_2^0), \dots, e(x_{n+1}^0))$$

e as funções π e π' são fibrações definidas no teorema 1.2.2 (Fadell e Neuwirth). Passando o funtor π_1 neste diagrama e colocando os grupos triviais nas pontas, temos o seguinte diagrama comutativo (omitimos os pontos base):

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_n)) & \xrightarrow{i_1^*} & \pi_1(F_{0,n+1}(\mathbb{R}^2)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow e_{n,1}^* & & \downarrow e_{0,n+1}^* & & \downarrow e_{0,n}^* & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \pi_1(M - Q_n) & \xrightarrow{i_2^*} & \pi_1(F_{0,n+1}(M)) & \xrightarrow{\pi'_*} & \pi_1(F_{0,n}(M)) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Como $M - Q_n$ e $\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_n)$ são conexos por caminhos, então $\pi_0(M - Q_n) = \pi_0(\mathbb{R}^2 - e^{-1}(Q_n)) = 1$. Pelo lema 3.4.5 e pela observação 3.4.6, $\pi_2(F_{0,n}(M)) = \pi_2(\mathbb{R}^2) = 1$. Portanto, as sequências horizontais do diagrama acima são parte das sequências exatas de homotopia associada as fibrações π e π' . Pelo lema 3.4.7, $e_{n,1}^*$ é injetora. Usando indução em n e o lema dos cinco o teorema estará provado se $e_{0,1}^* : \pi_1(\mathbb{R}^2) \rightarrow \pi_1(M)$ for injetora. Mas isto segue diretamente do fato que $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 1$. ■

Figura 3.23: 3-trança b

Observemos que no caso $n = 1$, $\tilde{e}_1$ é injetora mesmo quando M é igual a $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{RP}^2$, pois $C_1(\mathbb{R}^2) = F_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ e $\pi_1(\mathbb{R}^2) = 1$. No caso de $n > 1$, os argumentos não valem para estes casos, pois usamos o lema 3.4.4 para provar o teorema 3.4.3 e $\pi_2(\mathbb{S}^2)$ e $\pi_2(\mathbb{RP}^2)$ são isomorfos ao grupo cíclico de ordem infinita. O lema 3.4.4 é um resultado fundamental para provar o teorema 3.4.3, pois vale uma recíproca quando $n > 1$. Para provar este fato, basta exibirmos elementos de $P_n(\mathbb{R}^2)$ não nulos, cuja imagem por $\tilde{e}_n$ em $P_n(\mathbb{S}^2)$ e $P_n(\mathbb{RP}^2)$ sejam nulos. Consideremos em $P_n(\mathbb{R}^2)$ a trança $b = \sigma_1^{-1} \dots \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2}^{-1} \dots \sigma_1^{-1}$. A

figura 3.23 mostra um esquema desta trança quando $n = 3$ e para os outros casos, basta retirarmos ou colocarmos mais segmentos verticais entre a primeira e última corda. Claramente, esta trança não se deforma na trança trivial. Entretanto, esta trança, considerada com elemento de $P_n(\mathbb{S}^2)$ via o homomorfismo $\tilde{e}_n$ se deforma na trança trivial. A figura 3.24 mostra esta deformação quando $n = 3$, e novamente, o argumento se generaliza para os outros casos, colocando ou retirando segmentos verticais entre a primeira e a última corda. O caso do $\mathbb{RP}^2$ é um pouco mais sutil. Em [9], é exibido um elemento não trivial de $P_n(\mathbb{R}^2)$, que se deforma na identidade quando considerado em $P_n(\mathbb{RP}^2)$.

Figura 3.24: deformação de 3-trança de $\mathbb{S}^2$ na identidade

Grupos de Tranças do Plano Projetivo

4.1 Introdução

Em todo este capítulo, vamos considerar $\mathbb{RP}^2$ como o disco fechado unitário centrado na origem de $\mathbb{R}^2$, passado a quociente pela relação de equivalência que identifica pontos antípodas do bordo, salvo quando for explicitado outra descrição.

Figura 4.1: imagem
do caminho $\overline{\rho_i}$

Figura 4.2:
trança ρ_i

Figura 4.3:
trança ρ_i^{-1}

Sejam $\{(1, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$, $c = (\frac{n+1}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ e B o disco aberto de centro c e raio $\frac{n+1}{2}$ (o qual contém os pontos $(1, 0), \dots, (n, 0)$). Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow B$ um mergulho

simples e $g : B \rightarrow \mathbb{RP}^2$ o mergulho que aplica B no disco aberto unitário contido em $\mathbb{RP}^2$. Definimos o mergulho $e : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, por $e(x) = g \circ f(x)$.

Chamaremos as imagens das tranças de Artin pelo homomorfismo $\tilde{e}_n$ também de tranças de Artin, e também as denotaremos por σ_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Diferente de $B_n(\mathbb{R}^2)$, as tranças de Artin não geram todo $B_n(\mathbb{RP}^2)$.

Fixemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Seja $p_i = e(i, 0)$ e $\bar{\rho}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^2$ um caminho injetor como na figura 4.1 (na figura, $n = 5$ e $i = 2$).

Definimos $\rho_i = (b_1, \dots, b_n) \in B_n(\mathbb{RP}^2)$ a trança tal que $b_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{RP}^2 \times [0, 1]$ são os caminhos definidos por

$$b_j(t) = (e(j, 0), t), j \neq i \quad b_i(t) = (\bar{\rho}_i(t), t)$$

Na figuras 4.2 e 4.3, estão representados esquemas das tranças ρ_i e ρ_i^{-1} , onde $n = 5$ e $i = 2$, sendo que a linha vermelha representa a i -ésima corda e as linhas azuis representam as demais cordas.

As figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 mostram que além de valer as relações de Artin

- (i) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, se $|i - j| \geq 2$, e
- (ii) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

as tranças ρ_i , $i = 1, \dots, n$, juntas com as tranças de Artin, estão sujeitas as seguintes relações:

- (iii) $\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i$ ($j \neq i, i+1$);
- (iv) $\rho_i = \sigma_i \rho_{i+1} \sigma_i$;
- (v) $\rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_i^2$;
- (vi) $\rho_1^2 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que as tranças ρ_i , $i = 1, \dots, n$, juntos com as tranças de Artin, geram $B_n(\mathbb{RP}^2)$ e que as relações (i), (ii), (iii), (iv), (v) e (vi) formam um sistema completo de relações.

Consideremos $G_n(\mathbb{RP}^2)$ o grupo cuja apresentação é a apresentação que queremos obter para $B_n(\mathbb{RP}^2)$. Na seção 4.2, vamos definir e extrair propriedades deste grupo, chamado grupo de tranças algébrico do plano projetivo.

Na seção 4.3, vamos extrair várias propriedades de $B_n(\mathbb{RP}^2)$.

Na seção 4.4, usando as informações das seções 4.2 e 4.4, mostraremos que $G_n(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo a $B_n(\mathbb{RP}^2)$ através de um homomorfismo natural.

4.2 Propriedades de $G_n(\mathbb{RP}^2)$

Definição 4.2.1. *O n -ésimo grupo algébrico de tranças do plano projetivo, denotado por $G_n(\mathbb{RP}^2)$, é o grupo que tem a seguinte apresentação:*

Figura 4.4: relação (iii)

Figura 4.5: relação (iv)

Figura 4.6: relação (v)

Figura 4.7: relação (vi)

Geradores: $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}, \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$.

Relações: (i) $\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i$, se $|i - j| \geq 2$;

(ii) $\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1}$;

(iii) $\tilde{\sigma}_i \tilde{\rho}_j = \tilde{\rho}_j \tilde{\sigma}_i$, se $j \neq i, i + 1$;

(iv) $\tilde{\rho}_i = \tilde{\sigma}_i \tilde{\rho}_{i+1} \tilde{\sigma}_i$;

(v) $\tilde{\rho}_{i+1}^{-1} \tilde{\rho}_i^{-1} \tilde{\rho}_{i+1} \tilde{\rho}_i = \tilde{\sigma}_i^2$;

(vi) $\tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{n-2} \tilde{\sigma}_{n-1}^2 \tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_1$.

Seja $\gamma : G_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow S_n$ o homomorfismo que mapeia $\tilde{\sigma}_i$ na transposição $(i, i + 1)$, $i = 1, \dots, n - 1$, e mapeia $\tilde{\rho}_j$ na permutação identidade, $j = 1, \dots, n$, e estendido por linearidade. Cálculos simples mostram que γ está bem definida, isto é, que γ manda cada relação de $G_n(\mathbb{RP}^2)$ na permutação trivial. O homomorfismo γ é chamado *homomorfismo permutação de $G_n(\mathbb{RP}^2)$* .

Consideremos $K_n(\mathbb{RP}^2)$ o núcleo do homomorfismo γ e $D_n(\mathbb{RP}^2) = \{t \in G_n(\mathbb{RP}^2) \mid \gamma(t)(1) = 1\}$, ou seja, $D_n(\mathbb{RP}^2)$ é o subgrupo de $G_n(\mathbb{RP}^2)$ cujos elementos são mapeados por γ nas permutações que deixam o número 1 fixo.

Teorema 4.2.2. *Sejam $t_1, t_2 \in G_n(\mathbb{RP}^2)$. Então t_1 e t_2 pertencem a mesma classe lateral a esquerda de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ se, e somente se, $[\gamma(t_1)]^{-1}(1) = [\gamma(t_2)]^{-1}(1)$.*

Prova: Sejam $t_1, t_2 \in G_n(\mathbb{RP}^2)$. Suponhamos que $t_1 D_n(\mathbb{RP}^2) = t_2 D_n(\mathbb{RP}^2)$. Então, existe $t \in D_n(\mathbb{RP}^2)$, tal que $t_1 = t_2 t$. Aplicando o homomorfismo γ nos dois lados da igualdade temos $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \gamma(t) := \gamma(t) \circ \gamma(t_2) \Rightarrow [\gamma(t_2)]^{-1} = [\gamma(t_1)]^{-1} \circ \gamma(t)$. Como $t \in D_n(\mathbb{RP}^2)$, então $\gamma(t)(1) = 1$ e portanto $[\gamma(t_2)]^{-1}(1) = [\gamma(t_1)]^{-1}(1)$. Reciprocamente, suponhamos que $[\gamma(t_2)]^{-1}(1) = [\gamma(t_1)]^{-1}(1) \iff \gamma(t_2) \circ [\gamma(t_1)]^{-1}(1) = 1$. Como γ é homomorfismo, então $\gamma(t_1^{-1} t_2) = [\gamma(t_1)]^{-1} \gamma(t_2) := \gamma(t_2) \circ [\gamma(t_1)]^{-1}$. Logo $\gamma(t_1^{-1} t_2)(1) = \gamma(t_2) \circ [\gamma(t_1)]^{-1}(1) = 1$ e portanto $t_1^{-1} t_2 \in D_n(\mathbb{RP}^2) \Rightarrow t_1 D_n(\mathbb{RP}^2) = t_2 D_n(\mathbb{RP}^2)$. ■

Corolário 4.2.3. *O índice de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ em $G_n(\mathbb{RP}^2)$ é n .*

Os elementos $M_0 = 1$ e $M_i = \tilde{\sigma}_i \dots \tilde{\sigma}_1$, $i = 1, \dots, n - 1$, formam um sistema de representantes das classes laterais a esquerda de $D_n(\mathbb{RP}^2)$. De fato, $\gamma(M_0)(1) = 1$ e $\gamma(M_i)(i + 1) = (i, i + 1) \dots (1, 2)(i + 1) = 1 \Rightarrow [\gamma(M_i)]^{-1}(1) = i + 1$. Como i varia de 1 até $n - 1$, o conjunto $M := \{M_0, M_1, \dots, M_{n-1}\}$ tem n elementos e pelo teorema 4.2.2, dois elementos distintos de M não pertencem a mesma classe lateral a esquerda de $D_n(\mathbb{RP}^2)$. Notemos que M é um conjunto de Schreier de $D_n(\mathbb{RP}^2)$. Podemos então aplicar o Método de Reidemeister-Schreier para obter o

Teorema 4.2.4. *$D_n(\mathbb{RP}^2)$ é gerado por $\tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}, \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$, sendo $\tilde{a}_i = \tilde{\sigma}_1^{-1} \dots \tilde{\sigma}_{i-2}^{-1} \tilde{\sigma}_{i-1}^2 \tilde{\sigma}_{i-2} \dots \tilde{\sigma}_1$, com as seguintes relações:*

- (1) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_j, |j - k| \geq 2$
- (2) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_{j+1}$
- (3) $\tilde{\sigma}_j \tilde{a}_k \tilde{\sigma}_j^{-1} = \tilde{a}_k, (k \neq j, j+1)$
- (4) $\tilde{\sigma}_j \tilde{a}_j \tilde{\sigma}_j^{-1} = \tilde{a}_{j+1}$
- (5) $\tilde{\sigma}_j \tilde{a}_{j+1} \tilde{\sigma}_j^{-1} = \tilde{a}_{j+1}^{-1} \tilde{a}_j \tilde{a}_{j+1}$
- (6) $\tilde{\rho}_1^2 = \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_n$
- (7) $\tilde{\rho}_2 \tilde{a}_2 \tilde{\rho}_2 = \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_{n-2} \tilde{\sigma}_{n-1}^2 \tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_2$
- (8) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{\sigma}_j = \tilde{\rho}_j$
- (9) $\tilde{\rho}_j \tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k \tilde{\rho}_j, j \neq k, k+1$
- (10) $\tilde{\rho}_j \tilde{a}_k = \tilde{a}_k \tilde{\rho}_j, j > k$
- (11) $\tilde{\rho}_j^{-1} \tilde{a}_k \tilde{\rho}_j = \tilde{a}_j \tilde{a}_k \tilde{a}_j^{-1}, 1 < j < k$
- (12) $\tilde{\rho}_{j+1}^{-1} \tilde{\rho}_j^{-1} \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{\rho}_j = \tilde{\sigma}_j^2, j > 1$
- (13) $\tilde{\rho}_j^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_j = \tilde{\rho}_1 \tilde{a}_j^{-1}, j > 1$
- (14) $\tilde{\rho}_j \tilde{a}_j \tilde{\rho}_j^{-1} = \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_{j-1} \tilde{a}_j^{-1} \tilde{a}_{j-1}^{-1} \dots \tilde{a}_2^{-1} \tilde{\rho}_1$

Omitimos a prova do teorema 4.2.4, por se tratar de aplicação direta do Método de Reidemeister-Schreier e por conter apenas extensos cálculos.

Seja $A_n(\mathbb{RP}^2)$ o subgrupo de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ gerado por $\tilde{\rho}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n$.

Teorema 4.2.5. $A_n(\mathbb{RP}^2)$ é um subgrupo normal de $D_n(\mathbb{RP}^2)$.

Prova: Os únicos geradores de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ que não são geradores de $A_n(\mathbb{RP}^2)$ são $\tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}, \tilde{\rho}_2, \dots, \tilde{\rho}_n$. Portanto, para demonstrarmos o teorema, basta mostrarmos que os geradores de $A_n(\mathbb{RP}^2)$ conjugados por esses elementos pertencem a $A_n(\mathbb{RP}^2)$. Mas esses cálculos seguem diretamente das relações que obtivemos para $D_n(\mathbb{RP}^2)$ e por isso os omitimos. ■

Teorema 4.2.6. Se $n > 1$, então $D_n(\mathbb{RP}^2) / A_n(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo a $G_{n-1}(\mathbb{RP}^2)$.

Prova: Uma apresentação de $D_n(\mathbb{RP}^2) / A_n(\mathbb{RP}^2)$ é obtida da apresentação de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ adicionando as relações $\tilde{\rho}_1 = 1, \tilde{a}_2 = 1, \tilde{a}_3 = 1, \dots, \tilde{a}_n = 1$. A adição destas relações transforma as relações (3), (4), (5), (6), (10), (11), (13), (14) em relações triviais e altera a relação (7) para $\tilde{\rho}_2^2 = \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_{n-2} \tilde{\sigma}_{n-1}^2 \tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_2$. Portanto, $D_n(\mathbb{RP}^2) / A_n(\mathbb{RP}^2)$ é gerado por $\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}, \tilde{\rho}_2, \dots, \tilde{\rho}_n$ sujeito as seguintes relações:

- (1) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k \tilde{\sigma}_j, |j - k| \geq 2$
- (2) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_{j+1} \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_{j+1}$
- (9) $\tilde{\rho}_j \tilde{\sigma}_k = \tilde{\sigma}_k \tilde{\rho}_j, j \neq k, k+1$
- (8) $\tilde{\sigma}_j \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{\sigma}_j = \tilde{\rho}_j$

$$(12) \tilde{\rho}_{j+1}^{-1} \tilde{\rho}_j^{-1} \tilde{\rho}_{j+1} \tilde{\rho}_j = \tilde{\sigma}_j^2, j > 1$$

$$(7) \tilde{\rho}_2^2 = \tilde{\sigma}_2 \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_{n-2} \tilde{\sigma}_{n-1}^2 \tilde{\sigma}_{n-2} \dots \tilde{\sigma}_3 \tilde{\sigma}_2.$$

A menos de renomeação de índices, esta é a apresentação de $G_{n-1}(\mathbb{RP}^2)$. ■

Pelo resultado anterior, vamos considerar $G_{n-1}(\mathbb{RP}^2) = D_n(\mathbb{RP}^2)/A_n(\mathbb{RP}^2)$.

Teorema 4.2.7. *Sejam $n > 1$, $i : A_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow D_n(\mathbb{RP}^2)$ a inclusão e $j : D_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow G_{n-1}(\mathbb{RP}^2)$ a projeção natural. Então a sequência exata*

$$1 \longrightarrow A_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i} D_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{j} G_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1,$$

induz uma sequência exata

$$1 \longrightarrow A_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i} K_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{j} K_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1,$$

chamada sequência exata fundamental de $G_n(\mathbb{RP}^2)$.

Prova: Podemos identificar S_{n-1} como o subgrupo de S_n que deixa o número 1 fixo. Então, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & A_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{i} & D_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{j} & G_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1, \\ & & & & \searrow \gamma_1 & & \swarrow \gamma_2 \\ & & & & & S_{n-1} & \end{array}$$

sendo γ_1 a restrição do homomorfismo permutação $\gamma : G_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow S_n$ e γ_2 é o homomorfismo permutação de $G_{n-1}(\mathbb{RP}^2)$, a menos de renomeação dos índices. Claramente, a seguinte sequência é exata:

$$1 \longrightarrow A_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i} \ker \gamma_1 \xrightarrow{j} \ker \gamma_2 \longrightarrow 1$$

Mas $\ker \gamma_1 = K_n(\mathbb{RP}^2)$ e $\ker \gamma_2 \approx K_{n-1}(\mathbb{RP}^2)$. Segue o resultado. ■

Teorema 4.2.8. $G_2(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo ao grupo dicíclico de ordem 16.

Prova: Por definição, $G_2(\mathbb{RP}^2)$ é gerado por $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$ e $\tilde{\sigma}_1$, com as seguintes relações:

$$(iv) \tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_1 \quad (v) \tilde{\rho}_2^{-1} \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}_1^2 \quad (vi) \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2$$

Da relação (iv) segue que $\tilde{\rho}_2 = \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1}$ e vamos usar esta igualdade como definição de $\tilde{\rho}_2$. Logo, $G_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\sigma}_1 \mid \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2 \rangle$. Notemos que

$$(vi) \quad \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2 \iff \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1}. \quad (*)$$

Portanto, $\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} (\tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1) (\tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1) \stackrel{(*)}{=} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1} = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1})^4$. Assim, concluímos que $G_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\sigma}_1 \mid (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1})^4 = \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2 \rangle$, a qual é uma apresentação para Dic_{16} , conforme foi provado na seção 1.5. ■

Teorema 4.2.9. $K_2(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo ao grupo dos quatérnios.

Prova: Como S_2 tem ordem dois e pelo teorema 4.2.8 $G_2(\mathbb{RP}^2)$ tem ordem 16, então pelo teorema de Lagrange, $K_2(\mathbb{RP}^2)$ tem ordem 8. Agora, por definição, $\gamma : G_2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow S_2$, mapeia $\tilde{\sigma}_1$ na transposição $(1, 2)$ e mapeia os elementos $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ na permutação identidade. Se adicionarmos as relações $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = 1$ em $G_2(\mathbb{RP}^2)$, obteremos o grupo $\langle \tilde{\sigma}_1 \mid \tilde{\sigma}_1^2 = 1 \rangle$, que é uma apresentação de S_2 . Portanto, o grupo $K_2(\mathbb{RP}^2)$, que é o núcleo de γ , é consequência destas duas relações adicionais, isto é, $K_2(\mathbb{RP}^2)$ é o menor subgrupo normal de $G_2(\mathbb{RP}^2)$ que contém $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$. Mas o subgrupo gerado por $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ é normal em $G_2(\mathbb{RP}^2)$. Para vermos isto, basta mostrarmos que $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ conjugados por $\tilde{\sigma}_1$ pertencem ao subgrupo em questão. Mas isto é verdade, pois notemos que

$$(iv) \iff \sigma_1^{-1} \tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_1 \quad (**)$$

e portanto

$$\tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1 \stackrel{(**)}{=} \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_1^2 \stackrel{(vi)}{=} \tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1^2 \qquad \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_2 \tilde{\sigma}_1 \stackrel{(**)}{=} \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \stackrel{(vi)}{=} \tilde{\rho}_1$$

Vamos extrair algumas relações entre estes geradores. Pelo teorema 4.2.8, $\tilde{\sigma}_1^2 = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1})^4$. Usando (*) também do teorema 4.2.8, temos que $\tilde{\sigma}_1^2 = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1})^4 \stackrel{(*)}{=} (\tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1})^4 = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{\rho}_1^{-1})^{-4} = \tilde{\sigma}_1^{-2} \Rightarrow \tilde{\sigma}_1^4 = 1$. Por (vi), obtemos que $\tilde{\rho}_1^4 = 1 \iff \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\rho}_1^{-2}$. Agora, $\tilde{\rho}_2^2 \stackrel{(iv)}{=} (\tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\sigma}_1^{-1})^2 = \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-2} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1} \stackrel{(vi)}{=} \tilde{\sigma}_1^{-1} \tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_1^{-2} \tilde{\rho}_1 \tilde{\sigma}_1^{-1} = \tilde{\sigma}_1^{-2} \stackrel{(vi)}{=} \tilde{\rho}_1^{-2} = \tilde{\rho}_1^2$. Esta igualdade implica que

$$\tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2^{-1} \tilde{\rho}_1^{-1}. \quad (***)$$

Logo, $\tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2 \stackrel{(v)}{=} \tilde{\rho}_2^{-1} \tilde{\rho}_1^{-1} \tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1 \stackrel{(***)}{=} (\tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1)^2$. Portanto, fica claro que $(\tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1)^2 = \tilde{\rho}_2^2 = \tilde{\rho}_1^2$. Se $K_2(\mathbb{RP}^2)$ não fosse igual a $\langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2 \mid (\tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1)^2 = \tilde{\rho}_2^2 = \tilde{\rho}_1^2 \rangle$, que é uma apresentação para o grupo dos quatérnios de acordo com a seção 1.5, então existiria pelo menos mais uma relação não trivial entre $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$ que não provém desta que obtivemos. Mas então, $K_2(\mathbb{RP}^2)$ teria ordem menor que 8, o que é um absurdo. Portanto, $K_2(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo ao grupo dos quatérnios. ■

Corolário 4.2.10. *Em $G_2(\mathbb{RP}^2)$, $(\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2)^2 = \tilde{\sigma}_1^2$ e este elemento tem ordem 2.*

Prova: No teorema anterior obtivemos a relação $(\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_1)^2 = \tilde{\rho}_1^2$ a qual ocorre se, e somente se, $\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_1$. Logo, $(\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2)^2 = \tilde{\rho}_1(\tilde{\rho}_2\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2) = \tilde{\rho}_1^2$. Como já mostramos, $\tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\sigma}_1^2$. Segue a igualdade. Também mostramos no teorema anterior que $\tilde{\sigma}_1^4 = 1$. Logo, para mostrarmos que $(\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2)^2$ tem ordem 2, é suficiente mostrarmos que $(\tilde{\rho}_1\tilde{\rho}_2)^2 \neq 1$. Mas se valesse a igualdade, então, pelos cálculos que fizemos no teorema anterior, teríamos obtido que $K_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2 \mid \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\rho}_2^2 = 1 \rangle$, a qual é uma apresentação de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, que tem ordem 4 e isto contraria o resultado anterior. ■

Teorema 4.2.11. *$A_2(\mathbb{RP}^2)$ é cíclico de ordem 4.*

Prova: Consideremos a sequência exata fundamental

$$1 \longrightarrow A_2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i} K_2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{j} K_1(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1.$$

Notemos que $K_1(\mathbb{RP}^2) = G_1(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_2 \mid \tilde{\rho}_2^2 = 1 \rangle$, que é cíclico de ordem 2. Portanto, como K_2 tem ordem 8, pelo teorema anterior, então $A_2(\mathbb{RP}^2)$ tem ordem 4. Mas desde que os geradores $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{a}_2$ de $A_2(\mathbb{RP}^2)$ satisfazem $\tilde{a}_2 = \tilde{\sigma}_1^2 = \tilde{\rho}_1^2$, $\tilde{\rho}_1^4 = 1$, e $\tilde{\rho}_1^2 \neq 1$, então $A_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1 \mid \tilde{\rho}_1^4 = 1 \rangle$. ■

Teorema 4.2.12. *Se $n > 2$, então $A_n(\mathbb{RP}^2)$ é um grupo livre de rank $n - 1$ e neste caso $A_n(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_n \mid \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{a}_2\tilde{a}_3 \dots \tilde{a}_n \rangle$.*

Prova: Consideremos $U_n = \langle v, u_2, u_3, \dots, u_n \mid v^2 = u_2u_3 \dots u_n \rangle$ o grupo livre de rank $n - 1$. De fato U_n é livre, pois $u_n = u_{n-1}^{-1} \dots u_3^{-1}u_2^{-1}v^2$, ou seja, podemos retirar u_n do conjunto de geradores e não existe relações entre os demais geradores. Vamos exibir uma representação de $D_n(\mathbb{RP}^2)$ em $\text{Aut}(U_n)$, tal que $A_n(\mathbb{RP}^2)$ está em correspondência biunívoca com $\mathcal{I}_{U_n}$, sendo $\mathcal{I}_{U_n}$ o subgrupo dos automorfismos internos de U_n . Como o rank de U_n é maior que 1, pelo lema 1.6.1, seguirá que $A_n(\mathbb{RP}^2)$ é um grupo livre de rank $n - 1$. Para cada gerador de $D_n(\mathbb{RP}^2)$, denotaremos pelo mesmo símbolo o automorfismo associado em $\text{Aut}(U_n)$. Definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_i &: u_j \mapsto u_j, \text{ se } j \neq i, i+1, u_i \mapsto u_{i+1}, u_{i+1} \mapsto u_{i+1}^{-1}u_i^{-1}u_{i+1}, v \mapsto v \\ \tilde{a}_i &: u_j \mapsto u_iu_ju_i^{-1}, v \mapsto u_ivu_i^{-1} \\ \tilde{\rho}_1 &: u_j \mapsto vu_jv^{-1}, v \mapsto v \text{ para } i > 1 \\ \tilde{\rho}_i &: u_j \mapsto w^{-1}u_jw, \text{ se } j > i, u_j \mapsto u_j, \text{ se } j < i, u_i \mapsto w, v \mapsto vw \end{aligned}$$

sendo $w = v^{-1}u_2 \dots u_{i-1}u_iu_{i-1}^{-1} \dots u_2^{-1}v$. Estes automorfismos satisfazem as relações

(1) ... (14) e por argumentos puramente combinatórios mostra-se que essa associação é injetora. Notemos que os automorfismos $\tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{\rho}_1$ geram $\mathcal{I}_{U_n}$. Como $\tilde{\rho}_1^2 \stackrel{(6)}{=} \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \dots \tilde{a}_n$, e $A_n(\mathbb{RP}^2)$ é livre de rank $n - 1$, segue que $A_n(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, a_n \mid \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \dots a_n \rangle$. ■

Corolário 4.2.13. $G_n(\mathbb{RP}^2)$ é infinito para $n > 2$.

4.3 Propriedades de $B_n(\mathbb{RP}^2)$

Definição 4.3.1. O espaço das n -uplas de pontos da esfera $\mathbb{S}^2$ que são distintos e não antipodais, com a topologia induzida de $\underbrace{\mathbb{S}^2 \times \dots \times \mathbb{S}^2}_{n\text{-vezes}}$, é chamado de espaço de configuração de n pontos ordenados e não anti podais de $\mathbb{S}^2$ e denotado por $\mathcal{A}_n(\mathbb{S}^2)$, isto é, $\mathcal{A}_n(\mathbb{S}^2) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \prod_1^n \mathbb{S}^2 \mid x_i \neq \pm x_j, i \neq j\}$.

No próximo resultado, consideraremos $\mathbb{RP}^2$ como $\mathbb{S}^2$ passada a quociente pela relação que identifica pontos antípodas.

Teorema 4.3.2. A aplicação $p : \mathcal{A}_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow F_n(\mathbb{RP}^2)$, definida por $p(x_1, \dots, x_n) = ([x_1], \dots, [x_n])$, é um recobrimento a 2^n folhas.

Prova: Seja $([x_1], \dots, [x_n]) \in F_n(\mathbb{RP}^2)$. Consideremos a aplicação $\tilde{p} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, dada por $\tilde{p}(x) = [x]$, a qual é um recobrimento a duas folhas. Logo, para todo $i = 1, \dots, n$, existem abertos $U_i \subset \mathbb{S}^2$ e $V_i \subset \mathbb{RP}^2$, tais que $x_i \in U_i$, $[x_i] \in V_i$, $\tilde{p}^{-1}(V_i) = U_i \cup -U_i$ e $\tilde{p}|_{\pm U_i} : \pm U_i \rightarrow V_i$ são homeomorfismos. Como $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$ são espaços de Hausdorff, podemos considerar tais abertos de modo que $U_i \cap \pm U_j = \emptyset$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$, sempre que $i \neq j$. Denotando $U_i^1 = U_i$, $U_i^2 = -U_i$, $T_{i_1, \dots, i_n} = U_1^{i_1} \times \dots \times U_n^{i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}$, $V = V_1, \dots, V_n$, então V é um aberto de $F_{0,n}(\mathbb{RP}^2)$ que contém $([x_1], \dots, [x_n])$, os conjuntos $T_{i_1, \dots, i_n}$ são abertos disjuntos de $\mathcal{A}_n(\mathbb{S}^2)$, com $i_j \in \{1, 2\}$ e notando que $p(x_1, \dots, x_n) = (\tilde{p}(x_1), \dots, \tilde{p}(x_n))$, $p^{-1}(V) = \bigcup T_{i_1, \dots, i_n}$ e p restrita a cada aberto desta união disjunta é um homeomorfismo com V . Segue o resultado. ■

Lema 4.3.3. $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$ tem o mesmo tipo de homotopia que $V_{3,2}$, sendo $V_{3,2} = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}\}$ uma variedade de Stiefel.

Observação 4.3.4. O símbolo $\langle , \rangle$ denota o produto interno entre dois vetores de $\mathbb{R}^3$. O símbolo $\delta_{i,j}$ denota o delta de Kronecker. Para mais informações sobre variedades de Stiefel, citamos [20] e [21].

Prova: Consideremos $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2) = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{S}^2, a \neq \pm b\}$ e $V_{3,2} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^3, \|x\| = \|y\| = 1, \langle x, y \rangle = 0\}$ e definimos

$$f : V_{3,2} \rightarrow \mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$$

$$(x, y) \mapsto (x, y)$$

$$g : \mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2) \rightarrow V_{3,2}$$

$$(a, b) \mapsto (a, \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|})$$

O símbolo $\wedge$ denota o produto vetorial entre dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Uma definição de produto vetorial e algumas de suas propriedades estão feitas, de modo sucinto, em [18]. Notemos que g está bem definida. De fato, segue da definição de produto vetorial que $\langle a, a \wedge b \rangle = 0$ e como a não é um vetor múltiplo de b , então $a \wedge b \neq 0$. Como a norma e produto vetorial de dois vetores dependem continuamente das coordenadas dos dois vetores, segue que g é contínua. Agora definimos

Figura 4.8: homotopia H

$$H : V_{3,2} \times [0, 1] \rightarrow V_{3,2}$$

$$J : \mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$$

$$((x, y), t) \mapsto (x, \frac{(1-t)x \wedge y + ty}{\|(1-t)x \wedge y + ty\|}) \quad (a, b) \mapsto (a, \frac{(1-t)a \wedge b + \|a \wedge b\|tb}{\|(1-t)a \wedge b + \|a \wedge b\|tb\|})$$

Para mostrarmos que H e J estão bem definidas e são contínuas, basta usarmos as propriedades de norma, produto interno e produto vetorial de $\mathbb{R}^3$. A figura 4.8 nos dá uma ideia da homotopia H . A homotopia J é semelhante. Agora notemos que

$$H((x, y), 0) = (x, \frac{x \wedge y}{\|x \wedge y\|}) = g \circ f(x, y) \quad J((a, b), 0) = (a, \frac{a \wedge b}{\|a \wedge b\|}) = f \circ g(a, b)$$

$$H((x, y), 1) = (x, \frac{y}{\|y\|}) = (x, y) = Id_{V_{3,2}} \quad J((a, b), 1) = (a, \frac{b}{\|b\|}) = (a, b) = Id_{\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)}$$

Com isto concluímos que $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$ tem o mesmo tipo de homotopia que $V_{3,2}$. ■

Lema 4.3.5. $\pi_2(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) = 1$ para todo $n \geq 2$

Prova: Notemos que $F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)$ é o espaço projetivo menos $n-1$ pontos, a qual tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de $n-1$ $\mathbb{S}^1$, que é um grafo. A figura 4.9 nos dá uma ideia desta afirmação. O resultado segue dos fatos que o recobrimento universal de um grafo é uma árvore, toda árvore é contrátil e uma aplicação de recobrimento induz isomorfismo nos grupos de homotopia de dimensão maior que 1.

Figura 4.9: deformação de $\mathbb{RP}^2$ num bouquet de S^1

Lema 4.3.6. *Se $n \geq 2$, então $\pi_2(F_{0,n}(\mathbb{RP}^2)) = 1$.*

Prova: A prova é feita por indução em n . Em [22] encontramos uma prova que $\pi_2(V_{3,2}) = 1$. Segue do teorema 4.3.2 e do lema 4.3.3 que $\pi_2(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)) = 1$. Agora suponhamos que $\pi_2(F_{0,n-1}(\mathbb{RP}^2)) = 1$. O teorema de Fadell-Neuwirth (teorema 1.2.2) fornece a seguinte sequência exata:

$$\dots \longrightarrow \pi_2(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) \longrightarrow \pi_2(F_{0,n}(\mathbb{RP}^2)) \longrightarrow \pi_2(F_{0,n-1}(\mathbb{RP}^2)) \longrightarrow \dots$$

Aplicando o lema 4.3.5 e a hipótese de indução na sequência acima, concluímos que $\pi_2(F_{0,n}(\mathbb{RP}^2)) = 1$.

Seja $n \geq 3$ e consideremos a fibração $\pi : F_{0,n}(\mathbb{RP}^2) \rightarrow F_{0,n-1}(\mathbb{RP}^2)$ definida no teorema de Fadell-Neuwirth (teorema 1.2.2), cuja fibra típica é $F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)$. Notemos que $\pi_0(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) = 1$, já que $\mathbb{RP}^2$ menos uma quantidade finita de pontos é um espaço conexo por caminhos. Logo, a sequência exata de homotopia da fibração π , junto com o lema 4.3.6, nos fornece a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_{0,n}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \pi_1(F_{0,n-1}(\mathbb{RP}^2)) \longrightarrow 1$$

sendo i_* a induzida da inclusão.

Mas, por definição $P_n(\mathbb{RP}^2) = \pi_1(F_{0,n}(\mathbb{RP}^2))$ e assim temos a seguinte

Definição 4.3.7. *Para $n \geq 3$, a sequência exata curta*

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{i_*} P_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\pi_*} P_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1$$

é chamada de sequência exata curta de Fadell-Neuwirth do $\mathbb{RP}^2$.

Geometricamente, o homomorfismo π_* corresponde a retirar a primeira corda de uma trança.

Vamos dar uma interpretação geométrica do homomorfismo i_* . Mas antes temos o

Teorema 4.3.8. *Se $n \geq 2$, então $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ é um grupo livre de rank $n-1$, cuja apresentação é $\langle \rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \mid \rho_1^2 = a_{1,2} \dots a_{1,n} \rangle$.*

Prova: Consideremos os abertos U e V de $\mathbb{RP}^2$, conforme as figuras 4.10 e 4.11. Notemos que o aberto V tem o mesmo tipo que homotopia que $\mathbb{S}^1$. Logo $\pi_1(V)$ é cíclico infinito. Na figura 4.11 também está desenhado um gerador de $\pi_1(V)$, que chamamos de ρ_1 . Agora, é fácil ver que $\pi_1(U)$ é livre de rank $n-1$. Sejam $a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$ os geradores. Na figura 4.10 estão desenhados estes geradores de $\pi_1(U)$. O aberto $U \cap V$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{S}^1$. Na figura 4.12 está representado um gerador de $\pi_1(U \cap V)$. Notemos que este gerador, incluído em $\pi_1(V)$ é igual a ρ_1^2 e incluído em $\pi_1(U)$ é igual ao produto de todos os geradores numa certa ordem, que sem perda de generalidade, podemos supor que seja $a_{1,2} \dots a_{1,n}$. Logo, pelo teorema de Van Kampen, $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) = \langle \rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \mid \rho_1^2 = a_{1,2} \dots a_{1,n} \rangle$. Este grupo é livre. De fato, como $n \geq 2$, então $a_{1,n} = a_{1,n-1}^{-1} \dots a_{1,2}^{-1} \rho_1^2$, ou seja, podemos retirar $a_{1,n}$ do conjunto de geradores e não existem relações entre os demais geradores.

Figura 4.10: aberto U

Figura 4.11: aberto V

Figura 4.12: $U \cap V$

■

Como i_* é injetiva, podemos considerar, $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ como subgrupo de $P_n(\mathbb{RP}^2)$. Notemos que os caminhos $\rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n-1}$ do teorema 4.3.8 em $P_n(\mathbb{RP}^2)$ são justamente as tranças $\rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$, sendo que estamos usando o mesmo símbolo para as tranças que são imagens por $\tilde{e}_n$ das tranças $a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \in P_n(\mathbb{R}^2)$. Estas tranças foram definidas no capítulo 3. Portanto, podemos considerar $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ como o subgrupo de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ gerado por $\rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$ e i_* como a inclusão.

O seguinte resultado nos será útil na seção seguinte e tem uma demonstração que é, salvo poucos detalhes, a mesma do teorema de Fadell-Neuwirth (teorema 1.2.2) e por isso a omitimos.

Teorema 4.3.9. *A aplicação $\lambda : \mathcal{A}_n(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{A}_{n-1}(\mathbb{S}^2)$, definida por $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$, é uma fibração localmente trivial, com fibra $\mathbb{S}^2 - Q_{2(n-1)}$, sendo $Q_{2(n-1)}$ um conjunto de $2(n-1)$ pontos distintos e não antipodais de $\mathbb{S}^2$.*

4.4 O isomorfismo entre $G_n(\mathbb{RP}^2)$ e $B_n(\mathbb{RP}^2)$

Consideremos $\phi_n : G_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow B_n(\mathbb{RP}^2)$ definido na base por

$$\tilde{\sigma}_n \mapsto \sigma_n$$

$$\tilde{\rho}_n \mapsto \rho_n$$

e estendido por linearidade. ϕ_n é um homomorfismo, pois as relações de $G_n(\mathbb{RP}^2)$ valem em $B_n(\mathbb{RP}^2)$.

O principal objetivo desta seção é provar o seguinte:

Teorema 4.4.1 (principal). *Para todo n , ϕ_n é um isomorfismo.*

Notemos que para $n = 1$ o teorema é óbvio, desde que $G_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2 \approx B_1(\mathbb{RP}^2)$ e ϕ_1 é o homomorfismo identidade.

Suponhamos então $n \geq 2$. A prova do teorema 4.4.1 será feita por passos, através de várias condições suficientes.

Consideremos $i_1 : K_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow G_n(\mathbb{RP}^2)$ e $i_2 : P_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow B_n(\mathbb{RP}^2)$ as inclusões, e $\psi_n : K_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow P_n(\mathbb{RP}^2)$ a restrição de ϕ_n . Então, claramente é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & K_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{i_1} & G_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\gamma} & S_n & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \phi_n & & \downarrow Id & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & P_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{i_2} & B_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\alpha} & S_n & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Pelo Lema dos Cinco, temos o:

Lema 4.4.2. *Se ψ_n é isomorfismo, então ϕ_n é isomorfismo.*

Agora, usando a observação posterior ao teorema 4.3.8, a sequência exata fundamental de $G_n(\mathbb{RP}^2)$ (teorema 4.2.7) e a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth do $\mathbb{RP}^2$ (definição 4.3.7), temos que é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{i} & K_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{j} & K_{n-1}(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow \theta_n & & \downarrow \psi_n & & \downarrow \psi_{n-1} & & \downarrow \\
1 & \longrightarrow & \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) & \xrightarrow{i_*} & P_n(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\pi_*} & P_{n-1}(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

sendo $\theta_n : A_n(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ a restrição do homomorfismo ψ_n .

Como $A_n(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \dots, \tilde{a}_n \mid \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \dots \tilde{a}_n \rangle$ e $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) = \langle \rho_1, a_{1,2}, \dots, a_{1,n} \mid \rho_1^2 = a_{1,2} \dots a_{1,n} \rangle$ pelos teoremas 4.2.12 e 4.3.8 e como $\theta_n(\tilde{\rho}_1) = \rho_1$, $\theta_n(\tilde{a}_i) = a_{1,i}$, para todo $i = 2, \dots, n$, então θ_n é um isomorfismo para todo $n \geq 2$. Logo, usando indução e em cada passo indutivo usando o Lema dos Cinco, temos o:

Lema 4.4.3. *Se ψ_2 é isomorfismo, então ψ_n é isomorfismo para todo $n \geq 2$.*

Consideremos a fibração $\pi : F_{0,2}(\mathbb{RP}^2) \rightarrow F_{0,1}(\mathbb{RP}^2)$, definida no teorema de Fadell-Neuwirth (teorema 1.2.2), cuja fibra típica neste caso é $F_{1,1}(\mathbb{RP}^2)$.

Notemos que $\pi_0(F_{1,1}(\mathbb{RP}^2)) = 1$, já que $\mathbb{RP}^2$ menos um ponto é conexo por caminhos. Pelo lema 4.3.6, $\pi_2(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)) = 1$. Portanto, a sequência exata de homotopia associada a π é a seguinte:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_2(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2), x_2) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(F_{1,1}(\mathbb{RP}^2), x_1) & \xrightarrow{i_*} & \\
& & & & & & \\
& & \pi_1(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2), (x_1, x_2)) & \xrightarrow{\pi_*} & \pi_1(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2), x_2) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

$\pi_1(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2), x_2) = \pi_1(\mathbb{RP}^2)$ que é cíclico de ordem 2. Seja ρ_2 um gerador deste grupo. Como $\mathbb{RP}^2$ menos um ponto tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{RP}^1$, que por sua vez é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, então $\pi_1(F_{1,1}(\mathbb{RP}^2))$ é infinito cíclico. Agora, o recobrimento universal de $\mathbb{RP}^2$ é $\mathbb{S}^2$. Logo, $\pi_2(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2)) = \pi_2(\mathbb{RP}^2) = \pi_2(\mathbb{S}^2)$ que é cíclico infinito. Sejam ρ_1 o gerador de $\pi_1(F_{1,1}(\mathbb{RP}^2), x_1)$ e ω o gerador de $\pi_2(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2), x_2)$. **Suponhamos** que $\partial(\omega) = \rho_1^4$. Então, pelo lema 1.6.2, a seguinte sequência é exata (vamos omitir os pontos bases):

$$1 \longrightarrow \langle \rho_1 \mid \rho_1^4 = 1 \rangle \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{\pi_*} \langle \rho_2 \mid \rho_2^2 = 1 \rangle \longrightarrow 1$$

Por definição, $K_1(\mathbb{RP}^2) = G_1(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_2 \mid \tilde{\rho}_2^2 = 1 \rangle$. Pelos teoremas 4.2.11 e 4.2.9, $A_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1 \mid \tilde{\rho}_1^4 = 1 \rangle$, $K_2(\mathbb{RP}^2) = \langle \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2 \mid (\tilde{\rho}_2 \tilde{\rho}_1)^2 = \tilde{\rho}_1^2 = \tilde{\rho}_2^2 \rangle$. Usando a sequência exata fundamental de $G_2(\mathbb{RP}^2)$, temos a seguinte sequência exata:

$$1 \longrightarrow A_2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{i} K_2(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{j} K_1(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1$$

sendo $i : A_2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow K_2(\mathbb{RP}^2)$ definido na base por $i(\tilde{\rho}_1) = \tilde{\rho}_1$ e $j : K_2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow K_1(\mathbb{RP}^2)$ definido na base por $j(\tilde{\rho}_1) = 1$ e $j(\tilde{\rho}_2) = \tilde{\rho}_2$.

Notemos que $\psi_1 : K_1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \pi_1(F_{0,1}(\mathbb{RP}^2))$ é isomorfismo. Se definirmos $\theta_2 : A_2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \langle \rho_1 \mid \rho_1^4 = 1 \rangle$ por $\theta_2(\tilde{\rho}_1) = \rho_1$, então θ_2 é isomorfismo e o seguinte diagrama é comutativo, cujas sequências na horizontal são exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A_2(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{i} & K_2(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{j} & K_1(\mathbb{RP}^2) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \langle \rho_1 \mid \rho_1^4 = 1 \rangle & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)) & \xrightarrow{\pi_*} & \langle \rho_2 \mid \rho_2^2 = 1 \rangle & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Pelo lema dos cinco, seguirá que ψ_2 é isomorfismo. Portanto, para que fique provado o teorema 4.4.1, o restante desta seção será dedicada a provar o

Lema 4.4.4. ∂ é a multiplicação por 4.

Prova: Nesta demonstração, vamos considerar $\mathbb{RP}^2$ como o espaço quociente de $\mathbb{S}^2$, onde se identificam os pontos antípodas. Pelo teorema 4.3.9, a aplicação $\lambda : (\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2), (x_1^0, x_2^0)) \rightarrow (\mathbb{S}^2, x_2^0)$, dada por $\lambda(x_1, x_2) = x_2$, é uma fibração localmente trivial com fibra típica $\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\}$. Pelo teorema 4.3.2, $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$ recobre $F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)$ e como $\pi_2(F_{0,2}(\mathbb{RP}^2)) = 1$ pelo lema 4.3.6, então $\pi_2(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)) = 1$. Como $\pi_1(\mathbb{S}^2) = 1$, então a sequência exata de homotopia da fibração λ nos fornece:

$$1 \longrightarrow \pi_2(\mathbb{S}^2, x_2^0) \xrightarrow{\bar{\partial}} \pi_1(\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\}, x_1^0) \xrightarrow{i'_*} \pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2), (x_1^0, x_2^0)) \longrightarrow 1$$

sendo i'_* a induzida da aplicação $i' : (\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\}, x_1^0) \rightarrow (\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2), (x_1^0, x_2^0))$, definida por $i'(x_1) = (x_1, x_2^0)$. $\pi_2(\mathbb{S}^2)$ é cíclico de ordem infinita. Pela projeção estereográfica, $\mathbb{S}^2 - \pm x_2^0$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ menos um ponto. Logo, $\pi_1(\mathbb{S}^2 - \pm x_2^0)$ é cíclico de ordem infinita. Em [12], encontramos uma prova que $\pi_1(V_{3,2})$ é cíclico de ordem 2 e como $\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2)$ tem o mesmo tipo de homotopia que $V_{3,2}$, de acordo com o lema 4.3.3, então $\pi_1(\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2))$ é cíclico de ordem 2. Logo, $\bar{\partial}$ é a multiplicação por 2. Voltemos a considerar a fibração $\pi : (F_{0,2}(\mathbb{RP}^2), ([x_1^0], [x_2^0])) \rightarrow (F_{0,1}(\mathbb{RP}^2), [x_2^0])$, cuja fibra típica é $\mathbb{RP}^2 - [x_2^0]$. Seja $\tilde{p} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ a projeção natural. Notemos que é comutativo o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\}, x_1^0) & \xrightarrow{i'} & (\mathcal{A}_2(\mathbb{S}^2), (x_1^0, x_2^0)) & \xrightarrow{\lambda} & (\mathbb{S}^2, x_2^0) \\ \downarrow \tilde{p}| & & \downarrow p & & \downarrow \tilde{p} \\ (\mathbb{RP}^2 - [x_2^0], [x_1^0]) & \xrightarrow{i} & (F_{0,2}(\mathbb{RP}^2), ([x_1^0], [x_2^0])) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{RP}^2, [x_2^0]) \end{array}$$

sendo p o recobrimento definido no teorema 4.3.2 e $\tilde{p}|$ a restrição de $\tilde{p}$. Pela naturalidade da sequência exata de homotopia, temos o seguinte diagrama comutativo (omitimos os

pontos base e só exibimos a parte que nos interessa):

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(\mathbb{S}^2) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \pi_1(\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\}) \\ \downarrow \tilde{p}_* & & \downarrow \tilde{p}|_* \\ \pi_2(\mathbb{RP}^2) & \xrightarrow{\partial} & \pi_1(\mathbb{RP}^2 - [x_2^0]) \end{array}$$

Notemos que $\mathbb{RP}^2 - [x_2^0]$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{RP}^1$. Agora $\mathbb{RP}^1$ é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. Logo, $\pi_1(\mathbb{RP}^2 - [x_2^0])$ é cíclico de ordem infinita. Podemos, sem perda de generalidade, considerar $\pm x_2^0$ como sendo o polo norte e sul de $\mathbb{S}^2$. Um gerador de $\pi_1(\mathbb{S}^2 - \{\pm x_2^0\})$ é um loop que sai do ponto $(1, 0, 0)$ e dá a volta pelo equador. Notemos que, pela definição de $\tilde{p}$, $\tilde{p}|_*$ aplicado neste gerador dá duas voltas em $\pi_1(\mathbb{RP}^2, [x_2^0])$. Logo, $\tilde{p}|_*$ é a multiplicação por 2. Como $\tilde{p}$ é recobrimento, então $\tilde{p}_*$ é isomorfismo, e portanto, $\partial = (\tilde{p}|_*) \circ \bar{\partial} \circ (\tilde{p}_*)^{-1}$ é a multiplicação por 4. ■

Grupos de Tranças Puras do Espaço Projetivo

Assim como as tranças de Artin não geram $B_n(\mathbb{RP}^2)$, as tranças puras $a_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, que foram definidas no capítulo 3, pensadas como imagem do homomorfismo $\tilde{e}_n$, não geram todo $P_n(\mathbb{RP}^2)$.

Consideremos em $\mathbb{RP}^2$ um caminho injetor $\bar{\xi}_k$ conforme a descrição da figura 5.1. Na figura, $n = 5$ e $k = 3$.

Definimos a trança $\xi_k = (b_1, \dots, b_n) \in P_n(\mathbb{RP}^2)$, cujas cordas são os caminhos que tem a seguinte expressão:

Figura 5.1: caminho $\bar{\xi}_k$

$$\xi_j(t) = (e(j, 0), t), \quad j \neq k \quad \quad \xi_k(t) = (\bar{\xi}_k(t), t)$$

Na figura 5.2 estão representados os esquemas das tranças ξ_k e ξ_k^{-1} quando $n = 5$ e $k = 3$.

Como as tranças $a_{i,j}$ são imagem do homomorfismo $\tilde{e}_n$, valem as relações do plano

$$(a) \quad a_{r,s} a_{i,j} a_{r,s}^{-1} = \begin{cases} a_{i,j}, & \text{se } i < r < s < j \text{ ou } r < s < i < j \\ a_{i,j}^{-1} a_{r,j}^{-1} a_{i,j} a_{r,j}, & \text{se } r < i = s < j \\ a_{s,j}^{-1} a_{i,j} a_{s,j}, & \text{se } i = r < s < j \\ a_{s,j}^{-1} a_{r,j}^{-1} a_{s,j} a_{r,j} a_{i,j} a_{r,j}^{-1} a_{s,j}^{-1} a_{r,j} a_{s,j}, & \text{se } r < i < s < j \end{cases}$$

Figura 5.2: tranças ξ_k e ξ_k^{-1}

Figura 5.3: relação (b)

Figura 5.4: relação (c)

Figura 5.5: relação (d)

Figura 5.6: relação (e)

Figura 5.7: relação (f)

As figuras 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7 mostram que as tranças ξ_k , $1 \leq k \leq n$, junto com as tranças $a_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, estão sujeitas as seguintes relações:

- (b) $\xi_i \xi_j \xi_i^{-1} = \xi_j^{-1} a_{i,j}^{-1} \xi_j^2$;
- (c) $\xi_i^2 = a_{1,i} \dots a_{i-1,i} a_{i,i+1} \dots a_{i,n}$;
- (d) $\xi_i a_{i,j} \xi_i^{-1} = \xi_j^{-1} a_{i,j}^{-1} \xi_j$;
- (e) $\xi_k a_{i,j} \xi_k^{-1} = a_{i,j}$, se $i < j < k$ ou $k < i < j$;
- (f) $\xi_k a_{i,j} \xi_k^{-1} = \xi_j^{-1} a_{k,j}^{-1} \xi_j a_{k,j}^{-1} a_{i,j} a_{k,j} \xi_j^{-1} a_{k,j} \xi_j$, se $i < k < j$.

O objetivo deste capítulo é mostrar que as tranças ξ_k , $1 \leq k \leq n$, e $a_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$, geram $P_n(\mathbb{RP}^2)$ e que as relações (a), (b), (c), (d), (e) e (f) formam um sistema completo de relações para $P_n(\mathbb{RP}^2)$, isto é, qualquer outra relação é proveniente destas.

Consideremos $\tilde{G}_n$ o grupo cuja apresentação é a apresentação que queremos obter para $P_n(\mathbb{RP}^2)$. Vamos mostrar que $\tilde{G}_n$ é isomorfo a $P_n(\mathbb{RP}^2)$ através de 3 teoremas, que juntos, usando indução, provam ser verdadeira a apresentação que queremos obter.

Teorema 5.0.5. $\tilde{G}_1$ é isomorfo a $P_1(\mathbb{RP}^2)$.

Prova: Como $P_1(\mathbb{RP}^2) = \pi_1(\mathbb{RP}^2) \approx \mathbb{Z}_2$, basta mostrar que $\tilde{G}_1$ é cíclico de ordem 2. Mas isto segue direto da definição, pois em $\tilde{G}_1$ só existe um gerador, ξ_1 , e exceto a relação (c) $\xi_1^2 = 1$, todas as outras são relações triviais. ■

Teorema 5.0.6. $\tilde{G}_2$ é isomorfo a $P_2(\mathbb{RP}^2)$.

Prova: Como corolário da demonstração do teorema 4.4.1 e pelo teorema 4.2.9, $P_2(\mathbb{RP}^2)$ é isomorfo ao grupo dos quatérnios. Portanto, para mostrar o teorema, basta mostrarmos que $\tilde{G}_2$ é isomorfo a Dic_8 , pois de acordo com a seção 1.5, o grupo dicíclico de ordem 8 é isomorfo ao grupo dos quatérnios. Por definição, $\tilde{G}_2$ é gerado por $\xi_1, \xi_2, a_{1,2}$, sujeito as seguintes relações:

$$(b) \xi_1 \xi_2 \xi_1^{-1} = \xi_2^{-1} a_{1,2}^{-1} \xi_2^2 \quad (c) \xi_1^2 = \xi_2^2 = a_{1,2} \quad (d) \xi_1 a_{1,2} \xi_1^{-1} = \xi_2^{-1} a_{1,2}^{-1} \xi_2$$

Por (c), podemos tomar ξ_2^2 como definição de $a_{1,2}$ e usando a relação (c) nas relações (b) e (d), temos que $\tilde{G}_2$ é gerado por ξ_1 e ξ_2 , com as seguintes relações:

$$(b') \xi_1 \xi_2 \xi_1^{-1} = \xi_2^{-1} \quad (c') \xi_1^2 = \xi_2^2 \quad (d') \xi_1^2 = \xi_2^{-2}$$

Notemos que $(d') \xrightarrow{(c')} \xi_1^2 = \xi_1^{-2} \iff \xi_1^4 = 1$.

Notemos ainda que $\xi_2^3 = \xi_2^3 \iff \xi_2^2 \xi_2 = \xi_2 \xi_2^2 \xrightarrow{(c')} \xi_1^2 \xi_2 = \xi_2 \xi_1^2 \iff \xi_1 \xi_2 \xi_1^{-1} = \xi_1^{-1} \xi_2 \xi_1$.

Logo, a relação (b') é equivalente a relação $\xi_1^{-1} \xi_2 \xi_1 = \xi_2^{-1}$.

Portanto,

$$\tilde{G}_2 = \langle \xi_1, \xi_2 \mid \xi_1^4 = 1, \xi_1^2 = \xi_2^2, \xi_1^{-1} \xi_2 \xi_1 = \xi_2^{-1} \rangle$$

que é uma apresentação para Dic_8 , conforme mostrado na seção 1.5. ■

No capítulo anterior, usando a fibração localmente trivial π , definida no teorema de Fadell e Neuwirth (teorema 1.2.2), definimos, para $n \geq 3$, a sequência exata curta de Fadell-Neuwirth

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{i_*} P_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\pi_*} P_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1$$

e observamos que $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ podia ser considerado como subgrupo de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ gerado por $\rho_1, a_{1,2} \dots a_{1,n}$, i_* o homomorfismo inclusão e π_* era o homomorfismo que retirava a primeira corda.

Agora, usando a fibração ϵ do teorema de Fadell e Neuwirth, de maneira totalmente análoga, podemos mostrar que $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2))$ pode ser considerado como subgrupo de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ gerado por $\xi_n, a_{1,n}, \dots, a_{n-1,n}$ com a relação $\xi_n^2 = a_{1,n} \dots a_{n-1,n}$ e definirmos, para $n \geq 3$ a sequência de Fadell-Neuwirth

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{i_*} P_n(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\epsilon_*} P_{n-1}(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1 .$$

Novamente, i_* pode ser considerado como a inclusão, mas agora, o homomorfismo ϵ_* corresponde a retirar a última corda de uma trança.

Usaremos esses fatos para provar o

Teorema 5.0.7. *Se $n \geq 2$ e $\tilde{G}_n$ é isomorfo a $P_n(\mathbb{RP}^2)$, então $\tilde{G}_{n+1}$ é isomorfo a $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$.*

Prova: Como $n \geq 2$, temos a sequência de Fadell - Neuwirth

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2)) \xrightarrow{i_*} P_{n+1}(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{\epsilon_*} P_n(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 1 .$$

Lembrando que $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2)) = \langle \xi_{n+1}, a_{1,n+1}, \dots, a_{n,n+1} \mid \xi_{n+1}^2 = a_{1,n+1} \dots a_{n,n+1} \rangle$ e como, por hipótese já temos a apresentação de $P_n(\mathbb{RP}^2)$, então podemos aplicar o método de apresentação de uma extensão. Pelo método, $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$ é gerado por elementos que são mapeados por ϵ_* nos geradores de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ e também pelos geradores de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$. Notemos que $\epsilon_*(\xi_k) = \xi_k$, se $1 \leq k \leq n$, e $\epsilon_*(a_{i,j}) = a_{i,j}$, se $1 \leq i < j \leq n$, já que ϵ_* é o homomorfismo que corresponde a retirar a última corda de uma trança. Logo,

$$P_{n+1}(\mathbb{RP}^2) \text{ é gerado por } \xi_k, 1 \leq k \leq n+1 \text{ e } a_{i,j}, 1 \leq i < j \leq n+1 .$$

Agora, pelo método, temos que calcular 3 classes de relações. A primeira é a inclusão das relações de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$. Como só ha uma relação, temos que em $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$ vale

$$\xi_{n+1}^2 = a_{1,n+1} \dots a_{n,n+1} .$$

A segunda classe de relações é obtida da seguinte maneira: consideremos cada relação de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ com um elemento $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$. O método garante que existe um elemento de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$ que é igual a relação que estamos considerando e esta igualdade é uma relação de $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$. Exceto a relação (c), já mostramos que todas as outras relações valem em $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$. Logo, podemos tomar o elemento neutro de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$ para igualar as estas relações e assim, temos que em $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$ vale

$$a_{r,s}a_{i,j}a_{r,s}^{-1} = \begin{cases} a_{i,j}, & \text{se } 1 \leq i < r < s < j \leq n \text{ ou } 1 \leq r < s < i < j \leq n \\ a_{i,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{i,j}a_{r,j}a_{i,j}, & \text{se } 1 \leq r < i = s < j \leq n \\ a_{s,j}^{-1}a_{i,j}a_{s,j}, & \text{se } 1 \leq i = r < s < j \leq n \\ a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}a_{s,j}, & \text{se } 1 \leq r < i < s < j \leq n \end{cases}$$

e para $1 \leq i < j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_j \xi_i^{-1} &= \xi_j^{-1} a_{i,j}^{-1} \xi_j^2; \\ \xi_i a_{i,j} \xi_i^{-1} &= \xi_j^{-1} a_{i,j}^{-1} \xi_j; \\ \xi_k a_{i,j} \xi_k^{-1} &= a_{i,j}, \text{ se } i < j < k \text{ ou } k < i < j; \\ \xi_k a_{i,j} \xi_k^{-1} &= \xi_j^{-1} a_{k,j}^{-1} \xi_j a_{k,j}^{-1} a_{i,j} a_{k,j} \xi_j^{-1} a_{k,j} \xi_j, \text{ se } i < k < j. \end{aligned}$$

Agora, já mostramos que em $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$ vale $\xi_i^2 = a_{1,i} \dots a_{i-1,i} a_{i,i+1} \dots a_{i,n} a_{i,n+1}$ e como $\xi_i^2 = a_{1,i} \dots a_{i-1,i} a_{i,i+1} \dots a_{i,n}$ é uma relação de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ e $a_{i,n+1} \in \pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$, então, pelo método, precisamos por em $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$ a relação

$$\xi_i^2 = a_{1,i} \dots a_{i-1,i} a_{i,i+1} \dots a_{i,n} a_{i,n+1}, 1 \leq i \leq n.$$

A terceira classe de relações é obtida conjugando cada gerador de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$ por cada gerador de $P_n(\mathbb{RP}^2)$ e pelo método, esta conjugação será um elemento de $\pi_1(F_{n,1}(\mathbb{RP}^2))$. Novamente, usando as relações que já provamos e a sequência de Fadell-Neuwirth para garantir junto com o método a veracidade das relações, temos:

Para todo $1 \leq i < j \leq n$, para todo $1 \leq k \leq n$ e para todo $1 \leq l \leq n$

$$\begin{aligned} a_{i,j} a_{l,n+1} a_{i,j}^{-1} &= \begin{cases} a_{l,n+1}, & \text{se } l < i \text{ ou } j < l \\ a_{l,n+1}^{-1} a_{i,n+1}^{-1} a_{l,n+1} a_{i,n+1} a_{l,n+1}, & \text{se } l = j \\ a_{j,n+1}^{-1} a_{l,n+1} a_{j,n+1}, & \text{se } l = i \\ a_{j,n+1}^{-1} a_{i,n+1}^{-1} a_{j,n+1} a_{i,n+1} a_{l,n+1} a_{i,n+1}^{-1} a_{j,n+1}^{-1} a_{r,j} a_{i,n+1}, & \text{se } i < l < j \end{cases} \\ a_{i,j} &= \xi_{n+1} a_{i,j}^{-1} = \xi_{n+1} \\ \xi_k \xi_{n+1} \xi_k^{-1} &= \xi_{n+1}^{-1} a_{k,n+1}^{-1} \xi_{n+1}^2 \\ \xi_k a_{l,n+1} \xi_k^{-1} &= \begin{cases} a_{l,n+1}, & \text{se } k < l \\ \xi_{n+1}^{-1} a_{l,n+1}^{-1} \xi_{n+1}, & \text{se } k = l \\ \xi_{n+1}^{-1} a_{k,n+1}^{-1} \xi_{n+1} a_{k,n+1}^{-1} a_{k,n+1} \xi_{n+1}^{-1} a_{k,n+1} \xi_{n+1} & \text{se } l < k \end{cases} \end{aligned}$$

Combinando todos os índices, obtemos a apresentação de $\tilde{G}_{n+1}$, e portanto, $\tilde{G}_{n+1}$ é isomorfo a $P_{n+1}(\mathbb{RP}^2)$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **4**, 47-72, 1925
- [2] E. Artin, *Theory of Braids*, Annals of Mathematics **48**, 101-126, 1947
- [3] E. Artin, *Braids and permutations*, Annals of Mathematics **48**, 643-648, 1947
- [4] R. H. Fox, L. Neuwirth, *The braid groups*, Mathematica Scandinavica **10**, 119-126, 1962
- [5] J . S. Birman, *On braids groups*, Communications on Pure and Applied Mathematics **22**, 643-649, 1947
- [6] J. S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies **82**, Princeton University Press, 1974
- [7] V. L. Hansen, *Braids and Coverings: selectd topics*, London Mathematical Society Student Texts **18**, Cambridge University Press, 1989
- [8] K. Murasugi, B. I. Kurpita, *A Study of Braids*, Mathematics and Its Aplications **484**, Kluwer Academic Publishers, 1999
- [9] J. V. Buskirk, *Braid Groups os Compact 2-Manifolds with Elements of Finite Order*, Transactions of the American Mathematical Society **122** 81-97, 1966
- [10] D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The braid group of the projective plane and the Fadell-Neuwirth short exact sequence*, Geometria Dedicata **130** 93-107, 2007
- [11] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in terms of generators and relations*, Interscience Publishers, 1966

-
- [12] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer - Verlag, 1978
 - [13] E. L. Lima, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, 2006
 - [14] P. J. Hilton, *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge at The University Press, 1964
 - [15] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, London Mathematical Society Lecture Notes Series **22**, Cambridge University Press, 1976
 - [16] E. Fadell, J. Van Buskirk, *The braid groups of E^2 and S^2* , Duke Mathematical Journal **29**, 243-258, 1962
 - [17] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, Ergebnisse Series, Berlin, 1957
 - [18] M. P. do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2005
 - [19] A. Garcia, Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, 2006
 - [20] N. E. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton mathematical series **14**, Princeton University Press, 1951
 - [21] D. Husemoller, *Fibre bundles*, Graduate texts in mathematics **20**, Springer - Verlag, 1994
 - [22] G. F. Paechter, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$. I*, The Quartely Journal of Mathematics, **7**, 249-268, 1956