Mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ e do espaço quaterniônico em S^4

ESDRAS TEIXEIRA COSTA^{*}

Orientador:

PROF. DR. OZIRIDE MANZOLI NETO

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Ciências na área de Matemática.*

USP - São Carlos

^{*}Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Aos meus pais

Joaquim Teixeira da Silva
e
Maria de Lourdes Costa Silva

e à minha irmã

Lia Teixeira Costa

Agradecimentos

À Deus. À minha família, pelo apoio, compreensão e sacrifício. Ao meu orientador, Dide, pela paciência e dedicação. À Capes, pelo apoio financeiro. Aos meus colegas de mestrado Alexandre, Cláudia, Daniel Mancini, Daniel Viais, Elíris, Hilde, Karina, Lee, Sérgio. Ao pessoal com quem fiz disciplinas, desde o primeiro curso de verão até aqui. À todo mundo que conheci aqui em São Carlos, em especial à D. Dirce, S. Dito & família e todo o pessoal do prédio. Aos amigos Helton, Ricardo, Fabrício & Tatiane, Tatiana & Ricardo, Rodrigo, Walmir, Orlando, Luciano, Otávio, Dalton, Érica e Ariane, Gislaine e Larissa. À todo mundo do ICMC/USP, em especial o pessoal da secretaria da pós e os professores. Ao pessoal que me ajudou a vir até São Carlos, em especial João Carlos e Ronaldo, Marina, Marta & família. Ao pessoal que não me deixou ir embora durante o primeiro curso de verão - em especial o Rogério, a Cláudia e seu marido Alexandre. À todos os meus professores e todos os meus colegas de sala. Ao tio Manoel, Pereira, Manoel do Tante, Napoleão & cia. À todos os meus tios e primos, em especial aos tios Nelma, Joaquim, Nelson, Gerson, Maria, João, Luzia e às primas Marcela & Valéria, Denise & Ana Carolina. À minha avó Enedina e aos tios Gerônimo, Odina e Sebastião (In Memoriam). À todo mundo que conheci no CAJ/UFG, em especial aos colegas Andréia, Gecirlei, Giovanna, Roberta, Sebastião, Lucineide, e Willian e os funcionários (não dá pra citar os nomes!). Ao pessoal do Senmota Estúdios: Alexandre, Júnior, Marcos e Reginaldo. Aos colegas: Antônio, Késio, Kélio, Kruk, Marcos, José Carlos, Rosemar, Emerson & Cia. À todos os meus amigos e parentes. (Gostaria de agradecer um por um aqui, mas não dá!!) E a você, se você conseguiu chegar até aqui!!!

Resumo

Estamos interessados no estudo dos mergulhos do plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ e do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$ na esfera S^4 e na caracterização do fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$.

Visando isso, primeiramente exibimos e caracterizamos o mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 para depois, a partir deste mergulho, construirmos o mergulho padrão de $\mathbf{Q}$ em S^4 , além de explorarmos algumas propriedades de ambos.

Finalmente, caracterizamos o fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$ e situamos este resultado em um contexto mais amplo, apresentando problemas semelhantes.

Abstract

We are concerned with the study of embeddings of $\mathbb{R}P^2$ and the quaternionic space $\mathbf{Q}$ in the 4-sphere and the characterization of the closure of the components of $S^4 - f(\mathbf{Q})$.

Keeping this in mind, first we show and characterize the standard embedding of $\mathbb{R}P^2$ in S^4 and from this we build the standard embedding of $\mathbf{Q}$ in S^4 . At this point we also explore some properties of both embeddings.

Finally, we characterize the closure of the components of $S^4 - f(\mathbf{Q})$ and situate this result in a broader context, showing a problem which generalizes it.

Sumário

0.1	Introdução	1
1	Alguns resultados preliminares	3
2	Mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ em S^4	18
2.1	Alguns resultados importantes sobre $\mathbb{R}P^2 \subset S^4$	19
2.2	O mergulho padrão do plano projetivo em S^4	22
3	O espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$	25
3.1	O grupo dos quatérnios	25
3.2	O grupo dos automorfismos externos de $\mathbf{Q}$	26
3.3	A construção de $\mathbf{Q}$ a partir do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4	28
3.3.1	Sobre a colagem de $D^2 \times I^2$ à ν/M	29
3.3.2	A descrição usual de ν	32
4	Mergulhos do espaço quaterniônico em S^4	38

4.1	Caracterização dos fechos das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$. .	39
4.2	Caracterização de certos pares de mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ em S^4	45
5	Considerações finais	49
5.1	Observações Gerais	49
5.2	Problemas relacionados	50
	Anexo	53
	Referências Bibliográficas	55

Lista de Figuras

1.1	(G, j_1, j_2) é o push-out de (i_1, i_2)	6
1.2	Um cilindro e uma faixa de Möbius.	8
1.3	Um segmento enodado não trivial girando em torno de um eixo em $\mathbb{R}^4$	16
1.4	A suspensão de um nó não trivial não é localmente planar.	16
2.1	O número de enlaçamento de dois planos projetivos mergulhados em S^4 pode ser 0.	21
2.2	$S^3 = S^1 \times B^2 \cup_{\partial} B^2 \times S^1$	23
2.3	A faixa de Möbius M mergulhada em $S^1 \times B^2 \times [-1, 1]$	24
2.4	O mergulho padrão de P em S^4	24
3.1	O mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4	28
3.2	O fibrado normal trivial sobre M em S^3	29
3.3	A restrição do fibrado normal de M à ∂M	30
3.4	Empurramos o fibrado desta maneira até que ele esteja todo em S^3	31

3.5	A descrição geométrica de $\varphi(\partial D^2 \times z)$	32
3.6	Detalhes sobre o cilindro da aplicação $D : A \rightarrow M_2$	33
3.7	O espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$	35
4.1	Os homomorfismos φ_0, φ_1 e φ_2	41
4.2	ψ deve ser tal que $j_* \circ \psi = k \circ i_{2*}$	43
4.3	ψ deve ser tal que o diagrama comuta	44
4.4	Diagrama comutativo	44
4.5	$h_* = \gamma_3$ é fundamental para a comutatividade do diagrama.	48
5.1	O número de enlaçamento de dois planos projetivos mergulhados em S^4 pode ser 1.	53

0.1 Introdução

Esta dissertação trata de mergulhos do plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ e do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$ na esfera S^4 . As esferas estão entre os objetos de estudo mais antigos da matemática e desde o surgimento da topologia o interesse pela pesquisa sobre esferas de dimensões maiores que dois tem se mostrado cada vez maior. O plano projetivo real é um dos objetos topológicos mais comuns em qualquer curso de topologia e o espaço quaterniônico é encontrado em diversos problemas em topologia (para maiores detalhes veja [13]).

Boa parte do material aqui contido é descritivo, visando apresentar de maneira bastante detalhada os objetos de estudo. Também houve esforço no sentido de que a dissertação fosse auto-contida e não dependesse de outras obras para o entendimento de seu conteúdo. Nesse sentido, o capítulo inicial sobre preliminares contém diversos tópicos e exemplos bastante esclarecedores.

Os desenhos foram elaborados para que obtivéssemos uma melhor caracterização das estruturas envolvidas e de algumas passagens do texto, principalmente nos capítulos dois e três. Quando o objetivo do desenho é esclarecer sobre alguma passagem então em geral o mesmo é dividido em quadros, cada um deles representando uma ação ocorrida durante esta passagem.

O trabalho todo se divide em cinco capítulos, sendo que o capítulo inicial é dedicado às preliminares, é nele que encontramos as definições mais básicas e os resultados que por uma razão ou outra não se encaixariam nos capítulos seguintes. Ao invés de nos ocuparmos com as demonstrações dos resultados deste capítulo preferimos fazer uma apresentação mais abrangente, inserindo uma amplitude maior

de tópicos básicos que se fizeram necessários no desenvolvimento do trabalho.

O capítulo seguinte trata de questões relativas ao plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ e seus mergulhos em S^4 . São mostrados alguns resultados interessantes sobre o tema e ao final temos um tópico de importância primordial para nossos estudos posteriores: a descrição do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 .

No terceiro capítulo apresentamos o espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$, construímos um mergulho localmente planar do mesmo em S^4 a partir do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 e tratamos de algumas de suas propriedades, como por exemplo os seus grupos de homologia.

O principal teorema desta dissertação está no capítulo quatro. O teorema 4.1 nos fornece uma caracterização do fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$, onde f é um mergulho do espaço quaterniônico em S^4 . Ainda neste capítulo temos um resultado que nos fornece uma espécie de recíproca para este teorema num caso específico (veja o teorema 4.2).

O último capítulo traz a conclusão do trabalho na forma de observações gerais sobre os resultados contidos no capítulo quatro e também na forma de alguns problemas relacionados aos resultados anteriores. Este capítulo encerra a dissertação exibindo o problema que serviu de motivação para o teorema 4.1 e mostrando o problema (ainda em aberto) que generaliza o mesmo.

Capítulo 1

Alguns resultados preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados necessários para a compreensão dos capítulos posteriores. As demonstrações destes resultados serão omitidas por não terem conexão direta com o tema desta dissertação. As definições e, em alguns casos, os resultados serão acompanhados de exemplos que vez por outra serão utilizados posteriormente.

Vários conceitos abordados pela álgebra homológica são encontrados ao longo de toda esta dissertação e noções como a de homologia são de importância primordial para a compreensão das demonstrações aqui contidas. Portanto faz sentido que comecemos nossas preliminares com noções básicas sobre teoria de homologia.

Um complexo de cadeias é uma seqüência infinita decrescente

$$C : \dots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow \dots$$

de R-módulos e homomorfismos de R-módulos tal que $Im(\partial_n) \subset Ker(\partial_{n-1}) \forall n$, ou seja $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \forall n$.

Os elementos de C_n são chamados cadeias n-dimensionais; o kernel de ∂_n é denotado por $Z_n(C)$ e é chamado de módulo dos ciclos n-dimensionais de C . A imagem de ∂_{n+1} em C_n é denotada por $B_n(C)$ e é chamada de módulo dos bordos n-dimensionais de C . O módulo quociente $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ é chamado de **módulo de homologia n-dimensional** de C .

Da mesma forma, um complexo de cocadeias é uma sequência crescente

$$D : \dots \longrightarrow D^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} D^n \xrightarrow{\delta_n} D^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

onde $Im(\delta_n) \subset Ker(\delta_{n+1}) \forall n$ e os termos cocadeia, cociclo e cobordo são usados no lugar de cadeia, ciclo e bordo, respectivamente. O módulo quociente $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ é chamado módulo de cohomologia n-dimensional de C .

Como exemplo de uma teoria de homologia, mostraremos de maneira bem sucinta como é obtida a homologia singular para um espaço topológico X . Este exemplo justifica o fato de usarmos a notação $H_n(X)$ quando X não é um complexo de cadeias e sim um espaço topológico.

Se X é um conjunto, G é um grupo e $i : X \rightarrow G$ é uma função, dizemos que G **é livre em X com relação à i** se para todo grupo H e toda função $f : X \rightarrow H$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $f = i \circ \varphi$. Quando a situação é esta, também dizemos que G é o grupo livre gerado por X . Uma situação análoga define grupo abeliano livre.

Seja X um espaço topológico e σ_p o conjunto de todos os pontos $(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tais que $\sum t_i = 1$ e $t_i \geq 0 \forall i$. Um **p-simplexo singular** em X é uma aplicação contínua $\varphi : \sigma_p \rightarrow X$. Definimos $S_n(X)$ como o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto de todos os n-simplexos singulares de X .

Se φ é um p-simplexo singular e $0 \leq i \leq p$, definimos $\hat{\partial}_i : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$

por $\hat{\partial}_i(\varphi(t_0, t_1, \dots, t_{p-1})) = \varphi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{p-1})$. Dizemos que $\hat{\partial}_i(\varphi)$ é a i -ésima face de φ .

Para termos uma teoria de homologia ainda precisamos de um operador bordo $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ e então definimos ∂_n por

$$\partial_n = \hat{\partial}_0 - \hat{\partial}_1 + \dots + (-1)^n \hat{\partial}_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \hat{\partial}_i.$$

O complexo de cadeias $S : \dots \rightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \rightarrow \dots$ nos fornece então a homologia singular de X :

$$H_i(X), i = 0, 1, 2, \dots : \dots \rightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

Definição 1.1. O *posto* de um grupo abeliano finitamente gerado $\mathcal{A}$ é o supremo do conjunto dos números n tais que existe um subgrupo abeliano livre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ cuja base tem n elementos.

Exemplo 1.1. Como $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é um grupo de torção, o único grupo abeliano livre contido em $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é o trivial e portanto o posto do grupo abeliano $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ é zero.

O i -ésimo **número de Betti** de um espaço topológico X , denotado por $b_i(X)$, é o posto de $H_i(X)$, sendo este último o i -ésimo grupo de homologia de X . A **Característica de Euler** de um espaço topológico X é dada por $\chi(X) = \sum_i (-1)^i b_i(X)$, se $H_*(X)$ for finitamente gerado. Mais ainda, se X é tal que $X = A \cup B$, A e B são abertos de X tais que $H_*(A)$, $H_*(B)$ e $H_*(A \cap B)$ são finitamente gerados, então $H_*(A \cup B) = H_*(X)$ é finitamente gerado e vale a igualdade

$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Exemplo 1.2. Sabemos que para a esfera S^4 temos $H_0(S^4) = \mathbb{Z}$, $H_1(S^4) = 0$, $H_2(S^4) = 0$, $H_3(S^4) = 0$, $H_4(S^4) = \mathbb{Z}$. Então a característica de Euler de S^4 é:

$$\chi(S^4) = 1 + 0 + 0 + 0 + 1 = 2$$

O teorema de Seifert- van Kampen é um resultado muito importante para a topologia algébrica e será muito utilizado em nossos estudos. Os próximos parágrafos têm como função fazer uma breve apresentação do mesmo.

Uma apresentação para um grupo G consiste de um conjunto X , um epimorfismo $\varphi : F(X) \rightarrow G$ (onde $F(X)$ é o grupo livre em X) e um conjunto R que gera normalmente o kernel de φ . Denotaremos tal apresentação de G por $\langle X; R \rangle^\varphi$, ou por $[X, R]$ quando não houver ambigüidade sobre a aplicação φ .

Definição 1.2. *Sejam G, G_0, G_1 e G_2 grupos e sejam $i_1 : G_0 \rightarrow G_1, i_2 : G_0 \rightarrow G_2, j_1 : G_1 \rightarrow G, j_2 : G_2 \rightarrow G$ homomorfismos (Veja figura 1.1). Dizemos que (G, j_1, j_2) é o **push-out** de (i_1, i_2) se:*

- $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$
- Para todo grupo H e homomorfismos $\varphi_r : G_r \rightarrow H, r = 1, 2$ com $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$ existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi_r = \varphi \circ j_r, r = 1, 2$.

Figura 1.1: (G, j_1, j_2) é o push-out de (i_1, i_2) .

Como é bastante comum dizer que o próprio grupo G é um push-out e já que quaisquer dois push-outs são isomorfos, utilizaremos este abuso de notação quando for conveniente.

Observação 1.1. *Qualquer par (i_1, i_2) tem um push-out: Se G_r , $r \in \{1, 2\}$, tem apresentação $\langle X_r, R_r \rangle^{\theta_r}$ e Y é um conjunto de geradores de G_0 com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, escolhendo para cada $y \in Y$ um elemento $w_{y_r} \in F(X_r)$ satisfazendo $i_r(y) = \theta_r(w_{y_r})$, o grupo com apresentação $\langle X_1 \cup X_2; R_1, R_2, (w_{y_1}^{-1} w_{y_2}) \rangle$ é o push-out desejado.*

Teorema 1.1 (Seifert- van Kampen). *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos e U e V dois abertos de X tais que $U \cup V = X$ e $U \cap V \neq \emptyset$, com U, V e $U \cap V$ conexos por caminhos. Escolha um ponto $x_0 \in U \cap V$ como ponto base para todos os grupos fundamentais que consideraremos a seguir, e sejam φ_1 e φ_2 induzidos pelas inclusões $U \cap V \rightarrow U$ e $U \cap V \rightarrow V$*

Então, o grupo fundamental $\pi_1(X)$ é o push-out do par de inclusões (φ_1, φ_2) , isto é:

O termo fibrado é um dos mais presentes no texto dos capítulos seguintes, seja como fibrado tangente ou fibrado normal. Faremos agora um breve esclarecimento sobre este assunto e de alguns outros conceitos relacionados.

Definição 1.3. Um **fibrado** $\xi = (E, M, F, p)$ consiste de um espaço total E , um espaço base M , uma fibra F e uma aplicação de projeção $p: E \rightarrow M$ tal que existe uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de M onde para cada $U \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $\varphi_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que a composta

$$U \times F \xrightarrow{\varphi_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$$

é a projeção no primeiro fator.

Observação 1.2. O conjunto $p^{-1}(m) \subset E$ é sempre homeomorfo à fibra F e é chamado de **fibra sobre m** . Também dizemos **fibrado por n -esferas** um fibrado cuja fibra é S^n .

Exemplo 1.3. Na figura abaixo temos um cilindro, que é um exemplo de fibrado cujo espaço total é um produto cartesiano: a saber, o da fibra $\overset{\circ}{I} = (0, 1)$ ou I (se considerarmos o bordo) e do espaço base S^1 . Na mesma figura vemos também uma faixa de Möbius, que é um fibrado com a mesma fibra e o mesmo espaço base mas não é um produto cartesiano.

Figura 1.2: Um cilindro e uma faixa de Möbius.

Exemplo 1.4. Seja $p: X \rightarrow Y$ uma projeção de recobrimento, isto é, uma aplicação contínua tal que para todo $y \in Y$ existe uma vizinhança U de y em Y tal que $p^{-1}(U)$ é união disjunta de abertos de X , cada um deles homeomorfo a U por p . Seja ainda y_0 um ponto qualquer no espaço Y . Então $(X, Y, p^{-1}(y_0), p)$ é um fibrado cuja fibra é discreta.

O conjunto de todos os vetores tangentes a uma variedade diferenciável M é chamado de **fibrado tangente** de M . Mais ainda, quando a fibra é um espaço vetorial, dizemos que o fibrado é um **fibrado vetorial**.

A seção nula de um fibrado vetorial ξ é a aplicação $\zeta : M \rightarrow E$ que leva cada x no elemento zero de E_x , onde E_x é uma notação para $p^{-1}(x)$. Às vezes chamamos o subspaço $\zeta(M) \subset E$ de seção nula e o usual é identificar M com $\zeta(M)$ via ζ .

Definição 1.4. *Seja $M \subset V$ uma subvariedade. Uma **vizinhança tubular** de M (ou para o par (V, M)) é um par (f, ξ) onde $\xi = (E, M, p)$ é um fibrado vetorial sobre M e $f : E \rightarrow V$ é um mergulho tal que:*

- *A restrição $f|_M = I_M$, onde M é identificada com a seção nula de E ;*
- *$f(E)$ é uma vizinhança aberta de M em V .*

Também nos referimos ao aberto $W = f(E)$ como uma vizinhança tubular de M . Temos então associada a W uma retração $q : W \rightarrow M$ fazendo com que (W, M, q) seja um fibrado vetorial cuja seção nula é a inclusão $j : M \rightarrow W$.

Teorema 1.2. *Seja V uma variedade diferenciável e $M \subset V$ uma subvariedade diferenciável com $\partial M = \partial V = \emptyset$. Então M tem uma vizinhança tubular em V .*

Seja $\xi = (E, M, p)$ um fibrado vetorial. Um produto interno (de classe C^r em ξ) é uma família $\alpha = \{\alpha_x\}_{x \in M}$ onde cada α_x é um produto interno no espaço vetorial E_x , tal que a aplicação $(x, y, z) \rightarrow \alpha_x(y, z)$, definida em $\{(x, y, z) \in M \times E_x \times E_x : x = p(y) = p(z)\}$ é C^r . O par (ξ, α) é chamado fibrado vetorial com produto interno.

Suponha que (ξ, α) seja um fibrado vetorial com produto interno. Se y e z estão na mesma fibra E_x escrevemos $\langle y, z \rangle$ ou $\langle y, z \rangle_x$ para $\alpha_x(y, z)$. Se $\eta \subset \xi$ é um subfibrado, o complemento ortogonal $\eta^\perp \subset \xi$ é o subfibrado definido fibra a fibra por $(\eta^\perp)_x = (\eta_x)^\perp = \{y \in E_x : \langle y, z \rangle = 0, \text{ para todo } z \in \eta_x\}$.

Seja $M \subset N$ uma C^{r+1} -subvariedade e suponha que N tem um produto interno de classe C^r no fibrado tangente TN . Se $T_M N$ é a notação para a restrição de TN a M , então $TM^\perp \subset T_M N$ é chamado de fibrado normal geométrico de M em N . O fibrado normal algébrico de M em N é o fibrado quociente $C^r T_M N / TM$, que é isomorfo a $TM^\perp$.

Sejam M e N n -variedades compactas orientadas sem bordo, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação C^1 e $x \in M$ um ponto regular de f . Assuma que N é conexa e seja $y = f(x)$. Se o isomorfismo $T_x f : M_x \rightarrow N_y$ preserva orientação, então dizemos que x tem tipo positivo e denotamos por $\deg_x f = 1$. Da mesma forma, se $T_x f$ inverte orientação então x tem tipo negativo e denotamos por $\deg_x f = -1$. Dizemos que $\deg_x f$ é o grau de f em x .

Se $f : M \rightarrow N$ é C^1 e $A \subset N$ é uma subvariedade, dizemos que f é transversa a A se para cada $y \in A$ o espaço tangente N_y é gerado por A_y e pela imagem $T_x f(M_x)$.

Seja W uma variedade orientada de dimensão $m+n$ e $N \subset W$ uma n -subvariedade orientada fechada. Se $f : M \rightarrow W$ é uma aplicação C^∞ transversa a N , dizemos que $x \in f^{-1}(N)$ tem tipo positivo se a composição

$$M_x \xrightarrow{T_f} W_y \longrightarrow W_y / N_y$$

com $y = f(x)$ preserva a orientação. Neste caso escrevemos $\#_x(f, N) = 1$. Se a composição não preservar orientação, escrevemos $\#_x(f, N) = -1$. O número de interseção de f e N é o inteiro

$$\#(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} \#_x(f, N).$$

Se M é também uma sub-variedade de W e $i : M \rightarrow W$ é a inclusão, o número de interseção de M e N é o inteiro $\#(M, N) = \#(i, N)$. Para enfatizar W colocamos $\#(M, N) = \#(M, N; W)$.

Definição 1.5. *Seja $\xi = (E, M, p)$ um fibrado vetorial orientado n -dimensional. Identificando M com a seção nula e assumindo que M é conexo, orientado, compacto, n -dimensional e sem bordo, podemos definir o **número de Euler** de ξ como o inteiro*

$$\varepsilon(\xi) = \#(M, M) = \#(M, M; E).$$

Se M é uma superfície não-orientável conexa e fechada, mergulhada suavemente em $\mathbb{R}^4$ com característica de Euler χ , então o número de Euler de M é $\pm m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. O teorema a seguir era uma conjectura, feita por H. Whitney em 1940 e provada por W. S. Massey em 1969 (os detalhes podem ser encontrados em [9]).

Teorema 1.3. *Nas hipóteses do parágrafo anterior, m só pode assumir os valores $2\chi - 4, 2\chi, 2\chi + 4, \dots, 4 - 2\chi$.*

As dualidades que utilizaremos serão a de Poincaré e a de Alexander. A primeira é uma relação entre a homologia e a cohomologia de um espaço topológico X qualquer, enquanto a segunda relaciona a cohomologia de determinados subconjuntos de S^n com a homologia de seu complementar.

Definição 1.6. *O **fibrado tangente de homologia** de uma variedade conexa X é o par fibrado $(X \times X, X \times X - \delta(X))$ com fibra $(X, X - x)$, onde $x \in X$ é qualquer e $\delta(X)$ (a diagonal de X) é definida por $\delta(X) = \{(x, x) \in X \times X\}$.*

Uma n -variedade X é dita **R-orientável** se seu fibrado tangente de homologia é orientável, ou seja, se existe $\mathcal{U} \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R)$ tal que para todo $x \in X$, a restrição $\mathcal{U}|_{(\{x\} \times (X, X - \{x\}))}$ é gerador de $H^n(\{x\} \times (X, X - \{x\}); R) \approx H^n(X, X - \{x\}, R)$. Tal classe de cohomologia $\mathcal{U}$ é chamada orientação de X .

Uma n -variedade X (não necessariamente conexa) é dita **orientável** se tem as componentes orientáveis, e uma orientação para X é uma classe de cohomologia $\mathcal{U} \in H^n(X \times X, X \times X - \delta(X); R)$ cuja restrição a cada componente é uma orientação desta componente.

Exemplo 1.5. Para $\mathbb{R}^n$, o par fibrado $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \delta(\mathbb{R}^n))$ é trivial por que a aplicação $f(z, z') = (z, z - z')$ é um homeomorfismo entre $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \delta(\mathbb{R}^n))$ e o produto cartesiano do espaço $\mathbb{R}^n$ e da fibra $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Assim, $\mathbb{R}^n$ é uma variedade orientável.

Teorema 1.4 (Dualidade de Poincaré). Se $\mathcal{U}$ é uma R -orientação de uma n -variedade compacta X , então para todo número natural q e todo R -módulo G existe um isomorfismo

$$\gamma_{\mathcal{U}} : H_q(X; G) \approx H^{n-q}(X; G)$$

Teorema 1.5 (A dualidade de Alexander). Se $A \subset S^n$ é fechado, então

$$\tilde{H}_q(S^n - A) \approx \tilde{H}^{n-q-1}(A).$$

onde a cohomologia é a de Čech-Alexander-Spanier.

Nos próximos parágrafos trabalharemos com a teoria de homologia singular com coeficientes inteiros.

O homomorfismo de Hurewicz estabelece uma relação entre os grupos de homotopia e os grupos de homologia de um espaço topológico X . Dada uma aplicação contínua $\alpha : (I^n, \dot{I}^n) \rightarrow (X, A)$, se α_* é o homomorfismo induzido por α então temos que $\alpha_*(Z_n) \in H_n(X, A)$, onde Z_n é um gerador fixado de $H_n(I^n, \dot{I}^n) \approx \mathbb{Z}$. Se α é homotópica a β , então $\alpha_*(Z_n) = \beta_*(Z_n)$ e portanto para $n \geq 1$ existe uma aplicação bem definida

$$\varphi : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow H_n(X, A)$$

tal que $\varphi[\alpha] = \alpha_*(Z_n)$, onde $\alpha : (I^n, \dot{I}^n) \longrightarrow (X, A)$ leva $z_0 = (0, 0, \dots, 0)$ em x_0 e representa um elemento de $\pi_n(X, A, x_0)$. Identificado $\pi_n(X, x_0)$ com $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0)$ obtemos o **homomorfismo de Hurewicz**

$$\varphi : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X, x_0).$$

Definição 1.7. Uma terna $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ de grupos abelianos e homomorfismos é **exata** se $\text{imagem}(f) = \text{kernel}(g)$. Uma seqüência de grupos abelianos e homomorfismos

$$\dots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} \dots$$

é exata se cada terna é exata. A seqüência exata

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

é chamada seqüência exata curta. Observe que $h : G_1 \rightarrow G_2$ é um isomorfismo se e só se

$$0 \longrightarrow G_1 \xrightarrow{h} G_2 \longrightarrow 0$$

é exata.

Considere uma cobertura $\{U, V\}$ de um espaço topológico X para a qual $\text{int}(U) \cup \text{int}(V) = X$. Então a **seqüência de Meyer-Vietoris** para essa cobertura é a seqüência exata

$$\dots \longrightarrow H_n(U \cap V) \longrightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

onde os homomorfismos são induzidos por inclusões ou são homomorfismos de conexão.

Tor_n^R e Ext_R^n são funtores com papel essencial para o estabelecimento do teorema dos coeficientes universais, que fornece uma relação entre homologias (ou cohomologias) de X com diferentes coeficientes. Esse resultado será muito importante por que na parte final desta dissertação temos homologias com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Z}_2$.

Se X é um R -módulo qualquer, uma resolução projetiva de X é uma seqüência exata $\mathbb{C} : \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \rightarrow \dots$ de R -módulos satisfazendo as seguintes condições:

- $C_{-1} = X$;
- $C_n = 0$ para $n < -1$;
- C_n é um R -módulo projetivo para $n \geq 0$.

O produto tensorial sobre um anel comutativo R de dois R -módulos A e B é um R -módulo

$A \otimes B$ com uma aplicação bilinear $f : A \times B \rightarrow A \otimes B$ tal que para toda aplicação bilinear $g : A \times B \rightarrow X$ de $A \times B$ em um R -módulo X exista um único homomorfismo $h : A \otimes B \rightarrow X$ tal que a figura abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{f} & A \otimes B \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & X & \end{array}$$

Se Y é um R -módulo e consideramos o produto tensorial $\mathbb{C} \otimes Y$:

$$\mathbb{C} \otimes Y : \dots \longrightarrow C_{n+1} \otimes Y \xrightarrow{\partial \otimes i} C_n \otimes Y \xrightarrow{\partial \otimes i} C_{n-1} \otimes Y \longrightarrow \dots$$

então podemos definir o produto de torção n-dimensional sobre R de X e Y por

$$Tor_n^R(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 0; \\ X \otimes Y & \text{se } n = 0; \\ H_n(C \otimes Y) & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Se ao invés do produto tensorial $C \otimes Y$ tivéssemos optado pelo $Hom(C, Y)$, que é a seqüência

$$C : \dots \longrightarrow Hom(C_{n+1}, Y) \xrightarrow{\delta} Hom(C_n, Y) \xrightarrow{\delta} Hom(C_{n-1}, Y) \longrightarrow \dots$$

teríamos então o produto de extensão n-dimensional sobre R dos módulos X e Y :

$$Ext_R^n(X, Y) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq -1; \\ Hom(X, Y) & \text{se } n = 0; \\ H_n[Hom(C, Y)] & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Dizemos que uma seqüência exata curta de R-módulos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ **cinde** quando $B = A' \oplus C'$, sendo $A' \subset B$ a imagem de A por i e $C' \subset B$ isomorfo a C .

Teorema 1.6 (Teorema dos coeficientes universais). *Se R é um domínio de ideais principais e C_n é um R -módulo livre $\forall n$ então existe um homomorfismo $k : H_n(C; G) \rightarrow Tor(H_{n-1}(C), G)$ para todo inteiro n tal que*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes G \xrightarrow{j} H_n(C, G) \xrightarrow{k} Tor[H_{n-1}(C), G] \longrightarrow 0$$

é uma seqüência exata curta que cinde, e desta forma temos que

$$H_n(C; G) \approx (H_n(C) \otimes G) \oplus \text{Tor}[H_{n-1}(C), G].$$

Ainda, com um enunciado semelhante a este, existe um resultado correspondente para cohomologia, que será utilizado por nós na seguinte forma:

$$H^n(C, G) \approx \text{Hom}(H_n(C), G) \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$$

onde $\text{Hom}(H_n(C), G)$ é a notação para o R -módulo dos R -homomorfismos de $H_n(C)$ em G .

Definição 1.8. Dizemos que uma n -subvariedade N de uma m -variedade M é **localmente planar** se cada ponto de N tem uma vizinhança fechada U em M tal que o par $(U, U \cap N)$ é topologicamente equivalente ao par canônico de bolas (B^m, B^n) .

Exemplo 1.6. Se girarmos um segmento enodado de $\mathbb{R}_+^3$, cujo bordo está em $\mathbb{R}^2 \equiv \partial\mathbb{R}_+^3$ em torno de $\mathbb{R}^2$ visto como um eixo de $\mathbb{R}^4$, obtemos uma 2-esfera localmente planar, como na figura 1.3. A figura 1.4 nos mostra um exemplo de 2-variedade em $\mathbb{R}^4$ que não é localmente planar. É a suspensão de um nó não trivial de $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.3: Um segmento enodado não trivial girando em torno de um eixo em $\mathbb{R}^4$.

Figura 1.4: A suspensão de um nó não trivial não é localmente planar.

Outro resultado utilizado neste trabalho é a prova da conjectura de Poincaré

para quatro dimensões na categoria topológica. Tal prova se deve a Freedman no seu famoso artigo “The topology of four dimensional manifolds” [2]. O resultado é:

Teorema 1.7. *Se Σ^4 é uma 4-variedade homotopicamente equivalente a S^4 , então Σ^4 é homeomorfa a S^4 .*

Definição 1.9. *Dizemos que existe uma equivalência de homotopia entre dois espaços X e Y quando existem funções contínuas $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tais que as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotópicas às identidades de X e de Y , respectivamente.*

O teorema a seguir foi retirado de [14]:

Teorema 1.8. *Uma equivalência de homotopia induz isomorfismos nos grupos de homologia correspondentes. Mais ainda, uma aplicação entre espaços simplesmente conexos que induz isomorfismos nos grupos de homologia correspondentes é uma equivalência homotópica.*

Terminaremos as preliminares com algumas informações sobre um dos termos mais presentes neste trabalho, o espaço quaterniônico. Como o capítulo 3 é todo ele dedicado ao estudo deste espaço, aqui seremos breves e daremos apenas uma definição temporária e algumas propriedades.

Assim, o espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$ é o espaço quociente S^3/Q onde S^3 é a esfera unitária no corpo $\mathbb{R}^4$ e Q é o grupo dos quatérnios. Este mesmo grupo também é o grupo fundamental de $\mathbf{Q}$, e a homologia do espaço quaterniônico é dada por $H_0(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbf{Q}) = 0$, $H_3(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}$.

Capítulo 2

Mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ em S^4

Neste capítulo daremos enfoque ao plano projetivo real e algumas de suas propriedades quando mergulhado na 4-esfera.

Definição 2.1. *Considere a esfera S^2 e a aplicação antipodal $A : S^2 \rightarrow S^2$ que associa cada ponto $x \in S^2$ ao ponto diametralmente oposto $-x \in S^2$. O espaço quociente obtido através da identificação dos pontos x e $A(x)$ é chamado **plano projetivo real**, e será denotado por $\mathbb{R}P^2$.*

A homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ com coeficientes inteiros é dada por

$$H_i(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \text{ e } i \neq 1 \end{cases}$$

e para coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ temos

$$H_i(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{para } 0 \leq i \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

2.1 Alguns resultados importantes sobre $\mathbb{R}P^2 \subset S^4$

A seguir abordaremos questões relativas a mergulhos do plano projetivo em S^4 . Serão apresentados resultados sobre a unicidade do fibrado normal do mergulho, sobre o tipo de homologia do espaço complementar $S^4 - \mathbb{R}P^2$ e sobre os possíveis valores para o número de enlaçamentos quando dois planos projetivos são mergulhados em S^4 como sub-variedades disjuntas. Visando não prejudicar a fluência na leitura do trabalho, apenas os resultados mais importantes para esta dissertação terão uma prova mais detalhada. Quanto aos demais resultados, se houver uma prova, esta será feita de forma bastante sucinta. Todos os mergulhos aqui considerados são diferenciáveis de classe C^∞ .

Teorema 2.1. *Qualquer que seja o mergulho do plano projetivo real na esfera S^4 , o fibrado normal é único.*

Demonstração. A prova é um resultado direto da classificação dos fibrados por 2-planos sobre $\mathbb{R}P^2$ feita por J. Levine. Com base na tabela da página 593 de seu trabalho em [8], a primeira classe de Stiefel-Whitney e o número de Euler determinam completamente tais fibrados.

Mas a classe de Stiefel-Whitney do fibrado normal é o único elemento não-nulo de $H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ e, mais ainda, de acordo com a prova da conjectura de Whitney (feita por Massey em [10]), o número de Euler do fibrado normal é duas vezes um gerador do grupo cíclico infinito $H^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})$, onde $\mathbb{Z}$ denota homologia com coeficientes torcidos. Podemos então concluir que o fibrado normal é único, já que qualquer outro fibrado tem necessariamente a mesma classe de Stiefel-Whitney e o mesmo número de Euler. $\square$

A dualidade de Alexander nos garante um isomorfismo de grupos graduados

$H^*(S^4 - \mathbb{R}P^2) \approx H^*(\mathbb{R}P^2)$ para quaisquer coeficientes e o teorema a seguir, que pode ser encontrado em [10], nos assegura que o isomorfismo também preserva o produto cup.

Teorema 2.2. *Qualquer que seja o mergulho do plano projetivo real em S^4 , para quaisquer coeficientes temos o seguinte isomorfismo de anéis de cohomologia:*

$$H^*(S^4 - \mathbb{R}P^2) \approx H^*(\mathbb{R}P^2)$$

A seguir temos uma condição necessária e suficiente para que o espaço complementar $S^4 - \mathbb{R}P^2$ tenha o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}P^2$. A prova pode ser encontrada em [10], página 805.

Teorema 2.3. *Dado um mergulho de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 , $S^4 - \mathbb{R}P^2$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}P^2$ se e somente se $\pi_1(S^4 - \mathbb{R}P^2)$ é cíclico de ordem dois.*

Agora estudaremos um mergulho disjunto de um par de planos projetivos em S^4 e os possíveis números de enlaçamentos. Sejam então P_1 e P_2 dois planos projetivos reais mergulhados em S^4 como subconjuntos disjuntos. Observe que nos exemplos a seguir os coeficientes das homologias estão em $\mathbb{Z}_2$.

Considere duas classes de homologia $\alpha \in H_1(P_1)$ e $\beta \in H_2(P_2)$ e tome representantes a e b , respectivamente, para as duas classes. Seja A uma 2-variedade em S^4 cujo bordo é a . Usando homotopia, se necessário, podemos considerar que A e b estão em posição regular e então haverá apenas um número finito de pontos de interseção.

Definiremos uma aplicação $\mathcal{L} : H_1(P_1) \otimes H_2(P_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ por

$$\mathcal{L}(\alpha \otimes \beta) = \begin{cases} 1, & \text{se o número de pontos de interseção for ímpar;} \\ 0, & \text{se o número de pontos de interseção for par.} \end{cases}$$

Esta aplicação nos fornece o **número de enlaçamentos** entre as classes $\alpha \in H_1(P_1)$ e $\beta \in H_2(P_2)$. Este número indica quantas vezes uma classe se enlaça na outra em S^4 .

O valor zero pode ser atingido se tomarmos S^4 dividida em dois discos D_1^4 e D_2^4 , com $P_1 \subset D_1^4$ e $P_2 \subset D_2^4$, como visto na figura 2.1. Um exemplo de quando o valor um é atingido ocorre quando temos dois mergulhos padrão do plano projetivo em S^4 , um mergulhado no complementar do outro (veja anexo). Estudaremos este mergulho padrão com maiores detalhes na próxima seção.

Figura 2.1: O número de enlaçamento de dois planos projetivos mergulhados em S^4 pode ser 0.

Conclui-se que o número de enlaçamentos entre dois planos projetivos reais mergulhados em $\mathbb{R}^4$ pode assumir qualquer valor (em $\mathbb{Z}_2$).

Neste trabalho, se P é um mergulho localmente planar do plano projetivo em S^4 então denotaremos por $N(P)$ uma vizinhança tubular de P em S^4 que é um fibrado por 2-discos não-orientável sobre P , com número de Euler ± 2 . Antes de terminar a seção vale notar que $\pi_1(N(P)) = \mathbb{Z}_2$ e $\chi(N(P)) = 1$.

2.2 O mergulho padrão do plano projetivo em S^4

Vamos considerar $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ na forma $S^1 \times B^2 \cup_{\partial} B^2 \times S^1$. A figura 2.2 mostra como esta decomposição pode ser visualizada:

- No quadro 1 temos um toro $S^1 \times B^2$ e uma circunferência S^1 formada pela união da reta r e de um ponto “no infinito”, denotado por ∞ .
- A idéia agora é preencher todo o espaço restante com discos cujos centros sejam pontos de S^1 . No quadro 2 podemos ver nosso ponto de partida, o disco de centro no ponto $A \in S^1$.
- O quadro seguinte mostra que qualquer ponto $x \in S^1, x \neq \infty$ é o centro de um disco cujo bordo está em $S^1 \times B^2$.
- E finalmente no último quadro vemos que ∞ é centro de um disco cujo bordo é a circunferência de diâmetro máximo contida no toro $S^1 \times B^2$.

Mais ainda, assim como temos um homeomorfismo de S^2 com $B^2_1 \cup_{\partial} S^1 \times [-1, 1] \cup_{\partial} B^2_2$, existe também um homeomorfismo $S^4 \equiv B^4_1 \cup_{\partial} S^3 \times [-1, 1] \cup_{\partial} B^4_2$, e S^4 será vista por hora desta maneira.

Assim, temos

$$\begin{aligned} S^4 &\equiv B^4_1 \cup_{\partial} (S^1 \times B^2 \cup_{\partial} B^2 \times S^1) \times [-1, 1] \cup_{\partial} B^4_2 \equiv \\ &\equiv B^4_1 \cup_{\partial} (S^1 \times B^2 \times [-1, 1]) \cup_{\partial} (B^2 \times S^1 \times [-1, 1]) \cup_{\partial} B^4_2. \end{aligned}$$

O mergulho padrão do plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ em S^4 , denotado por P^2 , é a união de uma faixa de Möbius M propriamente mergulhada em $S^1 \times B^2 \times [-1, 1]$ com um disco $D = B^2$ propriamente mergulhado em B^4 . A faixa de Möbius mergulhada

Figura 2.2: $S^3 = S^1 \times B^2 \cup_{\partial} B^2 \times S^1$.

em $S^1 \times B^2 \times [-1, 1]$ é como na figura 2.3 e o plano projetivo padrão é como visto na figura 2.4.

Observação 2.1. Como $B^4_1 - D$ é um colar, temos que $B^2 \times S^1 \times [-1, 1] \cup B^4_1 - D$ também é um colar, e portanto $S^4 - P$ é na verdade $(S^1 \times B^2 \times [-1, 1] - M) \cup B^4_2$ unido a um colar no bordo.

Por outro lado, se considerarmos uma faixa de Möbius M' cujo bordo está em $S^1 \times B^2 \times \{-1\}$ colada a um disco $D^{2'} \subset B^4_2$, temos um outro mergulho padrão P' do plano projetivo localmente planar que é retrato por deformação de $S^4 - P$,

Figura 2.3: A faixa de Möbius M mergulhada em $S^1 \times B^2 \times [-1, 1]$.

Figura 2.4: O mergulho padrão de P em S^4 .

o que nos leva a concluir que $S^4 - P$ tem o mesmo tipo de homotopia de P . Em particular temos $\pi_1(S^4 - P) \approx \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(S^4 - P) \approx \mathbb{Z}$, $\pi_3(S^4 - P) \approx \mathbb{Z}$. Generalizando temos para $i \geq 2$ $\pi_i(S^4 - P) \approx \pi_i(P) \approx \pi_i(S^2)$, que em geral não é trivial.

O teorema a seguir, extraído de [7] nos garante uma caracterização completa do mergulho padrão:

Teorema 2.4. *Um plano projetivo localmente planar em S^4 é não-enodado (ou padrão) se e somente se $\pi_1(S^4 - P) \approx \mathbb{Z}_2$.*

Capítulo 3

O espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$

Neste capítulo caracterizaremos o espaço quaterniônico, que denotaremos por $\mathbf{Q}$, e apresentaremos algumas de suas propriedades. Na parte final da seção o mesmo será mergulhado em S^4 a partir do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 mostrado na seção anterior.

3.1 O grupo dos quatérnios

O grupo fundamental do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$ é o grupo dos quatérnios e este grupo será brevemente apresentado agora, juntamente com algumas de suas propriedades mais importantes.

Considere o anel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, onde a soma é a usual e a multiplicação é dada por $(a_0, b_0, c_0, d_0) \cdot (a_1, b_1, c_1, d_1) = (a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1, a_0b_1 + b_0a_1 + c_0d_1 - c_1d_0, a_0c_1 + a_1c_0 + d_0b_1 - d_1b_0, a_0d_1 + d_0a_1 + b_0c_1 - b_1c_0)$.

Denotando $1 = (1, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 0, 1)$, o anel dos quatérnios é o subconjunto $\{(a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R})\}$, onde

$$a_0 + b_0i + c_0j + d_0k = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k \Leftrightarrow a_0 = a_1, b_0 = b_1, c_0 = c_1 \text{ e } d_0 = d_1.$$

Definição 3.1. *O grupo dos quatérnios é o subconjunto $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ do anel dos quatérnios, com a operação de multiplicação do anel.*

O grupo dos quatérnios não é abeliano e tem a propriedade de que todos os seus subgrupos são normais; mais ainda, sua abelianização, ou seja, seu quociente pelo subgrupo comutador, é $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, o que é fácil ver pelas relações que o definem.

Também valem as seguintes propriedades para Q :

$$\begin{aligned} i \cdot k &= -j & i \cdot j &= k, & j \cdot k &= i, \\ k \cdot i &= j, & j \cdot i &= -k, & k \cdot j &= -i, \\ i^2 &= j^2 = k^2 &= -1. \end{aligned}$$

A notação utilizada até agora é a mais usual, mas para o nosso caso a seguinte notação é muito útil: coloque $i = a, j = b$ e $k = ab$, e então o grupo tem apresentação $|a, b : a^2 = b^2 = (ab)^2|$. O motivo de tal escolha se mostrará evidente mais adiante.

3.2 O grupo dos automorfismos externos de $\mathbb{Q}$

Já temos, então, todos os elementos necessários para uma definição precisa do espaço quaterniônico:

Definição 3.2. *O espaço quaterniônico $\mathbb{Q}$ é o espaço total do fibrado por S^1 não-orientável sobre um plano projetivo real $\mathbb{RP}^2$, com número de Euler ± 2 e grupo fundamental isomorfo ao grupo dos quatérnios Q .*

O espaço quaterniônico é encontrado em quase todos os resultados que se seguirão, inclusive no resultado mais importante para a dissertação - cuja prova depende de

como são os automorfismos externos de Q , que veremos a seguir.

Definição 3.3. *Seja $(G, \circ)$ um grupo. Se $g \in G$, definimos $I_g : G \rightarrow G$ por $I_g(x) = gxg^{-1}$. I_g é um automorfismo de G para todo $g \in G$, que é chamado automorfismo interno associado a g . O conjunto dos automorfismos internos de G é denotado por $I(G)$:*

$$I(G) = \{I_g : g \in G\} \subseteq \text{Aut}(G)$$

Um elemento $h \in \text{Aut}(G) \setminus I(G)$ é um automorfismo externo.

O grupo dos automorfismos externos de $\pi_1(\mathbf{Q})$, é formado pelos seguintes elementos:

$$\gamma_0 : a \mapsto a, \quad b \mapsto b$$

$$\gamma_1 : a \mapsto a, \quad b \mapsto ab$$

$$\gamma_2 : a \mapsto ab, \quad b \mapsto a$$

$$\gamma_3 : a \mapsto b, \quad b \mapsto a$$

$$\gamma_4 : a \mapsto ab, \quad b \mapsto b$$

$$\gamma_5 : a \mapsto b, \quad b \mapsto ab$$

Um subgrupo normal de G é levado a ele mesmo por qualquer automorfismo interno e é levado a um outro subgrupo normal de mesma ordem por um automorfismo externo. Para uma demonstração do teorema a seguir, consulte [11]. Os automorfismos acima também foram retirados deste artigo.

Teorema 3.1. *O grupo $M(\mathbf{Q})$ das classes de isotopia dos auto-homeomorfismos de $\mathbf{Q}$ que preservam orientação é isomorfo ao grupo dos automorfismos externos de $\pi_1(\mathbf{Q})$, e o isomorfismo é induzido pela correspondência que associa a cada auto-homeomorfismo o automorfismo induzido.*

3.3 A construção de $\mathbf{Q}$ a partir do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 .

Nos próximos parágrafos exibiremos em maiores detalhes o fibrado normal por 2-discos do mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$, cujo bordo é o espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$. Inicialmente trabalharemos com S^4 na forma

$$B^4_1 \bigcup_{S^3} B^4_2$$

e o mergulho padrão será visto aqui como na figura 3.1.

Figura 3.1: O mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4

Veja ainda nesta figura que a faixa de Möbius M está totalmente contida em S^3 e que $\partial M = S^1$ é a circunferência unitária em S^3 . O disco D^2 está mergulhado em B^4_1 imediatamente acima do disco unitário em S^3 .

Descreveremos o fibrado normal por 2-discos ν de duas formas distintas: a primeira delas tem como objetivo esclarecer sobre a colagem de $D^2 \times I^2$ à ν/M , onde ν/M é a restrição de ν a M . A segunda descrição é a mais comum, daí a importância de apresentá-la aqui.

3.3.1 Sobre a colagem de $D^2 \times I^2$ à ν/M

É conveniente começarmos a primeira descrição de ν tomando o fibrado normal por 1-discos de M em S^3 , que será um fibrado “torcido” sobre M , veja a figura 3.2.

Figura 3.2: O fibrado normal trivial sobre M em S^3 .

Observe que o espaço total é um toro sólido e que a restrição à $\partial M = S^1$ é um cilindro, veja a figura 3.3. Tal restrição será vista por nós como no último quadro desta figura e será denotada por F_{D^1} .

A partir daí, para termos o fibrado normal por 2-discos a M em S^4 basta considerarmos um fibrado trivial por intervalos verticalmente em B^4_1 e B^4_2 , que corresponde à dimensão que ganhamos ao passarmos de S^3 para S^4 .

Mas o mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 é de tal forma que a faixa de Möbius M intercepta o interior do disco unitário B^2 em S^3 (cujo bordo é S^1) e em toda

Figura 3.3: A restrição do fibrado normal de M à ∂M

essa interseção devemos ter necessariamente o fibrado por 2-discos em um plano paralelo ao quarto eixo w . Devido à natureza torcida deste mergulho padrão de M , a interseção do fibrado por 2-discos sobre M e do interior de $D^2 \subset D^4_1$ não é vazia.

É preciso então ajustarmos este fibrado antes de colarmos o fibrado por 2-discos sobre D^2 . Para isso, primeiro o empurramos sobre si mesmo paralelamente à S^3 , com o cuidado de deixar o fibrado trivial em S^3 , como no quadro 2 da figura 3.4. Faremos isso de tal forma que o subfibrado sobre ∂M se projete no toro sólido $[-1, 1] \times F_{D^1}$, ou seja, agora todo o fibrado por 2-discos sobre ∂M pode ser visto em S^3 . Observe que com isto também estamos movendo levemente o interior da faixa de Möbius M .

Como deixamos fixo o fibrado trivial que já estava em S^3 , a restrição à ∂M do fibrado por 2-discos é um toro “amassado” e para corrigir isso basta empurrar o fibrado na direção do quarto eixo, no sentido de B^4_1 para B^4_2 , de maneira que agora temos um toro sem nenhuma deformação que não por acaso é o segundo toro na figura 3.5.

Empurrando desta forma podemos manter fixo (em S^3) o fibrado normal trivial sobre ∂M , mas nada impede que partes de M sejam empurradas para o interior

Figura 3.4: Empurramos o fibrado desta maneira até que ele esteja todo em S^3 .

de B^4_2 . Na verdade toda uma vizinhança de ∂M em M será empurrada para B^4_2 . Precisamos então diminuir o diâmetro dos discos do fibrado normal para que neste novo mergulho de M o fibrado normal intercepte D^2 apenas em ∂D^2 . Vamos nos referir a este fibrado como ν/M .

Agora já é possível completarmos o fibrado por 2-discos sobre P colando $D^2 \times I^2$ (que é o fibrado normal por 2-discos sobre D^2 em S^4) a ν/M . Para isso precisamos de uma aplicação de colagem $\varphi : (\partial D^2) \times I^2 \rightarrow \nu/M$ que, depois deste processo de reposicionamento, está mais fácil de ser descrita. Esta aplicação estará completamente determinada se tivermos a imagem de uma longitude de $\partial D^2 \times I^2$, porque φ deve levar cada meridiano num outro meridiano. Determinaremos então a imagem por φ de $\partial D^2 \times z$, onde $z \in \partial I^2$.

Para isso utilizaremos a estrutura de produto de ν/M na qual cada componente do bordo do fibrado normal por intervalos sobre ∂M é uma longitude. Uma importante observação deve ser feita agora: pela figura 3.3 podemos notar que cada uma dessas componentes contorna o toro $S^1 \times B^2$ uma vez no sentido longitudinal e duas no sentido latitudinal, ou seja, a longitude do S^1 -fibrado sobre ∂M não é a longitude usual de $S^1 \times B^2$.

Figura 3.5: A descrição geométrica de $\varphi(\partial D^2 \times z)$.

Este fato é fundamental para entendermos como age a aplicação φ : a figura 3.5 mostra que $\varphi(\partial D^2 \times z)$ percorre $\nu/\partial M$ uma vez no sentido longitudinal e duas no sentido latitudinal. Observe que os pontos $a, b, c, d \in (\partial D^2) \times I^2$ são levados a seus correspondentes $a', b', c', d' \in \nu/M$ e com isto a imagem dos meridianos de $(\partial D^2) \times I^2$ também está definida.

3.3.2 A descrição usual de ν .

Agora que o procedimento de colagem já está descrito de forma satisfatória, podemos descrever ν da maneira mais usual. Para isso precisaremos do conceito de cilindro de uma aplicação.

Definição 3.4. *Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. O cilindro da aplicação f é o espaço quociente obtido através da identificação da colagem de $X \times I$ e Y feita identificando $(x, 1) \in X \times I$ com $f(x) \in Y$, e considerando-se para este espaço a topologia de identificação usual.*

Feita esta definição, podemos encarar o fibrado normal de M em S^3 como o

cilindro da aplicação de recobrimento por duas folhas $D : A \rightarrow M_2$, onde A é um cilindro e M_2 é uma faixa de Möbius. Isto está detalhado na figura 3.6: o primeiro quadro mostra a forma como devemos encarar $A \times I$, o segundo mostra o cilindro de aplicação, nos próximos quatro quadros temos a forma como foi feita a colagem, e nos dois últimos vemos como a faixa de Möbius M é um “sub-cilindro de aplicação”. Observe que M é ortogonal a M_2 e que ambas têm a mesma linha central $M \cap M_2$ e que A é na verdade o cilindro $\nu/\varphi M$ mostrado antes na figura 3.3. Ao tratarmos M como um “sub-cilindro de aplicação”, diremos que esta aplicação é o recobrimento de duas folhas $d : S^1 \rightarrow S^1$. Finalmente, ν/M é o cilindro da aplicação $D \times id : A \times [-1, 1] \rightarrow M \times [-1, 1]$.

Desta vez colaremos $D^2 \times I^2$ ao topo do cilindro de aplicação de maneira que $\partial D^2 \times I^2$ contorna $A \times [-1, 1]$ uma vez no sentido longitudinal e duas no sentido latitudinal. Mas os cantos que surgem na colagem dificultam a definição da aplicação de colagem φ . Para resolver isso podemos trocar $D^2 \times I^2$ por $D^2 \times B^2$ e trocar também o cilindro de $D \times id$ pelo cilindro de $F : S^1 \times B^2 \rightarrow K^3$, onde K^3 é a garrafa de Klein sólida

$$\frac{[0, 1] \times B^2}{0 \times (x, y) \equiv 1 \times (-x, y)}$$

onde F é dada por

$$F(\theta \times (x, y)) = \begin{cases} \frac{\theta}{\pi} \times (x, y), & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \frac{\theta - \pi}{\pi} \times (-x, y), & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Podemos efetuar estas trocas por que os novos cilindros descrevem exatamente a mesma situação que tínhamos com os cilindros anteriores (na verdade o que acontece com F é uma “suavização” de $D \times id$).

Figura 3.6: Detalhes sobre o cilindro da aplicação $D : A \rightarrow M_2$

Feito isto, se $\rho_{2\alpha}$ é a rotação de B^2 por um ângulo de 2α radianos, então a aplicação de colagem $\varphi : \partial D^2 \times B^2 \rightarrow S^1 \times B^2$ é simplesmente $\varphi(\alpha \times (x, y)) = \alpha \times \rho_{2\alpha}(x, y)$

Com isto, se K^2 é a garrafa de Klein (bordo de K^3) então o bordo de ν é o cilindro de aplicação de $F|_{S^1 \times \partial B^2} : S^1 \times \partial B^2 \rightarrow K^2$ (denotado por M_1) colado a $D^2 \times \partial B^2$ (denotado por M_2), colando $(\partial D^2) \times (\partial B^2)$ a $S^1 \times \partial B^2$ pela restrição de φ . Isso pode ser esquematizado da forma como vemos na figura 3.7.

Observe que M_1 se contrai na garrafa de Klein K^2 e por isso temos $\pi_1(M_1) =$

Figura 3.7: O espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$.

$\pi_1(K^2) = |a, b : abab^{-1}|$, onde a e b são meridiano e latitude em K^2 , como na figura 3.7. Analogamente, M_2 se contrai num círculo e daí $\pi_1(M^2) = \pi_1(S^1) = |c : |$. O gerador c é representado por $\alpha_0 \times \partial B^2$ na mesma figura 3.7.

Para mostrarmos que o grupo fundamental de $\partial\nu = \mathbf{Q}$ é o grupo dos quaternios

faremos uso do teorema de Seifert-van Kampen e das aplicações de inclusão entre $M_1 \cap M_2$ e M_1, M_2 .

Observe se s e r denotam, respectivamente, longitude e latitude usuais do toro, então a longitude da interseção $M_1 \cap M_2 = S^1 \times S^1$ é denotada por rs^2 . Essa longitude é identificada com o elemento neutro por um lado e com b^2a^{-2} por outro. Por sua vez, o elemento latitudinal r é levado em c por um lado e em a por outro, de onde $a = c$. Mais ainda, podemos concluir com essas identificações acima que $b^2 = a^2$ e portanto o grupo fundamental do espaço quaterniônico é $\pi_1(\partial\nu) = |a, b, c : abab^{-1}, ac^{-1}, b^2c^{-2}| = |a, b : a^2 = b^2 = (ab)^2| = \{1, a, b, a^2, a^3, b^3, ab, ba\}$.

Ainda sobre as aplicações de inclusão, no caso de $\pi_1(\partial\nu) \rightarrow \pi_1(\nu) \approx \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, o elemento a é levado em $\bar{0}$ e b é levado em $\bar{1}$, e o kernel é o subgrupo gerado por a . Para o caso do mergulho padrão $\pi_1(\partial\nu) \rightarrow \pi_1(S^4 - \mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}_2$, temos $b \rightarrow 0, a \rightarrow 1$ e o kernel é gerado por b . Para os outros mergulhos a inclusão de $\partial\nu$ no complemento deve ser diferente mas o elemento a nunca pertencerá ao kernel por que a gera o primeiro grupo de homologia do complemento.

Observe ainda que $\pi_1(\partial\nu)$ abelianiza a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ com um $\mathbb{Z}_2$ gerado por a e o outro por b . Além disso, a gera $\pi_1(S^4 - \mathbb{R}P^2)$ e b é homologicamente nulo em $S^4 - P$, enquanto que b gera $H_1(\nu)$ e a é homologicamente nulo em ν .

Finalizaremos este capítulo calculando a homologia e a característica de Euler de $\mathbf{Q} = \partial\nu$. Começemos então pela homologia de $\mathbf{Q}$:

$$H_0(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z} \text{ pois } \mathbf{Q} \text{ é conexo por caminhos;}$$

$$H_1(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \text{ da abelianização de } \pi_1(\mathbf{Q});$$

$H_2(\mathbf{Q}) = 0$: Utilizaremos a sequência de Meyer-Vietoris para uma cobertura $\{W_n, N(\mathbb{R}P^2)\}$ de S^4 , onde $N(\mathbb{R}P^2)$ é como antes e o interior de W_n é seu complementar, ou seja, $W_n \cap N(\mathbb{R}P^2) = \mathbf{Q}$ e $W_n \cup N(\mathbb{R}P^2) = S^4$. A sequência exata

$H_3(S^4) \longrightarrow H_2(\mathbf{Q}) \longrightarrow H_2(W_n) \oplus H_2(N(\mathbb{R}P^2)) \longrightarrow H_2(S^4)$ nos fornece um isomorfismo $H_2(\mathbf{Q}) \approx H_2(W_n) \oplus H_2(N(\mathbb{R}P^2))$. Como $H_2(N(\mathbb{R}P^2)) = 0$ e $H_2(W_n) = 0$ ¹, segue que $H_2(\mathbf{Q}) = 0$.

E, $H_3(\mathbf{Q}) = \mathbb{Z}$, obtido do fato de que $0 \approx H_4(\mathbf{Q}) \approx H_4(W_n) \approx H_4(N(\mathbb{R}P^2)) \approx H_3(W_n) \approx H_3(N(\mathbb{R}P^2))$ e $H_4(S^4) \approx \mathbb{Z}$ e da sequência exata $\dots \longrightarrow H_4(\mathbf{Q}) \longrightarrow H_4(W_n) \oplus H_4(N(\mathbb{R}P^2)) \longrightarrow H_4(S^4) \longrightarrow H_3(\mathbf{Q}) \longrightarrow H_3(W_n) \oplus H_3(N(\mathbb{R}P^2)) \longrightarrow \dots$

A partir daí é fácil encontrarmos a característica de Euler de $\mathbf{Q}$, que é dada por $\chi(\mathbf{Q}) = 1 - 0 + 0 - 1 = 0$.

¹Fato que será provado no começo do próximo capítulo, onde W_n é tratado como $W_i, i = 1, 2$ ou como E_j ou ainda $E(P_j)$.

Capítulo 4

Mergulhos do espaço quaterniônico em S^4

Os estudos sobre os mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ e $\mathbf{Q}$ em S^4 feitos nos capítulos 2 e 3 deste trabalho são primordiais para o que nos propomos a fazer agora. Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar certos resultados sobre estes mergulhos e sobre seus complementos, em especial o mergulho de $\mathbf{Q}$ em S^4 .

Os coeficientes dos grupos de homologia deste capítulo são inteiros, a menos que se diga algo em contrário. O lema a seguir é uma peça fundamental para o primeiro teorema deste capítulo:

Lema 4.1. *Seja $f : \mathbf{Q} \longrightarrow S^4$ um mergulho localmente planar do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$. Se $W_i, i = 1, 2$ denota o fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$, então $H_1(W_i) \approx \mathbb{Z}_2$*

Demonstração. Sabemos que $H_1(W_1) \oplus H_1(W_2) \approx H_1(S^4 - f(\mathbf{Q}))$. Segue da dualidade de Alexander que $H_1(S^4 - f(\mathbf{Q})) \approx H^2(\mathbf{Q})$ e pela dualidade de Poincaré temos $H^2(\mathbf{Q}) \approx H_1(\mathbf{Q})$, como $H_1(\mathbf{Q})$ é a abelianização de $\pi_1(\mathbf{Q})$, segue que $H_1(\mathbf{Q}) =$

$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Similarmente, $H_2(W_1) \oplus H_2(W_2) \approx H_2(S^4 - f(\mathbf{Q})) \approx H^1(\mathbf{Q}) \approx H_2(\mathbf{Q}) = 0$, e portanto $H_2(W_1) = H_2(W_2) = 0$.

Suponha então que $H_1(W_2) = 0$. Temos que $H_1(W_1) \approx H^2(W_2)$ e pelo teorema dos coeficientes universais para cohomologia, temos $H^2(W_2) \approx \text{Hom}(H_2(W_2), \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(H_1(W_2), \mathbb{Z}) = 0$ porque como vimos antes $H_2(W_1) = H_2(W_2) = 0$.

Mas isto contradiz o fato de que $H_1(W_1) \oplus H_1(W_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e daí $H_1(W_2)$ não pode ser zero. Um argumento totalmente análogo nos mostra que $H_1(W_1)$ também não é zero. Segue então do fato de que $H_1(W_1) \oplus H_1(W_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ que só podemos ter $H_1(W_1) \approx H_1(W_2) = \mathbb{Z}_2$ □

4.1 Caracterização dos fechos das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$

O lema anterior era a última ferramenta que ainda precisávamos para caracterizar o fecho das componentes conexas do complemento de um mergulho localmente planar do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$ em S^4 . Este é o resultado mais importante desta dissertação:

Teorema 4.1. *Seja $f : \mathbf{Q} \rightarrow S^4$ um mergulho localmente planar do espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$. Então o fecho de cada componente conexa de $S^4 - f(\mathbf{Q})$ é homeomorfo ao fecho de $S^4 - N(P)$ para algum mergulho localmente planar do plano projetivo P em S^4 .*

A demonstração a seguir é um detalhamento daquela encontrada em [6].

Observação 4.1. *Lembre-se que $N(P)$ denota um fibrado por 2-discos que é uma vizinhança de P em S^4 .*

Demonstração. Denotaremos por W_i o fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$. Mais ainda, identificaremos $\mathbf{Q}$ com os bordos de W_1, W_2 e $N(P)$, que denotaremos por $\partial W_1, \partial W_2$ e $\partial N(P)$, respectivamente.

Mostraremos que existe um homeomorfismo $h_i : \partial N(P) \equiv \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q} \equiv \partial W_i, i = 1, 2$ tal que a 4-variedade fechada $W_i \cup_{h_i} N(P)$ obtida colando W_i e $N(P)$ usando h_i é homeomorfa a S^4 . Feito isso, temos $S^4 - N(P) \equiv W_i$ e portanto o teorema estará provado.

Considere um homeomorfismo qualquer $h : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ e seja $X_i = W_i \cup_h N(P)$. Vamos assumir por um instante que $X_i, i = 1, 2$ são simplesmente conexos.

Afirmamos que nesta situação existe isomorfismo entre os grupos de homologia correspondentes em X_i e S^4 , e a partir disso e do teorema 1.8 concluímos que X_i tem o mesmo tipo de homotopia de S^4 . O teorema 1.7 então nos garante o homeomorfismo que necessitamos para concluir todo o teorema.

Vejamos então o isomorfismo entre os grupos de homologia correspondentes em X_i e S^4 , assumindo que X_i é simplesmente conexo:

$H_0(X_i) = \mathbb{Z}$ por que X_i tem apenas uma componente conexa;

$H_1(X_i) = 0$ por que estamos assumindo X_i simplesmente conexo;

$H_3(X_i) \approx H^1(X_i) \approx \text{Hom}(H_1(X_i), \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(H_0(X_i), \mathbb{Z}) = 0$ por que $H_1(X_i) = 0$ e H_0 é sempre livre.

$H_4(X_i) = \mathbb{Z}$ por que X_i é uma 4-variedade fechada e orientada.

Por fim, como a característica de Euler de X_i é dois, $H_2(X_i)$ só pode ser um grupo de torção. Mas $H_2(X_i) = H^2(X_i) \approx \text{Hom}(H_2(X_i), \mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}(H_1(X_i), \mathbb{Z})$ e portanto $H_2(X_i) = 0$.

Portanto, os grupos de homologia correspondentes entre X_i e S^4 são isomorfos.

Então, tudo que precisamos é mostrar que X_i é simplesmente conexa para algum homeomorfismo h . Sem perda de generalidade, consideremos X_1 .

Pela definição de W_1 e W_2 , existe um homeomorfismo $g : \mathbf{Q} \equiv \partial W_1 \rightarrow \partial W_2 \equiv \mathbf{Q}$ tal que $W_1 \cup_g W_2 \equiv S^4$. Mais ainda, como $\mathbb{Z}_2$ é abeliano, $\pi_1(N(P)) \approx H_1(N(P)) \approx H_1(P) \approx \mathbb{Z}_2$. Lembremos também que pelo lema anterior temos $H_1(W_i) \approx \mathbb{Z}_2$.

Agora, na figura 4.1 temos que id, id_1 e id_2 são identidades, $i_1, i_2, j, w_0, w_1, w_2, \overline{w_0}, \overline{w_1}$ e $\overline{w_2}$ são inclusões e $k = \beta \circ \alpha$ é a composta da aplicação de Hurewicz $\alpha : \pi_1(W_2) \rightarrow H_1(W_2)$ e do isomorfismo $\beta : H_1(W_2) \approx \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \approx \pi_1(N(P))$.

Figura 4.1: Os homomorfismos φ_0, φ_1 e φ_2 .

Consideramos então

$$\varphi_0 = \overline{w_{0*}} \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*) = \overline{w_{1*}} \circ i_{1*} \circ h_{1*} \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*) = \overline{w_{2*}} \circ j_* \circ id_2 \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*)$$

$$\varphi_1 = \overline{w_{1*}} \circ id$$

$$\varphi_2 = \overline{w_{2*}} \circ k = \overline{w_{2*}} \circ \beta \circ \alpha$$

Se vale a comutatividade

$$\varphi_0 = \varphi_1 \circ i_{1*} \circ g_* = \varphi_2 \circ i_{2*} \circ id_1 \quad (*)$$

então o teorema de Seifert - van Kanpem nos garante a existência de um único homomorfismo $\lambda : \pi_1(S^4) \rightarrow \pi_1(X_1)$ tal que $\varphi_i = \lambda \circ w_{i*}, i = 0, 1, 2$.

Observe que id e k são sobrejetoras e daí temos que λ também é sobrejetora. Como $\pi_1(S^4)$ é trivial, segue que $\pi_1(X_1)$ também é trivial e portanto X_i é simplesmente conexo.

Então precisamos mostrar apenas que existe um auto-homeomorfismo h_1 de $\mathbf{Q}$ para o qual a comutatividade $(*)$ vale.

Como $\varphi_0 = \overline{w_{1*}} \circ i_{1*} \circ h_{1*} \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*) = \overline{w_{1*}} \circ i_{1*} \circ g_* = \overline{w_{1*}} \circ id \circ i_{1*} \circ g_* = \varphi_1 \circ i_{1*} \circ g_*$, devemos verificar apenas a comutatividade

$$\varphi_0 = \varphi_2 \circ i_{2*} \circ id_1. \quad (**)$$

Se a comutatividade $k \circ i_{2*} \circ id_1 = j_* \circ id_2 \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*)$ vale, então temos que $\overline{w_{2*}} \circ k \circ i_{2*} \circ id_1 = \overline{w_{2*}} \circ j_* \circ id_2 \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*)$ e daí $(**)$ vale. Logo, o que precisamos para a conclusão do teorema é apenas mostrar a existência de um homeomorfismo $h_1 : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ tal que

$$k \circ i_{2*} = j_* \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*). \quad (***)$$

Para isso, utilizaremos o teorema 1.5, que nos garante que para qualquer automorfismo externo ψ de $\pi_1(\mathbf{Q})$ existe um auto-homeomorfismo de $\mathbf{Q}$ cujo auto-

morfismo induzido é exatamente ψ . Então, se existe um automorfismo externo $\psi : \pi_1(\mathbf{Q}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{Q})$ tal que $j_* \circ \psi = k \circ i_{2*}$, existe também um auto-homeomorfismo h_1 tal que $h_{1*} = g_* \circ \psi^{-1}$ e daí vale a comutatividade (***):

$$k \circ i_{2*} = j_* \circ \psi = j_* \circ \psi \circ g_*^{-1} \circ g_* = j_* \circ ((h_{1*})^{-1} \circ g_*).$$

Portanto, é suficiente verificarmos a existência de um automorfismo $\psi : \pi_1(\mathbf{Q}) \rightarrow \pi_1(\mathbf{Q})$ tal que $j_* \circ \psi = k \circ i_{2*}$. (Figura 4.2)

$$\begin{array}{ccc}
 & & H_1(W_2) \\
 & \nearrow \alpha & \uparrow \beta \\
 \pi_1(W_2) & \xrightarrow{k} & \pi_1(N(P)) \\
 \uparrow i_{2*} & & \uparrow j_* \\
 \pi_1(Q) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(Q) \\
 \uparrow g_* & & \uparrow h_{1*} \\
 \pi_1(Q) & \xrightarrow{=} & \pi_1(Q)
 \end{array}$$

Figura 4.2: ψ deve ser tal que $j_* \circ \psi = k \circ i_{2*}$.

Como b é um elemento de $\pi_1(\mathbf{Q})$ que representa uma seção sobre uma faixa de Möbius em $P \approx \mathbb{R}P^2$, então $j_*(b)$ gera $\pi_1(N(P)) \approx \mathbb{Z}_2$ e $j_*(a)$ é a identidade, onde a é o elemento de $\pi_1(\mathbf{Q})$ que representa uma fibra (como visto na página 36). Seja $c \in H_1(W_2) \approx \mathbb{Z}_2$ o gerador. Então precisamos encontrar um automorfismo ψ que faz o diagrama da figura 4.3 comutar, onde $\mathbb{Z}_2 \langle x \rangle$ é o grupo cíclico de ordem 2 gerado por x .

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(W_2) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(W_2) = \mathbb{Z}_2 \langle c \rangle \\
\uparrow i_{2*} & & \uparrow \beta^{-1} \\
\pi_1(Q) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(N(P)) = \mathbb{Z}_2 \langle j_*(b) \rangle \\
& & \uparrow j_* \\
& & \pi_1(Q) = \langle a, b; a^2 = b^2 = (a, b)^2 \rangle
\end{array}$$

Figura 4.3: ψ deve ser tal que o diagrama comuta .

No diagrama comutativo da figura 4.4, α' e α são homomorfismo e aplicação de Hurewicz, respectivamente:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(W_2) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(W_2) \\
\uparrow i_{2*} & & \uparrow i_{2*} \\
\pi_1(Q) & \xrightarrow{\alpha'} & H_1(Q)
\end{array}$$

Figura 4.4: Diagrama comutativo .

Considere a sequência exata de homologia do par $(W_2, \partial W_2) = (W_2, \mathbb{Q})$:

$$H_1(\mathbb{Q}) \xrightarrow{i_{2*}} H_1(W_2) \longrightarrow H_1(W_2, \mathbb{Q})$$

Temos que $\dots H_1(W_1) \rightarrow 0 \approx H_1(S^4) \rightarrow H_1(S^4, W_1) \rightarrow 0$, e por excisão, temos que $0 \approx H_1(S^4, W_1) \approx H_1(W_2, \mathbb{Q})$. Assim $i_{2*} : H_1(\mathbb{Q}) \rightarrow H_1(W_2)$ é sobrejetora e então na figura 4.4 temos $\alpha \circ i_{2*}$ também sobrejetora. Logo, restam apenas as seguintes três possibilidades para $\alpha \circ i_{2*} : \pi_1(\mathbb{Q}) \rightarrow H_1(W_2)$:

$$1) a \longmapsto c, \quad b \longmapsto 1$$

$$2) a \longmapsto 1, \quad b \longmapsto c$$

$$3) a \longmapsto c, \quad b \longmapsto c$$

onde $1 \in H_1(W_2) = \mathbb{Z}_2 \langle c \rangle$ é o elemento identidade. Tome

$$\psi = \begin{cases} \gamma_2(\text{ou } \gamma_3), & \text{para o caso 1} \\ \gamma_0(\text{ou } \gamma_1), & \text{para o caso 2} \\ \gamma_4(\text{ou } \gamma_5), & \text{para o caso 3.} \end{cases}$$

onde γ_i são os automorfismos externos de $\pi_1(\mathbf{Q})$ mostrados na seção 3.2. Definindo ψ dessa forma, o diagrama da figura 4.2 é comutativo e portanto a prova do teorema está completa. $\square$

4.2 Caracterização de certos pares de mergulhos de $\mathbb{R}P^2$ em S^4

Agora mostraremos que os complementares dos D^2 -fibrados sobre certos pares de mergulhos de planos projetivos em S^4 são na verdade o fecho das componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$ para algum mergulho localmente planar de $\mathbf{Q}$ em S^4 .

Para isso, se P é um mergulho localmente planar do plano projetivo real em S^4 , denotaremos por $E(P)$ o fecho de $S^4 - N(P)$. Por conveniência, diremos que $E(P)$ é o exterior do plano projetivo P .

Teorema 4.2. *Seja $P_j, j = 1, 2$ um mergulho localmente planar do plano projetivo em S^4 . Suponha que o kernel do homomorfismo $i_{j*} : \pi_1(\partial E(P_j)) \longrightarrow \pi_1(E(P_j))$ é de ordem quatro para $j = 1$ ou para $j = 2$, onde $i_j : \partial E(P_j) \longrightarrow E(P_j), j = 1, 2$ é*

a aplicação de inclusão. Então existe um mergulho localmente planar $f : \mathbf{Q} \longrightarrow S^4$ tal que os fechos das duas componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$ são homeomorfos a $E(P_1)$ e $E(P_2)$.

Provaremos o teorema mostrando que existe um homeomorfismo $h : \partial E(P_2) \longrightarrow \partial E(P_1)$ tal que a 4-variedade fechada $E(P_1) \cup_h E(P_2)$ obtida colando-se $E(P_1)$ e $E(P_2)$ usando h é homeomorfa a S^4 .

Demonstração. Seja $E_j = E(P_j), j = 1, 2$. Então a característica de Euler da 4-variedade fechada $M_h = E_1 \cup_h E_2$ é igual a dois para qualquer homeomorfismo $h : \partial E_1 \rightarrow E_2$:

Sabemos que a característica de Euler de $\mathbf{Q}$ é 0. Como $\chi(S^4) = 2$ e $\chi(N(P_j)) = 1$ e $\chi(S^4) = \chi(E_j) + \chi(N(P_j)) - \chi(\mathbf{Q})$, segue que $2 = \chi(E_j) + 1 - 0$ e portanto $\chi(E_j) = 1$. Daí concluímos que

$$\chi(M_h) = \chi(E_1) + \chi(E_2) - \chi(\mathbf{Q}) = 1 + 1 - 0 = 2$$

Podemos então fazer uso do teorema 1.7, e com isso a prova se reduz a mostrar que M_h é simplesmente conexa. Vamos assumir então que o kernel de i_{j*} é de ordem quatro e identificaremos $\partial E_j \equiv \partial N(P_j)$ com $\mathbf{Q}$ de tal forma que a estrutura de S^1 -fibrado de $\mathbf{Q}$ coincida com a de $\partial N(P_j)$ induzida pela estrutura de D^2 -fibrado de $N(P_j)$.

Pelo que vimos antes, $\pi_1(E_j)$ é normalmente gerado por $i_{j*}(a)$, onde a é um elemento de $\pi_1(\mathbf{Q})$ que representa uma fibra.

Afirmção: Os únicos subgrupos de $G = \pi_1(\mathbf{Q})$ de ordem quatro são os seguintes:

$$G_a = \{1, a, a^2, a^3\} \quad G_b = \{1, b, b^2, b^3\} \quad G_{ab} = \{1, ab, (ab)^2, (ab)^3\}$$

Isso acontece por que qualquer subgrupo de G que contenha a , deve também conter o seu inverso a^{-1} . O mesmo ocorre com os elementos b e ab . Logo um subgrupo de ordem quatro não pode conter quaisquer dois elementos do conjunto $\{a, b, ab\}$. Segue que todo subgrupo de ordem quatro em G deve conter apenas um destes elementos e portanto as únicas alternativas possíveis são G_a, G_b e G_{ab} .

Como assumimos que o kernel de i_{1*} tem ordem quatro, então ele deve coincidir com G_a, G_b ou G_{ab} . Como $i_{j*}(a)$ gera normalmente $\pi_1(E_j)$, o homomorfismo de Hurewicz garante que a classe de homologia em $H_1(E_j) \approx \mathbb{Z}_2$ correspondente a $i_{j*}(a)$ não é trivial e assim o kernel de i_{j*} deve coincidir com G_b ou G_{ab} .

Suponha, sem perda de generalidade, que $\text{kernel}(i_{j*}) = G_b$. Denotando por $g_i : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$ um auto-homeomorfismo de $\mathbf{Q}$ que corresponde ao automorfismo externo γ_i , vamos considerar $h = g_3$ (correspondente a γ_3). Então o diagrama da figura 4.5 é comutativo, onde $\overline{i_j}$ são inclusões para $j = 1, 2$. Observe ainda que $h_* = \gamma_3$ é fundamental para a comutatividade, uma vez que inverte a “troca de elementos” realizada pela utilização de h na colagem de E_1 e E_2 .

Pelo teorema de Seifert - van Kampen, $\pi_1(E_1 \cup_h E_2)$ é gerado por $\overline{i_{j*}}(\pi_1(E_j)), j = 1, 2$ e tem relações

- $\overline{i_{1*}} \circ i_{1*} \circ h_*(a) = \overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(a)$
- $\overline{i_{1*}} \circ i_{1*}(b) = \overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(a)$
- e daí $\overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(a) = 1$
- $\overline{i_{1*}} \circ i_{1*} \circ h_*(b) = \overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(b)$ e portanto $\overline{i_{1*}} \circ i_{1*}(a) = \overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(b)$

Como $i_{2*}(a)$ gera normalmente $\pi_1(E_2)$, vemos que $\overline{i_{2*}}(\pi_1(E_2))$ é o grupo trivial em $\pi_1(M_h)$, uma vez que $\overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(a) = 1$. Mais ainda, $i_{2*}(b) \in \pi_1(E_2)$ e como

Figura 4.5: $h_* = \gamma_3$ é fundamental para a comutatividade do diagrama.

$\overline{i_{2*}}(\pi_1(E_2)) = 1$, temos que $\overline{i_{1*}} \circ i_{1*}(a) = \overline{i_{2*}} \circ i_{2*}(b) = 1$ em $\pi_1(M_h)$.

Como $i_{1*}(a)$ gera normalmente $\pi_1(E_1)$, então $\overline{i_{1*}}(\pi_1(E_1))$ é também trivial e daí $\pi_1(M_h)$ é o grupo trivial.

O caso onde $\ker(i_{1*}) = G_{ab}$ é inteiramente análogo, e portanto a prova do teorema está completa. $\square$

Capítulo 5

Considerações finais

Concluiremos este trabalho de dissertação apresentando algumas observações e alguns problemas relacionados ao que foi apresentado nos capítulos anteriores. Alguns destes problemas ainda não foram solucionados e outros são meramente a título de curiosidade. De maneira geral, trataremos aqui de colocar o teorema 4.1 em um contexto mais abrangente.

5.1 Observações Gerais

A primeira observação diz respeito ao teorema 4.1 e ao teorema 4.2: o fato é que não se sabe se a condição sobre a ordem de $\ker(i_{1*})$ ou $\ker(i_{2*})$ é realmente necessária. É verdade que para um mergulho padrão de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 essa condição é satisfeita e portanto a abrangência destes resultados é bastante satisfatória, mas ainda não se pode afirmar nada no caso mais geral. Katanaga e Saeki em [6] conjecturam que na verdade para qualquer plano projetivo P mergulhado em S^4 temos ordem quatro para $\ker(i_*)$, mas isso ainda é apenas uma conjectura.

No que se segue, um mergulho localmente planar de S^2 em S^4 será chamado de 2-nó em S^4 . Se P_0 é um mergulho localmente planar de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 , denotamos por $P_0 \sharp K$ a soma conexa de P_0 e K em S^4 (portanto $P_0 \sharp K$ é um mergulho obtido a partir de K trocando um pequeno 2-disco com uma faixa de Möbius). A afirmação a seguir é uma aplicação do último teorema e segue do fato de que se P é da forma $P = P_0 \sharp K$ para algum 2-nó K então $i_* : \pi_1(\partial E) \rightarrow \pi_1(E)$ tem kernel de ordem 4, onde $E = E(P)$ e $i : \partial E \rightarrow E$ é a inclusão.

Teorema 5.1. *Se P e P' são mergulhos localmente planares de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 tais que $P = P_0 \sharp K$ para algum 2-nó K em S^4 , então existe um mergulho localmente planar $f : \mathbf{Q} \rightarrow S^4$ tal que os fechos das duas componentes conexas de $S^4 - f(\mathbf{Q})$ são homeomorfos a $E(P)$ e $E(P')$.*

Este teorema é claramente mais abrangente se for verdadeira a conjectura de Kinoshita: todo plano projetivo mergulhado em S^4 é soma conexa de um plano projetivo padrão e um 2-nó. Também está aberta a questão de saber se para qualquer $P \subset S^4$, a ordem de $\ker(i_*)$ ser quatro implica que P é homeomorfo à soma conexa de P_0 e um 2-nó.

5.2 Problemas relacionados

Os primeiros problemas abordados a seguir são todos referentes à categoria linear por partes. Sejam Γ e Δ poliedros conexos compactos. Suponha que existam mergulhos “padrão” $\varphi_0 : \Gamma \rightarrow S^4$ e $\psi_0 : \Delta \rightarrow S^4$ tais que $\varphi_0(\Gamma) \cap \psi_0(\Delta) = \emptyset$. Se N_Γ e N_Δ são vizinhanças regulares de $\varphi_0(\Gamma)$ e $\psi_0(\Delta)$ em S^4 , respectivamente, suponhamos ainda que $N_\Gamma \cup N_\Delta = S^4$ e $N_\Gamma \cap N_\Delta = \partial N_\Gamma = \partial N_\Delta = M$ é uma 3-variedade fechada, orientável e conexa.

O problema a seguir é uma generalização para quatro dimensões do problema de

Fox em [1]. Este último resultado foi a motivação do trabalho de Katanaga e Saeki em [6], onde foi originalmente publicado o teorema 4.1.

Problema 5.1. *Seja $f : M \rightarrow S^4$ um mergulho localmente planar linear por partes e sejam A e B os fechos das componentes conexas de $S^4 - f(M)$. A questão é saber se existem mergulhos $\varphi : \Gamma \rightarrow S^4$ e $\psi : \Delta \rightarrow S^4$ tais que A e B (ou B e A) são homeomorfos aos fechos de $S^4 - N(\varphi(\Gamma))$ e $S^4 - N(\psi(\Delta))$ respectivamente, onde $S^4 - N(\varphi(\Gamma))$ e $S^4 - N(\psi(\Delta))$ são vizinhanças regulares de $\varphi(\Gamma)$ e $\psi(\Delta)$ em S^4 , respectivamente.*

Para deixar clara a importância e a abrangência deste resultado, concluiremos este capítulo final com exemplos que nos mostrarão alguns casos particulares do mesmo.

Exemplo 5.1. *Sejam Γ e Δ dois pontos distintos em S^4 . Considerando N_Γ e N_Δ homeomorfos a D^4 , então S^4 se decompõe como $S^4 = N_\Gamma \cup N_\Delta$, com $M = S^3$. Neste caso, o problema 5.1 é conhecido como a conjectura de Schoenflies para quatro dimensões e foi resolvido na categoria topológica por Brown.*

Exemplo 5.2. *Sejam Γ um círculo e Δ uma 2-esfera. Seja $\psi_0 : \Delta \rightarrow S^4$ o mergulho padrão e $\varphi_0 : \Gamma \rightarrow S^4 - \psi_0(\Delta)$ um mergulho tal que $\varphi_0(\Gamma)$ e $\psi_0(\Delta)$ tem número de enlaçamento ± 1 em S^4 . Então S^4 se decompõe como $S^4 = N_\Gamma \cup N_\Delta$, onde N_Γ é homeomorfo a $S^1 \times D^3$ e N_Δ é homeomorfo a $S^2 \times D^2$, com $M = S^1 \times S^2$. Nesta forma, o problema 5.1 foi resolvido na categoria topológica. De fato, todo mergulho localmente planar de $S^1 \times S^2$ em S^4 é bordo de algum $D^2 \times S^2$ mergulhado em S^4 .*

Exemplo 5.3. *Sejam Γ a superfície do toro sólido e $\varphi_0 : \Gamma \rightarrow S^4$ o mergulho padrão, ou seja, $\varphi_0(\Gamma)$ borda um mergulho de $S^1 \times D^2$ em S^4 . O fecho do complemento de uma vizinhança regular de $\varphi_0(\Gamma)$ em S^4 é chamado de **gêmeos de Montesinos** (Montesino's twins) e é denotado por Tw . De fato, Tw é uma vizinhança regular*

de um poliedro Δ mergulhado em S^4 que consiste de duas 2-esferas não enodadas que se intersectam transversalmente em dois pontos com sinais distintos.

Definimos $\phi_0 : \Delta \rightarrow S^4$ como sendo a inclusão. Temos então uma decomposição $S^4 = N_\Gamma \cup N_\Delta$ com $N_\Gamma = T^2 \times D^2$ e $N_\Delta = Tw$. A 3-variedade M acaba sendo o toro sólido T^3 . Não sabemos se existe uma resposta para o problema 5.1 para este caso de mergulhos de T^3 em S^4 .

Exemplo 5.4. Seja $\Gamma = \Delta = \mathbb{R}P^2$ e $\varphi_0 : \mathbb{R}P^2 \rightarrow S^4$ um mergulho padrão. Então o fecho de $S^4 - N(\varphi_0(\mathbb{R}P^2))$ é também uma vizinhança regular de um mergulho localmente planar de $\mathbb{R}P^2$ em S^4 e a partir daí definimos $\psi_0 : \Delta \rightarrow S^4$. Desta forma S^4 se decompõe como $S^4 = N_\Gamma \cup N_\Delta$ e M é o espaço quaterniônico $\mathbf{Q}$. O teorema 4.1 é então a resposta afirmativa para o problema 5.1 na categoria topológica.

Anexo

A figura abaixo mostra dois mergulhos padrão do plano projetivo em S^4 , um mergulhado no complemento do outro. A interpretação desta figura fica mais fácil depois da leitura da exposição sobre o plano projetivo padrão feita na seção 2.2

Figura 5.1: O número de enlaçamento de dois planos projetivos mergulhados em S^4 pode ser 1.

Referências Bibliográficas

- [1] R. H. Fox. On the imbedding of polyhedra in 3-space. *Ann. of Math.*, 49:462–470, 1948.
- [2] M. H. Freedman. The topology of four dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17:357–453, 1982.
- [3] M. J. Greenberg. *Lectures on Algebraic Topology*. W. A. Benjamin, Inc., 1st. edition, 1967.
- [4] M. W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1st. edition, 1976.
- [5] S. T. Hu. *Introduction to homological algebra*. Holden-Day, Inc., 1st. edition, 1968.
- [6] A. Katanaga and O. Saeki. Embeddings of quaternion space in s^4 . *J. Austral. Math. Soc.*, (Series A)65:313–325, 1998.
- [7] T. Lawson. Detecting the standard embeddings of $\mathbb{R}p^2$ in s^4 . *Math. Ann.*, 267:439–448, 1984.
- [8] J. Levine. Spaces with involution and bundles over $\mathbb{R}p^2$. *Amer. J. Math.*, 85:516–539, 1963.
- [9] W. S. Massey. Proof of a conjecture of whitney. *Pacific J. Math*, 31:143–156, 1969.

- [10] W. S. Massey. Imbeddings of projective planes and related manifolds in spheres. *Indiana Univ. Math J.*, 23:791–812, 1974.
- [11] T. M. Price. Homeomorphisms of quaternion space and projective planes in four space. *J. Austral. Math. Soc.*, (Series A)23:112–128, 1977.
- [12] T. M. Price and D. M. Roseman. Embeddings of the projective plane in four space. Preprint, 1975.
- [13] H. Seifert and W. Threlfall. *Lehrbuch der topologie*. Leipzig:Teubner, 1934.
- [14] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill Book Company, 1st. edition, 1966.
- [15] J. W. Vick. *Homology Theory - an introduction to algebraic topology*. Academic Press, 1st. edition, 1973.