Zeros Elementares de Álgebras de Lie de Campos de Vetores

LUIZ CARLOS MARTINS JÚNIOR

Orientador: PROF. DR. JOSÉ LUIS ARRAUT VERGARA

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de
São Carlos-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de
"Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
1996

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida.

Ao Prof. Dr. José Luis Arraut Vergara, que além de orientador e professor, se tornou um grande amigo.

À minha noiva Myriam, que compreendeu minha ausência e me incentivou neste período com o seu carinho.

Aos meus pais Luiz Carlos e Aparecida, meus irmãos Fábio e Patrícia, que mesmo à distância demonstraram seu apoio.

Aos professores Dr. Oziride Manzoli Neto e Dr^a Ires Dias, pelo apoio e atenção dispensada nas discussões de alguns fatos.

Ao CNPq, pelo financiamento parcial deste trabalho.

Aos velhos e novos amigos, pelo apoio e companheirismo.

A todos meus professores, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos funcionários do ICMSC em todos os escalões que, direta ou indiretamente, contribuíram para o andamento e conclusão deste trabalho.

Resumo

Quando um grupo de Lie nilpotente age sem pontos fixos sobre uma superfície compacta M , a característica de Euler $\chi(M)$ de M é zero [11]. Isso sugere a possibilidade de um teorema tipo Poincaré-Hopf para ações destes grupos em variedades compactas. J.F.Plante em seu artigo "*Elementary Zeros of Lie Algebras of Vector Fields*", [12], obtém uma caracterização dos zeros elementares dessas álgebras em dois casos: quando $\mathfrak{g}$ é nilpotente e quando $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Ele também mostra que para uma álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g}$ de campos de vetores de uma superfície compacta, tal que todo zero de $\mathfrak{g}$ é elementar, existe um subconjunto $S \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} - S$ tem medida nula e para todo $X \in S$ valem:

- (a) O conjunto de zeros isolados de X coincide com o conjunto (finito) de zeros de $\mathfrak{g}$;
- (b) Se $p_1, \dots, p_k$ são os zeros de $\mathfrak{g}$ então $\sum_{i=1}^k \text{indice}(X, p_i) = \chi(M)$.

Baseado neste teorema e em um exemplo, ele mostra que não é possível definir o índice de $\mathfrak{g}$ em um zero isolado p como o índice de um zero de um elemento genérico $X \in S$ em p . Embora ele não diga, o leitor fica com a impressão que um teorema do tipo Poincaré-Hopf, como mencionado no começo, não parece existir.

Nesta dissertação faço uma exposição detalhada do artigo de J.F.Plante ilustrando com exemplos os teoremas do artigo.

Abstract

When a nilpotent Lie group acts without fixed points on a compact surface M , the Euler characteristic $\chi(M)$ of M vanishes [11]. This suggests the possibility of a Poincaré-Hopf type theorem for actions of these groups on compact manifolds.

J.F.Plante in his paper "*Elementary Zeros of Lie Algebras of Vector Fields*", [12] characterize the elementary zeros of these algebras in two cases: when $\mathfrak{g}$ is nilpotent and when $\mathfrak{g}$ is semi-simple. He also shows that for a abelian Lie algebra $\mathfrak{g}$ of vector fields of a compact surface such that every zero of $\mathfrak{g}$ is elementary, there exists a set $S \subset \mathfrak{g}$ such that $\mathfrak{g} - S$ has measure zero and for $X \in S$:

- (a) The set of isolated zeros of X coincides with the (finite) zero set of $\mathfrak{g}$;
- (b) If $p_1, \dots, p_k$ are the zeros of $\mathfrak{g}$ then $\sum_{i=1}^k \text{index}(X, p_i) = \chi(M)$.

Based on this last theorem and one example, he shows that it is not possible to define the index of $\mathfrak{g}$ at an isolated zero p as the index of a generic element $X \in S$ at p . Although he does not say it, the readers get the impression that a Poincaré-Hopf type theorem, as mentioned at the beginning, does not exist.

In this dissertation I detail Plante' paper illustrating it with several examples.

Índice

Introdução	2
1 Preliminares	1
Grupos de Lie	1
Ações de Grupos de Lie	3
Álgebra de Lie	5
Álgebra de Lie de um Grupo de Lie	6
Álgebras de Lie Solúvel, Nilpotente e Simples	11
Cohomologia de Álgebras de Lie	14
Exemplos	15
2 Zeros Elementares de Álgebras de Lie de Campos de Vetores	25
O Anulamento de H^1 para Álgebras de Lie Nilpotentes	25
Zeros Elementares	28
Teorema de Estabilidade	31
O Teorema Principal	35
3 Apêndice	39
Um pouco de Cohomologia.	39
BIBLIOGRAFIA	

Introdução

Considere X um campo de vetores de classe C^r sobre uma variedade de dimensão finita M . Um zero de X é um ponto $p \in M$ tal que $X(p)$ é o vetor nulo, e esse zero é chamado de elementar se a derivada de X em p é inversível. Se considerarmos o campo de vetores X como uma seção em TM , isto é, uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi X = id_M$ onde π é a projeção natural de TM em M , então um ponto $p \in M$ é um zero elementar se X é transversal à seção nula em p . Desse ponto de vista vemos que zeros elementares são estáveis, isto é, persistem por pequenas perturbações de X . Além disso, zeros elementares são isolados.

Um resultado clássico de Poincaré [14] estabelece que *"um campo de vetores sobre uma superfície compacta com característica de Euler não nula deve ter um zero em algum ponto"*. Esse resultado foi generalizado por Hopf [7] no seguinte sentido: Seja M uma variedade fechada e X um campo de vetores sobre M com todos os zeros isolados. Então:

Teorema (Poincaré-Hopf): Se $\{p_1, \dots, p_k\}$ é o conjunto de zeros de X então

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \text{indice}(p_i).$$

Este teorema é válido em particular para campos de vetores com todos os zeros elementares. Em 1964 Elon L. Lima [9] generalizou o resultado de Poincaré para uma família finita de campos de vetores que comutam: *"Sejam $X_1, \dots, X_n$ campos de vetores que comutam dois a dois, de classe C^1 , sobre uma superfície compacta, com característica de Euler não nula. Então existe um ponto $p \in M$ tal que $X_1 = \dots = X_n = 0$."*

Seja X um campo de vetores de classe C^1 sobre uma variedade fechada M e $\zeta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo correspondente. Dado $p \in M$, então $X(p) = 0 \Leftrightarrow \zeta(t, p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$, isto é, p é um ponto fixo do fluxo ζ . Seja Y outro campo de vetores C^1 tal que $[X, Y] = 0$, e η o correspondente fluxo. A condição sobre o colchete de Lie implica que $\zeta(t, \eta(s, p)) = \eta(s, \zeta(t, p))$. Os campos X e Y geram uma ação φ do grupo de Lie $\mathbb{R}^2$ sobre M dada por $\varphi(r, p) = \zeta(t, \eta(s, p)) = \eta(s, \zeta(t, p))$ onde $p \in M$ e $r = (t, s) \in \mathbb{R}^2$. $p \in M$ é dito um ponto fixo de φ se e só se p é um zero comum para X e Y , isto é, $X(p) = Y(p) = 0$. Analogamente qualquer número finito de campos de vetores que comutam $X_1, \dots, X_n$ sobre uma variedade

compacta M gera uma ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$. O resultado de Elon L. Lima pode então ser parafraseado da seguinte maneira: "Toda ação do grupo de Lie $\mathbb{R}^n$ sobre uma superfície compacta M , com $\chi(M) \neq 0$, tem um ponto fixo."

É natural considerar uma situação mais geral de grupos de Lie agindo sobre M . Em [11] J.F.Plante mostrou que

"Toda ação de um grupo de Lie conexo NILPOTENTE sobre uma superfície compacta com característica de Euler não nula tem um ponto fixo."

No entanto, o resultado de Poincaré não pode mais ser generalizado para um grupo de Lie qualquer pois Plante mostra no mesmo artigo [11] que o grupo de Lie solúvel não abeliano de dimensão 2 age sem pontos fixos sobre TODA superfície compacta. Por outro lado podemos pensar na possibilidade de um teorema do índice no espírito de Poincaré-Hopf para ações por grupos de Lie nilpotentes sobre variedades compactas.

Uma ação de um grupo de Lie G sobre M é determinada pela ação infinitesimal sobre M da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G [13]. Em muitos casos é mais fácil escrever a ação infinitesimal, isto é, um homomorfismo de álgebras de Lie $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}(M)$ onde $\mathfrak{S}(M)$ é a álgebra de Lie dos campos de vetores diferenciáveis sobre M .

A existência de um teorema tipo Poincaré-Hopf depende da possibilidade de definir um índice para um zero de uma álgebra de Lie de campos de vetores.

Considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita de campos de vetores de classe C^r sobre uma variedade de dimensão finita M . Um ponto $p \in M$ é dito ser um zero para $\mathfrak{g}$ se $X(p) = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}$. Plante, no artigo [12], generaliza o conceito de zero elementar e dá uma caracterização deste para o caso em que $\mathfrak{g}$ é nilpotente. Demonstra que, em particular se $\mathfrak{g}$ é solúvel, todo zero elementar é isolado, e obtém um teorema de estabilidade para zeros elementares. Depois, mostra que para uma álgebra de Lie abeliana de campos de vetores $\mathfrak{g}$ de uma superfície compacta, cujos zeros são todos elementares, existe um subconjunto $S \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} - S$ tem medida nula e para todo $X \in S$ valem:

- (a) O conjunto de zeros isolados de X coincide com o conjunto (finito) de zeros de $\mathfrak{g}$;
- (b) Se $p_1, \dots, p_k$ são os zeros de $\mathfrak{g}$ então $\sum_{i=1}^k \text{índice } X(p_i) = \chi(M)$.

Baseado neste teorema e em um exemplo, ele mostra que não é possível definir o índice de $\mathfrak{g}$ em um zero isolado p como o índice de um zero de um elemento genérico $X \in S$ em p . Embora ele não diga, o leitor fica com a impressão que um teorema do tipo Poincaré-Hopf, como mencionado no começo, não parece existir.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo lembramos as definições básicas da teoria de Grupos de Lie, Álgebras de Lie e Cohomologia de Álgebras de Lie usadas no texto e estabelecemos a notação. A medida que avançamos no texto, alguns exemplos serão construídos. Exemplos estes que serão usados no próximo capítulo.

Grupos de Lie

Um GRUPO DE LIE G é uma variedade analítica com estrutura de grupo (com relação à uma operação $*$) tal que a aplicação $(x, y) \mapsto x * y^{-1}$ de $G \times G$ em G é C^∞ . A operação em G será chamada de produto e se $x, y \in G$, então usaremos xy no lugar de $x * y$.

O mais simples exemplo de grupo de Lie é o grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ com sua estrutura padrão de variedade. Outro exemplo é o grupo $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes não singulares $n \times n$.

Um subgrupo $H \subset G$ é chamado SUBGRUPO DE LIE de G se:

1. H é um grupo de Lie;
2. a injeção $f: H \rightarrow G$ tal que $f(x) = x$, é uma imersão analítica;

Um critério muito útil para verificar se um subgrupo H , de um grupo de Lie G , é um subgrupo de Lie é o seguinte:

Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo (abstrato) de G que é um subconjunto fechado do espaço topológico G . Então existe uma única estrutura analítica sobre H tal que H é um subgrupo de Lie de G .

A demonstração pode ser encontrada em [16]. Este resultado diz por exemplo que S^1 , visto como subgrupo de $\mathbb{C}$, é um grupo de Lie. Analogamente S^3 , visto como subgrupo dos quatérnios $\mathbb{H}$, também é grupo de Lie. O subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$

$$G_A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

também é um grupo de Lie. Também são grupos de Lie os subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$

$$G_N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G_S = \left\{ \begin{bmatrix} e^\gamma & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e^{-\gamma} & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja G um grupo abstrato com elemento neutro e . Se K e H são dois subgrupos de G , definimos $[H, K] = \langle hkh^{-1}k^{-1} : h \in H, k \in K \rangle$. Definimos, por indução, $G^0 = G^{(0)} = G$, $G^{i+1} = [G^i, G]$ e $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$. Um grupo G é chamado GRUPO NILPOTENTE se existe um inteiro n tal que $G^n = \{e\}$ e é chamado de GRUPO SOLÚVEL se existe um inteiro n tal que $G^{(n)} = \{e\}$.

Um grupo de Lie G é chamado GRUPO DE LIE ABELIANO se G é abeliano como grupo abstrato. Analogamente, um grupo de Lie G é um GRUPO DE LIE NILPOTENTE (SOLÚVEL) se ele é nilpotente (solúvel) como um grupo abstrato. Não faz mal lembrar que um grupo abeliano é nilpotente e que um grupo nilpotente é solúvel.

É fácil ver que G_A é um grupo de Lie abeliano. Desde que

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\beta - \gamma \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x & xy - z \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta x + \alpha y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha\beta - \gamma \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vemos que $[G_N^1, G_N] = \{Id\}$. Portanto G_N é um grupo de Lie nilpotente. Analoga-

mente, G_S é um grupo de Lie solúvel pois

$$\begin{bmatrix} e^\gamma & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e^{-\gamma} & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^z & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{e^\gamma} & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{e^\gamma} \\ 0 & \frac{1}{e^{-\gamma}} & 0 & -\frac{\beta}{e^{-\gamma}} \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{e^z} & 0 & 0 & -\frac{x}{e^z} \\ 0 & \frac{1}{e^{-z}} & 0 & -\frac{y}{e^{-z}} \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x - e^z \alpha + e^\gamma x + \alpha \\ 0 & 1 & 0 & -y - e^{-z} \beta + e^{-\gamma} y + \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $G^{(2)} = \{Id\}$. Note que G_S não é nilpotente visto que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^\gamma & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & e^{-\gamma} & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{e^\gamma} & 0 & 0 & -\frac{\alpha}{e^\gamma} \\ 0 & \frac{1}{e^{-\gamma}} & 0 & -\frac{\beta}{e^{-\gamma}} \\ 0 & 0 & 1 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e^\gamma x + x \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-\gamma} y + y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $[G_S^1, G_S] = G_S^1$.

Ações de Grupos de Lie

Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade C^∞ . Uma AÇÃO DE CLASSE C^r DO GRUPO DE LIE G SOBRE M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ de classe C^r tal que:

- $\varphi(e, x) = x, \forall x \in M$, onde e é o elemento neutro de G ;

- $\varphi(h, \varphi(g, x)) = \varphi(hg, x), \forall x \in M, \forall g, h \in G.$

Em particular se $G = \mathbb{R}$, a ação φ é chamada de FLUXO.

A ÓRBITA de um ponto $x \in M$ (pela ação φ) é o subconjunto de M $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_x(\varphi) = \{\varphi(g, x) | g \in G\}$. O SUBGRUPO DE ISOTROPIA de $x \in M$, pela ação φ , é o subgrupo de G definido por $G_x = G_x(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g, x) = x\}$. Da definição fica evidente que G_x é um subgrupo fechado de G . Consideremos em G a relação de equivalência $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in G_x$ e seja $G/G_x = \{gG_x : g \in G\}$ o espaço das classes laterais à esquerda. Então a aplicação $G/G_x \rightarrow \mathcal{O}_x$, definido por $gG_x \mapsto \varphi(g, x)$, é contínua e bijetora. Se $G_x = G$ então $\mathcal{O}_x = \{x\}$ e x é chamado PONTO ESTACIONÁRIO ou PONTO FIXO da ação. Se todo ponto é estacionário, então dizemos que G age TRIVIALMENTE sobre M . Por outro lado, se $\mathcal{O}_x = M$ para algum, e portanto para todo, $x \in M$ então a ação é dita TRANSITIVA. A ação é chamada EFETIVA se somente a identidade fixa todo ponto de M . Dada uma ação arbitraria de G sobre M , o subgrupo H de G que age trivialmente é um subgrupo fechado e normal e portanto induz uma ação efetiva do grupo de Lie quociente G/H sobre M .

A aplicação $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : (A, p) \mapsto Ap$ é um exemplo de ação do grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^n$. A restrição de φ à algum subgrupo H de $GL(n, \mathbb{R})$ é uma ação de H sobre $\mathbb{R}^n$. Um outro exemplo é dado abaixo.

Ação do grupo de Lie S^3 . Seja $\mathbb{H} = \{x + yi + zj + wk : x, y, z, w \text{ reais}\}$ o espaço dos quatérnios, cuja base canônica é $\{1, i, j, k\}$. Denotaremos aqui por $\mathbb{R}$ o subconjunto dos quatérnios reais e por $\mathbb{R}^3$ o subconjunto dos quatérnios imaginários puros $\{yi + zj + wk : y, z, w \text{ reais}\}$. Consideremos $S^3 \subset \mathbb{H}$ o subconjunto dos quatérnios de módulo 1. Definimos então a ação

$$\begin{aligned} \varphi : S^3 \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (u, p) &\mapsto upu^{-1} \end{aligned}$$

Sejam $u = (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) \in S^3$ e $p = (x + yi + zj + wk) \in \mathbb{H}$. O subgrupo de isotropia S_p^3 é o conjunto dos u tal que $upu^{-1} = p$, ou seja, é o conjunto dos $u \in S^3$ que comutam com p . Desde que

$$up = (x\alpha - y\beta - z\gamma - w\delta) + i(x\beta + y\alpha + z\delta - w\gamma) + j(x\gamma - y\delta + z\alpha + w\beta) + k(x\delta + y\gamma - z\beta + w\alpha)$$

$$pu = (x\alpha - y\beta - z\gamma - w\delta) + i(x\beta + y\alpha - z\delta + w\gamma) + j(x\gamma + y\delta + z\alpha - w\beta) + k(x\delta - y\gamma + z\beta + w\alpha)$$

$$\text{temos que } up = pu \iff \begin{cases} z\delta - w\gamma = -(z\delta - w\gamma) \\ w\beta - y\delta = -(w\beta - y\delta) \\ y\gamma - z\beta = -(y\gamma - z\beta) \end{cases} \iff \begin{cases} z\delta - w\gamma = 0 \\ w\beta - y\delta = 0 \\ y\gamma - z\beta = 0 \end{cases}.$$

Portanto, os subgrupos de isotropia são:

- Se $y = z = w = 0 \Rightarrow S_p^3 = S^3 \Rightarrow$ todo ponto de $\mathbb{R}$ é ponto fixo;
- A ação φ deixa invariante os quatérnios imaginários $\mathbb{R}^3$. Considere q a parte imaginária de p , isto é, $p = x + q$. Então $\varphi(u, p) = u(x + q)u^{-1} = x + uqu^{-1} = x + \varphi(u, q)$, ou seja, $\mathcal{O}_{(x+p)} = x + \mathcal{O}_p$. Logo, basta calcular o subgrupo de isotropia S_i^3 .

$$S_i^3 = \{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \text{ reais}\}.$$

Portanto $\mathcal{O}_i = S^3/S_i^3 \simeq S^2$.

órbitas da ação no subespaço $x = 0$

Álgebra de Lie

Um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ é chamado uma **ÁLGEBRA DE LIE** se existe uma aplicação $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ chamada **COLCHETE DE LIE** (ou simplesmente colchete) tal que:

- (a) $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ é bilinear;
- (b) $[X, Y] = -[Y, X]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ antisimétrica e;
- (c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ satisfaz a identidade de Jacobi.

A condição (b) implica que $[X, X] = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

As álgebras de Lie surgem das álgebras associativas de um modo muito simples. Seja $\mathfrak{A}$ uma álgebra associativa. Se $X, Y \in \mathfrak{A}$ então definimos o colchete de X por Y como

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Deste modo o conjunto $\mathfrak{gl}(V)$ dos endomorfismos de V , onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, é uma álgebra de Lie. $\mathbb{R}^2$ também tem estrutura de álgebra de Lie e neste caso será denotada por $\mathfrak{r}^2$. Outro exemplo de álgebra de Lie é o conjunto $\mathfrak{S}^r(M)$ dos campos de vetores de classe C^r , $r \geq 2$, em M . Seja $\mathbf{x} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local. Denotemos por $\partial/\partial x_i$ o campo de vetores em U definido por $\partial/\partial x_i(q) = (d\mathbf{x}(q))^{-1} \cdot e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^n$. Se X e Y são campos de vetores em M , podemos escrever $X = \sum_{i=1}^n a_i \partial/\partial x_i$ e $Y = \sum_{i=1}^n b_i \partial/\partial x_i$. Então

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n c_i \partial/\partial x_i \quad \text{onde } c_i = \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right).$$

Um subespaço vetorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é dito ser uma SUBÁLGEBRA DE LIE de $\mathfrak{g}$ se para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$ nós temos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ duas álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$. Um HOMOMORFISMO ENTRE ÁLGEBRAS DE LIE é uma aplicação linear que preserva a operação colchete, isto é, seja $\rho(X \mapsto \rho(X))$ uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}'$, então ρ é um homomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}'$ se

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)].$$

Tomemos agora V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, não necessariamente de dimensão finita. Por uma REPRESENTAÇÃO DE $\mathfrak{g}$ EM V entendemos uma aplicação linear

$$\rho : X \mapsto \rho(X), \quad (X \in \mathfrak{g})$$

de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(V)$ tal que $\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Dado uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para qualquer $X \in \mathfrak{g}$ a aplicação

$$\begin{aligned} adX : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

é um endomorfismo de $\mathfrak{g}$. Por cálculo direto vemos que a aplicação $ad : X \mapsto adX$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ chamada REPRESENTAÇÃO ADJUNTA de $\mathfrak{g}$. O kernel de ad é o conjunto de todos os $X \in \mathfrak{g}$ tais que $[X, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$; ele é chamado CENTRO de $\mathfrak{g}$.

Se V tem dimensão finita, então dizer que ρ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é equivalente a dizer que ρ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{gl}(V)$.

No que segue, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e V é um espaço vetorial real também de dimensão finita.

Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

Dado um elemento a de um grupo de Lie G , a função $L_a : G \rightarrow G$, definida por $g \mapsto ag$, é chamada TRANSLAÇÃO À ESQUERDA. Como o produto em G é diferenciável e a inversa de L_a é $L_{a^{-1}}$, então L_a é um difeomorfismo de G em G .

Um campo de vetores X sobre G é dito ser INVARIANTE À ESQUERDA se X é invariante por todas as translações à esquerda de G , isto é,

$$X \circ L_a(g) = DL_a \circ X(g), \quad \forall g, a \in G.$$

Denotemos por $\mathfrak{g}$ o conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda sobre G . Mostra-se que $\mathfrak{g}$ tem estrutura de álgebra de Lie, ver [3]. $\mathfrak{g}$ é chamada de **ÁLGEBRA DE LIE DO GRUPO DE LIE G** .

Todo campo de vetores invariantes à esquerda $X \in \mathfrak{g}$ fica determinado pelo seu valor no elemento neutro e de G , pois

$$X(a) = X(ae) = X \circ L_a(e) = DL_a \circ X(e) \quad \forall a \in G.$$

Por outro lado, na demonstração do resultado abaixo mostra-se que se $v \in T_e G$, então $g \mapsto DL_g(v)$ é um campo de vetores invariante cujo valor em e é v . Um resultado útil sobre a álgebra de Lie de um grupo é o seguinte:

"A função $\mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ definida por $X \mapsto X(e)$ é um isomorfismo do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre $T_e G$. Em particular $\dim G = \dim \mathfrak{g}$."

A demonstração pode ser encontrada em [3]. Podemos usar esse isomorfismo para colocar a estrutura de álgebra de Lie sobre $T_e G$. Às vezes chamaremos $T_e G$ de álgebra de Lie de G e a denotaremos por $\mathfrak{g}$ quando não houver confusão.

Álgebra de Lie de S^3 . Sejam $p = a + bi + cj + dk$, $u = x + yi + zj + wk$, $u, p \in \mathbb{H}$ com $\|u\| = \|p\| = 1$ e $T_p(u) = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial w} \right)_p$ a aplicação que troca a origem do vetor u de 0 por p .

Suponhamos que A e B são espaços vetoriais de dimensão finita, $\phi : A \rightarrow B$ uma aplicação linear e $p \in A$. Então

$$D\phi \circ T_p = T_{\phi(p)} \circ \phi \quad (1.1)$$

Sejam :

$$\bar{I}(u) = ui = -y + xi + wj - zk$$

$$\bar{J}(u) = uj = -z - wi + xj + yk$$

$$\bar{K}(u) = uk = -w + zi - yj + xk$$

$$I(u) = \frac{1}{2} (T_u \circ \bar{I})(u) = \frac{1}{2} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial w} \right)_u$$

$$J(u) = \frac{1}{2} (T_u \circ \bar{J})(u) = \frac{1}{2} \left(-z \frac{\partial}{\partial x} - w \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} + y \frac{\partial}{\partial w} \right)_u$$

$$K(u) = \frac{1}{2} (T_u \circ \bar{K})(u) = \frac{1}{2} \left(-w \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} + x \frac{\partial}{\partial w} \right)_u$$

Desde que $T_u(u) \cdot I(u) = T_u(u) \cdot J(u) = T_u(u) \cdot K(u) = 0$, temos então que $\{I(u), J(u), K(u)\} \subset T_u S^3$. Logo I, J, K são campos vetoriais sobre S^3 .

Lembremos que L_p é a translação a esquerda tal que $L_p(u) = pu$. Logo,

$$(L_p \circ \bar{I})(u) = L_p(ui) = p(ui) = (pu)i = \bar{I}(pu) = (\bar{I} \circ L_p)_u \quad (1.2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} DL_p \circ I(u) &= DL_p \circ \left(\frac{1}{2} (T_u \circ \bar{I}) \right)(u) = \frac{1}{2} (DL_p \circ T_u) \circ \bar{I}(u) \stackrel{1.1}{=} \\ &= \frac{1}{2} (T_{pu} \circ L_p) \circ \bar{I}(u) = \frac{1}{2} T_{pu} \circ (L_p \circ \bar{I})(u) \stackrel{1.2}{=} \\ &= \frac{1}{2} (T_{pu} \circ \bar{I}) \circ L_p(u) = I \circ L_p(u) \end{aligned}$$

Portanto I é um campo de vetores sobre S^3 invariante a esquerda. Analogamente para os campos vetoriais J e K . Além disso, por cálculo direto, temos que $[I, J] = K$, $[I, K] = -J$, $[J, K] = I$. Desde que o espaço vetorial gerado por $\{i, j, k\}$ é isomorfo à $T_1 S^3$ temos que $[i, j] = k$, $[i, k] = -j$, $[j, k] = i$. Esse espaço vetorial será denotado por $\mathfrak{s}^3$ e é a álgebra de Lie do grupo de Lie S^3 . ■

Chamamos um homomorfismo diferenciável $\tau : \mathbb{R} \rightarrow G$ de SUBGRUPO A 1-PARÂMETRO de G . O seguinte resultado pode ser encontrado em [BC].

"Seja G um grupo de Lie, $v \in T_e G$, $X \in \mathfrak{g}$ um campo de vetores invariante a esquerda tal que $X(e) = v$. Então existe exatamente um subgrupo a 1-parâmetro $\tau : \mathbb{R} \rightarrow G$ tal que

$$\tau'(0) = X(e) = v."$$

Com isso, outra maneira de se calcular a álgebra de Lie de um grupo de Lie é através de subgrupos a 1-parâmetro de G .

af: a álgebra de Lie não abeliana de dimensão 2. O grupo de Lie das transformações afins da reta Af é o conjunto de todos os difeomorfismos afins $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a operação composição

$$\begin{aligned} \circ : Af \times Af &\rightarrow Af \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

As transformações afins são aquelas da forma $f(x) = \alpha x + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, são fixos. Neste texto consideramos Af como sendo somente a componente conexa da identidade, ou seja, quando $\alpha > 0$. Dadas $f, g \in Af$, $f(x) = \alpha x + \beta$ e $g(x) = \alpha' x + \beta'$, a composição $(f \circ g)(x) = (\alpha\alpha')x + (\alpha\beta' + \beta)$ também é afim. Não é difícil ver que existe um isomorfismo entre Af e o subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ definido pelo conjunto de matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tal que } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

com a operação produto.

As aplicações $a : \mathbb{R} \rightarrow Af$, $b : \mathbb{R} \rightarrow Af$, tal que

$$a(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são subgrupos a 1-parâmetro de Af .

Denotemos por X e Y os vetores $a'(0)$ e $b'(0)$:

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \left[\frac{\partial}{\partial t} b \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e por $\mathfrak{af}$ a álgebra de Lie de Af . Desde que X e Y são l.i., então $\{X, Y\}$ é base para $\mathfrak{af}$. Note que $[X, Y] = Y$.

$\mathfrak{g}_A$: a álgebra de Lie do grupo de Lie G_A . As aplicações $a : \mathbb{R} \rightarrow G_A$, $b : \mathbb{R} \rightarrow G_A$, $c : \mathbb{R} \rightarrow G_A$, tal que

$$a(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são subgrupos a 1-parâmetro de G_A .

Denotemos por X, Y, Z os vetores $a'(0)$, $b'(0)$, $c'(0)$:

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \left[\frac{\partial}{\partial t} b \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z = \left[\frac{\partial}{\partial t} c \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e por $\mathfrak{g}_A$ a álgebra de Lie de G_A gerada pelos vetores X, Y e Z . Note que $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$.

$\mathfrak{g}_N$: a álgebra de Lie do grupo de Lie G_N . As aplicações $a : \mathbb{R} \rightarrow G_N$, $b : \mathbb{R} \rightarrow G_N$, $c : \mathbb{R} \rightarrow G_N$, tal que

$$a(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são subgrupos a 1-parâmetro de G_N .

Denotemos por X, Y, Z os vetores $a'(0)$, $b'(0)$, $c'(0)$:

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \left[\frac{\partial}{\partial t} b \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z = \left[\frac{\partial}{\partial t} c \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e por $\mathfrak{g}_N$ a álgebra de Lie do grupo de Lie G_N onde $\{X, Y, Z\}$ é base para $\mathfrak{g}_N$. Note que $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$.

$\mathfrak{g}_S$: a álgebra de Lie do grupo de Lie G_S . As aplicações $a : \mathbb{R} \rightarrow G_S$, $b : \mathbb{R} \rightarrow G_S$, $c : \mathbb{R} \rightarrow G_S$, tal que

$$a(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são subgrupos a 1-parâmetro de G_S .

Denotemos por X, Y, Z os vetores $a'(0)$, $b'(0)$, $c'(0)$:

$$X = \left[\frac{\partial}{\partial t} a \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \left[\frac{\partial}{\partial t} b \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z = \left[\frac{\partial}{\partial t} c \right]_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotemos por $\mathfrak{g}_S$ a álgebra de Lie do grupo de Lie G_S onde $\{X, Y, Z\}$ é base para $\mathfrak{g}_S$. Note que $[X, Y] = 0$, $[X, Z] = -X$, $[Y, Z] = Y$.

Álgebras de Lie Solúvel, Nilpotente e Simples

Sejam $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{s}$ subespaços lineares de $\mathfrak{g}$. Denotemos por $[\mathfrak{h}, \mathfrak{s}]$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado por todos os produtos $[X, Y]$ para $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{s}$. Um subespaço $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é chamado SUBÁLGEBRA se $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$; e é chamado de IDEAL se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$. Em particular $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. A notação usual para dizer que $\mathfrak{h}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ é $\mathfrak{h} \triangleleft \mathfrak{g}$.

Se $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ é um homomorfismo, então $\pi(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}'$ e o kernel de π é um ideal de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$, denotemos por $\mathfrak{g}'$ o espaço vetorial quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, e π a aplicação linear canônica de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}'$. Para $\bar{X} = \pi(X)$ e $\bar{Y} = \pi(Y)$ seja

$$[\bar{X}, \bar{Y}] = \pi([X, Y]). \quad (1.3)$$

Não é difícil mostrar que $[\bar{X}, \bar{Y}]$ está bem definida e satisfaz a definição de colchete. Logo $\mathfrak{g}'$ é uma álgebra de Lie e π é portanto um homomorfismo de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathfrak{g}'$ com kernel $\mathfrak{h}$. Chamamos a álgebra $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de QUOCIENTE de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$. O resultado abaixo pode ser encontrado em [16].

"Sejam G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e H um subgrupo de Lie fechado normal com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$. Então G/H é um grupo de Lie e sua álgebra de Lie é isomorfa a álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$."

Denotemos por $\mathfrak{g}^{(1)}$ o ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e defina por indução

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}].$$

Da Identidade de Jacobi temos a sequência $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots$. Se existe n inteiro tal $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$, então dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie SOLÚVEL.

Proposição. Seja G um grupo de Lie conexo e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Então, G é solúvel se e só se $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Portanto $\mathfrak{g}_S$ é uma álgebra de Lie solúvel. A prova pode ser vista em [16].

Cabe aqui observar que se $\mathfrak{g}$ é solúvel, então subálgebras e quocientes também serão. Mais ainda, se $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}$ são solúveis então $\mathfrak{g}$ também é solúvel. Logo, se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{s}$ são ideais solúveis de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ também é solúvel. Desde que $(\mathfrak{h} + \mathfrak{s})/\mathfrak{s} \cong \mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}$ temos que $(\mathfrak{h} + \mathfrak{s})$ também é solúvel. Como $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, existe um único ideal maximal solúvel de $\mathfrak{g}$: a soma dos ideais solúveis de $\mathfrak{g}$. Esse ideal maximal solúvel é chamado de RADICAL de $\mathfrak{g}$ e é denotado por $\text{rad } \mathfrak{g}$.

Chamamos uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ SEMI-SIMPLES se $\text{rad } \mathfrak{g} = \{0\}$. Não é difícil ver que se $\mathfrak{g}$ é semi-simples então $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Dizemos que um grupo de Lie G é semi-simples se sua álgebra de Lie é semi-simples.

Se $\mathfrak{g}$ não admite ideais próprios então $\mathfrak{g}$ é semi-simples ou tem dimensão 1.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita ser SIMPLES se $\mathfrak{g}$ é não abeliano e não possui ideais próprios, isto é, $\mathfrak{g}$ é simples se e só se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e não tem ideais próprios. Por exemplo $\mathfrak{s}^3$ é semi-simples. Definimos um grupo de Lie G como simples se sua álgebra de Lie é simples. Portanto S^3 é um grupo de Lie simples.

Denotemos por $\mathfrak{g}^1$ o ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e defina por indução

$$\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k].$$

Novamente a Identidade de Jacobi nos fornece a sequência $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots$. Se existe n inteiro tal que $\mathfrak{g}^n = \{0\}$, então dizemos que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie NILPOTENTE. Outra maneira equivalente de ver se uma álgebra de Lie é nilpotente é mostrar que adX é um endomorfismo nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$. Da definição vemos que uma álgebra de Lie nilpotente é solúvel. Cabe observar aqui que se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então subálgebras e quocientes também são nilpotentes.

Proposição. Seja G um grupo de Lie real conexo e com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então G é um grupo de Lie nilpotente se e só se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente.

Com isso, $\mathfrak{g}_N$ é uma álgebra de Lie nilpotente. A demonstração pode ser vista em [16].

Em [8, pg.11] encontramos uma descrição das álgebras de Lie de dimensão 2 e 3. Se $\{X, Y\}$ é base para uma álgebra de Lie de dimensão 2, então $\mathfrak{g}$ é isomorfo a uma das seguintes álgebras:

- ABELIANA. $[X, Y] = 0$; como por exemplo $\mathfrak{r}^2$.
- NÃO ABELIANA. $[X, Y] = Y$; como por exemplo $\mathfrak{af}$.

Se $\{X, Y, Z\}$ é base p/ uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é isomorfo a uma das seguintes álgebras (ver também [1]):

- ABELIANA. $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$; como por exemplo $\mathfrak{g}_A$.
- NILPOTENTE. $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$; como por exemplo $\mathfrak{g}_N$.
- SOLÚVEL. $[X, Y] = 0$, $[X, Z] = \alpha X + \beta Y$, $[Y, Z] = \gamma X + \delta Y$ onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad \text{é não singular;}$$

como por exemplo $\mathfrak{g}_S$, e neste caso $\alpha = -1, \delta = 1, \beta = \gamma = 0$.

- SIMPLES.

- $[X, Y] = Z, [X, Z] = -Y, [Y, Z] = X$; como por exemplo $\mathfrak{s}^3$;
- $[X, Y] = -2Y, [X, Z] = 2Z, [Y, Z] = X$.

Uma representação ρ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial V é chamada de NIL REPRESENTAÇÃO se $\rho(X)$ é nilpotente para todo $X \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.1 (de Engel) Se ρ é uma nil representação de $\mathfrak{g}$ em V , então $\exists v \in V$ não nulo tal que

$$\rho(X)v = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Uma demonstração pode ser encontrada em [16].

Corolário 1.2 O centro de uma álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ tem dimensão pelo menos igual a 1.

Prova. De fato, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente então a representação adjunta é uma nil representação de $\mathfrak{g}$. Portanto, existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que $adX(Y) = [X, Y] = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$. ■

Lema 1.3 Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ então $\dim(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) \geq 2$.

Prova. O lema é verdadeiro para $\dim \mathfrak{g} = 2$ pois a única álgebra de Lie nilpotente é a abeliana. Assuma que o lema é verdadeiro para $\dim \mathfrak{g} = n-1$ ($n \geq 3$). Se $\dim \mathfrak{g} = n$, o corolário anterior garante que existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \ker ad$ tal que $\dim \mathfrak{h} = 1$. Como $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tem dimensão $(n-1)$ então

$$\dim \left(\frac{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}{[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}]} \right) \geq 2.$$

Mas os elementos de $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$ são da forma $ghg'h - g'hgh = gg'h - g'gh = (gg' - g'g)\mathfrak{h}$. Portanto $[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g}/\mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]/\mathfrak{h}$, e o lema é verdadeiro. ■

Existe uma generalização do processo de encontrar uma forma canônica de Jordan da matriz de um endomorfismo de V , isto é, encontrar "formas de Jordan" simultaneamente para uma álgebra de Lie nilpotente de endomorfismos. A demonstração do próximo teorema pode ser encontrada em [8, pg.50].

Teorema 1.4 Considere V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de Lie nilpotente complexa de $\mathfrak{gl}(V)$. Então existem $h_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, k$, lineares tal que

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

onde $W_i = \{u \in V : \text{para todo } X \in \mathfrak{h}, (X - h_i(X)I)^m u = 0\}$ são $\mathfrak{h}$ -invariantes. Além disso, existe uma base de V tal que para todo $X \in \mathfrak{h}$, a restrição de X a W_i , relativo a essa base, têm a forma

$$[X]_i = \begin{bmatrix} h_i(X) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & h_i(X) \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a matriz do endomorfismo $X \in \mathfrak{h}$, relativo a essa base tem a forma

$$[X] = \begin{bmatrix} [X]_1 & & 0 \\ & [X]_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Uma COMPLEXIFICAÇÃO de V é um espaço vetorial V_c obtido extendendo o corpo base $\mathbb{R}$ para o corpo base $\mathbb{C}$, isto é,

$$V_c = \{u + iv : u, v \in V\}.$$

Note que $V \subset V_c$ pela identificação $V = V + i\{0\}$. Em [8] encontramos a seguinte proposição:

Proposição 1.5 *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é comutativa, nilpotente ou solúvel se e só se $\mathfrak{g}_c$ é, respectivamente, comutativa, nilpotente ou solúvel. Além disso, se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma ação de $\mathfrak{g}$ em V , então ρ tem uma única extensão $\rho_c : \mathfrak{g}_c \rightarrow \mathfrak{gl}_c(V)$ onde $\mathfrak{Im} \rho_c = (\mathfrak{Im} \rho)_c$ e $\mathfrak{Ker} \rho_c = (\mathfrak{Ker} \rho)_c$. Portanto, ρ_c é sobrejetora (injetora) se e somente se ρ é sobrejetora (injetora).*

Cohomologia de Álgebras de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (real), V um espaço vetorial também real, ambos de dimensão finita, e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ um homomorfismo de álgebras de Lie.

Definimos $H^0(\mathfrak{g}, V)_\rho$ como sendo o subespaço de V que é anulado por ρ , isto é,

$$H^0(\mathfrak{g}, V)_\rho = \{u \in V : \rho(X)u = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}.$$

Omitiremos o símbolo ρ da notação a menos que seja necessario.

Lema 1.6 *Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então pela Proposição 1.5, o Teorema 1.4 vale para a complexificação de ρ . Assumindo a notação do Teorema 1.4 Se existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $\mathfrak{Ker} h_i = \mathfrak{g}$, então $H^0(\mathfrak{g}, V) \neq \{0\}$.*

Prova. Desde que

$$W_i = \{u \in V : 0 = (\rho(X) - h_i(X)I)^m u = \rho(X)^m u, \forall X \in \mathfrak{g} \text{ e algum } m \in \mathbb{Z}\}$$

ρ age nilpotentemente sobre W_i . Logo Teorema de Engel garante a existência de um vetor não nulo $v \in W_i : \rho(X)v = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$. Portanto, $H^0(\mathfrak{g}, V) \neq \{0\}$. ■

Um 1-COCICLO é uma aplicação linear $f : \mathfrak{g} \rightarrow V$ tal que

$$f([X, Y]) = \rho(X)f(Y) - \rho(Y)f(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

O conjunto dos 1-cociclos forma um sub-espço de $\text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ o espaço vetorial das aplicações lineares de $\mathfrak{g}$ em V . Denotaremos esse sub-espço por $Z^1(\mathfrak{g}, V)$.

Um 1-COBORDO é um elemento f de $Z^1(\mathfrak{g}, V)$ tal que existe $u \in V$ com a propriedade que

$$f(X) = \rho(X)u, \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

O conjunto dos 1-cobordos forma um sub-espço do espaço dos 1-cociclos e o denotaremos por $B^1(\mathfrak{g}, V)$.

Definimos $H^1(\mathfrak{g}, V)$ como o espaço quociente de $Z^1(\mathfrak{g}, V)$ por $B^1(\mathfrak{g}, V)$.

Exemplos

Ação trivial. Seja ρ uma ação trivial, isto é, $\rho(X)u = 0, \forall X \in \mathfrak{g}$ e $\forall u \in V$. Da definição

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{g}, V) &= \{f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) : f([X, Y]) = 0, \forall X, Y \in \mathfrak{g}\} \quad \text{e} \\ B^1(\mathfrak{g}, V) &= \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto $H^1(\mathfrak{g}, V) = \text{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], V)$.

Concluimos então que o primeiro grupo de cohomologia depende da estruturada álgebra de Lie. Outra prova disso é dada pelo Primeiro Lema de Whitehead [6] que assegura que se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples, então $H^1(\mathfrak{g}, V) = 0$, para qualquer ρ .

Ações da álgebra de Lie 1-dimensional. Seja $\mathfrak{g}$ 1-dimensional e X um gerador para $\mathfrak{g}$. Tome $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ e $S, R \in \mathfrak{g}$, $S = sX$ e $R = rX$, $s, r \in \mathbb{R}$. Então $[S, R] = [sX, rX] = 0$ e $\rho(S)f(R) - \rho(R)f(S) = \rho(sX)f(rX) - \rho(rX)f(sX) = 0$. Portanto $Z^1(\mathfrak{g}, V) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \cong V$. Por outro lado, $B^1(\mathfrak{g}, V) = \{f \in Z^1(\mathfrak{g}, V) : \exists u \in V \text{ e } f(W) = \rho(W)u, \forall W \in \mathfrak{g}\}$. Desde que $\mathfrak{g}$ é gerado por X , f fica determinado pelo seu valor em X . Logo $B^1(\mathfrak{g}, V) \cong \text{Im } \rho(X)$. Portanto $H^1(\mathfrak{g}, V) \cong \text{Coker } (\rho(X))$.

Com isso vemos que o primeiro grupo de cohomologia depende também ação.

A. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{r}^2$. Consideremos $\{X, Y\}$ base para $\mathfrak{r}^2$ e $\tilde{X}(x, y) = (x, 0)$ e $\tilde{Y}(x, y) = (0, y)$ campo de vetores em $\mathbb{R}^2$. Desde que esse dois campos comutam, isto é, $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ podemos definir $\rho : \mathfrak{r}^2 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^2)$ uma ação tal que $\rho(X) = \tilde{X}$ e $\rho(Y) = \tilde{Y}$. Dado $W = (a, b) \in \mathfrak{r}^2$ e $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, então

$$\rho(W)u = (a\tilde{X} + b\tilde{Y})u = (au_1, bu_2).$$

Logo, $H^0(\mathfrak{r}^2, \mathbb{R}^2) = \{u \in \mathbb{R}^2 : \rho(W)u = 0, \forall W \in \mathfrak{r}^2\} = \{0\}$. O espaço dos 1-cociclos é formado pelas aplicações lineares de $\mathfrak{r}^2$ em E^2 tal que

$$0 = f([X, Y]) = \tilde{X}f(Y) - \tilde{Y}f(X).$$

Suponhamos que $f = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$. Então $\tilde{X}f(Y) = \tilde{Y}f(X) \Leftrightarrow (\gamma, 0) = (0, \beta)$.

Portanto $Z^1(\mathfrak{r}^2, \mathbb{R}^2) = \{f : \beta, \gamma = 0\}$. Desde que

$$f(W) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \delta b \end{pmatrix}$$

então $f(W) = \rho(W)u, \forall W \in \mathfrak{r}^2 \Leftrightarrow u_1 = \alpha$ e $u_2 = \delta$. Logo, para todo $f \in Z^1(\mathfrak{r}^2, \mathbb{R}^2)$, existe $u = (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(W) = \rho(W)u, \forall W \in \mathfrak{r}^2$. Portanto $H^1(\mathfrak{r}^2, \mathbb{R}^2) = \{0\}$.

B. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{af}$. Consideremos $\varphi : \mathfrak{af} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a restrição da ação natural de $GL(2, n)$ sobre $\mathbb{R}^2$. Essa ação tem um ponto fixo. As outras órbitas são unidimensionais.

órbitas da ação φ

Fixe $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e consideremos a, b como no cálculo de $\mathfrak{af}$, e

$$\begin{aligned}\varphi_a^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi(a(t), p) = (xe^t, y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_b^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi(b(t), p) = (x + ty, y)\end{aligned}$$

Isso nos dá dois campos em $\mathbb{R}^2$, $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, a saber

$$\widetilde{X}(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_a^p \right]_{t=0} = (x, 0)$$

$$\widetilde{Y}(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_b^p \right]_{t=0} = (y, 0)$$

Temos portanto a ação induzida $\rho : \mathfrak{af} \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\rho(X) = \widetilde{X}$, $\rho(Y) = \widetilde{Y}$. Seja $W = (r, s) \in \mathfrak{af}$. Desde que

$$\rho(W)p = (r\widetilde{X} + s\widetilde{Y})p = (rx + sy, 0)$$

temos que $\rho(W)p = 0 \forall W \in \mathfrak{af} \Leftrightarrow x, y = 0$. Portanto $H^0(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2) = \{0\}$.

Sendo $\{X, Y\}$ base da álgebra de $\mathfrak{af}$, $Z^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2)$ é o subespaço formado pelas $f \in \text{Hom}(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2)$ tal que

$$f(Y) = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X)$$

Suponha $f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}$. Então,

$$f(Y) = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X) \Leftrightarrow (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_2 - \beta_1, 0) \Leftrightarrow \beta_1, \beta_2 = 0.$$

Logo, $Z^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2) = \{f := \beta_1, \beta_2 = 0\}$. Para calcular $B^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2)$ tomemos $f \in Z^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2)$. Desde que

$$f(W) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 + s\alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos, $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{af}$ se e somente se

$$r(\alpha_1 - x) + s(\alpha_2 - y) = 0, \forall r, s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \alpha_1, y = \alpha_2.$$

Logo, $\forall f \in Z^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2)$, $\exists p = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{af}$.

Portanto, $H^1(\mathfrak{af}, \mathbb{R}^2) = \{0\}$.

Exemplo C. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_A$. Consideremos $\varphi : G_A \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a restrição da ação natural de $GL(4, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^4$. Essa ação tem $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ como

conjunto de pontos fixos. As outras órbitas são os planos $\{c\} \times \mathbb{R}^3$, c real não nulo fixo.

Fixe $p = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ e consideremos a , b e c como no cálculo de $\mathfrak{g}_A$ e

$$\begin{aligned} \varphi_a^p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(a(t), p) = (x + tw, y, z, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_b^p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(b(t), p) = (x, y + tw, z, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c^p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(c(t), p) = (x, y, z + tw, w) \end{aligned}$$

Isso nos dá três campos em $\mathbb{R}^4$, $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{Z}$, a saber

$$\widetilde{X}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_a^p \right]_{t=0} = (w, 0, 0, 0)$$

$$\widetilde{Y}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_b^p \right]_{t=0} = (0, w, 0, 0)$$

$$\widetilde{Z}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_c^p \right]_{t=0} = (0, 0, w, 0)$$

Temos portanto a ação induzida $\rho: \mathfrak{g}_A \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4)$ tal que $\rho(X) = \widetilde{X}$, $\rho(Y) = \widetilde{Y}$, $\rho(Z) = \widetilde{Z}$. Seja $W = (r, s, l) \in \mathfrak{g}_A$. Desde que

$$\rho(W)p = (r\widetilde{X} + s\widetilde{Y} + l\widetilde{Z})p = (rw, sw, lw, 0)$$

temos que $\rho(W)p = 0 \Leftrightarrow w = 0$. Portanto $H^0(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$.

Sendo $\{X, Y, Z\}$ base da álgebra de Lie abeliana $\mathfrak{g}_A$, $Z^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)$ é o subespaço formado pelas $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)$ tal que

$$0 = f([X, Y]) = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X)$$

$$0 = f([X, Z]) = \widetilde{X}f(Z) - \widetilde{Z}f(X).$$

$$0 = f([Y, Z]) = \widetilde{Y}f(Z) - \widetilde{Z}f(Y)$$

$$\text{Suponha } f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{cases} 0 = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X) = (\delta_2, -\delta_1, 0, 0) \\ 0 = \widetilde{X}f(Z) - \widetilde{Z}f(X) = (\delta_3, 0, -\delta_1, 0) \\ 0 = \widetilde{Y}f(Z) - \widetilde{Z}f(Y) = (0, \delta_3, -\delta_2, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_2 = \delta_1 = 0 \\ \delta_3 = \delta_1 = 0 \\ \delta_3 = \delta_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $Z^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4) = \{f : \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0\}$. Para calcular $B^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)$ tomemos $f \in Z^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)$. Desde que

$$f(W) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 + s\alpha_2 + l\alpha_3 \\ r\beta_1 + s\beta_2 + l\beta_3 \\ r\gamma_1 + s\gamma_2 + l\gamma_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos, $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{g}_A$ se e somente se

$$\begin{cases} r(\alpha_1 - w) + s\alpha_2 + l\alpha_3 = 0 \\ r\beta_1 + s(\beta_2 - w) + l\beta_3 = 0 \\ r\gamma_1 + s\gamma_2 + l(\gamma_3 - w) = 0 \end{cases}, \forall r, s, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = w, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \\ \beta_1 = 0, \beta_2 = w, \beta_3 = 0 \\ \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = w \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } \forall f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Z^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4), \exists p = (x, y, z, \alpha_1) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } f(W) =$$

$$\rho(W)p, \forall W \in \mathfrak{g}_A.$$

$$\text{Portanto, } H^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4) = \frac{Z^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)}{B^1(\mathfrak{g}_A, \mathbb{R}^4)} \neq \{0\}.$$

D. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_N$. Consideremos $\varphi : G_N \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a restrição da ação natural de $GL(3, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^3$.

órbitas da ação φ

Fixe $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e consideremos a, b e c como no cálculo de $\mathfrak{g}_N$ e

$$\begin{aligned} \varphi_a^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi(a(t), p) = (x + ty, y, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_b^p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi(b(t), p) = (x, y + tz, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_c^p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \varphi(c(t), p) = (x + tz, y, z)\end{aligned}$$

Isso nos dá três campos em $\mathbb{R}^3$, $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{Z}$, a saber

$$\widetilde{X}(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_a^p \right]_{t=0} = (y, 0, 0)$$

$$\widetilde{Y}(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_b^p \right]_{t=0} = (0, z, 0)$$

$$\widetilde{Z}(x, y, z) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_c^p \right]_{t=0} = (z, 0, 0)$$

Temos portanto a ação induzida $\rho: \mathfrak{g}_N \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^3)$ é tal que $\rho(X) = \widetilde{X}$, $\rho(Y) = \widetilde{Y}$, $\rho(Z) = \widetilde{Z}$. Seja $W = (r, s, l) \in \mathfrak{g}_N$. Desde que

$$\rho(W)p = (r\widetilde{X} + s\widetilde{Y} + l\widetilde{Z})p = (ry + lz, sz, 0)$$

temos que $\rho(W)p = 0, \forall W \Leftrightarrow y, z = 0$. Portanto $H^0(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3) = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3\}$.

Lembrando que os elementos da base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}_N$ satisfazem $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$, temos que $Z^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)$ é o subespaço formado pelas aplicações $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$\begin{aligned}f(Z) &= f([X, Y]) = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X) \\ 0 &= f([X, Z]) = \widetilde{X}f(Z) - \widetilde{Z}f(X) \\ 0 &= f([Y, Z]) = \widetilde{Y}f(Z) - \widetilde{Z}f(Y)\end{aligned}$$

Suponha $f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$. Logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = \widetilde{X}f(Y) - \widetilde{Y}f(X) = (\beta_2, -\gamma_1, 0) \\ 0 = \widetilde{X}f(Z) - \widetilde{Z}f(X) = (\beta_3 - \gamma_1, 0, 0) \\ 0 = \widetilde{Y}f(Z) - \widetilde{Z}f(Y) = (-\gamma_2, \gamma_3, 0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_3 = -\gamma_1, \alpha_3 = \beta_2 \\ \beta_3 = \gamma_1 \Rightarrow \beta_3, \gamma_1 = 0 \\ \gamma_3, \gamma_2 = 0 \end{array} \right.$$

Portanto, $Z^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3) = \{f: \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \beta_3 = 0, \beta_2 = \alpha_3\}$. Para calcular $B^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)$ tomemos $f \in Z^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)$. Desde que

$$f(W) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 + s\alpha_2 + l\alpha_3 \\ r\beta_1 + s\alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos, $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{g}_N$ se e somente se

$$\begin{cases} r(\alpha_1 - y) + s\alpha_2 + l(\alpha_3 - z) = 0 \\ r\beta_1 + s(\alpha_3 - z) = 0 \end{cases}, \forall r, s, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = z. \\ \beta_1 = 0, \alpha_3 = z \end{cases}$$

Logo, $\forall f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Z^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)$, $\exists p = (x, \alpha_1, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{g}_N$.

$$\text{Portanto, } H^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3) = \frac{Z^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)}{B^1(\mathfrak{g}_N, \mathbb{R}^3)} \neq \{0\}.$$

E. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{g}_S$. Consideremos $\varphi : G_S \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a restrição de ação natural de $GL(4, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^4$

órbitas da ação φ no subespaço $w = 0$

Fixe $p = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ e consideremos a , b e c como no cálculo de $\mathfrak{g}_S$ e

$$\begin{aligned} \varphi_a^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(a(t), p) = (x + tw, y, z, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_b^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(b(t), p) = (x, y + tw, z, w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_c^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4 \\ t &\mapsto \varphi(c(t), p) = (xe^t, ye^{-t}, z + tw, w) \end{aligned}$$

Isso nos dá três campos em $\mathbb{R}^4$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}$, a saber

$$\tilde{X}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_a^p \right]_{t=0} = (w, 0, 0, 0)$$

$$\tilde{Y}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_b^p \right]_{t=0} = (0, w, 0, 0)$$

$$\tilde{Z}(x, y, z, w) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_c^p \right]_{t=0} = (x, -y, w, 0)$$

Temos portanto a ação induzida $\rho : \mathfrak{g}_S \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{R}^4)$ tal que $\rho(X) = \tilde{X}$, $\rho(Y) = \tilde{Y}$, $\rho(Z) = \tilde{Z}$. Seja $W = (r, s, l) \in \mathfrak{g}_S$. Desde que

$$\rho(W)p = (r\tilde{X} + s\tilde{Y} + l\tilde{Z})p = (lx + rw, sw - ly, lw, 0)$$

temos que $\rho(W)p = 0, \forall W \Leftrightarrow x, y, w = 0$. Logo $H^0(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4) = \{(0, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4\}$.

Os elementos da base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{g}_S$ satisfazem as seguintes relações: $[X, Y] = 0$, $[X, Z] = -X$, $[Y, Z] = Y$. Portanto, $Z^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)$ é o subespaço formado pelas aplicações $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= f([X, Y]) = \tilde{X}f(Y) - \tilde{Y}f(X) \\ -f(X) &= f([X, Z]) = \tilde{X}f(Z) - \tilde{Z}f(X) \\ f(Y) &= f([Y, Z]) = \tilde{Y}f(Z) - \tilde{Z}f(Y) \end{aligned}$$

$$\text{Suponha } f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{cases} 0 = \tilde{X}f(Y) - \tilde{Y}f(X) = (\delta_2, -\delta_1, 0, 0) \\ -(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = \tilde{X}f(Z) - \tilde{Z}f(X) = (\delta_3 - \alpha_1, \beta_1, -\delta_1, 0) \\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) = \tilde{Y}f(Z) - \tilde{Z}f(Y) = (-\alpha_2, \delta_3 + \beta_2, -\delta_2, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_2, \delta_1 = 0 \\ \gamma_1, \beta_1, \delta_3 = 0 \\ \gamma_2, \delta_3, \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $Z^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4) = \{f : \delta_1, \delta_2, \delta_3, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \alpha_2 = 0\}$. Para calcular $B^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)$ tomemos $f \in Z^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)$. Desde que

$$f(W) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 + l\alpha_3 \\ s\beta_2 + l\beta_3 \\ l\gamma_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos, $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{g}_S$ se e somente se

$$\begin{cases} r(\alpha_1 - w) + l(\alpha_3 - x) = 0 \\ s(\beta_2 - w) + l(\beta_3 + y) = 0 \\ l(\gamma_3 - w) = 0 \end{cases}, \forall r, s, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = w, \alpha_3 = x \\ \beta_2 = w, \beta_3 = -y \\ \gamma_3 = w \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \forall f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Z^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4), \exists p = \left(\frac{\alpha_3}{k}, \frac{-\beta_3}{k}, z, \alpha_1\right) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que}$$

$$f(W) = \rho(W)p, \forall W \in \mathfrak{g}_S.$$

$$\text{Portanto, } H^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4) = \frac{Z^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)}{B^1(\mathfrak{g}_S, \mathbb{R}^4)} \neq \{0\}.$$

F. Ação da Álgebra de Lie $\mathfrak{s}^3$. Seja $\varphi : S^3 \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definida por $\varphi(u, p) = upu^{-1}$, como na página 4. Tomemos

$$\begin{array}{lll} \pi_i : \mathbb{R} \rightarrow S^3 & \pi_j : \mathbb{R} \rightarrow S^3 & \pi_k : \mathbb{R} \rightarrow S^3 \\ t \mapsto e^{it} & t \mapsto e^{jt} & t \mapsto e^{kt} \end{array} \quad \text{e}$$

3 sub-grupos a 1-parâmetro. Seja $p = x + yi + zj + wk \in \mathbb{H}$. e defina as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{ll} \varphi_i^p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto \varphi(\pi_i(t), p) = e^{it}pe^{-it} = (\cos(t) + \text{sen}(t)i)p(\cos(t) - \text{sen}(t)i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi_j^p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto \varphi(\pi_j(t), p) = e^{jt}pe^{-jt} = (\cos(t) + \text{sen}(t)j)p(\cos(t) - \text{sen}(t)j) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \varphi_k^p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} \\ t \mapsto \varphi(\pi_k(t), p) = e^{kt}pe^{-kt} = (\cos(t) + \text{sen}(t)k)p(\cos(t) - \text{sen}(t)k) \end{array}$$

Então, simplificando obtemos

$$\varphi_i^p(t) = x + yi + j(z \cos(2t) - w \text{sen}(2t)) + k(z \text{sen}(2t) + w \cos(2t))$$

$$\varphi_j^p(t) = x + i(y \cos(2t) + w \text{sen}(2t)) + jz + k(w \cos(2t) - y \text{sen}(2t))$$

$$\varphi_k^p(t) = x + i(y \cos(2t) - z \text{sen}(2t)) + j(y \text{sen}(2t) + z \cos(2t)) + kw$$

Logo, derivando cada função em relação à t quando $t = 0$ obtemos os campos

$$\begin{aligned} \tilde{X}(p) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i^p \right]_{t=0} = [-2j(z \text{sen}(2t) + w \cos(2t)) + 2k(z \cos(2t) - w \text{sen}(2t))]_{t=0} = \\ &= -2wj + 2zk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(p) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_j^p \right]_{t=0} = [2i(w \cos(2t) - y \text{sen}(2t)) - 2k(w \text{sen}(2t) + y \cos(2t))]_{t=0} = \\ &= 2wi - 2yk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(p) &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k^p \right]_{t=0} = [-2i(y \sin(2t) + z \cos(2t)) + 2j(y \cos(2t) - z \sin(2t))]_{t=0} = \\ &= -2zi + 2yj\end{aligned}$$

Temos portanto a ação induzida $\rho: \mathfrak{s}^3 \rightarrow \mathfrak{S}(\mathbb{H})$ tal que $\rho(X) = \frac{1}{2}\tilde{X}$, $\rho(Y) = \frac{1}{2}\tilde{Y}$, $\rho(Z) = \frac{1}{2}\tilde{Z}$. Seja $W = (r, s, l) \in \mathfrak{s}^3$. Desde que

$$\rho(W)p = (r\tilde{X} + s\tilde{Y} + l\tilde{Z})p = (0, sw - rz, ry - lw, lz - sy)$$

temos que $\rho(W)p = 0, \forall W \Leftrightarrow y, z, w = 0$. Portanto $H^0(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Como a base $\{X, Y, Z\}$ de $\mathfrak{s}^3$ satisfaz $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = -Y$, $[Y, Z] = X$, temos que $Z^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$ é o subespaço formado pelas aplicações $f \in \text{Hom}(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$ tal que

$$\begin{aligned}f(Z) &= f([X, Y]) = \tilde{X}f(Y) - \tilde{Y}f(X) \\ f(Y) &= f([Z, X]) = \tilde{Z}f(X) - \tilde{X}f(Z) \\ f(X) &= f([Y, Z]) = \tilde{Y}f(Z) - \tilde{Z}f(Y)\end{aligned}$$

$$\text{Suponha } f = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{bmatrix}. \text{ Logo,}$$

$$\begin{cases} (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3) = \tilde{X}f(Y) - \tilde{Y}f(X) = (0, -\delta_1, -\delta_2, \gamma_2 + \beta_1) \\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) = \tilde{Z}f(X) - \tilde{X}f(Z) = (0, -\gamma_1, \beta_1 + \delta_3, -\gamma_3) \\ (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = \tilde{Y}f(Z) - \tilde{Z}f(Y) = (0, \delta_3 + \gamma_2, -\beta_2, -\beta_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_3 = -\delta_1, \gamma_3 = -\delta_2 \\ \beta_2 = -\gamma_1, \beta_1 = 0. \\ \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \gamma_2, \delta_3 = 0 \end{cases}$$

Portanto, $Z^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H}) = \{f : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_2, \delta_3 = 0, \beta_2 = -\gamma_1, \beta_3 = -\delta_1, \delta_2 = -\gamma_3\}$. Para calcular $B^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$ tomemos $f \in Z^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$. Desde que

$$f(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\delta_2 \\ -\beta_2 & 0 & \gamma_3 \\ \delta_2 & -\gamma_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s\beta_2 - l\delta_2 \\ l\gamma_3 - r\beta_2 \\ r\delta_2 - s\gamma_3 \end{bmatrix}$$

temos, $f(W) = \rho(W)p$, $\forall W \in \mathfrak{s}^3$ se e somente se

$$\begin{cases} s(\beta_2 - w) + l(z - \delta_2) = 0 \\ r(w - \beta_2) + l(\gamma_3 - y) = 0 \\ r(\delta_2 - z) + s(y - \gamma_3) = 0 \end{cases}, \forall r, s, l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \beta_2, z = \delta_2 \\ w = \beta_2, y = \gamma_3 \\ z = \delta_2, y = \gamma_3 \end{cases}$$

Logo, $\forall f \in Z^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$, $\exists p = (x, \gamma_3, \delta_2, \beta_2) \in \mathbb{H}$ tal que $f(W) = \rho(W)p, \forall W \in \mathfrak{s}^3$.

Logo, $Z^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H}) = B^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H})$ e portanto $H^1(\mathfrak{s}^3, \mathbb{H}) = 0$.

Capítulo 2

Zeros Elementares de Álgebras de Lie de Campos de Vetores

Neste capítulo consideramos ainda $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, V um espaço vetorial, ambos sobre os reais e de dimensão finita, e ρ uma ação de $\mathfrak{g}$ em V .

O Anulamento de H^1 para Álgebras de Lie Nilpotentes

Nesta seção veremos alguns resultados que ajudarão na compreensão do significado do anulamento do primeiro grupo de cohomologia para uma álgebra de Lie nilpotente.

Lema 2.1 *Suponha que exista $Z \in \mathfrak{g}$ tal que $Z \in \mathfrak{Ker} ad$ e $\rho(Z)$ é inversível. Então $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$.*

Prova. Desde que Z está no centro de $\mathfrak{g}$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e f um 1-cociclo temos

$$0 = f([X, Z]) = \rho(X)f(Z) - \rho(Z)f(X) \Rightarrow \rho(Z)f(X) = \rho(X)f(Z).$$

Tome u igual a inversa de $\rho(Z)$ aplicada a $f(Z)$, isto é, $u = (\rho(Z))^{-1}f(Z) \in V$. Como

$$\begin{aligned} 0 &= \rho([X, Z]) = [\rho(X), \rho(Z)] = \rho(X)\rho(Z) - \rho(Z)\rho(X) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\rho(Z))^{-1}\rho(X) = \rho(X)(\rho(Z))^{-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$f(X) = (\rho(Z))^{-1}(\rho(X)f(Z)) = \rho(X)((\rho(Z))^{-1}f(Z)) = \rho(X)u, \text{ para todo } X \in \mathfrak{g}.$$

Logo f é também um 1-cobordo e portanto $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$. ■

Observação. Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma ação tal que $\mathfrak{Ker} \rho \neq \{0\}$, então ρ induz uma aplicação

$$\rho' : \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{Ker} \rho} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

dada por $\rho'(\overline{X}) = \rho(X)$, onde $\overline{X}$ é a classe de equivalência de X . Verifiquemos que ρ' é uma ação injetora.

- ρ' é uma ação pois

$$[\rho'(\overline{X}), \rho'(\overline{Y})] = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho([X, Y]) = \rho'(\overline{[X, Y]}) = \rho'([\overline{X}, \overline{Y}]).$$

onde a última igualdade é dada pela definição do colchete em $\mathfrak{g}/\mathfrak{Ker} \rho$ induzido do colchete de $\mathfrak{g}$ (em 1.3, pg.11).

- ρ' é injetora pois

$$\rho'(\overline{X}) = 0 \Leftrightarrow \rho(X) = 0 \Leftrightarrow X \in \mathfrak{Ker} \rho \Leftrightarrow \overline{X} = 0.$$

Lema 2.2 Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma nil representação não trivial de $\mathfrak{g}$, então $H^1(\mathfrak{g}, V) \neq \{0\}$.

Prova. Se $\dim V = 1$, o lema é válido por vacuidade. Suponha que $\dim V > 1$ e $\dim \mathfrak{g} = 1$. Como visto no exemplo **Ação Trivial**, $H^1(\mathfrak{g}, V) = V/\mathfrak{Im} \rho(X)$ onde X é um gerador de $\mathfrak{g}$. Logo, o lema também é válido pois $\dim V > 1$ e $\dim \mathfrak{Im} \rho(X) = 1$.

Suponhamos por um momento que já temos provado o Lema para $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{Ker} \rho$. Neste caso $H^0(\mathfrak{Ker} \rho, V) = V$. Então a Proposição 3.4 (pg.45) nos fornece a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}', V) \xrightarrow{\inf} H^1(\mathfrak{g}, V).$$

Logo $H^1(\mathfrak{g}, V) \neq \{0\}$ pois $H^1(\mathfrak{g}', V) \neq \{0\}$ por hipótese. Podemos então supor que ρ é injetora e $\mathfrak{g}$ é nilpotente.

Suponhamos então que $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ e que o resultado é verdadeiro para $\dim V = n - 1$ ($n \geq 2$). Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ base para V , e V_0 o subespaço de V gerado por $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Logo $V/V_0 \simeq \mathbb{R}$. Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ o ideal consistindo de todos os elementos de $\mathfrak{g}$ cuja restrição à V_0 é zero. Desde que ρ é injetiva, $H^0(\mathfrak{h}, V_0) = V_0$. Temos então dois casos a analisar.

1. $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Então a Proposição 3.4 diz que

$$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, V_0) \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, V)$$

é uma sequência exata e o Lema é verdadeiro pois o termo do meio é não nulo por hipótese.

2. $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Pela definição de V_0 , $\mathfrak{g}$ age trivialmente sobre V_0 e a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow V_0 \xrightarrow{\mu} V \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

produz, por 3.2 pg.44, a seguinte sequência exata

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, V_0) \xrightarrow{\mu_*} H^1(\mathfrak{g}, V).$$

Como $\mathfrak{g}$ age trivialmente sobre V_0 , então $H^1(\mathfrak{g}, V_0) = \text{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], V_0)$. Pelo Lema 1.3, pg.13, $\dim \text{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], V_0) \geq 2$. Desde que $H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathbb{R}$, então $\dim H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \leq 1$. Como a sequência acima é exata, o Teorema do Núcleo e da Imagem garante que $\dim \text{Im } \mu_* \geq 1$, e a prova está completa. ■

Lema 2.3 *Seja $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ uma ação e V_n o maior subespaço de V tal que todo elemento de $\rho(\mathfrak{g})$ é nilpotente. Então $H^0(\mathfrak{g}, V/V_n) = \{0\}$.*

Prova. A ação ρ induz uma ação $\bar{\rho} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V/V_n) : X \mapsto \pi \circ \rho(X) \circ i$ onde i é a aplicação tal que $i([u]) = u$ e π é a projeção canônica $\pi : V \rightarrow V/V_n : u \mapsto [u]$. Tome $v, u \in V$ tal que $(v - u) \in V_n$. Da definição de V_n , $\rho(X)(v - u) \in V_n$. Logo

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(X)[v] - \bar{\rho}(X)[u] &= \pi \circ \rho(X) \circ i([v]) - \pi \circ \rho(X) \circ i([u]) = \\ &= \pi \circ \rho(X)v - \pi \circ \rho(X)u = \\ &= \pi(\rho(X)(v - u)) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\bar{\rho}$ está bem definida. Além disso,

$$\begin{aligned} [\bar{\rho}(X), \bar{\rho}(Y)] &= \bar{\rho}(X)\bar{\rho}(Y) - \bar{\rho}(Y)\bar{\rho}(X) = \\ &= \pi \rho(X) \rho(Y) i - \pi \rho(Y) \rho(X) i = \\ &= \pi(\rho(X) \rho(Y) - \rho(Y) \rho(X)) i = \\ &= \pi(\rho([X, Y])) i = \\ &= \bar{\rho}([X, Y]). \end{aligned}$$

Portanto $\bar{\rho}$ é uma ação de $\mathfrak{g}$ em V/V_n . Desde que $\bar{\rho}(X)[v] = 0 \Leftrightarrow \pi \circ \rho(X) \circ i([v]) = \pi \circ \rho(X)v = 0$, então $H^0(\mathfrak{g}, V/V_n)$ é o subespaço de V/V_n tal que $\rho(X)v \in V_n, \forall X \in \mathfrak{g}$. Mas pela definição de V_n , $v \in V_n$. Portanto $H^0(\mathfrak{g}, V/V_n) = \{0\}$. ■

Proposição 2.4 *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ é uma ação tal que $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$, então $H^0(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$.*

Prova. Considere V_n como no Lema anterior. Logo $H^0(\mathfrak{g}, V/V_n) = \{0\}$ e a sequência exata curta

$$0 \rightarrow V_n \rightarrow V \rightarrow V/V_n \rightarrow 0$$

produz, por 3.2 pg.44, a seguinte sequência exata de cohomologia

$$H^0(\mathfrak{g}, V/V_n) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, V_n) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, V).$$

Desde que $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$ por hipótese, então $H^1(\mathfrak{g}, V_n) = \{0\}$. Por outro lado, $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$ e o Lema 2.2 implica que ρ é trivial sobre V_n . Logo $H^1(\mathfrak{g}, V_n) = \text{Hom}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], V_n)$. Portanto $V_n = \{0\}$. Pela definição $H^0(\mathfrak{g}, V) \subset V_n$ concluindo assim a Proposição. ■

Por "QUASE TODOS" os pontos em um espaço vetorial real V de dimensão finita entendemos o subconjunto $(V - \bigcup_{i=1}^k W_i)$ onde k é finito e W_i é um subespaço de V tal que $\dim W_i < \dim V$.

Proposição 2.5 Para uma álgebra de Lie nilpotente e uma ação $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$
- (b) $H^0(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$
- (c) Para quase todo $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ é inversível
- (d) Para algum $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)$ é inversível

Prova. Que (a) implica (b) segue da Proposição 2.4, (c) implica (d) é óbvio, (d) implica (b) segue da definição de H^0 e (b) implica (c) segue do Lema 1.6, pg.14, e do Teorema 1.4 pois as aplicações h_i são tais que $\mathfrak{Ker} h_i$ é um subespaço fechado com $\dim \mathfrak{Ker} h_i < \dim \mathfrak{g}$. Logo, se $X \in (\mathfrak{g} - \bigcup_{i=1}^k \mathfrak{Ker} h_i)$, então $\rho(X)$ tem todos os autovalores não nulos, ou seja, $\rho(X)$ é inversível.

A prova estará completa se mostrarmos que (b) implica (a). Desde que (b) é equivalente à (c), pelo Lema 2.1 a Proposição é válida se $\mathfrak{g}$ é abeliano. Em particular é verdadeira p/ $\dim \mathfrak{g} \leq 2$. Assuma que a Proposição vale para $\dim \mathfrak{g} < n$ ($n \geq 3$). Se $\dim \mathfrak{g} = n$, pelo Lema 1.3 pg.13, e por (c) existe um ideal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de codimensão 1 que contém um elemento inversível. Pela hipótese de indução, $H^1(\mathfrak{h}, V) = \{0\}$ e $H^0(\mathfrak{h}, V) = \{0\}$. A Proposição 3.4 (pg.45) diz que a sequência

$$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^0(\mathfrak{h}, V)) \xrightarrow{\inf} H^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{res} H^1(\mathfrak{h}, V)$$

é exata. Logo, $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$, e a prova de 2.5 está completa. ■

Zeros Elementares

Um campo vetorial X , sobre uma variedade diferenciável M , é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_p M$, tangente a M no ponto p . Dado um campo vetorial X sobre M , um sistema de coordenadas $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ em M permite escrever, para todo $p \in U$:

$$X(p) = \sum_{i=1}^k a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

Assim, em cada sistema de coordenadas $\mathbf{x}$, o campo X fica determinado pelas n funções reais $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ que dão, em todo ponto $p \in U$, as n coordenadas de $X(p)$ relativa a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right\}$. Um ponto $p \in M$ é um ZERO de X se $X(p)$ é o vetor nulo. Um zero de X é dito ser ELEMENTAR se $DX_p : T_p M \rightarrow T_p M$ é inversível, isto é, $\det \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$ no ponto p .

Outra maneira de escrevermos esses conceitos é definir um campo vetorial como uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ de classe C^r tal que πX é a identidade em M , onde π é a projeção natural de TM em M . Consideremos $M_0 = \{0_q \in T_q M : q \in M\}$. M_0 é uma subvariedade de TM difeomorfa à M . Neste caso $p \in M$ é um zero de X se $X(p) \in M_0$. Além disso p é um zero elementar de X se X é transversal à M_0 em p . Essa definição implica que todo zero elementar é isolado e estável, isto é, persistem por pequenas perturbações.

Seja $\mathfrak{S}^r(M)$ a álgebra de Lie dos campos vetoriais C^r sobre M , e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma AÇÃO de $\mathfrak{g}$ sobre M é uma aplicação linear $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^r(M)$ tal que $A([X, Y]) = [A(X), A(Y)]$, para todo X, Y em $\mathfrak{g}$. Um ponto $p \in M$ é dito ser um ZERO de A se $A(X)(p) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{g}$. Logo, se A for integrado para obtermos uma ação local de um grupo de Lie G , então p é um ponto estacionário (ou fixo) da ação local de G [13]. Em particular, se M é compacto temos uma ação global de G sobre M . Por uma ÓRBITA da ação A entendemos uma órbita da ação do grupo de Lie.

Para cada $X \in \mathfrak{g}$ sua imagem por A é um campo de vetores $A(X) : M \rightarrow TM$, e a derivada de $A(X)$ em $p \in M$ é a aplicação linear

$$DA(X)_p : T_p M \rightarrow T_{v_p}(TM), \quad \text{onde } v_p = A(X)p.$$

Se p é um zero de A , então identificando $T_p M$ com a componente vertical de $T_{0_p}(TM)$ (onde 0_p é o vetor nulo em p) podemos considerar $DA(X)_p \in \mathfrak{gl}(T_p M)$. Logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(T_p M) \\ X &\mapsto DA(X)_p \end{aligned}$$

é uma ação linear do tipo considerado anteriormente, e é chamada PARTE LINEAR de A em p .

Definição 2.6 Um zero $p \in M$ de uma ação A é chamado ELEMENTAR se, para a parte linear de A em p , $H^1(\mathfrak{g}, T_p M) = \{0\}$.

A Proposição 2.5 nos fornece uma caracterização dos zeros elementares de uma ação de uma álgebra de Lie nilpotente.

Proposição 2.7 Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente e p é um zero de uma ação $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^1(M)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) p é um zero elementar para A ;
- (b) Se $DA(X)_p v = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, então $v = 0$;
- (c) Para algum $X \in \mathfrak{g}$, p é um zero elementar para $A(X)$;
- (d) Para quase todo $X \in \mathfrak{g}$, p é um zero elementar para $A(X)$.

Prova. Segue imediatamente de 2.5. ■

Através dessa caracterização vemos facilmente que a ação de $\mathfrak{r}^2$ do exemplo A, página 15, tem a origem como um zero elementar uma vez que o campo $\tilde{W} = a\tilde{X} + b\tilde{Y}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é inversível. Por outro lado a ação de $\mathfrak{af}$ do exemplo B nos mostra que a condição (c) não é necessária para que um zero seja elementar para uma ação de uma álgebra de Lie não nilpotente. Já no caso de uma ação de uma álgebra de Lie semi-simples o Primeiro Lema de Whitehead diz que todo zero é elementar. Percebemos então que quanto menos comutativa é a álgebra de Lie mais fácil fica para um zero ser elementar.

A Proposição 2.5 nos fornece outra ferramenta para saber se um zero de uma ação $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^1(M)$ é elementar.

Exemplo G. Considere os seguintes campos de vetores sobre $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X &= \cos 2\pi x \frac{\partial}{\partial x} + \cos 2\pi y \frac{\partial}{\partial y} \\ Y &= \cos 2\pi x \frac{\partial}{\partial x} - \cos 2\pi y \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Esses dois campos de vetores comutam e definem outros dois campos de vetores $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ sobre o toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Tomemos então a ação A expandida por $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$. O conjunto de zeros dessa ação é $\left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right) \right\}$. O módulo

do determinante da matriz Jacobiana de X em cada zero é $4\pi^2$. Portanto todos os zeros de A são elementares.

Teorema de Estabilidade

Consideremos para cada $u \in V$, a aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em V tal que

$$\alpha_u(X) = \rho(X)u.$$

Vamos agora definir uma aplicação linear α como sendo a avaliação da ação ρ , isto é,

$$\begin{aligned} \alpha: V &\rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \\ u &\mapsto \alpha_u \end{aligned} \quad (2.1)$$

Da definição fica claro que $H^0(\mathfrak{g}, V) = \text{Ker } \alpha$.

Sejam ρ e ρ' duas ações e α e α' as correspondentes aplicações lineares. Se ρ está próxima de ρ' então α está próxima de α' e portanto, pela dependência contínua dos autovalores, dado ρ , existe ρ' suficientemente próximo de ρ tal que

$$\dim \text{Im } \alpha \leq \dim \text{Im } \alpha'. \quad (2.2)$$

Considere agora W o espaço vetorial das aplicações bilineares anti-simétricas de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em V . Seja $l = \dim \mathfrak{g}$, então $W \simeq V^{\frac{l(l-1)}{2}}$. Então, para cada $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ defina β_f a aplicação bilinear de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ em V tal que

$$\beta_f(X, Y) = \rho(X)f(Y) - \rho(Y)f(X) - f([X, Y]).$$

Claramente β_f é anti-simétrica, isto é, $\beta_f \in W$. Portanto, podemos definir

$$\begin{aligned} \beta : \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) &\rightarrow W \\ f &\longmapsto \beta_f \end{aligned} \quad (2.3)$$

Da definição de β segue que $Z^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{Ker}\beta$. Tome $u \in V$. Então

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_u)(X, Y) &= \rho(X)\alpha_u(Y) - \rho(Y)\alpha_u(X) - \alpha_u([X, Y]) = \\ &= \rho(X)(\rho(Y)u) - \rho(Y)(\rho(X)u) - (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))u = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{Im}\alpha \subset \mathcal{Ker}\beta$. Mais dos que isso, seja $f \in \mathcal{Ker}\beta = Z^1(\mathfrak{g}, V)$. Então

$$f \in B^1(\mathfrak{g}, V) \Leftrightarrow \exists u \in V : f(X) = \rho(X)u = \alpha_u(X), \forall X \in \mathfrak{g},$$

isto é, $f = \alpha_u$. Logo, $B^1(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{Im}\alpha$. Portanto

$$H^1(\mathfrak{g}, V) = \frac{\mathcal{Ker}\beta}{\mathcal{Im}\alpha}. \quad (2.4)$$

Consequentemente dizer que $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$ é equivalente a dizer que a sequência

$$V \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\beta} W \quad (2.5)$$

é exata.

Analogamente ao dito sobre α , dado uma ação ρ existe ρ' ação suficientemente próxima de ρ tal que, para as aplicações β e β' correspondentes

$$\dim \mathcal{Ker}\beta' \leq \dim \mathcal{Ker}\beta \quad (2.6)$$

Por 2.2, 2.4 e 2.6 temos que dada uma ação ρ , existe uma ação ρ' suficientemente próxima de ρ tal que

$$\dim \mathcal{Im}\alpha \leq \dim \mathcal{Im}\alpha' \leq \dim \mathcal{Ker}\beta' \leq \dim \mathcal{Ker}\beta.$$

Se $H^1(\mathfrak{g}, V)_\rho = \{0\}$, isto é, $\mathcal{Im}\alpha = \mathcal{Ker}\beta$, então $H^1(\mathfrak{g}, V)_{\rho'} = \{0\}$, ou seja, a trivialidade de H^1 é estável por pequenas perturbações da ação. Além disso, $\dim H^0(\mathfrak{g}, V)_\rho = \mathcal{Ker}\alpha = \mathcal{Ker}\alpha' = \dim H^0(\mathfrak{g}, V)_{\rho'}$. Com isso provamos a

Proposição 2.8 *Se para alguma ação ρ de $\mathfrak{g}$ em V temos $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$, então essa condição também vale para todas as ações ρ' suficientemente próximas de ρ . Mais ainda, $H^0(\mathfrak{g}, V)_{\rho'}$ terá a mesma dimensão que $H^0(\mathfrak{g}, V)_\rho$.*

Teorema 2.9 *Seja $p \in M$ um zero elementar de uma ação A . Então existe uma vizinhança N de p onde todos os zeros são elementares. Além disso, o conjunto de zeros em N é uma subvariedade Z tal que $T_p Z = H^0(\mathfrak{g}, T_p M)$.*

Prova. Desde que a situação é local, podemos assumir, usando cartas locais, que M é um subconjunto aberto de V e $T_p M$ é identificado com V . Desde que p é elementar, por 2.4, a sequência

$$V \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\beta} W$$

é exata. Considere $S = \alpha(V)$ e escolha um subespaço complementar de S e denote por π_c a correspondente projeção de $\text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ sobre S . O índice c é para lembrar que a projeção depende da escolha do espaço complementar.

Usando uma base ordenada $\{X_1, \dots, X_l\}$ de $\mathfrak{g}$, identificamos cada $f \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ com $(f(X_1), \dots, f(X_l)) \in V^l$. Sendo $\alpha(u)$ uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ em V , temos que $\alpha(u) = (\alpha(u)(X_1), \dots, \alpha(u)(X_l)) = (DA(X_1)_p(u), \dots, DA(X_l)_p(u))$. Portanto

$$\alpha = (DA(X_1)_p, \dots, DA(X_l)_p).$$

Defina $\varphi : M \rightarrow S : x \mapsto \pi_c(A(X_1)(x), \dots, A(X_l)(x))$. Logo, desde que p é um zero de A , então $\varphi(p) = 0$. Como $D\varphi_p = \pi_c(DA(X_1)_p, \dots, DA(X_l)_p) = \pi_c \circ \alpha$ temos que $D\varphi_p$ é sobrejetiva. Pelo Teorema das Funções Implícitas, existe uma vizinhança N de p tal $Z = \{x \in N : \varphi(x) = 0\}$ é uma subvariedade tangente a $\text{Ker} D\varphi_p$ em p . Desde que π_c é a projeção de $\text{Hom}(\mathfrak{g}, V)$ sobre S , com relação a um subespaço complementar qualquer de S ,

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow (A(X_1)(x), \dots, A(X_l)(x)) = 0 \Leftrightarrow x \text{ é zero de } A.$$

Portanto Z é o conjunto de zeros em N . Além disso, pelo mesmo argumento,

$$\text{Ker} D\varphi_p = \text{Ker} \alpha = H^0(\mathfrak{g}, V),$$

ou seja, $T_p Z = H^0(\mathfrak{g}, V)$.

Finalmente, do fato que A é de classe C^1 , para todo ponto p' próximo de p , implica que $DA(X)_{p'}$ está próximo de $DA(X)_p$. Logo, a Proposição 2.8 garante que, restringindo N se necessário, todo zero de N é elementar. ■

Corolário. Seja $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^1(M)$ uma ação. Então:

- (a) Se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$, então os zeros elementares de A são isolados.
- (b) Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples então o conjunto de zeros de A é uma subvariedade de M .

Prova. (a) A Proposição 2.4 diz que $H^0(\mathfrak{g}, T_p M) = \{0\}$, e (a) segue do Teorema 2.9.

(b) Segue diretamente do Lema de Whitehead (que garante que $H^1(\mathfrak{g}, V) = \{0\}$ se $\mathfrak{g}$ é semi-simples) e do Teorema 2.9. ■

A parte (a) do corolário diz que não precisavamos ter calculado H^1 para as ações dos exemplos **C**, **D** e **E**, páginas 17-20, uma vez que os zeros dessas ações não são isolados. Um exemplo de uma ação com uma subvariedade unidimensional de zeros elementares é a ação de $\mathfrak{s}^3$ do **Exemplo F**.

Corolário 2.10 *Seja $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^1(M)$ uma ação e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Se $p \in M$ é um zero para A tal que a parte linear é trivial, então a ação A é trivial sobre a componente conexa de M que contém p .*

Prova. Se $p \in M$ é um zero tal que a parte linear é trivial, então

$$\rho(X)u = 0, \forall X \in \mathfrak{g}, u \in T_p M,$$

onde ρ é a parte linear de A em p . Logo, da definição, $H^0(\mathfrak{g}, T_p M) = T_p M$. Além disso, pelo **Exemplo Ação Trivial**, $H^1(\mathfrak{g}, T_p M) = \text{Hom}\left(\frac{\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}, T_p M\right)$. Desde que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, então $H^1(\mathfrak{g}, T_p M) = \{0\}$ e portanto p é um zero elementar. Como $H^0(\mathfrak{g}, T_p M) = T_p M$, o Teorema 2.9 implica que o conjunto de zeros de A contém uma vizinhança de p .

Portanto, o conjunto de pontos em M tal que A e sua parte linear são triviais é um aberto em M que contém p . Desde que esse conjunto também é fechado, ele deve conter a componente conexa que contém p . ■

Tomemos a topologia do espaço das ações tal que se $\{X_1, \dots, X_l\}$ é uma base ordenada para $\mathfrak{g}$ então uma sequência de ações $\{A_i\}$ convergem se $A_i(X_j)$ e $D_k A_i(X_j)$, $j = 1, \dots, l$, $k = 1, 2$ convergem uniformemente sobre conjuntos compactos.

Teorema 2.11 *Seja p uma zero elementar de uma ação $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^2(M)$. Então, dado uma vizinhança N de p , existe uma vizinhança U de A no espaço das ações C^2 tal que para todo $A' \in U$ existe $p' \in N$ que é um zero elementar de A' .*

Prova. Desde que o problema é local, e analogamente à demonstração do Teorema 2.9, considere ρ a parte linear de A em p , $S = \alpha(V) (= \text{Ker } \beta)$, $\pi : \text{Hom}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow S$ a projeção com relação a um subespaço complementar de S , $\varphi : M \rightarrow S : x \mapsto \pi(A(X_1)(x), \dots, A(X_l)(x))$ onde $\{X_1, \dots, X_l\}$ é base de $\mathfrak{g}$.

Definimos a aplicação $\varphi' : M \rightarrow S : x \mapsto \pi(A'(X_1)(x), \dots, A'(X_l)(x))$ para uma ação A' próxima de A . Logo, dada uma vizinhança N de p tomemos A' suficientemente próxima de A tal que φ' está uniformemente próxima de φ em N . Desde que $D\varphi(p) = \pi \circ \alpha$ é sobrejetora, $\varphi(N)$ contém uma vizinhança de 0. Então podemos supor que existe $p' \in N$ tal que $\varphi'(p) = 0$, isto é, p' é um zero de A' . Como em 2.9 considere ρ' a parte linear de A' em p' . A topologia no espaço das ações e a desigualdade do Valor Médio garantem que ρ' é uma ação de $\mathfrak{g}$ em V próxima de ρ . Logo, da Proposição 2.8 segue que p' é zero elementar de A' . ■

Corolário. Seja $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^2(M)$ uma ação tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Se $p \in M$ é um zero para A tal que a parte linear é trivial, então existe uma vizinhança U de A tal que $A'(X)p' = 0$ se $X \in \mathfrak{g}$, $A' \in U$, e p' está na mesma componente conexa de p .

Prova. Como em 2.10 as hipóteses implicam que $H^0(\mathfrak{g}, T_p M) = T_p M$ e $H^1(\mathfrak{g}, T_p M) = 0$, isto é, p é zero elementar de A . Pelo Teorema 2.11 existe uma vizinhança U de A , no espaço das ações C^2 , tal que para todo $A' \in U$ existe um p' numa vizinhança de p que é um zero elementar para A' . A Proposição 2.8 garante que $H^0(\mathfrak{g}, T_{p'} M)_{\rho'} = T_{p'} M$ para ρ' parte linear de A' em p' . Logo, o Teorema 2.9 diz que o conjunto de zeros de A' inclui um aberto de M . Desde que este conjunto também é fechado, ele deve conter uma componente conexa, a mesma de p . ■

O Teorema Principal

Os próximos resultados serão utilizados na demonstração de 2.15. Seja U um aberto de $\mathbb{R}$. Denotemos por $C^r(U, \mathbb{R})$ o conjunto das aplicações de classe C^r de U em $\mathbb{R}$. O próximo resultado é um caso particular do Teorema da Densidade Transversal.

Teorema 2.12 *Sejam $\overline{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow C^1(U, \mathbb{R}) : (a, b) \mapsto G_{ab}$, e G a aplicação avaliação de $\overline{G}$, isto é, $G : \mathbb{R}^2 \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(a, b; x) = G_{ab}(x)$. Suponhamos que G é de classe C^1 e que 0 é valor regular de G . Então o conjunto*

$$\mathcal{A} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \text{ é valor regular para } G_{ab}\}$$

tem a propriedade que $\mathbb{R}^2 - \mathcal{A}$ tem medida nula. "

Prova. Ver [2, pg.48]. ■

Lema 2.13 *Seja N uma variedade diferenciável e $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ um recobrimento aberto de N . Então, existe um atlas $\mathcal{U} = \{h_i : V_i \rightarrow V'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ de N com as seguintes propriedades:*

- (a) $\{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ é um refinamento localmente fino de $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$;
- (b) $V'_i = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \max \{x_1, \dots, x_m\} < 3\} =: B(3)$;
- (c) Os conjuntos $W_i := h_i^{-1}(B(1))$ ainda cobrem N .

Prova. Ver [4]. ■

Lema 2.14 *Se $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^2(M)$ como em 2.15 e $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ então para quase todo 2-plano $\mathcal{P} \subset \mathfrak{g}$ a restrição de A a $\mathcal{P}$ tem precisamente as mesmas órbitas que A .*

Prova. Ver [15]. ■

Teorema 2.15 *Seja $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{S}^2(M)$ uma ação onde $\mathfrak{g}$ é abeliano e M é uma superfície compacta. Assuma que todo zero de A é elementar. Então existe $S \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} - S$ tem medida zero e para $X \in S$:*

- (a) O conjunto de zeros isolados de X coincide com o conjunto (finito) de zeros de A ;
- (b) Se $p_1, \dots, p_k$ são os zeros de A então $\sum_{i=1}^k \text{indice } X(p_i) = \chi(M)$.

Prova. Em vista do Lema 2.14 podemos supor que $\dim \mathfrak{g} = 2$ e portanto assumir que a ação é expandida por dois campos de vetores Y e Z que comutam. Suponhamos que todas as órbitas da ação tem dimensão 2, isto é, Y e Z são l.i. em todo ponto. Então as órbitas de M são toros e M é união, finita, de toros. Portanto $\chi(M) = 0$ e (a) e (b) valem pois a ação não tem zeros.

Denotemos por $\mathcal{O}_0$ o conjunto das órbitas de dimensão 0 e $\mathcal{O}_1$ o conjunto das órbitas de dimensão 1. Suponhamos $\mathcal{O}_1$ é não vazio e seja $p \in \mathcal{O}_1$. Suponhamos que $Y(p) \neq 0$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular existe um sistema de coordenadas locais (x, y) para uma vizinhança U_p de p tal que $Y = \frac{\partial}{\partial y}$. Em U_p temos que $Z = f \frac{\partial}{\partial x} + gY$ onde f e g são funções de classe C^1 em U_p . Como Y e Z comutam, então

$$0 = [Y, Z] = f_y \frac{\partial}{\partial x} + g_y Y.$$

Logo, f e g dependem somente de x . Considere $aY + bZ$ um campo de vetores arbitrário em $\mathfrak{g}$. Logo, a restrição de $aY + bZ$ em U_p tem a forma

$$aY + bZ = bf \frac{\partial}{\partial x} + (a + bg) Y.$$

Fixe $a, b \in \mathbb{R}$ e defina $G_{ab} : U \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow a + bg(x)$. Considere $G : \mathbb{R}^2 \times U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(a, b, x) = a + bg(x)$. Desde que 0 é valor regular para G , então para quase todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a aplicação G_{ab} tem 0 como valor regular por 2.12. Para tais (a, b) o conjunto de zeros do campo de vetores $aY + bZ$ é uma subvariedade de dimensão 1 do conjunto $\{(x, y) \in U : G_{ab}(x) = 0\}$. Desde que Y nunca é zero em U e f não depende de x , então o conjunto de zeros de $aY + bZ$ é uma subvariedade de dimensão 1. Observe que não é necessariamente todo o conjunto $\{(x, y) \in U : G_{ab}(x) = 0\}$.

Consideremos $N = M - \mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$, $V = M - \mathcal{O}_S$ e $\mathcal{U}$ o recobrimento de N constituído do aberto V e dos abertos U_p , $\forall p \in \mathcal{O}_1$. Então existe, pelo Lema 2.13, um refinamento localmente finito e enumerável de $\mathcal{U}$. Em particular existe uma coleção enumerável de abertos $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que cobrem $\mathcal{O}_1$. Desde que intersecção enumerável de conjuntos residuais é também residual, implica que existe um subconjunto $S_1 \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} - S$ tem medida nula e $X \in S_1$ implica que

o conjunto de zeros de X consiste do conjunto $\{p_1, \dots, p_k\}$ junto com subvariedades de dimensão 1 de $M - \{p_1, \dots, p_k\}$. Pela Proposição 2.7 existe um conjunto $S_0 \subset \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} - S_0$ tem medida nula e $X \in S_0$ implica que X tem $\{p_1, \dots, p_k\}$ como conjunto de zeros elementares. Em particular $p_1, \dots, p_k$ são zeros isolados para qualquer $X \in S_0$. Para $X \in S = S_0 \cap S_1$ o conjunto de zeros consiste de $p_1, \dots, p_k$ junto com uma subvariedade compacta de dimensão 1 em M que deve ser uma união finita de órbitas circulares, o que concui (a).

Tais órbitas circulares X tem vizinhanças tubulares duas a duas disjuntas, apresentando-se como um cilindro ou uma faixa de Möebius se a superfície for não orientável. Além disso, X é transversal ao bordo de cada vizinhança. Seja T a união, finita, de tais vizinhanças tubulares para $X \in S$. Então $M - T$ é uma superfície com bordo tal que $\chi(M - T) = \chi(M)$ [10]. E mais, a restrição de X à $M - T$ é transversal ao bordo e tem $\{p_1, \dots, p_k\}$ como conjunto de zeros. A parte (b) segue da fórmula de Poincaré-Hopf para a superfície $M - T$. ■

A demonstração do Teorema mostra que o campo de vetores X pode também ter zeros que não são isolados. Por exemplo, considere os campos de vetores sobre o plano

$$X = (\cos 2\pi x) \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = (\sin 2\pi x) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Campo X

Esses dois campos de vetores comutam e induzem campos de vetores $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ que comutam sobre o toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Utilizando coordenadas polares, todo campo de vetores na álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}^1(M)$ expandida por $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ é um múltiplo escalar de algum $\widetilde{X}_t = (\cos 2\pi t)\widetilde{X} + (\sin 2\pi t)\widetilde{Y} = \cos 2\pi(x-t)\frac{\partial}{\partial y}$. Logo, o conjunto de zeros de $\widetilde{X}_t$ é a união de dois círculos $x = t + \frac{1}{4}$ e $x = t + \frac{3}{4}$.

O teorema nos permite imaginar que seja possível generalizar a noção de índice para um zero isolado p de uma ação por uma álgebra de Lie abeliana como sendo o índice de um elemento genérico $X \in \mathcal{S}$ em p . No entanto, no **Exemplo G**, temos uma ação de uma álgebra de Lie abeliana sobre os campos de vetores do toro T^2 , expandida pelos campos $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$, tal que $\text{índice}(\widetilde{X}, p) = -\text{índice}(\widetilde{Y}, p) = \pm 1$ para cada zero p .

Capítulo 3

Apêndice

Um pouco de Cohomologia.

Denotemos por $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$ o conjunto de todos os homomorfismos do Λ -módulo A para o Λ -módulo B , onde Λ é um anel comutativo com unidade. Claramente este conjunto tem estrutura de grupo abeliano com a operação soma definida a seguir: se $\eta, \psi \in \text{Hom}_\Lambda(A, B)$ então $(\eta + \psi)$ definido por $(\eta + \psi)a = \eta a + \psi b, \forall a \in A$, também está em $\text{Hom}_\Lambda(A, B)$. Omitiremos o símbolo Λ a menos que seja necessário.

Seja $\beta : B_1 \rightarrow B_2$ um homomorfismo de módulos. Então β induz um homomorfismo de grupos abelianos β_* definido por

$$\begin{aligned} \beta_* : \text{Hom}(A, B_1) &\rightarrow \text{Hom}(A, B_2). \\ \varphi &\mapsto \beta\varphi \end{aligned}$$

Logo, definimos o functor (covariante) $\text{Hom}(A, -)$ da categoria dos módulos na categoria dos grupos abelianos, que associa cada módulo B com o grupo abeliano $\text{Hom}(A, B)$, e cada homomorfismo de módulos β o homomorfismo de grupos β_* .

Por outro lado, se $\alpha : A_1 \rightarrow A_2$ é um homomorfismo de módulos, então α induz o seguinte homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \alpha^* : \text{Hom}(A_2, B) &\rightarrow \text{Hom}(A_1, B). \\ \varphi &\mapsto \varphi\alpha \end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, definimos o functor (contravariante) $\text{Hom}(-, B)$ da categoria dos módulos na categoria dos grupos abelianos.

Sejam $\mu : A \rightarrow B$ e $\varepsilon : B \rightarrow C$ homomorfismos de módulos. A sequência $A \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} C$ é chamada EXATA (em B) se $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \mu$. Se a sequência $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1}$ é exata em $A_1, \dots, A_n$, então a sequência é chamada simplesmente de exata. Por exemplo a sequência $0 \rightarrow A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \rightarrow 0$ é exata (em A', A, A'') se e só se μ induz um isomorfismo $A' \xrightarrow{\sim} \mu A'$ e ε induz um isomorfismo $A/\text{Ker } \varepsilon = A/\mu A' \xrightarrow{\sim} A''$. Essencialmente A' é um submódulo de A , e A'' o correspondente módulo quociente. Tal sequência exata é chamada EXATA CURTA e será denotada por $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A''$.

Teorema 3.1 *Seja $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A''$ uma sequência de módulos. Então para todo módulo B a sequência*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \text{Hom}(A, B'')$$

é exata.

Teorema 3.2 *Seja $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A''$ uma sequência de módulos. Então para todo módulo B a sequência*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A'', B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}(A', B)$$

é exata.

As demonstrações podem ser vistas em [6].

Um módulo P é chamado de **PROJETIVO** se para todo homomorfismo sobrejetivo de módulos $\varepsilon : B \rightarrow C$ e todo homomorfismo $\gamma : P \rightarrow C$ existe um homomorfismo $\pi : P \rightarrow B$ tal que $\varepsilon\pi = \gamma$. Exemplos de módulos projetivos são os K -módulos onde K é um corpo.

Uma sequência exata curta $R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A$ de Λ -módulos com P projetivo é chamada uma **PRESENTAÇÃO PROJETIVA** de A . Logo, quando $\Lambda = K$ qualquer sequência exata curta $A \rightarrow B \rightarrow C$ é uma apresentação projetiva de C .

Pelo Teorema 3.2 uma apresentação projetiva $R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A$ induz, para um módulo B , uma sequência exata

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon^*} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{\mu^*} \text{Hom}(R, B). \quad (3.1)$$

Para os módulos A e B , e para uma apresentação projetiva escolhida de A nós podemos associar o grupo abeliano

$$\text{Ext}(A, B) = \text{Ext}_{\Lambda}(A, B) = \text{CoKer}(\mu^* : \text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(R, B)).$$

Prova-se que esta definição não depende da apresentação projetiva escolhida. Um elemento em $\text{Ext}(A, B)$ pode ser representado por $\varphi : R \rightarrow B$ e será denotado por $[\varphi] \in \text{Ext}(A, B)$. Então $[\varphi_1] = [\varphi_2]$ se e somente se $\varphi_1 - \varphi_2$ se estende a P .

Claramente um homomorfismo $\beta : B \rightarrow B'$ aplica a sequência 3.1 em uma sequência correspondente para B'

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & \text{Hom}(P, B) & \xrightarrow{\mu^*} & \text{Hom}(R, B) \xrightarrow{\pi} \text{Ext}(A, B) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \beta_* \quad \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(A, B') & \xrightarrow{\varepsilon^*} & \text{Hom}(P, B') & \xrightarrow{\mu^*} & \text{Hom}(R, B') \xrightarrow{\pi} \text{Ext}(A, B') \rightarrow 0 \end{array}$$

Assim, temos a aplicação induzida $\beta_* : \text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A, B') : \beta_*([\varphi]) \rightarrow [\beta\varphi]$ que é um homomorfismo de grupos abelianos e portanto é fácil ver que $\text{Ext}(A, -)$ é um functor da categoria dos módulos na categoria dos grupos abelianos.

Por outro lado, se $R \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\varepsilon} A$ e $R' \xrightarrow{\mu'} P' \xrightarrow{\varepsilon'} A'$ são apresentações projetivas de A e A' e $\alpha : A \rightarrow A'$ é um homomorfismo de módulos, desde que P é projetivo

existe um homomorfismo $\pi : P \rightarrow P'$ induzindo $\sigma : R \rightarrow R'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \pi & & \downarrow \alpha \\ R' & \xrightarrow{\mu'} & P' & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' \end{array}$$

Analogamente ao caso anterior, para um módulo B , as aplicações α e π , junto com σ , induzem o seguinte diagrama de homomorfismos e grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(A', B) & \xrightarrow{\varepsilon'_*} & \text{Hom}(P', B) & \xrightarrow{\mu'_*} & \text{Hom}(R', B) \xrightarrow{\pi} \text{Ext}(A', B) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha^* & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \sigma^* & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{\varepsilon_*} & \text{Hom}(P, B) & \xrightarrow{\mu_*} & \text{Hom}(R, B) \xrightarrow{\pi} \text{Ext}(A, B) \rightarrow 0 \end{array}$$

Portanto, existe um homomorfismo de grupos abelianos induzido denotado por $\alpha^* : \text{Ext}(A, B) \rightarrow \text{Ext}(A', B)$. Prova-se que este homomorfismo só depende de α , o que justifica a notação. Portanto $\text{Ext}(-, B)$ é um functor (contravariante) da categoria dos módulos na categoria dos grupos abelianos.

Teorema 3.3 *Sejam A um módulo e $B' \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\varepsilon} B''$ uma seqüência exata curta de módulos. Então existe um homomorfismo $\omega : \text{Hom}(A, B'') \rightarrow \text{Ext}(A, B')$ tal que a seguinte seqüência é exata*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(A, B') &\xrightarrow{\mu_*} \text{Hom}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \text{Hom}(A, B'') \\ &\xrightarrow{\omega} \text{Ext}(A, B') \xrightarrow{\mu_*} \text{Ext}(A, B) \xrightarrow{\varepsilon_*} \text{Ext}(A, B''). \end{aligned}$$

Essa seqüência é chamada SEQÜÊNCIA HOM-EXT (na segunda variável).

Dado $\alpha : A \rightarrow B''$ nós definimos as aplicações π, σ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\mu} & P & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \pi & & \downarrow \alpha \\ B' & \xrightarrow{\mu'} & B & \xrightarrow{\varepsilon'} & B'' \end{array}$$

é comutativo. A demonstração do teorema (ver [6]) mostra que $\omega(\alpha) = [\sigma] \in \text{Ext}(A, B')$.

Uma categoria ADITIVA $\mathcal{U}$ é uma categoria com objeto zero tal que quaisquer dois objetos tem um produto e no qual o conjunto de morfismos $\mathcal{U}(A, B)$ são grupos abelianos tal que a composição

$$\mathcal{U}(A, B) \times \mathcal{U}(B, C) \rightarrow \mathcal{U}(A, C)$$

é bilinear. Um Λ -módulo GRADUADO é uma família de Λ -módulos $A = \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Se A e B são duas famílias de Λ -módulos graduados, um morfismo $\varphi : A \rightarrow B$ DE GRAU k é uma família de homomorfismos de Λ -módulos $\{\varphi_n : A_n \rightarrow B_{n+k}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Essa categoria será denotada por $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ e é uma categoria aditiva se nos restringirmos aos morfismos de grau 0. O próximo resultado pode ser encontrado em [6]:

"Seja $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{B}$ um functor de uma categoria aditiva $\mathcal{U}$ em uma categoria aditiva $\mathfrak{B}$. Então as seguintes condições são equivalentes:

- F preserva somas (de dois objetos);
- F preserva produtos (de dois objetos);
- para cada A, A' em $\mathcal{U}$, $F: \mathcal{U}(A, A') \rightarrow \mathfrak{B}(FA, FA')$ é um homomorfismo. "

Um functor satisfazendo qualquer das três condições acima é chamado de FUNCTOR ADITIVO.

Um COMPLEXO DE CADEIA $C = \{C_n, \partial_n\}$ sobre Λ é um objeto em $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ junto com um endomorfismo $\partial : C \rightarrow C$ de grau -1 com $\partial\partial = 0$, que chamamos de OPERADOR BORDO. Um morfismo $\varphi : C \rightarrow D$ de grau 0 em $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ é dita uma APLICAÇÃO DE CADEIAS se $\varphi\partial = \tilde{\partial}\varphi$ onde $\tilde{\partial}$ é o operador bordo de D . Assim uma aplicação de cadeias φ é uma família $\{\varphi_n : C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos tal que, para todo n , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} & D_{n-1} \end{array}$$

é comutativo. Se $F : \mathfrak{M}_\Lambda \rightarrow \mathfrak{M}_{\Lambda'}$ é um functor covariante aditivo e se $C = \{C_n, \partial_n\}$ é um complexo de cadeia sobre Λ , então $FC = \{FC_n, F\partial_n\}$ é um complexo de cadeia sobre Λ' .

A condição que $\partial\partial = 0$ implica que $\text{Im } \partial_{n+1} \subseteq \text{Ker } \partial_n, n \in \mathbb{Z}$. Portanto, nós podemos associar com C o módulo graduado

$$H(C) = \{H_n(C)\} \quad \text{onde } H_n(C) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}, n \in \mathbb{Z}.$$

Então $H(C)$ ($H_n(C)$) é chamado de (n -ésimo) MÓDULO DE HOMOLOGIA de C . Os elementos de $\text{Ker } \partial_n$ são chamados de n -CICLOS e os elementos de $\text{Im } \partial_n$ de n -BORDOS.

Se tomarmos $D = \{D^n, \delta^n\}$ tal que $D^n = C_{-n}$ e $\delta^n = \partial_{-n}$ obtemos o que chamamos de COMPLEXO DE COCADEIA, ou seja D é um objeto em $\mathfrak{M}_\Lambda^{\mathbb{Z}}$ junto com um endomorfismo $\delta : D \rightarrow D$ de grau +1 tal que $\delta\delta = 0$. Aqui δ é chamado de OPERADOR COBORDO. APLICAÇÃO DE COCADEIAS é definido de modo

análogo a aplicação de cadeias e definimos o MÓDULO DE COHOMOLOGIA de um complexo de cocadeia $\mathbf{D}$ por

$$\mathbf{H}(\mathbf{D}) = \{H^n(C)\} \quad \text{onde } H^n(C) = \mathcal{Ker} \delta^n / \mathcal{Im} \delta^{n-1}, n \in \mathbb{Z}.$$

Os elementos de $\mathcal{Ker} \delta^n$ são chamados de n -COCICLOS e os elementos de $\mathcal{Im} \delta^n$ de n -COBORDOS.

Por uma RESOLUÇÃO PROJETIVA de um Λ -módulo A , nós entendemos uma sequência exata

$$\mathbf{P} : \cdots \rightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial} P_n \xrightarrow{\partial} P_{n-1} \rightarrow \cdots$$

tal que as seguintes condições se verificam:

- $P_{-1} = A$;
- $P_n = 0$ para todo $n < -1$;
- P_n é um Λ -módulo projetivo para todo $n \geq 0$.

Prova-se que todo Λ -módulo A possui uma resolução projetiva (Ver [5]). Seja B um Λ -módulo e $\mathbf{P} : 0 \leftarrow A \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \cdots$ uma resolução projetiva de A . Considere o seguinte complexo de cocadeia

$$\mathbf{Hom}(\mathbf{P}, B) : 0 \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(P_0, B) \rightarrow \text{Hom}_{\Lambda}(P_1, B) \rightarrow \cdots$$

Defina

$$\text{Ext}_{\Lambda}^n(A, B) = H^n(\text{Hom}_{\Lambda}(\mathbf{P}, B)), n = 0, 1, \dots$$

Da definição vemos que $\text{Ext}_{\Lambda}^n(A, B)$ é um grupo abeliano e que $\text{Ext}_{\Lambda}^0(A, B) = \text{Hom}_{\Lambda}(A, B)$ (isso decorre facilmente do teorema de isomorfismo). Não tão evidente é o fato que a definição não depende da escolha da resolução projetiva e que $\text{Ext}_{\Lambda}^1(A, B) = \text{Ext}_{\Lambda}(A, B)$, o que justifica a notação.

Seja G um grupo. Relembrando que um G -módulo (a esquerda) é um grupo abeliano A junto com um homomorfismo $\circ : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, ou seja, $\circ$ é uma ação de G em A . A imagem de $a \in A$ por um automorfismo definido por x é então denotado por $x \circ a$.

Seja G um grupo e A um G -módulo. Então definimos o n -ÉSIMO GRUPO DE COHOMOLOGIA de G com coeficientes em A por

$$H^n(G, A) = \text{Ext}_G^n(\mathbb{Z}, A).$$

Logo, dado uma sequência exata curta $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A''$ a sequência *Hom-Ext* do Teorema 3.3 toma a forma

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(G, A') &\xrightarrow{\mu_*} H^0(G, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^0(G, A'') \\ &\xrightarrow{\omega} H^1(G, A') \xrightarrow{\mu_*} H^1(G, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^1(G, A''). \end{aligned}$$

Desde que $\mathbb{Z}$ é um G -módulo trivial, isto é, o é trivial, o fato que todo homomorfismo de G -módulos $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow A$ é completamente determinado pela imagem de $1 \in \mathbb{Z}$, $\varphi(1) = a \in A$, implica que $x \circ a = x \circ \varphi(1) = \varphi(x \circ 1) = \varphi(1) = a$, onde a terceira igualdade se deve ao fato de $\mathbb{Z}$ ser um G -módulo trivial. Portanto

$$H^0(G, A) = \text{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) = \{a \in A : x \circ a = a, \forall x \in G\}$$

ou seja $H^0(G, A)$ é o subgrupo dos *elementos invariantes* em A , pela ação o .

Até o final do apêndice, K é um corpo, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie sobre K e A é um $\mathfrak{g}$ -módulo, isto é, A é um K -espaço vetorial A tal que existe um homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(A)$. Definimos o n -ÉSIMO GRUPO DE COHOMOLOGIA de $\mathfrak{g}$ com coeficientes em A da mesma maneira que para um grupo, isto é,

$$H^n(\mathfrak{g}, A) = \text{Ext}_{\mathfrak{g}}^n(K, A), \quad n = 0, 1, \dots$$

onde K é naturalmente visto como um $\mathfrak{g}$ -módulo trivial. Na verdade $H^n(\mathfrak{g}, A)$ é um K -espaço vetorial mas continuaremos chamando de grupo de cohomologia..

Analogamente ao caso anterior (a prova é a mesma), temos que

$$H^0(\mathfrak{g}, A) = \{a \in A : \rho(x)(a) = a, \forall x \in \mathfrak{g}\}$$

e dado uma sequência exata curta $A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} A''$ a sequência *Hom-Ext* do Teorema 3.3 toma a forma

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\mathfrak{g}, A') &\xrightarrow{\mu_*} H^0(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^0(\mathfrak{g}, A'') \\ &\xrightarrow{\omega} H^1(\mathfrak{g}, A') \xrightarrow{\mu_*} H^1(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} H^1(\mathfrak{g}, A''). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Uma DERIVAÇÃO de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em um $\mathfrak{g}$ -módulo A é uma aplicação K -linear $f : \mathfrak{g} \rightarrow A$ tal que

$$f([x, y]) = \rho(x)f(y) - \rho(y)f(x) \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

O conjunto das derivações tem uma estrutura de K -espaço vetorial e será denotado por $\text{Der}(\mathfrak{g}, A)$. Desde que A é um $\mathfrak{g}$ -módulo se a aplicação $\rho(x)(a)$ é K -linear em x e a e

$$\rho([x, y])(a) = \rho(x)(\rho(y)(a)) - \rho(y)(\rho(x)(a)) \quad x, y \in \mathfrak{g}, a \in A,$$

temos que para $a \in A$ fixo, a aplicação $f_a : \mathfrak{g} \rightarrow A$ definida por $f_a(x) = \rho(x)(a)$ é claramente uma derivação. Derivações deste tipo são chamadas de INTERNAS. O conjunto das derivações internas formam um subespaço em $\text{Der}(\mathfrak{g}, A)$ denotado por $\text{Ider}(\mathfrak{g}, A)$. Com um pouco de trabalho prova-se que

$$H^1(\mathfrak{g}, A) \cong \text{Der}(\mathfrak{g}, A) / \text{Ider}(\mathfrak{g}, A).$$

Considere $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathfrak{h}$ um ideal de $\mathfrak{g}$ e $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ um homomorfismo de Álgebras de Lie. Definimos uma aplicação chamada INFLAÇÃO como sendo

$$\begin{aligned} \text{inf} : H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^0(\mathfrak{h}, V)) &\rightarrow H^1(\mathfrak{g}, V) \\ f &\longmapsto i \circ f \circ \pi \end{aligned}$$

onde π é a projeção quociente e i é a inclusão. Definimos também a aplicação RESTRIÇÃO

$$\begin{aligned} \text{res} : H^1(\mathfrak{g}, V) &\rightarrow H^1(\mathfrak{h}, V) \\ f &\longmapsto f|_{\mathfrak{h}} \end{aligned}$$

Proposição 3.4 *A sequência*

$$0 \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^0(\mathfrak{h}, V)) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\text{res}} H^1(\mathfrak{h}, V)$$

é exata.

Prova. A aplicação inflação é claramente injetiva. Desde que $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ restrito à $\mathfrak{h}$ é a aplicação nula, $i \circ f \circ \pi|_{\mathfrak{h}} = 0$. Portanto $\text{Im inf} \subset \text{Ker res}$. Para provarmos a inclusão contrária, considere $g \in H^1(\mathfrak{g}, V)$ tal que $g \in \text{Ker res}$. Precisamos encontrar um candidato $\bar{g} \in H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, H^0(\mathfrak{h}, V))$ tal que $\text{inf}(\bar{g}) = g$. Para isso, tome

$$\begin{aligned} \bar{g} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} &\rightarrow H^0(\mathfrak{h}, V) \\ \bar{Y} &\longmapsto g(Y) \end{aligned}$$

Como $i \circ \bar{g} \circ \pi(X) = i \circ \bar{g}(\bar{X}) = i \circ g(X) = g(X)$, temos que $\bar{g}$ é um bom candidato. Mostremos que $\bar{g}$ está bem definida. Considere $Y, Y' \in \mathfrak{g}$ tal $Y - Y' \in \mathfrak{h}$. Então $\bar{g}(\bar{Y}) - \bar{g}(\bar{Y}') = g(Y) - g(Y') = g(Y - Y') = 0$, pois g pertence à Ker res . Falta mostrar apenas que $\bar{g}(\bar{Y}) \in H^0(\mathfrak{h}, V)$.

$$\bar{g}(\bar{Y}) \in H^0(\mathfrak{h}, V) \Leftrightarrow \rho(X) \bar{g}(\bar{Y}) = 0, \forall X \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow \rho(X) g(Y) = 0, \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Desde que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ implica que $g([X, Y]) = 0$, pois $g \in \text{Ker res}$, e $g([X, Y]) = \rho(X)g(Y) - \rho(Y)g(X) = \rho(X)g(Y)$ temos que $\rho(X)g(Y) = 0, \forall X \in \mathfrak{h}$. Portanto, $\bar{g}$ está bem definida e $\text{Ker res} \subset \text{Im inf}$. ■

Bibliografia

- [1] L.Auslander, L.Green and F.Hahn, "*Flows on Homogeneous Spaces*", Annals of Math. Studies #53, Princeton University Press, 1963.
- [2] R.Abraham and J.Robbin, "*Transversal Mappings and Flows*", Benjamin, New York, 1967.
- [3] F.Brickell and R.Clark, "*Differential Manifolds, An Introduction*", Van Nostrand-Reinhold Company, London, 1970.
- [4] T.Bröcker and K.Jänich, "*Introduction to Differential Topology*", Cambridge University Press, 1982.
- [5] S.-T.Hu, "*Introduction to Homological Algebra*", Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [6] P.J.Hilton and U.Stammbach, "*A course in Homological Algebra*", Springer, New York, 1971.
- [7] H.Hopf, "*Vektorfelder in n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten*", Math. Ann. 96, 1927, 225-250.
- [8] N.Jacobson, "*Lie Algebras*", Interscience, New York, 1962.
- [9] E.L.Lima, "*Common Singularities of Commuting Vector Fields on 2-Manifolds*", Comm. Math. Helv. 39, 1964, 97-110.

- [0] W.S.Massey, "*Algebraic Topology: An Introduction*", Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.
- [11] J.F.Plante, "*Fixed Points of Lie Group Actions on Surfaces*", *Ergodic Th. & Dynam. Sys.*, 6, 149-161, 1986.
- [12] J.F.Plante, "*Elementary Zeros of Lie Algebras of Vector Fields*", *Topology*, 30(2), 215-222, 1991.
- [13] R.Palais, "*A Global Formulation of the Lie Theory of Transformation Groups*", *Mem. Amer. Math. Soc. #22*. Providence, 1957.
- [14] H.Poincaré, "*Sur les Courbes Définies par une Équation Différentielle*", *J. Math. Pures Appl.* 4(1)1885, 167-244.
- [15] R.Sacksteder, "*Degeneracy of Orbits of Actions of $\mathbb{R}^n$ on a Manifold*", *Comm. Math. Helv.*, 41(1), 1-9, 1966.
- [16] A.A.Sagle and R.E.Walde, "*Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*", Academic Press, New York and London, 1973.