Construção geométrica de "star-product" integral
em espaços simpléticos simétricos não compactos

John Beiro Moreno Barrios

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Construção geométrica de "star-product" integral em espaços simpléticos simétricos não compactos

John Beiro Moreno Barrios

***Orientadora:* Prof. Dr. Pedro Paulo de Magalhães Rios**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Março de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B275c Barrios, John B. Moreno
Construção geométrica de $\star$ -integral
em espaços simpléticos simétricos não compactos /
John B. Moreno Barrios; orientador Pedro P. de
Magalhães Rios. -- São Carlos, 2013.
165 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Quantização. 2. Quantização geométrica. 3.
Produto integral oscilatório. 4. Quantização por
deformação. 5. Espaços de Hilbert de reprodução. I.
Rios, Pedro P. de Magalhães, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram para minha formação profissional e pessoal até esse momento. Dentre elas, meus familiares e amigos que fiz durante o doutorado. Em particular, minha mãe Carmen Elena Barrios Doria, e meu orientador Pedro de Magalhães Rios.

Agradeço ainda o apoio financeiro concedido pela CAPES.

Resumo

A quantização geométrica é um método desenvolvido para prover uma construção geométrica que relacione a mecânica clássica com a quântica. O primeiro passo consiste em apresentar uma forma simplética, ω , sobre uma variedade simplética, M , como a forma curvatura da conexão ∇ de um fibrado linear, L , sobre M . As funções sobre M operam como seções de L . Mas o espaço de todas as seções é grande demais. Queremos considerar seções constantes em certa direção, com respeito a derivada covariante dada por ∇ , e para isso precisamos o conceito de polarizações, essas seções são chamadas de seções polarizadas. Para obter uma estrutura de espaço de Hilbert nestas seções, precisamos de certos objetos chamados de meias densidades. Além disso, também temos um empareamento sesquilinear entre seções de polarizações diferentes. Neste trabalho, primeiramente consideraremos o empareamento para seções polarizadas adaptadas a polarizações reais não transversais, como método para obter aplicações integrais entre estes espaços de Hilbert que em combinação com a convolução do par grupóide $M \times \overline{M}$, pode definir um produto integral de funções definidas na variedade simplética. Este produto, no caso do plano euclidiano e do plano de Bieliavsky, coincide com produto de Weyl integral e o produto de Bieliavsky, respectivamente. Já no caso do plano hiperbólico, este tipo de polarizações reais não são transversais nem são não transversais, dessa forma, escolhemos o empareamento entre uma polarização real e uma polarização holomorfa do par grupóide, as quais são transversais, para obter

um produto integral no plano hiperbólico, que no caso do plano euclidiano é o produto de Weyl.

Abstract

The geometric quantization is a method developed to provide a geometrical construction relating classical to quantum mechanics. The first step consists of realizing the symplectic form, ω , on a symplectic manifold, M , as the curvature form of a line bundle, L , over M . The functions on M then operate as sections of L . However, the space of all sections of L is too large. One wants to consider sections which are constant in certain directions (polarized sections) and for that one needs to introduce the concept of a polarization. To get a Hilbert space structure on the polarized sections, one needs to consider objects known as half densities. In this work, first we consider a sesquilinear pairing between objects associated to certain different polarizations, which are nontransverse real polarizations, to obtain integral applications between their associated Hilbert spaces, and to use the convolution of the pair groupoid $M \times \overline{M}$ to obtain an integral product of functions on M . In the euclidian plane case, we recover the integral Weyl product and, in the Bieliavsky plane case, we obtain the Bieliavsky product. On the other hand, for the hyperbolic plane, such real polarizations are neither transverse nor nontransverse, so we use the pairing between a real polarization and a holomorphic polarization, which are transverse polarizations on the pair groupoid, to obtain an integral product of functions on the hyperbolic plane. This same procedure, in the euclidian plane case, also produces the integral Weyl product.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	11
1.1 Espaços Simpléticos Simétricos	11
1.2 Quantização Geométrica	13
1.3 Grupóide Simplético	20
1.4 Núcleo de Reprodução	24
2 O Produto integral de Weyl e a Quantização Geométrica	29
2.1 Produto integral de Weyl via polarizações reais não transversais	30
2.2 Produto integral de Weyl via polarizações transversais (real e holomorfa)	40
3 Produto Integral de Bieliavsky e a Quantização Geométrica	59
3.1 Produto integral de Bieliavsky via polarizações reais não transversais .	60
3.1.1 Uma classe de funções tipo Schwartz neste produto	71
4 Para uma Quantização Geométrica “de Weyl” no Plano Hiperbólico	73
4.1 Família de produtos via polarizações transversais (real e holomorfa) . .	74
4.1.1 Um caso particular mais explícito	95
Apêndice A	101
Apêndice B	109
Apêndice C	117
Apêndice D	129
Apêndice E	149

Apêndice F	151
Apêndice G	157
Referências Bibliográficas	165

Introdução

O problema da correspondência entre a mecânica clássica e quântica tem fascinado físicos e matemáticos desde a criação da mecânica quântica. O procedimento de passar da teoria clássica à quântica inicialmente produziu um procedimento chamado de quantização canônica, que consiste basicamente em asignar aos observáveis da mecânica clássica, funções de valor real $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, operadores auto adjuntos Q_f sobre o espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Na década de 70, o procedimento de quantização canônica foi melhor desenvolvido, principalmente nos trabalhos de B. Kostant [2, 16] e de Souriau [21], para incluir sistemas mecânicos mais gerais. O procedimento de Kostant-Souriau, chamado de quantização geométrica, nos permite atribuir a vários sistemas de mecânica clássica, definidos em termos da geometria simplética do espaço de fase, um espaço de Hilbert de estados que corresponde ao sistema quântico, dado como um espaço de seções de um fibrado linear complexo sobre o espaço fase do sistema clássico, sendo este o primeiro passo da quantização geométrica, chamado de pré-quantização geométrica.

Mas, em termos gerais, o problema da pré-quantização é que o espaço de Hilbert construído é grande demais para representar o espaço fase de um sistema quântico fisicamente razoável. Desta forma, surgem os conceitos de polarizações e as chamadas seções polarizadas, i.e., seções paralelas ao longo da polarização, que constituem um espaço de Hilbert adaptado a cada polarização, mediante a introdução e utilização dos conceitos de meias densidades, ou de meias formas.

Em geral, existem muitas possíveis escolhas para polarizações, de onde é natural pensar em uma forma geométrica de relacionar os espaços de Hilbert adaptados a duas polarizações diferentes. Com este objetivo, surge o conceito de empareamento de meias-densidades, ou de meias formas, amplamente estudado nos trabalhos de Blattner ([5],[6]) e J. H. Rawnsley [18] (referências mais recentes são Woodhouse [27] e Guillemin and Sternberg [14]).

Outro procedimento de quantização pode ser obtido estendendo o contexto da quantização geométrica, de variedades simpléticas, para grupóides simpléticos. Neste outro procedimento, o objetivo principal é a construção de um produto integral de funções no espaço de fase, que seja não comutativo porém associativo, que esteja associado ao produto de operadores no espaço de Hilbert e que, num certo limite (semiclássico), recupere o produto usual de funções e também o parêntese de Poisson para funções (no espaço de fase, um espaço simplético).

Este procedimento foi inicialmente sugerido por Weinstein [23] como um método para obter um produto integral generalizando para o caso de funções num espaço de fase que seja um espaço simplético simétrico. Por outro lado, o produto integral de Weyl de funções num espaço simplético vetorial, inicialmente obtido por von Neumann e independentemente reobtido por Groenewold [12] utilizando o método de correspondência desenvolvido por Weyl [26], foi desenvolvido por Gracia-Bondia e Várilly [11] para o caso particular mais simples em que o espaço de fase é um espaço vetorial simplético e, em seguida, Bieliavsky [4] desenvolveu tal produto de funções no espaço simétrico de um grupo solúvel e dimensão $2n$, que nesta tese será chamado de “plano de Bieliavsky”. Pouco depois, uma primeira investigação parcial do procedimento aludido por Weinstein, para os casos de espaços simpléticos simétricos mais gerais, e em especial a esfera S^2 e o plano hiperbólico não compacto H^2 , foi efetuada por Rios e Tuynman [8], sem invocar meias-densidades ou meias-formas. Porém, o produto por eles obtido, embora simples e com o correto “limite semiclássico”, em geral não é associativo.

Neste trabalho, primeiramente, motivados pelo trabalho de Gracia-Bondia e Várilly acima, estudamos o empareamento da quantização geométrica por meias-densidades para duas polarizações reais não transversais no grupóide simplético, como uma ferramenta para obter duas aplicações integrais que, pelo menos no caso do plano Euclidiano e do plano de Bieliavsky, uma é a inversa da outra. Tais aplicações, combinadas com a convolução no par grupóide reduzido, nos permite reobter o produto integral de Weyl e também o produto integral de Bieliavsky [4] para funções de suporte compacto.

Em seguida, para o plano hiperbólico não compacto, estudamos o empareamento da quantização geométrica por meias-densidades para uma polarização real e outra holomorfa, no grupóide simplético, como uma ferramenta para obter duas aplicações integrais que, conjecturamos, para uma certas escolhas de medida, uma é a inversa da outra. Tais aplicações, combinadas com uma convolução no par grupóide, deformada por tal escolha de medida, nos permite obter um produto integral de funções no plano hiperbólico que, de acordo com tal conjectura, é associativo. Nossa abordagem para o caso do plano hiperbólico não compacto segue em paralelo completo com uma outra abordagem para o caso do plano euclideano que reproduz o produto integral de Weyl.

De forma mais específica, nosso trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, introduzimos os conceitos básicos pertinentes ao trabalho, incluindo propriedades elementares da quantização geométrica por meias densidades, assim como a definição do empareamento de seções polarizadas adaptadas a polarizações diferentes. Descrevemos também algumas informações de grupóides simpléticos para variedades simplesmente conexas que serão úteis para a definição do produto integral. Finalizamos o capítulo apresentando algumas propriedades do núcleo de reprodução do espaço de Hilbert

$$\mathcal{HL}^2(U, \alpha) = \left\{ F \in \mathcal{H}(U); \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\},$$

onde, $\mathcal{H}(U)$ é o espaço das funções holomorfas definidas em U e α é uma função continua estritamente positiva. Essas propriedades serão úteis nos capítulos 2 (seção 2.2) e 4.

No capítulo 2, obtemos o produto de Moyal-Weyl no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$ diretamente da quantização geométrica no par grupóide $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, junto com a convolução do par grupóide, como segue.

Na seção 2.1, começamos estudando as seções polarizadas associadas a um par de polarizações não transversais reais, uma gerada pela polarização natural do fibrado co-tangente $T^*\mathbb{R}^2$, isto é, a gerada por a projeção $\pi : T^*\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, e um simplectomorfismo

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^*\mathbb{R}^2; (x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \widehat{\omega}(y-x) \right),$$

com ω a forma simplética de $\mathbb{R}^2$ e $\widehat{\omega}(x) = \omega(\cdot, x)$. A outra polarização é gerada por $\langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$, para $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Agora, dados $(x_1, x_3), (x_1, x_2), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2$, definimos a convolução

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_3) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1, x_2) f_2(x_2, x_3) dx_2$$

para funções suaves sobre $\mathbb{R}^2$ tais que a integral acima existe.

Daí, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Sejam $\mathbb{R}^2$ o plano euclidiano com forma simplética canônica, $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ o par grupóide simplético gerado do plano euclidiano e Φ_1 a aplicação dada acima. Para $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}^2$ e $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ consideremos as polarizações $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$, $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$ de $T^*\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ respectivamente, e $\widetilde{F} = (\Phi_1^{-1})_*(F)$. Então, para $\psi \in L \otimes \Delta_{-1/2}(\widetilde{F})$ e $\psi' \in L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$,*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = \langle f, T_1 g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle S_1 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{pr}$ é o empareamento de seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$, $\psi = f\tilde{s}_0 v$; $\psi' = gt_0 v'$, com v, v' seções de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\Delta_{-1/2}(P)$ respectivamente, $(t_0, t_0) = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1$, f, g funções de suporte compacto e T_1, S_1 aplicações integrais definidos a seguir:

$$T_1 g(x_1, y_1) = C \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{-\frac{i}{\hbar} q(x_2 - x_1)} dq,$$

$$S_1 f(p, q) = C \int_{\mathbb{R}} f\left(p - \frac{q^*}{2}, \frac{q^*}{2} + p\right) e^{\frac{i}{\hbar} q q^*} dq^*,$$

com C uma constante positiva.

Além disso, se $\bar{\otimes}$ é a convolução no grupóide reduzido, definimos

$$(g_1 *_\hbar g_2)(p, q) := S_1[T_1 g_1 \bar{\otimes} T_1 g_2](p, q)$$

e obtemos

$$g_1 *_\hbar g_2 = g_1 *_\hbar^0 g_2,$$

onde $*_\hbar^0$ denota o produto integral de Weyl para funções tipo Schwartz.

Esta seção 2.1 pode ser considerada como um detalhamento matemático das idéias apresentadas e desenvolvidas menos formalmente por José Gracia-Bondia e Joseph Várilly em [11].

Já na seção 2.2, como $\mathbb{R}^2$ é uma variedade simplética, temos a identificação $T^*\mathbb{R}^2 \cong T\mathbb{R}^2$. Assim, escolhemos um par de polarizações transversais, uma gerada pela aplicação

$$\Phi_2 : T\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; (m, v_m) \mapsto (\exp_m(-v_m), \exp_m(v_m))$$

partindo da polarização gerada pelas fibras do fibrado tangente, a outra uma polarização holomorfa no par grupóide simplético $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, de onde, por um raciocínio análogo ao anterior, mas introduzindo uma medida apropriada no espaço de funções holomorfas que será também utilizada para deformar a convolução no grupóide de pares, temos o seguinte resultado:

Teorema 0.0.2. *Sejam $(\mathbb{R}^2, \omega)$ o plano Euclidiano com a forma simplética canônica, $(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2, \Omega)$ o par grupóide simplético, com $\Omega = \alpha^* \omega - \beta^* \omega$, sendo α e β as projeções canônicas de $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Sejam ainda, Φ_2 a aplicação dada acima, P a polarização trivial do fibrado tangente, gerada pelas fibras e F a polarização holomorfa de $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$. Ou seja, para $(x, y; v_x, v_y) \in T\mathbb{R}^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ as polarizações são dadas por*

$$P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle; \quad F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$$

$$\tilde{P} = \Phi_*(P); \quad \tilde{F} = (\Phi^{-1})_*(F)$$

com

$$\partial \bar{z}_- = (1/2)(\partial x_- + \partial y_-); \quad \partial z_+ = (1/2)(\partial x_+ - \partial y_+).$$

Então, o empareamento das seções, $t \otimes v \in L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$ e $\tilde{s} \otimes \tilde{v}' \in L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$, $\langle t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' \rangle_{pr}$ é dado por:

$$\begin{aligned} &= C\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int_{\mathbb{R}^6} g(x, y) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[x(\bar{w}_-+w_+)+iy(\bar{w}_--w_+)]} \\ &\quad e^{\frac{1}{2\hbar}(-w_-\bar{w}_--w_+\bar{w}_+)} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy, \end{aligned}$$

de onde podemos observar que

$$\begin{aligned} \langle t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' \rangle_{pr} &= \langle f, T_2 g \rangle_{\mathcal{H}L^2_{\hbar}(\mathbb{C}^2)} \\ &= \langle S_2 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned}$$

sendo T_2, S_2 aplicações integrais definidas explicitamente no Capítulo 2 (equações (2.2.12)-(2.2.13)).

Além disso, se $\otimes_{\hbar}$ é a convolução deformada definida por:

$$g_1 \otimes_{\hbar} g_2(w_1, \bar{w}_3) = \int_{\mathbb{R}^2} g_1(w_1, \bar{w}_2) g_2(w_2, \bar{w}_3) e^{-\frac{1}{2\hbar}w_2\bar{w}_2} dx_2 dy_2,$$

então para funções $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ o produto definido por

$$g_1 *_h g_2 := S_2(T_2 g_1 \otimes_{\hbar} T_2 g_2)$$

é igual ao produto integral de Weyl, isto é,

$$g_1 *_h g_2 = g_1 *_h^0 g_2.$$

Até onde sabemos, o desenvolvimento apresentado nesta seção 2.2 é original e não se encontra na literatura.

No capítulo 3, introduzimos a definição do plano de Bieliavsky $(\mathbb{R}_b^2, \omega, s)$, como uma variedade simplética simétrica, onde $\omega = dx \wedge dy$ é a forma simplética canônica e s a simetria dada pela aplicação

$$s_{(x_1, y_1)}(x_2, y_2) = (2x_1 - x_2, 2y_1 \cosh(2(x_1 - x_2)) - y_2).$$

Assim, motivados pelo resultado da seção 2.1, escolhemos um par de polarizações não transversais, uma gerada pelo simplectomorfismo

$$\Phi_3 : \mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2 \longrightarrow T^*\mathbb{R}_b^2$$

dado por:

$$\Phi_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \left(\frac{y_1 + y_2}{c} \right) \text{sech}((x_1 + x_2)), y_2 - y_1, x_1 - x_2 \right),$$

que surge da definição de ponto médio no plano de Bieliavsky, que leva a polarização trivial do fibrado cotangente, P , ao par grupóide. A outra polarização, F , é gerada por $\langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$, para $(x_1, y_1; x_2, y_2)$ coordenadas canônicas de $\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2$. Então, seguindo as mesmas idéias da seção 2.1 obtemos:

Teorema 0.0.3. *Sejam $\mathbb{R}_b^2$ o plano de Bieliavsky, $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$ o par grupóide simplético gerado do plano de Bieliavsky e Φ_3 a aplicação dada acima. Se P e F são as polarizações dadas como teorema 0.0.1 sobre $T^*\mathbb{R}_b^2$ e $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$ respectivamente, suponha que $\tilde{F} = (\Phi_3^{-1})_*(F)$. Então, para $\psi \in L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\psi' \in L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$,*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = \langle f, T_3 g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = \langle S_3 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_b^2)}$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{pr}$ é o empareamento de seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$, $\psi = f \tilde{s}_0 v$; $\psi' = g t_0 v'$, com v, v' seções de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\Delta_{-1/2}(P)$ respectivamente, $(t_0, \tilde{s}_0) = (1, 1)$, f, g funções de suporte compacto e T_3, S_3 aplicações integráveis que serão mostradas explicitamente na capítulo 3 (equações (3.1.7)-(3.1.8)).

Além disso, se $\overline{\otimes}$ é a convolução no grupóide reduzido, o produto de funções definido por

$$(g_1 *_h g_2)(p, q) = S_3[T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2](p, q)$$

satisfaz

$$g_1 *_h g_2 = g_1 *_h^b g_2 ,$$

onde $*_h^b$ denota o produto integral definido por Bieliavsky ([4]) para funções de suporte compacto, dado explicitamente por

$$\begin{aligned} (g_1 *_h^3 g_2)(p, q) &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} [\cosh(2(p - p_2)) \cdot \cosh(2(p_1 - p)) \cdot \cosh(2(p_1 - p_2))]^{1/2} \\ &\cdot g_1(p_1, q_1) \cdot g_2(p_2, q_2) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} [\sinh(2(p_2 - p)) + \sinh(2(p - p_1)) + \sinh(2(p_1 - p_2))]} dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo umas das propriedades mais importantes do produto de Moyal-Weyl o fato de que ele é fechado no espaço das funções tipo Schwartz, para finalizar este capítulo apresentamos uma família de funções tipo Schwartz para as quais o produto integral de Bieliavsky está bem definido e além disso o produto de duas delas, assim como o produto iterado é ainda uma função tipo Schwartz.

Observamos que o método desenvolvido neste capítulo 3 para obtenção de tal produto, pelo melhor de nosso conhecimento não se encontra presente na literatura.

No capítulo 4, motivados pelos resultados dos capítulos anteriores, mais especificamente da seção 2.2, construímos um produto integral no plano Hiperbólico, no modelo do semiplano direito (que denotaremos por H_d^2), introduzindo um par de polarizações transversais do par grupóide, dadas em forma análoga à seção 2.2, pois as polarizações reais do tipo das consideradas na seção 2.1, no caso do plano hiperbólico não são sempre transversais nem sempre não transversais.

Usando o grupo de isometria do semiplano direito, apresentamos em forma explícita a função exponencial dada por:

$$\Phi_4 : TH_d^2 \simeq H_d^2 \times \mathbb{C} \longrightarrow H_d^2 \times H_d^2; (x, y; r, \theta) \longmapsto (x_-, y_-; x_+, y_+) \quad (0.0.1)$$

onde

$$x_- = \frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)}; y_- = \frac{-x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)} + y; \quad (0.0.2)$$

$$x_+ = \frac{2xe^{\frac{r}{x}}}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)}; y_+ = \frac{x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)} + y. \quad (0.0.3)$$

Praticamente, refazemos todos os resultado da seção 2.2, mas no contexto do plano hiperbólico, obtendo dessa forma o seguinte:

Teorema 0.0.4. *Sejam H_d^2 o modelo do plano hiperbólico dado pelo semiplano direito complexo, Φ_4 a aplicação definida pelas equações (0.0.1), (0.0.2) e (0.0.3), para coordenadas $(x, y; r, \theta) \in TH_d^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H_d^2 \times H_d^2$, e definamos as polarizações:*

$$P = \langle \partial r, \partial \theta \rangle, F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle, \Phi_*(P) = \tilde{P} \text{ e } (\Phi^{-1})_*(F) = \tilde{F}.$$

Então, se s e $\tilde{t}$ são as seções de L adaptadas às polarizações F e $\tilde{P}$ respectivamente,

$$v' \{ \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \} = (|\varepsilon_{\omega_\pm}| \{ \partial \bar{z}_-, \partial z_+; \overline{\partial \bar{z}_-}, \overline{\partial z_+} \})^{-1/4},$$

$$\tilde{v} = |(\Phi^{-1})^* \varepsilon_\Sigma|^{-1/2} |(\Phi^{-1})^* \varepsilon|^{1/2},$$

meias densidades de $\Delta_{-1/2}(F)$ e $\Delta_{-1/2}(\tilde{P})$ respectivamente, então temos que o empareamento $\langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr}$ é igual a

$$\begin{aligned} &= \int_{H_d^2 \times H_d^2} g \left(\frac{\{x_- x_+ [(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+ y_- + y_+ x_-}{x_+ + x_-} \right) f(z_-, \bar{z}_+) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{h} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_- x_+)^{3/4 + 1/h}} dx_- dy_- dx_+ dy_+ \quad (0.0.4) \end{aligned}$$

onde $z_- = x_- + iy_-$, $z_+ = x_+ + iy_+$ e onde g é uma função suave de suporte compacto em H_d^2 e f é uma função holomorfa nas variáveis $(z_-, \bar{z}_+)$.

Agora, motivados pelos resultados da seção 2.2, o caso do plano euclidiano, precisamos encontrar uma representação integral para a função $f(z_-, \bar{z}_+)$ do empareamento $\langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle$ e dessa forma, facilitar a obtenção dos operadores integrais necessários para a definição do produto integral em H_d^2 .

Com esse objetivo estudamos o seguinte espaço: $\widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) =$

$$\left\{ f : H_d^2 \times H_d^2 \longrightarrow \mathbb{C} \mid \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_1} = \frac{\partial f}{\partial w_2} = 0 \text{ e } \int_{H_d^2 \times H_d^2} |f(w_1, \bar{w}_2)|^2 \beta_h(w_1, \bar{w}_2) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 < \infty \right\} \quad (0.0.5)$$

onde $w_1 = p_1 + iq_1$, $w_2 = p_2 + iq_2$ e onde $\beta_h(w_1, \bar{w}_2) = \beta_h(w_1, \bar{w}_w, z_2, \bar{w}_2) = \tilde{\beta}_h(p_1, q_1, p_2, q_2)$ é uma função positiva definida em $H_d^2 \times H_d^2$, possivelmente dependendo de $\hbar$.

Este espaço $\widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ é um espaço de Hilbert de reprodução, com kernel de reprodução $\hat{K}_{\beta_h}$. Então, para escolhas apropriadas da função β_h , este espaço é não vazio e podemos definir operadores integrais T_{β_h} e S_{β_h} (ver equações (4.1.42)-(4.1.43) e Conjectura 4.1.14) que nos permitem definir um produto integral de funções tal como

$$g_1 *_{\mu_{\beta_h}} g_2 := S_{\beta_h}(T_{\beta_h} g_1 \otimes_{\mu_{\beta_h}} T_{\beta_h} g_2),$$

onde $\otimes_{\mu_{\beta_h}}$ é a convolução deformada definida por

$$f_1 \otimes_{\mu_{\beta_h}} f_2(z_1, \bar{z}_3) = \int_{H_d^2} f_1(z_1, \bar{z}_2) f_2(z_2, \bar{z}_3) \mu_{\beta_h}(p_2, q_2) dp_2 dq_2,$$

para uma certa escolha de função μ_{β_h} positiva definida em H_d^2 (a escolha para μ_{β_h} depende da escolha para β_h).

Assim, esta família de produtos escreve-se mais explicitamente como

$$\begin{aligned} [g_1 *_{\mu_{\beta_h}} g_2](x, y) = & \int_{TH_d^2 \times TH_d^2 \times H_d^2 \times (H_d^2 \times H_d^2) \times T_{(x,y)} H_d^2} g_1(x_1, y_1) g_2(x_2, y_2) \\ & \cdot e^{-\frac{2i}{\hbar} \arctan[\sinh(r_1/x_1) S_{\theta_1}]} e^{-\frac{2i}{\hbar} \arctan[\sinh(r_2/x_2) S_{\theta_2}]} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan[\sinh(r/x) S_{\theta}]} \\ & \cdot \tilde{\rho}_h(x_1, y_1; r_1, \theta_1) \tilde{\rho}_h(x_2, y_2; r_2, \theta_2) \tilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \hat{K}_{\beta_h}(z_-(x, y; r, \theta), \bar{z}_+(x, y; r, \theta); w_1, \bar{w}_3) \\ & \cdot \hat{K}_{\beta_h}(w_1, \bar{w}_2; z_-(x_1, y_1; r_1, \theta_1), \bar{z}_+(x_1, y_1; r_1, \theta_1)) \hat{K}_{\beta_h}(w_2, \bar{w}_3; z_-(x_2, y_2; r_2, \theta_2), \bar{z}_+(x_2, y_2; r_2, \theta_2)) \\ & \cdot \frac{\mu_{\beta_h}(p_2, q_2) \tilde{\beta}_h(p_1, q_1; p_3, q_3)}{x_1^2 x_2^2} dx_1 dy_1 dr_1 d\theta_1 dx_2 dy_2 dr_2 d\theta_2 dp_2 dq_2 dp_1 dq_1 dp_3 dq_3 dr d\theta \end{aligned} \quad (0.0.6)$$

onde $w_1 = p_1 + iq_1$, $w_2 = p_2 + iq_2$, $w_3 = p_3 + iq_3$, com a função $\tilde{\rho}_h$ dada explicitamente por

$$\tilde{\rho}_h(x, y, r, \theta) = \frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_{\theta}^2)^{1/\hbar - 1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4 + 2/\hbar}}, \quad (0.0.7)$$

e onde $z_{\pm}(x, y, r, \theta) = x_{\pm}(x, y, r, \theta) + iy_{\pm}(x, y, r, \theta)$, com as funções $x_{\pm}(x, y, r, \theta)$ e $y_{\pm}(x, y, r, \theta)$ dadas por (0.0.2)-(0.0.3) acima ou (4.1.9)-(4.1.10) abaixo.

De acordo com a Conjectura 4.1.18, para escolhas apropriadas de β_h e μ_{β_h} este produto é associativo, enquanto que, de acordo com a Conjectura 4.1.20, deve haver alguma escolha de β_h e μ_{β_h} , a ser investigada, para a qual o produto também é equivariante pelo grupo de isometria de H_d^2 .

Observamos que, quando β_h toma a forma de um produto, $\tilde{\beta}_h(p_1, q_1; p_2, q_2) = \mu_h(p_1, q_1)\mu_h(p_2, q_2)$, a escolha $\mu_{\beta_h} = \mu_h$ é uma escolha natural que deixa o produto (0.0.6) mais simétrico (isto é o que ocorre no caso análogo tratado na seção 2.2).

Terminamos o Capítulo 4 apresentando uma forma mais explícita para o produto $g_1 *_{\mu_{\beta_h}} g_2$ ao escolhermos uma expressão simples para $\mu_{\beta_h} = \mu_h$. Neste caso, denotamos $\mu_h(p, q)$ por $\mu_{\alpha}(p, q) = p^{\alpha}$, para $\alpha = \alpha_h > -1$ e, usando a expressão explícita para $\hat{K}_{\alpha}$ apresentada na seção 1.4, obtemos expressões mais explícitas para o empareamento, os operadores integrais $T_{\beta_h} = T_{\alpha}$ e $S_{\beta_h} = S_{\alpha}$ e o produto $\mu_{\beta_h} = \mu_{\alpha}$ (c.f equações (4.1.60), (4.1.61), (4.1.62) e (4.1.64)). Apresentamos também uma conjectura mais forte, porém neste caso mais explícita, que garantem a associatividade do produto (cf. Conjectura 4.1.24 e Proposição 4.1.27).

Finalmente, a fim de facilitar a leitura desta tese, vários cálculos mais extensos de resultados apresentados ou mencionados no texto principal são reunidos nos apêndices.

✓

Preliminares

Neste capítulo, faremos um breve apanhado sobre a quantização geométrica, grupoides simpléticos e núcleos de reprodução de espaços de Hilbert. Em particular, exploraremos o conceito de quantização geométrica por meias densidades e o empareamento entre seções polarizadas, que são necessárias para o desenvolvimento do trabalho. As referências básicas para os resultados deste capítulo serão citadas ao longo das seções.

1.1 Espaços Simpléticos Simétricos

A geometria simplética centra-se no estudo das variedades simpléticas e dos symplectomorfismos, conceitos que veremos a seguir. A relação desta com a mecânica é usualmente expressado dizendo que o espaço fase de um sistema mecânico é uma variedade simplética, além disso, a evolução no tempo de um sistema dinâmico conservativo é a família a um parâmetro de difeomorfismos simpléticos. Por outro lado, introduziremos os conceitos de espaços simpléticos simétricos, assim como exemplos destes.

Definição 1.1.1. *Uma forma simplética ou estrutura simplética sobre uma variedade M (C^∞) é uma 2-forma fechada não degenerada ω sobre M , isto é, para cada $x \in M$ $\omega(x)$ é não degenerada, e $d\omega = 0$. Uma variedade simplética é um par (M, ω) , onde M é uma variedade suave e ω é uma forma simplética sobre esta. Se (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) são duas variedades simpléticas, então um mapa C^∞ , $f : M_1 \rightarrow M_2$, chama-se symplectomorfismo se $f^*\omega_2 = \omega_1$.*

Agora temos uma caracterização das variedades simpléticas, como segue:

Proposição 1.1.2. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Então, temos que:*

1. $\dim(M) = 2n$
2. M é orientável e vamos a usar a forma de volume usual, a forma de Liouville,

$$\Omega_\omega = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!} \omega^n$$

3. O mapa $b : \mathfrak{X}(M) \mapsto i_X \omega \in \Lambda^1(M)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais
4. Se $f : M \rightarrow M$ é um mapa simplético, então f preserva a forma volume, $\det_{\Omega_\omega}(f) = 1$ e f é difeomorfismo global.

Exemplo 1.1.3. Em muitos problemas da mecânica, o espaço fase é o fibrado cotangente T^*Q do espaço das configurações Q . Existe uma estrutura simplética sobre T^*Q que descreveremos como segue. Assumamos que Q é uma variedade suave n -dimensional escolhamos coordenadas locais $\{q^1, \dots, q^n\}$. Então, $\{dq^1, \dots, dq^n\}$ é uma base de T_q^*Q e $\alpha = p_i dq^i$ a 1-forma canônica de T_q^*Q , dessa forma obtemos coordenadas locais $\{q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n\}$ sobre T^*Q . Portanto definimos a forma simplética canônica ω sobre T^*Q dada por

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq^i = d\alpha.$$

Vamos agora a definir uma classe especial de variedades simpléticas, chamadas de espaços simpléticos simétricos, da seguinte maneira:

Definição 1.1.4. [3] *Um espaço simplético simétrico é uma tripla (M, ω, s) , onde (M, ω) é uma variedade suave simplética simplesmente conexa, e*

$$s : M \times M \rightarrow M$$

um mapa suave tal que

1. Para todo $x \in M$, o mapa parcial $s_x : M \rightarrow M$; $y \mapsto s_x(y) = s(x, y)$ é um difeomorfismo simplético involutivo de (M, ω) chamado de simetria.
2. Para todo $x \in M$, x é ponto fixo isolado de s_x .
3. Para todo x e y em M , tem-se $s_x s_y s_x = s_{s_x(y)}$.

Definição 1.1.5. *Dois espaços simpléticos simétricos (M, ω, s) e (M', ω', s') são isomorfos, se existe um difeomorfismo simplético $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ tal que $\varphi s_x = s'_{\varphi(x)}\varphi$, φ é chamado de um isomorfismo de (M, ω, s) em (M', ω', s') . Quando $(M, \omega, s) = (M', \omega', s')$ chamamos de automorfismos. O grupo de todos os automorfismos de um espaço simplético simétrico (M, ω, s) é denotado por $\text{Aut}(M, \omega, s)$.*

Proposição 1.1.6. *[3] Sobre um espaço simplético simétrico (M, ω, s) , existe uma e somente uma conexão afim ∇ , que é invariante por simetrias. Além disso, esta conexão satisfaz as seguintes propriedades.*

1. Para todo campo de vetores tangentes X, Y, Z sobre M , e todo ponto $x \in M$ temos

$$\omega_x(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} X_x \cdot \omega(Y + s_{x*} Y, Z)$$

2. (M, ∇) é um espaço simétrico afim. Em particular ∇ é a torsão livre e seu tensor curvatura é paralelo.
3. A forma simplética ω é paralela; Portanto ∇ é uma conexão simplética.
4. Temos que

$$\text{Aut}(M, \omega, s) = \text{Aut}(M, \omega, \nabla) = \text{Aff}(\nabla) \cap \text{Symp}(\omega).$$

1.2 Quantização Geométrica

Nos anos 70, B. Kostant e J. Souriau desenvolvem um procedimento geométrico que permite a representação de certa classe de funções sobre uma variedade simplética por operadores auto-adjuntos agindo num espaço de Hilbert de seções de um fibrado vetorial sobre estas variedades. Neste capítulo, daremos uma curta exposição destes resultados. Para informação mais detalhada pode-se ver [27], [17] ou [13].

Definição 1.2.1. *seja (M, ω) uma variedade simplética, Um fibrado complexo unidimensional, $\pi : L \rightarrow M$, com conexão α e estrutura hermitiana α -invariante chama-se de fibrado pré-quântico, se a forma de curvatura para α é igual a $\pi^*\omega$.*

Observação 1.2.2. *Seja (M, ω) uma variedade simplética e $\hbar \in \mathbb{R}^+$ um parâmetro. Seja (Y, θ) uma pré-quantização de $(M, \omega/\hbar)$, ie, $\pi : Y \rightarrow M$ é um S^1 -fibrado principal equipado com uma forma conexão θ e curvatura $\omega/\hbar$. Usando a representação identidade de $S^1 \subset \mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, seja $L \rightarrow M$ o fibrado linear complexo associado sobre M com conexão ∇ e estrutura hermitiana compatível. Daí, podemos identificar Y com*

um subconjunto de L de pontos de comprimento um (com respeito a estrutura hermitiana). Agora, assumamos que a curvatura de ∇ é também igual a $\omega/\hbar$ o que implica que $\omega/\hbar$ representa uma classe de cohomologia integral. Isto impõe uma condição de quantização sobre $\hbar$ no caso em que ω não é exata.

Antes de enunciar o seguinte resultado vamos definir que é uma variedade quantizável.

Definição 1.2.3. *Seja (M, ω) uma variedade simplética, dizemos que (M, ω) é quantizável se ω define uma classe de cohomologia integral.*

Observação 1.2.4. Soiriau mostro que (M, ω) é quantizável se e somente se existe um S^1 -fibrado principal, (Y, p, M) , sobre M , junto com uma conexão, 1-forma α , tal que

$$p^*\omega = d\alpha.$$

Proposição 1.2.5. ([13], páginas 215-219) *Sejam (M, ω) uma variedade simplética quantizável (ver (1.2.3)), $(L, \nabla, (\cdot, \cdot))$ o fibrado linear pré-quântico associado à variedade simplética M , onde $(\cdot, \cdot)$ é a estrutura Hermitiana compatível e Θ o potencial simplético sobre uma vizinhança $U \subset M$, isto é, $d\Theta = \omega$ sobre U . Então, se $m_0 \in U$ é um ponto base e $b_0 \in L_{m_0}$, a seguinte expressão*

$$s(m) = \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\gamma} \Theta \right) \right] b; \quad m \in U,$$

onde γ é qualquer caminho de m_0 a m e b é obtido de b_0 pela propagação paralela ao longo de γ , define uma seção local do fibrado $(L, \nabla, (\cdot, \cdot))$ tal que

$$\nabla_X s = -\frac{i}{\hbar} (X \rfloor \Theta) s; \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ um campo vetorial sobre } M.$$

Definição 1.2.6. *Uma distribuição D sobre uma variedade M é um mapa associando a cada ponto $x \in M$, um subespaço linear D_x de $T_x M$ tal que:*

- $k = \dim D_x = \text{Cte}$ (independente de x)
- para cada $x_0 \in M$ existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0 e campos de vetores $X_1, \dots, X_k$ definidos e independentes sobre V_{x_0} tal que $\{X_1(x), \dots, X_k(x)\}$ geram D_x para cada $x \in V_{x_0}$.

Definição 1.2.7. *Uma distribuição D chama-se integrável se para cada $x_0 \in M$ existe uma sub-variedade N de M tal que:*

- $x_0 \in N$

- $\dim N = k$
- para cada $x \in N$, $T_x N = D_x$

Observação 1.2.8. Uma condição necessária e suficiente para que uma distribuição seja integrável é dada pelo teorema de Frobenius, isto é, D é integrável se e somente se, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M, D)$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M, D)$, sendo

$$\mathfrak{X}(M, D) = \{X \in \mathfrak{X}(M); X(x) \in D_x, \forall x \in M\} \quad (1.2.1)$$

Definição 1.2.9. Uma distribuição integrável é também chamada uma folheação. A sub-variedade conexa maximal integral, isto é, a sub-variedade N de M tal que $T_x N = D_x$, são chamadas as folhas da folheação. Seja M/D o espaço de todas as folhas da folheação D . Se existe uma estrutura diferencial sobre M/D tal que a projeção canônica $\pi : M \rightarrow M/D$ é uma submersão suave, então a folheação D se denomina redutível.

Definição 1.2.10. Seja (M, ω) uma variedade simplética $2n$ -dimensional. Uma polarização real sobre M é uma folheação D sobre M a qual é lagrangiana e maximal com respeito ω , isto é, $\omega(x)(D_x, D_x) = 0$ para cada $x \in M$ e nenhum outro subespaço de $T_x M$ o qual contém D_x tem esta propriedade. Em particular, $\dim D_x = n$.

Definição 1.2.11. Seja (M, ω) uma variedade simplética $2n$ -dimensional. Uma polarização complexa sobre M é uma distribuição complexa P sobre M tal que:

- Para cada $x \in M$, P_x é um sub-espaço Lagrangiano de $T_x(M)^\mathbb{C}$, onde $T_x(M)^\mathbb{C}$ é o espaço vetorial complexificado associado a $T_x M$.
- $D_x = P_x \cap \overline{P}_x \cap T_x M$ tem dimensão constante k , para todo $x \in M$, com $\overline{P}_x$ é o conjugado complexo.
- P e $P + \overline{P}$ são fechados sobre o colchete de Lie de campos vetoriais.

P é dita redutível se M/D admite uma estrutura de variedade suave tal que a projeção $\pi : M \rightarrow M/D$ é uma submersão.

P é dita positiva se $-i\omega(X, \overline{X}) \geq 0$, para cada $X \in \mathfrak{X}(M, P)$.

Associado com uma polarização complexa, existem duas distribuições reais sobre M ; a distribuição isotropica definida acima (que é naturalmente integrável), e a distribuição coisotropica E determinada por:

$$E_x = D_x^0 = (P_x + \overline{P}_x) \cap T_x M; \quad x \in M.$$

Dizemos que P é fortemente integrável sempre que E é integrável.

Exemplo 1.2.12. (Polarização vertical) Seja $M = T^*Q$ o fibrado cotangente com coordenadas canônicas $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$. A distribuição D^v gerada pelo campo de vetores $\{\frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n}\}$ chama-se de polarização vertical sobre M . As folhas são dadas por:

$$q^1 = Cte, \dots, q^n = Cte$$

Exemplo 1.2.13. Seja $(M, \omega) = (T^*Q, dp \wedge dq)$ e P a distribuição complexa sobre M dada por:

$$P = C\left(\frac{\partial}{\partial p} + i\frac{\partial}{\partial q}\right) = CX_{p+iq}.$$

Então podemos ver que:

- $\omega(P, P) = 0, \dim P = 1$
- $P \cap \overline{P} = \{0\}$, assim $M/D = M$;
- P e $P + \overline{P}$ são fechadas pelo colchete lie

Daí, P é uma polarização complexa redutível sobre M .

Definição 1.2.14. *Seja (M, ω) uma variedade simplética quantizável (ver (1.2.3)), L^ω o fibrado pré-quântico associado, e D (ou P) uma polarização redutível real (ou complexa) sobre M . Dizemos que uma seção suave $s \in \Gamma(L^\omega)$ é constante ao longo das fibras de M se para cada $X \in \mathfrak{X}(M, D)$ temos que $\nabla_X^\omega s = 0$. Tais seções, se denominam seções polarizadas. Denotamos por $\Gamma_D(L^\omega)$ o espaço de todas estas seções.*

Como consequência da definição acima e da proposição 1.2.5 temos que

Observação 1.2.15. Dada uma polarização P numa variedade simplética (M, ω) , e Θ_P um potencial simplético adaptado à polarização P , se definimos uma seção, s , como em na proposição 1.2.3, então s é uma seção polarizada adaptada a P e além disso, se P é complexa, toda seção, s' , polarizada adaptada a P é localmente da forma

$$s' = \varphi s.$$

onde φ é holomorfa com respeito a estrutura complexa na qual P é uma polarização holomorfa.

Agora vamos a introduzir o conceito de meias densidades, mas para isto primeiro devemos começar falando das densidades em geral.

Definição 1.2.16. *Seja W um espaço vetorial n -dimensional e $r \in \mathbb{R}$. Uma r -densidade sobre W é uma função v que associa a cada base $\{X_a\}$ em W um número complexo $v\{X_a\}$ com a propriedade que:*

$$v\{X_b C_a^b\} = |\det C|^r v\{X_a\}$$

para quaisquer $C = (C_b^a) \in GL(n, \mathbb{C})$ (quando W é complexo) ou para quaisquer $C = (C_b^a) \in GL(n, \mathbb{R})$ (quando W é real). O conjunto das r -densidades é um espaço vetorial unidimensional complexo, denotado por $\Delta_r(W)$. Observe-se que $\Delta_0(W) = \mathbb{C}$.

Propriedades 1.2.17. Propriedades das densidades

1. **Conjugação:** O conjugado complexo $\bar{v}$ de $v \in \Delta_r(W)$ é também uma r -densidade. Assim, tem sentido dizer que uma r -densidade é real ($v = \bar{v}$) ou positiva ($v = \bar{v}$ e $v\{X_a\} > 0$ para todo $\{X_a\}$). Também, quando W é complexa, podemos identificar $\Delta_r(W)$ com $\Delta_r(\bar{W})$.
2. **Multiplicação e divisão:** Seja $v \in \Delta_r(W)$ e $\mu \in \Delta_s(W)$. Então $v\mu$ é bem definido como um elemento de $\Delta_{r+s}(W)$; Assim

$$\Delta_r(W) \otimes \Delta_s(W) = \Delta_{r+s}(W).$$

Também, quando $v \neq 0$, μ/v é um elemento bem definido de $\Delta_{s-r}(W)$; é se f é homogênea de grau t , então $f(v) \in \Delta_{rt}(W)$.

3. **Dualidade:** Existe uma identificação natural entre $\Delta_r(W)$ e $\Delta_{-r}(W^*)$: se $v \in \Delta_r(W)$, então v pode ser considerado como um elemento de $\Delta_{-r}(W^*)$, com

$$v\{\alpha^a\} = v\{X_a\},$$

onde $\{\alpha^a\}$ é uma base W^* dual a $\{X_a\}$. Também, como $\Delta_r(W) \otimes \Delta_{-r}(W) = \Delta_0(W) = \mathbb{C}$, temos que

$$(\Delta_r(W))^* = \Delta_{-r}(W).$$

Portanto,

$$(\Delta_r(W))^* = \Delta_r(W^*).$$

4. **Relação com formas:** Seja $\tau \in \Lambda^n W^* = W^* \wedge \dots \wedge W^*$ uma n -forma sobre W . Então, $|\tau|$ é uma 1-densidade real definida por

$$|\tau\{X_a\}| = n! |\tau(X_1, \dots, X_n)|.$$

5. **Soma Direta:** Seja W e W' o espaço vetorial e seja $v \in \Delta_r(W)$ e $v' \in \Delta_r(W')$. Então, v, v' é a r -densidade sobre $W \otimes W'$ definida por

$$v.v'\{X_1, X_2, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_{n'}\} = v\{X_1, \dots, X_n\}v'\{X'_1, \dots, X'_{n'}\},$$

onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base para W e $\{X'_1, \dots, X'_{n'}\}$ uma base para W' . Supondo $W = W'$ obtemos um isomorfismo natural

$$\Delta_r(W \oplus W') = \Delta_{2r}(W).$$

6. **Quociente:** Seja W um subespaço de dimensão n de um espaço de W' n dimensional e seja $v \in \Delta_r(W)$ e $v' \in \Delta_r(W')$. Seja $\{X_\alpha\}$ uma base para W'/W (para $\alpha \in \{1, 2, \dots, n' - n\}$) e seja $\{Y_a, Z_\alpha\}$ uma base para W' tal que
- (i) $\{Y_a\}$ é uma base para W ;
 - (ii) $\pi(Z_\alpha) = X_\alpha$, onde $\pi : W' \rightarrow W'/W$ é a projeção.
- Então, $\{Y_a, Z_\alpha\}$ é determinado por $\{X_\alpha\}$ por uma transformação da forma

$$\{Y_a, Z_\alpha\} \mapsto \{Y_b C_a^b, Z_\alpha + Y_b D_\alpha^b\},$$

onde $C = (C_a^b)$ é não singular e D_α^b é arbitrária. Daí,

$$\det \begin{bmatrix} (C_a^b) & (D_\alpha^b) \\ 0 & (\delta_\alpha^\beta) \end{bmatrix} = \det C.$$

Logo, podemos definir uma função v'/v das bases em W'/W por

$$(v'/v)\{X_\alpha\} = v'\{Y_a, Z_\alpha\}/v\{Y_a\}.$$

Assim, existe um isomorfismo natural

$$\Delta_r(W') \otimes \Delta_{-r}(W) = \Delta_r(W'/W).$$

Conseqüentemente,

$$\Delta_r(W') = \Delta_r(W'/W) \otimes \Delta_r(W)$$

$$\Delta_r(W'/W) \otimes \Delta_{-r}(W') = \Delta_{-r}(W).$$

7. **Fibrado linear:** Seja Q uma variedade de dimensão n , e seja E um fibrado vetorial sobre Q . Então, para cada $r \in \mathbb{R}$, $\Delta_r(E)$ denota o fibrado vetorial linear sobre Q com espaço total

$$\Delta_r(E) = \bigcup_{q \in Q} \Delta_r(E_q).$$

8. Integração: Sejam Q uma variedade de dimensão n e ε uma seção de $\Delta_1(TQ) = \Delta_{-1}(T^*Q)$. Então, podemos definir a integral de ε sobre $U \subset Q$ por

$$\int_U \varepsilon = \int_U \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} \right\} d^n x,$$

onde $\{x^a\}$ é um sistema coordenado sobre U ; Se U não puder ser coberto por um único sistema de coordenadas, então a integral é construída usando uma partição da unidade. Esta, está bem definida, mesmo se Q não é orientável. Quando Q é orientável podemos identificar seções suaves de $\Delta_1(TQ)$ com n -formas sobre Q , então coincide com a definição usual de integral sobre n -formas. ■

Agora, seja F uma distribuição real ou complexa sobre uma variedade M , e seja $\Delta_r(F)$ o fibrado linear sobre M com espaço total

$$\Delta_r(F) = \bigcup_{x \in M} \Delta_r(F_x).$$

Uma $r - F$ -densidade sobre M é uma seção de $\Delta_r(F)$, que pode ser representada como uma função $v(m, \{X_a\})$ que depende de um ponto $m \in M$ e uma base $\{X_a\} \subset F_x$; ou como um mapa que associa um elemento v_x de $\Delta_r(F_x)$ a cada ponto $x \in M$ ou localmente, como um mapa que associa uma função $v(X_a)$ sobre M a cada campo de bases em F_x .

Observação 1.2.18. Se B é o fibrado pré-quântico sobre M , e P polarização complexa (ou real) então uma seção de $L = B \otimes \Delta_{-\frac{1}{2}}(P)$ pode-se escrever localmente na forma $\psi = sv$, onde $s \in \Gamma_P(B)$ e v é uma seção de $\Delta_{-\frac{1}{2}}(P)$.

Definição 1.2.19. Sejam L e P como na observação 1.2.18, as seções suaves de L satisfazendo

$$\nabla_X \psi = (\nabla_X s)v + s \nabla_X v = 0,$$

para todo $X \in V_{\mathbb{C}}(M; \bar{P})$, são chamadas de funções P -ondas, com $\bar{P}$ como o conjugado complexo.

Observação 1.2.20. Sejam P uma polarização sobre a variedade M , B o fibrado pré-quântico associado, $x \in N = M/D$ e $m \in \pi^{-1}(x)$, onde $\pi : M \rightarrow N$ é a projeção, logo $T_x N = T_m M / D_m$ que implica,

$$\Delta_1(T_x N) = \Delta_{-\frac{1}{2}}(P_m) \otimes \Delta_{-\frac{1}{2}}(\bar{P}_m) \otimes \Delta_{\frac{1}{2}}(V'_m) \otimes \Delta_1(T_m M).$$

Assim, para $\psi = sv$ e $\psi' = s'v'$ em $B \otimes \Delta_{-\frac{1}{2}}(P)$ funções P -ondas podemos definir

$$(\psi, \psi')_m = (s, s')_m v_m \overline{v'}_m |\varepsilon_{\omega'}|^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_{\omega}|,$$

onde, $V'_m = E_m/D_m$ e $\varepsilon_{\omega'}$ é a forma de Liouville de V'_m .

Definição 1.2.21. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética, B o fibrado pré-quântico associado e P uma polarização complexa(ou real), então para ψ' e ψ em $L = B \otimes \Delta_{-\frac{1}{2}}(P)$ podemos definir o produto interno para função P -ondas por:*

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{r/2} \int_N (\psi, \psi')_m$$

onde $N = M/D$ e $(\cdot, \cdot)_m$ definida acima.

Definição 1.2.22. *Suponha que P e P' são duas polarizações fortemente integráveis de (M, ω) tais que:*

1. *existe uma folheação isotropica K de M tal que $P_m \cap \overline{P'}_m = K_m^{\mathbb{C}}$ para todo $m \in M$*
2. *K é redutível;*
3. *$F = K^0$ é integrável.*

Suponha também que $R = M/K$, $\psi = sv$ e $\psi' = s'v'$ funções P -onda e P' -onda respectivamente, então para $x \in R$ e $m \in \pi^{-1}(x)$

$$\Delta_1(T_x R) = \Delta_{-\frac{1}{2}}(P_m) \otimes \Delta_{-\frac{1}{2}}(\overline{P'}_m) \otimes \Delta_{\frac{1}{2}}(V''_m) \otimes \Delta_1(T_m M)$$

onde V''_m é o espaço vetorial simplético F_m/K_m e $\varepsilon_{\omega''}$ e a forma de Liouville correspondente. Daí, temos que

$$(\psi, \psi')_x = (s(m), s'(m)) v_m \overline{v'}_m |\varepsilon_{\omega''}|^{\frac{1}{2}} |\varepsilon_{\omega}|,$$

e portanto podemos definir o empareamento por:

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{r/2} \int_R (\psi, \psi')_x; \quad r = \dim R.$$

1.3 Grupóide Simplético

Vamos a começar esta seção dando a definição geral de grupóide, como segue:

Definição 1.3.1. *Sejam $\Gamma, \mathbf{M}$ espaços. Γ chama-se um grupóide sob M , denotado por $\Gamma \rightrightarrows \mathbf{M}$, se:*

- Existem duas aplicações α, β denominadas fonte e alvo, respectivamente.
- Seja $\Gamma \times \Gamma \supset \Gamma_2 := \{(\gamma', \gamma'') \mid \alpha(\gamma') = \beta(\gamma'')\}$. Γ_2 chama-se o conjuntos dos elementos multiplicáveis. Então, existe uma aplicação associativa " $\odot$ " : $\Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$, $(\gamma', \gamma'') \mapsto \gamma' \odot \gamma''$ denominada a composição do grupóide ou produto, satisfazendo $\alpha(\gamma' \odot \gamma'') = \alpha(\gamma')$, $\beta(\gamma' \odot \gamma'') = \beta(\gamma'')$.
- Existe uma involução $i : \Gamma \longrightarrow \Gamma$ denominada inversão, i.e. $\forall \gamma \in \Gamma$ seu único inverso $\bar{\gamma} \equiv i(\gamma)$ satisfaz: $\bar{\gamma} \odot (\gamma \odot \gamma') = \gamma'$ se $(\gamma, \gamma') \in \Gamma_2$, $(\gamma' \odot \gamma) \odot \bar{\gamma} = \gamma'$ se $(\gamma', \gamma) \in \Gamma_2$.

Um tipo especial de grupoides é definido a continuação.

Definição 1.3.2. Um grupóide simplético consiste de um par de variedades (G, G_0) , onde G tem uma forma simplética ω e uma multiplicação parcial definida num domínio $G_2 \subset G \times G$, junto com duas submersões $\alpha : G \rightarrow G_0$, $\beta : G \rightarrow G_0$ e uma involução $x \mapsto i(x) = x^*$ de G , tal que:

1. O gráfico, $\mathfrak{M} = \{(x, y, xy) : (x, y) \in G_2\}$, da multiplicação é uma sub-variedade lagrangiana de $G \times G \times G$;
2. O conjunto de "unidades" G_0 pode ser identificado com a sub-variedade lagrangiana de G (também denotada por G_0);
3. Para quaisquer $x \in G$, temos $\alpha(x)x = x = x\beta(x)$ e $\alpha(x) = xx^*$, $\beta(x) = x^*x$, além disso, $(x, y) \in G_2$ se e somente se $\beta(x) = \alpha(y)$;
4. O gráfico $I = \{(x, x^*) : x \in G\}$ da involução é uma sub-variedade lagrangiana de $G \times G$ e
5. Sempre que (x, y) e (y, z) estão em G_2 , então (xy, z) e (x, yz) estão em G_2 e $(xy)z = x(yz)$.

Um exemplo interessante deste tipo de grupóide é o grupóide fundamental, que descrevemos a continuação:

Exemplo 1.3.3. O grupóide fundamental $\pi(M) \rightrightarrows M$ de uma variedade simplética (M, ω) é um grupóide no qual os elementos de $\pi(M)$ são as classes homotópicas de caminhos suaves, $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$, com a concatenação usual de caminhos como o produto e a reversão de caminhos como a involução. Aqui, $\alpha([\sigma]) = \sigma(0)$, $\beta([\sigma]) = \sigma(1)$ são os pontos finais dos caminhos designados. A variedade M é identificada como a

subvariedade de $\pi(M)$ dos caminhos constantes, a qual é lagrangiana com respeito a estrutura simplética $\Omega = \alpha^*\omega - \beta^*\omega$ sobre $\pi(M)$. Quando M é simplesmente conexa, $[\sigma]$ é determinada por os seus pontos finais e o grupóide fundamental pode ser expressado como

$$M \times \overline{M} \rightrightarrows M,$$

onde, $\alpha(q, p) = q$, $\beta(q, p) = p$, a multiplicação e a involução são dadas respectivamente por

$$\alpha(p, q) = p, \beta(p, q) = q, (p, q) \odot (q, r) = (p, r) \text{ e } \iota(p, q) = (q, p).$$

Vamos denotar por $M \times \overline{M}$ o grupóide $M \times \overline{M} \rightrightarrows M$ acima, onde a notação $\overline{M}$ indica o sinal negativo na forma simplética Ω , chamaremos este grupóide de par grupóide simplético.

Agora vamos construir a pré-quantização no par grupóide $M \times \overline{M}$ como segue:

Observação 1.3.4. Pré-quantização do par grupóide [24]

Seja (M, ω) uma variedade simplética e a variedade $M \times \overline{M}$ com estrutura simplética $(\omega, -\omega)$. Mais precisamente, se α e β denota as projeções canônicas $M \times \overline{M} \rightarrow M$ no primeiro e segundo fator, então tomamos a forma simplética sobre $M \times \overline{M}$ dada por $\alpha^*\omega - \beta^*\omega$.

A variedade $Y \times Y$, com Y como na observação 1.2.2, forma um $(S^1 \times S^1)$ -fibrado principal sobre $M \times \overline{M}$. Tomando o quociente da ação diagonal de S^1 sobre $(Y \times Y)$, $e^{i\phi} \cdot (y_1, y_2) = (e^{i\phi} \cdot y_1, e^{i\phi} \cdot y_2)$, obtemos um S^1 -fibrado $[Y] = (Y \times Y)/S^1 \rightarrow M \times \overline{M}$, denotaremos os pontos em $[Y]$ como $[y_1, y_2]$ com $y_1, y_2 \in Y$. A S^1 -ação induzida é dada por $e^{i\phi}[y_1, y_2] = [e^{i\phi} \cdot y_1, y_2] = [y_1, e^{-i\phi} \cdot y_2]$.

Além disso, a 1-forma $(\Theta, -\Theta)$ induz uma forma conexão $[\Theta] \equiv [\Theta, -\Theta]$ sobre $[Y]$, cuja curvatura é $(\omega/\hbar, -\omega/\hbar)$. Assim, obtemos uma pré-quantização (particular) de $M \times M$ que define uma estrutura de grupóide sobre M , com produto $[y_1, y_2] \odot [y_2, y_3] = [y_1, y_3]$ e inversa $i([y_1, y_2]) = [y_2, y_1]$.

Sejam $(\mathbf{M}, \omega)$ uma variedade simplética simplesmente conexa e $\mathbf{F}$ uma polarização da variedade $\mathbf{M}$. Como $\mathbf{M}$ é simplesmente conexa podemos considerar o grupóide simplético do exemplo 1.3.3

Por outro lado, temos $\mathbf{F} \times \mathbf{F}$ a polarização da variedade simplética $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}$. Sem perda de generalidade vamos supor que $\mathbf{M}$ tem dimensão 2 com coordenadas $(p_1, q_1; p_2, q_2)$ para $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}$, suponhamos também que a polarização $\mathbf{F}$ é gerada por $\{\partial_{q_1}\}$. Daí, a

polarização $\mathfrak{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}$ é gerada por $\{\partial q_1, \partial q_2\}$, logo o espaço folheado $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}$ tem coordenadas $(\overline{p_1}, \overline{p_2})$ e como $\mathbf{M}$ é identificado com a diagonal de $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}$ se $(p_1, q_1; p_1, q_1) \in \text{Diag}(\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}})$, então $\text{Diag}(\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}})/\mathfrak{F}$ tem coordenadas $(\overline{p_1}, \overline{p_1}) \simeq \mathbf{M}/\mathbf{F}$. Suponhamos também que $(\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}})/\mathfrak{F}$, $\mathbf{M}/\mathbf{F}$ são simplesmente conexos, vamos a mostrar que $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}$ é grupóide sobre $\mathbf{M}/\mathbf{F}$. De fato, consideremos o seguinte gráfico

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}})/\mathfrak{F} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \bar{\alpha} \\ \mathbf{M} & \xrightarrow{\pi} & \mathbf{M}/\mathbf{F} \end{array}$$

onde $\tilde{\pi}$ e π são as projeções canônicas.

Logo, temos que $\bar{\alpha} \circ \tilde{\pi} = \pi \circ \alpha$, analogamente definimos $\bar{\beta} \circ \tilde{\pi} = \pi \circ \beta$. Assim,

$$\bar{\beta}, \bar{\alpha} : \mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F} \longrightarrow \mathbf{M}/\mathbf{F}$$

dadas por $\bar{\alpha}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = \overline{p_1}$ e $\bar{\beta}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = \overline{p_2}$.

Então, como $\mathbf{M}_2 := \{(p, q; p', q') \in (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}) \times (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}) / \alpha(p, q) = \beta(p', q')\}$ é o domínio do produto em $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \rightrightarrows \mathbf{M}$, da forma como tem sido definidas as aplicações $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ acima, podemos considerar o seguinte conjunto:

$$\overline{\mathbf{M}}_2 := \{(\overline{p_1}, \overline{p_2}; \overline{p'_1}, \overline{p'_2}) \in (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}) \times (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}) / \bar{\alpha}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = \bar{\beta}(\overline{p'_1}, \overline{p'_2})\}.$$

Daí, como o produto no grupóide $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}$ é dado por:

$$\begin{aligned} \odot : \mathbf{M}_2 &\subset (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}) \times (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}) \longrightarrow \mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \\ (p_1, q_1; p_2, q_2) \odot (p_2, q_2; p_3, q_3) &= (p_1, q_1; p_3, q_3), \end{aligned}$$

definamos nosso produto em $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \rightrightarrows \mathbf{M}/\mathbf{F}$ como:

$$\overline{\odot} : \overline{\mathbf{M}}_2 \subset (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}) \times (\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}$$

$$(\overline{p_1}, \overline{p_2}) \overline{\odot} (\overline{p_2}, \overline{p_3}) = (\overline{p_1}, \overline{p_3}).$$

De onde, podemos observar que:

$$\bar{\alpha}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) \overline{\odot} (\overline{p_2}, \overline{p_3}) = \overline{p_1} = \bar{\alpha}(\overline{p_1}, \overline{p_2})$$

e

$$\bar{\beta}(\overline{p_1}, \overline{p_2}) \overline{\odot} (\overline{p_2}, \overline{p_3}) = \overline{p_3} = \bar{\alpha}(\overline{p_2}, \overline{p_3}).$$

Por outro lado, já sabemos que a involução em $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \rightrightarrows \mathbf{M}$ é dada por $\iota(p_1, q_1; p_2, q_2) = (p_2, q_2; p_1, q_1)$. Assim, definimos a involução em $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \rightrightarrows \mathbf{M}/\mathbf{F}$ por:

$$(\overline{p_1}, \overline{p_2})^{\odot} = (\overline{p_2}, \overline{p_1}).$$

De onde, temos

$$(\overline{p_1}, \overline{p_2})^{\odot} \odot ((\overline{p_1}, \overline{p_2}) \odot (\overline{p_2}, \overline{p_3})) = (\overline{p_2}, \overline{p_1}) \odot (\overline{p_1}, \overline{p_3}) = (\overline{p_2}, \overline{p_3})$$

e

$$((\overline{p_2}, \overline{p_3}) \odot (\overline{p_3}, \overline{p_1})) \odot (\overline{p_3}, \overline{p_1})^{\odot} = (\overline{p_2}, \overline{p_1}) \odot (\overline{p_1}, \overline{p_3}) = (\overline{p_2}, \overline{p_3}).$$

Portanto, da definição acima temos que $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}} \rightrightarrows \mathbf{M}/\mathbf{F}$ junto com $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \mathbf{M}_2$ e $\odot, \otimes$ é grupóide.

Lema 1.3.5. *Sejam $(\mathbf{M}, \omega)$ uma variedade simplética simplesmente conexa, $(\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}, (\omega, -\omega))$ o grupóide simplético fundamental sob $\mathbf{M}$ com as operações $\alpha, \beta, *, \odot$ e a polarização $\mathbf{F}$ como acima. Então se $\mathfrak{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{F}$ é a polarização de $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}$ definida anteriormente e $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \odot, \otimes$ as aplicações dadas acima; $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F}$ com estas aplicações é um grupóide sobre $\mathbf{M}/\mathbf{F}$ denotado por $\mathbf{M} \times \overline{\mathbf{M}}/\mathfrak{F} \rightrightarrows \mathbf{M}/\mathbf{F}$.*

1.4 Núcleo de Reprodução

Seja $U \subset \mathbb{C}^d$ um conjunto não vazio. Seja $\mathcal{H}(U)$ o espaço das funções holomorfas (ou complexas analíticas) sobre U . Lembremos que uma função de várias variáveis complexas, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, é dita holomorfa se f é contínua e holomorfa em cada variável com as outras fixadas. Seja α uma função contínua estritamente positiva sobre U .

Definição 1.4.1. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^d$ um conjunto aberto, $\mathcal{H}(U)$ o espaço das funções holomorfas sobre U e α uma função contínua sobre U estritamente positiva. Daí, definimos $\mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ da seguinte maneira*

$$\mathcal{HL}^2(U, \alpha) = \left\{ F \in \mathcal{H}(U); \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}$$

onde dz denota a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{C}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$.

Agora vamos apresentar alguns resultados sem demonstração, que podem ser encontrados em [15]

Teorema 1.4.2. *Se sobre $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ definimos o produto interno*

$$(F_1, F_2) = \int_U F_1(z) \overline{F_2(z)} \alpha(z) dz,$$

então,

- *Para todo $z \in U$, existe uma constante c_z tal que*

$$|F(z)|^2 \leq c_z \|F\|_{L^2(U, \alpha)}^2$$

$$\text{para todo } F \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha) \text{ e } \|F\|_{L^2(U, \alpha)}^2 = \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz$$

- *$\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ é um subespaço fechado de $L^2(U, \alpha)$, sendo $L^2(U, \alpha)$ dado por:*

$$L^2(U, \alpha) = \left\{ F : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_U |F(z)|^2 \alpha(z) dz < \infty \right\}.$$

Assim, $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.4.3. *Seja $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ como acima. Então existe uma função $K(z, w)$, $z, w \in U$, com as seguintes propriedades:*

1. *$K(z, w)$ é holomorfa em z e anti-holomorfa em w , satisfazendo*

$$K(w, z) = \overline{K(z, w)}.$$

2. *Para cada $z \in U$ fixo, $K(z, w)$ é L^2 integrável com respeito a medida $d\alpha(w) = \alpha(w)dw$. Tal que para todo $F \in \mathcal{H}L^2(U, \alpha)$,*

$$F(z) = \int_U K(z, w) F(w) \alpha(w) dw.$$

3. *Se $F \in L^2(U, \alpha)$, denotemos a projeção ortogonal de F no subespaço fechado $\mathcal{H}L^2(U, \alpha)$ por PF . Então,*

$$PF(z) = \int_U K(z, w) F(w) \alpha(w) dw.$$

4. *Para todo $z, u \in U$,*

$$\int_U K(z, w) K(w, u) \alpha(w) dw = K(z, u)$$

5. Para todo $z \in U$,

$$|F(z)|^2 \leq K(z, z) \|F\|^2$$

e a constante $K(z, z)$ é ótima no sentido que para $z \in U$ existe $F_z \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ não zero na qual a identidade tem-se.

6. Dado qualquer $z \in U$, se $\phi_z(\cdot) \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$ satisfaz

$$F(z) = \int_U \overline{\phi_z(w)} F(w) \alpha(w) dw$$

para todo $F \in \mathcal{HL}^2(U, \alpha)$, então $\overline{\phi_z(w)} = K(z, w)$.

Vamos apresentar um resultado que nos permite calcular o núcleo de reprodução do espaço de Hilbert acima:

Teorema 1.4.4. *Seja $\{e_j\}$ quaisquer base ortonormal de $\mathcal{HL}_\alpha^2(U)$. Então, para todo $z, w \in U$*

$$\sum_j |e_j(z) \overline{e_j(w)}| < \infty$$

e

$$K(z, w) = \sum_j e_j(z) \overline{e_j(w)}.$$

Um exemplo importante dos resultados anteriores é dado a seguir

Exemplo 1.4.5. O espaço de Segal-Bargmann é o espaço das funções holomorfas

$$\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^d, \mu_t),$$

onde

$$\mu_t(z) = (\pi t)^{-d} e^{-|z|^2/t}.$$

Com $|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_d|^2$ e $t > 0$.

Logo, o núcleo de reprodução deste espaço é dado no seguinte resultado

Teorema 1.4.6. *([15] teorema 3.4) Para todo $d \geq 1$, o núcleo de reprodução para o espaço $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ é dado por*

$$K(z, w) = e^{z \cdot \bar{w}/t},$$

onde $z \cdot \bar{w} = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_d \bar{w}_d$. Em particular, para todo $F \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^d, \mu_t)$ e todo $z \in \mathbb{C}^d$, temos que

$$|F(z)|^2 \leq e^{|z|^2/t} \|F\|^2.$$

Como nosso objetivo é o estudo do plano hiperbólico, mais especificamente o modelo do semiplano complexo direito, motivados pelos resultados anteriores, apresentamos a seguir o núcleo de reprodução do espaço $\mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$, onde H_d^2 é o semiplano complexo direito, $\mathcal{H}(H_d^2)$ o espaço das funções holomorfas sobre H_d^2 e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2) = \\ = \left\{ f \in \mathcal{H}(H_d^2 \times H_d^2); \iint_{H_d^2 \times H_d^2} |f(z_1, z_2)|^2 (1 - |z_1|^2)^\alpha (1 - |z_2|^2)^\alpha dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Temos o seguinte teorema, cuja demonstração se encontra no Apêndice A.

Teorema 1.4.7. *Seja $\mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$ como definido acima, então seu núcleo de reprodução é dado pela seguinte expressão:*

$$K(z_1, z_2; w_1, w_2) = \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_1 + \bar{w}_1) \cdot (z_2 + \bar{w}_2)]^{\alpha+2}}.$$

O Produto integral de Weyl e a Quantização Geométrica

Neste capítulo, mostraremos como o produto integral de Moyal-Weyl pode ser obtido explicitamente da quantização geométrica, do ponto de vista de empareamento de meias densidades e convolução em grupóides simpléticos. Apresentaremos de forma detalhada dois caminhos diferentes para tal obtenção deste produto, um para o caso de duas polarizações reais não transversais e outro para o caso de uma polarização real transversal a uma polarização holomorfa.

No primeiro caso, desenvolvido na seção 2.1, o produto de Moyal-Weyl é construído da seguinte forma. Escolhemos duas polarizações reais não transversais. As seções polarizadas são funções covariantemente constantes ao longo das folhas das polarizações. Depois do empareamento das seções polarizadas adaptadas às ditas polarizações, obtemos aplicações integrais que correspondem ao núcleo do mapa de quantização de Weyl e seu inverso, que junto com a convolução do par grupóide associada a estas polarizações dão como resultado o produto integral de Weyl, primeiramente obtido por Von Neumann e depois re-obtido independentemente por Groenewold. Esta seção pode ser considerada como um detalhamento matemático das idéias apresentadas e desenvolvidas menos formalmente por José Gracia-Bondia e Joseph Várilly em [11].

Já no segundo caso, desenvolvido na seção 2.2, seguimos um estudo análogo ao anterior, mas agora com polarizações transversais, uma polarização real induzida pelo mapa exponencial e uma polarização holomorfa do par grupóide, de onde obtemos novamente aplicações integrais S_2 e T_2 que serão definidos na seção 2.2 utilizando o

núcleo de reprodução. Além disso, neste caso usaremos uma convolução deformada a ser definida abaixo, para obtenção do produto integral de Weyl. Até onde sabemos, o desenvolvimento apresentado nesta seção é original e não se encontra na literatura.

Os métodos desenvolvidos nas seções 2.1 e 2.2 serão adaptados, respectivamente, ao plano de Bieliavsky, no Capítulo 3, e ao plano hiperbólico, no Capítulo 4.

2.1 Produto integral de Weyl via polarizações reais não transversais

Seja $(\mathbb{R}^2, \omega, s)$ o espaço simplético simétrico euclidiano, com a forma simplética canônica ω e s a simetria dada por:

$$s_{(x_1, y_1)}(x_2, y_2) = (2x_1 - x_2, 2y_1 - y_2).$$

Então, temos a aplicação

$$\widehat{\omega}(u) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{2*}; \quad u \longmapsto \omega(u, \cdot).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Omega((x, y), (z, w)) &= \omega(x, z) - \omega(y, w) \\ &= \widehat{\omega}(x - y) \left[\frac{z + w}{2} \right] - \widehat{\omega}(z - w) \left[\frac{x + y}{2} \right] \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos identificar $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ com o fibrado cotangente $T^*(\mathbb{R}^2)$. De fato, para $(u, \psi), (v, \chi)$ elementos de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*}$, a estrutura simplética do fibrado cotangente $T^*(\mathbb{R}^2)$ reduz-se à forma bilinear alternada:

$$\Sigma((u, \psi), (v, \chi)) = \chi(u) - \psi(v).$$

Assim, podemos identificar $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ com $T^*(\mathbb{R}^2)$ como uma variedade simplética pelo isomorfismo linear

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow T^*(\mathbb{R}^2); \quad (x, y) \mapsto \left(\frac{x + y}{2}, \widehat{\omega}(y - x) \right) \quad (2.1.1)$$

onde, $\Phi_1^* \Sigma = \Omega$, onde Σ é a forma simplética canônica em $T^*\mathbb{R}^2$.

Agora, se tomamos coordenadas $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, temos que

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1, \quad \widehat{\omega}(x_1, y_1) = (-y_1, x_1)$$

e

$$\Omega = dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2.$$

Pela identificação $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^{2*}$, tomemos coordenadas $(p, q; p^*, q^*)$ sobre o fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^2$. Logo, o symplectomorfismo Φ_1 é dado explicitamente por

$$p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad q = \frac{1}{2}(y_1 + y_2); \quad p^* = y_1 - y_2; \quad q^* = x_2 - x_1,$$

com inversa

$$y_1 = q + \frac{p^*}{2}; \quad y_2 = q - \frac{p^*}{2}; \quad x_2 = p + \frac{q^*}{2}; \quad x_1 = p - \frac{q^*}{2},$$

e, de fato,

$$\begin{aligned} \Sigma &= (dp - \frac{1}{2}dq^*) \wedge (dq + \frac{1}{2}dp^*) - (dp + \frac{1}{2}dq^*) \wedge (dq - \frac{1}{2}dp^*) \\ &= dp \wedge dp^* + dq \wedge dq^* \end{aligned}$$

Por outro lado, em $T^*\mathbb{R}^2$ consideremos a polarização natural dada por $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$ e no par grupóide simplético a polarização dada pela duplicação da polarização horizontal em $\mathbb{R}^2$, isto é, $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$, vamos mostrar que ditas polarizações são não transversais.

Lema 2.1.1. *Sejam P e F as polarizações acima, então se $\tilde{F} = (\Phi_1)_*(F)$, temos que $\tilde{F}$ e P são não transversais.*

Prova:

Suponhamos que

$$\partial p^* = a\partial x_1 + b\partial y_1 + c\partial x_2 + d\partial y_2 \quad e \quad \partial q = a'\partial x_1 + b'\partial y_1 + c'\partial x_2 + d'\partial y_2,$$

mas, como

$$dp = \frac{1}{2}(dx_1 + dx_2); \quad dq = \frac{1}{2}(dy_1 + dy_2); \quad dp^* = dy_1 - dy_2; \quad dq^* = dx_2 - dx_1,$$

$$dp^*(\partial p^*) = 1; \quad dp(\partial p^*) = dq(\partial p^*) = dq^*(\partial p^*) = 0$$

e

$$dq(\partial q) = 1; \quad dp(\partial q) = dp^*(\partial q) = dq^*(\partial q) = 0,$$

então,

$$\partial p^* = \frac{1}{2}(\partial y_1 - \partial y_2); \quad \partial q = \partial y_1 + \partial y_2,$$

logo, se $\tilde{F} = (\Phi_1)_*(F)$, temos que $\tilde{F} = \langle \partial q, \partial p^* \rangle$.

Daí, $\tilde{F} \cap P = \langle \partial p^* \rangle$, então as polarizações acima são não transversais. ■

Agora, como $\Sigma = dp \wedge dp^* + dq \wedge dq^*$ o potencial simplético adaptado à polarização P é dado pela seguinte formula

$$\Theta_P = -p^*dp - q^*dq,$$

pois $d(\Theta_P) = \Sigma$ e este se anula sobre a polarização P .

Da mesma forma, como $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$ para $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ e $\Omega = dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2$, temos que o potencial simplético adaptado a polarização F é dada por

$$\Theta_F = y_2 dx_2 - y_1 dx_1.$$

Assim, como $\tilde{F} = (\Phi_1)_*(F)$

$$\begin{aligned} \Theta_{\tilde{F}} &= (q - \frac{p^*}{2})(dp + \frac{dq^*}{2}) - (q + \frac{p^*}{2})(dp - \frac{dq^*}{2}) \\ &= qdq^* - p^*dp. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}} = -p^*dp - q^*dq - qdq^* + p^*dp = -qdq^* - q^*dq = -d(q^*q) \quad (2.1.2)$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.2. *Sejam $(p, q; p^*, q^*) \in T^*(\mathbb{R}^2)$, $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, Φ_1 como em (2.1.1), $\tilde{F} = (\Phi_1)_*(F)$ e L o fibrado pré-quântico do par grupóide com produto Hermítico $(\cdot, \cdot)$, então para t_0 e $\tilde{s}_0$ seções polarizadas adaptadas aos potenciais simpléticos Θ_P e $\Theta_{\tilde{F}}$ respectivamente (proposição 1.2.5), temos que*

$$(t_0, \tilde{s}_0) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(qq^*)}$$

Prova:

Da proposição 1.2.5 temos que t_0 e $\tilde{s}_0$ são tais que

$$\nabla_X t_0 = -(i/\hbar)\Theta_P t_0; \quad (t_0, t_0) = 1 \quad (2.1.3)$$

e

$$\nabla_X \tilde{s}_0 = -(i/\hbar)\Theta_{\tilde{F}} \tilde{s}_0; \quad (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1. \quad (2.1.4)$$

Por outro lado, como L é um fibrado vetorial linear, existe uma função não zero $\Phi_0 \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^2)$ tal que $\tilde{s}_0 = \Phi_0 t_0$, mas das propriedades da conexão ∇ ,

$$\nabla_X \tilde{s}_0 = \nabla_X \Phi_0 t_0 = X(\Phi_0)t_0 + \Phi_0 \nabla_X t_0,$$

logo das equações (2.1.3) e (2.1.4), obtemos

$$\frac{d\Phi_0}{\Phi_0} = \frac{i}{\hbar}(\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}}) = -\frac{i}{\hbar}[qdq^* + q^*dq] = -\frac{i}{\hbar}d(qq^*).$$

De onde, a função $\Phi_0(p, q; p^*, q^*) = Ce^{-\frac{i}{2}qq^*}$ com C uma constante positiva. ■

Por outro lado, do lema 2.1.1 temos que, $\tilde{F} \cap P = D$. Assim, suponhamos $R = T^*\mathbb{R}^2/D$, $x \in R$ e $m \in \pi^{-1}(x)$, onde π é a projeção canônica, então

$$T_x R = T_m M / D_m \text{ e } V_m = D_m^\perp / D_m.$$

Portanto, da definição 1.2.22

$$\Delta_1(T_x R) = \Delta_{-1/2}(\tilde{F}_m) \otimes \Delta_{-1/2}(P_m) \otimes \Delta_{1/2}(V_m) \otimes \Delta_1(T_m M),$$

onde $M = T^*\mathbb{R}^2$.

Daí, se $\varepsilon_{\omega'}$ é a forma de volume do espaço V_m , então

$$(\psi, \psi')_x = (s(m), s'(m)) v_m v'_m |\varepsilon_{\omega'}|^{1/2} |\varepsilon_\Sigma|$$

é uma um-densidade bem definida $\Delta_1(T_x R)$, com ε_Σ a forma de volume de $T_m M$.

Agora, como a polarização P é a polarização natural do espaço cotangente, ie, se $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}^2$ a polarização P é dado por $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$, de onde

$$T(T^*\mathbb{R}^2)/P = T\mathbb{R}^2$$

e assim, das propriedades de meias densidades

$$\Delta_{-1/2}(P_m) = \Delta_{-1/2}(T_m(T^*\mathbb{R}^2)) \otimes \Delta_{1/2}(T_{(p,q)}(\mathbb{R}^2)).$$

Daí, se ε_Σ é forma de Liouville de $T^*\mathbb{R}^2$ e ε_ω é a forma de Liouville de $\mathbb{R}^2$, então temos que a seção natural de $\Delta_{-1/2}(P_m)$ é dada por

$$v = |\varepsilon_\Sigma|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_\omega|^{1/2}.$$

Analogamente, para a polarização F no par grupóide $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, temos que

$$T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)/F = T\mathbb{R}^2,$$

assim, um elemento natural de $\Delta_{-1/2}(F_m)$ é dada por

$$v' = |\varepsilon_\Omega|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_\omega|^{1/2}.$$

onde ε_Ω é a forma de Liouville em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Mas, do fato que $\tilde{F} = (\Phi_1)_* F$, um elemento natural de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ é dado por

$$\tilde{v}' = |\varepsilon_{\Phi^{-1}(\Omega)}|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_{\Phi^{-1}(\omega)}|^{1/2}.$$

Assim, como $(\Phi_1^{-1})^*(\Omega) = \Sigma$, a 1-densidade $(\psi, \psi')_x$ em $\Delta_1(T_x R)$ fica dada por

$$(\psi, \psi')_x = (s(m), s'(m))| \varepsilon_\omega | \cdot | \varepsilon_{\omega'} |^{1/2}.$$

Além disso, uma seção $gt_0 \in L$ é uma seção polarizada adaptada P se e somente se $Xg = 0$ para $X \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^2, P)$, pois $\nabla_X t_0 = -(i/\hbar)\Theta_P t_0$. Da mesma forma fs_0 é uma seção polarizada adaptada a polarização F se e somente se $Yf = 0$ para $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, F)$, de onde temos que $g = g(p, q)$ e $f = f(x_1, x_2)$. Logo do lema 2.1.2 e a definição de empareamento, temos que para $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}^2$, o empareamento é dado pela seguinte integral

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = C \int_{T^*\mathbb{R}^2/D} \overline{f(p - \frac{q^*}{2}, \frac{q^*}{2} + p)} \cdot g(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar}qq^*} dp dq dq^* \quad (2.1.5)$$

onde $\psi = sv$ e $\psi' = s'v'$ são seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$ respectivamente.

Mas $T^*(\mathbb{R}^2)/D \cong \mathbb{R}^3$ e além disso $x_1 = \frac{q^*}{2} + p$; $x_2 = p - \frac{q^*}{2}$, logo fazendo essa mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi' \rangle_{pr} &= C \int_{\mathbb{R}^3} \overline{f(x_1, x_2)} \cdot g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_2 - x_1)} dx_1 dx_2 dq \\ &= \langle f, T_1 g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

onde T_1 é uma aplicação integral definida nas funções tipo Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$ dada da seguinte forma

$$T_1 g(x_1, x_2) = C \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_2 - x_1)} dq. \quad (2.1.7)$$

De forma análoga, da equação (2.1.5) obtemos que

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \langle S_1 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

onde S_1 é uma aplicação integral definida por

$$S_1 f(p, q) = C \int_{\mathbb{R}} f\left(p - \frac{q^*}{2}, \frac{q^*}{2} + p\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}qq^*} dq^*, \quad (2.1.8)$$

tal que $f \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e a integral acima faz sentido.

Para mostrar algumas propriedades interessante das aplicações integrais T_1 e S_1 , vamos precisar do seguinte:

Se ρ é qualquer função sobre $\mathbb{R}^n$ e $t > 0$, seja

$$\rho_t(x) = t^{-n} \rho(t^{-1}x).$$

Logo, temos

Proposição 2.1.3 ([10] teorema 8.15). *Suponhamos $|\rho(x)| \leq C(1 + |x|)^{-n-\epsilon}$ para algum $C, \epsilon > 0$ (o que implica que $\rho \in L^1$) e $\int \rho(x)dx = a$. Se $f \in L^p(1 \leq p \leq \infty)$, então $f * \rho_t(x) \rightarrow af(x)$ quando $t \rightarrow 0$ para todo x no conjunto de Lebesgue de f , em particular para quase todo x , e para todo x no qual f é contínua.*

Quando $a = 1$, $\{\rho_t\}_{t>0}$ chama-se **aproximação da identidade**, pois proporciona uma aproximação do operador identidade sobre L^p pelo operador convolução.

Proposição 2.1.4. *Sejam T_1, S_1 as aplicações integrais (2.1.7) e (2.1.8) respectivamente, $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ uma função tipo Schwartz e f também como acima, então temos que $T_1g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\|S_1f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ a menos de uma constante.*

Prova:

Pela definição de T_1 temos que

$$T_1g(x_1, x_2) = C \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_2 - x_1)} dq.$$

Daí, para mostrar que a expressão a seguir

$$\int_{\mathbb{R}^2} |T_1g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$$

é limitada, podemos observar que

$$\begin{aligned} |T_1g(x_1, x_2)|^2 &= T_1g(x_1, x_2) \overline{T_1g(x_1, x_2)} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{-\frac{i}{\hbar}q(x_2 - x_1)} dq \right] \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \overline{g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right)} e^{\frac{i}{\hbar}q(x_2 - x_1)} dq \right], \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} |T_1g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \\ &= C^2 \iiint\limits_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1\right) \overline{g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_2\right)} e^{-\frac{i}{\hbar}q_1(x_2 - x_1)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}q_2(x_2 - x_1)} dq_1 dq_2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Mas, fazendo $u = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $v = \frac{x_2 - x_1}{2}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |T_1g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 &= \frac{C^2}{2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(u, q_1) \overline{g(u, q_2)} e^{-\frac{2i}{\hbar}q_1v} \cdot e^{\frac{2i}{\hbar}q_2v} dq_1 dq_2 dudv \\ &= \frac{C^2}{2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(u, q_1) \overline{g(u, q_2)} e^{\frac{2i}{\hbar}v(q_2 - q_1)} dq_1 dq_2 dudv. \end{aligned}$$

Nessa última integral podemos observar que ela não é absolutamente convergente, de onde não é possível mudar a ordem de integração, motivo pelo qual introduzimos no integrando o fator $e^{-\frac{4t^2}{\hbar^2}|v|^2}$, ie,

$$\frac{C^2}{2} \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(u, q_1) \overline{g(u, q_2)} e^{\frac{2i}{\hbar}v(q_2 - q_1)} e^{-\frac{4t^2}{\hbar^2}|v|^2} dq_1 dq_2 dudv.$$

Agora, é possível mudar a ordem de integração e podemos definir

$$G_t(q_2 - q_1) = C^2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2i}{\hbar}v(q_2 - q_1)} e^{-\frac{4t^2}{\hbar^2}|v|^2} dv, \quad (2.1.9)$$

onde, para um C adequado e uma mudança de variáveis,

$$G_t(q_2 - q_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(q_2 - q_1)w} e^{-t^2|w|^2} dw.$$

Mas, da transformada de Fourier da função Gaussiana

$$G_t(x) = \frac{1}{t\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{|x|^2}{4t^2}}.$$

Assim, G_t é uma aproximação da unidade e da proposição 2.1.3 temos que $G_t * g \rightarrow g$ quando $t \rightarrow 0$, de onde

$$\int_{\mathbb{R}^2} |T_1 g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \cong \int_{\mathbb{R}^2} |g(u, q_2)|^2 dudq_2 < \infty,$$

pois $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Analogamente, temos que

$$\|S_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} |S_1 f(p, q)|^2 dp dq,$$

mas,

$$\begin{aligned} |S_1 f(p, q)|^2 &= S_1 f(p, q) \cdot \overline{S_1 f(p, q)} \\ &= C^2 \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(p - \frac{q^*}{2}, p + \frac{q^*}{2}\right) e^{\frac{i}{\hbar}qq^*} dq^* \right) \\ &\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(p - \frac{q^*}{2}, p + \frac{q^*}{2}\right) e^{-\frac{i}{\hbar}qq^*} dq^* \right) \\ &= C^2 \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f\left(p - \frac{q_1^*}{2}, p + \frac{q_1^*}{2}\right) \overline{f\left(p - \frac{q_2^*}{2}, p + \frac{q_2^*}{2}\right)} e^{\frac{i}{\hbar}(q_1^* - q_2^*)} dq_1^* dq_2^*. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|S_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = C^2 \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(p - \frac{q_1^*}{2}, p + \frac{q_1^*}{2}) \overline{f(p - \frac{q_2^*}{2}, p + \frac{q_2^*}{2})} e^{\frac{i}{\hbar} q_1^* (q_1^* - q_2^*)} dq_1^* dq_2^* dp dq.$$

Logo, usando a aproximação da unidade como em (2.1.9) temos que

$$\begin{aligned} \|S_1 f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= C^2 \int_{\mathbb{R}^2} f(p - \frac{q_1^*}{2}, p + \frac{q_1^*}{2}) \overline{f(p - \frac{q_1^*}{2}, p + \frac{q_1^*}{2})} dq_1^* dp \\ &= C^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(p - \frac{q_1^*}{2}, p + \frac{q_1^*}{2})|^2 dq_1^* dp \\ &= C^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(u, v)|^2 du dv = C^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

■

Por outro lado, como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, no par grupóide $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ a multiplicação e a involução são dadas da seguinte forma:

$$(x_1, y_1; x_2, y_2) \odot (x_2, y_2; x_3, y_3) = (x_1, y_1; x_3, y_3); \quad \iota(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_2, y_2; x_1, y_1).$$

Daí, definimos a convolução de duas funções sobre $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ por

$$(f \otimes g)(x_1, y_1; x_2, y_2) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, y_1; x_2, y_2) g(x_2, y_2; x_3, y_3) dx_2 dy_2.$$

Agora, pelo Lema 1.3.5 temos que $(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2)/F$ é um grupóide, logo definimos a convolução de funções sobre $(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2)/F$ por

$$(f \overline{\otimes} g)(x_1, x_3) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_3) g(x_2, x_3) dx_2.$$

Assim, se g_1 e g_2 são duas aplicações definidas sob $T^*\mathbb{R}^2/P$, então da equação (2.1.7)

$$T_1 g_1(x_1, x_2) = C \int_{\mathbb{R}} g_1(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1) e^{\frac{i}{\hbar} q_1 (x_2 - x_1)} dq_1$$

e

$$T_1 g_2(x_2, x_3) = C \int_{\mathbb{R}} g_2(\frac{x_2 + x_3}{2}, q_2) e^{\frac{i}{\hbar} q_2 (x_3 - x_2)} dq_2,$$

logo da convolução temos que

$$\begin{aligned} T_1 g_1 \overline{\odot} T_1 g_2(x_1, x_3) &= \int_{\mathbb{R}} T_1 g_1(x_1, x_2) T_1 g_2(x_2, x_3) dx_2 \\ &= C^2 \int_{\mathbb{R}^3} g_1(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 (x_2 - x_1)} \cdot g_2(\frac{x_2 + x_3}{2}, q_2) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_2 (x_3 - x_2)} dq_1 dq_2 dx_2 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

De onde, usando a aplicação S_1 , temos que

$$\begin{aligned}
 S_1[T_1 g_1 \overline{\otimes} T_1 g_2](p, q) &= C \int_{\mathbb{R}} (T_1 g_1 * T_1 g_2) \left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2} \right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q q^*} dq^* \\
 &= C^3 \int_{\mathbb{R}^2} T_1 g_1 \left(\frac{q^*}{2} + p, x_2 \right) T_1 g_2 \left(x_2, p - \frac{q^*}{2} \right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q q^*} dx_2 dq^* \\
 &= C^3 \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g_1 \left(\frac{q^*/2 + p + x_2}{2}, q_1 \right) \cdot g_2 \left(\frac{x_2 + p - q^*/2}{2}, q_2 \right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 (x_2 - p - \frac{q^*}{2})} \\
 &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_2 (p - \frac{q^*}{2} - x_2)} e^{\frac{i}{\hbar} q q^*} dq_1 dq_2 dx_2 dq^*.
 \end{aligned}$$

Agora fazendo $C^3 = \frac{1}{\hbar^2}$ e a mudança de variáveis seguinte,

$$p_1 = \frac{q^*/2 + p + x_2}{2}; \quad p_2 = \frac{x_2 + p - q^*/2}{2},$$

temos

$$p_1 + p_2 = p + x_2; \quad p_1 - p_2 = \frac{q^*}{2},$$

assim,

$$\begin{aligned}
 q^*/2 + p - x_2 &= 2(p - p_2); \quad x_2 - p + q^*/2 = 2(p_1 - p); \quad x_2 - p - q^*/2 \\
 &= 2(p_2 - p); \quad p - q^*/2 - x_2 = 2(p - p_1),
 \end{aligned}$$

logo, definindo

$$g_1 *_h^1 g_2 := S_1[T_1 g_1 \overline{\otimes} T_1 g_2]$$

temos que

$$\begin{aligned}
 (g_1 *_h^1 g_2)(p, q) &= S_1[T_1 g_1 \overline{\otimes} T_1 g_2](p, q) \\
 &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} g_1(p_1, q_1) \cdot g_2(p_2, q_2) \cdot e^{-\frac{2i}{\hbar} [q_1(p-p_2) + q_2(p_1-p) + q(p_2-p_1)]} dq_1 dq_2 dp_1 dp_2
 \end{aligned}$$

Portanto, temos o seguinte resultado

Teorema 2.1.5. *Sejam $\mathbb{R}^2$ o plano euclidiano com forma simplética canônica, $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ o par grupóide simplético gerado do plano euclidiano e Φ_1 a aplicação dada em (2.1.1). Se P e F são as polarizações dadas acima sobre $T^*\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ respectivamente, suponha que $\tilde{F} = (\Phi_1^{-1})_*(F)$. Então, para $\psi \in L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\psi' \in L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$,*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = \langle f, T_1 g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle S_1 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{pr}$ é o empareamento de seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$, $\psi = f \tilde{s}_0 v$; $\psi' = g t_0 v'$, com v, v' seções de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\Delta_{-1/2}(P)$ respectivamente, $(t_0, \tilde{s}_0) = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1$, f, g funções tipo Schwartz e T_1, S_1 definidos pelas formulas (2.1.7)-(2.1.8)

respectivamente. Além disso, se $\overline{\otimes}$ é a convolução no grupóide reduzido, o produto de funções em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$g_1 *_h^1 g_2 := S_1[T_1 g_1 \overline{\otimes} T_1 g_2]$$

coincide com o produto de Weyl para funções tipo Schwartz, denotado por $*_h^0$. Isto é,

$$g_1 *_h^1 g_2 = g_1 *_h^0 g_2.$$

Para funções tipo Schwartz em $\mathbb{R}^2$ temos o seguinte:

Proposição 2.1.6. *Para funções tipo Schwartz a aplicação integral T_1 dada por (2.1.7) tem inversa e esta é dada pela aplicação S_1 como em (2.1.8).*

Prova:

Se observamos a seguinte integral

$$\begin{aligned} S_1(T_1 f)(p, q) &= C \int_{\mathbb{R}} T_1 f\left(p - \frac{y}{2}, \frac{y}{2} + p\right) \exp\left(\frac{i}{h} q y\right) dy \\ &= C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left(-\frac{i}{h} \xi y\right) \exp\left(\frac{i}{h} q y\right) dy d\xi \\ &= C^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{h} (q - \xi) y\right] dy d\xi \end{aligned}$$

a qual não é absolutamente convergente.

Daí, não podemos mudar a ordem de integração no sentido usual, de onde introduzimos o fator Gaussiano $e^{-\frac{1}{4h^2} t^2 |y|^2}$ na integral acima, ie,

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{h} (q - \xi) y\right] \exp\left(-\frac{1}{h^2} t^2 |y|^2\right) dy d\xi$$

Mas, se $t \rightarrow 0$ a integral acima tende a $S_1(T_1 f)(p, q)$.

Além disso, esta integral é absolutamente convergente e podemos tomar a integral iterada em quaisquer ordem. Daí,

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h} (q - \xi) y} e^{-\frac{1}{h^2} t^2 |y|^2} dy \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) G_t(q - \xi) d\xi$$

onde

$$G_t(q - \xi) = C^2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{h} y (q - \xi)} e^{-\frac{1}{h^2} t^2 |y|^2} dy$$

Logo

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q - \xi)y\right] \exp\left(-\frac{1}{\hbar^2}t|y|^2\right) dy d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) G_t(q - \xi) d\xi$$

para todo $t > 0$, e tomamos o limite quando $t \rightarrow 0$. De onde, o limite na esquerda é $S_1(T_1 f)(p, q)$.

Mas, fazendo uma mudança de variáveis temos que

$$G_t(q - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(q-\xi)v} \cdot e^{-t^2|v|^2} dv.$$

Assim, da transformada de Fourier da função Gaussiana obtemos que

$$G_t(x) = \frac{1}{t\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{|x|^2}{4t^2}}.$$

De onde, temos as seguintes propriedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x) dx = 1$ para todo t
- $G_t(x) \geq 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} G_t(x) = 0$ se $x \neq 0$, uniformemente em $|x| \geq \epsilon$ para quaisquer $\epsilon > 0$.

Então, G_t é uma aproximação da unidade. Portanto a formula de inversão é consequência direta do teorema da aproximação da unidade, pois como G_t é uma aproximação da unidade $G_t * f \rightarrow f$ quando $t \rightarrow 0$, logo $S_1(T_1 f)(p, q) = f(p, q)$.

Similarmente, mostra-se que $T_1(S_1 f)(p, q) = f(p, q)$. ■

Observação 2.1.7. Note-se que a associatividade do produto de Weyl pode ser vista como corolário da Proposição 2.1.6 acima e da associatividade da convolução no grúide reduzido.

2.2 Produto integral de Weyl via polarizações transversais (real e holomorfa)

Para qualquer conexão afim ∇ sobre uma variedade $\mathbf{M}$ podemos definir

$$\Phi : TM \rightarrow \mathbf{M} \times \mathbf{M} ; (m, v) \mapsto (\exp_m(-v), \exp_m(v)).$$

Além disso, como no caso de variedades simpléticas, (M, ω) , temos que T^*M é equivalente a TM . Quando M é uma variedade simétrica, podemos usar a aplicação

acima, quando esta é um difeomorfismo, para construir polarizações no par grupóide partindo da fibração natural do fibrado tangente. Desta maneira, se $\mathbf{M} = \mathbb{R}^2$, o plano Euclidiano, com coordenadas (x, y) e forma simplética canônica $\omega = dx \wedge dy$, nesse caso temos a aplicação Φ_2 acima,

$$\Phi_2 : T\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 ; (m, v) = (x, y, v_x, v_y) \longmapsto (\exp_m(-v), \exp_m(v))$$

dada explicitamente por

$$\Phi_2(x, y; v_x, v_y) = (x - v_x, y - v_y; x + v_x, y + v_y) = (x_-, y_-; x_+, y_+). \quad (2.2.1)$$

Denotemos por $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ a variedade simplética com forma simplética dada por $\Omega = \omega - \bar{\omega}$. Se $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ tem coordenadas $(x_-, y_-; x_+, y_+)$ como acima, então temos que $\Omega = dx_- \wedge dy_- - dx_+ \wedge dy_+$ e podemos observar que no caso de $\mathbf{M} = \mathbb{R}^2$ a aplicação Φ_2 acima é um difeomorfismo. Assim, em $T\mathbb{R}^2$ consideramos a forma simplética dada por $\Phi_2^*(\Omega) = \Pi$, explicitamente,

$$\Pi = 2(dv_y \wedge dx - dv_x \wedge dy), \quad (2.2.2)$$

pois, como

$$x_- = x - v_x; \quad y_- = y - v_y; \quad x_+ = x + v_x; \quad y_+ = y + v_y;$$

temos que

$$x = \frac{x_- + x_+}{2}; \quad v_x = \frac{x_+ - x_-}{2}; \quad y = \frac{y_- + y_+}{2}; \quad v_y = \frac{y_+ - y_-}{2}. \quad (2.2.3)$$

Agora, suponhamos que $z_- = x_- + iy_-$ e $z_+ = x_+ + iy_+$ (coordenadas holomorfas em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$), logo

$$\Omega = \frac{i}{2} dz_- \wedge d\bar{z}_- - \frac{i}{2} dz_+ \wedge d\bar{z}_+. \quad (2.2.4)$$

Consideremos então as seguintes polarizações:

$$P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle \quad \text{e} \quad F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$$

onde

$$\partial \bar{z}_- = \frac{1}{2}(\partial x_- + i\partial y_-) \quad \text{e} \quad \partial z_+ = \frac{1}{2}(\partial x_+ - i\partial y_+).$$

De (2.2.2) temos que o potencial simplético adaptado a polarização P é dado por

$$\Theta_P = 2(v_y dx - v_x dy),$$

enquanto que de (2.2.4) o potencial simplético adaptado a polarização F é dado por

$$\begin{aligned}
\Theta_F &= -\frac{i}{2}\bar{z}_-dz_- - \frac{i}{2}z_+d\bar{z}_+ \\
&= -\frac{i}{2}(x_- - iy_-)(dx_- + idy_-) - \frac{i}{2}(x_+ + iy_+)(dx_+ - idy_+) \\
&= -\frac{1}{2}(ix_-dx_- - y_-dy_- + y_-dx_- + iy_-dy_- + ix_+dx_+ + x_+dy_+ - y_+dx_+ + iy_+dy_+) \\
&= -\frac{1}{2}[(-x_-dy_- + y_-dx_- + x_+dy_+ - y_+dx_+) + i(x_-dx_- + y_-dy_- + x_+dx_+ + y_+dy_+)] \\
&= -\frac{1}{2}[(-x_-dy_- + y_-dx_- + x_+dy_+ - y_+dx_+) + \frac{i}{2}d(x_-^2 + y_-^2 + x_+^2 + y_+^2)]
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
-x_-dy_- &= (v_x - x)(dy - dv_y) = v_xdy - v_xdv_y - xdy + xdv_y \\
y_-dx_- &= (y - v_y)(dx - dv_x) = ydx - ydv_x - v_ydx + v_ydv_x \\
x_+dy_+ &= (x + v_x)(dy + dv_y) = xdy + xdv_y + v_xdy + v_xdv_y \\
-y_+dx_+ &= (-y - v_y)(dx + dv_x) = -ydx - ydv_x - v_ydx - v_ydv_x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$-x_-dy_- + y_-dx_- + x_+dy_+ - y_+dx_+ = 2v_xdy + 2xdv_y - 2ydv_x - 2v_ydx,$$

De onde, se $\tilde{F} = (\Phi_2^{-1})_*F$,

$$\Theta_{\tilde{F}} = -[(v_xdy + xdv_y - ydv_x - v_ydx) + \frac{i}{4}d((x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2)].$$

Então

$$\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}} = (-v_xdy + xdv_y - ydv_x + v_ydx) + \frac{i}{4}d[(x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2].$$

Assim, se

$$\Psi(x, y, v_x, v_y) = (xv_y - yv_x) + \frac{i}{4}[(x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2]$$

temos que

$$d\Psi(x, y, v_x, v_y) = \Theta_P - \Theta_{\tilde{F}}.$$

Por outro lado, da proposição 1.2.5 existem seções polarizadas, t_0 e $\tilde{s}_0$, adaptadas aos potenciais simpléticos Θ_P e $\Theta_{\tilde{F}}$ respectivamente tais que

$$\nabla_X t_0 = -(i/\hbar)\Theta_P t_0; (t_0, t_0) = 1,$$

$$\nabla_X \tilde{s}_0 = -(i\hbar)\Theta_{\tilde{F}}\tilde{s}_0; \quad (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1 ,$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto hermitiano do fibrado pré-quântico e $X \in \mathfrak{X}(T\mathbb{R}^2)$.

Além disso, lembremos que a conexão na variedade simplética quantizável é dada localmente por:

$$\nabla_X = X - (i/\hbar)\Theta(X) ,$$

onde Θ é um potencial simplético.

Então, como as seções polarizadas em $\Gamma_P L$ são dadas por gt_0 , com $g \in C^\infty(T\mathbb{R}^2)$, da definição de seções polarizadas e de seção adaptado ao potencial simplético, temos que $Xg = 0$ para $X \in \mathfrak{X}(T\mathbb{R}^2, P)$. Daí, g depende só das variáveis $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Da mesma forma, se s_0 é a seção adaptada ao potencial Θ_F como na proposição 1.2.3, temos que as seções polarizadas, $s \in \Gamma_F L$ são da forma fs_0 , onde $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_-} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial z_+} = 0$, isto é, $f = f(z_-, \bar{z}_+)$.

Agora, como o fibrado pré-quântico é um fibrado trivial, temos que $\tilde{s}_0 = \phi t_0$ para uma função não zero $\phi \in C^\infty(T\mathbb{R}^2)$. Logo, da definição da conexão temos que

$$\nabla_X \tilde{s}_0 = \nabla_X \phi t_0 = (X\phi)t_0 + \phi \nabla_X t_0 ,$$

de onde obtemos

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{i}{\hbar}(\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}}).$$

Então,

$$\phi(x, y, v_x, v_y) = C e^{\frac{i}{\hbar}(xv_y - yv_x) - \frac{1}{4\hbar}[(x-v_x)^2 + (y-v_y)^2 + (x+v_x)^2 + (y+v_y)^2]}.$$

Agora, se

$$\Psi_1(x, y, v_x, v_y) = xv_y - yv_x ,$$

$$\Psi_2(x, y, v_x, v_y) = (x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2 ,$$

da definição da aplicação Φ_2 , equações (2.2.3), temos que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(z_- + z_+) + (\bar{z}_- + \bar{z}_+)}{4} ; y = \frac{(z_- + z_+) - (\bar{z}_- + \bar{z}_+)}{4i} ; \\ v_x &= \frac{(z_+ - z_-) + (\bar{z}_+ - \bar{z}_-)}{4} ; v_y = \frac{(z_+ - z_-) + (\bar{z}_- - \bar{z}_+)}{4i}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} yv_x &= \frac{(z_- + z_+ - \bar{z}_- - \bar{z}_+).(z_+ - z_- + \bar{z}_+ - \bar{z}_-)}{16i} \\ &= \frac{z_-z_+ - z_-^2 + z_- \bar{z}_+ - |z_-|^2 + z_+^2 - z_+z_- + |z_+|^2 - z_+ \bar{z}_- - \bar{z}_-z_+ + |z_-|^2 - \bar{z}_- \bar{z}_+ + \bar{z}_-^2 - |z_+|^2 + \bar{z}_+z_- - \bar{z}_+^2 + \bar{z}_+ \bar{z}_- - z_-^2 + 2\bar{z}_+z_- + z_+^2 - 2\bar{z}_-z_+ + \bar{z}_-^2 - \bar{z}_+^2}{16i}. \end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que

$$\begin{aligned}
 xv_y &= \frac{(z_- + z_+ + \bar{z}_- + \bar{z}_+).(z_+ - z_- + \bar{z}_- - \bar{z}_+)}{16i} \\
 &= \frac{z_-z_+ - z_-^2 + |z_-|^2 - z_- \bar{z}_+ + z_+^2 - z_+z_- + z_+ \bar{z}_- - |z_+|^2 +}{16i} \\
 &\quad + \bar{z}_-z_+ - |z_-|^2 + \bar{z}_-^2 - \bar{z}_- \bar{z}_+ + |z_+|^2 - \bar{z}_+z_- + \bar{z}_+ \bar{z}_- - \bar{z}_+^2 \\
 &= \frac{-z_-^2 + z_+^2 + \bar{z}_-^2 - \bar{z}_+^2 - 2\bar{z}_+z_- + 2\bar{z}_-z_+}{16i}.
 \end{aligned}$$

De onde,

$$xv_y - yv_x = \frac{4\bar{z}_-z_+ - 4\bar{z}_+z_-}{16i} = -\frac{i}{4}(\bar{z}_-z_+ - \bar{z}_+z_-).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2 &= \\
 &= \frac{(z_- + \bar{z}_-)^2}{4} - \frac{(z_- - \bar{z}_-)^2}{4} + \frac{(z_+ + \bar{z}_+)^2}{4} - \frac{(z_+ - \bar{z}_+)^2}{4} \\
 &= z_- \bar{z}_- + z_+ \bar{z}_+,
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 \circ \Phi_2^{-1}(x_-, y_-; x_+, y_+) &= \frac{i}{4}(\bar{z}_+z_- - \bar{z}_-z_+) , \\
 \Psi_2 \circ \Phi_2^{-1}(x_-, y_-; x_+, y_+) &= z_- \bar{z}_- + z_+ \bar{z}_+ .
 \end{aligned}$$

Assim temos o seguinte lema

Lema 2.2.1. *Sejam $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}^2}$ o par grupóide, $T\mathbb{R}^2$ o fibrado tangente, Φ_2 a aplicação definida em (2.2.1). Para $(x, y; v_x, v_y) \in T\mathbb{R}^2$, $(x_-, y_-, x_+, y_+) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, considere-mos as polarizações P , F , $\tilde{P}$ e $\tilde{F}$ dadas por $F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$, $P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle$, $(\Phi_2)_*(P) = \tilde{P}$ e $(\Phi_2)^{-1}_*(F) = \tilde{F}$. Então se $t \in \Gamma_P L$, $\tilde{t} \in \Gamma_{\tilde{P}} L$, $s \in \Gamma_F L$ e $\tilde{s} \in \Gamma_{\tilde{F}} L$, o produto hermitiano destas seções polarizadas é dado pelas expressões seguintes:*

$$\begin{aligned}
 (t, \tilde{s}) &= Cg(x, y)f(z_-(x, y; v_x, v_y), \bar{z}_+(x, y; v_x, v_y))e^{\frac{i}{\hbar}(xv_y - yv_x) + \frac{1}{4\hbar}[(x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 + (x + v_x)^2 + (y + v_y)^2]} \\
 &e \\
 (\tilde{t}, s) &= Cg\left(\frac{x_- + x_+}{2}, \frac{y_- + y_+}{2}\right)f(z_-, \bar{z}_+).e^{-\frac{1}{2\hbar}[i(x_+y_- - x_-y_+)]}.e^{-\frac{1}{4\hbar}(|z_-|^2 + |\bar{z}_+|^2)}.
 \end{aligned}$$

Vamos agora dar uma expressão explícita para as meias densidades polarizadas. De fato, como P é a polarização natural do fibrado tangente, dado $q \in \mathbb{R}^2$ e $m \in \pi^{-1}(q)$, com π a projecção canônica, então

$$T_q \mathbb{R}^2 = T_m(T\mathbb{R}^2)/P_m,$$

assim

$$\Delta_{-1/2}(P_m) = \Delta_{-1/2}(T_m(T\mathbb{R}^2)) \otimes \Delta_{1/2}(T_q\mathbb{R}^2).$$

Daí, a forma de volume ε de $\mathbb{R}^2$ determina uma $-(1/2)$ - P -densidade, dada por

$$v = |\varepsilon_\Sigma|^{-1/2} |\varepsilon|^{1/2} \quad (2.2.5)$$

onde ε_Σ é forma de volume de $T(T\mathbb{R}^2)$.

No que se segue, vamos denotar a forma simpética no par grupóide por

$$\Omega \equiv \omega_\pm$$

e por

$$J_\pm$$

a estrutura complexa associada, isto é, a estrutura complexa que surge da identificação

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}^2$$

e tal que $\omega_\pm(J_\pm X, J_\pm Y) = \omega_\pm(X, Y)$ para $X, Y \in T(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$.

Então, temos que $(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2, \omega_\pm, J_\pm)$ é uma variedade Kaleriana, de onde dizemos que a polarização F é uma polarização holomorfa. Além disso, para $m \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $T_m^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) = F_m \oplus \overline{F}_m$, logo existe uma seção positiva natural v' de $\Delta_{-1/2}(F)$ unicamente determinada por:

$$v' \cdot \overline{v'} = |\varepsilon_{\omega_\pm}|^{-1/2} \quad (2.2.6)$$

onde $\varepsilon_{\omega_\pm}$ é a formula de volume de Liouville em $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$.

Agora, para $(x, y; v_x, v_y) \in T\mathbb{R}^2$ e $(x_-, y_-, x_+, y_+) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$, da Propriedade 1.2.17(6) temos que:

$$v\{\partial v_x, \partial v_y\} = (|\varepsilon_\Sigma|\{\partial x, \partial y; \partial v_x, \partial v_y\})^{-1/2} \cdot (|\varepsilon|\{\partial x, \partial y\})^{1/2}. \quad (2.2.7)$$

No caso da polarização holomorfa F , como

$$F = \langle \partial \overline{z}_-, \partial z_+ \rangle,$$

temos que

$$v'\{\partial \overline{z}_-, \partial z_+\} = (|\varepsilon_{\omega_\pm}|\{\partial \overline{z}_-, \partial z_+; \overline{\partial \overline{z}_-}, \overline{\partial z_+}\})^{-1/4}. \quad (2.2.8)$$

Agora, se $\tilde{P} = (\Phi_2)_*(P)$ e $\tilde{F} = (\Phi_2^{-1})_*(F)$, as meias densidades naturais em $\Delta_{-1/2}(\tilde{P})$ e $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ são dadas por

$$\tilde{v} = |(\Phi_2^{-1})^* \varepsilon_\Sigma|^{-1/2} |(\Phi_2^{-1})^* \varepsilon|^{1/2}; \quad \tilde{v}' = |\varepsilon_{\Phi^* \omega_\pm}|^{-1/4} \quad (2.2.9)$$

respectivamente, sendo ε_Σ a forma de volume de $T\mathbb{R}^2$ e ε a forma de volume de $\mathbb{R}^2$.

Pois, como para $m \in T\mathbb{R}^2$, $(\Phi_2)_{*m} : T_m(T\mathbb{R}^2) \longrightarrow T_{\Phi_2(m)}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ é isomorfismo e $\tilde{P}_{\Phi_2(m)} = (\Phi_2)_{*m}(P_m)$, então $(\Phi_2)_{*m}$ induz um isomorfismo natural,

$$\widetilde{\Phi_{2*m}} : T_m(T\mathbb{R}^2)/P_m \longrightarrow T_{\Phi_2(m)}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)/\tilde{P}_{\Phi_2(m)},$$

logo

$$\widetilde{\Phi_{2*m}}(T_m(T\mathbb{R}^2)/P_m) \cong T_{\Phi_2(m)}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)/\tilde{P}_{\Phi_2(m)}.$$

Mas, se $q \in \mathbb{R}^2$ e $m \in \pi^{-1}(q)$, onde π é a projeção canônica do fibrado tangente, temos que $T_q\mathbb{R}^2 = T_m(T\mathbb{R}^2)/P_m$, assim

$$\widetilde{\Phi_{2*m}}(T_q\mathbb{R}^2) \cong (\Phi_2)_{*m}(T_m(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2))/(\Phi_2)_{*m}(P_m).$$

Da mesma forma, como F é uma polarização Kahleriana, dado $p \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ temos que $T_p^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) = F_p \oplus \overline{F}_p$, logo

$$T_{\Phi_2^{-1}(p)}^{\mathbb{C}}(T\mathbb{R}^2) = \tilde{F}_{\Phi_2^{-1}(p)} \oplus \overline{(\tilde{F})}_{\Phi_2^{-1}(p)},$$

pois a estrutura complexa de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $J_\pm$, induz uma estrutura complexa $\tilde{J}$ em $T\mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{J} = (\Phi_2^{-1})_* \circ J_\pm \circ (\Phi_2)_*$ e, também, temos que $(\Phi_2^{-1})_{*p}(T_p(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)) = T_{\Phi_2^{-1}(p)}(T\mathbb{R}^2)$.

Assim, como

$$\varepsilon_{\Phi_2^*(\omega_\pm)} = 4[dx \wedge dy \wedge dv_x \wedge dv_y]$$

e

$$\begin{aligned} (\Phi_2^{-1})_*(\partial y_+) &= \frac{1}{2}(\partial y + \partial v_y); \quad (\Phi_2^{-1})_*(\partial y_-) = \frac{1}{2}(\partial y - \partial v_y); \\ (\Phi_2^{-1})_*(\partial x_+) &= \frac{1}{2}(\partial x + \partial v_x); \quad (\Phi_2^{-1})_*(\partial x_-) = \frac{1}{2}(\partial x - \partial v_x); \end{aligned}$$

tomando

$$\widetilde{\partial \bar{z}_-} = \frac{1}{2}((\Phi_2^{-1})_*(\partial x_-) + i(\Phi_2^{-1})_*(\partial y_-)); \quad \widetilde{\partial z_+} = \frac{1}{2}((\Phi_2^{-1})_*(\partial x_+) - i(\Phi_2^{-1})_*(\partial y_+)),$$

temos que

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{\Phi_2^*(\omega_\pm)} \{ \widetilde{\partial \bar{z}_-}, \widetilde{\partial z_+}, \overline{\widetilde{\partial \bar{z}_-}}, \overline{\widetilde{\partial z_+}} \} = \\ &= 4[dx \wedge dy \wedge dv_x \wedge dv_y] \\ &\quad \left\{ \frac{1}{4}((\partial x - \partial v_x) + i(\partial y - \partial v_y)), \frac{1}{4}((\partial x + \partial v_x) - i(\partial y + \partial v_y)), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4}((\partial x - \partial v_x) - i(\partial y - \partial v_y)), \frac{1}{4}((\partial x + \partial v_x) + i(\partial y + \partial v_y)) \right\} \\ &= -16. \end{aligned}$$

Logo,

$$\widetilde{v}'\{\widetilde{\partial\bar{z}_-}, \widetilde{\partial z_+}, \widetilde{\partial\bar{z}_-}, \widetilde{\partial z_+}\} = |\varepsilon_{\Phi_2^*(\omega_{\pm})}|^{-1/4}\{\widetilde{\partial\bar{z}_-}, \widetilde{\partial z_+}, \widetilde{\partial\bar{z}_-}, \widetilde{\partial z_+}\} = 1/2.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} (\Phi_2)_*(\partial x) &= \partial x_- + \partial x_+; \quad (\Phi_2)_*(\partial y) = \partial y_- + \partial y_+; \\ (\Phi_2)_*(\partial v_x) &= \partial x_+ - \partial x_-; \quad (\Phi_2)_*(\partial v_y) = \partial y_+ - \partial y_- \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widetilde{v} &= |2(dx_- \wedge dy_- \wedge dx_+ \wedge dy_+)|^{-1/2}. \\ |(1/4)(dx_- \wedge dy_- + dx_- \wedge dy_+ + dx_+ \wedge dy_- + dx_+ \wedge dy_+)|^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \widetilde{v}\{\Phi_*(\partial v_x), \Phi_*(\partial v_y)\} &= \\ &= |2(dx_- \wedge dy_- \wedge dx_+ \wedge dy_+)|^{-1/2}\{\Phi_*(\partial x), \Phi_*(\partial y), \Phi_*(\partial v_x), \Phi_*(\partial v_y)\} \cdot \\ &\cdot |(1/4)(dx_- \wedge dy_- + dx_- \wedge dy_+ + dx_+ \wedge dy_- + dx_+ \wedge dy_+)|^{1/2}\{\Phi_*(\partial x), \Phi_*(\partial y)\} \\ &= (1/2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

De onde, pelo lema 2.2.1 e os resultados acima, o empareamento $\langle \widetilde{t} \otimes \widetilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr}$ é dado por ,

$$\begin{aligned} C(1/2\sqrt{2}) \int_{\mathbb{R}^4} g\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ + y_-}{2}\right) f(z_-, \bar{z}_+) e^{\frac{1}{4\hbar}(\bar{z}_+ z_- - \bar{z}_- z_+ + z_- \bar{z}_- + z_+ \bar{z}_+)} dx_- dy_- dx_+ dy_+ = \\ C(1/2\sqrt{2}) \int_{\mathbb{R}^4} g\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ + y_-}{2}\right) \cdot f(z_-, \bar{z}_+) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}[i(x_+ y_- - x_- y_+)]} \cdot e^{-\frac{1}{4\hbar}(|z_-|^2 + |\bar{z}_+|^2)} dx_- dy_- dx_+ dy_+. \end{aligned}$$

Por outro lado, consideremos o espaço:

$$\mathcal{HL}_h^2(\mathbb{C}^2) = \left\{ f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \mid \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \text{ e } \int_{\mathbb{C}^2} |f(z_1, \bar{z}_2)|^2 e^{-\frac{1}{2\hbar}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty \right\},$$

onde $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

Dos teoremas 1.4.3(2) e 1.4.6, temos uma expressão integral para $f(z_-, \bar{z}_+)$ como segue:

$$f(z_-, \bar{z}_+) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} f(w_-, \bar{w}_+) \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(z_- \bar{w}_- + \bar{z}_+ w_+ - w_- \bar{w}_- - w_+ \bar{w}_+)\right] dp_- dq_- dp_+ dq_+,$$

onde $w_- = p_- + iq_-$ e $w_+ = p_+ + iq_+$.

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} &= C(1/2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} g\left(\frac{x_+ + x_-}{2}, \frac{y_+ + y_-}{2}\right) \\ &\quad \cdot f(w_-, \bar{w}_+) e^{-\frac{1}{2\hbar}[i(x_+y_- - x_-y_+)]} \cdot e^{-\frac{1}{4\hbar}(|z_-|^2 + |\bar{z}_+|^2)} \\ &\quad \cdot e^{\left[\frac{1}{2\hbar}(z_- \bar{w}_- + \bar{z}_+ w_+ - w_- \bar{w}_- - w_+ \bar{w}_+)\right]} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx_- dy_- dx_+ dy_+. \end{aligned}$$

Agora, de Φ_2 , temos que

$$z_- \bar{w}_- = (x + iy - v_x - iv_y) \cdot \bar{w}_- = x \bar{w}_- - iy w_+ + v_x w_+ - iy w_+$$

$$\bar{z}_+ w_+ = (x - iy + v_x - iv_y) \cdot w_+ = x w_+ - iy w_+ + v_x w_+ - iv_y w_+,$$

logo

$$z_- \bar{w}_- + \bar{z}_+ w_+ = x(\bar{w}_- + w_+) + iy(\bar{w}_- - w_+) + v_x(w_+ - \bar{w}_-) - iv_y(\bar{w}_- + w_+).$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\langle t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' \rangle_{pr} = \\ &= C(1/2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^4} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) e^{-\frac{i}{\hbar}(v_x y - x v_y)} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(x^2 + y^2 + v_x^2 + v_y^2)} \\ &\quad \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(x(\bar{w}_- + w_+) + iy(\bar{w}_- - w_+) + v_x(w_+ - \bar{w}_-) - iv_y(\bar{w}_- + w_+))\right] \\ &\quad \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(-w_- \bar{w}_- - w_+ \bar{w}_+)\right] dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy dv_x dv_y. \end{aligned}$$

Vamos a calcular então a seguinte integral:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2\hbar}(v_x^2 + v_y^2)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}(v_x y - x v_y)} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}(v_x(w_+ - \bar{w}_-) - iv_y(\bar{w}_- + w_+))} dv_x dv_y.$$

Para fazer isto, primeiro integramos,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_x^2} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}v_x y} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}(w_+ - \bar{w}_-)} dv_x =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_x^2} \cdot e^{\frac{2v_x}{2\hbar}[-iy + \frac{1}{2}(w_+ - \bar{w}_-)]} dv_x \\
&= \sqrt{2\pi\hbar} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[-iv' + \frac{1}{2}(w_+ - \bar{w}_-)]^2} \\
&= (\sqrt{2\pi\hbar}) \exp\left\{\left(\frac{1}{2\hbar}\right)[-y^2 + \frac{1}{4}(w_+ - \bar{w}_-)^2 - iy(w_+ - \bar{w}_-)]\right\}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, temos que:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_y^2} \cdot e^{\frac{iv_y}{\hbar}xv_y} \cdot e^{-\frac{iv_y}{2\hbar}(\bar{w}_- + w_+)} dv_y = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_y^2} \cdot e^{\frac{v_y}{\hbar}[ix - \frac{i}{2}(\bar{w}_- + w_+)]} = \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{1}{2\hbar}[ix - \frac{i}{2}(\bar{w}_- + w_+)]^2} dv_y \\
&= \sqrt{2\pi\hbar} \exp\left\{\frac{1}{2\hbar}[-x^2 - \frac{1}{4}(\bar{w}_- + w_+)^2 + x(\bar{w}_- + w_+)]\right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&< t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' >_{pr} = \\
&= C(1/2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int_{\mathbb{R}^6} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(x^2 + y^2)} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[x(\bar{w}_- + w_+) + iy(\bar{w}_- - w_+)]} \\
&\quad \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}(-w_- \bar{w}_- - w_+ \bar{w}_+)} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\hbar}[-x^2 - \frac{1}{4}(\bar{w}_- + w_+)^2 + x(\bar{w}_- + w_+)]\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\frac{1}{2\hbar}[-y^2 + \frac{1}{4}(w_+ - \bar{w}_-)^2 - iy(w_+ - \bar{w}_-)]\right\} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy \\
&= C(1/2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int_{\mathbb{R}^6} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2 + y^2)} \\
&\quad \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_- + w_+) + iy(\bar{w}_- - w_+)]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_- w_- + w_+ \bar{w}_+ + \bar{w}_- w_+)} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy \quad (2.2.11)
\end{aligned}$$

De onde, podemos observar que:

$$\begin{aligned}
< t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' >_{pr} &= < f, T_2 g >_{\mathcal{H}L_{\hbar}^2(\mathbb{C}^2)} \\
&= < S_2 f, g >_{L^2(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
&T_2 g(w_-, \bar{w}_+) = \\
&= C' e^{-\frac{1}{2\hbar}(w_- \bar{w}_+)} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2 + y^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_- + \bar{w}_+) - iy(w_- - \bar{w}_+)]} dx dy \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

e

$$S_2 f(x, y) = C' e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^4} f(w_-, \bar{w}_+) . e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_-+w_+)+iy(\bar{w}_--w_+)]} . e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_-w_-+w_+\bar{w}_++\bar{w}_-w_+)} dp_- dq_- dp_+ dq_+, \quad (2.2.13)$$

onde $w_- = p_- + iq_-$ e $w_+ = p_+ + iq_+$ e $C' = C(1/2\sqrt{2})(\frac{1}{4})(\frac{1}{2\pi\hbar})$.

Fazendo $w_- = w_1$ e $w_+ = w_2$ podemos re-escrever

$$T_2 g(w_1, \bar{w}_2) = C' e^{-\frac{1}{2\hbar}w_1\bar{w}_2} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) . e^{\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} . e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_1\bar{w}_2)-iy(w_1-\bar{w}_2)]} dx dy.$$

Temos agora as seguintes proposições.

Proposição 2.2.2. *Seja S_2 a aplicação integral definida acima, então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |S_2 f(x, y)|^2 dx dy = \|f\|_{\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^2)}^2, \quad (2.2.14)$$

a menos de uma constante, onde $f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}^2)$ é tal que a integral acima faz sentido.

Prova: Vamos mostrar a igualdade (2.2.14), mas para isto, primeiro observamos que

$$\begin{aligned} |S_2 f(x, y)|^2 &= S_2 f(x, y) \cdot \overline{S_2 f(x, y)} = \\ &= C'^2 e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^4} f(w_-, \bar{w}_+) e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_-+w_+)+iy(\bar{w}_--w_+)]} e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_-w_-+w_+\bar{w}_++\bar{w}_-w_+)} dp_- dq_- dp_+ dq_+ \\ &\quad \cdot C'^2 e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^4} \overline{f(w_-, \bar{w}_+)} e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_-+\bar{w}_+)+iy(w_--\bar{w}_+)]} e^{-\frac{1}{2\hbar}(w_-\bar{w}_-+\bar{w}_+w_+)} e^{-\frac{1}{2\hbar}w_-\bar{w}_+} dp_- dq_- dp_+ dq_+ \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} |S_2 f(x, y)|^2 dx dy = \\ &= C'^2 \iiint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} e^{-\frac{2}{\hbar}(x^2+y^2)} f(w_1, \bar{w}_2) \overline{f(w_3, \bar{w}_4)} . e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_1+w_2)+iy(\bar{w}_1-w_2)]} \\ &\quad . e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_2w_2+\bar{w}_1w_2)} . e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_3+\bar{w}_4)-iy(w_3-\bar{w}_4)]} \\ &\quad . e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_3w_3+\bar{w}_4w_4+w_3\bar{w}_4)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 dp_3 dq_3 dp_4 dq_4 dx dy. \end{aligned}$$

Agora, usando Fubini podemos estudar primeiro as seguintes integrais

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\hbar}x^2} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}x[(\bar{w}_1+\bar{w}_4)+(w_2+w_3)]} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-[\frac{2}{\hbar}x^2 + \frac{2x}{8\hbar}((\bar{w}_1+\bar{w}_4)+(w_2+w_3))]} dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}} e^{\frac{1}{8\hbar}[(\bar{w}_1+\bar{w}_4)+(w_2+w_3)]^2}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\hbar}y^2} e^{\frac{iy}{\hbar}[(\bar{w}_1+\bar{w}_4)-(w_2+w_3)]} dy = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}} e^{-\frac{1}{8\hbar}[(\bar{w}_1+\bar{w}_4)-(w_2+w_3)]^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{2}{\hbar}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}(\bar{w}_1+w_2+w_3+\bar{w}_4)} \cdot e^{\frac{iy}{\hbar}(\bar{w}_1-w_2-w_3+\bar{w}_4)} dx dy &= \frac{\pi\hbar}{2} e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1+\bar{w}_4) \cdot (w_2+w_3)} \\ &= \frac{\pi\hbar}{2} e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_2+\bar{w}_1w_3+\bar{w}_4w_2+\bar{w}_4w_3)}, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} |S_2f(x,y)|^2 dx dy &= C''^2 \frac{\pi\hbar}{2} \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} f(w_1, \bar{w}_2) \cdot \overline{f(w_3, \bar{w}_4)} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_2w_2)} \\ &\quad e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_3w_3+\bar{w}_4w_4)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}(\bar{w}_1w_3+\bar{w}_4w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 dp_3 dq_3 dp_4 dq_4. \end{aligned}$$

Mas, do teorema 1.4.3(2)

$$f(w_3, \bar{w}_2) = \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(w_1, \bar{w}_2) e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_3+\bar{w}_4w_2)} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_2w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2,$$

então

$$\int_{\mathbb{R}^2} |S_2f(x,y)|^2 dx dy = \frac{\pi\hbar}{2} C''^2 \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |f(w_3, \bar{w}_4)|^2 dp_3 dq_3 dp_4 dq_4 = \frac{\pi\hbar}{2} C''^2 \|f\|_{\mathcal{H}_\hbar^2(\mathbb{C}^2)}^2$$

■

Proposição 2.2.3. *Sejam g uma função tipo Schwartz sobre $\mathbb{R}^2$ e T_2 a aplicação integral definida pela equação (2.2.12), então*

$$\int_{\mathbb{R}^4} |T_2g(w_1, \bar{w}_2)|^2 e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_2w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 < \infty \quad (2.2.15)$$

Prova: Por definição temos que

$$T_2g(w_1, \bar{w}_2) = C' e^{-\frac{1}{2\hbar\bar{a}r}(w_1\bar{w}_2)} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_1+\bar{w}_2)-iy(w_1-\bar{w}_2)]} dx dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |T_2g(w_1, \bar{w}_2)|^2 &= C'^2 \left[\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_1+\bar{w}_2)-iy(w_1-\bar{w}_2)]} dx dy \right] \\ &\quad \cdot \left[\int_{\mathbb{R}^2} \overline{g(x, y) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_1+w_2)+iy(\bar{w}_1-w_2)]}} dx dy \right] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(x_1, y_1) \overline{g(x_2, y_2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_1^2+y_1^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_2^2+y_2^2)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_1(w_1+\bar{w}_2)-iy_1(w_1-\bar{w}_2)]} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_2(\bar{w}_1+w_2)+iy_2(\bar{w}_1-w_2)]} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |T_2g(w_1, \bar{w}_2)|^2 \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2 w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 = \\ &= C'^2 \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} g(x_1, y_1) \overline{g(x_2, y_2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_1^2+y_1^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_2^2+y_2^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_1(w_1+\bar{w}_2)-iy_1(w_1-\bar{w}_2)]} \\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_2(\bar{w}_1+w_2)+iy_2(\bar{w}_1-w_2)]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2 w_2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 dp_1 dq_1 dp_2 dq_2. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $w_1 = p_1 + iq_1$ e $w_2 = p_2 + iq_2$ obtemos que

$$x_1(w_1 + \bar{w}_2) = x_1(p_1 + p_2) + ix_1(q_1 - q_2) ; -iy_1(w_1 - \bar{w}_2) = -iy_1(p_1 - p_2) + y_1(q_1 + q_2)$$

$$x_2(\bar{w}_1 + w_2) = x_2(p_1 + p_2) + ix_2(q_2 - q_1) ; iy_2(\bar{w}_1 - w_2) = iy_2(p_1 - p_2) + y_2(q_1 + q_2),$$

de onde, fazendo a mudança de variáveis

$$u_1 = p_1 - p_2 ; u_2 = p_1 + p_2 ; v_1 = q_1 - q_2 ; v_2 = q_1 + q_2,$$

temos que

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |T_2g(w_1, \bar{w}_2)|^2 \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2 w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 = \\ &= \frac{C'^2}{4} \iint_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} g(x_1, y_1) \overline{g(x_2, y_2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_1^2+y_1^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_2^2+y_2^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_1 u_2 + ix_1 v_1 - iy_1 u_1 + y_1 v_2]} \\ &\quad \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_2 u_2 - ix_2 v_1 + iy_2 u_1 + y_2 v_2]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 du_1 du_2 dv_1 dv_2. \end{aligned}$$

Agora, pelo teorema de Fubini, podemos mudar a ordem de integração e considerar as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_1^2} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}iv_1(x_1-x_2)} dv_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-[\frac{1}{2\hbar}v_1^2 + \frac{2v_1 i}{2\hbar}(x_2-x_1)]} dv_1 = \sqrt{2\pi\hbar} e^{-\frac{1}{2\hbar}(x_2-x_1)^2} \\ &= \sqrt{2\pi\hbar} e^{-\frac{1}{2\hbar}(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)}, \end{aligned}$$

e de forma análoga,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}v_2^2} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}v_2(y_1+y_2)} dv_2 &= \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{1}{2\hbar}(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2)}; \\ \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}u_1^2} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}iu_1(y_2-y_1)} du_1 &= \sqrt{2\pi\hbar} e^{-\frac{1}{2\hbar}(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)} \\ \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}u_2^2} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}u_2(x_2+x_1)} du_2 &= \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{1}{2\hbar}(x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |T_2 g(w_1, \bar{w}_2)|^2 e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2 w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 = \\ &= (2\pi\hbar)^2 \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} g(x_1, y_1) \overline{g(x_2, y_2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_1^2 + y_1^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_2^2 + y_2^2)} \cdot e^{\frac{2}{\hbar}(y_1 y_2 + x_1 x_2)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty, \end{aligned}$$

pois g é uma função tipo Schwartz. $\blacksquare$

Proposição 2.2.4. *Sejam T_2 e S_2 definidos por (2.2.12) e (2.2.13) respectivamente, então $T_2(S_2 f) = f$ a menos de multiplicação por uma constante.*

Prova: Pela definição das aplicações integrais temos que

$$\begin{aligned} T_2(S_2 f)(w_-, \bar{w}_+) &= C' e^{-\frac{1}{2\hbar}(w_- - \bar{w}_+)} \int_{\mathbb{R}^2} S_2 f(x, y) e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2 + y^2)} e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_- + \bar{w}_+) - iy(w_- - \bar{w}_+)]} dx dy \\ &= C'^2 e^{-\frac{1}{2\hbar}(w_- - \bar{w}_+)} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4} f(w_1, \bar{w}_2) e^{-\frac{2}{\hbar}(x^2 + y^2)} e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_- + \bar{w}_+) - iy(w_- - \bar{w}_+)]} \\ &\quad e^{\frac{1}{\hbar}[x(w_2 + \bar{w}_1) + iy(\bar{w}_1 - w_2)]} e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + w_2 \bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 dx dy, \end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\hbar}x^2} \cdot e^{\frac{x}{\hbar}(w_- + \bar{w}_+ + w_2 + \bar{w}_1)} dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-[\frac{2}{\hbar}x^2 - \frac{2x}{\hbar}(w_- + \bar{w}_+ + w_2 + \bar{w}_1)]} dx \\
 &= \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}} e^{\frac{1}{8\hbar}(w_- + \bar{w}_+ + w_2 + \bar{w}_1)^2} \\
 \\
 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{\hbar}y^2} \cdot e^{\frac{yi}{\hbar}(-w_- + \bar{w}_+ - w_2 + \bar{w}_1)} dy &= \int_{\mathbb{R}} e^{-[\frac{2}{\hbar}y^2 - \frac{2yi}{\hbar}(-w_- + \bar{w}_+ - w_2 + \bar{w}_1)]} dy \\
 &= \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2}} e^{-\frac{1}{8\hbar}(-w_- + \bar{w}_+ - w_2 + \bar{w}_1)^2},
 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{2}{\hbar}(x^2+y^2)} e^{\frac{x}{\hbar}(w_- + \bar{w}_+ + w_2 + \bar{w}_1)} e^{\frac{yi}{\hbar}(-w_- + \bar{w}_+ - w_2 + \bar{w}_1)} dx dy &= \frac{\pi\hbar}{2} e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 + \bar{w}_+) \cdot (w_- + w_2)} \\
 &= \frac{\pi\hbar}{2} e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_- + \bar{w}_1 w_2 + \bar{w}_+ w_- + \bar{w}_+ w_2)}.
 \end{aligned}$$

Então,

$$T_2(S_2 f)(w_-, \bar{w}_+) = C'^2 \frac{\pi\hbar}{2} \int_{\mathbb{R}^4} f(w_1, \bar{w}_2) e^{\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_- + \bar{w}_+ w_2)} e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_2 w_2)} dp_1 dq_1 dp_2 dq_2,$$

mas, do teorema 1.4.3(2) temos que

$$T_2(S_2 f)(w_-, \bar{w}_+) = C'^2 \frac{\pi\hbar}{2} f(w_-, \bar{w}_+)$$

como queríamos. ■

Por outro lado sabemos que a convolução no groupóide symplectico $\mathbb{R}^2 \times \bar{\mathbb{R}}^2 \approx \mathbb{C}^2$ é dada por:

$$f_1 \otimes f_2(w_1, \bar{w}_3) = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(w_1, \bar{w}_2) f_2(w_2, \bar{w}_3) dx_2 dy_2.$$

Logo, motivados pela medida no espaço de Segal-Bargmann (Exemplo 1.4.5 para $t = 2\hbar$) e o empareamento dado pela equação (2.2.11), definimos uma convolução deformada da seguinte maneira:

$$f_1 \otimes_{\hbar} f_2(w_1, \bar{w}_3) = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(w_1, \bar{w}_2) \cdot f_2(w_2, \bar{w}_3) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}w_2 \bar{w}_2} dx_2 dy_2 \quad (2.2.16)$$

Lema 2.2.5. *A convolução deformada definida por (2.2.16) acima é associativa.*

Prova: De fato,

$$\begin{aligned}
[(f_1 \otimes_{\hbar} f_2) \otimes_{\hbar} f_3](w_1, \bar{w}_4) &= \int_{\mathbb{R}^2} (f_1 \otimes_{\hbar} f_2)(w_1, \bar{w}_3) \cdot f_3(w_3, \bar{w}_4) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_3 \bar{w}_3} dx_3 dy_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}^4} f_1(w_1, \bar{w}_2) f_2(w_2, \bar{w}_3) f_3(w_3, \bar{w}_4) \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_2 \bar{w}_2} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_3 \bar{w}_3} dx_2 dy_2 dx_3 dy_3 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f_1(w_1, \bar{w}_2) (f_2 \otimes_{\hbar} f_3)(w_2, \bar{w}_4) \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_2 \bar{w}_2} dx_2 dy_2 \\
&= [f_1 \otimes_{\hbar} (f_2 \otimes_{\hbar} f_3)](w_1, \bar{w}_4).
\end{aligned}$$

■

Agora, das aplicações integrais obtidos no empareamento, T_2, S_2 , e da convolução deformada acima definimos o seguinte produto:

$$g_1 *_h^2 g_2 = S_2(T_2 g_1 \otimes_{\hbar} T_2 g_2) \quad (2.2.17)$$

De onde,

$$\begin{aligned}
(g_1 *_h^2 g_2)(x, y) &= e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^4} (T_2 g_1 \otimes_{\hbar} T_2 g_2)(w_1, \bar{w}_3) \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1-w_3)]} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + w_3 \bar{w}_3 + \bar{w}_1 w_3)} dx_1 dy_1 dx_3 dy_3 = \\
&= e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^6} T_2 g_1(w_1, \bar{w}_2) \cdot T_2 g_2(w_2, \bar{w}_3) e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_1 w_3)+iy(\bar{w}_1-w_3)]} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + w_3 \bar{w}_3 + \bar{w}_1 w_3 + \bar{w}_2 w_2)} dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 dx_3 dy_3
\end{aligned}$$

Logo, da definição de T_2 , temos que

$$\begin{aligned}
&(g_1 *_h^2 g_2)(x, y) = \\
&= e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^{10}} g_1(x_4, y_4) \cdot g_2(x_5, y_5) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_4^2+y_4^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_5^2+y_5^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_4(w_1+\bar{w}_2)-iy_4(w_1-\bar{w}_2)]} \cdot \\
&\quad \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_5(w_2+\bar{w}_3)-iy_5(w_2+\bar{w}_3)-iy_5(w_2-\bar{w}_3)]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_2 \bar{w}_3} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1-w_3)]} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} w_1 \bar{w}_2} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} \bar{w}_1 w_3} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1 w_1 + \bar{w}_3 w_3 + \bar{w}_2 w_2)} dx_4 dy_4 dx_5 dy_5 dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 dx_3 dy_3 \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Agora, para g_1, g_2 função tipo Schwartz, a integral (2.2.18) é absolutamente convergente, de onde podemos aplicar Fubini. Assim, integrando com respeito a $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ primeiro [ver apêndice B], obtemos que:

$$\begin{aligned}
& (g_1 *_h^2 g_2)(x, y) = \\
& = e^{-\frac{1}{h}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^{10}} g_1(x_4, y_4) \cdot g_2(x_5, y_5) \cdot e^{-\frac{1}{h}(x_4^2+y_4^2)} \cdot e^{-\frac{1}{h}(x_5^2+y_5^2)} \cdot e^{\frac{1}{h}[x_4(w_1+\bar{w}_2)-iy_4(w_1-\bar{w}_2)]} \cdot e^{-\frac{1}{2h}w_1\bar{w}_2} \\
& \quad e^{\frac{1}{h}[x_5(w_2+\bar{w}_3)-iy_5(w_2+\bar{w}_3)-iy_5(w_2-\bar{w}_3)]} \cdot e^{-\frac{1}{2h}w_2\bar{w}_3} \cdot e^{\frac{1}{h}[x(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1-w_3)]} \cdot \\
& \quad e^{-\frac{1}{2h}\bar{w}_1w_3} \cdot e^{-\frac{1}{2h}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_3w_3+\bar{w}_2w_2)} dx_4 dy_4 dx_5 dy_5 dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 dx_3 dy_3 = \\
& = \int_{\mathbb{R}^4} g_1(x_4, y_4) g_2(x_5, y_5) e^{\frac{2i}{h}(-y_4x+yx_4-x_5y+x_5y_4+xy_5-x_4y_5)} dx_4 dy_4 dx_5 dy_5 = \\
& = \int_{\mathbb{R}^4} g_1(x_4, y_4) g_2(x_5, y_5) e^{-\frac{2i}{h}[y_5(x_4-x)+y_4(x-x_5)+y(x_5-x_4)]} dx_4 dy_4 dx_5 dy_5.
\end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.6. *Sejam $(\mathbb{R}^2, \omega)$ o plano Euclidiano com a forma simplética canônica, $(\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2, \Omega)$ o par grupóide simplético, com $\Omega = \omega_{\pm} = \omega - \omega$, Φ_2 a aplicação $\Phi_2 : T\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$; $(m, v_m) \mapsto (\exp_m(-v), \exp_m(v))$, P a polarização trivial do fibrado tangente gerada pelas fibras e F a polarização holomorfa de $\mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$. Ou seja, para $(x, y; v_x, v_y) \in T\mathbb{R}^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in \mathbb{R}^2 \times \overline{\mathbb{R}}^2$ as polarizações são dadas por*

$$P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle; \quad F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$$

com

$$\partial \bar{z}_- = (1/2)(\partial x_- + \partial y_-); \quad \partial z_+ = (1/2)(\partial x_+ - \partial y_+).$$

Então, se $\tilde{P} = (\Phi_2)_*(P)$, $\tilde{F} = (\Phi_2^{-1})_*(F)$, L o fibrado pré-quântico, e as meias densidades dadas em (2.2.7) e (2.2.9), o empareamento das seções é dado por:

$$\begin{aligned}
& (\langle t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' \rangle) = \\
& = C\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right) \int_{\mathbb{R}^6} g(x, y) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot e^{-\frac{1}{2h}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{1}{2h}[x(\bar{w}_-+w_+)+iy(\bar{w}_-+w_+)]} \cdot e^{\frac{1}{2h}(-w_-\bar{w}_-+w_+\bar{w}_+)},
\end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$\begin{aligned}
(\langle t \otimes v, \tilde{s} \otimes \tilde{v}' \rangle) &= \langle f, T_2 g \rangle_{\mathcal{H}L_h^2(\mathbb{C}^2)} \\
&= \langle S_2 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

para os operadores integrais T_2 e S_2 definidos por (2.2.12) e (2.2.13).

Além disso, se $\otimes_{\hbar}$ é convolução deformada definida em (2.2.16), então para funções $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ o produto $g_1 *_{\hbar}^2 g_2$ definido por

$$g_1 *_{\hbar}^2 g_2 = S_2(T_2 g_1 \otimes_{\hbar} T_2 g_2)$$

é igual ao produto de Weyl, isto é,

$$g_1 *_{\hbar}^2 g_2 = g_1 *_{\hbar}^0 g_2 .$$

Observação 2.2.7. Novamente, a associatividade de produto de Weyl pode ser vista como corolário da associatividade da convolução deformada, Lema 2.2.5, e do fato de T_2 ser inversa de S_2 à esquerda, Proposição 2.2.4.

Produto Integral de Bieliavsky e a Quantização Geométrica

Em [3] o autor dá uma exposição detalhada da quantização estrita por deformação, conceito iniciado por (M. A. Rieffel [20]), de certos espaços simpléticos simétricos. Motivado pelo exemplo de $\mathbb{R}^{2n}$, onde o produto de Moyal-Weyl dá lugar a uma quantização por deformação estrita, A. Weinstein sugere em [25] um processo de quantização do tipo WKB. Assim, em geral, queremos definir um produto integral de duas funções u, v adequadas da seguinte forma

$$(u * v)(x) = \int u(y)v(z)a_h(x, y, z)e^{\frac{i}{h}S(x, y, z)}dydz,$$

onde dy (*resp.* dz) denota a medida de Liouville e $S : M \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a_h : M \times M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ são funções chamadas de fase e amplitude, respectivamente.

Em particular, para o caso do plano de Bieliavsky, variedade simplética simétrica apresentada em [3], temos uma expressão explícita para este produto ([4] Proposição 2.2) no caso de função de suporte compacto.

Motivado pelo resultado da seção 2.1, neste capítulo obteremos dito produto usando a função ponto médio do plano de Bieliavsky para induzir um difeomorfismo entre o fibrado cotangente do plano de Bieliavsky e o par grupóide e, com um raciocínio análogo à seção 2.1 obter o produto de Bieliavsky.

Observamos que o método desenvolvido neste capítulo para obtenção de tal produto, pelo melhor de nosso conhecimento não se encontra presente na literatura (o método

desenvolvido originalmente em [4] é totalmente diferente, pois utiliza um mapa para o produto de Weyl).

Na parte final do capítulo, apresentamos uma família de funções tipo Schwartz, sobre as quais o produto de Bieliavsky ainda é uma função tipo Schwartz, propriedade interessante que tem o produto de Weyl-Moyal para toda função tipo Schwartz.

3.1 Produto integral de Bieliavsky via polarizações reais não transversais

Seja $\mathbb{R}_b^2$ o plano de Bieliavsky [3], isto é, $(\mathbb{R}^2, \omega, s)$, onde ω é forma simplética canônica do plano e s uma simetria em $\mathbb{R}^2$, tal que, se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, então a simetria é dada pela seguinte expressão:

$$s_{(x_1, y_1)}(x_2, y_2) = (2x_1 - x_2, 2y_1 \cosh(2(x_1 - x_2)) - y_2),$$

assim temos que a função ponto médio dada por:

$$m[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \operatorname{sech}((x_1 + x_2)) \right],$$

definida pela relação $s_{m[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]}(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Seguindo o mesmo raciocínio do caso real Euclidiano, para $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$ e $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}_b^2$, consideremos a seguinte aplicação:

$$\Phi_3 : \mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2 \longrightarrow T^*\mathbb{R}_b^2; (x_1, y_1; x_2, y_2) \longmapsto (m[(x_1, y_1), (x_2, y_2)], \widehat{\omega}((x_2, y_2) - (x_1, y_1))),$$

onde $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$ é o grupóide simplético com forma simplética dada por

$$\Omega = dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2$$

e $T^*\mathbb{R}_b^2$ o espaço cotangente identificado com $\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^{2*}$. Logo a aplicação fica da seguinte forma:

$$\Phi_3(x_1, y_1, x_2, y_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \operatorname{sech}((x_1 + x_2)), y_1 - y_2, x_2 - x_1 \right). \quad (3.1.1)$$

Agora, suponhamos que

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad q = \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \operatorname{sech}((x_1 - x_2)); \quad p^* = y_1 - y_2; \quad q^* = x_2 - x_1, \text{ de onde,}$$

$$p - \frac{q^*}{2} = x_1; \quad p + \frac{q^*}{2} = x_2; \quad q \cosh(q^*) = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow q \cosh(q^*) - \frac{p^*}{2} = y_2; \quad q \cosh(q^*) + \frac{p^*}{2} = y_1.$$

E, por outro lado, consideremos a polarização natural de $T^*\mathbb{R}_b^2$ dada por $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$ e no grupóide simplético consideremos a polarização dada pela duplicação da polarização horizontal em $\mathbb{R}_b^2$, ie, a polarização $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$.

Lema 3.1.1. *Sejam P e F as polarizações anteriores, então, se $\tilde{F} = (\Phi_3)_*(F)$, temos que $\tilde{F}$ e P são sempre não transversais.*

Prova:

Suponhamos agora que

$$\partial p^* = a\partial x_1 + b\partial y_1 + c\partial x_2\partial y_2 \text{ e } \partial q = a'\partial x_1 + b'\partial y_1 + c'\partial x_2 + d'\partial y_2,$$

mas, como

$$dp = \frac{1}{2}(dx_1 + dx_2); \quad dp^* = dy_1 - dy_2; \quad dq^* = dx_2 - dx_1;$$

$$\begin{aligned} dq &= \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \tilde{T}(x_1 - x_2) \cdot \text{sech}(x_1 - x_2) dx_1 - \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \tanh(x_1 - x_2) \cdot \text{sech}(x_1 - x_2) dx_2 \\ &+ \frac{1}{2} \text{sech}(x_1 - x_2) dy_1 + \frac{1}{2} \text{sech}(x_1 - x_2) dy_2. \end{aligned}$$

Também, como

$$dp^*(\partial p^*) = 1; \quad dp(\partial p^*) = dq(\partial p^*) = dq^*(\partial p^*) = 0,$$

então

$$\partial p^* = -\frac{1}{2}\partial y_1 + \frac{1}{2}\partial y_2; \quad \partial q = \cosh((x_1 - x_2))(\partial y_1 + \partial y_2)$$

logo, se $\tilde{F} = (\Phi_3)_*(F)$ temos $\tilde{F} = \langle \partial q, \partial p^* \rangle$.

Daí, $\tilde{F} \cap P = \langle \partial p^* \rangle$ implicando que as polarizações acima são sempre não transversais. ■

Por outro lado, se em $T^*\mathbb{R}_b^2$ consideramos a forma simplética $\Sigma = \Phi^{-1*}(\Omega)$, então temos

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(p,q;p^*,q^*)} &= \Phi^{-1*}(dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2) \\
&= (dp - \frac{1}{2}dq^*) \wedge (\frac{1}{2}dp^* + \cosh(q^*)dq + q \sinh(q^*)dq^*) - \\
&\quad - (dp + \frac{1}{2}dq^*) \wedge (\cosh(q^*)dq + q \sinh(q^*)dq^* - \frac{1}{2}dp^*) \\
&= -\frac{1}{2}\cosh(q^*)(dq^* \wedge dq) - \frac{1}{2}q \sinh(q^*)(dq^* \wedge dq^*) - \frac{1}{4}dq^* \wedge dp^* + \\
&\quad + \cosh(q^*)(dp \wedge dq) + q \sinh(q^*)(dp \wedge dq^*) + \frac{1}{2}(dp \wedge dp^*) + \frac{1}{2}(dp \wedge dp^*) - \\
&\quad - \cosh(q^*)(dp \wedge dq) - q \sinh(q^*)(dp \wedge dq^*) + \frac{1}{4}(dq^* \wedge dp^*) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\cosh(q^*)(dq^* \wedge dq) + \frac{1}{2}q \sinh(q^*)(dq^* \wedge dq^*) \\
&= -\cosh(q^*)dq^* \wedge dq + dp \wedge dp^*,
\end{aligned}$$

assim, $\Sigma_{(p,q;p^*,q^*)} = -\cosh(q^*)dq^* \wedge dq + dp \wedge dp^*$.

De onde podemos observar que o potencial simplético adaptado a polarização P é dado pela seguinte formula

$$\Theta_P = -\sinh(q^*)dq - p^*dp,$$

pois $d(\Theta_P) = \Sigma$ e este anula-se sob a polarização P .

Agora, como $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$, para $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}_b^2$ e

$$\Omega_{(x_1, y_1; x_2, y_2)} = dx_1 \wedge dy_1 - dx_2 \wedge dy_2,$$

então, o potencial simplético adaptado a polarização F é dado por:

$$\Theta_F = y_2 dx_2 - y_1 dx_1.$$

Assim, como $\tilde{F} = (\Phi_3)_*(F)$. temos

$$\begin{aligned}
\Theta_{\tilde{F}} &= (q \cosh(q^*) - \frac{p^*}{2}).(dp + \frac{1}{2}dq^*) - (\frac{p^*}{2} + q \cosh(q^*))(dp - \frac{1}{2}dq^*) \\
&= -\frac{p^*}{2}dp - \frac{p^*}{4}dq^* + q \cosh(q^*)dp + \frac{q}{2}\cosh(q^*)dq^* + \frac{q}{2}\cosh(q^*)dq^* - \\
&\quad - q \cosh(q^*)dp + \frac{p^*}{4}dq^* - \frac{p^*}{2}dp \\
&= -p^*dp + q \cosh(q^*)dq^*,
\end{aligned}$$

de onde podemos observar que $\Theta_{\tilde{F}}$ anula-se sobre a polarização $\tilde{F}$.

Assim,

$$\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}} = -\tilde{S}(q^*)dq - p^*dp + p^*dp - q \cosh(q^*)dq^* = -q \cosh(q^*)dq^* - \sinh(q^*)dq.$$

De onde temos o seguinte resultado:

Lema 3.1.2. *Sejam $(p, q; p^*, q^*) \in T^*(\mathbb{R}^2)$, $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$, Φ_3 como em (3.1.1), P e $\tilde{F}$ as polarizações acima e L o fibrado pré-quântico com produto Hermitiano $(\cdot, \cdot)$, então, se t_0 e $\tilde{s}_0$ são as polarizações adaptadas aos potenciais simpléticos Θ_P e $\Theta_{\tilde{F}}$ respectivamente (proposição 1.2.5), temos que*

$$(t_0, \tilde{s}_0) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(q \sinh(q^*))}$$

Prova:

Pela proposição 1.2.5 temos que em forma análoga à demonstração do lema 2.1.2 temos que existe uma função $\phi \in C^\infty(T^*\mathbb{R}_b^2)$ tal que $\tilde{s}_0 = \phi t_0$ e

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{i}{\hbar}(\Theta_P - \Theta_{\tilde{F}}) = -\frac{i}{\hbar}[q \cosh(q^*)dq^* + \sinh(q^*)dq] = -\frac{i}{\hbar}d(q \sinh(q^*)).$$

De onde, $\phi(p, q; p^*, q^*) = Ce^{-\frac{i}{\hbar}(q \sinh(q^*))}$ com C constante. ■

Por outro lado, como a conexão numa variedade quantizável (M, ω) é dada localmente por

$$\nabla_X = X - (i/\hbar)\Theta,$$

onde Θ é um potencial simplético para M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ e como as seções polarizadas $t \in \Gamma_P L$ e $s \in \Gamma_F L$ são da forma $t = gt_0$ e $s = fs_0$, onde t_0 e s_0 são as seções adaptadas aos potenciais simpléticos Θ_P e Θ_F respectivamente, $g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}_b^2)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2)$. Então, da definição de seções polarizadas temos que $Xg = 0$ para $X \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}_b^2, P)$ e $Yf = 0$ para $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2, F)$. Portanto, como

$$P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle \quad e \quad F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$$

temos que $g(x, y)$ só depende das variáveis (x, y) e $f(x_1, x_2)$ das variáveis (x_1, x_2) .

Seguindo o roteiro do plano real Euclidiano, vamos a fazer o empareamento dos espaços de Hilbert gerados por estas polarizações. De fato, do Lema 3.1.1 temos que $\tilde{F} \cap P = D = \langle \partial p^* \rangle$. Suponhamos $R = T^*\mathbb{R}_b^2/D$, $x \in R$ e $m \in \pi^{-1}(x)$, onde π é a projeção canônica, então

$$T_x R = T_m M / D_m \quad e \quad V_m = D_m^\perp / D_m.$$

Portanto,

$$\Delta_1(T_x R) = \Delta_{-1/2}(\tilde{F}_m) \otimes \Delta_{-1/2}(P_m) \otimes \Delta_{1/2}(V_m) \otimes \Delta_1(T_m M),$$

onde $M = T^*\mathbb{R}_b^2$.

Daí, se $\varepsilon_{\omega'}$ é forma de volume do espaço V_m , então

$$(\psi, \psi')_x = (s(m), s'(m))v_m v'_m |\varepsilon_{\omega'}|^{1/2} |\varepsilon_{\Sigma}|$$

é uma um densidade bem definida em $\Delta_1(T_x R)$, com ε_{Σ} a forma de volume de $T_m M$.

Agora, como a polarização P é a polarização natural do espaço cotangente, ie, se $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}_b^2$ a polarização $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$, logo

$$T(T^*\mathbb{R}_b^2)/P = T\mathbb{R}_b^2$$

e assim, das propriedades de meias densidades, propriedades 1.2.17, temos que:

$$\Delta_{-1/2}(P_m) = \Delta_{-1/2}(T_m(T^*\mathbb{R}_b^2)) \otimes \Delta_{1/2}(T_{(p,q)}(\mathbb{R}_b^2)).$$

Daí, se ε_{Σ} é forma de Liouville de $T^*\mathbb{R}_b^2$ e ε_{ω} é a forma de Liouville de $\mathbb{R}_b^2$, então a seção natural de $\Delta_{-1/2}(P_m)$ é dada por

$$v = |\varepsilon_{\Sigma}|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_{\omega}|^{1/2}. \quad (3.1.2)$$

Analogamente, para a polarização F no par grupóide $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$, temos que

$$T(\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2)/F = T\mathbb{R}_b^2,$$

assim, um elemento natural de $\Delta_{-1/2}(F_m)$ é dada por

$$v' = |\varepsilon_{\Omega}|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_{\omega}|^{1/2}. \quad (3.1.3)$$

onde ε_{Ω} é a forma de Liouville em $\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2$.

Mas, do fato que $\tilde{F} = (\Phi_3)_* F$, um elemento natural de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ é dado por

$$\tilde{v}' = |\varepsilon_{\Phi^{-1}(\Omega)}|^{-1/2} \cdot |\varepsilon_{\Phi^{-1}(\omega)}|^{1/2}. \quad (3.1.4)$$

Assim, como $\Phi_3^{-1}(\Omega) = \Sigma$, a 1-desidade $(\psi, \psi')_x$ em $\Delta_1(T_x R)$ fica dada por

$$(\psi, \psi')_x = (s(m), s'(m))|\varepsilon_{\omega}| \cdot |\varepsilon_{\omega'}|^{1/2}.$$

Agora, da definição 1.2.22 temos o seguinte:

Proposição 3.1.3. *Sejam $(p, q; p^*, q^*) \in T^*\mathbb{R}_b^2$, $(x_1, y_1; x_2, y_2) \in \mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2$ coordenadas canônicas globais, $P = \langle \partial p^*, \partial q^* \rangle$ e $F = \langle \partial y_1, \partial y_2 \rangle$ polarizações em $T^*\mathbb{R}_b^2$ e $\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2$ respectivamente. Então, se $\tilde{F} = (\phi_3)_* F$, v como em (3.1.2), $\tilde{v}'$ como em (3.1.4) e $t_0, \tilde{s}_0$ como no lema 3.1.2, temos que o empareamento é dado por:*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = C \int_{T^*\mathbb{R}_b^2/D} f\left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2}\right) \cdot g(p, q) e^{-\frac{i}{\hbar} q \sinh(q^*)} [\cosh(q^*)]^{1/2} dp dq dq^* \quad (3.1.5)$$

onde $\psi = t_0 v$ e $\psi' = \tilde{s}_0 \tilde{v}'$ são seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ respectivamente.

Observação 3.1.4. Como $T^*(\mathbb{R}_b^2)/D \cong \mathbb{R}^3$ e $x_1 = \frac{q^*}{2} + p$; $x_2 = p - \frac{q^*}{2}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle \psi, \psi' \rangle_{pr} &= C \int_{\mathbb{R}^3} f(x_1, x_2) \cdot g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh((x_2 - x_1))} [\tilde{C}(x_1 - x_2)]^{1/2} dx_1 dx_2 dq \\ &= \langle f, T_3 g \rangle_{L_b^2}, \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

onde T_3 é uma aplicação integral definida nas funções de suporte compacto em $\mathbb{R}_b^2$ dada da seguinte forma

$$T_3 g(x_1, x_2) = C [\cosh((x_1 - x_2))]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(x_2 - x_1)} dq. \quad (3.1.7)$$

Similarmente, da equação (3.1.5) obtemos que

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \langle S_3 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_b^2)}$$

onde S_3 é uma aplicação integral definida por

$$S_3 f(p, q) = C \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(q^*)} [\cosh(q^*)]^{1/2} dq^*. \quad (3.1.8)$$

Assim, podemos observar as propriedades interessantes a seguir:

Proposição 3.1.5. *Sejam S_3 e T_3 as aplicações integrais definidas acima, se f e g são funções $L^2(\mathbb{R}_b^2)$, então $T_3 g$ e $S_3 f$ são funções $L^2(\mathbb{R}_b^2)$.*

Prova: De fato,

$$\|T_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = \iint_{\mathbb{R}_b^2} |T_3 g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2,$$

mas,

$$\begin{aligned} |T_3 g(x_1, x_2)|^2 &= T_3 g(x_1, x_2) \overline{T_3 g(x_1, x_2)} \\ &= C^2 [\cosh((x_1 - x_2))] \left[\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(x_2 - x_1)} dq \right] \\ &\quad \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \overline{g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right)} e^{-\frac{i}{\hbar} q \sinh(x_2 - x_1)} dq \right] \\ &= C^2 [\cosh((x_1 - x_2))] \iint_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1\right) \overline{g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_2\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(x_2 - x_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(x_2 - x_1)} dq_1 dq_2, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \|T_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} &= C^2 \iint_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1\right) \overline{g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_2\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(x_2 - x_1)} e^{-\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(x_2 - x_1)} \cdot [\cosh((x_1 - x_2))] dq_1 dq_2 dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

agora, fazendo a mudança de variáveis

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad u_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

temos que

$$\begin{aligned} \|T_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} &= C^2 \iint_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} g(u_1, q_1) \overline{g(u_1, q_2)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(u_2)} e^{\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(u_2)} \cdot [\cosh(u_2)] dq_1 dq_2 du_1 du_2 \\ &= C^2 \iint_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} g(u_1, q_1) \overline{g(u_1, q_2)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (q_2 - q_1) \sinh(u_2)} \cdot \cosh(u_2) dq_1 dq_2 du_1 du_2 \\ &= C^2 \iint_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} g(u_1, q_1) \overline{g(u_1, q_2)} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} (q_2 - q_1) u} \cdot dq_1 dq_2 du_1 du, \end{aligned}$$

de onde, em forma totalmente análoga a demonstração da proposição 2.1.4 temos que

$$\|T_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = C^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)}.$$

Vamos agora analisar o operador S_3 . De fato,

$$\|S_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = \iint_{\mathbb{R}_b^2} |S_3 f(p, q)|^2 dp dq,$$

mas

$$\begin{aligned} |S_3 f(p, q)|^2 &= S_3 f(p, q) \cdot \overline{S_3 f(p, q)} \\ &= C^2 \left[\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh q^*} [\cosh q^*]^{1/2} dq^* \right] \\ &\quad \cdot \left[\int_{\mathbb{R}} \overline{f\left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} q \sinh q^*} [\cosh q^*]^{1/2} dq^* \right] \\ &= C^2 \iint_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{q_1^*}{2} + p, p - \frac{q_1^*}{2}\right) \overline{f\left(\frac{q_2^*}{2} + p, p - \frac{q_2^*}{2}\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh q_1^*} [\cosh q_1^*]^{1/2} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} q \sinh q_2^*} [\cosh q_2^*]^{1/2} dq_1^* dq_2^*, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \|S_3 g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} &= C^2 \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f\left(\frac{q_1^*}{2} + p, p - \frac{q_1^*}{2}\right) \overline{f\left(\frac{q_2^*}{2} + p, p - \frac{q_2^*}{2}\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh q_1^*} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} q \sinh q_2^*} [\cosh q_1^*]^{1/2} [\cosh q_2^*]^{1/2} dq_1^* dq_2^* dp dq \end{aligned}$$

Se $u_1 = \sinh q_1^*$ e $u_2 = \sinh q_2^*$, então temos que

$$\begin{aligned} \|S_3g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} &= C^2 \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f\left(\frac{\sinh^{-1} u_1}{2} + p, p - \frac{\sinh^{-1} u_1}{2}\right) \overline{f\left(\frac{\sinh^{-1} u_2}{2} + p, p - \frac{\sinh^{-1} u_2}{2}\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q(u_1 - u_2)} \cdot [1 + u_1]^{-1/2} [1 + u_2]^{-1/2} du_1 du_2 dp dq, \end{aligned}$$

onde, usando novamente aproximação unidade, temos

$$\|S_3g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = C^2 \iint_{\mathbb{R}^2} |f\left(\frac{\sinh^{-1} u_1}{2} + p, p - \frac{\sinh^{-1} u_1}{2}\right)|^2 [1 + u_1^2]^{-1} du_1 dp.$$

Assim, se $p_1 = \frac{\sinh^{-1} u_1}{2} + p$ e $p_2 = p - \frac{\sinh^{-1} u_1}{2}$, então $u_1 = \sinh(p_1 - p_2)$ e

$$\|S_3g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = C^2 \iint_{\mathbb{R}^2} |f(p_1, p_2)|^2 \frac{2}{[1 + \sinh^2(p_1 - p_2)] \cdot [\cosh(p_1 - p_2)]} dp_1 dp_2.$$

Mas, como $\frac{2}{[1 + \sinh^2(p_1 - p_2)] \cdot [\cosh(p_1 - p_2)]} < 1$ e $f \in L^2(\mathbb{R}_b^2)$, então $\|S_3g\|_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} < \infty$. ■

Por outro lado, como $\mathbb{R}_b^2$ é simplesmente conexo, no par grupóide $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}_b^2} \rightrightarrows \mathbb{R}_b^2$ a multiplicação e a involução são dadas da seguinte forma:

$$(x_1, y_1; x_2, y_2) \odot (x_2, y_2; x_3, y_3) = (x_1, y_1; x_3, y_3); \quad \iota(x_1, y_1; x_2, y_2) = (x_2, y_2; x_1, y_1).$$

Daí, definimos a convolução de duas funções sobre $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}_b^2}$ por

$$(f \otimes g)(x_1, y_1; x_2, y_2) = \int_{\mathbb{R}_b^2} f(x_1, y_1; x_2, y_2) g(x_2, y_2; x_3, y_3) dx_2 dy_2.$$

Agora, pelo lema 1.3.5 temos que $(\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}_b^2})/F$ é um grupóide, logo definimos a convolução de funções sobre $(\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}_b^2})/F$ por

$$(f \overline{\otimes} g)(x_1, x_3) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_3) g(x_2, x_3) dx_2$$

Assim, se g_1 e g_2 são duas aplicações definidas sobre $T^*\mathbb{R}_b^2/P$, então da definição de T_3 dada por (3.1.7), temos

$$T_3g_1(x_1, x_2) = C[\cosh((x_1 - x_2))]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} g_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q\right) e^{\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(x_2 - x_1)} dq_1$$

e

$$T_3g_2(x_2, x_3) = C[\cosh((x_2 - x_3))]^{1/2} \int_{\mathbb{R}} g_2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, q\right) e^{\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(x_3 - x_2)} dq_2.$$

Logo, da convolução obtemos

$$\begin{aligned}
T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2(x_1, x_3) &= \int_{\mathbb{R}} T_3 g_1(x_1, x_2) T_3 g_2(x_2, x_3) dx_2 \\
&= C^2 \int_{\mathbb{R}^3} [\cosh(x_1 - x_2)]^{1/2} [\cosh(x_2 - x_3)]^{1/2} g_1\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, q_1\right) \\
&\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(x_2 - x_1)} \cdot g_2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, q_2\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(x_3 - x_2)} dq_1 dq_2 dx_2. \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

De onde, usando a aplicação integral S_3 temos que

$$\begin{aligned}
S_3[T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2](p, q) &= C \int_{\mathbb{R}} (T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2)\left(\frac{q^*}{2} + p, p - \frac{q^*}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(q^*)} [\cosh(q^*)]^{1/2} dq^* \\
&= C^3 \int_{\mathbb{R}^2} T_3 g_1\left(\frac{q^*}{2} + p, x_2\right) T_3 g_2\left(x_2, p - \frac{q^*}{2}\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(q^*)} [\cosh(q^*)]^{1/2} dx_2 dq^* \\
&= C^3 \int_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} [\cosh\left(\frac{q^*}{2} + p - x_2\right)]^{1/2} [\cosh(x_2 - p + \frac{q^*}{2})]^{1/2} \\
&\quad \cdot g_1\left(\frac{q^*/2 + p + x_2}{2}, q_1\right) \cdot g_2\left(\frac{x_2 + p - q^*/2}{2}, q_2\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_1 \sinh(x_2 - p - \frac{q^*}{2})} \\
&\quad \cdot e^{\frac{i}{\hbar} q_2 \sinh(p - \frac{q^*}{2} - x_2)} e^{\frac{i}{\hbar} q \sinh(q^*)} [\cosh(q^*)]^{1/2} dq_1 dq_2 dx_2 dq^*.
\end{aligned}$$

Agora, fazendo $C^3 = \frac{1}{\hbar^2}$ e a mudança de seguinte variáveis,

$$p_1 = \frac{q^*/2 + p + x_2}{2}; \quad p_2 = \frac{x_2 + p - q^*/2}{2}$$

tal que

$$p_1 + p_2 = p + x_2; \quad p_1 - p_2 = \frac{q^*}{2},$$

temos,

$$q^*/2 + p - x_2 = 2(p - p_2); \quad x_2 - p + q^*/2 = 2(p_1 - p);$$

$$x_2 - p - q^*/2 = 2(p_2 - p); \quad p - q^*/2 - x_2 = 2(p - p_1).$$

Logo, definindo $*_{\hbar}^3$ da seguinte forma

$$g_1 *_{\hbar}^3 g_2 = S_3[T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2]$$

temos que

$$\begin{aligned}
(g_1 *_{\hbar}^3 g_2)(p, q) &= S_3[T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2](p, q) \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \int_{\mathbb{R}_b^2 \times \mathbb{R}_b^2} [\cosh(2(p - p_2)) \cdot \cosh(2(p_1 - p)) \cdot \cosh(2(p_1 - p_2))]^{1/2} \\
&\quad \cdot g_1(p_1, q_1) \cdot g_2(p_2, q_2) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} [\sinh(2(p_2 - p)) + \sinh(2(p - p_1)) + \sinh(2(p_1 - p_2))]} dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.6. *Sejam $\mathbb{R}_b^2$ o plano de Bieliavsky, $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$ o par grupóide simplético gerado do plano de Bieliavsky e Φ_3 a aplicação dada por (3.1.1). Se P e F são as polarizações dadas acima em $T^*\mathbb{R}_b^2$ e $\mathbb{R}_b^2 \times \overline{\mathbb{R}}_b^2$, respectivamente, considere $\tilde{F} = (\Phi_3^{-1})_*(F)$. Então, para $\psi \in L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\psi' \in L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$,*

$$\langle \psi, \psi' \rangle_{pr} = \langle f, T_3 g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_b^2)} = \langle S_3 f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}_b^2)}$$

onde, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{pr}$ é o empareamento de seções de $L \otimes \Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $L \otimes \Delta_{-1/2}(P)$,

$$\psi = f \tilde{s}_0 v, \quad \psi' = g t_0 v',$$

com v e v' seções de $\Delta_{-1/2}(\tilde{F})$ e $\Delta_{-1/2}(P)$ respectivamente, $(t_0, t_0) = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1$, f, g funções de suporte compacto e T_3, S_3 definidos como em (3.1.7)-(3.1.8) acima.

Além disso, se $\overline{\otimes}$ é a convolução no grupóide reduzido, então o produto de funções definido por

$$g_1 *_h^3 g_2 = S_3 [T_3 g_1 \overline{\otimes} T_3 g_2]$$

coincide com o produto de Bieliavsky, definido pela equação (3.1.10) para funções de suporte compacto, isto é,

$$g_1 *_h^3 g_2 = g_1 *_h^b g_2,$$

onde $*_h^b$ denota o produto de Bieliavsky [4]. ■

Temos agora o seguinte resultado:

Proposição 3.1.7. *Para funções de suporte compacto sobre $\mathbb{R}_b^2$ a aplicação integral T_3 acima (3.1.7) tem inversa e esta é dada pela aplicação S_3 acima (3.1.8).*

Prova :

Primeiramente,

$$\begin{aligned} S_3(T_3 f)(p, q) &= C \int_{\mathbb{R}} T_3 f\left(\frac{y}{2} + p, p - \frac{y}{2}\right) \cosh^{\frac{1}{2}}(y) \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \sinh(y)\right) dy \\ &= C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \cosh(y) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \xi \sinh(y)\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \sinh(y)\right) dy d\xi \end{aligned}$$

Mas, se $u = \sinh(y)$, então $du = \cosh(y) dy$, logo

$$S_3(T_3 f)(p, q) = C^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (q - \xi) u\right] du d\xi$$

de onde observamos que esta integral não é absolutamente convergente.

Daí, como não podemos mudar a ordem de integração no sentido usual, então introduzimos o fator Gaussiano $e^{-\frac{1}{4\hbar^2}t|u|^2}$ na integral acima, ie,

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q - \xi)u\right] \exp\left(-\frac{1}{\hbar^2}t|u|^2\right) dud\xi$$

Notemos que, quando $t \rightarrow 0$, a integral acima tende a $S(Tf)(p, q)$.

Além disso, esta integral acima é absolutamente convergente e podemos tomar a integral iterada em quaisquer ordem. Daí,

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}(q-\xi)u} e^{-\frac{1}{\hbar^2}t|u|^2} du \right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) G_t(q - \xi) d\xi$$

onde

$$G_t(q - \xi) = C^2 \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}u(q-\xi)} e^{-\frac{1}{\hbar^2}t|u|^2} du$$

Logo,

$$C^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q - \xi)u\right] \exp\left(-\frac{1}{\hbar^2}t|u|^2\right) dud\xi = \int_{\mathbb{R}} f(p, \xi) G_t(q - \xi) d\xi$$

para todo $t > 0$, e tomamos o limite quando $t \rightarrow 0$. De onde, o limite na esquerda é $S(Tf)(p, q)$.

Mas, fazendo uma mudança de variáveis temos que

$$G_t(q - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i(q-\xi)v} \cdot e^{-t|v|^2} dv.$$

Assim, da transformada de Fourier da função Gaussiana obtemos que

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

De onde, temos as seguintes propriedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} G_t(x) dx = 1$ para todo t
- $G_t(x) \geq 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} G_t(x) = 0$ se $x \neq 0$, uniformemente em $|x| \geq \epsilon$ para quaisquer $\epsilon > 0$.

Então, G_t é uma aproximação da unidade. Portanto a formula de inversão é consequência direta do teorema da aproximação da unidade, pois como G_t é uma aproximação da unidade $G_t * f \rightarrow f$ quando $t \rightarrow 0$, logo $S_3(T_3f)(p, q) = f(p, q)$.

Analogamente, obtemos que $T_3(S_3f)(p, q) = f(p, q)$. ■

Observação 3.1.8. Como para o caso do produto de Weyl tratado no Capítulo 2, observamos que a associatividade do produto de Bieliavsky pode ser vista como corolário da Proposição 3.1.7 acima e da associatividade da convolução no grupóide reduzido.

3.1.1 Uma classe de funções tipo Schwartz neste produto

Uma propriedade importante do produto integral de Weyl é que o produto de duas funções tipo Schwartz, i.e., funções de decaimento rapido, é também uma função tipo Schwartz, mas no caso do produto de Bieliavsky isso não acontece, na verdade ele mostra que seu produto deformado leva o espaço das funções tipo Schwartz no espaço das funções C^∞ , no presente trabalho apresentamos uma família de funções tipo Schwartz e mostramos que o produto (Bieliavsky) delas também é uma função de Schwartz. Além disso, mostramos que o produto iterado delas ainda é uma função de Schwartz.

De fato,

Seja $*_h^b$ o produto de Bieliavsky definido pelo lado mais a direita da equação (3.1.10) para funções de suporte compacto, isto é:

$$\begin{aligned} [F *_h^b G](a, l) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh(2(a-a_0))} e^{\frac{2il}{h} \sinh(2(a_0-a_1))} e^{\frac{2il_0}{h} \sinh(2(a_1-a))} \\ &\quad \cdot [\cosh(2(a_1 - a_1)) \cosh(2(a - a_0)) \cdot \cosh(2(a_1 - a))]^{1/2} \\ &\quad F(a_0, l_0) G(a_1, l_1) da_0 dl_0 da_1 dl_1. \end{aligned}$$

Consideremos a seguinte familia de funções:

$$M = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(a, l) = e^{-(l-\lambda)^2} e^{-\cosh^2(4a)} \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Para esta familia de funções, podemos observar que o produto acima está bem definido. Além disso, podemos mostrar que o produto de Bieliavsky de funções desta familia é uma função tipo Schwartz.

Teorema 3.1.9. *Sejam $F, G \in M$, então $[F *_h^b G](a, l)$ é uma função tipo Schwartz.*

Prova:[Ver apêndice (C)]

Mais ainda, temos que o produto iterado de funções do conjunto M é uma função tipo Schwartz.

Teorema 3.1.10. *Seja $F, G, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções, tal que:*

$$F(a, l) = e^{-(l-\lambda_1)^2 - \cosh^2 4a}; G(a, l) = e^{-(l-\lambda_2)^2 - \cosh^2 4a}; H(a, l) = e^{-(l-\lambda_3)^2 - \cosh^2 4a}.$$

Então, $[(F * G) * H](a, l)$ é uma função tipo Schwartz.

Prova:[Ver apêndice (D)]

Para uma Quantização Geométrica “de Weyl” no Plano Hiperbólico

Neste capítulo, motivados pelos resultados da seção 2.2, vamos estudar a quantização geométrica gerada por polarizações como as estudadas em 2.2, mas agora no modelo do plano hiperbólico dado pelo semiplano direito, e assim construir um produto integral oscilatório usando o empareamento das seções polarizadas adaptadas a estas polarizações, juntamente com uma convolução deformada no par grupóide.

Em princípio, poderíamos pensar em adaptar o método desenvolvido na seção 2.1 para o caso do plano hiperbólico, como foi feito com sucesso para o caso do plano de Bieliavsky, no Capítulo 3. Porém, tal método não pode ser aplicado ao plano hiperbólico. Mais precisamente, quando uma das polarizações do par grupóide é a induzida pela polarização vertical no fibrado tangente (isomorfo ao cotangente) pela aplicação de ponto médio, ou mapa exponencial simétrico, não é possível encontrar uma outra polarização real no grupóide de pares que seja sempre transversal ou seja sempre não transversal a esta “polarização vertical”.

Este fato decorre da peculiaridade da geometria hiperbólica e pode ser vista como relacionada à impossibilidade de sempre se poder construir, para cada tripla de pontos no plano hiperbólico, um triângulo geodésico (real) no plano hiperbólico cujos pontos médios de seus lados coincide com a tripla de pontos dados [8].

Portanto, neste capítulo desenvolveremos um método análogo ao utilizado na seção 2.2, agora no plano hiperbólico, para a construção de um produto integral via empa-

reamento de meias densidades adaptadas a duas polarizações transversais no grupóide de pares complexificado, sendo uma real, a “polarização vertical”, e outra holomorfa.

De fato, obteremos abaixo não um único produto, mas sim uma família de produtos que ainda deverá ser estudada mais cuidadosamente. Assim, após apresentarmos algumas conjecturas mais genéricas que garantem as propriedades desejadas, associatividade e equivariância. Apresentamos um exemplo simples desta família juntamente com algumas condições mais fortes que garantem a associatividade deste produto.

4.1 Família de produtos via polarizações transversais (real e holomorfa)

Seja (H^2, ω) a variedade simplética, tal que

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}, \quad \omega_{(x,y)} = \frac{1}{x^2} dx \wedge dy$$

e

$$H_d^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x > 0\}$$

o semiplano direito complexo, de onde temos a identificação natural $H^2 \simeq H_d^2$ dada por $(x, y) \mapsto x + iy$. Desta forma, estudamos o grupo de isometrias de H_d^2 para a métrica hiperbólica dada por

$$g_z(v, w) = \langle v, w \rangle_z = \frac{1}{(\operatorname{Re}(z))^2} \operatorname{Re}(v \cdot \bar{w}), \quad v, w \in \mathbb{C} \equiv T_z H_d^2, \quad (4.1.1)$$

pela identificação de vetores tangentes a H_d^2 como números complexos.

Proposição 4.1.1. *O grupo $GL(2, \mathbb{R})^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc > 0 \right\}$ age sobre H_d^2 como um grupo de isometrias para a métrica hiperbólica. Isto é, para uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em $GL(2, \mathbb{R})^+$, a aplicação*

$$h : H_d^2 \rightarrow H_d^2; \quad z \mapsto \frac{az - bi}{icz + d}, \quad (4.1.2)$$

é uma isometria.

Prova :

Para uma matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ consideremos o mapa $h : H_d^2 \rightarrow H_d^2$ dado por $h(z) = \frac{az - bi}{icz + d}$. Primeiro vamos ver que h vai mesmo em H_d^2 , isto é, a parte real de $h(z)$

tem que ser positiva. De fato,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(h(z)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{az - bi}{icz + d} + \frac{a\bar{z} + bi}{-ic\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2} \frac{(az - bi)(-ic\bar{z} + d) + (a\bar{z} + bi)(icz + d)}{|icz + d|^2} \\ &= \frac{\Delta \operatorname{Re} z}{|icz + d|^2} > 0 \text{ para } z \in H^2 \text{ e } \Delta = ad - bc > 0. \end{aligned}$$

Claramente h é um difeomorfismo, daí o pullback da métrica g sob o mapa h é $h^*g = \tilde{g}$.

Por outro lado,

$$h'(z) = \frac{(icz + d)a - (az - bi)ic}{(icz + d)^2} = \frac{\Delta}{(icz + d)^2},$$

onde $\Delta = ad - bc$ é o determinante.

Logo, dados $v, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} h^*g_z(v, w) &= \langle h_*v, h_*w \rangle_{h(z)} = \frac{1}{(\operatorname{Re} h(z))^2} \operatorname{Re} \left(h'(z) v \overline{h'(z) w} \right) \\ &= \frac{|h'(z)|^2}{(\operatorname{Re} h(z))^2} \operatorname{Re}(v \cdot \bar{w}) = \frac{1}{(\operatorname{Re} z)^2} \operatorname{Re}(v \bar{w}) = \langle v, w \rangle_z = g_z(v, w), \end{aligned}$$

pois, já vimos que $\operatorname{Re}(h(z)) = \frac{\Delta \operatorname{Re} z}{|icz + d|^2}$, então, como $\tilde{g} = g$, temos que h é um isometria. Portanto, como a matriz A é arbitrária, $GL(2, \mathbb{R})^+$ age sobre H_d^2 via (4.1.2) como um grupo de isometria. ■

Observação 4.1.2. Efetivamente, o grupo de isometrias de H_d^2 é $SL(2, \mathbb{R}) \subset GL(2, \mathbb{R})^+$. É fácil ver, por exemplo, que

$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \text{ e } h_2 = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix}$$

agem da mesma forma em H_d^2 via (4.1.2).

Agora, usando o resultado anterior, vamos encontrar uma parametrização das geodésicas no plano hiperbólico (modelo do semiplano direito). No que segue, utilizaremos as abreviações

$$C_\alpha \equiv \cos(\alpha) \quad , \quad S_\alpha \equiv \sin(\alpha) \quad .$$

Como a curva $l(t) = (e^t, 0)$ é uma geodésica em H_d^2 , ie, o eixo x , e como o grupo $GL(2, \mathbb{R})$ age em H_d^2 como grupo de isometria, dados $z = x + iy \in H_d^2$ e $v \in T_z H_d^2$ com $v = r \cdot e^{i\theta}$, temos que $\tilde{l}(t) = (e^{\frac{rt}{x}}, 0)$ é ainda uma geodésica em H_d^2 . Além disso, como $\begin{pmatrix} C_{\frac{\theta}{2}} & S_{\frac{\theta}{2}} \\ -S_{\frac{\theta}{2}} & C_{\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$ está em $GL(2, \mathbb{R})^+$, então $\tilde{h}(\tilde{l}(t))$ é uma geodésica em H^2 onde

$$\tilde{h}(z) = \frac{zC_{\frac{\theta}{2}} - iS_{\frac{\theta}{2}}}{-iS_{\frac{\theta}{2}}z + C_{\frac{\theta}{2}}}. \text{ Assim,}$$

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \tilde{h}(\tilde{l}(t)) &= \frac{e^{\frac{tr}{x}}C_{\frac{\theta}{2}} - iS_{\frac{\theta}{2}}}{-ie^{\frac{tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}} + C_{\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{\frac{tr}{x}}C_{\frac{\theta}{2}} - iS_{\frac{\theta}{2}}}{C_{\frac{\theta}{2}} - ie^{\frac{tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{e^{\frac{tr}{x}}}{C_{\frac{\theta}{2}}^2 + e^{\frac{2tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}^2} + \frac{-S_{\frac{\theta}{2}}C_{\frac{\theta}{2}} + e^{\frac{2tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}C_{\frac{\theta}{2}}}{C_{\frac{\theta}{2}}^2 + e^{\frac{2tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}^2} \\ &= \frac{e^{\frac{tr}{x}}}{C_{\frac{\theta}{2}}^2 + e^{\frac{2tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}^2} + \frac{(e^{\frac{2tr}{x}} - 1)S_{\frac{\theta}{2}}C_{\frac{\theta}{2}}}{C_{\frac{\theta}{2}}^2 + e^{\frac{2tr}{x}}S_{\frac{\theta}{2}}^2}i, \end{aligned}$$

mas,

$$C_{\frac{\theta}{2}}^2 = \frac{1 + C_{\theta}}{2} e S_{\frac{\theta}{2}}^2 = \frac{1 - C_{\theta}}{2},$$

logo

$$\alpha(t) = \frac{2e^{\frac{tr}{x}}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})} + \frac{(e^{\frac{2tr}{x}} - 1)S_{\theta}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})}i.$$

Agora, como $x > 0$, se consideramos a matriz $\begin{pmatrix} x & -y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ esta pertence a $GL(2, \mathbb{R})^+$, de onde $H(w) = xw + iy$ é uma isometria em H_d^2 . Assim, temos a curva

$$\begin{aligned} \beta(t) &= H(\alpha(t)) = x(\alpha(t)) + iy \\ &= \frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})} + \left[\frac{x(e^{\frac{2tr}{x}} - 1)S_{\theta}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})} + y \right]i. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Chamemos, $\beta_1(t) = \frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})}$ e $\beta_2(t) = \frac{x(e^{\frac{2tr}{x}} - 1)S_{\theta}}{1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})} + y$, então

$$\beta_1'(t) = \frac{2r.e^{\frac{tr}{x}}.[1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})] - 4r.e^{\frac{3tr}{x}}(1 - C_{\theta})}{[1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})]^2}$$

e

$$\beta_2'(t) = \frac{2r.e^{\frac{2tr}{x}}.S_{\theta}[1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})] - 2r(e^{\frac{2tr}{x}} - 1)(1 - C_{\theta})e^{\frac{2tr}{x}}S_{\theta}}{[1 + C_{\theta} + e^{\frac{2tr}{x}}(1 - C_{\theta})]},$$

logo, temos que $\beta(0) = x + iy$ e $\beta'(0) = \beta_1'(0) + i\beta_2'(0) = re^{i\theta}$.

Portanto, temos o seguinte:

Proposição 4.1.3. *Uma parametrização para a geodésica no semiplano direito H_d^2 passando pelo ponto z e com vetor tangente $v = re^{i\theta}$ é dada pela função $\beta(t)$ como em (4.1.3) acima.*

Assim, podemos definir a função exponencial como segue:

$$\begin{aligned}\exp_{(x,y)}(v) &= \left[\frac{2xe^{\frac{r}{x}}}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)}, \frac{x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)} + y \right] \\ \exp_{(x,y)}(-v) &= \left[\frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)}, \frac{-x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)} + y \right],\end{aligned}$$

de onde temos a seguinte aplicação

$$\Phi_4 : TH^2 \longrightarrow H^2 \times H^2; (x, y, r, \theta) \longmapsto (x_-, y_-; x_+, y_+) \quad (4.1.4)$$

dada explicitamente por:

$$x_- = \frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)}; y_- = \frac{-x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)} + y; \quad (4.1.5)$$

$$x_+ = \frac{2xe^{\frac{r}{x}}}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)}; y_+ = \frac{x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)} + y. \quad (4.1.6)$$

Por outro lado, seja $(H^2 \times \overline{H}^2, \omega_\pm)$ o par grupóide simplético, tal que, para

$$(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H^2 \times \overline{H}^2,$$

temos

$$\omega_\pm = \frac{1}{x_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{x_+^2} dx_+ \wedge dy_+.$$

Podemos usar a identificação natural de H^2 com H_d^2 para construir nele uma estrutura complexa como segue:

Proposição 4.1.4. *Seja $(H_d^2 \times \overline{H}_d^2, \omega_\pm)$ o par grupóide simplético, tal que $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H_d^2 \times \overline{H}_d^2$ e $\{\partial x_-, \partial y_-, \partial x_+, \partial y_+\} \in T_{(x_-, y_-, x_+, y_+)}(H_d^2 \times \overline{H}_d^2)$. Então, a aplicação*

$$J_\pm : T_\pm(H_d^2 \times \overline{H}_d^2) \longrightarrow T_\pm(H_d^2 \times \overline{H}_d^2)$$

tal que $J_\pm(\partial x_-) = \partial y_-$, $J_\pm(\partial y_-) = \partial x_-$, $J_\pm(\partial x_+) = -\partial y_+$, $J_\pm(\partial y_+) = \partial x_+$, define uma estrutura complexa compatível com a forma simplética do par grupóide $H^2 \times \overline{H}^2$

Prova : [ver Apêndice E]

Assim, para $(x, y, r, \theta) \in TH_d^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H_d^2 \times \overline{H}_d^2$, consideremos as seguintes polarizações:

$$P = \langle \partial v_x, \partial v_y \rangle = \langle \partial r, \partial \theta \rangle \quad \text{e} \quad F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$$

$$\text{onde } z_- = x_- + iy_-; \quad z_+ = x_+ + iy_+; \quad \partial z_- = \frac{1}{2}(\partial x_- - i\partial y_-); \quad \partial \bar{z}_+ = \frac{1}{2}(\partial x_+ + i\partial y_+).$$

Temos então o seguinte:

Proposição 4.1.5. *Sejam H_d^2 o modelo do plano hiperbólico dado pelo semiplano direito complexo e Φ_4 o mapa dado por (4.1.4), ou explicitamente por (4.1.5)-(4.1.6) para coordenadas $(x, y; r, \theta) \in TH_d^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H_d^2 \times H_d^2$. Então as polarizações $P = \langle \partial r, \partial \theta \rangle$ e $F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle$ são transversais, onde $z_- = x_- + iy_-$ e $z_+ = x_+ + iy_+$.*

Prova : [ver Apêndice F]

Além disso, se denotamos por:

$$z_- = x_- + iy_-; \quad z_+ = x_+ + iy_+; \quad dz_- = dx_- + idy_-; \quad dz_+ = dx_+ + idy_+,$$

temos que, a forma simplética em $H_d^2 \times \overline{H}_d^2$ é dada por:

$$\frac{2i}{(z_- + \bar{z}_-)^2} dz_- \wedge d\bar{z}_- - \frac{2i}{(z_+ + \bar{z}_+)^2} dz_+ \wedge d\bar{z}_+.$$

Logo, o potencial simplético adaptado à polarização F é dado por:

$$\begin{aligned} \Theta_F &= \frac{2i}{(z_- + \bar{z}_-)} dz_- + \frac{2i}{(z_+ + \bar{z}_+)} d\bar{z}_+ \\ &= \left(\frac{1}{x_+} dy_+ - \frac{1}{x_-} dy_- \right) + i \left(\frac{1}{x_-} dx_- + \frac{1}{x_+} dx_+ \right) \\ &= \left(\frac{1}{x_+} dy_+ - \frac{1}{x_-} dy_- \right) + i(d(\log(x_- x_+))) \end{aligned}$$

de onde, se $(\Phi_4^{-1})_*(F) = \tilde{F}$, temos que

$$\begin{aligned} \Theta_{\tilde{F}} &= \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial x} \right) \right] dx + \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial y} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial y} \right) \right] dy + \\ &+ \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial r} \right) \right] dr + \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial \theta} \right) \right] d\theta + \\ &+ i \left[d \left(\log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2] C_\theta^2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado, de ([9] páginas 413 e 414) o potencial simplético adaptado à polarização P é dado por:

$$\begin{aligned} \Theta_P &= -\tilde{S}\left(\frac{r}{x}\right) \left[\frac{C_\theta dy - S_\theta dx}{x} \right] = 2\tilde{S}\left(\frac{r}{x}\right) \left[\frac{-C_\theta dy + S_\theta dx}{x} \right] \\ &= \frac{(1 - e^{\frac{2r}{x}})}{x e^{\frac{r}{x}}} C_\theta dy + \frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{x e^{\frac{r}{x}}} S_\theta dx. \end{aligned}$$

Temos então a seguinte proposição.

Proposição 4.1.6. *A diferença de potenciais $\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$ acima é uma forma exata, isto é, existe uma função Ψ tal que $d\Psi = \Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$. Esta função Ψ é dada por*

$$\Psi(x, y, r, \theta) = 2 \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] + i \log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \quad (4.1.7)$$

que pode ser re-escrita como

$$\Psi(x, y, r, \theta) = 2 \arctan (\sinh(r/x)S_\theta) + i \log \left(\frac{x^2}{1 + \sinh^2(r/x)S_\theta^2} \right) \quad (4.1.8)$$

Prova : [ver Apêndice G]

Como consequência deste resultado apresentamos o lema a seguir.

Lema 4.1.7. *Sejam H_d^2 , $\tilde{F}$, P como acima. Então, se $\tilde{s}_0$ e t_0 são as seções definidas na Proposição 1.2.5, adaptadas às polarizações $\tilde{F}$ e P respectivamente, temos que:*

$$(\tilde{s}_0, t_0) = C e^{\frac{i}{\hbar} \Psi(x, y; r, \theta)},$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto Hermitiano do fibrado pré-quântico e Ψ dada pelas equações (4.1.7)-(4.1.8).

Prova :

De fato, da Proposição 1.2.5, t_0 é uma seção de L satisfazendo

$$\nabla_X t_0 = -(i/\hbar) \Theta_P(X) t_0 \text{ e } (t_0, t_0) = 1.$$

e $\tilde{s}_0$ é a seção de L satisfazendo

$$\nabla_X \tilde{s}_0 = -(i/\hbar) \Theta_{\tilde{F}}(X) \tilde{s}_0 \text{ e } (\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = 1.$$

Além disso, como L é um fibrado linear, existe uma função não zero $\phi \in C^\infty(TH_d^2)$ tal que $t_0 = \phi \tilde{s}_0$, logo da definição de conexão temos que, para $X \in \mathfrak{X}(TH_d^2)$, $\nabla_X t_0 = \nabla_X(\phi \tilde{s}_0) = (X\phi) \tilde{s}_0 + \phi \nabla_X \tilde{s}_0$, de onde obtemos

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{i}{\hbar} (\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P).$$

Mas, da proposição 4.1.6 $\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P = d(\Psi(x, y; r, \theta))$, então

$$\phi(x, y; r, \theta) = C e^{\frac{i}{\hbar} \Psi(x, y; r, \theta)},$$

com C uma constante. Portanto,

$$(\tilde{s}_0, t_0) = (\tilde{s}_0, \phi \tilde{s}_0) = \phi(\tilde{s}_0, \tilde{s}_0) = \phi \quad \blacksquare$$

Por outro lado, da proposição 1.2.5 e a observação 1.2.15, as seções polarizadas em $\Gamma_F L$ são da forma $f s_0$ onde f é uma função definida sobre $H_d^2 \times H_d^2$ e s_0 é uma seção de L satisfazendo

$$\nabla_X s_0 = -(i/\hbar) \Theta_F(X) s_0 \text{ e } (s_0, s_0) = 1.$$

Daí, $f s_0 \in \Gamma_F L$ se e somente se $Xf = 0$ para todo $X \in F$, logo $f = f(z_-, \bar{z}_+)$, isto é, f é holomorfa com respeito a primeira variável e anti-holomorfa com respeito a segunda variável.

Igualmente, se t_0 é uma seção de L satisfazendo

$$\nabla_X t_0 = -(i/\hbar) \Theta_P(X) t_0 \text{ e } (t_0, t_0) = 1.$$

Então, um elemento de $\Gamma_P L$ é da forma $g t_0$ onde $g = g(x, y)$ é uma função $H^2 \rightarrow \mathbb{C}$ suave

Observação 4.1.8. Chamando $\rho = \frac{r}{x}$ podemos re-escrever as equações (4.1.7)-(4.1.8) e (4.1.5)-(4.1.6) como

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, r, \theta) &= 2 \arctan[\sinh \rho S_\theta] + i \log \left(\frac{x^2}{[\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho C_\theta^2]} \right) \\ x_- &= \frac{2xe^\rho}{[(1+e^\rho) - (1-e^\rho)C_\theta]}; \quad y_- = \frac{x(1-e^{2\rho})S_\theta}{[(1+e^{2\rho}) - (1-e^{2\rho})C_\theta]} + y \\ x_+ &= \frac{2xe^\rho}{[(1+e^{2\rho}) + (1-e^{2\rho})C_\theta]}; \quad y_+ = \frac{x(e^{2\rho}-1)S_\theta}{[(1+e^{2\rho}) + (1-e^{2\rho})C_\theta]} + y \end{aligned}$$

e portanto,

$$x_- = \frac{x}{\cosh \rho + \sinh \rho C_\theta} \quad ; \quad y_- = \frac{-x \sinh \rho S_\theta}{\cosh \rho + \sinh \rho C_\theta} + y ; \quad (4.1.9)$$

$$x_+ = \frac{x}{\cosh \rho - \sinh \rho C_\theta} \quad ; \quad y_+ = \frac{x \sinh \rho S_\theta}{\cosh \rho - \sinh \rho C_\theta} + y , \quad (4.1.10)$$

então,

$$\cosh \rho + \sinh \rho C_\theta = \frac{x}{x_-} \quad ; \quad \cosh \rho - \sinh \rho C_\theta = \frac{x}{x_+} \quad (4.1.11)$$

$$\Rightarrow y_- = -x_- \sinh \rho S_\theta + y \quad ; \quad y_+ = x_+ \sinh \rho S_\theta + y.$$

Daí,

$$\begin{aligned} y_+ - y_- &= x_- \sinh \rho S_\theta + x_+ \sinh \rho S_\theta = (x_- + x_+) \sinh \rho S_\theta \Rightarrow \\ \sinh(\rho) S_\theta &= \frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-}, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

logo

$$y = y_- + x_- \sinh \rho S_\theta = y_- + x_- \left(\frac{y_+ - y_-}{x_- + x_+} \right) = \frac{y_- x_+ + x_- y_+}{x_- + x_+}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x_- x_+ &= \frac{x^2}{\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho C_\theta^2} = \frac{x^2}{\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho + \sinh^2 \rho S_\theta^2} \Rightarrow \\ x_- x_+ &= \frac{x^2}{1 + \sinh^2(\rho) S_\theta^2} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

logo

$$x^2 = x_- x_+ (1 + \sinh^2(\rho) S_\theta^2),$$

mas, como $\sinh(\rho) S_\theta = \frac{y_+ - y_-}{x_- + x_+}$, (c.f. (4.1.12)), temos

$$\begin{aligned} x^2 &= x_- x_+ \left(1 + \frac{(y_+ - y_-)^2}{(x_- + x_+)^2} \right) \\ &= \frac{x_- x_+ [(x_- + x_+)^2 + (y_+ - y_-)^2]}{(x_- + x_+)^2}, \end{aligned}$$

então temos

$$x = \frac{\{x_- x_+ [(x_- + x_+)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{\frac{1}{2}}}{(x_- + x_+)} \quad ; \quad y = \frac{y_- x_+ + x_- y_+}{x_- + x_+} \quad (4.1.14)$$

e finalmente

$$\Psi \circ \Phi_4^{-1}(x_-, y_-; x_+, y_+) = \arctan\left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-}\right] + i \log(x_- x_+) \quad (4.1.15)$$

■

Vamos agora apresentar uma expressão explícita para as meias densidades polarizadas.

Como P é a polarização natural do fibrado tangente, dado $q \in H_d^2$ e $m \in \pi^{-1}(q)$, com π a projecção canônica, então

$$T_q H_d^2 = T_m(T H_d^2) / P_m,$$

assim

$$\Delta_{-1/2}(P_m) = \Delta_{-1/2}(T_m(TH_d^2)) \otimes \Delta_{1/2}(T_q H_d^2).$$

Daí, a forma de volume ε de H^2 determina uma $-(1/2)$ – P -densidade, dada por

$$v = |\varepsilon_\Sigma|^{-1/2} |\varepsilon|^{1/2}$$

onde ε_Σ é forma de volume de $T(TH_d^2)$.

Por outro lado, temos que $(H_d^2 \times \overline{H_d^2}, \omega_\pm, J_\pm)$ é uma variedade Kahleriana onde a polarização F é uma polarização holomorfica. Então, para cada $(X_-, X_+) \in H_d^2 \times H_d^2$, $T_{(X_-, X_+)}^\mathbb{C}(H_d^2 \times H_d^2) = F_{(X_-, X_+)} \oplus \overline{F}_{(X_-, X_+)}$. Daí, existe uma seção positiva natural v' de $\Delta_{-1/2}(F)$ unicamente determinada por

$$v' \cdot \overline{v'} = |\varepsilon_{\omega_\pm}|^{-1/2},$$

com $\varepsilon_{\omega_\pm}$ é a formula de volume de Liouville em $H_d^2 \times \overline{H_d^2}$.

Agora, para $(x, y; r, \theta) \in TH_d^2$ e $(x_-, y_-, x_+, y_+) \in H_d^2 \times \overline{H_d^2}$ da propriedade 1.2.15(6) temos

$$v\{\partial r, \partial \theta\} = (|\varepsilon_\Sigma| \partial x, \partial y; \partial r, \partial \theta)^{-1/2} \cdot (|\varepsilon| \partial x, \partial y)^{1/2}. \quad (4.1.16)$$

Enquanto que no caso da polarização holomorfa $F = \langle \partial \overline{z}_-, \partial z_+ \rangle$ temos

$$v'\{\partial \overline{z}_-, \partial z_+\} = (|\varepsilon_{\omega_\pm}| \{\partial \overline{z}_-, \partial z_+; \overline{\partial \overline{z}_-}, \overline{\partial z_+}\})^{-1/4}. \quad (4.1.17)$$

Temos então o seguinte lema.

Lema 4.1.9. *As contrações $v\{\partial r, \partial \theta\}$ e $v'\{\partial \overline{z}_-, \partial z_+\}$ definidas por (4.1.16) e (4.1.17) acima são dadas por*

$$v\{\partial r, \partial \theta\} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2 \sinh(r/x) \cosh(r/x)}} \quad (4.1.18)$$

$$v'\{\partial \overline{z}_-, \partial z_+\} = 2^{1/4} \sqrt{x_- x_+} \quad (4.1.19)$$

Prova:

Como

$$\Theta_P = 2 \frac{\sinh(r/x)}{x} S_\theta dx - 2 \frac{\sinh(r/x)}{x} C_\theta dy,$$

a forma simplética em TH_d^2 é dada por:

$$\begin{aligned}
\Sigma = d\Theta_P &= \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\sinh(r/x)}{x} S_\theta \right] dr \wedge dx + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \frac{\sinh(r/x)}{x} S_\theta \right] d\theta \wedge dx - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial r} \left[2 \frac{\sinh(r/x)}{x} C_\theta \right] dr \wedge dy - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2 \frac{\sinh(r/x)}{x} C_\theta \right] d\theta \wedge dy \\
&= \frac{2 \cosh(r/x)}{x^2} S_\theta dr \wedge dx + \frac{2 \sinh(r/x)}{x} C_\theta d\theta \wedge dx - \\
&\quad - \frac{2 \cosh(r/x)}{x^2} C_\theta dr \wedge dy + \frac{2 \sinh(r/x)}{x} S_\theta d\theta \wedge dy.
\end{aligned}$$

Chamemos

$$A_1 = \frac{2 \cosh(r/x)}{x^2} S_\theta; \quad A_2 = \frac{2 \sinh(r/x)}{x} C_\theta; \quad A_3 = \frac{2 \cosh(r/x)}{x^2} C_\theta; \quad A_4 = \frac{2 \sinh(r/x)}{x} S_\theta,$$

então

$$\begin{aligned}
\Sigma^2 &= [A_1 dr \wedge dx + A_2 d\theta \wedge dx - A_3 dr \wedge dy + A_4 d\theta \wedge dy] \wedge \\
&\quad \wedge [A_1 dr \wedge dx + A_2 d\theta \wedge dx - A_3 dr \wedge dy + A_4 d\theta \wedge dy] \\
&= A_1 A_4 (dr \wedge dx \wedge d\theta \wedge dy) - A_2 A_3 (d\theta \wedge dx \wedge dr \wedge dy) - \\
&\quad - A_3 A_2 (dr \wedge dy \wedge d\theta \wedge dx) + A_4 A_1 (d\theta \wedge dy \wedge dr \wedge dx) \\
&= (-A_1 A_4 - A_2 A_3 - A_3 A_2 - A_4 A_1) (dx \wedge dy \wedge dr \wedge d\theta) \\
&= -2(A_4 A_1 + A_2 A_3) (dx \wedge dy \wedge dr \wedge d\theta).
\end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned}
\Sigma^2(\partial x, \partial y, \partial r, \partial \theta) &= -(1/2)(A_4 A_1 + A_2 A_3) \\
&= -(1/2) \left[\frac{4 \sinh(r/x) \cosh(r/x) S_\theta^2}{x^3} + \frac{4 \sinh(r/x) \cosh(r/x) C_\theta^2}{x^3} \right] \\
&= -\frac{2 \sinh(r/x) \cosh(r/x)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Assim, para $r \neq 0$

$$|\varepsilon_{\Sigma(x,y,r,\theta)}| \{\partial x, \partial y, \partial r, \partial \theta\} = \frac{2 \sinh(r/x) \cosh(r/x)}{x^3}$$

e

$$|\varepsilon_{\Sigma(x,y,r,\theta)}|^{-1/2} \{\partial x, \partial y, \partial r, \partial \theta\} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{2 \sinh(r/x) \cosh(r/x)}}.$$

Além disso,

$$|\varepsilon_{(x,y)}| \{\partial x, \partial y\} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |\varepsilon_{(x,y)}|^{1/2} \{\partial x, \partial y\} = \frac{1}{x},$$

de onde,

$$v\{\partial r, \partial\theta\} = (|\varepsilon_\Sigma| \partial x, \partial y; \partial r, \partial\theta)^{-1/2} \cdot (|\varepsilon| \partial x, \partial y)^{1/2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2 \sinh(r/x) \cosh(r/x)}}$$

Por outro lado, como $\omega_\pm = \frac{1}{x_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{x_+^2} dx_+ \wedge dy_+$, temos

$$\begin{aligned} \omega_\pm^2 &= \left(\frac{1}{x_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{x_+^2} dx_+ \wedge dy_+ \right) \wedge \left(\frac{1}{x_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{x_+^2} dx_+ \wedge dy_+ \right) \\ &= -\frac{2}{x_-^2 x_+^2} (dx_- \wedge dy_- \wedge dx_+ \wedge dy_+), \end{aligned}$$

mas $(dx_- \wedge dy_- \wedge dx_+ \wedge dy_+)$ aplicado em

$$\{(1/2)(\partial x_- + i\partial y_-), (1/2)(\partial x_+ - i\partial y_+); (1/2)(\partial x_- - i\partial y_-), (1/2)(\partial x_+ + i\partial y_+)\}$$

é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ i/2 & 0 & -i/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -i/2 & 0 & i/2 \end{pmatrix} &= (1/2) \begin{vmatrix} 0 & -i/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -i/2 & 0 & i/2 \end{vmatrix} + (1/2) \begin{vmatrix} i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -i/2 & i/2 \end{vmatrix} = \\ &= (i/2) \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{vmatrix} + (i/4) \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -i/2 & i/2 \end{vmatrix} = \frac{i}{4} \left(\frac{i}{2} \right) + \frac{i}{4} \left(\frac{i}{2} \right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\varepsilon_{\omega_\pm}|^{-1/4} \{ \partial \bar{z}_-, \partial z_+; \overline{\partial \bar{z}_-}, \overline{\partial z_+} \} = \left(\frac{1}{2x_-^2 x_+^2} \right)^{-1/4} = (2x_-^2 x_+^2)^{1/4} = 2^{1/4} (x_- x_+)^{1/2}.$$

■

Segue imediatamente dos cálculos acima o seguinte lema.

Lema 4.1.10. *A medida de volume de Liouville em $H_d^2 \times H_d^2$ e TH_d^2 é dada por*

$$dV(x_-, y_-, x_+, y_+) = \frac{1}{x_-^2 x_+^2} dx_- dy_- dx_+ dy_+ \quad (4.1.20)$$

$$dV(x, y, r, \theta) = \frac{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}{x^3} dx dy dr d\theta \quad (4.1.21)$$

Por outro lado, se $\tilde{P} = \Phi_*(P)$ e $\tilde{F} = (\Phi^{-1})_*(F)$, as meias densidades naturais em $\triangle_{-1/2}(\tilde{P})$ e $\triangle_{-1/2}(\tilde{F})$ são dadas respectivamente por

$$\tilde{v} = |(\Phi^{-1})^* \varepsilon_\Sigma|^{-1/2} |(\Phi^{-1})^* \varepsilon|^{1/2}; \quad \tilde{v}' = |\varepsilon_{\Phi^* \omega_\pm}|^{-1/4} \quad (4.1.22)$$

Pois, para $m \in TH_d^2$, $\Phi_{*m} : T_m(TH_d^2) \longrightarrow T_{\Phi(m)}(H_d^2 \times H_d^2)$ é um isomorfismo e $\tilde{P}_{\Phi(m)} = \Phi_{*m}(P_m)$, então Φ_{*m} induz um isomorfismo natural,

$$\tilde{\Phi}_{*m} : T_m(TH_d^2)/P_m \longrightarrow T_{\Phi(m)}(H_d^2 \times H_d^2)/\tilde{P}_{\Phi(m)},$$

logo

$$\tilde{\Phi}_{*m}(T_m(TH_d^2)/P_m) \cong T_{\Phi(m)}(H_d^2 \times H_d^2)/\tilde{P}_{\Phi(m)},$$

mas se $q \in H_d^2$ e $m \in \pi^{-1}(q)$, onde π é a projeção canônica do fibrado tangente, temos que $T_q H_d^2 = T_m(TH_d^2)/P_m$, assim

$$\tilde{\Phi}_{*m}(T_q H_d^2) \cong \Phi_{*m}(T_m(H_d^2 \times H_d^2))/\Phi_{*m}(P_m).$$

Da mesma forma, como F é uma polarização Kahleriana, dado $p \in H_d^2 \times H_d^2$ temos

$$T_p^{\mathbb{C}}(H_d^2 \times H_d^2) = F_p \oplus \overline{F}_p,$$

logo

$$T_{\Phi^{-1}(p)}^{\mathbb{C}}(TH_d^2) = \tilde{F}_{\Phi^{-1}(p)} \oplus \overline{(\tilde{F})}_{\Phi^{-1}(p)},$$

pois a estrutura complexa de $H_d^2 \times H_d^2$, J , induz uma estrutura complexa $\tilde{J}$ em TH_d^2 dada por $\tilde{J} = \Phi_*^{-1} \circ J_{\pm} \circ \Phi_*$ e $(\Phi^{-1})_{*p}(T_p(H_d^2 \times H_d^2)) = T_{\Phi^{-1}(p)}(TH_d^2)$.

Então temos o seguinte lema.

Lema 4.1.11. *As contrações determinadas no Lema 4.1.9 pelas equações (4.1.18) e (4.1.19) são re-escritas via o difeomorfismo Φ_4 respectivamente como*

$$\tilde{v}\{(\Phi_4)_*(\partial r), (\Phi_4)_*(\partial \theta)\} = \frac{\sqrt{2}(x_- x_+)^{3/4}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4}} \quad (4.1.23)$$

$$\tilde{v}'\{(\Phi_4^{-1})_*(\partial \bar{z}_-), (\Phi_4^{-1})_*(\partial z_+)\} = 2^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1 + \sinh^2(r/x) S_{\theta}^2}} \quad (4.1.24)$$

onde $\tilde{v}$ e $\tilde{v}'$ são os pullbacks de v e v' definidos em (4.1.22).

Prova:

De (4.1.11) obtemos imediatamente

$$2 \cosh \rho = \frac{x(x_+ + x_-)}{x_- x_+}$$

de onde tiramos

$$\sinh \rho = \sqrt{\frac{x^2}{4} \left(\frac{x_+ + x_-}{x_- x_+} \right)^2 - 1}$$

logo

$$\frac{2 \cosh \rho \sinh \rho}{x} = \left(\frac{x_+ + x_-}{x_- x_+} \right) \sqrt{\frac{x^2}{4} \left(\frac{x_+ + x_-}{x_- x_+} \right)^2 - 1} \quad (4.1.25)$$

Mas, de (4.1.14) temos que

$$(x(x_+ + x_-))^2 = x_- x_+ [(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]$$

e então podemos re-escrever (4.1.25) como

$$\frac{2 \cosh \rho \sinh \rho}{x} = \frac{x_+ + x_-}{2(x_- x_+)^{3/2}} \sqrt{(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2}$$

de onde, usando que $\rho = r/x$, temos que o lado direito de (4.1.18) escreve-se como o lado direito de (4.1.23) nas coordenadas de $H_d^2 \times H_d^2$.

Por outro lado, (4.1.24) segue imediatamente de (4.1.19) e (4.1.13). ■

Assim, temos o resultado a seguir:

Teorema 4.1.12. *Sejam $\tilde{t}, s$ seções do fibrado pre-quântico L , v' e $\tilde{v}$ como em (4.1.17) e (4.1.22) respectivamente. Então, da definição de empareamento (Definição 1.2.19) e das equações (4.1.14), (4.1.15), (4.1.19) e (4.1.23) temos que:*

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\ &= \int_{H_d^2 \times H_d^2} g \left(\frac{\{x_- x_+ [(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+ y_- + y_+ x_-}{x_+ + x_-} \right) f(z_-, \bar{z}_+) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} e^{-\frac{1}{\hbar} \log(x_- x_+)} (x_- x_+)^{5/4}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4}} \frac{1}{(x_- x_+)^2} dx_- dy_- dx_+ dy_+ \quad (4.1.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{H_d^2 \times H_d^2} g \left(\frac{\{x_- x_+ [(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+ y_- + y_+ x_-}{x_+ + x_-} \right) f(z_-, \bar{z}_+) \cdot \\ & \quad \cdot \frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_- x_+)^{3/4 + 1/\hbar}} dx_- dy_- dx_+ dy_+ \quad (4.1.27) \end{aligned}$$

Agora, motivados pelos resultados da seção 2.2, o caso do plano euclidiano, precisamos encontrar uma representação integral para a função $f(z_-, \bar{z}_+)$ do empareamento

$\langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr}$ e dessa forma, facilitar a obtenção dos operadores integrais necessários para a definição do produto integral em H_d^2 . Com esse objetivos vamos considerar os seguintes espaços: Sejam

$$\mathcal{H}L_\beta^2(H_d^2 \times H_d^2) =$$

$$= \left\{ g : H_d^2 \times H_d^2 \longrightarrow \mathbb{C} / \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_1} = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}_2} = 0 \text{ e } \int_{H_d^2 \times H_d^2} |g(w_1, w_2)|^2 \beta(w_1, w_2) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 < \infty \right\},$$

(4.1.28)

e

$$\widehat{\mathcal{H}L}_\beta^2(H_d^2 \times H_d^2) =$$

$$= \left\{ f : H_d^2 \times H_d^2 \longrightarrow \mathbb{C} / \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2} = 0 \text{ e } \int_{H_d^2 \times H_d^2} |f(z_1, \bar{z}_2)|^2 \beta(z_1, \bar{z}_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty \right\},$$

(4.1.29)

com $w_1 = p_1 + iq_1$, $w_2 = p_2 + iq_2$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, f e g funções contínuas (e holomorfas nas respectivas variáveis $(z_1, \bar{z}_2)$ e (w_1, w_2)) e onde β é uma função contínua estritamente positiva

$$\beta(w_1, w_2) = \beta(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2) = \tilde{\beta}(p_1, q_1, p_2, q_2) > 0.$$

Dos teoremas 1.4.2 e 1.4.3, o espaço da equação (4.1.28) é um espaço de Hilbert de reprodução, mas como o espaço dado pela equação 4.1.29 é isométrico ao espaço dado pela equação (4.1.28), ele também é um espaço de Hilbert de reprodução, com núcleo de reprodução dado pela função $\widehat{K}_\beta(z_1, \bar{z}_2; w_1, \bar{w}_2)$. De onde, dada $f \in \widehat{\mathcal{H}L}_\beta^2(H_d^2 \times H_d^2)$, temos que

$$\begin{aligned} f(z_1, \bar{z}_2) &= \int_{H_d^2 \times H_d^2} f(w_1, \bar{w}_2) \widehat{K}_\beta(z_1, \bar{z}_2; w_1, \bar{w}_2) \beta(w_1, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_2) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 \\ &= \int_{H_d^2 \times H_d^2} f(w_1, \bar{w}_2) \widehat{K}_\beta(z_1, \bar{z}_2; w_1, \bar{w}_2) \tilde{\beta}(p_1, q_1, p_2, q_2) dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Logo, do Teorema 4.1.12 temos que o empareamento é re-escrito como:

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times (H_d^2 \times H_d^2)} g\left(\frac{\{x_-x_+[(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+y_- + y_+x_-}{x_+ + x_-}\right) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad \cdot \frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} \widehat{K}_\beta(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) \beta(w_-, \bar{w}_-, w_+, \bar{w}_+)}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_-x_+)^{3/4+1/\hbar}} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx_- dy_- dx_+ dy_+ \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times (H_d^2 \times H_d^2)} g\left(\frac{\{x_-x_+[(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+y_- + y_+x_-}{x_+ + x_-}\right) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad \cdot \frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} \widehat{K}_\beta(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) \widetilde{\beta}(p_-, q_-, p_+, q_+)}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_-x_+)^{3/4+1/\hbar}} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx_- dy_- dx_+ dy_+
\end{aligned}$$

Agora, chamando

$$\rho_h(x_-, y_-; x_+, y_+) = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_-x_+)^{3/4+1/\hbar}} \quad (4.1.32)$$

podemos re-escrever (4.1.31) como

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times (H_d^2 \times H_d^2)} g\left(\frac{\{x_-x_+[(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+y_- + y_+x_-}{x_+ + x_-}\right) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} \cdot \widehat{K}_\beta(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) \cdot \rho_h(x_-, y_-; x_+, y_+) \cdot \beta(w_-, \bar{w}_-, w_+, \bar{w}_+) \\
& \quad \cdot dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx_- dy_- dx_+ dy_+ \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times (H_d^2 \times H_d^2)} g\left(\frac{\{x_-x_+[(x_+ + x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]\}^{1/2}}{x_+ + x_-}, \frac{x_+y_- + y_+x_-}{x_+ + x_-}\right) f(w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} \cdot \widehat{K}_\beta(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) \cdot \rho_h(x_-, y_-; x_+, y_+) \cdot \widetilde{\beta}(p_-, q_-, p_+, q_+) \\
& \quad \cdot dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx_- dy_- dx_+ dy_+ \quad (4.1.33)
\end{aligned}$$

Vamos agora re-escrever este empareamento usando as coordenadas de TH_d^2 .

Usando (4.1.7) e os lemas 4.1.9, 4.1.10 e 4.1.11, fazemos as seguintes substituições na equacao (4.1.26) :

$$e^{\frac{2i}{h} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]} e^{-\frac{1}{h} \log(x_- x_+)} \iff e^{\frac{2i}{h} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} e^{-\frac{1}{h} \log \left(\frac{x^2}{1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2} \right)}$$

$$\frac{2^{3/4} (x_- x_+)^{5/4}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4}} \iff \frac{x^{3/4}}{2^{1/4} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)} \sqrt{1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2}}$$

$$\frac{1}{(x_- x_+)^2} dx_- dy_- dx_+ dy_+ \iff \frac{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}{x^3} dx dy dr d\theta$$

E portanto temos que

$$\frac{2^{3/4} e^{\frac{2i}{h} \arctan \left[\frac{y_+ - y_-}{x_+ + x_-} \right]}}{\sqrt{x_+ + x_-} [(x_+ - x_-)^2 + (y_+ - y_-)^2]^{1/4} (x_- x_+)^{3/4 + 1/h}} dx_- dy_- dx_+ dy_+$$

$$\iff \frac{e^{\frac{2i}{h} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} (1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/h - 1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{9/4 + 2/h}} dx dy dr d\theta \quad (4.1.34)$$

Então, de (4.1.31) temos que o empareamento pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 & \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \tag{4.1.35} \\
 &= \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \widehat{K}_\beta(z_-(x, y, r, \theta), \bar{z}_+(x, y, r, \theta); w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} (1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/\hbar - 1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{9/4 + 2/\hbar}} \\
 & \quad \cdot \beta(w_-, \bar{w}_-, w_+, \bar{w}_+) dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy dr d\theta \\
 &= \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \widehat{K}_\beta(z_-(x, y, r, \theta), \bar{z}_+(x, y, r, \theta); w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
 & \quad \cdot \frac{e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} (1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/\hbar - 1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{9/4 + 2/\hbar}} \\
 & \quad \cdot \tilde{\beta}(p_-, q_-, p_+, q_+) dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy dr d\theta
 \end{aligned}$$

Agora, chamando

$$\tilde{\rho}_\hbar(x, y, r, \theta) = \frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/\hbar - 1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4 + 2/\hbar}} \tag{4.1.36}$$

obtemos as expressões abreviadas

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \widehat{K}_\beta(z_-(x, y, r, \theta), \bar{z}_+(x, y, r, \theta); w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad \cdot e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} \tilde{\rho}_\hbar(x, y, r, \theta) \frac{\beta(w_-, \bar{w}_-, w_+, \bar{w}_+)}{x^2} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy dr d\theta \\
& = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \widehat{K}_\beta(z_-(x, y, r, \theta), \bar{z}_+(x, y, r, \theta); w_-, \bar{w}_+) \cdot \\
& \quad \cdot e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)} \tilde{\rho}_\hbar(x, y, r, \theta) \frac{\tilde{\beta}(p_-, q_-, p_+, q_+)}{x^2} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dx dy dr d\theta
\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

Por outro lado, para garantir que o espaço $\widehat{\mathcal{HL}}_\beta^2(H_d^2 \times H_d^2)$ é não trivial, observe-se o seguinte:

Observação 4.1.13. Sejam $z = x + iy$ e τ a medida de volume hiperbólica, dada por:

$$d\tau(z) = \frac{1}{x^2} dx dy,$$

esta medida é natural por que é invariante por todos os automorfismos isométricos sobre H_d^2 .

Para c_α uma constante, seja $d\mu_\alpha$ denotada por

$$d\mu_\alpha(z) = c_\alpha x^\alpha dx dy.$$

Se $\alpha < -1$, não é difícil mostrar que não existem funções holomorfas, diferente de zero, sobre H_d^2 quadrado-integráveis com respeito a medida $d\mu_\alpha$, logo o conjunto $\mathcal{HL}^2(H_d^2, \mu_\alpha)$ é o espaço trivial. Caso contrario, quando $\alpha > -1$, este espaço é não trivial (para mais detalhes pode se ver [7]). ■

Fazemos então a seguinte conjectura:

Conjectura 4.1.14. *Existe pelo menos uma função positiva definida $H_d^2 \times H_d^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$, provavelmente dependendo de $\hbar$, $\beta_\hbar(w_-, \bar{w}_-, w_+, \bar{w}_+) = \tilde{\beta}_\hbar(p_-, q_-, p_+, q_+)$, para a qual*

o espaço $\widehat{\mathcal{HL}}_\beta^2(H_d^2 \times H_d^2) \equiv \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ definido pela equação (4.1.29) é um espaço de Hilbert de reprodução não vazio com núcleo de reprodução $\widehat{K}_\beta \equiv \widehat{K}_{\beta_h}$ satisfazendo a equação (4.1.30) e tal que existem as integrais abaixo,

$$\int_{TH_d^2} g(x, y) \cdot e^{-\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x)S_\theta]} \cdot \widetilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \cdot \widehat{K}_{\beta_h}(w_-, \overline{w}_+; z_-(x, y; r, \theta), \overline{z}_+(x, y; r, \theta)) \frac{1}{x^2} dx dy dr d\theta \quad (4.1.38)$$

e

$$\int_{H_d^2 \times H_d^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(w_-, \overline{w}_+) \cdot e^{\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x)S_\theta]} \cdot \widetilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \cdot \widehat{K}_{\beta_h}(z_-(x, y; r, \theta), \overline{z}_+(x, y; r, \theta); w_-, \overline{w}_+) \widetilde{\beta}_h(p_-, q_-; p_+, q_+) dp_- dq_- dp_+ dq_+ dr d\theta, \quad (4.1.39)$$

e o teorema de Fubini se aplica na integral (4.1.37), para

$$f \in \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \quad e \quad g \in \mathcal{C}_{\beta_h}(H_d^2)$$

onde $\mathcal{C}_{\beta_h}(H_d^2)$ é um subconjunto não vazio do conjunto das funções contínuas sobre H_d^2 , possivelmente dependendo de β_h .

Daí, podemos definir as aplicações integrais $T_{\beta_h}g(w_-, \overline{w}_+)$ e $S_{\beta_h}f(x, y)$, dadas pelas equações (4.1.38) e (4.1.39) respectivamente, tais que

$$\langle \widetilde{t} \otimes \widetilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \langle f, T_{\beta_h}g \rangle_{\mathcal{HL}^2(H_d^2 \times H_d^2)}, \quad (4.1.40)$$

$$= \langle S_{\beta_h}f, g \rangle_{L^2(H_d^2)}, \quad (4.1.41)$$

isto é, temos explicitamente:

$$T_{\beta_h}g(w_-, \overline{w}_+) = \int_{TH_d^2} g(x, y) \cdot e^{-\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x)S_\theta]} \cdot \widetilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \cdot \widehat{K}_{\beta_h}(w_-, \overline{w}_+; z_-(x, y; r, \theta), \overline{z}_+(x, y; r, \theta)) \frac{1}{x^2} dx dy dr d\theta \quad (4.1.42)$$

e

$$S_{\beta_h}f(x, y) = \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times T_{(x, y)}H_d^2} f(w_-, \overline{w}_+) \cdot e^{\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x)S_\theta]} \cdot \widetilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \cdot \widehat{K}_{\beta_h}(z_-(x, y; r, \theta), \overline{z}_+(x, y; r, \theta); w_-, \overline{w}_+) \widetilde{\beta}_h(p_-, q_-; p_+, q_+) dp_- dq_- dp_+ dq_+ dr d\theta, \quad (4.1.43)$$

onde $\tilde{\rho}_h$ é dada explicitamente por (4.1.36).

Agora, com um raciocínio análogo à seção 2.2, mais especificamente a equação (2.2.16), definimos uma convolução deformada sobre funções no espaço $\widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$, como segue:

$$[f_1 \otimes_{\mu_{\beta_h}} f_2](z_1, \bar{z}_3) = \int_{H_d^2} f_1(z_1, \bar{z}_2) f_2(z_2, \bar{z}_3) \mu_{\beta_h}(p_2, q_2) dp_2 dq_2, \quad (4.1.44)$$

onde $z_2 = p_2 + iq_2$ e $\mu_{\beta_h} : H_d^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ é tal que para todo par de funções $f_1, f_2 \in \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ a integral (4.1.44) existe e $f_1 \otimes_{\mu_{\beta_h}} f_2 \in \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$, isto é

$$\otimes_{\mu_{\beta_h}} : \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \times \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \rightarrow \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \quad (4.1.45)$$

Observação 4.1.15. Nestas condições, esta convolução é claramente associativa. Notamos ainda que, quando β_h tem a forma de um produto,

$$\tilde{\beta}_h(p_1, q_1; p_3, q_3) = \mu_h(p_1, q_1) \mu_h(p_3, q_3), \quad (4.1.46)$$

então uma escolha natural para a medida da convolução deformada é

$$\mu_{\beta_h} = \mu_h. \quad (4.1.47)$$

■ Então definimos:

Definição 4.1.16. Dadas as aplicações integrais T_{β_h} e S_{β_h} definidas acima por (4.1.42) e (4.1.43) então, para cada escolha de β_h tal que a Conjectura 4.1.14 seja satisfeita e cada escolha de μ_{β_h} tal que a integral (4.1.44) define uma convolução associativa $\otimes_{\mu_{\beta_h}}$ no espaço $\widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2)$, c.f. (4.1.45), definimos o produto de funções $g_1, g_2 \in C_{\beta_h}(H_d^2)$ por

$$g_1 *_{\mu_{\beta_h}} g_2 := S_{\beta_h}[T_{\beta_h} g_1 \otimes_{\mu_{\beta_h}} T_{\beta_h} g_2], \quad (4.1.48)$$

ou mais explicitamente,

$$\begin{aligned} [g_1 *_{\mu_{\beta_h}} g_2](x, y) = & \int_{TH_d^2 \times TH_d^2 \times H_d^2 \times (H_d^2 \times H_d^2) \times T_{(x,y)} H_d^2} g_1(x_1, y_1) g_2(x_2, y_2) \\ & \cdot e^{-\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r_1/x_1) S_{\theta_1}]} e^{-\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r_2/x_2) S_{\theta_2}]} e^{\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x) S_{\theta}]} \\ & \cdot \tilde{\rho}_h(x_1, y_1; r_1, \theta_1) \tilde{\rho}_h(x_2, y_2; r_2, \theta_2) \tilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \hat{K}_{\beta_h}(z_-(x, y; r, \theta), \bar{z}_+(x, y; r, \theta); w_1, \bar{w}_3) \\ & \cdot \hat{K}_{\beta_h}(w_1, \bar{w}_2; z_-(x_1, y_1; r_1, \theta_1), \bar{z}_+(x_1, y_1; r_1, \theta_1)) \hat{K}_{\beta_h}(w_2, \bar{w}_3; z_-(x_2, y_2; r_2, \theta_2), \bar{z}_+(x_2, y_2; r_2, \theta_2)) \\ & \cdot \frac{\mu_{\beta_h}(p_2, q_2) \tilde{\beta}_h(p_1, q_1; p_3, q_3)}{x_1^2 x_2^2} dx_1 dy_1 dr_1 d\theta_1 dx_2 dy_2 dr_2 d\theta_2 dp_2 dq_2 dp_1 dq_1 dp_3 dq_3 dr d\theta \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

onde $w_1 = p_1 + iq_1$, $w_2 = p_2 + iq_2$, $w_3 = p_3 + iq_3$, com a função $\tilde{\rho}_h$ dada explicitamente por (4.1.36), e onde $z_\pm(x, y, r, \theta) = x_\pm(x, y, r, \theta) + iy_\pm(x, y, r, \theta)$, com as funções $x_\pm(x, y, r, \theta)$ e $y_\pm(x, y, r, \theta)$ dadas por (4.1.5)-(4.1.6) ou (4.1.9)-(4.1.10).

É razoável supor que as escolhas para β_h e μ_{β_h} não são únicas e, desta forma, a Definição 4.1.16 acima de fato define uma família de produtos $*_{\mu_{\beta_h}}$. Porém, nem todos os membros desta família possuem todas as principais propriedades desejadas de um tal produto. De fato, comecemos com a seguinte observação:

Observação 4.1.17. Como notado nos casos do produto de Weyl e de Bieliavsky, a associatividade da convolução $\otimes_{\mu_{\beta_h}}$ não é suficiente para garantir a associatividade do produto $*_{\mu_{\beta_h}}$. É preciso também que a aplicação integral T_{β_h} seja a inversa à esquerda de S_{β_h} . Além disso, para que o produto iterado faça sentido, é necessário que o produto $*_{\mu_{\beta_h}}$ seja fechado em algum subconjunto $C_{\beta_h}(H_d^2)$ das funções contínuas sobre H_d^2 . ■

Por conta disso, fazemos mais uma conjectura:

Conjectura 4.1.18. *Existe pelo menos uma escolha para β_h e μ_{β_h} tal que a Conjectura 4.1.14 e as condições para (4.1.45) são satisfeitas, o produto $*_{\mu_{\beta_h}}$ é fechado em algum subconjunto $C_{\beta_h}(H_d^2)$ das funções contínuas sobre H_d^2 e, ainda,*

$$T_{\beta_h} \circ S_{\beta_h} = Id : \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \rightarrow \widehat{\mathcal{HL}}_{\beta_h}^2(H_d^2 \times H_d^2) \quad (4.1.50)$$

Esta nova conjectura já limita bastante as opções de escolha para β_h e μ_{β_h} mas, mesmo assim, ainda não garante todas as propriedades mais importantes para $*_{\mu_{\beta_h}}$, pois consideremos a seguinte observação:

Observação 4.1.19. No caso de $M = \mathbb{R}^2$ a função peso $e^{-\frac{1}{2h}(|z_1|^2 + |z_2|^2)}$ parece reduzir bastante o grupo de simetria (para o grupo $O(2)$), mas o produto final não “vê” tal redução e é equivariante pelo grupo simplético afim com sua ação canônica em $\mathbb{R}^2$. ■

Como visto na Observação 4.1.13, não é possível escolher uma função peso β_h que defina uma medida invariante por $SL(2, \mathbb{R})$, mas, assim como no caso de $\mathbb{R}^2$, queremos que o produto final seja equivariante por todo o grupo de isometria.

Assim, fazemos nossa terceira conjectura:

Conjectura 4.1.20. *Existe pelo menos uma escolha para β_h e μ_{β_h} tal que as Conjecturas 4.1.14 e 4.1.18 são satisfeitas e o produto $*_{\mu_{\beta_h}}$ é equivariante por $SL(2, \mathbb{R})$ via ação (4.1.2) em H_d^2 .*

Agora, já não é tão fácil encontrar um ou mais membros da família de produtos dada pela Definição 4.1.16 que satisfaçam a Conjectura 4.1.20 acima. Assim, é esta questão de existência e unicidade que deve ser prioritariamente atacada.

4.1.1 Um caso particular mais explícito

Para maior esclarecimento das questões em aberto, vamos fazer uma escolha específica e simples para β_h . Consideremos o espaço:

$$\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2) = \left\{ f : H_d^2 \times H_d^2 \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0 \quad e \quad \int_{H_d^2 \times H_d^2} |f(z_1, \bar{z}_2)|^2 x_1^\alpha x_2^\alpha dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty, \right\} \quad (4.1.51)$$

onde $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $\alpha > -1$.

Observação 4.1.21. No que se segue, em vista das expressões obtidas anteriormente, vamos considerar que α pode depender de $\hbar$, ou seja

$$\alpha = \alpha_h . \quad (4.1.52)$$

Portanto, este espaço é definido pela escolha

$$\beta_h(x_1, y_1; x_2, y_2) = \mu_\alpha(x_1, y_1) \mu_\alpha(x_2, y_2) \quad (4.1.53)$$

onde

$$\mu_\alpha(x, y) = \mu_{\alpha_h}(x, y) = x^\alpha , \quad \alpha = \alpha_h > -1 . \quad (4.1.54)$$

Para não carregar demasiadamente a notação, vamos evitar de escrever sempre α_h preferindo a notação mais simples α nas equações, mas lembrando que vale (4.1.52).

Notamos ainda, em particular, que β é definida como um produto. ■

Daí, como consequência do Teorema 1.4.7, o núcleo de reprodução das funções holomorfas nas variáveis $(z_-, \bar{z}_+)$ é dado por

$$K_\alpha(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) = \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_- + \bar{w}_-)(\bar{z}_+ + w_+)]^{\alpha+2}} , \quad (4.1.55)$$

que também tem a estrutura de produto:

$$K_\alpha(z_-, \bar{z}_+; w_-, \bar{w}_+) = k_\alpha(z_-; w_-) k_\alpha(\bar{z}_+; \bar{w}_+) \quad (4.1.56)$$

onde

$$k_\alpha(z; w) = \frac{2^\alpha (\alpha + 2)}{(z + \bar{w})^{\alpha+2}} . \quad (4.1.57)$$

Observação 4.1.22. A medida $\mu_\alpha(x, y)dxdy$ define o (sub-)espaço de Hilbert de reprodução $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2)$ cujo núcleo de reprodução é dado por k_α . ■

Temos então de (4.1.55) que

$$f(z_-, \bar{z}_+) = \int_{H_d^2 \times H_d^2} \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_- + \bar{w}_-).(\bar{z}_+ + w_+)]^{\alpha+2}} f(w_-, \bar{w}_+) p_-^\alpha p_+^\alpha dp_- dq_- dp_+ dq_+ , \quad (4.1.58)$$

onde $w_- = p_- + iq_-$, $w_+ = p_+ + iq_+$ e $\alpha > -1$.

Desta maneira, substituindo as equações (4.1.53)-(4.1.56) na equação (4.1.37), temos que o empareamento toma a forma:

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\ &= \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_-(x, y, r, \theta) + \bar{w}_-).(\bar{z}_+(x, y, r, \theta) + w_+)]^{\alpha+2}} \cdot \\ & \cdot e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x)S_\theta)} \tilde{\rho}_h(x, y, r, \theta) \frac{p_-^\alpha p_+^\alpha}{x^2} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dxdydrd\theta \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

ou mais explicitamente, usando (4.1.36), obtemos o seguinte.

Teorema 4.1.23. *Sejam H_d^2 o modelo do plano hiperbólico dado pelo semiplano direito complexo, Φ_4 a aplicação definida por (4.1.4), para coordenadas $(x, y; r, \theta) \in TH_d^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H_d^2 \times H_d^2$, e consideremos as polarizações:*

$$P = \langle \partial r, \partial \theta \rangle, \quad F = \langle \partial \bar{z}_-, \partial z_+ \rangle, \quad \Phi_*(P) = \tilde{P} \text{ e } (\Phi^{-1})_*(F) = \tilde{F}.$$

Então, se $\tilde{t}$ e s são as seções polarizadas adaptadas a $\tilde{P}$ e F respectivamente, v' e $\tilde{v}$ como em (4.1.17) e (4.1.22) respectivamente, temos que o empareamento é dado por

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{t} \otimes \tilde{v}, s \otimes v' \rangle_{pr} = \\ &= \iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times TH_d^2} \overline{g(x, y)} f(w_-, \bar{w}_+) \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_-(x, y, r, \theta) + \bar{w}_-).(\bar{z}_+(x, y, r, \theta) + w_+)]^{\alpha+2}} \cdot \\ & \cdot e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x)S_\theta)} \frac{(1 + \sinh^2(r/x)S_\theta^2)^{1/h-1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4+2/h}} \\ & \cdot \frac{p_-^\alpha p_+^\alpha}{x^2} dp_- dq_- dp_+ dq_+ dxdydrd\theta \end{aligned} \quad (4.1.60)$$

onde $w_- = p_- + iq_-$, $w_+ = p_+ + iq_+$, $z_\pm(x, y, r, \theta) = x_\pm(x, y, r, \theta) + iy_\pm(x, y, r, \theta)$, com $x_\pm(x, y, r, \theta)$ e $y_\pm(x, y, r, \theta)$ dadas por (4.1.9)-(4.1.10), para g uma função de suporte compacto e $f \in \mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$, de acordo com (4.1.51).

Agora, a Conjectura 4.1.14 significa assumir a existência de algum $\alpha = \alpha_h > -1$ tal que as integrais abaixo existem, o que nos permite definir as aplicações integrais

$$T_\alpha g(w_-, \bar{w}_+) = \quad (4.1.61)$$

$$\int_{TH_d^2} g(x, y) \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha} e^{-\frac{2i}{h} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)}}{[(\bar{z}_-(x, y, r, \theta) + w_-) \cdot (z_+(x, y, r, \theta) + \bar{w}_+)]^{\alpha+2}} \cdot \frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/h-1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4+2/h}} \frac{1}{x^2} dx dy dr d\theta$$

e

$$S_\alpha f(x, y) = \quad (4.1.62)$$

$$\iint_{(H_d^2 \times H_d^2) \times T_{(x,y)} H_d^2} f(w_-, \bar{w}_+) \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha} e^{\frac{2i}{h} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)}}{[(z_-(x, y, r, \theta) + \bar{w}_-) \cdot (\bar{z}_+(x, y, r, \theta) + w_+)]^{\alpha+2}} \cdot \frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/h-1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4+2/h}} p_-^\alpha p_+^\alpha dp_- dq_- dp_+ dq_+ dr d\theta$$

Neste caso, definimos a convolução deformada como

$$\begin{aligned} [f_1 \otimes_\alpha f_2](w_1, \bar{w}_3) &= \int_{H_d^2} f_1(w_1, \bar{w}_2) \cdot f_2(w_2, \bar{w}_3) \mu_\alpha(p_2, q_2) dp_2 dq_2 \\ &= \int_{H_d^2} f_1(w_1, \bar{w}_2) \cdot f_2(w_2, \bar{w}_3) p_2^\alpha dp_2 dq_2 \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

de onde obtemos o produto

$$g_1 *_\alpha g_2 = S_\alpha [T_\alpha g_1 \otimes_\alpha T_\alpha g_2]$$

dado mais explicitamente por

$$\begin{aligned}
 & [g_1 *_\alpha g_2](x, y) = \\
 & = (\alpha + 2)^6 2^{6\alpha-3/4} \int_{TH_d^2 \times TH_d^2 \times H_d^2 \times (H_d^2 \times H_d^2) \times T_{(x,y)} H_d^2} g_1(x_1, y_1) g_2(x_2, y_2) \\
 & \cdot \exp \left[\frac{2i}{\hbar} \left(\arctan(\sinh(r/x) S_\theta) - \arctan(\sinh(r_1/x_1) S_{\theta_1}) - \arctan(\sinh(r_2/x_2) S_{\theta_2}) \right) \right] \\
 & \cdot \left[\frac{1}{(xx_1x_2)^{1/4+2/\hbar}} \right] \left[\frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/\hbar-1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{[(z_-(x, y, r, \theta) + \bar{w}_1) \cdot (\bar{z}_+(x, y, r, \theta) + w_3)]^{\alpha+2}} \right] \\
 & \cdot \left[\frac{(1 + \sinh^2(r_1/x_1) S_{\theta_1}^2)^{1/\hbar-1/2} \sqrt{\sinh(r_1/x_1) \cosh(r_1/x_1)}}{[(\bar{z}_-(x_1, y_1, r_1, \theta_1) + w_1) \cdot (z_+(x_1, y_1, r_1, \theta_1) + \bar{w}_2)]^{\alpha+2}} \right] \\
 & \cdot \left[\frac{(1 + \sinh^2(r_2/x_2) S_{\theta_2}^2)^{1/\hbar-1/2} \sqrt{\sinh(r_2/x_2) \cosh(r_2/x_2)}}{[(\bar{z}_-(x_2, y_2, r_2, \theta_2) + w_2) \cdot (z_+(x_2, y_2, r_2, \theta_2) + \bar{w}_3)]^{\alpha+2}} \right] \\
 & \cdot \left[\frac{(p_1 p_2 p_3)^\alpha}{(x_1 x_2)^2} \right] dx_1 dy_1 dr_1 d\theta_1 dx_2 dy_2 dr_2 d\theta_2 dp_2 dq_2 dp_1 dq_1 dp_3 dq_3 dr d\theta
 \end{aligned} \tag{4.1.64}$$

com $w_j = p_j + iq_j$ e $z_\pm(x, y, r, \theta) = x_\pm(x, y, r, \theta) + iy_\pm(x, y, r, \theta)$ dado por (4.1.9)-(4.1.10).

Para conseguirmos olhar a Conjectura 4.1.18 de forma mais clara, vamos considerar uma conjectura alternativa, neste caso:

Conjectura 4.1.24. *Existe pelo menos um valor para $\alpha = \alpha_\hbar$ tal que a Conjectura 4.1.14 é satisfeita e a integral abaixo existe, de onde definimos*

$$\begin{aligned}
 & H_\alpha(x, y; w_-, \bar{w}_+) = \\
 & = \int_{T_{(x,y)} H_d^2} \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha} e^{\frac{2i}{\hbar} \arctan(\sinh(r/x) S_\theta)}}{[(z_-(x, y, r, \theta) + \bar{w}_-) \cdot (\bar{z}_+(x, y, r, \theta) + w_+)]^{\alpha+2}} \cdot \\
 & \cdot \frac{(1 + \sinh^2(r/x) S_\theta^2)^{1/\hbar-1/2} \sqrt{\sinh(r/x) \cosh(r/x)}}{2^{1/4} x^{1/4+2/\hbar}} dr d\theta,
 \end{aligned} \tag{4.1.65}$$

e que ainda satatisfaça a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 & \int_{H_d^2} H_\alpha(x, y; w_-, \bar{w}_+) \overline{H_\alpha(x, y; w_1, \bar{w}_2)} \frac{1}{x^2} dx dy = \\
 & = K_\alpha(w_1, \bar{w}_2; w_-, \bar{w}_+) = \frac{(\alpha + 2)^2 2^{2\alpha}}{[(w_1 + \bar{w}_-) \cdot (\bar{w}_2 + w_+)]^{\alpha+2}}
 \end{aligned} \tag{4.1.66}$$

Observação 4.1.25. Esta Conjectura 4.1.24 é mais forte que a Conjectura 4.1.18, implicando nessa, e pode ser feita também no caso de uma escolha para β_h mais geral. Para tais casos mais gerais, esta conjectura significa a existência de

$$H_{\beta_h}(x, y; w_-, \bar{w}_+) = \int_{T_{(x,y)}H_d^2} \cdot e^{\frac{2i}{h} \arctan[\sinh(r/x)S_\theta]} \cdot \tilde{\rho}_h(x, y; r, \theta) \cdot \hat{K}_{\beta_h}(z_-(x, y; r, \theta), \bar{z}_+(x, y; r, \theta); w_-, \bar{w}_+) dr d\theta, \quad (4.1.67)$$

onde $\tilde{\rho}_h$ é dada por (4.1.36), satisfazendo

$$\int_{H_d^2} H_{\beta_h}(x, y; w_-, \bar{w}_+) \overline{H_{\beta_h}(x, y; w_1, \bar{w}_2)} \frac{1}{x^2} dx dy = K_{\beta_h}(w_1, \bar{w}_2; w_-, \bar{w}_+) . \quad (4.1.68)$$

■

Então, assumindo esta Conjectura 4.1.24 mais forte, podemos aplicar Fubini nas equações (4.1.61)-(4.1.62) e re-escrevê-las como

$$T_\alpha g(w_-, \bar{w}_+) = \int_{H_d^2} g(x, y) \overline{H_\alpha(x, y; w_-, \bar{w}_+)} \frac{1}{x^2} dx dy \quad (4.1.69)$$

$$S_\alpha f(x, y) = \int_{H_d^2 \times H_d^2} f(w_-, \bar{w}_+) H_\alpha(x, y; w_-, \bar{w}_+) p_-^\alpha p_+^\alpha dp_- dq_- dp_+ dq_+ \quad (4.1.70)$$

Observação 4.1.26. No caso de uma escolha mais geral para β_h as equações (4.1.69)-(4.1.70) têm a forma

$$T_{\beta_h} g(w_-, \bar{w}_+) = \int_{H_d^2} g(x, y) \overline{H_{\beta_h}(x, y; w_-, \bar{w}_+)} \frac{1}{x^2} dx dy \quad (4.1.71)$$

$$S_{\beta_h} f(x, y) = \int_{H_d^2 \times H_d^2} f(w_-, \bar{w}_+) H_{\beta_h}(x, y; w_-, \bar{w}_+) \tilde{\beta}_h(p_-, q_-, p_+, q_+) dp_- dq_- dp_+ dq_+ \quad (4.1.72)$$

■

As equações (4.1.69)-(4.1.70) acima nos permitem interpretar $H_\alpha(x, y; w_-, \bar{w}_+)$ como um “núcleo integral de transição” entre o espaço $\mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$ e o espaço de funções contínuas de suporte compacto em H_d^2 , ou algum subespaço apropriado $\mathcal{C}_\alpha(H_d^2)$ das funções contínuas sobre H_d^2 , sendo, neste caso, $\overline{H_\alpha}$ o núcleo inverso de H_α .

Proposição 4.1.27. Nas condições da Conjectura 4.1.24 acima, temos

$$T_\alpha \circ S_\alpha = Id : \mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2) \rightarrow \mathcal{H}L_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$$

e o produto $*_\alpha$ definido por (4.1.64) é associativo.

Prova: (fica a cargo do leitor)

■

Observação 4.1.28. Para o caso mais geral, dado pelas Observações 4.1.25 e 4.1.26, obtem-se o resultado análogo ao da Proposição 4.1.27 quando β_h tem uma estrutura de produto e a relação entre β_h e a medida de convolução μ_{β_h} é dada pelas equações (4.1.46)-(4.1.47). ■

Apêndice A

Neste apêndice, obtemos o Teorema 1.4.7.

Mas, para fazer isto, vamos primeiro a calcular o núcleo de reprodução nos casos que U é o disco unitário de Poincare, $\mathbb{D}$, e o semiplano superior complexo, H_s^2 .

De fato, consideremos os espaços de Hilbert:

$$\mathcal{H}L_\alpha^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}); \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 (1 - |w|^2)^\alpha dudv < \infty \right\}$$

$$\mathcal{H}L_\alpha^2(H_s^2) = \left\{ f \in \mathcal{H}(H_s^2); \int_{H_s^2} |f(z)|^2 (y)^\alpha dx dy < \infty \right\},$$

onde $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ e $\mathcal{H}(H_s^2)$ denotam o espaço das funções holomorfas nos respectivos conjuntos, $w = u + iv \in \mathbb{D}$, $z = x + iy \in H_s^2$ e $\alpha > -1$.

Proposição 4.1.29. *Sejam $\mathbb{D}$ o disco de Poincare e $\mathcal{H}L_\alpha^2(\mathbb{D})$ o espaço de Hilbert acima, então $\left\{ \sqrt{\frac{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}} w^m \right\}_{m=0}^\infty$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}L_\alpha^2(\mathbb{D})$.*

Prova :

Vamos primeiro a calcular o produto interno de elementos do conjunto $\{w^n\}_n^\infty$. De fato,

$$\langle w^m, w^n \rangle = \int_{\mathbb{D}} w^m \overline{w}^n (1 - |w|^2)^\alpha dudv,$$

suponha que $w = r.e^{i\theta}$, logo

$$\langle w^m, w^n \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{m+n} e^{i(m-n)\theta} (1 - r^2)^\alpha r dr d\theta$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ 2\pi \int_0^1 r^{2m+1}(1-r^2)^\alpha dr, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Agora substituindo $u = r^2$ temos que $\langle w^m, w^m \rangle$ é

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 r^{2m+1}(1-r^2)^\alpha dr &= \int_0^1 u^m(1-u)^\alpha du \\ &= B(m+1, \alpha+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha+2)} \\ &= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Então,

$$\langle w^m, w^n \rangle = \pi \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}.$$

Por outro lado, se $F \in \mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D})$ podemos expandir F em series de potências

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Além disso, se

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n = 0,$$

uniformemente para todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Então, se $a < 1$, $r \leq a$ e $w = re^{i\theta}$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} (1-r^2)^\alpha r dr d\theta &= \\ \lim_{a \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^a \int_0^{2\pi} r^{(m+n)} e^{i(n-m)\theta} (1-r^2)^\alpha r dr d\theta, \end{aligned}$$

mas, como já vimos, a integral em θ é diferente de zero só para $n = m$, logo

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^a \int_0^{2\pi} r^{(m+n)} e^{i(n-m)\theta} (1-r^2)^\alpha r dr d\theta &= 2\pi c_m \int_0^1 r^{(2m+1)} (1-r^2)^\alpha dr \\ &= 2\pi c_m \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)} \end{aligned}$$

de onde, como

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_0^a \int_0^{2\pi} r^m e^{-im\theta} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} (1-r^2)^\alpha r dr d\theta = \langle w^m, \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \rangle = 0$$

temos que $c_m = 0$ para todo m .

Assim nossa base ortonormal do espaço $\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D})$ é dada por:

$$\left\{ \sqrt{\frac{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}} w^m \right\}_{m=0}^{\infty}.$$

■

Partindo do resultado acima, vamos construir uma base ortonormal para $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2)$, onde H_d^2 é o semiplano complexo direito.

Proposição 4.1.30. *Seja H_d^2 o semiplano direito complexo, então uma base ortonormal para $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2)$ é dada pela seguinte expressão*

$$\left\{ \sqrt{\frac{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^m \left(\frac{2^{(\alpha+1)} \cdot (-i)^{\alpha+2}}{(z+1)^{\alpha+2}} \right) \right\}_{m=0}^{\infty}$$

Prova :

De fato, para H_s^2 e $\mathbb{D}$ existe uma isometria dada por:

$$\varphi : H_s^2 \longrightarrow \mathbb{D}; z \mapsto w = \frac{z-i}{z+i}.$$

Daí, podemos definir uma aplicação

$$T_\alpha : \mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{HL}_\alpha^2(H_s^2),$$

dada por $T_\alpha f(z) = \frac{2^{\alpha+1}}{(z+i)^{\alpha+2}} f(\varphi(z))$, onde $f \in \mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D})$. Além disso,

Se $z \in H_s^2$ da aplicação acima temos que $w = \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{D}$, logo

$$\begin{aligned} 1 - |w|^2 &= 1 - \frac{(z-i) \cdot (\bar{z}+i)}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} = \frac{(z+i) \cdot (\bar{z}-i) - (z-i) \cdot (\bar{z}+i)}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} \\ &= \frac{z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 - z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} = \frac{-2iz - 2i\bar{z}}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} \\ &= \frac{-2i(z - \bar{z})}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} = \frac{4iy}{(z+i) \cdot (\bar{z}-i)} \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} w = \frac{z-i}{z+i} &\Rightarrow dw = \frac{(z+i) - (z-i)}{(z+i)^2} dz = \frac{2i}{(z+i)^2} dz \\ \bar{w} = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} &\Rightarrow d\bar{w} = \frac{\bar{z}-i - (\bar{z}+i)}{(\bar{z}-i)^2} d\bar{z} = \frac{-2i}{(\bar{z}-i)^2} d\bar{z} \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \frac{i}{2} dw \wedge d\bar{w} = 2i \frac{1}{(z+i)^2(\bar{z}-i)^2} (dz \wedge d\bar{z}) \\ &= \frac{4}{(z+i)^2(\bar{z}-i)^2} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D})} &= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^2 (1-|w|^2)^\alpha du \wedge dv \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\mathbb{D})} |f(\varphi(z))|^2 \left(\frac{4iy}{(z+i)(\bar{z}-i)} \right)^\alpha \frac{4}{|z+i|^4} dx \wedge dy \\ &= \int_{H_s^2} \left| \frac{2^{(\alpha+1)} f(\varphi(z))}{(z+i)^{(\alpha+2)}} \right|^2 y^\alpha dx dy. \end{aligned}$$

Portanto a aplicação T_α acima está bem definida e é uma isometria. Assim, da proposição 4.1.29

$$\left\{ \sqrt{\frac{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}} \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^m \left(\frac{2^{(\alpha+1)}}{(z+i)^{\alpha+2}} \right) \right\}_{m=0}^\infty.$$

é uma base ortonormal de $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_s^2)$.

Da mesma forma, se H_d^2 denota o semiplano direito e

$$\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2) = \left\{ f \in \mathcal{H}(H_d^2); \int_{H_d^2} |f(z)|^2(x)^\alpha dx dy < \infty \right\},$$

então, como

$$\psi : H_d^2 \longrightarrow H_s^2; \psi(z) = iz$$

é uma isometria

$$R : \mathcal{HL}_\alpha^2(H_s^2) : \longrightarrow \mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2); \quad R(f)(z) = f(\psi(z))$$

define em forma análoga ao caso anterior, da função φ uma isometria nesses espaços.

De onde,

$$\left\{ \sqrt{\frac{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}} \left(\frac{(z-1)}{(z+1)} \right)^m \left(\frac{2^{(\alpha+1)}(-i)^{\alpha+2}}{(z+1)^{\alpha+2}} \right) \right\}_{m=0}^{\infty}.$$

é uma base ortonormal para $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2)$. ■

Agora, da definição 1.4.1 podemos considerar os seguintes espaços de Hilbert:

$$\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2) = \left\{ f \in \mathcal{H}(H_d^2 \times H_d^2); \int \int_{H_d^2 \times H_d^2} |f(z_1, z_2)|^2 x_1^\alpha x_2^\alpha dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty \right\}.$$

e

$$\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}); \int \int_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}} |f(w_1, w_2)|^2 (1-|w_1|^2)^\alpha (1-|w_2|^2)^\alpha du_1 dv_1 du_2 dv_2 < \infty \right\}.$$

Nosso interesse é encontrar o núcleo de reprodução do espaço $\mathcal{HL}_\alpha^2(H_d^2 \times H_d^2)$ definido acima, para isto mostremos os seguintes resultados.

Lema 4.1.31. *Seja $\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ como acima, então*

$$\left\{ \frac{(\alpha+1)}{\pi\Gamma(\alpha+2)} \sqrt{\frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}} w_1^n w_2^m \right\}_{n,m=0}^{\infty}.$$

é uma base ortonormal para $\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$

Prova :

Em forma análoga a demonstração da proposição 4.1.29, vamos construir uma base ortonormal de $\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ partindo do conjunto $\{w^i w^j\}_{i,j=0}^{\infty}$

De fato,

$$\langle w_1^t w_2^s, w_1^n w_2^m \rangle = \iint_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}} w_1^t w_2^s \overline{w_1^n} \overline{w_2^m} (1 - |w_1|^2)^\alpha (1 - |w_2|^2)^\alpha du_1 dv_1 du_2 dv_2,$$

suponhamos que $w_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1}$ e $w_2 = r_2 \cdot e^{i\theta_2}$, logo

$$\langle w_1^t w_2^s, w_1^n w_2^m \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r_1^{t+n} e^{i(t-n)\theta_1} r_2^{s+m} e^{i(s-m)\theta_2} (1-r_1^2)^\alpha (1-r_2^2)^\alpha r_1 r_2 dr_1 d\theta_1 dr_2 d\theta_2$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } t \neq n \text{ ou } s \neq m; \\ 4\pi^2 \int_0^1 \int_0^1 r_1^{2n+1} r_2^{2m+1} (1-r_1^2)^\alpha (1-r_2^2)^\alpha dr_1 dr_2, & \text{se } t = n \text{ e } s = m. \end{cases}$$

Assim, para $s = n$ e $t = m$, se $u_1 = r_1^2$ e $u_2 = r_2^2$ temos que

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 \int_0^1 r_1^{2n+1} r_2^{2m+1} (1-r_1^2)^\alpha (1-r_2^2)^\alpha dr_1 dr_2 &= \int_0^1 \int_0^1 u_1^n u_2^m (1-u_1)^\alpha (1-u_2)^\alpha du_1 du_2 \\ &= B(n+1, \alpha, \alpha+1) \cdot B(m+1, \alpha+1) = \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(m+\alpha+2)} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)} \end{aligned}$$

logo,

$$\langle w_1^n w_2^m, w_1^n w_2^m \rangle = \pi^2 \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+2)} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)}{(\alpha+1)\Gamma(m+\alpha+2)}.$$

De onde,

$$\left\{ \frac{(\alpha+1)}{\pi\Gamma(\alpha+2)} \sqrt{\frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}} w_1^n w_2^m \right\}_{n,m=0}^\infty.$$

é uma base ortonormal do espaço $\mathcal{HL}_2^\alpha(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$. ■

Observação 4.1.32. Do teorema 1.4.4 e do lema anterior temos que o núcleo de reprodução do espaço $\mathcal{HL}_\alpha^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ é dado como segue:

$$K(z_1, z_2; w_1, w_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^2}{\pi^2(\Gamma(\alpha+2))^2} \cdot \frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} z_1^n z_2^m \overline{w_1}^n \overline{w_2}^m \\
&= \frac{(\alpha+1)^2}{\pi^2} \left[\sum_n^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)} z_1^n \overline{w_1}^n \right] \cdot \left[\sum_m^{\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)} z_2^m \overline{w_2}^m \right] \\
&= \frac{(\alpha+1)^2}{\pi^2[(1-z_1\overline{w_1}).(1-z_2\overline{w_2})]^{\alpha+2}}
\end{aligned}$$

Teorema 4.1.33. *Seja $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ como definido acima, então seu núcleo de reprodução é dado pela seguinte expressão:*

$$K(z_1, z_2; w_1, w_2) = \frac{(\alpha+2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_1 + \overline{w_1}).(z_2 + \overline{w_2})]^{\alpha+2}}$$

Prova :

Das isometrias φ e ψ podemos definir as isometrias

$$\Upsilon : H_s^2 \times H_s^2 \longrightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{D}, \quad \Upsilon(z_1, z_2) = (\varphi(z_1), \varphi(z_2)),$$

e

$$\Psi : H_d^2 \times H_d^2 \longrightarrow H_s^2 \times H_s^2; \quad \Psi(z_1, z_2) = (\psi(z_1), \psi(z_2)).$$

Daí, em forma análoga ao caso dos espaços $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2)$, $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_s^2)$ e $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(\mathbb{D})$ temos que as plicações

$$\mathbf{T}_{\alpha} : \mathcal{HL}_{\alpha}^2(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_s^2 \times H_s^2),$$

dada por

$$\mathbf{T}_{\alpha}(F)(z_1, z_2) = \frac{2^{2(\alpha+1)}}{[(z_1 + i)(z_2 + i)]^{\alpha+2}} F(\Upsilon(z_1, z_2)),$$

e

$$\mathbf{R} : \mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2 \times H_d^2) \longrightarrow \mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_s^2 \times H_s^2)$$

dada por

$$\mathbf{R}(F)(z_1, z_2) = F(\Psi(z_1, z_2))$$

definem umas isometrias nos espaços correspondentes.

De onde,

$$\left\{ \frac{(\alpha+1)}{\pi\Gamma(\alpha+2)} \sqrt{\frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}} \left(\frac{z_1-i}{z_1+i} \right)^n \left(\frac{z_2-i}{z_2+i} \right)^m \frac{2^{2(\alpha+1)}}{[(z_1+i)(z_2+i)]^{\alpha+2}} \right\}_{n,m=0}^{\infty}.$$

é uma base ortonormal do espaço $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_s^2 \times H_s^2)$.

Portanto,

$$\left\{ \frac{(\alpha+1)}{\pi\Gamma(\alpha+2)} \sqrt{\frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}} \left(\frac{z_1-1}{z_1+1} \right)^n \left(\frac{z_2-1}{z_2+1} \right)^m \frac{2^{2(\alpha+1)} i^{2(\alpha+2)}}{[(z_1+1)(z_2+1)]^{\alpha+2}} \right\}_{n,m=0}^{\infty}.$$

é uma base ortonormal do espaço $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2 \times H_d^2)$.

Vamos agora calcular o núcleo de reprodução de $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ usando a base acima.

De fato, do teorema 1.4.4, temos que o núcleo de reprodução acima é dado por:

$$\begin{aligned} K(z_1, z_2; w_1, w_2) &= \\ &= \sum_{n,m}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^2}{\pi^2(\Gamma(\alpha+2))^2} \frac{\Gamma(m+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)} \left(\frac{z_1-1}{z_1+1} \right)^n \left(\frac{z_2-1}{z_2+1} \right)^m \\ &\quad \cdot \frac{2^{2(\alpha+1)} i^{2(\alpha+2)}}{[(z_1+1)(z_2+1)]^{\alpha+2}} \left(\frac{\bar{w}_1-1}{\bar{w}_1+1} \right)^n \left(\frac{\bar{w}_2-1}{\bar{w}_2+1} \right)^m \\ &= \frac{2^{2(\alpha+1)} (-i)^{2(\alpha+2)}}{[(\bar{w}_1+1)(\bar{w}_2+1)]^{\alpha+2}} \frac{(\alpha+1)^2 2^{4(\alpha+1)}}{\pi^2} \sum_n^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{(z_1-1) \cdot (\bar{w}_1-1)}{(z_1+1) \cdot (\bar{w}_1+1)} \right]^n \\ &\quad \cdot \sum_m^{\infty} \frac{\Gamma(m+\alpha+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha+2)} \left[\frac{(z_2-1) \cdot (\bar{w}_2-1)}{(z_2+1) \cdot (\bar{w}_2+1)} \right]^m \cdot \frac{1}{[(z_1+1)(z_2+1)]^{\alpha+2}} \cdot \frac{1}{[(\bar{w}_1+1)(\bar{w}_2+1)]^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+1)^2 2^{4(\alpha+1)}}{\pi^2} \frac{1}{[(z_1+1)(z_2+1)]^{\alpha+2}} \cdot \frac{1}{[(\bar{w}_1+1)(\bar{w}_2+1)]^{\alpha+2}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{(z_2-1) \cdot (\bar{w}_2-1)}{(z_2+1) \cdot (\bar{w}_2+1)} \right]^{\alpha+2}} \frac{1}{\left[1 - \frac{(z_1-1) \cdot (\bar{w}_1-1)}{(z_1+1) \cdot (\bar{w}_1+1)} \right]^{\alpha+2}} \\ &= \frac{(\alpha+1)^2 2^{4(\alpha+1)}}{\pi^2 [2(z_1+\bar{w}_1)]^{\alpha+2} [2(z_2+\bar{w}_2)]^{\alpha+2}} = \frac{(\alpha+2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_1+\bar{w}_1) \cdot (z_2+\bar{w}_2)]^{\alpha+2}}. \end{aligned}$$

Portanto o núcleo de Reprodução do espaço $\mathcal{HL}_{\alpha}^2(H_d^2 \times H_d^2)$ é dado por

$$K(z_1, z_2; w_1, w_2) = \frac{(\alpha+2)^2 2^{2\alpha}}{[(z_1+\bar{w}_1) \cdot (z_2+\bar{w}_2)]^{\alpha+2}} \blacksquare \quad (4.1.73)$$

Appendice B

Para calcular a seguinte integral

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)} \int_{\mathbb{R}^{10}} g_1(x_4, y_4) \cdot g_2(x_5, y_5) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_4^2+y_4^2)} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}(x_5^2+y_5^2)} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[x_4(w_1+\bar{w}_2)-iy_4(w_1-\bar{w}_2)]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}w_1\bar{w}_2} \\
& e^{\frac{1}{\hbar}[x_5(w_2+\bar{w}_3)-iy_5(w_2-\bar{w}_3)]} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}w_2\bar{w}_3} \cdot e^{\frac{1}{\hbar}[\bar{w}_1(w_1+w_3)+iy(\bar{w}_1+w_3)+iy(\bar{w}_1-w_3)]} \cdot \\
& \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}\bar{w}_1w_3} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}(\bar{w}_1w_1+\bar{w}_3w_3+\bar{w}_2w_2)} dx_4 dy_4 dx_5 dy_5 dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 dx_3 dy_3, \quad (4.1.74)
\end{aligned}$$

vamos primeiro a expressar em forma mais detalhada os elementos da exponencial como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}x_4(w_1+\bar{w}_2) &= \frac{1}{\hbar}(x_1+iy_1+x_2-iy_2) = \frac{1}{\hbar}x_4x_1 + \frac{1}{\hbar}x_4y_1i + \frac{1}{\hbar}x_4x_2 - \frac{1}{\hbar}x_4y_2i \\
-\frac{i}{\hbar}y_4(w_1-\bar{w}_2) &= -\frac{i}{\hbar}y_4(x_1+iy_1-x_2+iy_2) = -\frac{1}{\hbar}y_4x_1i + \frac{1}{\hbar}y_4y_1 + \frac{1}{\hbar}y_4x_2i + \frac{1}{\hbar}y_4y_2 \\
-\frac{1}{2\hbar}w_1\bar{w}_2 &= -\frac{1}{2\hbar}(x_1+iy_1) \cdot (x_2-iy_2) = -\frac{1}{2\hbar}x_1x_2 + \frac{1}{2\hbar}x_1y_2i - \frac{1}{2\hbar}y_1x_2i - \frac{1}{2\hbar}y_1y_2 \\
\frac{1}{\hbar}x_5(w_2+\bar{w}_3) &= \frac{1}{\hbar}x_5(x_2+iy_2+x_3-iy_3) = \frac{1}{\hbar}x_5x_2 + \frac{1}{\hbar}x_5y_2i + \frac{1}{\hbar}x_5x_3 - \frac{1}{\hbar}x_5y_3i \\
-\frac{i}{\hbar}y_5(w_2-\bar{w}_3) &= -\frac{i}{\hbar}y_5(x_2+iy_2-x_3+iy_3) = -\frac{1}{\hbar}y_5x_2i + \frac{1}{\hbar}y_5y_2 + \frac{1}{\hbar}y_5x_3i + \frac{1}{\hbar}y_5y_3 \\
-\frac{1}{2\hbar}w_2\bar{w}_3 &= -\frac{1}{2\hbar}(x_2+iy_2) \cdot (x_3-iy_3) = -\frac{1}{2\hbar}x_2x_3 + \frac{1}{2\hbar}x_2y_3i - \frac{1}{2\hbar}y_2x_3i - \frac{1}{2\hbar}y_2y_3 \\
\frac{1}{\hbar}x(\bar{w}_1+w_3) &= \frac{1}{\hbar}x(x_1-iy_1+x_3+iy_3) = \frac{1}{\hbar}xx_1 - \frac{1}{\hbar}xy_1i + \frac{1}{\hbar}xx_3 + \frac{1}{\hbar}xy_3i \\
\frac{i}{\hbar}y(\bar{w}_1-w_3) &= \frac{i}{\hbar}y(x_1-iy_1-x_3-iy_3) = \frac{1}{\hbar}yx_1i + \frac{1}{\hbar}yy_1 - \frac{1}{\hbar}yx_3i + \frac{1}{\hbar}yy_3
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\hbar}\bar{w}_1w_3 = -\frac{1}{2\hbar}(x_1 - iy_1).(x_3 + iy_3) = -\frac{1}{2\hbar}x_1x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_1y_3i + \frac{1}{2\hbar}y_1x_3i - \frac{1}{2\hbar}y_1y_3$$

$$-\frac{1}{2\hbar}\bar{w}_1w_1 = -\frac{1}{2\hbar}(x_1^2 + y_1^2) = -\frac{1}{2\hbar}x_1^2 - \frac{1}{2\hbar}y_1^2$$

$$-\frac{1}{2\hbar}\bar{w}_3w_3 = -\frac{1}{2\hbar}(x_3^2 + y_3^2) = -\frac{1}{2\hbar}x_3^2 - \frac{1}{2\hbar}y_3^2$$

$$-\frac{1}{2\hbar}\bar{w}_2w_2 = -\frac{1}{2\hbar}(x_2^2 + y_2^2) = -\frac{1}{2\hbar}x_2^2 - \frac{1}{2\hbar}y_2^2.$$

Agora para integrar com respeito à variável x_1 , das expressões acima escolhemos aquelas que tem a variável x_1 , isto é,

$$\frac{1}{\hbar}x_4x_1 - \frac{1}{\hbar}y_4x_1i - \frac{1}{2\hbar}x_1x_2 + \frac{1}{2\hbar}x_1y_2i + \frac{1}{\hbar}xx_1 + \frac{1}{\hbar}yx_1i - \frac{1}{2\hbar}x_1x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_1y_3i - \frac{1}{2\hbar}x_1^2$$

Logo temos a seguinte integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}x_1^2} \cdot e^{x_1[(\frac{1}{\hbar}x_4 - \frac{1}{2\hbar}x_2 + \frac{1}{\hbar}x - \frac{1}{2\hbar}x_3) + i(-\frac{1}{\hbar}y_4 + \frac{1}{2\hbar}y_2 + \frac{1}{\hbar}y - \frac{1}{2\hbar}y_3)]} dx_1 = \\ = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_1^2} \cdot e^{\frac{2x_1}{2\hbar}[(x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x - \frac{1}{2}x_3) + i(-y_4 + \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3)]} dx_1 = \\ = \sqrt{2\pi\hbar} \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[(x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x - \frac{1}{2}x_3) + i(-y_4 + \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3)]^2} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\hbar}(x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x - \frac{1}{2}x_3)^2 = \\ & = \frac{1}{2\hbar}[(x_4 - \frac{1}{2}x_2)^2 + (x - \frac{1}{2}x_3)^2 + 2(x_4 - \frac{1}{2}x_2)(x - \frac{1}{2}x_3)] \\ & = \frac{1}{2\hbar}[x_4^2 - x_4x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x^2 - xx_3 + \frac{1}{4}x_3^2 + 2x_4x - x_4x_3 - x_2x + \frac{1}{2}x_2x_3] \\ & = \frac{1}{2\hbar}x_4^2 - \frac{1}{2\hbar}x_4x_2 + \frac{1}{8\hbar}x_2^2 + \frac{1}{2\hbar}x^2 - \frac{1}{2\hbar}xx_3 + \frac{1}{8\hbar}x_3^2 + \frac{1}{\hbar}x_4x - \frac{1}{2\hbar}x_4x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_2x + \frac{1}{4\hbar}x_2x_3 \\ & \quad - \frac{1}{2\hbar}(-y_4 + \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3)^2 = \\ & = -\frac{1}{2\hbar}[(\frac{1}{2} - y_4)^2 + (y - \frac{1}{2}y_3)^2 + 2(\frac{1}{2}y_2 - y_4).(y - \frac{1}{2}y_3)] \\ & = -\frac{1}{2\hbar}[\frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_4 + y_4^2 + y^2 - y_3y + \frac{1}{4}y_3^2 + y_2y - \frac{1}{2}y_2y_3 - 2y_4y + y_4y_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\hbar}y_2^2 + \frac{1}{2\hbar}y_2y_4 - \frac{1}{2\hbar}y^2 + \frac{1}{2\hbar}y_3y - \frac{1}{8\hbar}y_3^2 - \frac{1}{2\hbar}y_2y + \frac{1}{4\hbar}y_2y_3 + \frac{1}{\hbar}y_4y - \frac{1}{2\hbar}y_4y_3 \\
&\quad \frac{i}{\hbar}(x_4 - \frac{1}{2}x_2 + x - \frac{1}{2}x_3) \cdot (-y_4 + \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3) = \\
&= -\frac{1}{\hbar}x_4y_4i + \frac{1}{2\hbar}x_4y_2i + \frac{1}{\hbar}x_4yi - \frac{1}{2\hbar}x_4y_3i + \frac{1}{2\hbar}x_2y_4i - \\
&\quad -\frac{1}{4\hbar}x_2y_2i - \frac{1}{2\hbar}x_2yi + \frac{1}{4\hbar}x_2y_3i - \frac{1}{\hbar}xy_4i + \frac{1}{2\hbar}xy_2i + \\
&\quad + \frac{1}{\hbar}xyi - \frac{1}{2\hbar}xy_3i + \frac{1}{2\hbar}x_3y_4i - \frac{1}{4\hbar}x_3y_2i - \frac{1}{2\hbar}x_3yi + \frac{1}{4\hbar}x_3y_3i
\end{aligned}$$

Temos agora a integração com respeito a variável y_1 assim temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar}x_4y_1i + \frac{1}{\hbar}y_4y_1 - \frac{1}{2\hbar}y_1x_2i - \frac{1}{2\hbar}y_1y_2 - \frac{1}{\hbar}xy_1i + \frac{1}{\hbar}yy_1 + \frac{1}{2\hbar}y_1x_3i - \frac{1}{2\hbar}y_1y_3 - \frac{1}{2\hbar}y_1^2 \\
&\text{de onde temos a integral}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}y_1^2} \cdot e^{y_1[(\frac{1}{\hbar}y_4 - \frac{1}{2\hbar}y_2 + \frac{1}{\hbar}y - \frac{1}{2\hbar}y_3) + i(\frac{1}{\hbar}x_4 - \frac{1}{2\hbar}x_2 - \frac{1}{\hbar}x + \frac{1}{2\hbar}x_3)]} dy_1 = \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}y_1^2} \cdot e^{\frac{2y_1}{2\hbar}[(y_4 - \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3) + i(x_4 - \frac{1}{2}x_2 - x + \frac{1}{2}x_3)]} dy_1 \\
&= \sqrt{2\pi\hbar} e^{\frac{1}{2\hbar}[(y_4 - \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3) + i(x_4 - \frac{1}{2}x_2 - x + \frac{1}{2}x_3)]^2}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\hbar}(y_4 - \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3)^2 = \\
&= \frac{1}{2\hbar}[(y_4 - \frac{1}{2}y_2)^2 + (y - \frac{1}{2}y_3)^2 + 2(y_4 - \frac{1}{2}y_2) \cdot (y - \frac{1}{2}y_3)] \\
&= \frac{1}{2\hbar}[y_4^2 - y_4y_2 + \frac{1}{4}y_2^2 + y^2 - yy_3 + \frac{1}{4}y_3^2 + 2y_4y - y_4y_3 - y_2y + \frac{1}{2}y_2y_3] \\
&= \frac{1}{2\hbar}y_4^2 - \frac{1}{2\hbar}y_4y_2 + \frac{1}{8\hbar}y_2^2 + \frac{1}{2\hbar}y^2 - \frac{1}{2\hbar}yy_3 + \frac{1}{8\hbar}y_3^2 + \frac{1}{\hbar}y_4y - \frac{1}{2\hbar}y_4y_3 \\
&\quad - \frac{1}{2\hbar}y_2y + \frac{1}{4\hbar}y_2y_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\hbar}(x_4 - \frac{1}{2}x_2 - x + \frac{1}{2}x_3)^2 = \\
& = -\frac{1}{2\hbar}[(x_4 - \frac{1}{2}x_2)^2 + (\frac{1}{2}x_3 - x)^2 + 2(x_4 - \frac{1}{2}x_2)(\frac{1}{2}x_3 - x)] \\
& = -\frac{1}{2\hbar}[x_4^2 - x_4x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2 - x_3x + x^2 + x_4x_3 - 2x_4x - \frac{1}{2}x_2x_3 + x_2x] \\
& = -\frac{1}{2\hbar}x_4^2 + \frac{1}{2\hbar}x_4x_2 - \frac{1}{8\hbar}x_2^2 - \frac{1}{8\hbar}x_3^2 + \frac{1}{\hbar}x_3x - \frac{1}{2\hbar}x^2 - \frac{1}{\hbar}x_4x_3 + \\
& \quad + \frac{1}{\hbar}x_4x + \frac{1}{4\hbar}x_2x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\hbar}(y_4 - \frac{1}{2}y_2 + y - \frac{1}{2}y_3) \cdot (x_4 - \frac{1}{2}x_2 - x + \frac{1}{2}x_3) = \\
& = \frac{1}{\hbar}x_4y_4i - \frac{1}{2\hbar}y_4x_2i - \frac{1}{\hbar}y_4xi + \frac{1}{2\hbar}y_4x_3i - \frac{1}{2\hbar}y_2x_4i + \\
& \quad + \frac{1}{4\hbar}y_2x_2i + \frac{1}{2\hbar}y_2xi - \frac{1}{4\hbar}y_2x_3i + \frac{1}{\hbar}yx_4i - \frac{1}{2\hbar}yx_2i - \\
& \quad - \frac{1}{2\hbar}yxi + \frac{1}{2\hbar}yx_3i - \frac{1}{2\hbar}y_3x_4i + \frac{1}{4\hbar}y_3x_2i + \frac{1}{2\hbar}y_3xi - \frac{1}{4\hbar}y_3x_3i.
\end{aligned}$$

Logo, somando os resultados da integração com respeito a y_1 e x_1 temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\hbar}y_4y - \frac{1}{\hbar}y_4y_3 - \frac{1}{\hbar}y_2y + \frac{1}{2\hbar}y_2y_3 - \frac{1}{\hbar}x_4x_3 + \frac{2}{\hbar}x_4x + \frac{1}{2\hbar}x_2x_3 - \frac{1}{\hbar}x_2x - \frac{2}{\hbar}y_4xi + \frac{1}{\hbar}y_4x_3i + \\
& \quad + \frac{1}{\hbar}y_2xi - \frac{1}{2\hbar}y_2x_3i + \frac{2}{\hbar}yx_4i - \frac{1}{\hbar}yx_2i - \frac{1}{\hbar}y_3x_4i + \frac{1}{2\hbar}y_3x_2i
\end{aligned}$$

Agora vamos fazer a integração com respeito a x_3 para isso consideremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\hbar}x_5x_3 + \frac{1}{\hbar}y_5x_3i - \frac{1}{2\hbar}x_2x_3 - \frac{1}{2\hbar}y_2x_3i + \frac{1}{\hbar}xx_3 - \frac{1}{\hbar}yx_3i + \frac{1}{2\hbar}x_2x_3 + \frac{1}{\hbar}y_4x_3i - \frac{1}{2\hbar}y_2x_3i - \\
& \frac{1}{\hbar}x_4x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_3^2 = \\
& = \frac{1}{\hbar}x_5x_3 + \frac{1}{\hbar}y_5x_3i - \frac{1}{\hbar}y_2x_3i + \frac{1}{\hbar}xx_3 - \frac{1}{\hbar}yx_3i + \frac{1}{\hbar}y_4x_3i - \frac{1}{\hbar}x_4x_3 - \frac{1}{2\hbar}x_3^2,
\end{aligned}$$

logo temos a integração

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}x_3^2} \cdot e^{[(\frac{1}{\hbar}x_5 + \frac{1}{\hbar}x - \frac{1}{\hbar}x_4) + i(\frac{1}{\hbar}y_5 - \frac{1}{\hbar}y_2 - \frac{1}{\hbar}y + \frac{1}{\hbar}y_4)]} dx_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}x_3^2} \cdot e^{\frac{2x_3}{2\hbar}[(x_5+x-x_4)+i(y_5-y_2-y+y_4)]} dx_3 \\
&= (\sqrt{2\pi\hbar}) \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[(x_5+x-x_4)+i(y_5-y_2-y+y_4)]^2},
\end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\hbar}(x_5+x-x_4)^2 &= \frac{1}{2\hbar}[x_5^2 + 2x_5(x-x_4) + (x-x_4)^2] \\
&= \frac{1}{2\hbar}[x_5^2 + 2x_5x - 2x_5x_4 + x^2 - 2xx_4 + x_4^2] \\
&= \frac{1}{2\hbar}x_5^2 + \frac{1}{\hbar}x_5x - \frac{1}{\hbar}x_5x_4 + \frac{1}{2\hbar}x^2 - \frac{1}{\hbar}xx_4 + \frac{1}{2\hbar}x_4^2 \\
&\quad - \frac{1}{2\hbar}(y_5-y_2-y+y_4)^2 = \\
&= -\frac{1}{2\hbar}[(y_5-y_2)^2 + (y_4-y)^2 + 2(y_5-y_2)(y_4-y)] \\
&= -\frac{1}{2\hbar}[y_5^2 - 2y_5y_2 + y_2^2 + y_4^2 - 2y_4y + y^2 + 2y_5y_4 - 2y_5y - 2y_2y_4 + 2y_2y] \\
&= -\frac{1}{2\hbar}y_5^2 + \frac{1}{\hbar}y_5y_2 - \frac{1}{2\hbar}y_2^2 - \frac{1}{2\hbar}y_4^2 + \frac{1}{\hbar}y_4y - \frac{1}{2\hbar}y^2 - \frac{1}{\hbar}y_5y_4 + \frac{1}{\hbar}y_5y + \frac{1}{\hbar}y_2y_4 - \frac{1}{\hbar}y_2y \\
&\quad \frac{i}{\hbar}(x_5+x-x_4)(y_5-y_2-y+y_4) = \\
&= \frac{1}{\hbar}x_5y_3i - \frac{1}{\hbar}x_5y_2i - \frac{1}{\hbar}x_5yi + \frac{1}{\hbar}x_5y_4i + \frac{1}{\hbar}xy_3i - \frac{1}{\hbar}xy_2i - \frac{1}{\hbar}xyi - \\
&\quad - \frac{1}{\hbar}xy_4i + \frac{1}{\hbar}x_4y_3i - \frac{1}{\hbar}x_4y_2i + \frac{1}{\hbar}x_4yi - \frac{1}{\hbar}x_4y_4i
\end{aligned}$$

Integração com respeito a y_3 temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\hbar}x_5y_3i + \frac{1}{\hbar}y_5y_3 + \frac{1}{2\hbar}x_2y_3i - \frac{1}{2\hbar}y_2y_3 + \frac{1}{\hbar}xy_3i + \frac{1}{\hbar}yy_3 - \frac{1}{\hbar}y_4y_3 + \frac{1}{2\hbar}y_2y_3 - \frac{1}{\hbar}y_3x_4i + \\
&\frac{1}{2\hbar}y_3x_2i - \frac{1}{2\hbar}y_3^2 = \\
&= -\frac{1}{2\hbar}y_3^2 - \frac{1}{\hbar}x_5y_3i + \frac{1}{\hbar}y_5y_3 + \frac{1}{\hbar}x_2y_3i + \frac{1}{\hbar}xy_3i + \frac{1}{\hbar}yy_3 - \frac{1}{\hbar}y_4y_3 - \frac{1}{\hbar}y_3x_4i.
\end{aligned}$$

Assim temos a integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}y_3^2} \cdot e^{y_3[(\frac{1}{\hbar}y_5+\frac{1}{\hbar}y-\frac{1}{\hbar}y_4)+i(-\frac{1}{\hbar}x_5+\frac{1}{\hbar}x_2+\frac{1}{\hbar}x-\frac{1}{\hbar}x_4)]} dx_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\hbar}y_3^2} \cdot e^{\frac{2y_3}{2\hbar}[(y_5+y-y_4)+i(-x_5+x_2+x-x_4)]} dy_3 \\
&= (\sqrt{2\pi\hbar}) \cdot e^{\frac{1}{2\hbar}[(y_5+y-y_4)+i(-x_5+x_2+x-x_4)]^2}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\hbar}(y_5+y-y_4)^2 &= \frac{1}{2\hbar}[y_5^2 + 2y_5(y-y_4) + (y-y_4)^2] \\
&= \frac{1}{2\hbar}[y_5^2 + y^2 - 2yy_4 + y_4^2 + 2y_5y - 2y_5y_4] \\
&= \frac{1}{2\hbar}y_5^2 + \frac{1}{2\hbar}y^2 - \frac{1}{\hbar}yy_4 + \frac{1}{2\hbar}y_4^2 + \frac{1}{\hbar}y_5y - \frac{1}{\hbar}y_5y_4 \\
&\quad - \frac{1}{2\hbar}(-x_5+x_2+x-x_4)^2 = \\
&= -\frac{1}{2\hbar}[(x_2-x_5)^2 + (x-x_4)^2 + 2(x_2-x_5).(x-x_4)] \\
&= -\frac{1}{2\hbar}[x_2^2 - 2x_2x_5 + x_5^2 + x^2 - 2xx_4 + x_4^2 + 2x_2x - 2x_2x_4 - 2x_5x + 2x_5x_4] \\
&= -\frac{1}{2\hbar}x_2^2 + \frac{1}{\hbar}x_2x_5 - \frac{1}{2\hbar}x_5^2 - \frac{1}{2\hbar}x^2 + \frac{1}{\hbar}xx_4 - \frac{1}{2\hbar}x_4^2 - \frac{1}{\hbar}x_2x + \frac{1}{\hbar}x_2x_4 + \\
&\quad + \frac{1}{\hbar}x_5x - \frac{1}{\hbar}x_5x_4 \\
&\quad \frac{i}{\hbar}(y_5+y-y_4).(-x_5+x_2+x-x_4) = \\
&= -\frac{1}{\hbar}y_5x_5i + \frac{1}{\hbar}y_5x_2i + \frac{1}{\hbar}y_5xi - \frac{1}{\hbar}y_5x_4i - \frac{1}{\hbar}yx_5i + \frac{1}{\hbar}yx_2i + \\
&\quad + \frac{1}{\hbar}yxi - \frac{1}{\hbar}yx_4i + \frac{1}{\hbar}y_4x_5i - \frac{1}{\hbar}y_4x_2i - \frac{1}{\hbar}y_4xi + \frac{1}{\hbar}y_4x_4i
\end{aligned}$$

Agora somando os valores das exponenciais resultantes na integração com respeito as variáveis x_3 e y_3 temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\hbar}y_5y - \frac{2}{\hbar}y_5y_4 - \frac{1}{2\hbar}x_2^2 + \frac{1}{\hbar}x_2x_5 - \frac{1}{\hbar}x_2x + \frac{1}{\hbar}x_2x_4 + \frac{2}{\hbar}x_5x - \frac{2}{\hbar}x_5x_4 + \frac{1}{\hbar}y_5y_2 - \frac{1}{2\hbar}y_2^2 + \frac{1}{\hbar}y_2y_4 - \\
&\frac{1}{\hbar}y_2y - \frac{1}{\hbar}x_5y_2i -
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\hbar}x_5yi + \frac{2}{\hbar}x_5y_4i + \frac{1}{\hbar}xy_5i - \frac{1}{\hbar}xy_2i + \frac{1}{\hbar}x_4y_2i + \frac{1}{\hbar}y_5x_2i + \frac{1}{\hbar}yx_2i - \frac{1}{\hbar}y_4x_2i - \frac{2}{\hbar}x_4y_5i.$$

Vamos integrar agora com respeito a variável x_2 , para isso tomamos a seguinte expressão na exponencial

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hbar}x_4x_2 + \frac{1}{\hbar}y_4x_2i + \frac{1}{\hbar}x_5x_2 - \frac{1}{\hbar}y_5x_2i - \frac{1}{\hbar}x_2x - \frac{1}{\hbar}yx_2i + \frac{1}{\hbar}x_2x_5 + \frac{1}{\hbar}x_2x_4 - \frac{1}{\hbar}x_2x + \frac{1}{\hbar}x_2y_5i + \\ & \frac{1}{\hbar}yx_2i - \\ & - \frac{1}{\hbar}y_4x_2i - \frac{1}{2\hbar}x_2^2 = \frac{2}{\hbar}x_2x_4 + \frac{2}{\hbar}x_2x_5 - \frac{2}{\hbar}x_2x - \frac{1}{\hbar}x_2^2., \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{\hbar}x_2^2} \cdot e^{x_2[\frac{2}{\hbar}(x_4+x_5-x)]} dx_2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{\hbar}x_2^2} \cdot e^{\frac{2x_2}{\hbar}(x_4+x_5-x)} dx_2 \\ &= \sqrt{\pi\hbar} e^{\frac{1}{\hbar}(x_4+x_5-x)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar}(x_4+x_5-x)^2 &= \frac{1}{\hbar}(x_4^2 + 2x_4(x_5-x) + (x_5-x)^2) \\ &= \frac{1}{\hbar}x_4^2 + \frac{2}{\hbar}x_4x_5 - \frac{2}{\hbar}x_4x + \frac{1}{\hbar}x_5^2 - \frac{2}{\hbar}x_5x + \frac{1}{\hbar}x^2. \end{aligned}$$

Para integração com respeito a variável y_2 , temos que considerar a seguinte expressão na exponencial:

$$- \frac{1}{\hbar}x_4y_2i + \frac{1}{\hbar}y_4y_2 + \frac{1}{\hbar}x_5y_2i + \frac{1}{\hbar}y_5y_2 - \frac{1}{\hbar}y_2y + \frac{1}{\hbar}y_2xi + \frac{1}{\hbar}y_2y_4 - \frac{1}{\hbar}y_2y - \frac{1}{\hbar}x_5y_2i - \frac{1}{\hbar}xy_2i + \frac{1}{\hbar}x_4y_2i -$$

$$- \frac{1}{\hbar}y_2^2 + \frac{1}{\hbar}y_5y_2 = \frac{2}{\hbar}y_4y_2 - \frac{2}{\hbar}y_2y + \frac{2}{\hbar}y_5y_2 - \frac{1}{\hbar}y_2^2$$

Assim temos a integral:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{\hbar}y_2^2} \cdot e^{\frac{2y_2}{\hbar}(y_4-y+y_5)} dy_2 = \sqrt{\pi\hbar} e^{\frac{1}{\hbar}(y_4-y+y_5)^2},$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hbar}(y_4 - y + y_5)^2 &= \frac{1}{\hbar}(y_4^2 + 2y_4(y_5 - y) + (y_5 - y)^2) \\
&= \frac{1}{\hbar}y_4^2 + \frac{2}{\hbar}y_4y_5 - \frac{2}{\hbar}y_4y + \frac{1}{\hbar}y_5^2 - \frac{2}{\hbar}y_5y + \frac{1}{\hbar}y^2,
\end{aligned}$$

logo somando os resultados das integrações anteriores na exponencial temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\hbar}y_4y + \frac{2}{\hbar}x_4x - \frac{2}{\hbar}y_4xi + \frac{2}{\hbar}yx_4i + \frac{2}{\hbar}y_5y - \frac{2}{\hbar}y_5y_4 + \frac{2}{\hbar}x_5x - \frac{2}{\hbar}x_5x_4 - \frac{2}{\hbar}x_5yi + \frac{2}{\hbar}x_5y_4i + \\
&\frac{2}{\hbar}xy_5i - \frac{2}{\hbar}x_4y_5i + \\
&+ \frac{1}{\hbar}x_4^2 + \frac{2}{\hbar}x_4x_5 - \frac{2}{\hbar}x_4x + \frac{1}{\hbar}x_5^2 - \frac{2}{\hbar}x_5x + \frac{1}{\hbar}x^2 + \frac{1}{\hbar}y_4^2 + \frac{2}{\hbar}y_4y_5 - \frac{2}{\hbar}y_4y + \frac{1}{\hbar}y_5^2 - \frac{2}{\hbar}y_5y + \frac{1}{\hbar}y^2 = \\
&= \frac{1}{\hbar}x_4^2 + \frac{1}{\hbar}y_4^2 + \frac{1}{\hbar}y_5^2 + \frac{1}{\hbar}x_5^2 + \frac{1}{\hbar}x^2 + \frac{1}{\hbar}y^2 - \frac{2}{\hbar}y_4xi + \frac{2}{\hbar}yx_4i - \frac{2}{\hbar}x_5yi + \frac{2}{\hbar}x_5y_4i + \frac{2}{\hbar}x_5y_4i + \\
&\frac{2}{\hbar}xy_5i - \frac{2}{\hbar}x_4y_5i
\end{aligned}$$

Portanto a integral [4.1.74](#) é igual a:

$$4\pi^3\hbar^3 \int_{\mathbb{R}^4} g_1(x_4, y_4)g_2(x_5, y_5)e^{\frac{2i}{\hbar}(-y_4x+yx_4-x_5y+x_5y_4+xy_5-x_4y_5)}dx_4dy_4dx_5dy_5$$

Apêndice C

Sejam $*_{\hbar}^b$ é o produto de Bieliavsky (ver (3.1.10)) e

$$M = \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(a, l) = e^{-(l-\lambda)^2} e^{-\cosh^2(4a)} \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos mostrar que o produto de Bieliavsky para funções que pertencem a M é uma função tipo Schwartz, para fazer isto precisamos dos seguintes resultados.

Proposição 4.1.34. ([10], proposição 8.3) *Se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $f \in S(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $x^\beta \partial^\alpha f$ é limitado para todos os multi-índices α, β se e somente se $\partial^\alpha (x^\beta f)$ é limitada para todos os multi-índices α, β .*

Lema 4.1.35. ([19], página 319) *Seja f uma função de Schwartz f sobre $\mathbb{R}$. Então,*

$$\lambda^n \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (\exp[-i\lambda x]) dx \right] = (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i\lambda x] \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} [(-ix)^m \cdot f(x)] dx. \quad (4.1.75)$$

Lema 4.1.36. ([1] página 302)

Sejam $a > 0$, $A > 0$ e $n = 0, 1, 2, \dots$, então

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-at^2} dt = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^\infty t^{2n+1} e^{-at^2} dt = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

e

$$\int_0^\infty x^n e^{-Ax} dx = n! A^{-n-1}.$$

Prova do teorema (3.1.8)

Com efeito, como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \text{ com } a \neq 0. \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} [F * G](a, l) &= e^{\frac{1}{h^2} \frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2il}{h} \sinh \alpha} e^{\frac{2i\lambda_1}{h} \sinh(\frac{\beta-\alpha}{2})} e^{-\frac{2i\lambda_2}{h} \sinh(\frac{\beta+\alpha}{2})} e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a) \cosh^2 \alpha} \\ &\quad \cdot e^{-2 \sinh^2(\beta+4a) \sinh^2 \alpha} [\cosh \alpha \cosh(\frac{\beta-\alpha}{2}) \cosh(\frac{\beta+\alpha}{2})]^{1/2} d\alpha d\beta. \\ &= e^{\frac{1}{h^2} \frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2il}{h} \sinh \alpha} e^{\frac{2i\lambda_1}{h} \sinh(\frac{\beta-\alpha}{2})} e^{-\frac{2i\lambda_2}{h} \sinh(\frac{\beta+\alpha}{2})} e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a) \cosh^2 \alpha} \\ &\quad \cdot e^{-2 \sinh^2(\beta+4a) \sinh^2 \alpha} \left[\frac{1}{2} (\cosh(\alpha) + \cosh(\beta)) (\cosh \alpha) \right]^{1/2} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

$$\text{Seja } \delta = \frac{2}{h} \sinh \alpha \Rightarrow \sinh^2 \alpha = \frac{\delta^2 h^2}{4} \text{ e } \cosh \alpha = \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} [F * G](a, l) &= e^{\frac{1}{h^2} \frac{\pi h}{4}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\delta l} e^{\left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta h}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}} \cosh \beta - \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} - \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta h}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}} \cosh \beta + \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \\ &\quad e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} \right]^{1/2} d\delta d\beta. \end{aligned}$$

Agora, vamos seguir os seguintes passos para nossa demonstração,

Passo 1

$$\frac{\partial}{\partial a} [F * G](a, l) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi h e^{\frac{1}{h^2}}}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} [-8\delta^2 h^2 \sinh(\beta+4a) \cosh(\beta+4a) - 16 \sinh(\beta+4a) \cosh(\beta+4a)] e^{il\delta} \\ &\quad e^{\left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta h}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}} \cosh \beta - \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} - \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta h}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}} \cosh \beta + \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \\ &\quad e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} \cdot \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} \right]^{1/2} d\delta d\beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \left| a^n \frac{\partial}{\partial a} [F * G](a, l) \right| \leq \\
& \leq e^{\frac{1}{\hbar^2} \frac{\pi}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^n |(8\delta^2 \hbar^2 + 16) \sinh(\beta + 4a) \cosh(\beta + 4a)| \cdot [1 + \cosh \beta]^{1/2} \\
& \quad e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

Mas, como $[1 + \cosh(\beta)]^{1/2} \leq (1 + [\cosh(\beta)]^{1/2}) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \left| a^n \frac{\partial}{\partial a} [F * G](a, l) \right| \leq \\
& \leq e^{\frac{1}{\hbar^2} \frac{\pi}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^n |(8\delta^2 \hbar^2 + 16) \sinh(\beta + 4a) \cosh(\beta + 4a)| \cdot [1 + (\cosh(\beta))^{1/2}] \\
& \quad e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq e^{\frac{1}{\hbar^2} \frac{\pi}{2}} \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^n |(8\delta^2 \hbar^2 + 8\delta^2 \hbar^2 \sqrt{\cosh(\beta)} + 16\sqrt{\cosh(\beta)} + 16) \sinh(\beta + 4a) \cosh(\beta + \\
& 4a)| \cdot \\
& \quad e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

Analisemos agora a parcela:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^n |\delta|^2 |\sinh(\beta + 4a) \cosh(\beta + 4a)| \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} \\
& \quad e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta + 2a) + \cosh^2(\beta + 2a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 2a)} d\delta d\beta. \\
& \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|a|^n \hbar^2 |\sinh(\beta + 2a) \cosh(\beta + 4a)|}{\sqrt{\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)}} \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} e^{-\frac{1}{2\hbar} |\delta| \cosh \beta} e^{-\cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \text{ Pois,} \\
& \delta^2 e^{-A\delta^2} \leq \frac{1}{\sqrt{A}}; \text{ para } A > 0. \text{ Logo, a expressão acima é:} \\
& \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^n \hbar^2 \cdot |\sinh(\beta + 4a)| \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot e^{-\frac{1}{2\hbar} |\delta| \cosh \beta} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta = \\
& = 2\hbar^2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |a|^n \sqrt{\cosh(\beta)} e^{-\frac{1}{2\hbar} \delta \cosh \beta} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. = \\
& = 4\hbar^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{|a|^n}{\sqrt{\cosh \beta}} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\beta \leq 8\hbar^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{|a|^n}{\sqrt{e^{u-4a} + e^{4a-u}}} \cdot e^{-2u^2} du.
\end{aligned}$$

Suponhamos que $a \geq 0$, então

$$\begin{aligned} 8\hbar^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{|a|^n}{\sqrt{e^{u-4a} + e^{4a-u}}} \cdot e^{-2u^2} du &= 8\hbar^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{a^n}{\sqrt{e^{u-4a} + e^{4a-u}}} \cdot e^{-2u^2} du \leq \\ &\leq 8\hbar^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{|a|^n}{\sqrt{e^{4a-u}}} \cdot e^{-2u^2} du. \leq M_a 8\hbar^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2u^2 + \frac{1}{2}u} du = M_a 8\hbar^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{1}{32}} \leq \infty. \end{aligned}$$

Para o caso $a \leq 0$ o resultado é análogo.

Passo 2

Por outro lado, vamos analisar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} a^n l \frac{\partial}{\partial l} [f * G](a, l) &\stackrel{(lema = 4.0.30)}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} a^n e^{i\delta l} \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ i\delta e^{\left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} \right\} \\ &\quad \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} \right]^{1/2} d\delta d\beta. \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} a^n e^{i\delta l} \frac{\partial}{\partial \delta} \left\{ i\delta e^{\left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} - \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] \right. \\ &\quad \left. e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} \right\} \\ &\quad \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} \right]^{-1/2} \left[\frac{1}{2} \delta \hbar^2 \left(\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1 \right)^{-3/2} \cosh(\beta) \right] d\delta d\beta + \\ &\quad + \frac{\pi \hbar e^{\frac{1}{4}}}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\delta l} i e^{\left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} - \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1} \cosh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] \\ &\quad a^n \cdot \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} \right]^{1/2} \cdot e^{-\frac{\cosh \beta}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\delta^2 \hbar^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 \hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta. + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi \hbar e^{\frac{1}{4}}}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\delta l} i\delta \left\{ \frac{\sqrt{2}i.\lambda_1.\delta.\sinh\beta.\sqrt{\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1}}{\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)} - \right. \\
& - \frac{i.\lambda_1.\cosh\beta.\sqrt{\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1}}{\hbar(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)} - \frac{i\lambda_1\sqrt{2}\delta.\sinh\beta.\cosh\beta}{(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)} + \\
& + \frac{i.\lambda_1.\sqrt{2}.\sinh^2\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}}{\hbar(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{i.\lambda_1.\sqrt{2}.\delta^2.\hbar.\cosh^2\beta}{2(\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1})(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)^{\frac{3}{2}}} - \\
& - \frac{i.\lambda_1.\sqrt{2}.\delta.\sinh\beta.\cosh\beta}{2(\cosh\beta.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}-\frac{\delta\hbar}{2}.\sinh\beta+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2i\lambda_2}{\hbar} (\text{uma expressão parecida à anterior}) - \\
& - \frac{\delta\hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)] - \frac{\delta \cosh\beta}{2.\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}} \Bigg\} . a^n . [1 + \frac{\cosh\beta}{\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}}]^{1/2}. \\
& \cdot \left\{ e^{\left[\frac{2i\lambda_1\sqrt{2}(\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}\sinh\beta-\frac{\delta\hbar}{2}\cosh\beta)}{\hbar\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}}\cosh\beta-\frac{\delta\hbar}{2}\sinh\beta+1} \right]} e^{\left[\frac{2i\lambda_2\sqrt{2}(\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}\sinh\beta+\frac{\delta\hbar}{2}\cosh\beta)}{\hbar\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}}\cosh\beta+\frac{\delta\hbar}{2}\sinh\beta+1} \right]} \right. \\
& \left. e^{-\frac{\cosh\beta}{\hbar^2}\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}} e^{-\frac{\delta^2\hbar^2}{2}[\sinh^2(\beta+4a)+\cosh^2(\beta+a)]} e^{-2\cosh^2(\beta+4a)} \right\} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

De onde, podemos observar que a primeira parcela pode ser estudada como no caso acima. Já na outra parcela como os denominadores dos quocientes são maiores que um, podemos estudar integrais do tipo a seguir:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R}^2} |\delta^m a^n|. \sqrt{\cosh(\beta)}. |\sinh\beta \cosh\beta| e^{-\frac{1}{\hbar^2} \cosh\beta \sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}}} \\
& . e^{-\frac{\delta^2\hbar^2}{2} [\sinh^2(\beta+2a) + \cosh^2(\beta+4a)]} . e^{-2\cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta
\end{aligned}$$

para $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

De onde, como $\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1} \geq 1$ para todo $\delta \in \mathbb{R}$, temos que

$$e^{-\frac{\cosh\beta}{\hbar^2}\sqrt{\frac{\delta^2\hbar^2}{4}+1}} \leq e^{-\frac{1}{\hbar^2} \cosh\beta}$$

Logo a integral acima é:

$$\begin{aligned}
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |\delta^m a^n| \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+2a)]} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta \leq \\
&\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\delta|^m |a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+2a)]} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

Do lema 4.1.36, se $m = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ (analogamente para $m = 2k + 1$)

$$\begin{aligned}
&2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |\delta|^{2k} |a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta = \\
&= \frac{1.3 \dots (2k-1)}{h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta|}{[\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+2a)]^k} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+2a)} d\beta.
\end{aligned}$$

Mas, como $[\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)] \geq 1$ e $\sqrt{\cosh(\beta)} = \sqrt{\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}} \leq \frac{\sqrt{e^\beta} + \sqrt{e^{-\beta}}}{2}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1.3 \dots (2k-1)}{h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta|}{[\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]^k} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\beta \leq \\
&\leq \frac{1.3 \dots (2k-1)}{h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\beta \leq \\
&\leq \frac{1.3 \dots (2k-1)}{2h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot \left(\frac{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}}{\sqrt{2}} \right) \cdot |e^{2\beta} - e^{-2\beta}| \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\beta.
\end{aligned}$$

É fácil observar que $\cosh x \geq \frac{x^2}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, daí,

$$\begin{aligned}
&\frac{1.3 \dots (2k-1)}{2h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot \left(\frac{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}}{\sqrt{2}} \right) \cdot |e^{2\beta} - e^{-2\beta}| \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\beta \leq \\
&\frac{1.3 \dots (2k-1)}{2h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot \left(e^{5\beta/2} + e^{3\beta/2} + e^{-5\beta/2} + e^{-3\beta/2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[(\frac{1}{2h^2}+2)\beta^2+2(8a-5/4)\beta+32a^2]} d\beta = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{\frac{(8a-5/4)^2}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} = \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{\frac{25/16-40a+64a^2}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{-32a^2}. \end{aligned}$$

Logo, de umas das parcelas da integral acima temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1.3...(2k-1)}{2h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot (e^{5\beta/2}) \cdot e^{-\frac{1}{2h^2}\beta^2} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta = \\ &= \frac{1.3...(2k-1)}{2h^{2k}} |a|^n \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{\frac{25/16-40a+64a^2}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{-32a^2} \end{aligned}$$

Mas, $(\frac{1}{2h^2}+2) > 2$, então $\frac{64}{(\frac{1}{2h^2}+2)} < 32$, o que implica $-32 + \frac{64}{(\frac{1}{2h^2}+2)}$ é negativo.

Assim a expressão $\frac{1.3...(2k-1)}{2h^{2k}} |a|^n \sqrt{\frac{\pi}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{\frac{25/16-40a+64a^2}{(\frac{1}{2h^2}+2)}} \cdot e^{-32a^2}$ é limitada.

Como as outras parcelas tem a mesma estrutura, com a mesmo análise podemos concluir que todas elas são limitadas, portanto a integral

$$\frac{1.3...(2k-1)}{2h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n \cdot (e^{5\beta/2} + e^{3\beta/2} + e^{-5\beta/2} + e^{-3\beta/2}) \cdot e^{-\frac{1}{2h^2}\beta^2} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta$$

é limitada.

Agora passamos a estudar a seguinte integral:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} |\delta|^m |a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| \cdot |\sinh(\beta+4a) \cosh(\beta+4a)| \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}+1}} \\ & e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta \text{ para } n, m \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Mas do raciocínio anterior, se $m = 2k$ (analogamente para $m = 2k+1$) temos que:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}^2} |\delta|^{2k} |a|^n \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot |\sinh \beta \cosh \beta| \cdot |\sinh(\beta+2a) \cosh(\beta+2a)| \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4}+1}} \\ & e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\delta d\beta \leq \\ & \leq \frac{[1.3...(2k-1)]}{h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a|^n (e^{\beta/2} + e^{-\beta/2})}{[\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]^k} |\sinh \beta \cosh \beta| |\sinh(\beta+4a) \cosh(\beta+4a)| d\beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& .e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta} .e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} d\beta \leq \\
& \leq \frac{[1.3 \dots (2k-1)]}{16h^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^n .(e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}) .|e^{2\beta} - e^{-2\beta}| |e^{(2\beta+4a)} - e^{-2\beta-4a}| .e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2} .e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta.
\end{aligned}$$

Mas, por um raciocínio análogo ao caso anterior é fácil observar que a expressão acima é limitada.

Passo 3

Em general o lema 4.1.35 implica

$$\begin{aligned}
a^n .l^m \frac{\partial^{(s+t)}}{\partial a^s \partial l^t} [F * G](a, l) &= e^{\frac{1}{h^2}} \frac{\pi \hbar}{4} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} a^n e^{i\delta l} \frac{\partial^{(s+m)}}{\partial a^s \partial \delta^m} .[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}}]^{1/2} . \\
& \cdot \left\{ (i\delta)^t .e \left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] .e \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] . \right. \\
& \left. .e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+4a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)} \right\} d\delta d\beta.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^{(s+m)}}{\partial a^s \partial \delta^m} \cdot \left\{ (i\delta)^t .e \left[\frac{2i\lambda_1 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh \beta - \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] .e \left[\frac{2i\lambda_2 \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \sinh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \cosh \beta \right)}{h \sqrt{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh \beta + \frac{\delta \hbar}{2} \sinh \beta + 1}} \right] . \right. \\
& \left. .e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+2a) + \cosh^2(\beta+2a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+2a)} \right\} \left[1 + \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

é (em módulo) menor ou igual a uma soma da expressão do tipo:

$$\begin{aligned}
& |\delta|^n .|\sinh^k(\beta) .\cosh^j(\beta) .\sinh^t(\beta+4a) .\cosh^s(\beta+4a)| . \\
& .e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta+2a) + \cosh^2(\beta+4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a)}
\end{aligned}$$

onde $n, k, j, t, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

e

$$|\delta|^n \cdot |\sinh^k(\beta) \cdot \cosh^j(\beta) \cdot \sinh^t(\beta + 4a) \cdot \cosh^s(\beta + 4a)| \cdot \sqrt{\cosh(\beta)}.$$

$$e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)}$$

onde $n, k, j, t, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Assim, é suficiente estudar o seguinte tipo de integrais:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a|^m \cdot |\delta|^n \cdot |\sinh^k(\beta) \cdot \cosh^j(\beta) \cdot \sinh^t(\beta + 4a) \cdot \cosh^s(\beta + 4a)| \cdot \\ & e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \end{aligned} \quad (4.1.76)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a|^m \cdot |\delta|^n \cdot |\sinh^k(\beta) \cdot \cosh^j(\beta) \cdot \sinh^t(\beta + 4a) \cdot \cosh^s(\beta + 4a)| \cdot \sqrt{\cosh(\beta)} \cdot \\ & e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \end{aligned} \quad (4.1.77)$$

Agora, se $n = 2n'$ (para $n = 2n' + 1$ é análogo) do lema 4.1.36 tem-se da integral 4.1.76 que:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a|^m \cdot |\delta|^{2n'} \cdot |\sinh^k(\beta) \cdot \cosh^j(\beta) \cdot \sinh^t(\beta + 4a) \cdot \cosh^s(\beta + 4a)| \cdot \\ & e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2} \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \leq \\ & \leq 2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |a|^m \cdot \delta^{2n'} \cdot |\sinh^k(\beta) \cdot \cosh^j(\beta) \cdot \sinh^t(\beta + 4a) \cdot \cosh^s(\beta + 4a)| \cdot \\ & e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2}} e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} [\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]} e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} |a|^m \frac{|\sinh^k(\beta) \cosh^j(\beta)| \cdot |\sinh^t(\beta + 4a) \cosh^s(\beta + 4a)|}{[\sinh^2(\beta + 4a) + \cosh^2(\beta + 4a)]^{n'}} \cdot e^{-\frac{\cosh \beta}{h^2}} \cdot e^{-2 \cosh^2(\beta + 4a)} d\delta d\beta. \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |a|^m \frac{|(e^\beta - e^{-\beta})^k \cdot (e^\beta + e^{-\beta})^j| \cdot |(e^{\beta+4a} - e^{-\beta-4a})^t \cdot (e^{\beta+4a} + e^{-\beta-4a})^s|}{2^k \cdot 2^j \cdot 2^t \cdot 2^s} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2h^2}} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta,$$

pois, $[\sinh^2(\beta + 2a) + \cosh^2(\beta + 2a) \geq 1$.

$$\text{Mas, } (e^\beta - e^{-\beta})^k = \sum_{k'=0}^k (-1)^{k'} \binom{k}{k'} e^{(k-k')\beta} \cdot e^{-k'\beta};$$

$$(e^\beta + e^{-\beta})^j = \sum_{j'=0}^j \binom{j}{j'} e^{(j-j')\beta} \cdot e^{-j'\beta};$$

$$(e^{\beta+2a} - e^{-\beta-2a})^t = \sum_{t'=0}^t (-1)^{t'} \binom{t}{t'} e^{(t-t')\beta} \cdot e^{-t'\beta};$$

$$(e^{\beta+2a} + e^{-\beta-2a})^s = \sum_{s'=0}^s \binom{s}{s'} e^{(s-s')\beta} \cdot e^{-s'\beta}.$$

Daí, temos que estudar a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a|^m \cdot e^{(k-k')\beta} \cdot e^{-k'\beta} \cdot e^{(j-j')\beta} \cdot e^{-j'\beta} \cdot e^{(t-t')\beta} \cdot e^{-t'\beta} \cdot e^{(s-s')\beta} \cdot e^{-s'\beta} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2h^2}} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2(2+\frac{1}{2h^2})} \cdot e^{-16a\beta} \cdot e^{-32a^2} \cdot e^{\beta(k+j+t+s-2k'-2j'-2t'-2s')} d\beta &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\beta^2(2+\frac{1}{h^2})+2\beta(8a+\frac{k}{2}+\frac{j}{2}+\frac{t}{2}+\frac{s}{2}-k'-j'-t'-s')+32a^2]} d\beta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{(2+\frac{1}{2h^2})}} \cdot e^{\frac{(4a+\frac{k}{2}+\frac{j}{2}+\frac{t}{2}+\frac{s}{2}-k'-j'-t'-s')^2}{(2+\frac{1}{h^2})}} \cdot e^{-32a^2}, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^m \cdot e^{(k-k')\beta} \cdot e^{-k'\beta} \cdot e^{(j-j')\beta} \cdot e^{-j'\beta} \cdot e^{(t-t')\beta} \cdot e^{-t'\beta} \cdot e^{(s-s')\beta} \cdot e^{-s'\beta} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{h^2}} \cdot e^{-2(\beta+4a)^2} d\beta &= \\ |a|^m \cdot \sqrt{\frac{\pi}{(2+\frac{1}{2h^2})}} \cdot e^{\frac{(4a+\frac{k}{2}+\frac{j}{2}+\frac{t}{2}+\frac{s}{2}-k'-j'-t'-s')^2}{(2+\frac{1}{h^2})}} \cdot e^{-32a^2}, \end{aligned}$$

esta ultima expressão é limitada sob $a \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, para estudar a integral 4.1.77 observemos que:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cosh(\beta/2) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cosh(\beta) + 1}{2}} = \sqrt{\cosh(\beta) + 1},$$

logo,

$$\sqrt{\cosh(\beta)} \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \cosh(\beta/2) = \frac{e^{\beta/2} + e^{-\beta/2}}{\sqrt{2}},$$

dessa forma obtemos novamente integrais do tipo analisado no caso da integral 4.1.76, que como já mostramos são limitadas.

Logo, $a^n.l^m \frac{\partial^{(s+t)}}{\partial a^s \partial l^t} [F * G](a, l)$ é limitada. Portanto, a proposição 4.1.34 implica que $[F * G](a, l)$ é uma função tipo Schwartz.

Apêndice D

Nesta seção vamos mostrar que se

$$F(a, l) = e^{-[(l-\lambda_1)^2 + \cosh^2 4a]}, G(a, l) = e^{-[(l-\lambda_2)^2 + \cosh^2 4a]}, H(a, l) = e^{-[(l-\lambda_3)^2 + \cosh^2 4a]}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, então $[(F * G) * H]$ é uma função de Schwartz. Para fazer isto precisamos dos seguintes resultados.

Lema 4.1.37. *Seja $g(x) = \sinh(x)$ e $l \in \mathbb{R}$, então,*

$$\begin{aligned} & l^n \cdot \exp[ilg(x)] = \\ &= \frac{c_1 \cdot P_1(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot l}{[g'(x)]^n} \exp[ilg(x)] + \frac{c_2 \cdot P_2(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot l^2}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] + \dots + \\ &+ \frac{c_{n-1} \cdot P_{n-1}(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot l^{n-1}}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] + \frac{1}{[g'(x)]^n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cdot \exp[ilg(x)]. \quad (4.1.78) \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

Prova : Para $n = 2$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp[ilg(x)] = i \cdot l \cdot g'(x) \cdot \exp[ilg(x)] \implies$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [i \cdot l \cdot g'(x) \cdot \exp[ilg(x)]] = i \cdot l \cdot g''(x) \cdot \exp[ilg(x)] + i \cdot l \cdot g'(x) \cdot i \cdot l \cdot g'(x) \cdot \exp[ilg(x)] \implies$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [\exp[ilg(x)]] = i \cdot l \cdot g''(x) \cdot \exp[ilg(x)] - l^2 \cdot [g'(x)]^2 \cdot \exp[ilg(x)] \implies$$

$$l^2 \cdot \exp[ilg(x)] = \frac{ilg''(x)}{[g'(x)]^2} \cdot \exp[ilg(x)] - \frac{1}{[g'(x)]^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\exp[ilg(x)]].$$

Para $n = 3$, temos

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} [\exp[i.l.g(x)]] = i.l.g'''(x) \cdot \exp[ilg(x)] + il.g''(x).il.g'(x) \cdot \exp[ilg(x)] -$$

$$- 2l^2.g'(x).g''(x) \cdot \exp[ilg(x)] - il^3[g'(x)]^3 \cdot \exp[ilg(x)] \implies$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} [\exp[i.l.g(x)]] =$$

$$= il.g'''(x) \cdot \exp[ilg(x)] - 3l^2.g''(x).g'(x) \cdot \exp[i.l.g(x)] - il^3[g'(x)]^3 \cdot \exp[il.g(x)].$$

assim,

$$l^3 \cdot \exp[ilg(x)] = \frac{l.g'''(x)}{2[g'(x)]^3} \cdot \exp[ilg(x)] - \frac{3l^2.g''(x)}{2i[g'(x)]^2} \cdot \exp[ilg(x)]^2 - \frac{1}{2i[g'(x)]^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} (\exp[ilg(x)]).$$

Indutivamente, temos

$$l^n \cdot \exp[ilg(x)] = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{c_k P_k(\sinh(x), \cosh(x)) l^k}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] + \frac{1}{[g'(x)]^n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\exp[ilg(x)]),$$

donde, c_k é uma constante e P_k é monomial sobre $\sinh(x)$ ou $\cosh(x)$.

Lema 4.1.38. *Sejam $g(x) = \sinh(x)$ e*

$$G(x) = P(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot \exp[-Q(\sinh(x), \cosh(x))]$$

uma função tipo Schwartz tal que $P(\sinh(x), \cosh(x))$ é polinômio de grau finito e $Q(\sinh(x), \cosh(x))$ é polinômio de grau 2. Então,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\exp[ilg(x)]) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x) \cdot (\exp[ilg(x)]) dx, \quad (4.1.79)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Prova : Por indução, para $n = 2$ temos

$$\frac{\partial}{\partial x} [G(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\exp[ilg(x)])] = \frac{\partial G}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\exp[ilg(x)]) + G(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\exp[ilg(x)]).$$

Pois, quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$ $G(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\exp[ilg(x)])$ tende para 0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\exp[ilg(x)]) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\exp[ilg(x)]) dx.$$

Similarmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x) \cdot (\exp[ilg(x)]) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x) \cdot \exp[ilg(x)] dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\exp[ilg(x)]) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x) \cdot \exp[ilg(x)] dx.$$

Suponhamos que (4.1.79) é verdade para $n-1$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (\exp[ilg(x)]) dx = (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{n-1} G}{\partial x^{n-1}}(x) \cdot (\exp[ilg(x)]) dx. \quad (4.1.80)$$

Agora, como

$$\frac{\partial}{\partial x} [G(x) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (\exp[ilg(x)])] = \frac{\partial G}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (\exp[ilg(x)]) + G(x) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\exp[ilg(x)])$$

e $[G(x) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (\exp[ilg(x)])]$ tende para 0 quando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\exp[ilg(x)]) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x) \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} (\exp[ilg(x)]) dx.$$

Daí, (4.1.80) implica

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} (\exp[ilg(x)]) dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x) \cdot (\exp[ilg(x)]) dx.$$

Observação 4.1.39. 1. Seja $g(x) = \sinh(x)$ e $G(x)$ como no lema (4.0.33). O lema 4.1.38 implica que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} l^n(i.g(x)) \cdot (G(x)) \cdot \exp[ilg(x)] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 \cdot P_1(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i.g(x) \cdot G(x) \cdot l}{[g'(x)]^n} \exp[ilg(x)] dx + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2 \cdot P_2(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i.g(x) \cdot G(x) \cdot l^2}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] dx + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-1} \cdot P_{n-1}(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x) \cdot l^{n-1}}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] dx \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x)}{[g'(x)]^n} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \cdot \exp[ilg(x)] dx.
\end{aligned}$$

Mas, aplicando novamente o lema sobre cada parcela de

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_k P_k(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x) \cdot l^k}{[g'(x)]^n} \cdot \exp[ilg(x)] dx,$$

obtemos uma soma de integrais

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_k Q_k(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x)}{[g'(x)]^n} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\exp[ilg(x)]) dx.$$

$P_k(\sinh(x), \cosh(x))$ e $Q_k(\sinh(x), \cosh(x))$ são polinômios em $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$.

2. O lema 4.1.38 implica

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d_k Q_k(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x)}{[g'(x)]^n} \cdot \frac{\partial^m}{\partial x^m} (\exp[ilg(x)]) dx = \\
& (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[\frac{d_k Q_k(\sinh(x), \cosh(x)) \cdot i \cdot g(x) \cdot G(x)}{[g'(x)]^n} \right] \cdot (\exp[ilg(x)]) dx.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.1.40. ([22], páginas 37, 38) *Seja $R(x, y)$ uma função $L^1(\mathbb{R}^2)$, então*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot R(x, y) dx dy dl_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(-\delta, y) dy.$$

Prova:

Não podemos mudar a ordem de integração no sentido usual. Assim, introduzimos um fator Gaussiano $e^{tl_1^2}$, onde $t > 0$. Agora, podemos considerar a integral:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot e^{-tl_1^2} \cdot R(x, y) dx dy dl_1 \text{ na qual podemos aplicar Fubini, então} \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot e^{-tl_1^2} \cdot R(x, y) \cdot dx dy dl_1 = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot e^{-tl_1^2} dl_1 \right\} \cdot R(x, y) dx dy =
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \cdot S_t(\delta + x) dx \right\} dy, \text{ donde } S_t(\delta + x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot e^{-tl_1^2} dl_1.$$

Mas, temos que $S_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}}$, onde

- $\int_{-\infty}^{\infty} S_t(x) dx = 1$, para todo t
- $S_t(x) \geq 0$
- $\lim_{t \rightarrow 0} S_t(x) = 0$ se $x \neq 0$, uniformemente em $|x| \geq \epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$.

Daí, como $\int_{-\infty}^{\infty} R(x, y) \cdot S_t(\delta + x) dx = S_t * R(-\delta, y)$, então $S_t * R(-\delta, y) \rightarrow R(-\delta, y)$, quando $t \rightarrow 0$.

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{il_1(\delta+x)} \cdot R(x, y) dx dy dl_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(-\delta, y) dy.$$

Teorema 4.1.41. *Seja $F, G, H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções, tal que:*

$$F(a, l) = e^{-(l-\lambda_1)^2 - \cosh^2 4a}; G(a, l) = e^{-(l-\lambda_2)^2 - \cosh^2 4a}; H(a, l) = e^{-(l-\lambda_3)^2 - \cosh^2 4a}.$$

Então, $[(F * G) * H](a, l)$ é uma função de Schwartz.

Prova:

De fato,

$$\begin{aligned} [(F * G) * H](a, l) &= \iint_{\mathbb{R}^2 \mathbb{R}^2} e^{\frac{2il_2}{h} \sinh(2(a-a_1))} \cdot e^{\frac{2il}{h} \sinh(2(a_1-a_2))} \cdot e^{\frac{2il_1}{h} \sinh(2(a_2-a))} \\ &\quad [\cosh(2(a_2 - a_1)) \cosh(2(a - a_1)) \cdot \cosh(2(a_2 - a))]^{1/2} \\ &\quad (F * G)(a_1, l_1) \cdot e^{-(l_2-\lambda_3)^2 - \cosh^2 4a_2} \cdot dl_1 dl_2 da_1 da_2 \\ &= e^{\frac{1}{h^2} \pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh(2(a_2-a))} \cdot e^{\frac{2il}{h} \sinh(2(a_1-a_2))} \cdot e^{\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh(2(a-a_1))} \cdot e^{-\frac{\sinh^2(2(a-a_1))}{h^2}} \cdot e^{-\cosh^2 4a_2} \\ &\quad \cdot [\cosh(2(a_2 - a_1)) \cosh(2(a - a_1)) \cdot \cosh(2(a_2 - a))]^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ e^{\frac{1}{h^2} \pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh \alpha} e^{\frac{2i\lambda_1}{h} \sinh(\frac{\beta-\alpha}{2})} e^{-\frac{2i\lambda_2}{h} \sinh(\frac{\beta+\alpha}{2})} e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} e^{-2 \cosh^2(\beta+4a_1) \cosh^2 \alpha} \right.$$

$$e^{-2 \sinh^2(\beta+4a_1) \sinh^2 \alpha} [\cosh \alpha \cosh(\frac{\beta-\alpha}{2}) \cosh(\frac{\beta+\alpha}{2})]^{1/2} d\alpha d\beta \Big\} da_1 da_2 dl_1.$$

$$\text{Escolha } u/2 = a_1 - a \text{ e } v/2 = a_2 - a \Rightarrow \frac{u-v}{2} = a_1 - a_2 \Rightarrow$$

$$= e^{\frac{1}{h^2} \pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh(v)} . e^{\frac{2il}{h} \sinh(u-v)} . e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh(u)} . e^{-\frac{\sinh^2(u)}{h^2}} . e^{-\cosh^2(2v+4a)} . [\cosh(u-v) \cosh(u)]^{1/2} .$$

$$[\cosh(v)]^{1/2} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh \alpha} . e^{\frac{2i\lambda_1}{h} \sinh(\frac{\beta-\alpha}{2})} . e^{-\frac{2i\lambda_2}{h} \sinh(\frac{\beta+\alpha}{2})} . e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} . e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} . \right.$$

$$. e^{-2 \cosh^2(\beta+2u+4a) \cosh^2 \alpha} . e^{-2 \sinh^2(\beta+2u+4a) \sinh^2 \alpha} . [\cosh \alpha \cosh(\frac{\beta-\alpha}{2}) \cosh(\frac{\beta+\alpha}{2})]^{1/2} d\alpha d\beta \Big\} dudv dl_1 =$$

$$= e^{\frac{1}{h^2} \pi^{\frac{3}{2}}} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{2il}{h} (\sinh u \cosh v - \sinh v \cosh u)} . e^{\frac{2il_1}{h} \sinh v} . e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh u} . e^{-[\cosh^2 2v \cosh^2 4a + \sinh^2 4a \sinh^2 2v]} .$$

$$e^{-\frac{\sinh^2 u}{h^2}} . e^{-2 \sinh 2v \cosh 2v \sinh 4a \cosh 4a} . [(\cosh u \cosh v - \sinh u \sinh v) \cosh(u) \cosh(v)]^{1/2} .$$

$$\left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{2il_1}{h} \sinh \alpha} . e^{\left[\frac{(\sqrt{2})2i\lambda_1 (\sinh \beta \cosh \alpha - \sinh \alpha \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{-\left[\frac{(\sqrt{2})2i\lambda_2 (\sinh \beta \cosh \alpha + \sinh \alpha \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh \alpha + \sinh \alpha \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} . \right.$$

$$. e^{-2 \cosh^2(\beta+2u+4a) \cosh^2 \alpha} . e^{-2 \sinh^2(\beta+2u+4a) \sinh^2 \alpha} [\cosh \alpha \cosh(\frac{\beta-\alpha}{2}) \cosh(\frac{\beta+\alpha}{2})]^{1/2} d\alpha d\beta \Big\} dudv dl_1. \quad (4.1.81)$$

Agora, se fazemos $\delta = \frac{2 \sinh v}{h} \Rightarrow \frac{\delta^2 h^2}{4} = \sinh^2 v$ e $\cosh v = \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}$, então, a integral 4.1.81 é igual a:

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{h^2} \pi^{\frac{3}{2}}}}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh u - \frac{\delta h \sinh u}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \cosh(u) \right]^{1/2} . e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh u} .$$

$$. e^{\frac{2il}{h} \left(\sinh u \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\delta h}{2} \cosh u \right)} . e^{-\frac{\sinh^2 u}{h^2}} . e^{-4 \sinh^2 4a \left[\frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) \right]} . e^{-\cosh^2 4a \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right)^2 + 2 \frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^4 h^4}{16} \right]} .$$

$$e^{-2\delta h \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^2 h^2}{4} \right] \sinh 4a \cosh 4a} . e^{il_1 \delta} . \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} . e^{\frac{2il_1}{h} \sinh \alpha} . e^{\left[\frac{2i\lambda_1 (\sqrt{2}) (\sinh \beta \cosh \alpha - \sinh \alpha \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta + 1}} \right]} \right\} .$$

$$e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh \alpha + \sinh \alpha \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \cosh \alpha + \sinh \alpha \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh \alpha} . e^{-2 \cosh^2(\beta+2u+4a) \cosh^2 \alpha} .$$

$$e^{-2 \sinh^2(\beta+2u+4a) \sinh^2 \alpha} . [\cosh \alpha (\cosh \alpha + \cosh \beta)]^{1/2} . d\alpha d\beta \Big\} dud\delta dl_1. \quad (4.1.82)$$

Logo, fazendo $\theta = \frac{2 \sinh \alpha}{h} \Rightarrow \frac{\theta^2 h^2}{4} = \sinh^2 \alpha$ e $\cosh \alpha = \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1}$ temos que a integral 4.1.82 é igual a

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{h^2}}}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh u - \frac{\delta h \sinh u}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \cosh(u) \right]^{1/2} . e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh u} .$$

$$. e^{\frac{2i\lambda}{h} \left(\sinh u \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\delta h}{2} \cosh u \right)} . e^{-\frac{\sinh^2 u}{h^2}} . e^{-4 \sinh^2 4a \left[\frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) \right]} . e^{-\cosh^2 4a \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right)^2 + 2 \frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^4 h^4}{16} \right]} .$$

$$e^{-2\delta h \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^2 h^2}{4} \right]} \sinh 4a \cosh 4a . e^{il_1 \delta} . \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{il_1 \theta} . e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\theta h}{2} \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\theta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \right.$$

$$e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} + \frac{\theta h}{2} \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} + \frac{\theta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1}} . e^{-2 \cosh^2(\beta+2u+4a) \left(\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1 \right)}$$

$$. e^{-\frac{\theta^2 h^2}{2} \sinh^2(\beta+2u+4a) \left[\left(\sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} \right) \left(\sqrt{\frac{\theta^2 h^2}{4} + 1} + \cosh(\beta) \right) \right]^{1/2} d\theta d\beta \Big\} dud\delta dl_1.$$

Realmente, temos uma integral da forma

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} S(\delta, u, a, l) . e^{il_1 \delta} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\theta l_1} . R(\theta, \beta, u, a) d\theta d\beta \right\} dl_1 d\delta du; \text{ Donde, estudaremos a}$$

integral

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{il_1 \delta} . e^{i\theta l_1} . R(\theta, \beta, u, a) d\theta d\beta dl_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{il_1(\delta+\theta)} . R(\theta, \beta, u, a) d\theta d\beta dl_1.$$

Mas, do lema 4.1.40, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{il_1(\delta+\theta)} . R(\theta, \beta, u, a) d\theta d\beta dl_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R(-\delta, \beta, u, a) d\beta. \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned}
& [(F * G) * H](a, l) = \\
& = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{h^2} h}}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh u - \frac{\delta h \sinh u}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \cosh(u) \right) \right]^{1/2} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh u} \cdot \\
& \cdot e^{\frac{2il}{h} \left(\sinh u \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\delta h}{2} \cosh u \right)} \cdot e^{-\frac{\sinh^2 u}{h^2}} \cdot e^{-4 \sinh^2 4a \left[\frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) \right]} \cdot e^{-\cosh^2 4a \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right)^2 + 2 \frac{\delta^2 h^2}{4} \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^4 h^4}{16} \right]} \cdot \\
& e^{-2\delta h \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \left[\left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right) + \frac{\delta^2 h^2}{4} \right] \sinh 4a \cosh 4a} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1 (\sqrt{2}) (\sinh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} + \frac{\delta h}{2} \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} + \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot \right. \\
& e^{\left[\frac{2i\lambda_2 (\sqrt{2}) (\sinh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\delta h}{2} \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} - \frac{\delta h}{2} \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1}} \cdot e^{-2 \cosh^2 (\beta + 2u + 4a) \left(\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1 \right)} \\
& \cdot e^{-\frac{\delta^2 h^2}{2} \sinh^2 (\beta + 2u + 4a) \left[\left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} \right) \left(\sqrt{\frac{\delta^2 h^2}{4} + 1} + \cosh(\beta) \right) \right]^{1/2} d\beta} \Bigg\} dud\delta.
\end{aligned}$$

Assim, se fazemos a mudança de variáveis:

$$\sinh \gamma = \frac{\delta h}{2} \Rightarrow d\delta = \frac{2}{h} \cosh \gamma d\gamma \text{ temos que:}$$

$$\begin{aligned}
& [(F * G) * H](a, l) = \\
& = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{h^2} h}}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[(\cosh(\gamma) \cosh u - \sinh u \sinh(\gamma)) \cosh(\gamma) \cosh(u) \right]^{1/2} \cdot e^{\frac{2il}{h} \left(\sinh u \cosh(\gamma) - \cosh(\gamma) \cosh u \right)} \cdot \\
& e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh u} \cdot e^{-\frac{\sinh^2 u}{h^2}} \cdot e^{-\sinh^2 4a [\sinh^2(\gamma) (\cosh^2(\gamma))]} \cdot e^{-\cosh^2 4a \left[(\cosh^2(\gamma))^2 + 2 \sinh^2(\gamma) (\cosh^2(\gamma)) + \sinh^4(\gamma) \right]} \cdot \\
& e^{-4 \sinh(\gamma) (\cosh(\gamma)) \left[\cosh^2(\gamma) + \sinh^2(\gamma) \right] \sinh 4a \cosh 4a} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1 (\sqrt{2}) (\sinh \beta \cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\gamma) + \sinh(\gamma) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot \right. \\
& e^{\left[\frac{2i\lambda_2 (\sqrt{2}) (\sinh \beta \cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\gamma) - \sinh(\gamma) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta \cosh(\gamma)} \cdot e^{-2 \cosh^2 (\beta + 2u + 4a) (\cosh^2(\gamma))} \\
& \cdot e^{-2 \sinh^2(\gamma) \sinh^2 (\beta + 2u + 4a) \left[(\cosh(\gamma)) (\cosh(\gamma) + \cosh(\beta)) \right]^{1/2} d\beta} \Bigg\} dud\delta.
\end{aligned}$$

Por outro lado, seja $m = u - \gamma$ and $n = u + \gamma \Rightarrow 2u = m + n$ e $2\gamma = n - m \Rightarrow [(F * G) * H](a, l) =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{1}{2h}}}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\cosh(m) \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right]^{1/2} \cdot e^{\frac{2il}{h} \sinh(m)} \cdot \\
&\quad e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh \frac{n+m}{2}} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)-1}{2h^2}} \cdot e^{-\sinh^2 4a [\sinh^2(n-m)]} \cdot e^{-\cosh^2 4a \cosh^2(n-m)} \cdot \\
&\quad e^{-2 \sinh(n-m) \cosh(n-m) \sinh 4a \cosh 4a} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot \right. \\
&\quad e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh(n-m)-1)} \cdot e^{-\cosh^2(\beta+n+m+4a)(\cosh(n-m)+1)} \\
&\quad \cdot e^{-(\cosh(n-m)-1) \sinh^2(\beta+n+m+4a)} \left[\left(\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \right) \left(\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right) \right]^{1/2} d\beta \Big\} dndm. \\
&= \frac{e^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2h^2}}}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\left(\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right) \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right]^{1/2} \cdot \\
&\quad e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot \\
&\quad e^{\frac{2il}{h} \sinh(m)} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh \frac{n+m}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh(\frac{n-m}{2}))} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot \\
&\quad e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm. \tag{4.1.83}
\end{aligned}$$

Vamos a dividir nossa demonstração nos seguintes passos:

passo 1

Da integral 4.1.83, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial a} [(F * G) * H](a, l) =$$

$$= \frac{e^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2h^2} h}}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right] \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \Bigg]^{1/2} \cdot \{ -$$

$$8 \sinh(n-m+4a) \cosh(n-m+4a) - 8[\sinh(\beta+n+m+4a) \cosh(\beta+n+m+4a) +$$

$$\cosh(\beta+n+m+4a) \sinh(\beta+n+m+4a)] (\cosh(n-m)) \} \cdot e^{\frac{2il}{h} \sinh(m)}.$$

$$e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh \frac{n+m}{2}}$$

$$e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{n-m}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)] (\cosh(n-m))} d\beta dndm.$$

Estudaremos dessa forma, a seguinte integral:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right] \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \Bigg]^{1/2} \cdot$$

$$|\sinh(n-m+4a) \cosh(n-m+4a)| (\cosh(n-m)) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{n-m}{2})}.$$

$$e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)] (\cosh(n-m))} d\beta dndm. \quad (4.1.84)$$

De onde, se fazemos $v = n - m$ e $u = n + m \Rightarrow u - v = 2n$ and $u + v = 2m$ então, a integral 4.1.84 é

$$\frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{v}{2}\right) + \cosh(\beta) \right] \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \Bigg]^{1/2} \cdot$$

$$|\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{v}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(v+4a)}.$$

$$e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a) + \sinh^2(\beta+u+4a)] (\cosh(v))} d\beta dudv. \quad (4.1.85)$$

Agora, podemos ver claramente que:

$$\sinh^2 x \geq x^2; \cosh x \geq \frac{x^2}{2} \text{ e}$$

$$\left[\left(\cosh\left(\frac{v}{2}\right) + \cosh(\beta) \right) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right]^{1/2} \leq \left(\cosh\left(\frac{v}{2}\right) + \cosh(\beta) \right) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right)$$

logo, a integral 4.1.85 é:

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh(\beta) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{v}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(v+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a) + \sinh^2(\beta+u+4a)] (\cosh(v))} d\beta dudv. \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh(v/2) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{v}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(v+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a) + \sinh^2(\beta+u+4a)] (\cosh(v))} d\beta dudv. \\
&\leq \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh(\beta) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2} \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} d\beta dudv. \\
&\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh(v/2) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2} \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} d\beta dudv. \\
&\leq \sqrt{2\pi} \hbar \cdot e^{h/2} \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} d\beta dudv. \\
&\quad + \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \hbar \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^s \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \left[\cosh(v/2) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cdot |\sinh(v+4a) \cosh(v+4a)| (\cosh(v)) \cdot \\
&\quad \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como as integrais acima tem a mesma estrutura, além disso,

$$\begin{aligned}
\left[\cosh(v/2) \cosh\left(\frac{u+v}{2}\right) \cosh\left(\frac{u}{2}\right) \right] &= e^u \cdot e^{2v} + e^u \cdot e^v + e^{u-v} + e^{2v} + 1 + 2e^v + e^u + e^{-v+u} \\
&+ e^{-v-u} + 1 + e^{-2v} + 2e^{-v}
\end{aligned}$$

e

$$\sinh(v+4a) \cosh(v+4a) = \frac{1}{2} \sinh(2v+8a)$$

Podemos estudar integrais do tipo

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^s e^{nu+mv} \cdot |(e^{2v+8a} - e^{-2v-8a})| \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv \quad (4.1.86)$$

para n, m reais.

Assim a integral 4.1.86 é

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^s e^{nu+mv} \cdot e^{2v+8a} \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv \\ &+ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^s e^{nu+mv} \cdot e^{-2v-8a} \cdot e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} dudv \\ &= 2\hbar\sqrt{\pi} \cdot e^{h^2n^2} \cdot e^{-16a^2+8a} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \int_{\mathbb{R}} |a|^s \cdot e^{-[\frac{3}{2}v^2+2(4a-1-\frac{m}{2})v]} dudv \\ &+ 2\hbar\sqrt{\pi} \cdot e^{h^2n^2} \cdot e^{-16a^2-8a} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \int_{\mathbb{R}} |a|^s \cdot e^{-[\frac{3}{2}v^2+2(4a+1-\frac{m}{2})v]} dudv \\ &= 2\hbar\sqrt{\pi} \cdot e^{h^2n^2} \cdot e^{-16a^2+8a} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{2(4a-1-\frac{m}{2})^2}{3}} \\ &+ 2\hbar\sqrt{\pi} \cdot e^{h^2n^2} \cdot e^{-16a^2-8a} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}\hbar \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{2(4a+1-\frac{m}{2})^2}{3}}. \end{aligned}$$

Logo, 4.1.86 é limitada e portanto $\frac{\partial}{\partial a}[(F * G) * H](a, l)$ é limitado.

Passo 2

Os lemas 4.1.37 e 4.1.38 implicam:

$$l \cdot |a|^s \frac{\partial}{\partial l}[(F * G) * H](a, l) = \frac{e^{-1}\pi^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3}{2h^2}}\hbar}{2}.$$

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \frac{\partial}{\partial m} \left\{ \sinh(m) \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right] \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right\}^{1/2}.$$

$$e^{\frac{2il}{h}} \sinh(m) \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{h\sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh \frac{n+m}{2}}$$

$$e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh(\frac{n-m}{2}))} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm. +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{\frac{1}{\hbar^2} \pi^{\frac{3}{2}} \hbar^2}}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \left\{ \sinh(m) \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right] \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right]^{1/2} \right\} \\
& \left\{ -\frac{i\lambda_3}{\hbar} \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) - \frac{1}{2\hbar^2} + 2 \sinh(n-m+2a) \cosh(n-m+2a) - \right. \\
& - \frac{i\lambda_1(\sqrt{2}) [\sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + \cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta] \sqrt{\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}}{\hbar (\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1)} + \\
& + \frac{i\lambda_1(\sqrt{2}) [(\cosh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta) (\sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + \cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)]}{\hbar (\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{i\lambda_2(\sqrt{2}) [(\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta) \sqrt{\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}]}{\hbar (\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1)} - \\
& - \frac{i\lambda_2(\sqrt{2}) (\cosh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta) (\cosh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{\hbar (\cosh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{1}{2\hbar^2} \sinh\left(\frac{n-m}{2}\right) \cosh \beta + \sinh(n-m) [\cosh^2(\beta + n + m + 2a) + \sinh^2(\beta + n + m + 2a)] - \\
& \left. - 2 \sinh(\beta + n + m + 2a) \cosh(\beta + n + m + 2a) [\cosh(n-m) + 1] \right\}.
\end{aligned}$$

$$e^{\frac{2il}{\hbar} \sinh(m)} . e^{\left[\frac{2i\lambda_2(\sqrt{2}) (\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{\hbar \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{\left[\frac{2i\lambda_1(\sqrt{2}) (\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{\hbar \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]} . e^{-\frac{2i\lambda_3}{\hbar} \sinh \frac{n+m}{2}} .$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{1}{\hbar^2} \cosh \beta (\cosh(\frac{n-m}{2}))} . e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2\hbar^2}} . e^{-\cosh^2(n-m+4a)} . \\
& . e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)] (\cosh(n-m))} d\beta dndm.
\end{aligned}$$

Agora, como as expressões nos radicais são maiores que 1, é suficiente estudarmos a seguinte integral:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s |\sinh m| |\sinh(n-m)| \left| \sinh\left(\frac{n-m}{2}\right) \right| \cosh(m) \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \sinh(\beta) \cosh(\beta)$$

$$\sinh^2(\beta + n + m + 4a) \cdot \cosh^2(\beta + n + m + 4a) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}}.$$

$$e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm.$$

Se fazemos $u = n + m$ e $v = n - m \Rightarrow u + v = 2n$ e $u - v = 2m$, então

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s |\sinh m| |\sinh(n-m)| \left| \sinh\left(\frac{n-m}{2}\right) \right| \cosh(m) \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \sinh(\beta) \cosh(\beta)$$

$$\sinh^2(\beta + n + m + 4a) \cdot \cosh^2(\beta + n + m + 4a) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}}.$$

$$e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm. =$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s \sinh\left(\frac{u-v}{2}\right) |\sinh(v)| \left| \sinh\left(\frac{v}{2}\right) \right| \cosh\left(\frac{u-v}{2}\right) \cosh\left(\frac{v}{2}\right) \sinh(\beta) \cosh(\beta)$$

$$\sinh^2(\beta + u + 4a) \cdot \cosh^2(\beta + u + 4a) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(v)}{2})} e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}}.$$

$$e^{-\cosh^2(v+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a)+\sinh^2(\beta+u+4a)](\cosh(v))} d\beta dudv. \leq$$

$$\leq \frac{1}{4^5} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s (e^{u-v} + e^{v-u}) \cdot (e^v + e^{-v}) \cdot (e^{2\beta} + e^{-2\beta}) \cdot (e^{4\beta+4u+16a} + e^{-4\beta-4u-16a} + 2) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(v)}{2})}.$$

$$e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(v+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a)+\sinh^2(\beta+u+4a)](\cosh(v))} d\beta dudv. \leq$$

$$\leq \frac{1}{4^5} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^s (e^{u-v} + e^{v-u}) \cdot (e^v + e^{-v}) \cdot (e^{2\beta} + e^{-2\beta}) \cdot (e^{4\beta+4u+16a} + e^{-4\beta-4u-16a} + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2}.$$

$$e^{-\frac{u^2}{4h^2}} \cdot e^{-(v+4a)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} v^2} d\beta dudv. \leq$$

Mas, com um raciocínio análogo ao passo 1 podemos observar que esta integral é limitada

Passo 3

Geralmente, se

$$f_1(n, m, \beta) = \left[\frac{2\lambda_1(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{\hbar \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) + \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]$$

$$f_2(n, m, \beta) = \left[\frac{2\lambda_2(\sqrt{2})(\sinh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \cosh \beta)}{\hbar \sqrt{\cosh \beta \cosh(\frac{n-m}{2}) - \sinh(\frac{n-m}{2}) \sinh \beta + 1}} \right]$$

$$G(n, m, \beta) = \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) \left[(\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta)) \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right]^{1/2},$$

então

$$\begin{aligned} [(F * G) * H](a, l) &= \frac{e^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2\hbar^2}} \hbar}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} G(n, m, \beta) \cdot e^{\frac{2il}{\hbar} \sinh(m)} \cdot e^{if_2(n, m, \beta)} \cdot e^{if_1(n, m, \beta)} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{\hbar} \sinh \frac{n+m}{2}} \cdot \\ &\quad e^{-\frac{1}{\hbar^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2\hbar^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot \\ &\quad e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l^s |a|^j \frac{\partial^{r+t}}{\partial a^r \partial t} [(F * G) * H](a, l) &= \\ &= \frac{e^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2\hbar^2}} \hbar}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |a|^j \left(\frac{i}{\hbar}\right)^t (\sinh m)^t G(n, m, \beta) \cdot l^s e^{\frac{2il}{\hbar} \sinh(m)} \cdot \\ &\quad e^{if_2(n, m, \beta)} \cdot e^{if_1(n, m, \beta)} \cdot e^{-\frac{2i\lambda_3}{\hbar} \sinh \frac{n+m}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2\hbar^2}} \cdot \\ &\quad e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial a^r} \left\{ e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} \right\} d\beta dndm, \quad (4.1.87)$$

Mas, por um lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a^r} \left\{ e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} \right\} &= \\ &= \sum_{k=1}^r Q_k(\cosh(n-m+4a), \sinh(n-m+4a), \cosh(n-m)) \\ &\quad \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a) - [\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))}, \end{aligned}$$

onde Q_k são polinômios trigonométricos hiperbólicos com variáveis

$$\{\cosh(n - m + 4a), \sinh(n - m + 4a), \cosh(n - m)\}$$

e se

$$f(m) = \sinh^{t-1}(m) \left(\frac{i}{h}\right)^{t-1} \cdot G(n, m, \beta) \cdot e^{\frac{2il}{h} \sinh(m)} \cdot e^{if_2(n, m, \beta)} \cdot e^{if_1(n, m, \beta)} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})}.$$

$$e^{-\frac{2i\lambda_3}{h} \sinh \frac{n+m}{2}} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \frac{\partial}{\partial a^r} \left\{ e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a) + \sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} \right\}$$

a observação 4.1.39(1) implica que

$$\begin{aligned} l^s |a|^j \frac{\partial^{r+t}}{\partial a^r l^t} [(F * G) * H](a, l) = \\ = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{c_1 \cdot P_1(\sinh(m), \cosh(m)) \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m) \cdot l}{[g'(m)]^s} \exp[ilg(m)] dmdnd\beta + \\ \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{c_2 \cdot P_2(\sinh(m), \cosh(m)) \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m) \cdot l^2}{[g'(m)]^s} \cdot \exp[ilg(m)] dmdnd\beta + \dots + \\ + \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{c_{n-1} \cdot P_{n-1}(\sinh(m), \cosh(m)) \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m) \cdot l^{s-1}}{[g'(m)]^s} \cdot \exp[ilg(m)] dmdnd\beta + \\ + \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1 \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m)}{[g'(m)]^s} \frac{\partial^s}{\partial m^s} \cdot \exp[ilg(m)] dmdnd\beta, \end{aligned}$$

onde aplicando novamente a observação 4.1.39(1) em cada parcela da expressão anterior, obtemos uma soma de integrais do tipo:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1 \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m)}{[g'(m)]^s} \frac{\partial^s}{\partial m^s} \cdot \exp[ilg(m)] dmdnd\beta.$$

Mas, da observação 4.1.39(2)

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1 \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m)}{[g'(m)]^s} \frac{\partial^s}{\partial m^s} \cdot (\exp[ilg(m)]) dmdnd\beta = \\ = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^s}{\partial m^s} \left(\frac{1 \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m)}{[g'(m)]^s} \right) \cdot \exp[ilg(m)] dmdnd\beta. \end{aligned}$$

Logo, por como está definida $\frac{1 \cdot i \cdot g(m) \cdot f(m)}{[g'(m)]^s}$ e o fato que

$$\cosh \beta \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \sinh\left(\frac{n-m}{2}\right) \sinh \beta + 1 > 1$$

$$\cosh \beta \cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) - \sinh\left(\frac{n-m}{2}\right) \sinh \beta + 1 > 1$$

$$\left[\left(\cosh\left(\frac{n-m}{2}\right) + \cosh(\beta) \right) \cosh(m) \cosh\left(\frac{n+m}{2}\right) \right] \geq 1,$$

então, $\frac{1.i.g(m).f(m)}{[g'(m)]^s}$ é em modulo menor o igual a expressões do tipo:

$$|\sinh^r(\beta+n+m+4a)| \cosh^s(\beta+n+m+4a) |\sinh^i(n-m)| \cosh^j(n-m) |\sinh^t\left(\frac{n-m}{2}\right)|.$$

$$\begin{aligned} & \cosh^k\left(\frac{n-m}{2}\right) \cdot \sinh^p(\beta) \cosh^q(\beta) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot \\ & \cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} \end{aligned}$$

logo, é suficiente estudar integrais do tipo:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\sinh^r(\beta+n+m+4a)| \cosh^s(\beta+n+m+4a) |\sinh^i(n-m)| \cosh^j(n-m) |\sinh^t\left(\frac{n-m}{2}\right)|.$$

$$\cdot \cosh^k\left(\frac{n-m}{2}\right) \cdot \sinh^p(\beta) \cosh^q(\beta) \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot$$

$$\cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{r+s+i+j+t+k+p+q}} \iiint_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta+n+m+4a} + e^{-\beta-n-m-4a})^{r+s} (e^{n-m} + e^{m-n})^{i+j}.$$

$$(e^{\frac{n-m}{2}} + e^{\frac{m-n}{2}})^{t+k} \cdot (e^\beta + e^{-\beta})^{p+q} \cdot e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} \cdot e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} \cdot e^{-\cosh^2(n-m+4a)} \cdot$$

$$\cdot e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm$$

o que equivale a estudar a seguinte integral:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta+n+m+4a} + e^{-\beta-n-m-4a})^r (e^{n-m} + e^{m-n})^i \cdot (e^{\frac{n-m}{2}} + e^{\frac{m-n}{2}})^t$$

$$.(e^\beta + e^{-\beta})^p .e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} .e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} .e^{-\cosh^2(n-m+4a)} .$$

$$.e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm$$

Assim, se fazemos $v = n - m$ e $u = n + m \Rightarrow u + v = 2n$ e $u - v = 2m$, então

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta+n+m+4a} + e^{-\beta-n-m-4a})^r (e^{n-m} + e^{m-n})^i .(e^{\frac{n-m}{2}} + e^{\frac{m-n}{2}})^t \\ & .(e^\beta + e^{-\beta})^p .e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(n-m)}{2})} .e^{-\frac{\cosh(n+m)}{2h^2}} .e^{-\cosh^2(n-m+4a)} . \\ & .e^{-[\cosh^2(\beta+n+m+4a)+\sinh^2(\beta+n+m+4a)](\cosh(n-m))} d\beta dndm = \\ & = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta+u+4a} + e^{-\beta-u-4a})^r (e^v + e^{-v})^i .(e^{\frac{v}{2}} + e^{\frac{-v}{2}})^t .(e^\beta + e^{-\beta})^p .e^{-\frac{1}{h^2} \cosh \beta (\cosh \frac{(v)}{2})} . \\ & .e^{-\frac{\cosh(u)}{2h^2}} .e^{-\cosh^2(v+4a)} .e^{-[\cosh^2(\beta+u+4a)+\sinh^2(\beta+u+4a)](\cosh(v))} d\beta dudv \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} (e^{\beta+u+4a} + e^{-\beta-u-4a})^r (e^v + e^{-v})^i .(e^{\frac{v}{2}} + e^{\frac{-v}{2}})^t .(e^\beta + e^{-\beta})^p .e^{-\frac{1}{2h^2} \beta^2} \\ & .e^{-\frac{u^2}{4h^2}} .e^{-(v+4a)^2} .e^{-\frac{v^2}{2}} d\beta dudv \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (e^{\beta+n+m+4a} + e^{-\beta-n-m-4a})^r &= \sum_{k'=0}^r \binom{r}{k'} e^{(r-k')(\beta+nm+4a)} .e^{-k'(\beta+n+m+4a)}, \\ (e^{n-m} + e^{m-n})^i &= \sum_{j'=0}^i \binom{i}{j'} e^{(i-j')(n-m)} .e^{-j'(n-m)}, \\ (e^{\frac{n-m}{2}} + e^{\frac{m-n}{2}})^t &= \sum_{t'=0}^t \binom{t}{t'} e^{(t-t')(\frac{n-m}{2})} .e^{-t'(\frac{n-m}{2})}, \\ (e^\beta + e^{-\beta})^p &= \sum_{s'=0}^p \binom{p}{s'} e^{(p-s')\beta} .e^{-s'\beta}, \end{aligned}$$

então, temos a seguinte integral

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{(r-2k')(\beta+u+4a)} . e^{(i-2j')(v)} . e^{(t-2t')(\frac{v}{2})} . e^{(p-2s')\beta} . e^{-\frac{1}{2\hbar^2}\beta^2} . e^{-\frac{u^2}{4\hbar^2}} . e^{-(v+4a)^2} . e^{-\frac{v^2}{2}} d\beta du dv =$$

$$\hbar^2 2\pi \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{4(r-2k')a} . e^{-16a^2} . e^{\frac{\hbar^2}{2}[r-2k'+p-2s']^2} . e^{\frac{\hbar^2}{2}(2k'-r)^2} . e^{\frac{2}{3}[(\frac{2j'-i}{2})+(\frac{2t'-t}{4})+4a]^2} .$$

Portanto a expressão 4.1.87 é limitada.

Apêndice E

De fato, se $X \in \mathfrak{X}(H_d^2 \times \overline{H}_d^2)$, então

$$X = a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+,$$

logo

$$J_{\pm}(a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+) = a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+ \Rightarrow$$

$$J_{\pm}(a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+) = -a_1 \partial x_- - a_2 \partial y_- - a_3 \partial x_+ - a_4 \partial y_+ \Rightarrow$$

$$J_{\pm}^2 = -Id_{\pm}.$$

Também podemos observar que

$$X = a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+ \Rightarrow$$

$$J_{\pm}(X) = a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+ \Rightarrow$$

$$\omega_{\pm}(X, J_{\pm}(X)) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+, a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+) \\ &\quad - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+, a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+) \\ &= \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial x_-, a_1 \partial y_-) + \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_2 \partial y_-, -a_2 \partial x_-) - \\ &\quad + \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_3 \partial x_+, -a_3 \partial y_+) - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_4 \partial y_+, a_4 \partial x_+) \\ &= \frac{a_1^2}{y_-^2} + \frac{a_2^2}{y_-^2} + \frac{a_3^2}{y_+^2} + \frac{a_4^2}{y_+^2}. \end{aligned}$$

Tomemos

$$X = a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+ \text{ e } Y = b_1 \partial x_- + b_2 \partial y_- + b_3 \partial x_+ + b_4 \partial y_+$$

logo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ \right) (X, Y) = \\ &= \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+, b_1 \partial x_- + b_2 \partial y_- + b_3 \partial x_+ + b_4 \partial y_+) - \\ & \quad - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_1 \partial x_- + a_2 \partial y_- + a_3 \partial x_+ + a_4 \partial y_+, b_1 \partial x_- + b_2 \partial y_- + b_3 \partial x_+ + b_4 \partial y_+) \\ &= \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial x_-, b_2 \partial y_-) + \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_2 \partial y_-, b_1 \partial x_-) \\ & \quad - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_3 \partial x_+, b_4 \partial y_+) - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_4 \partial y_+, b_3 \partial x_+) \\ &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{y_-^2} + \frac{a_4 b_3 - a_3 b_4}{y_+^2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$J_\pm(X) = a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+ \text{ e } J_\pm(Y) = b_1 \partial y_- - b_2 \partial x_- - b_3 \partial y_+ + b_4 \partial x_+,$$

logo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ \right) (J_\pm X, J_\pm Y) = \\ &= \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial y_- - a_2 \partial x_- - a_3 \partial y_+ + a_4 \partial x_+, b_1 \partial y_- - b_2 \partial x_- - b_3 \partial y_+ + b_4 \partial x_+) \\ & \quad \left(\frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ \right) (J_\pm X, J_\pm Y) = \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (a_1 \partial y_-, -b_2 \partial x_-) + \\ & \quad + \frac{1}{y_-^2} dx_- \wedge dy_- (-a_2 \partial x_-, b_1 \partial y_-) - \\ & \quad - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (-a_3 \partial y_+, b_4 \partial x_+) - \\ & \quad - \frac{1}{y_+^2} dx_+ \wedge dy_+ (a_4 \partial x_+, -b_3 \partial y_+) \\ &= \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{y_-^2} + \frac{a_4 b_3 - a_3 b_4}{y_+^2}. \end{aligned}$$

Então, $\omega_\pm(J_\pm X, J_\pm Y) = \omega_\pm(X, Y)$, assim $J_\pm$ é uma estrutura complexa compatível com a forma simplética.

Apêndice F

Sejam H^2 o semiplano direito e $\Phi : TH^2 \longrightarrow H^2 \times H^2$; $(m, v_m) \mapsto (\exp_m(-v_m), \exp_m(v_m))$, tal que, para $(x, y; r, \theta) \in TH^2$ e $(x_-, y_-; x_+, y_+) \in H^2 \times H^2$ temos que:

$$x_- = \frac{2xe^{\frac{tr}{x}}}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)}; \quad y_- = \frac{-x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)} + y;$$

$$x_+ = \frac{2xe^{\frac{r}{x}}}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)}; \quad y_+ = \frac{x.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)} + y.$$

Por outro lado, se $P = \langle \partial r, \partial \theta \rangle$ é a polarização trivial no fibrado tangente e $F = \langle \partial z_-, \partial \bar{z}_+ \rangle$, com $z_- = x_- + iy_-$, $z_+ = x_+ + iy_+$, é a polarização holomorfa em $H^2 \times H^2$, dada pela identificação natural de $H^2 \times H^2 \simeq H_d^2 \times H_d^2$, o semiplano direito complexo, então se $\tilde{F} = \Phi_*^{-1}(F)$, temos que as polarizações P e $\tilde{F}$ são transversais. De fato, para fazer isto vamos primeiro calcular as derivadas parciais de x_-, y_-, x_+, y_+ com respeito as variáveis r, θ . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_-}{\partial r} &= \frac{2e^{\frac{r}{x}}[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)] - 4e^{\frac{3r}{x}}(1 + C_\theta)}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \\ &= \frac{2e^{\frac{r}{x}} - 2e^{\frac{r}{x}}C_\theta + 2e^{\frac{3r}{x}}C_\theta + 2e^{\frac{3r}{x}}C_\theta - 4e^{\frac{3r}{x}} - 4e^{\frac{3r}{x}}C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \\ &= \frac{2e^{\frac{r}{x}} - 2e^{\frac{r}{x}}C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} - 2e^{\frac{3r}{x}}C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_-}{\partial \theta} = \frac{-2x.e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_-}{\partial r} &= \frac{-2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)] + 2e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta) (e^{\frac{2r}{x}} - 1) S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta + 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta C_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta C_\theta + 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta [e^{\frac{2r}{x}} - 1 + e^{\frac{2r}{x}} C_\theta - C_\theta]}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta + 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta C_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta C_\theta + 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta + 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta C_\theta - 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_-}{\partial \theta} &= \frac{-x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)] + x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 - e^{\frac{2r}{x}}) S_\theta^2}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta + x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta^2 - x.e^{\frac{2r}{x}}.(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&+ \frac{-x.e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta^2 + x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2 - x.e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta - x.e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta + x(e^{\frac{2r}{x}} - 1) - x.e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-x.e^{\frac{2r}{x}}C_\theta + xC_\theta - x.e^{\frac{4r}{x}}C_\theta + x.e^{\frac{2r}{x}}C_\theta + x.e^{\frac{2r}{x}} - x - x.e^{\frac{4r}{x}} + x.e^{\frac{2r}{x}}}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{x.C_\theta - x.e^{\frac{4r}{x}}C_\theta - x - x.e^{\frac{4r}{x}} + 2x.e^{\frac{2r}{x}}}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{x[(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_+}{\partial r} &= \frac{2e^{\frac{r}{x}} [1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)] - 4e^{\frac{3r}{x}} (1 - C_\theta)}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{2e^{\frac{r}{x}} + 2e^{\frac{r}{x}} C_\theta + 2e^{\frac{3r}{x}} - 2e^{\frac{3r}{x}} C_\theta - 4e^{\frac{3r}{x}} + 4e^{\frac{3r}{x}} C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{2e^{\frac{r}{x}} + 2e^{\frac{r}{x}} C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} + 2e^{\frac{3r}{x}} C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_+}{\partial r} &= \frac{2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta [1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)] - 2e^{\frac{2r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 - C_\theta) S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta + 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta C_\theta + 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta C_\theta - 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta + 2e^{\frac{4r}{x}} S_\theta C_\theta + 2e^{\frac{2r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{2r}{x}} C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_+}{\partial \theta} &= \frac{x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]C_\theta - x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[-S_\theta + e^{\frac{2r}{x}} S_\theta]S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{x(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta + x(e^{\frac{2r}{x}} - 1) + xe^{\frac{2r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta - xe^{\frac{2r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{xe^{\frac{2r}{x}} C_\theta - xC_\theta + xe^{\frac{2r}{x}} - x + xe^{\frac{4r}{x}} C_\theta - xe^{\frac{2r}{x}} C_\theta - xe^{\frac{4r}{x}} + xe^{\frac{2r}{x}}}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-xC_\theta - x + xe^{\frac{4r}{x}} C_\theta - xe^{\frac{4r}{x}} + 2xe^{\frac{2r}{x}}}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} = \frac{x[(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

Vamos ver agora que as polarizações acima são transversais, para isto notemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
dz_- \wedge d\bar{z}_+ &= (dx_- + idy_-) \wedge (dx_+ - idy_+) \\
&= dx_- \wedge dx_+ - idy_- \wedge dy_+ + idy_- \wedge dx_+ + dy_- \wedge dy_+ = \\
&= (dx_- \wedge dx_+ + dy_- \wedge dy_+) + i(dy_- \wedge dx_+ - dx_- \wedge dy_+), \tag{4.1.88}
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(dx_- \wedge dx_+)^{(r,\theta)} &= \left[\left(\frac{\partial x_-}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial x_-}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_+}{\partial r} \right) \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \left[\frac{2e^{\frac{r}{x}} - 2e^{\frac{r}{x}} C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} - 2e^{\frac{3r}{x}} C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{2xe^{\frac{r}{x}} (1 - e^{\frac{2r}{x}}) S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&\quad - \left[\frac{2e^{\frac{r}{x}} + 2e^{\frac{r}{x}} C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} + 2e^{\frac{3r}{x}} C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 - C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{2xe^{\frac{r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1) S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}} (1 + C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{2xe^{\frac{r}{x}} (1 - e^{\frac{2r}{x}}) [4e^{\frac{r}{x}} - 4e^{\frac{3r}{x}}]}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{8xe^{\frac{2r}{x}} (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 S_\theta}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dy_- \wedge dy_+)^{(r,\theta)} &= \left[\left(\frac{\partial y_-}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial y_-}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial r} \right) \right] dr \wedge d\theta \\
&= \left[\frac{-4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{x[(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&\quad - \left[\frac{4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{x[(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{-4e^{\frac{2r}{x}} [-2(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{8e^{\frac{2r}{x}} (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 S_\theta}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dy_- \wedge dx_+)^{(r,\theta)} &= \\
&= \left[\left(\frac{\partial y_-}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial y_-}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial x_+}{\partial r} \right) \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \left[\frac{-4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{-2xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&\quad - \left[\frac{x[(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{2e^{\frac{r}{x}} + 2e^{\frac{r}{x}}C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} + 2e^{\frac{3r}{x}}C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{8xe^{\frac{3r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2 - 2x[(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2] \cdot [e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}}) + e^{\frac{r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})C_\theta]}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{8xe^{\frac{3r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2 + 2xe^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})[(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.91}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dx_- \wedge dy_+)^{(r,\theta)} &= \\
&= \left[\left(\frac{\partial x_-}{\partial r} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{\partial x_-}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial r} \right) \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \left[\frac{2e^{\frac{r}{x}} - 2e^{\frac{r}{x}}C_\theta - 2e^{\frac{3r}{x}} - 2e^{\frac{3r}{x}}C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{x[(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&\quad - \left[\frac{-2xe^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right] \cdot \left[\frac{4e^{\frac{2r}{x}} S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right] (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{2x[e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}}) - e^{\frac{r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})C_\theta] \cdot [(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2] + 8xe^{\frac{3r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta^2}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2 \cdot [1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \\
&= \frac{2xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2] + 8xe^{\frac{3r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta^2}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.92}
\end{aligned}$$

Assim, das equações 4.1.91 e 4.1.92 temos que:

$$\begin{aligned}
& (dy_- \wedge dx_+)^{(r,\theta)} - (dx_- \wedge dy_+)^{(r,\theta)} = \\
& = \frac{8xe^{\frac{3r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2 + 2xe^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})[(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \\
& \quad - \frac{2xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2] - 8xe^{\frac{3r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta^2}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \\
& = \frac{16xe^{\frac{3r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta^2 - 4xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \\
& \quad - \frac{4xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 + (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.93}
\end{aligned}$$

Por outro lado, das equações 4.1.89 e 4.1.90 temos que:

$$\begin{aligned}
& (dx_- \wedge dx_+)^{(r,\theta)} + (dy_- \wedge dy_+)^{(r,\theta)} = \\
& \quad \frac{16.x.e^{\frac{2r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2 \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} (dr \wedge d\theta) \tag{4.1.94}
\end{aligned}$$

Logo de 4.1.88, 4.1.93 e 4.1.94, temos que

$$\begin{aligned}
& (dz_- \wedge d\bar{z}_+)^{(r,\theta)} = \frac{16.x.e^{\frac{2r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})^2S_\theta}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta) + \\
& \quad + i \frac{4xe^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)[4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 + (1 + e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2C_\theta^2]^2} (dr \wedge d\theta).
\end{aligned}$$

De onde, a expressão acima é zero se e somente se $r = 0$, logo as polarizações $\tilde{F}$ e P são transversais.

Apêndice G

Iniciamos com

$$\begin{aligned}\Theta_{\tilde{F}} = & \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial x} \right) \right] dx + \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial y} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial y} \right) \right] dy + \\ & + \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial r} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial r} \right) \right] dr + \left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_+}{\partial \theta} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \cdot \left(\frac{\partial y_-}{\partial \theta} \right) \right] d\theta + \\ & + i \left[d \left(\log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \right) \right].\end{aligned}$$

Vamos então calcular cada parcela da expressão acima. Primeiro, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_+}{\partial x} = & \frac{[(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta] \cdot [1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)] + 2\frac{r}{x}e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 - C_\theta)S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\ = & \frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 - C_\theta)S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\ + & \frac{-\frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}(1 - C_\theta)S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 - C_\theta)S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\ = & \frac{e^{\frac{2r}{x}}S_\theta - S_\theta + e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - S_\theta C_\theta + e^{\frac{4r}{x}}S_\theta - e^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta - e^{\frac{2r}{x}}S_\theta + e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\ + & \frac{-\frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\ = & \frac{(-xS_\theta + 2xe^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - xS_\theta C_\theta + xe^{\frac{4r}{x}}S_\theta - xe^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta - 4re^{\frac{2r}{x}}S_\theta)}{x[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y_-}{\partial x} &= \frac{[-(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta] \cdot [1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)] - 2\frac{r}{x}e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 + C_\theta)S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})(1 + C_\theta)S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \\
&+ \frac{\frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}(1 + C_\theta)S_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)(1 + C_\theta)S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \\
&= \frac{-e^{\frac{2r}{x}}S_\theta + S_\theta + e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - S_\theta C_\theta - e^{\frac{4r}{x}}S_\theta - e^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}S_\theta + e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\
&+ \frac{-\frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta - \frac{2r}{x}e^{\frac{4r}{x}}S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta + \frac{2r}{x}e^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \\
&= \frac{(xS_\theta + 2xe^{\frac{2r}{x}}S_\theta C_\theta - xS_\theta C_\theta - xe^{\frac{4r}{x}}S_\theta - xe^{\frac{4r}{x}}S_\theta C_\theta + 4re^{\frac{2r}{x}}S_\theta)}{x[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2}
\end{aligned}$$

Assim, da definição de x_- , x_+ , y_- , e y_+ temos que

$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{1}{x_+}\right)\left(\frac{\partial y_+}{\partial y}\right) - \left(\frac{1}{x_-}\right)\left(\frac{\partial y_-}{\partial y}\right)\right] &= \frac{1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)}{2xe^{\frac{r}{x}}} - \frac{1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)}{2xe^{\frac{r}{x}}} \\
&= \frac{C_\theta - e^{\frac{2r}{x}}C_\theta}{xe^{\frac{r}{x}}} = \frac{(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_\theta}{xe^{\frac{r}{x}}}
\end{aligned}$$

enquanto que ,

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{1}{x_+}\right)\left(\frac{\partial y_+}{\partial r}\right) - \left(\frac{1}{x_-}\right)\left(\frac{\partial y_-}{\partial r}\right)\right] = \\
&= \left(\frac{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]}{2xe^{\frac{r}{x}}}\right) \cdot \left(\frac{4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2}\right) \\
&- \left(\frac{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]}{2xe^{\frac{r}{x}}}\right) \cdot \left(\frac{-4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2}\right) \\
&= \frac{4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{2xe^{\frac{r}{x}}[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]} + \frac{4e^{\frac{2r}{x}}S_\theta}{2xe^{\frac{r}{x}}[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]} \\
&= \frac{4e^{\frac{2r}{x}}[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]S_\theta + 4e^{\frac{2r}{x}}[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]S_\theta}{2xe^{\frac{r}{x}}[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)][1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]} \\
&= \frac{4e^{\frac{r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{xe^{\frac{r}{x}}[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)][1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]}
\end{aligned}$$

e também

$$\left[\left(\frac{1}{x_+}\right)\left(\frac{\partial y_+}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{1}{x_-}\right)\left(\frac{\partial y_-}{\partial \theta}\right)\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]}{2xe^{\frac{r}{x}}} \right) \cdot \left(\frac{x[(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]^2} \right) \\
&- \left(\frac{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]}{2xe^{\frac{r}{x}}} \right) \cdot \left(\frac{x[(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]^2} \right) \\
&= \frac{[(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{2e^{\frac{r}{x}}[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)]} - \frac{[(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{2e^{\frac{r}{x}}[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)]} \\
&= \frac{[1 - C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 + C_\theta)] \cdot [(e^{\frac{4r}{x}} - 1)C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&- \frac{[1 + C_\theta + e^{\frac{2r}{x}}(1 - C_\theta)] \cdot [(1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2]}{2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&= \frac{(1 + e^{\frac{2r}{x}}) \cdot (1 - e^{\frac{4r}{x}})C_\theta + (1 - e^{\frac{2r}{x}}) \cdot (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta}{e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&= \frac{-4e^{\frac{2r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_\theta}{e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]}
\end{aligned}$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{1}{x_+} \right) \left(\frac{\partial y_+}{\partial x} \right) - \left(\frac{1}{x_-} \right) \left(\frac{\partial y_-}{\partial x} \right) \right] = \\
&= \frac{-x(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta + x(1 + e^{\frac{2r}{x}})e^{\frac{4r}{x}}S_\theta - 4re^{\frac{2r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{x^2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&+ \frac{-2xe^{\frac{2r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta C_\theta^2 + x(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta C_\theta^2 + xe^{\frac{4r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})S_\theta C_\theta^2}{x^2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&= \frac{(1 + e^{\frac{2r}{x}}) \cdot (-x + xe^{\frac{4r}{x}} - 4re^{\frac{2r}{x}})S_\theta + x(-3e^{\frac{2r}{x}} + 3e^{\frac{4r}{x}} + 1 - e^{\frac{6r}{x}})S_\theta C_\theta^2}{x^2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \\
&= \frac{(1 + e^{\frac{2r}{x}})(-x + xe^{\frac{4r}{x}} - 4re^{\frac{2r}{x}})S_\theta + x(1 - e^{\frac{2r}{x}})^3 S_\theta C_\theta^2}{x^2e^{\frac{r}{x}}[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, de ([9] páginas 413 e 414) o potencial simplético adaptado à polarização P é dado por:

$$\begin{aligned}
\Theta_P &= -\tilde{S}\left(\frac{r}{x}\right) \left[\frac{C_\theta dy - S_\theta dx}{x} \right] = 2\tilde{S}\left(\frac{r}{x}\right) \left[\frac{-C_\theta dy + S_\theta dx}{x} \right] \\
&= \frac{(1 - e^{\frac{2r}{x}})}{xe^{\frac{r}{x}}} C_\theta dy + \frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{xe^{\frac{r}{x}}} S_\theta dx.
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
& \Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P \\
&= \frac{(1 + e^{\frac{2r}{x}}) \cdot (-x + xe^{\frac{4r}{x}} - 4re^{\frac{2r}{x}})S_\theta + x(1 - e^{\frac{2r}{x}})^3 S_\theta C_\theta^2 - x(e^{\frac{2r}{x}})[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]S_\theta}{x^2 e^{\frac{r}{x}} [(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (dx) \\
&+ \frac{4e^{\frac{r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{x[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (dr) + \frac{-4e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_\theta}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (d\theta) \\
&+ i \left[d \log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \right]
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P &= \frac{-4re^{\frac{2r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{x^2 e^{\frac{r}{x}} [(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (dx) + \frac{4e^{\frac{r}{x}}(1 + e^{\frac{2r}{x}})S_\theta}{x[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (dr) + \\
&+ \frac{-4e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_\theta}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} (d\theta) + i \left[d \log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \right].
\end{aligned}$$

Segundo isto, temos o seguinte resultado:

Lema 4.1.42. *A diferença de potenciais $\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$ acima é uma um forma exata, isto é, existe uma função Ψ tal que $d\Psi = \Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$. Esta função, Ψ é dada a seguir:*

$$\Psi(x, y, r, \theta) = 2 \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] + i \log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \quad (4.1.95)$$

Prova :

De fato, como $d(\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P) = 0$, $\Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$ é uma 1-forma fechada, então podemos escolher um caminho

$$(1, 0, 0, 0) \mapsto (x, 0, 0, 0) \mapsto (x, y, 0, 0) \mapsto (x, y, r, 0) \mapsto (x, y, r, \theta).$$

Onde, é fácil ver que a integral nos 3 primeiros caminhos é zero para a parte real da um forma, mas no ultimo caminho temos

$$\int_0^\theta \frac{-4e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_t}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_t^2]} dt,$$

$$\text{Se } u = S_t \implies du = C_t dt \implies$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\theta \frac{-4e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})C_t}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_t^2]} dt &= \int_0^{S_\theta} \frac{-4e^{\frac{r}{x}}(1 - e^{\frac{2r}{x}})}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 (1 - u^2)]} du \\
&= \int_0^{S_\theta} \frac{4e^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{[4e^{\frac{2r}{x}} + (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 u^2]} du.
\end{aligned}$$

Mas, como

$$\int \frac{1}{B + Ax^2} dx = \frac{\arctan \left[\frac{\sqrt{Ax}}{\sqrt{B}} \right]}{\sqrt{A}\sqrt{B}},$$

para $r \neq 0$ temos que

$$\int_0^{S_\theta} \frac{1}{[4e^{\frac{2r}{x}} + (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 u^2]} du = \frac{\arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right]}{2(e^{\frac{2r}{x}} - 1)e^{\frac{r}{x}}}.$$

Logo,

$$\int_0^{S_\theta} \frac{4e^{\frac{r}{x}}(e^{\frac{2r}{x}} - 1)}{[4e^{\frac{2r}{x}} + (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 u^2]} du = 2 \cdot \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right].$$

Vamos mostrar agora que $d \, 2 \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] = \Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] &= \left[\frac{1}{1 + \frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2}{4e^{\frac{2r}{x}}}} \right] \left[\frac{-\frac{2r}{x^2} e^{\frac{2r}{x}} S_\theta (2e^{\frac{r}{x}}) - (e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta (-\frac{2r}{x}) e^{\frac{r}{x}}}{4e^{\frac{2r}{x}}} \right] \\ &= \left[\frac{4e^{\frac{2r}{x}}}{4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2} \right] \cdot \left[\frac{-\frac{4re^{\frac{3r}{x}} S_\theta}{x^2} + \frac{2r}{x^2} (e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{4e^{\frac{2r}{x}}} \right] \\ &= \frac{-4re^{\frac{3r}{x}} S_\theta + 2re^{\frac{3r}{x}} S_\theta - 2re^{\frac{r}{x}} S_\theta}{x^2 [4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2]} = \frac{-2re^{\frac{r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} + 1)S_\theta}{x^2 [4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] &= \left[\frac{1}{1 + \frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2}{4e^{\frac{2r}{x}}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{2}{x} e^{\frac{2r}{x}} (2e^{\frac{r}{x}}) S_\theta - (e^{\frac{2r}{x}} - 1) (\frac{2}{x}) S_\theta}{4e^{\frac{2r}{x}}} \right] \\ &= \frac{4e^{\frac{3r}{x}} S_\theta - 2e^{\frac{r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1) S_\theta}{x [4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2]} = \frac{2e^{\frac{r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} + 1) S_\theta}{x [4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2]} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] = \left[\frac{4e^{\frac{r}{x}}}{4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2} \right] \cdot \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] = \frac{2e^{\frac{r}{x}} (e^{\frac{2r}{x}} - 1)C_\theta}{[4e^{\frac{2r}{x}} + (e^{\frac{2r}{x}} - 1)^2 S_\theta^2]}$$

Assim, a função

$$\Psi(x, y, r, \theta) = 2 \arctan \left[\frac{(e^{\frac{2r}{x}} - 1)S_\theta}{2e^{\frac{r}{x}}} \right] + i \log \left(\frac{4x^2 e^{\frac{2r}{x}}}{[(1 + e^{\frac{2r}{x}})^2 - (1 - e^{\frac{2r}{x}})^2 C_\theta^2]} \right) \quad (4.1.96)$$

é tal que $d(\Psi(x, y, r, \theta)) = \Theta_{\tilde{F}} - \Theta_P$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Milton Abramowitz and Irene Stegun. *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs, and mathematical tables* edited. Dover publications-New York, 1972. [117](#)
- [2] L. Auslander and B. Kostant. Polarization and unitary representations of solvable Lie groups. *Invent. Math.*, 14:255–354, 1971. [1](#)
- [3] Pierre Bieliavsky. Strict quantization of solvable symmetric spaces. *J. Symplectic Geom.*, 1(2):269–320, 2002. [12](#), [13](#), [59](#), [60](#)
- [4] Pierre Bieliavsky, Razvan Gurau, and Vincent Rivasseau. Noncommutative field theory on rank one symmetric spaces. *J. Noncommut. Geom.*, 3(1):99–123, 2009. [2](#), [6](#), [59](#), [60](#), [69](#)
- [5] Robert J. Blattner. Quantization and representation theory. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 147–165. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973. [1](#)
- [6] Robert J. Blattner. Intertwining operators and the half-density pairing. In *Non-commutative harmonic analysis (Actes Colloq., Marseille-Luminy, 1974)*, pages 1–12. Lecture Notes in Math., Vol. 466. Springer, Berlin, 1975. [1](#)
- [7] Kamthorn Chailuek and Brian C. Hall. Toeplitz operators on generalized Bergman spaces. *Integral Equations Operator Theory*, 66(1):53–77, 2010. [91](#)
- [8] Rios P. de M. and Tuynman G. M. Weyl quantization from geometric quantization,. *AIP Conference Proceedings*, 1079:26–38, 2008. [2](#), [73](#)

- [9] Pedro de M. Rios and A. Ozorio de Almeida. A variational principle for actions on symmetric symplectic spaces. *J. Geom. Phys.*, 51(4):404–441, 2004. [78](#), [159](#)
- [10] Gerald B Folland. *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications second edition*. John Wiley and Sons, INC-New York, 1999. [35](#), [117](#)
- [11] José M. Gracia-Bondía and Joseph C. Várilly. From geometric quantization to Moyal quantization. *J. Math. Phys.*, 36(6):2691–2701, 1995. [2](#), [4](#), [29](#)
- [12] H. J. Groenewold. On the principles of elementary quantum mechanics. *Physica*, 12:405–460, 1946. [2](#)
- [13] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric Asymptotics*. American Mathematical Society-Providence, Rhode Island, 1990. [13](#), [14](#)
- [14] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg. *Geometric asymptotics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. Mathematical Surveys, No. 14. [1](#)
- [15] Brian C. Hall. Holomorphic methods in analysis and mathematical physics. In *First Summer School in Analysis and Mathematical Physics (Cuernavaca Morelos, 1998)*, volume 260 of *Contemp. Math.*, pages 1–59. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. [24](#), [26](#)
- [16] Bertram Kostant. Quantization and unitary representations. I. Prequantization. In *Lectures in modern analysis and applications, III*, pages 87–208. Lecture Notes in Math., Vol. 170. Springer, Berlin, 1970. [1](#)
- [17] M. Puta. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Kluwer Academic Publishers-London, 1993. [13](#)
- [18] J. H. Rawnsley. On the pairing of polarizations. *Comm. Math. Phys.*, 58(1):1–8, 1978. [1](#)
- [19] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics*. Academic Press-New York, 1972. [117](#)
- [20] Marc A. Rieffel. Deformation quantization of Heisenberg manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 122(4):531–562, 1989. [59](#)
- [21] J. M. Souriau. *Structure des systemes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970. [1](#)
- [22] R. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Trasforms*. CRC Press-Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1994. [132](#)

- [23] A. Weinstein. Symplectic groupoids, geometric quantization, and irrational rotation algebras. In *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems (Berkeley, CA, 1989)*, volume 20 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 281–290. Springer, New York, 1991. [2](#)
- [24] A. Weinstein and P. Xu. Extensions of symplectic groupoids and quantization. *J. reine angew. Math.*, 417:159–189, 1991. [22](#)
- [25] Alan Weinstein. Traces and triangles in symmetric symplectic spaces. In *Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993)*, volume 179 of *Contemp. Math.*, pages 261–270. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. [59](#)
- [26] H. Weyl. *The theory of groups and quantum mechanics*. Dover, New York, 1931. [2](#)
- [27] N. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press-Oxford, 1980. [1](#), [13](#)