
Sobre a topologia das singularidades de Morin

Camila Mariana Ruiz

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Camila Mariana Ruiz

Sobre a topologia das singularidades de Morin

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Coorientador: Prof. Dr. Nicolas Dutertre

USP – São Carlos
Setembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R934s Ruiz, Camila Mariana
Sobre a topologia das singularidades de Morin /
Camila Mariana Ruiz; orientador Nivaldo de Góes
Grulha Jr.; co-orientador Nicolas Dutertre. -- São
Carlos, 2015.
148 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Teoria de Singularidades. 2. Singularidades
de Morin. 3. Teoria de Morse. 4. Característica de
Euler. 5. n -campos de vetores. I. Grulha Jr.,
Nivaldo de Góes, orient. II. Dutertre, Nicolas, co-
orient. III. Título.

Camila Mariana Ruiz

On the topology of Morin singularities

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
Coadvisor: Prof. Dr. Nicolas Dutertre

USP – São Carlos
September 2015

*Aos meus queridos pais, Carlos e Eliana.
(In memoriam)*

"Traziam não sei que fluido misterioso e enérgico, uma força que arrastava para dentro, como a vaga que se retira da praia, nos dias de ressaca. Para não ser arrastado, agarrei-me às outras partes vizinhas (...); mas tão depressa buscava as pupilas, a onda que saía delas vinha crescendo, cava e escura, ameaçando envolver-me, puxar-me e tragar-me."

Machado de Assis, Dom Casmurro.

Fosse a Matemática uma mulher,
certamente teria ela os instigantes
olhos de ressaca de Capitu.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me concedido saúde e coragem para chegar até aqui e poder seguir os meus sonhos.

À minha família, Rosa, Elza, Elisabete e ao meu querido Felipe: expresso aqui o meu reconhecimento e admiração, espero conseguir agradecer em atos concretos tudo o que vocês fizeram e fazem todos os dias, por mim e pelas pessoas que eu amo.

Aos meus orientadores Nivaldo de Góes Grulha Júnior e Nicolas Dutertre, agradeço imensamente pelas muitas horas dedicadas ao desenvolvimento deste trabalho e, especialmente, por serem tão respeitosos e compreensivos comigo nestes anos em que tantas coisas difíceis aconteceram.

Aos professores Jean-Paul Brasselet e Maria Aparecida Soares Ruas, coordenadores do Projeto Professor Visitante Especial- Ciência sem Fronteiras, agradeço a confiança e o incentivo para a realização de meu estágio na Aix-Marseille Université que, sem dúvida, foi essencial para a conclusão deste trabalho.

Aos meus queridos amigos e aos professores e funcionários do ICMC que, de forma direta ou indireta, há nove anos me acompanham nessa caminhada.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro concedido através dos processos 143479/2011-3 e 209531/2014-2 - SWE.

Resumo

Neste trabalho, nós abordamos alguns resultados de T. Fukuda e de N. Dutertre e T. Fukui sobre a topologia das singularidades de Morin. Em particular, apresentamos uma nova prova para o Teorema de Dutertre-Fukui [2, Theorem 6.2], para o caso em que $N = \mathbb{R}^n$, usando a Teoria de Morse para variedades com bordo.

Baseados nas propriedades de um n -campo de vetores gradiente $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ de uma aplicação de Morin $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\dim M \geq n$, na segunda parte deste trabalho, nós introduzimos o conceito de n -campos de Morin para n -campos de vetores que não são necessariamente gradientes. Nós também generalizamos o resultado de T. Fukuda [3, Theorem 1], que estabelece uma equivalência módulo 2 entre a característica de Euler de uma variedade diferenciável M e a característica de Euler dos conjuntos singulares de uma aplicação de Morin definida sobre M , para o contexto dos n -campos de Morin.

Palavras-chave: Teoria de singularidades; singularidades de Morin; teoria de Morse; característica de Euler; n -campos de vetores.

Abstract

In this work, we revisit results of T. Fukuda and N. Dutertre and T. Fukui on the topology of Morin maps. In particular, we give a new proof for Dutertre-Fukui's Theorem [2, Theorem 6.2] when $N = \mathbb{R}^n$, using Morse Theory for manifolds with boundary.

Based on the properties of a gradient n -vector field $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ of a Morin map $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, where $\dim M \geq n$, in the second part of this work, we introduce the concept of Morin n -vector field for n -vector fields $V = (V_1, \dots, V_n)$ that are not necessarily gradients. We also generalize the result of T. Fukuda [3, Theorem 1], which establishes a module 2 equivalence between Euler's characteristic of a manifold M and Euler's characteristic of the singular sets of a Morin map defined on M , to the context of Morin n -vector fields.

Keywords: Theory of singularities; Morin singularities; Morse theory; Euler characteristic; n -vector fields.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Transversalidade	5
1.2 Teoria de Morse	6
1.3 Caracterização de Z. Szafraniec	8
1.4 Teoria de Morse para variedades com bordo	10
2 Sobre a Topologia das Singularidades de Morin: Resultados de Takuo Fukuda	13
2.1 Definições e resultados	13
2.2 Lemas para os Teoremas de T. Fukuda	15
2.3 Demonstração dos Teoremas de T. Fukuda	41
3 Sobre a Topologia das Singularidades de Morin: O Teorema de Dutertre-Fukui	43
3.1 O Teorema de Dutertre-Fukui	44
3.2 Pontos críticos corretos	45
3.3 Uma nova demonstração para o Teorema de Dutertre-Fukui	56
4 Os n-campos de Morin: Definição	73
5 Sobre a Topologia dos n-campos de Morin	103
5.1 Zeros de um campo vetorial genérico $z(x)$ associado a um n -campo de Morin	103

5.2	Zeros não degenerados de um campo genérico $z(x)$ associado a um n -campo de Morin	111
5.3	Considerações finais	145

Introdução

Como observado por N. Dutertre e T. Fukui em [2], um assunto bastante estudado em Teoria de Singularidades é a relação existente entre a topologia de uma variedade diferenciável M e o conjunto crítico de aplicações definidas sobre M . Um bom exemplo deste fato é a Teoria de Morse que exhibe a característica de Euler de uma variedade compacta M , $\chi(M)$, em termos dos índices de Morse, $\lambda(p_i)$, dos pontos críticos p_i , $i = 1, \dots, n$, de uma função de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{\lambda(p_i)}.$$

Por volta de 1955, R. Thom provou em [16] que a característica de Euler $\chi(M)$ de uma variedade diferenciável compacta M , de dimensão no mínimo 2, tem a mesma paridade que o número de cúspides de uma aplicação genérica $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\chi(M) \equiv \#K(f) \pmod{2}.$$

Em [8], H. I. Levine melhorou este resultado apresentando uma igualdade que relaciona $\chi(M)$ ao conjunto crítico de f . Mais tarde, em [3], T. Fukuda generalizou o resultado de R. Thom para aplicações de Morin $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\dim M \geq n$. Ele provou que:

$$\chi(M) + \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(f)}) \equiv 0 \pmod{2}, \quad (1)$$

em que $A_k(f)$ é o conjunto dos pontos x em M tais que f tem uma singularidade de tipo A_k em x . Além disso, se f tem apenas pontos de dobra,

isto é, singularidades de tipo A_1 , e $\dim(M) - n$ é ímpar, o autor forneceu uma igualdade relacionando $\chi(M)$ às características de Euler dos conjuntos críticos $A_1^+(f)$ e $A_1^-(f)$ de f :

$$\chi(M) = \chi(A_1^+(f)) - \chi(A_1^-(f)). \quad (2)$$

O. Saeki ([13]) e I. Nakai ([12]) estenderam as fórmulas de T. Fukuda ao caso de uma aplicação de Morin $f : M \rightarrow N$, em que N é uma variedade diferenciável e $\dim M \geq \dim N$. Trabalhos de Y. Yomdin ([18]) e I. Nakai ([11], [12]) mostraram que o cálculo integral atribuído a O. Viro ([17]) é útil para encontrar relações como aquelas estabelecidas por T. Fukuda no contexto das aplicações estáveis.

Recentemente, N. Dutertre e T. Fukui investigaram em [2] como o cálculo integral de Viro se aplica em situações mais abrangentes. Ao introduzirem a noção de trivialidade local no infinito para aplicações suaves e trabalharem com aplicações estáveis, os autores estabeleceram várias relações entre a característica de Euler com suporte fechado de M e N e os conjuntos singulares de f . Aplicando estas relações ao contexto das aplicações de Morin, N. Dutertre e T. Fukui utilizaram as relações existentes entre a característica de Euler com suporte fechado e a característica de Euler topológica e puderam, assim, recuperar e melhorar vários destes resultados de T. Fukuda, I. Nakai e O. Saeki, dentre outros.

Em particular, no Teorema 6.2 em [2, pág.188], os autores mostraram uma igualdade que recupera e generaliza as relações (1) e (2) de T. Fukuda ([3]). A fórmula obtida relaciona a característica de Euler de uma variedade compacta M com as características de Euler dos conjuntos singulares de uma aplicação de Morin definida sobre M :

Teorema 0.0.1. [2, Teorema 6.2] *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de Morin. Suponha M compacta, N conexa e $\dim M - \dim N$ ímpar. Então*

$$\chi(M) = \sum_{k: \text{ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right].$$

Na primeira parte deste trabalho, nosso objetivo é exibir uma nova prova para o Teorema 0.0.1, para o caso em que $N = \mathbb{R}^n$. Inspirada no trabalho de T. Fukuda ([3]), a nova versão da prova é baseada na utilização das formas locais das aplicações de Morin, da Teoria de Morse para variedades com bordo, de uma caracterização de Z. Szafraniec ([15]) para pontos críticos não degenerados e da caracterização dos conjuntos singulares $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ apresentada por N. Dutertre e T. Fukui em [2].

Dessa forma, no Capítulo 1 apresentamos brevemente os principais con-

ceitos sobre a Teoria de Morse e sobre a Teoria de Morse para variedades com bordo que serão utilizados ao longo deste trabalho. Apresentamos ainda, alguns resultados de Z. Szafraniec ([15], [14]), por meio dos quais é possível caracterizarmos os pontos críticos não degenerados de aplicações $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ restritas a variedades $M \subset \mathbb{R}^\ell$.

Em seguida, o estudo dos resultados de T. Fukuda no Capítulo 2 nos ajudará a compreender a maneira como a Teoria de Morse pode ser aplicada para uma demonstração do Teorema 0.0.1 quando $N = \mathbb{R}^n$. A principal diferença entre os resultados de T. Fukuda e de N. Dutertre e T. Fukui é o fato de trabalharmos, respectivamente, com as variedades sem bordo $A_k(f)$ e com $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ que são variedades com bordo. Por isso, neste novo contexto, a Teoria de Morse para variedades com bordo apresenta-se como ferramenta essencial. Por fim, no Capítulo 3, concluímos a primeira parte do nosso trabalho, apresentando a nova prova para o Teorema 0.0.1 de N. Dutertre e T. Fukui.

Na segunda parte deste trabalho, nosso objetivo principal é definir o que seriam as singularidades A_k de Morin para o contexto dos n -campos vetoriais. Inspirados pelas propriedades do n -campo gradiente $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ de uma aplicação de Morin $f = (f_1, \dots, f_n)$, no Capítulo 4, introduzimos o conceito de “singularidades A_k de Morin” e “ n -campos vetoriais de Morin” para o caso de um n -campo $V = (V_1, \dots, V_n)$ que não seja necessariamente gradiente.

Em seguida, no Capítulo 5, buscamos adaptar os métodos de T. Fukuda ([3]) abordados no Capítulo 2 para este contexto mais geral dos n -campos de Morin. Para isto, dado um n -campo de Morin $V = (V_1, \dots, V_n)$, estudaremos algumas propriedades de um campo vetorial genérico

$$z(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(x)$$

e de suas restrições aos conjuntos singulares de $\Sigma^k(V)$ do n -campo V . Através destas propriedades, juntamente com o Teorema de Poincaré-Hopf, podemos obter informações topológicas da variedade M sobre a qual V está definido a partir das singularidades $A_k(V)$ do n -campo de Morin. Assim, concluímos este trabalho apresentando uma congruência módulo 2 análoga à fórmula (1) de T. Fukuda para o caso dos n -campos de Morin.

1.1 Transversalidade

Nesta seção, faremos uma breve apresentação dos principais conceitos sobre a teoria de transversalidade utilizada ao longo deste trabalho. Para um estudo mais detalhado sugerimos as referências [4] e [5].

Definição 1.1.1. *Sejam P e Q subvariedades de uma variedade suave N , dizemos que P e Q intersectam-se transversalmente em um ponto $y \in P \cap Q$ se*

$$T_y P + T_y Q = T_y N,$$

onde $T_y P$, $T_y Q$ e $T_y N$ denotam os espaços tangentes a P , Q e N no ponto y , respectivamente. Se P e Q intersectam-se transversalmente em todo $y \in P \cap Q$, dizemos simplesmente que P e Q intersectam-se transversalmente.

Observação 1.1.1. *Se P e Q são subvariedades de N tal que $P \cap Q = \emptyset$, então dizemos que P e Q intersectam-se transversalmente.*

Definição 1.1.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ e seja P uma subvariedade de N . Dizemos que f é transversal a P , e escrevemos $f \pitchfork P$, se o gráfico de f , $G(f)$, e $M \times P$ intersectam-se transversalmente em $M \times N$.*

Proposição 1.1.2. *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ , e seja P uma subvariedade de N . Então, $f \pitchfork P$ se, e somente se, para todo $x \in M$*

tal que $y = f(x) \in P$, temos

$$df_x(T_x M) + T_y P = T_y N,$$

onde df_x denota a derivada de f no ponto x .

Observação 1.1.3. A Proposição 1.1.2 é apresentada em muitas bibliografias como a definição do conceito de $f \pitchfork P$, pois de fato, é uma condição mais fácil de ser verificada que a condição apresentada na Definição 1.1.2. Como ambas definições são equivalentes, optamos por apresentá-la como na Definição 1.1.2 devido a seu caráter geométrico mais intuitivo.

Teorema 1.1.4. Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ . Se f for transversal a uma subvariedade $P \subset N$, então a pré-imagem $f^{-1}(P)$ será uma subvariedade de M . Além disso, a codimensão de $f^{-1}(P)$ em M será igual à codimensão de P em N e

$$T_x f^{-1}(P) = df_x^{-1}(T_y P),$$

onde $y = f(x)$.

Note que, quando P for um único ponto, isto é $P = \{p\}$, dizer que f é transversal a P é equivalente a dizer que p é um valor regular da aplicação f . Desta forma, o conceito de transversalidade estende a noção de valor regular de uma função.

Teorema 1.1.5. A interseção de duas subvariedades transversais P e Q de N é uma subvariedade de N . Além disso,

$$\text{codim}(P \cap Q) = \text{codim}(P) + \text{codim}(Q).$$

Teorema 1.1.6 (Teorema de Sard). Seja $f_i : M_i \rightarrow N$ uma família enumerável de aplicações de classe C^∞ . O conjunto dos valores regulares comuns a todas as aplicações f_i é denso em N .

Note que, no caso de uma única aplicação $f : M \rightarrow N$, o Teorema de Sard diz que o conjunto dos valores regulares de f é denso em N . Isto é, quase todo ponto $y \in N$ é valor regular de f .

1.2 Teoria de Morse

Nesta seção, relembremos os principais conceitos sobre a Teoria de Morse utilizados neste trabalho. Como referência, sugerimos o livro [9].

Seja M uma variedade m -dimensional de classe C^∞ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ .

Definição 1.2.1. Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico da aplicação f se a derivada de f no ponto p , $df_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, for nula. Isto é, $df_x(v) = 0$, para todo $v \in T_pM$. Um ponto crítico p é não degenerado, se a matriz Hessiana de f em p for não singular, isto é, se

$$\det \text{Hess}(f)(p) = \det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right] \neq 0,$$

onde (x_1, \dots, x_m) é um sistema de coordenadas locais em torno do ponto p . Pontos críticos não degenerados são chamados de pontos críticos de Morse de f .

Definição 1.2.2. A matriz Hessiana define uma aplicação bilinear H no espaço tangente T_pM . O índice desta aplicação é definido como sendo a dimensão do maior subespaço V de T_pM no qual H é definida negativa. Este índice é chamado índice de Morse de f no ponto p .

Definição 1.2.3. Dizemos que uma aplicação f é uma função de Morse se todas os seus pontos críticos são não degenerados, isto é, se todos os pontos críticos forem pontos de Morse.

O lema a seguir, conhecido como Lema de Morse, mostra que o comportamento de f em um ponto crítico não degenerado p pode ser completamente descrito pelo índice de Morse de f em p .

Lema 1.2.1 (Lema de Morse). *Seja p um ponto crítico não degenerado da aplicação f . Então, existe um sistema de coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ em uma vizinhança U de p em M tal que, $x(p) = (0, \dots, 0)$ e*

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2,$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$, em que λ é o índice de Morse de f em p .

Corolário 1.2.1. *Nas hipóteses do lema anterior, seja (y_1, \dots, y_m) um sistema de coordenadas na vizinhança de p , então*

$$\text{sgn} \left(\det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(p) \right]_{1 \leq i, j \leq m} \right) = (-1)^\lambda,$$

onde **sgn** denota o sinal do determinante considerado.

Corolário 1.2.2. *Pontos críticos de Morse são pontos críticos isolados.*

Corolário 1.2.3. *Se M é compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é Morse, então f tem um número finito de pontos críticos.*

Teorema 1.2.4. *Sejam M uma variedade compacta de classe C^∞ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse com pontos críticos p_1, \dots, p_n e respectivos índices de Morse $\lambda(p_1), \dots, \lambda(p_n)$, então*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{\lambda(p_i)},$$

em que $\chi(A)$ representa a característica de Euler de um espaço topológico A .

Corolário 1.2.5. *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, temos*

$$\chi(M) = \#C_+(f) - \#C_-(f),$$

em que $\#C_+(f)$ denota o número de pontos críticos de f com índice de Morse par e $\#C_-(f)$ denota o número de pontos críticos de f com índice de Morse ímpar. Temos ainda,

$$\chi(M) \equiv \#C(f) \pmod{2},$$

onde $C(f)$ denota o conjunto dos pontos críticos de f .

1.3 Caracterização de Z. Szafraniec

Apresentaremos aqui alguns resultados de Z. Szafraniec, por meio dos quais é possível caracterizarmos os pontos críticos não degenerados de aplicações $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ restritas a variedades $M \subset \mathbb{R}^\ell$. As principais referências para este assunto são [15] e [14].

Os seguintes resultados são referentes ao trabalho [15, p.149-150] de Z. Szafraniec, onde se pode encontrar as demonstrações aqui omitidas.

Seja $M \subset \mathbb{R}^\ell$ uma variedade m -dimensional tal que, localmente,

$$M = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\},$$

em que $k = \ell - m$ e $F = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação suave com $\text{rank}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_k(x)) = k$, para todo $x = (x_1, \dots, x_\ell) \in F^{-1}(\vec{0})$. Em que $\nabla f_i(x)$ é o gradiente da função coordenada f_i no ponto x .

Sejam $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^∞ e $g|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ a restrição desta aplicação à variedade M . Suponha que $p \in M$ é tal que

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}(p) \neq 0,$$

então, pelo Teorema da Função Implícita, podemos considerar x_{k+1}, \dots, x_ℓ coordenadas locais de M em uma vizinhança de p . Deste modo, temos:

Lema 1.3.1. [15, p.149-150] *O ponto p é um ponto crítico da restrição $g|_M$ se, e somente se,*

$$m_i(p) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k, g)}{\partial(x_1, \dots, x_k, x_i)}(p) = 0, \quad i = k+1, \dots, \ell.$$

Lema 1.3.2. [15, p.149-150] *O ponto p é um ponto crítico não degenerado da restrição $g|_M$ se, e somente se, $m_i(p) = 0, i = k+1, \dots, \ell$ e*

$$h(p) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_k, m_{k+1}, \dots, m_\ell)}{\partial(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_\ell)}(p) \neq 0.$$

Os próximos resultados podem ser encontrados em [14, p.195-196].

Considere $F = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $G : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações de classe C^2 . Suponha que exista um ponto $p \in \mathbb{R}^\ell$ tal que $F(p) = \vec{0}$ e $\text{rank}(\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_k(p)) = k$. Pelo Teorema da Função Implícita, a pré-imagem $M = F^{-1}(\vec{0})$ é uma variedade de dimensão $m = \ell - k$ em uma vizinhança de p .

Lema 1.3.3. [7, p.86][14, p.195] *A restrição $G|_M$ tem um ponto crítico em p se, e somente se, existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\nabla G(p) + \sum_{i=1}^k \bar{\lambda}_i \nabla f_i(p) = \vec{0}.$$

O ponto $\bar{\lambda}$ é unicamente determinado.

Seja $H : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^k$ uma aplicação de classe C^1 dada por

$$H(x, \lambda) = \left(\nabla G(x) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x), F(x) \right).$$

O Lema 1.3.3 implica que:

Corolário 1.3.1. [14, p.196] *A restrição $G|_M$ tem um ponto crítico em p se, e somente se, existe $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_k) \in \mathbb{R}^k$ (unicamente determinado) tal que $H(p, \bar{\lambda}) = \vec{0}$.*

Lema 1.3.4. [14, p.196] *Suponha que $G|_M$ tem um ponto crítico em p . Seja $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^k$ como no Corolário 1.3.1. Então, a restrição $G|_M$ tem um ponto crítico não degenerado em p se, e somente se, $\det[dH(p, \bar{\lambda})] \neq 0$, onde $[dH(p, \bar{\lambda})]$ denota a matriz jacobiana da aplicação H com respeito a $(x_1, \dots, x_\ell, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, no ponto $(p, \bar{\lambda})$. Além disso, se $\det[dH(p, \bar{\lambda})] \neq 0$, então*

$$\text{sgn}(\det[dH(p, \bar{\lambda})]) = (-1)^{s+k},$$

em que s é o índice de Morse de $G|_M$ em p .

1.4 Teoria de Morse para variedades com bordo

Nesta seção utilizamos [6, Seção 3] e [1, p.6].

Considere $(M, \partial M)$ uma variedade m -dimensional, compacta, com bordo, de classe C^∞ . Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ , denotaremos por ∂f a restrição de f ao bordo $f|_{\partial M}$; e por f° a restrição de f a $M \setminus \partial M$, $f|_{M \setminus \partial M}$.

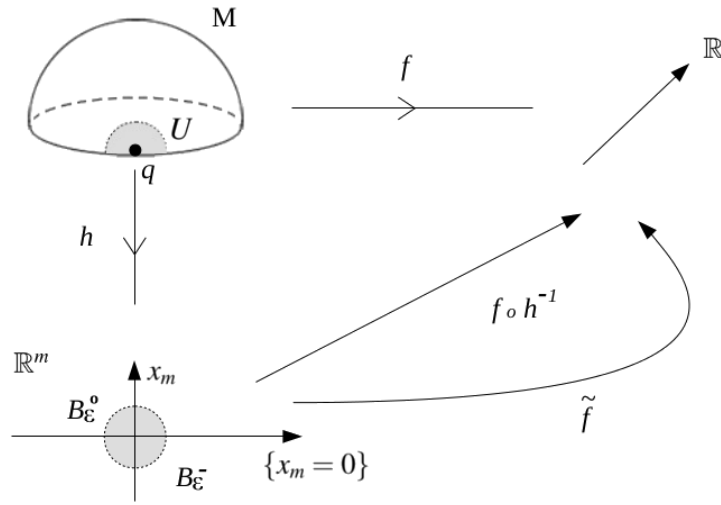
Definição 1.4.1. *O conjunto dos pontos críticos de f é formado pelos pontos críticos de f° e pelos pontos críticos de ∂f .*

Seja $q \in \partial M$ um ponto crítico de ∂f , podemos considerar uma vizinhança aberta U de q em M de maneira que:

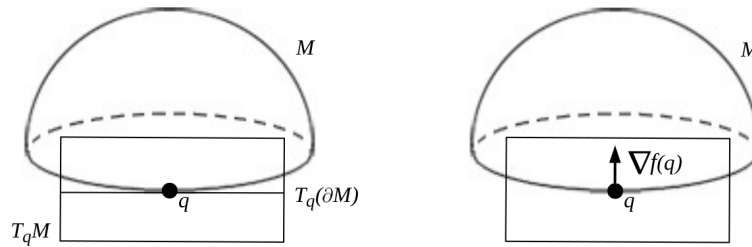
- (i) Sejam (x_1, \dots, x_m) coordenadas em \mathbb{R}^m . Existe uma carta $h : U \rightarrow B_\varepsilon^-$, em que $B_\varepsilon^- = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < \varepsilon; x_m \leq 0\}$, tal que $h(q) = \vec{0}$;
- (ii) A função $f \circ h^{-1}$ é de classe C^∞ sobre B_ε^- e podemos estendê-la a uma função \tilde{f} definida sobre toda a bola $B_\varepsilon^\circ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < \varepsilon\}$.

Definição 1.4.2. *Dizemos que $q \in \partial M$ é um ponto crítico correto de f se q é um ponto crítico de ∂f e $\vec{0}$ não é um ponto crítico de \tilde{f} . Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função correta, se todos os pontos críticos de ∂f são pontos críticos corretos de f .*

Observação 1.4.1. *Esta definição não depende da escolha da carta h e da extensão \tilde{f} de $f \circ h^{-1}$, pois, tomando uma outra extensão \tilde{f}_1 de $f \circ h^{-1}$, as derivadas de \tilde{f} e \tilde{f}_1 em $\vec{0}$ são iguais.*



O espaço tangente a B_ε° em $\vec{0}$ corresponde a todo \mathbb{R}^m e o núcleo da derivada $d\tilde{f}(\vec{0})$ é o hiperplano dado por $x_m = 0$. Este hiperplano divide \mathbb{R}^m em dois semi-espacos abertos nos quais $d\tilde{f}(\vec{0})$ não se anula e assume sinais opostos. Deste modo, podemos olhar os pontos críticos corretos de f como os pontos críticos q de ∂f para os quais a derivada df_q se anula no espaço tangente ao bordo de M em q , $T_q(\partial M)$, mas não se anula em todo o espaço tangente à variedade M , $T_q M$.



Definição 1.4.3. Se q é um ponto crítico correto de f , então:

- Se o sinal de $d\tilde{f}(\vec{0})$ no semi-espaco definido por $x_m > 0$ é negativo, dizemos que q é um ponto crítico de f com gradiente “entrando” em M (ou “apontando para dentro” de M);

- Se o sinal de $df(\vec{0})$ no semi-espaço definido por $x_m > 0$ é positivo, dizemos que q é um ponto crítico de f com gradiente “saindo” de M (ou “apontando para fora” de M).

Observação 1.4.2. Sejam $M \subset \mathbb{R}^\ell$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^∞ , neste trabalho, ao considerarmos o gradiente de f em $p \in M$ estaremos considerando na verdade a projeção ortogonal de $\nabla f(p)$ sobre $T_p M$.

Definição 1.4.4. Dizemos que $q \in \partial M$ é um ponto crítico correto não degenerado de f , se q é um ponto crítico correto de f e um ponto crítico não degenerado de ∂f . Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ é uma função correta de Morse se f° admite apenas pontos críticos não degenerados e se f admite apenas pontos críticos corretos não degenerados.

Proposição 1.4.3. Para toda variedade M compacta, com bordo, de classe C^∞ , as funções corretas de Morse formam um aberto denso de $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Teorema 1.4.4. Seja M uma variedade m -dimensional, compacta, com bordo, de classe C^∞ e seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função correta de Morse. Se p_1, \dots, p_n são os pontos críticos de f° e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seus respectivos índices de Morse e q_1, \dots, q_r são os pontos críticos corretos de f com μ_1, \dots, μ_r seus respectivos índices de Morse. Então,

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^n (-1)^{\lambda_i} + \sum_{\substack{q_j \mid \nabla f(q_j) \text{ está} \\ \text{entrando em } M}} (-1)^{\mu_j}.$$

Sobre a Topologia das Singularidades de Morin:
Resultados de Takuo Fukuda

A principal referência para este capítulo é o trabalho [3] de T. Fukuda.

2.1 Definições e resultados

Ao longo deste capítulo, vamos considerar M uma variedade compacta de classe C^∞ e dimensão m e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^∞ tal que $m \geq n$.

Definição 2.1.1. *Um ponto $p \in M$ é um ponto singular de Morin de tipo A_k , $1 \leq k \leq n$, da aplicação f se existirem coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) centradas em p e (y_1, \dots, y_n) centradas em $f(p)$ tais que f tem a forma:*

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, \quad i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_n^{k-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Notação. *Denotaremos por $A_k(f)$ o conjunto dos pontos singulares de f de tipo A_k , e por $\overline{A_k(f)}$ o fecho topológico de $A_k(f)$.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de Morin se f admitir apenas pontos singulares de Morin, isto é, singularidades de tipo A_k .*

A seguir, apresentaremos dois importantes resultados de T. Fukuda ([3]) sobre a topologia das singularidades de Morin. No primeiro teorema, o autor

exibe uma congruência módulo dois que relaciona a característica de Euler de uma variedade compacta M às características de Euler dos conjuntos singulares de uma aplicação de Morin C^∞ definida sobre M :

Teorema 2.1.1. *[3, Teorema 1] Seja M uma variedade compacta. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma aplicação de Morin, então*

$$\chi(M) \equiv \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(f)}) \pmod{2}.$$

No segundo teorema, T. Fukuda mostra que se a aplicação de Morin considerada $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ admitir apenas pontos singulares de tipo A_1 , então é possível melhorar seu resultado anterior, fornecendo não mais uma congruência módulo dois, mas uma igualdade. Nesta igualdade, a característica de Euler da variedade compacta M é dada em termos das características de Euler dos conjuntos singulares $A_1^+(f)$ e $A_1^-(f)$ de f que definiremos abaixo.

Pontos singulares de tipo A_1 são chamados pontos singulares de dobra. Seja p um ponto singular de dobra da aplicação f , então $y_n \circ f$ em (2.1) é da forma:

$$y_n \circ f = x_n^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \quad (2.2)$$

Agora, se $m - n + 1$ é par, então $m - n - \lambda + 1 \equiv \lambda \pmod{2}$ e a paridade do índice de Morse da função $y_n \circ f$, restrita a um subespaço de coordenadas locais (x_n, \dots, x_m) , independe da escolha das coordenadas locais. Portanto, os conjuntos

$$A_1^+(f) = \{p \in M : p \in A_1(f) \text{ com índice de Morse} \equiv 0 \pmod{2}\}$$

$$A_1^-(f) = \{p \in M : p \in A_1(f) \text{ com índice de Morse} \equiv 1 \pmod{2}\}$$

estão bem definidos. Assim, adicionando a hipótese $m - n$ ímpar, obtemos o resultado:

Teorema 2.1.2. *[3, Teorema 2] Sejam M uma variedade compacta e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin que admite apenas pontos singulares de dobra. Se $m - n$ é ímpar, então*

$$\chi(M) = \chi(A_1^+(f)) - \chi(A_1^-(f)).$$

2.2 Lemas para os Teoremas de T. Fukuda

Nesta seção, apresentaremos os lemas utilizados por T. Fukuda em [3] para as demonstrações dos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2. Para isto, vamos considerar, para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, a respectiva função linear $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Aplicando a Teoria de Morse e algumas propriedades bem conhecidas dos conjuntos singulares $A_k(f)$ de uma aplicação de Morin f , T. Fukuda estuda os pontos críticos das funções $L_a \circ f$, $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ e $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ e como eles estão relacionados.

Inspirados no trabalho de T. Fukuda, provaremos os mesmos lemas apresentados pelo autor, porém com algumas ferramentas distintas. Além da Teoria de Morse, utilizaremos aqui as formas locais das singularidades de Morin ([3], [10]) e uma caracterização de Z. Szafraniec para pontos críticos não degenerados ([15]).

As propriedades apresentadas no próximo lema são bem conhecidas, por isso, omitiremos sua demonstração.

Lema 2.2.1. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin. As seguintes propriedades são válidas:*

1. $A_k(f)$ e $\overline{A_k(f)}$ são subvariedades de M de dimensão $n - k$;
2. $\overline{A_k(f)} = \cup_{i \geq k} A_i(f)$;
3. As restrições $f|_{A_k(f)} : A_k(f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são imersões;
4. Se $p \in A_{k+1}(f)$, então $\text{rank } d(f|_{\overline{A_k(f)}})_p : T_p \overline{A_k(f)} \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n = n - k - 1$;
5. Se $p \in A_{k+1}(f)$, então $df_p(T_p \overline{A_k(f)}) = df_p(T_p A_{k+1}(f))$.

Em que $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ denota a derivada de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ em um ponto $x \in M$.

Notação. Ao longo deste trabalho, denotaremos por $C(f)$ o conjunto dos pontos críticos de uma aplicação f dada.

Para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, consideremos a aplicação linear $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Lema 2.2.2. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin. Para toda aplicação linear $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se $p \in A_{k+1}(f)$, então p será um ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ se, e somente se, p for um ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M tal que $p \in A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$. Pela definição de $A_{k+1}(f)$, podemos supor que existem coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ centradas em p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ centradas em $f(p)$ tais que, na vizinhança \mathcal{U}_p , f tem a forma:

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{k+2} + \sum_{i=1}^k x_i x_n^{(k+1)-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned}$$

Escrevendo $\gamma := y_n \circ f$, pela caracterização de Morin ([3, p. 342]), na vizinhança \mathcal{U}_p temos

$$\begin{aligned} \overline{A_k(f)} &= \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n+1, \dots, m \right\} \\ A_{k+1}(f) &= \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k+1; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n+1, \dots, m; \frac{\partial^{(k+2)}\gamma}{\partial x_n^{k+2}} \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Calculando as derivadas, obtemos $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = \pm 2x_i$, $i = n+1, \dots, m$. E para $j = 1, \dots, k+1$,

$$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = \frac{(k+2)!}{(k+2-j)!} x_n^{k+2-j} + \sum_{i=1}^{k+1-j} \frac{(k+1-i)!}{(k+1-i-j)!} x_i x_n^{k+1-i-j}.$$

Logo, $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow x_i = 0$, para $i = n+1, \dots, m$. E, para $j = 1, \dots, k$,

$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = 0$ implica

$$x_{k+1-j} = -\binom{k+2}{j} x_n^{k+2-j} - \sum_{i=1}^{k-j} \binom{k+1-i}{j} x_i x_n^{k+1-i-j}. \quad (2.3)$$

Por fim, $\frac{\partial^{(k+1)}\gamma}{\partial x_n^{k+1}}(x) = 0 \Rightarrow x_n = 0$.

Assim, de acordo com as relações dadas por (2.3), sobre $\overline{A_k(f)} \cap \mathcal{U}_p$ po-

demos escrever as coordenadas x_1, x_2, \dots, x_k em função da coordenada x_n . Isto é,

$$x_r = c_r x_n^{r+1}, \quad r = 1, \dots, k; \quad (2.4)$$

em que $c_r \in \mathbb{R}$ denotarão as constantes obtidas por meio da expressão 2.3, para $j = 1, \dots, k$.

Deste modo, na vizinhança \mathcal{U}_p , as variedades $\overline{A_k(f)}$ e $A_{k+1}(f)$ são dados por

$$\begin{aligned} \overline{A_k(f)} &= \{x_r - c_r x_n^{r+1} = 0, r = 1, \dots, k; x_{n+1} = \dots = x_m = 0\} \\ A_{k+1}(f) &= \{x_1 = \dots = x_k = x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

e, pelo Teorema da Função Implícita, podemos considerar coordenadas locais x_{k+1}, \dots, x_n em $\overline{A_k(f)}$ e x_{k+1}, \dots, x_{n-1} coordenadas locais em $A_{k+1}(f)$.

Pela caracterização de Z. Szafraniec ([15]), p é um ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ se, e somente se

$$m_s(p) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_k, H_{n+1}, \dots, H_m, L_a \circ f)}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_{n+1}, \dots, x_m, x_s)}(p) = 0, \quad (2.6)$$

para $s = k + 1, \dots, n$. Analogamente, p é um ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ se, e somente se

$$\tilde{m}_s(p) = \frac{\partial (H_1, \dots, H_k, H_n, H_{n+1}, \dots, H_m, L_a \circ f)}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, x_s)}(p) = 0, \quad (2.7)$$

para $s = k + 1, \dots, n - 1$. Em que, as funções $F_r(x)$ e $H_r(x)$ são dadas por

$$F_r(x) = x_r - c_r x_n^{r+1}, \quad r = 1, \dots, k$$

e

$$H_r(x) = x_r, \quad r = 1, \dots, k, n, \dots, m.$$

Mas note que, pelas formas locais de $\overline{A_k(f)}$ e $A_{k+1}(f)$ em 2.5, a equação 2.6 é equivalente a

$$\frac{\partial (L_a \circ f)}{\partial x_s}(p) = 0, \quad s = k + 1, \dots, n$$

e a equação 2.7 é equivalente a

$$\frac{\partial (L_a \circ f)}{\partial x_s}(p) = 0, \quad s = k + 1, \dots, n - 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) &\Leftrightarrow \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(p) = 0, \quad r = k+1, \dots, n; \\ p \in C(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}) &\Leftrightarrow \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(p) = 0, \quad r = k+1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Denotaremos por $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ a aplicação inversa ao difeomorfismo y , isto é, $\psi := y^{-1}$, e por $g = (g_1, \dots, g_n)$ a composição $y \circ f \circ x^{-1}$. Desse modo, as funções coordenadas de g são dadas por $g_j(x) = y_j \circ f(x)$, $j = 1, \dots, n$, e a aplicação $L_a \circ f(x)$ pode ser escrita como

$$L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x).$$

Assim, para $r = k+1, \dots, n$, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_r}(x) \right).$$

Em particular, sobre $\overline{A_k(f)}$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} c_j x_n^{j+1}, & j = 1, \dots, k; \\ x_j, & j = k+1, \dots, n-1; \\ c_n x_n^{k+2}, & j = n; \end{cases}$$

em que $c_n \in \mathbb{R}$ é a constante obtida substituindo-se 2.4 na expressão de $g_n(x) = y_n \circ f(x)$. Logo,

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_n}(q) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \forall q \in A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p.$$

Portanto,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(p) = 0. \quad (2.9)$$

Assim, pelas equações 2.8 e 2.9, concluímos que p é ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ se, e somente se, p é ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$. ■

Lema 2.2.3. *Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $H : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação C^∞ definida por $H(x, a) = (h_1(x, a), \dots, h_m(x, a))$. Se o conjunto $H^{-1}(\vec{0})$ é tal que*

$$\text{rank}\{\nabla h_1(x, a), \dots, \nabla h_m(x, a)\} = m$$

para $(x, a) \in H^{-1}(\vec{0})$, então para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ teremos

$$\text{rank}\{\nabla_x h_1(x, a), \dots, \nabla_x h_m(x, a)\} = m.$$

Demonstração. Se $H(x, a) = (h_1(x, a), \dots, h_m(x, a))$ é uma aplicação C^∞ tal que $\text{rank}\{\nabla h_1(x, a), \dots, \nabla h_m(x, a)\} = m$ para todo $(x, a) \in H^{-1}(\vec{0})$, então $H^{-1}(\vec{0})$ é uma variedade n -dimensional.

Considere $\tilde{\pi} : H^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\tilde{\pi}(x, a) = a$ e $\tilde{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ um valor regular de $\tilde{\pi}$, de modo que a derivada de $\tilde{\pi}$ em (x, \tilde{a})

$$\begin{aligned} d\tilde{\pi}(x, \tilde{a}) : T_{(x, \tilde{a})}H^{-1}(\vec{0}) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (U, A) &\mapsto A \end{aligned}$$

tem posto máximo para todo $(x, \tilde{a}) \in \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{a})$. Note que, $d\tilde{\pi}(x, \tilde{a}) = \pi|_{T_{(x, \tilde{a})}H^{-1}(\vec{0})}$, em que $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção $\pi(U, A) = A$. Como $\dim \text{Im}(d\tilde{\pi}(x, \tilde{a})) = \text{rank}(d\tilde{\pi}(x, \tilde{a})) = n$, então $\dim \ker(d\tilde{\pi}(x, \tilde{a})) = 0$, logo $\ker(\pi|_{T_{(x, \tilde{a})}H^{-1}(\vec{0})}) = \{\vec{0}\}$. E como $\ker(\pi) = \mathbb{R}^m \times \{\vec{0}\}$, temos

$$(\mathbb{R}^m \times \{\vec{0}\}) \cap T_{(x, \tilde{a})}H^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{0}\} \Rightarrow (\mathbb{R}^m \times \{\vec{0}\})^\perp \oplus T_{(x, \tilde{a})}H^{-1}(\vec{0})^\perp = \{\vec{0}\}^\perp,$$

de modo que $(\{\vec{0}\} \times \mathbb{R}^n) \oplus \langle \nabla h_1(x, \tilde{a}), \dots, \nabla h_m(x, \tilde{a}) \rangle = \mathbb{R}^{m+n}$. Em particular,

$$\langle \nabla h_1(x, \tilde{a}), \dots, \nabla h_m(x, \tilde{a}), e_1, \dots, e_n \rangle = \mathbb{R}^{m+n},$$

em que $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é o vetor que é igual a 1 na $(m+i)$ -ésima coordenada e zero nas outras. Assim,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla h_1(x, \tilde{a}) \\ \vdots \\ \nabla h_m(x, \tilde{a}) \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = m + n,$$

isto é, a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(x, \tilde{a}) & \vdots & \frac{\partial h_1}{\partial a_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial a_n}(x, \tilde{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x, \tilde{a}) & \vdots & \frac{\partial h_m}{\partial a_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial a_n}(x, \tilde{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & O_{n \times m} & \vdots & & & Id_{n \times n} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

tem posto máximo. Portanto,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_m}(x, \tilde{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x, \tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x, \tilde{a}) \end{bmatrix} \neq 0,$$

isto é, $\text{rank}\{\nabla_x h_1(x, \tilde{a}), \dots, \nabla_x h_m(x, \tilde{a})\} = m$. ■

Lema 2.2.4. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin. Para quase todo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, as aplicações $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ são funções de Morse, $k = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Sejam p um ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ e $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M com $p \in \mathcal{U}_p$. Pelas formas locais das singularidades de Morin, podemos considerar coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ centradas em p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ centradas em $f(p)$ de modo que, sobre \mathcal{U}_p , f tem a forma

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_n^{k-i} + x_{n+1}^2 + \cdots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \cdots - x_m^2. \end{aligned}$$

Denotando $\gamma := y_n \circ f$, pela caracterização de Morin ([3, p. 342]), sobre a vizinhança \mathcal{U}_p , podemos escrever

$$A_k(f) = \left\{ \frac{\partial^{(j)} \gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k; \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, i = n+1, \dots, m; \frac{\partial^{(k+1)} \gamma}{\partial x_n^{k+1}} \neq 0 \right\}.$$

Calculando as derivadas, obtemos $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x) = \pm 2x_i$, para $i = n + 1, \dots, m$. E

$$\frac{\partial^{(j)} \gamma}{\partial x_n^j}(x) = \frac{(k+1)!}{(k+1-j)!} x_n^{k+1-j} + \sum_{i=1}^{k-j} \frac{(k-i)!}{(k-i-j)!} x_i x_n^{k-i-j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Logo, $\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow x_i = 0$, $i = n + 1, \dots, m$. E $\frac{\partial^{(j)} \gamma}{\partial x_n^j}(x) = 0$ implica:

$$x_{k-j} = - \binom{k+1}{j} x_n^{k-j+1} - \sum_{i=1}^{k-j-1} \binom{k-i}{j} x_i x_n^{k-j-i}, \quad j = 1, \dots, k-1 \quad (2.10)$$

e $\frac{\partial^k \gamma}{\partial x_n^k}(x) = 0 \Rightarrow x_n = 0$.

Deste modo, aplicando 2.10 para $j = 1, \dots, k-1$, sobre $A_k(f) \cap \mathcal{U}_p$ podemos escrever as coordenadas x_1, \dots, x_{k-1} em função de x_n . Isto é,

$$x_r = c_n^r x_n^{r+1}; \quad r = 1, \dots, k-1,$$

em que $c_n^r \in \mathbb{R}$ denotarão as constantes obtidas por meio da expressão 2.10. Além disso, observando que $x_n = 0$, sobre \mathcal{U}_p obtemos

$$A_k(f) = \{x_1 = \dots = x_{k-1} = x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sobre a vizinhança \mathcal{U}_p , podemos considerar x_k, \dots, x_{n-1} coordenadas locais em $A_k(f)$. Portanto, pela caracterização de Z. Szafraniec ([15]), x será um ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ na vizinhança \mathcal{U}_p se, e somente se,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = 0, \quad r = k, \dots, n-1.$$

Com a mesma notação utilizada na demonstração do Lema 2.2.2, escreveremos $L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x)$, de forma que, para $r = k, \dots, n-1$, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_r}(x) \right).$$

Em particular, sobre $A_k(f) \cap \mathcal{U}_p$, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem

suas funções coordenadas $g_j(x) = y_j \circ f(x)$, $j = 1, \dots, n$, dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, k-1, n; \\ x_j, & j = k, \dots, n-1. \end{cases}$$

Logo, para $j = 1, \dots, n$ e $r = k, \dots, n-1$, temos

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_r}(q) = \begin{cases} 1, & r = j \\ 0, & r \neq j \end{cases}, \quad \forall q \in A_k(f) \cap \mathcal{U}_p.$$

Portanto, para todo $q \in A_k(f) \cap \mathcal{U}_p$,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(q) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_r}(g(q)), \quad r = k, \dots, n-1.$$

Seja $F : \mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a aplicação $F(x, a) = (F_1(x, a), \dots, F_m(x, a))$ definida por

$$F_r(x, a) := \begin{cases} x_r, & r = 1, \dots, k-1, n, \dots, m; \\ \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x), & r = k, \dots, n-1. \end{cases}$$

A matriz Jacobiana de F em um ponto $(x, a) \in F^{-1}(\vec{0})$ é dada por

$$\left[\begin{array}{ccc} Id_{(k-1)} & \vdots & O_{(k-1) \times (m-k+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ \nabla_x F_k(x, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_k}(g(x)) \quad \dots \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial y_k}(g(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \nabla_x F_{n-1}(x, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}}(g(x)) \quad \dots \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}}(g(x)) \\ \dots & \dots & \dots \\ O_{(m-n+1) \times (n-1)} & \vdots & Id_{(m-n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O_{(m-n+1) \times n} & & \end{array} \right] \quad (2.11)$$

em que ∇_x denota o gradiente com respeito a $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Note que os vetores $\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y_r}(g(x)), \dots, \frac{\partial\psi_n}{\partial y_r}(g(x))\right)$, para $r = k, \dots, n-1$, correspondem a colunas da matriz Jacobiana do difeomorfismo ψ no ponto $g(x)$:

$$\text{Jac}(\psi)(g(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(g(x)) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(g(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(g(x)) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(g(x)) \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz 2.11 tem posto máximo e $F^{-1}(\vec{0}) \subset \mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ é uma subvariedade de dimensão n .

Seja $\pi : F^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\pi(x, a) = a$. Pelo Teorema de Sard, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0})$ é uma variedade 0-dimensional dada por

$$\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \{(x, a) \in \mathcal{U}_p \times \{a\} \mid x \in C(L_a \circ f|_{A_k(f)})\}.$$

Além disso, como a matriz 2.11 tem posto máximo, pelo Lema 2.2.3, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} Id_{(k-1)} & \vdots & O_{(k-1) \times (m-k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \nabla_x F_k(x, a) & \dots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \nabla_x F_{n-1}(x, a) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ O_{(m-n+1) \times (n-1)} & \vdots & Id_{(m-n+1)} \end{bmatrix} = m.$$

Portanto, pela caracterização de Z. Szafraniec para pontos críticos não degenerados ([15]), para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\pi^{-1}(a)$ intercepta $F^{-1}(\vec{0})$ transversalmente e os pontos críticos de $L_a \circ f|_{A_k(f) \cap \mathcal{U}_p}$ são não degenerados.

Por fim, como $A_k(f)$ é uma subvariedade de M , podemos cobri-la com uma quantia enumerável de vizinhanças \mathcal{U}_p , de forma que, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, o resultado é válido sobre toda variedade $A_k(f)$, isto é $L_a \circ f$ é uma função de Morse. \blacksquare

Lema 2.2.5. *Sejam $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin. Para quase toda aplicação linear $L_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, as seguintes propriedades são válidas:*

1. $C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \cap \overline{A_{k+2}(f)} = \emptyset$, $k = 0, \dots, n - 2$;
2. *Seja $p \in A_{k+1}(f)$, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ se, e somente se, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$;*
3. *Os pontos de $A_n(f)$ são todos pontos críticos não degenerados da função $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$.*

Demonstração.

1. Seja $p \in \overline{A_{k+2}(f)}$, então existem $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M com $p \in \mathcal{U}_p$ e $\ell \in \{2, \dots, n - k\}$ tal que $p \in A_{k+\ell}(f) \cap \mathcal{U}_p$. Pelas formas locais das singularidades de Morin, podemos considerar coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ centradas em p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ centradas em $f(p)$, de maneira que, sobre \mathcal{U}_p , f tem a forma

$$y_i \circ f = x_i, i \leq n - 1;$$

$$y_n \circ f = x_n^{(k+\ell)+1} + \sum_{i=1}^{(k+\ell)-1} x_i x_n^{(k+\ell)-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2.$$

Escrevendo $\gamma := y_n \circ f$, pela caracterização de Morin ([3, p. 342]), sobre a vizinhança \mathcal{U}_p podemos escrever

$$\overline{A_k(f)} = \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n + 1, \dots, m \right\};$$

$$A_{k+\ell}(f) = \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k + \ell; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n + 1, \dots, m; \right. \\ \left. \frac{\partial^{(k+\ell+1)}\gamma}{\partial x_n^{k+\ell+1}} \neq 0 \right\}.$$

Calculando as derivadas, obtemos $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = \pm 2x_i$, para $i = n + 1, \dots, m$.

Para $j = 1, \dots, k + \ell - 1$,

$$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = \frac{(k + \ell + 1)!}{(k + \ell + 1 - j)!} x_n^{k+\ell+1-j} + \sum_{i=1}^{k+\ell-j} \frac{(k + \ell - i)!}{(k + \ell - i - j)!} x_i x_n^{k+\ell-i-j}$$

e para $j = k + \ell$,

$$\frac{\partial^{(k+\ell)}\gamma}{\partial x_n^{k+\ell}}(x) = (k + \ell + 1)! x_n.$$

Logo, $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow x_i = 0, i = n + 1, \dots, m$. E para $j = 1, \dots, k + \ell - 1$, $\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = 0$ implica

$$x_{k+\ell-j} = -\binom{k+\ell+1}{j} x_n^{k+\ell+1-j} - \sum_{i=1}^{k+\ell-j-1} \binom{k+\ell-i}{j} x_i x_n^{k+\ell-i-j}. \quad (2.12)$$

Por fim, $\frac{\partial^{(k+\ell)}\gamma}{\partial x_n^{k+\ell}}(x) = 0 \Rightarrow x_n = 0$. Aplicando as relações dadas em 2.12 para $j = 1, \dots, k$, sobre $\overline{A_k(f)} \cap \mathcal{U}_p$ podemos escrever $x_\ell, \dots, x_{\ell+k-1}$ em função de $x_1, \dots, x_{\ell-1}$ e de x_n . Isto é,

$$x_r = c_n^r x_n^{r+1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} c_{i,n}^r x_i x_n^{r-i}; \quad r = \ell, \dots, \ell + k - 1. \quad (2.13)$$

Em que $c_n^r, c_{i,n}^r \in \mathbb{R}$ denotarão as constantes obtidas por meio da expressão 2.12, para $j = 1, \dots, k$. Deste modo, em \mathcal{U}_p , os conjuntos $A_{k+\ell}(f)$ e $\overline{A_k(f)}$ são dados por

$$\begin{aligned} A_{k+\ell}(f) &= \{x_1 = \dots = x_{k+\ell-1} = x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}; \\ \overline{A_k(f)} &= \left\{ x_r - c_n^r x_n^{r+1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} c_{i,n}^r x_i x_n^{r-i} = 0, r = \ell, \dots, \ell + k - 1; \right. \\ &\quad \left. x_{n+1} = \dots = x_m = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sobre a vizinhança \mathcal{U}_p , podemos considerar $x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_{\ell+k}, \dots, x_n$ coordenadas locais em $\overline{A_k(f)}$, e $x_{\ell+k}, \dots, x_{n-1}$ coordenadas locais em $A_{k+\ell}(f)$. Portanto, pela caracterização de Z. Szafraniec ([15]), x será um ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ na vizinhança \mathcal{U}_p se, e somente se,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = 0, \quad r = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n.$$

Com a mesma notação utilizada na demonstração do Lema 2.2.2, escre-

veremos a aplicação $L_a \circ f(x)$ como

$$L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x)$$

de forma que, para $r = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n$, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_r}(x) \right).$$

Em particular, sobre $\overline{A_k(f)} \cap \mathcal{U}_p$, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas $g_j(x) = y_j \circ f(x)$, $j = 1, \dots, n$, dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} x_j, & j = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n - 1; \\ c_n^j x_n^{j+1} - \sum_{i=1}^{\ell-1} c_{i,n}^j x_i x_n^{j-i}, & j = \ell, \dots, \ell + k - 1; \\ c_n x_n^{(k+\ell)+1} + \sum_{i=1}^{\ell-1} c_{i,n} x_i x_n^{(k+\ell)-i}, & j = n. \end{cases}$$

em que $c_n, c_{i,n} \in \mathbb{R}$ são constantes obtidas substituindo-se 2.13 na expressão de $y_n \circ f(x)$.

Assim, para $j = 1, \dots, n$ e $r = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n - 1$, temos

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_r}(q) = \begin{cases} 1, & r = j \\ 0, & r \neq j \end{cases}, \quad \forall q \in A_{k+\ell}(f) \cap \mathcal{U}_p$$

e $\frac{\partial g_n}{\partial x_n}(q) = 0$, $\forall q \in A_{k+\ell}(f) \cap \mathcal{U}_p$. De forma que, para todo $q \in A_{k+\ell}(f) \cap \mathcal{U}_p$,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(q) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_r}(g(q))$$

para $r = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n - 1$ e $\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(q) = 0$.

Consideremos a aplicação $F : \mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+\ell-1}$ definida por

$$F = (F_1, \dots, F_{k+\ell-1}, F_n, \dots, F_m, H_1, \dots, H_{\ell-1}, H_{\ell+k}, \dots, H_{n-1}),$$

com $F_i(x, a) = x_i$, $i = 1, \dots, k + \ell - 1, n, \dots, m$ e $H_r(x, a) = \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x)$, $r = 1, \dots, \ell - 1, \ell + k, \dots, n - 1$. A matriz Jacobiana de F no ponto (p, a) é dada por

$$\left[\begin{array}{cccc} Id_{(k+\ell-1)} & \vdots & & O_{(k+\ell-1) \times (m+n-k-\ell+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{(m-n+1) \times (n-1)} & \vdots & Id_{(m-n+1)} & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla_x H_1(p, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(g(p)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x H_{\ell-1}(p, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{\ell-1}}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{\ell-1}}(g(p)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x H_{\ell+k}(p, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{\ell+k}}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{\ell+k}}(g(p)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x H_{n-1}(p, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}}(g(p)) \end{array} \right] \quad (2.14)$$

em que $O_{i \times j}$ representa uma submatriz nula de ordem $i \times j$ e ∇_x o gradiente com respeito a $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Note que os vetores $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_r}(g(p)), \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial y_r}(g(p)) \right)$ correspondem a colunas da matriz Jacobiana do difeomorfismo ψ no ponto $g(p)$:

$$\text{Jac}(\psi)(g(p)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n}(g(p)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(g(p)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_n}(g(p)) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, como $\text{Jac}(\psi)$ é não singular em $g(p)$, os vetores coluna desta matriz são linearmente independentes. Logo, a matriz 2.14 tem posto máximo para todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ e podemos supor sem perda de generalidade que a aplicação F é uma submersão em todo domínio $\mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Em particular, $F^{-1}(\vec{0})$ é uma subvariedade de $\mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ de dimensão $n - \ell + 1 < n$.

Seja $\pi : F^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\pi(x, a) = a$. Pelo Teorema de Sard,

$$\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \emptyset,$$

para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Mas,

$$\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \{(x, a) \in \mathcal{U}_p \times \{a\} \mid x \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \cap A_{k+l}(f)\}.$$

Isto é, $C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \cap A_{k+l}(f) \cap \mathcal{U}_p = \emptyset$, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Como a variedade $\overline{A_k(f)}$ é compacta, podemos cobri-la com um número finito de vizinhanças \mathcal{U}_p . Portanto, $C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \cap \overline{A_{k+2}(f)} = \emptyset$, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

2. Seja $p \in A_{k+1}(f)$. Retomando a demonstração do Lema 2.2.2, consideremos $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M tal que $p \in A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$. Sabemos então que existem coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ centradas em p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ centradas em $f(p)$ tais que, sobre \mathcal{U}_p , f tem a forma:

$$y_i \circ f = x_i, i \leq n-1;$$

$$y_n \circ f = x_n^{k+2} + \sum_{i=1}^k x_i x_n^{(k+1)-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2.$$

Vimos também que, nesta mesma vizinhança, podemos considerar coordenadas locais x_{k+1}, \dots, x_n em $\overline{A_k(f)}$ e x_{k+1}, \dots, x_{n-1} em $A_{k+1}(f)$, uma vez que em \mathcal{U}_p estas variedades são dadas por

$$\begin{aligned} \overline{A_k(f)} &= \{x_r - c_r x_n^{r+1} = 0, r = 1, \dots, k; x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}; \\ A_{k+1}(f) &= \{x_1 = \dots = x_k = x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sejam $F_r(x) = x_r - c_r x_n^{r+1}$, $r = 1, \dots, k$ e $H_r(x) = x_r$, $r = 1, \dots, k, n, \dots, m$. Pela caracterização de Z. Szafranec para pontos críticos não degenerados ([15]), p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ se, e somente se

$$m_s(p) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_k, H_{n+1}, \dots, H_m, L_a \circ f)}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_{n+1}, \dots, x_m, x_s)}(p) = 0,$$

para $s = k+1, \dots, n$ e

$$m(p) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_k, H_{n+1}, \dots, H_m, m_{k+1}, \dots, m_n)}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_{n+1}, \dots, x_m, x_{k+1}, \dots, x_n)}(p) \neq 0. \quad (2.16)$$

Analogamente, p é um ponto crítico de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ se, e somente se,

$$\tilde{m}_s(p) = \frac{\partial (H_1, \dots, H_k, H_n, H_{n+1}, \dots, H_m, L_a \circ f)}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, x_s)}(p) = 0,$$

para $s = k + 1, \dots, n - 1$ e

$$\tilde{m}(p) = \frac{\partial (F_1, \dots, F_k, H_n, H_{n+1}, \dots, H_m, m_{k+1}, \dots, m_{n-1})}{\partial (x_1, \dots, x_k, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m, x_{k+1}, \dots, x_{n-1})}(p) \neq 0. \quad (2.17)$$

Mas, vimos na demonstração do Lema 2.2.2 que

$$m_s(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial (L_a \circ f)}{\partial x_s}(p) = 0, \quad s = k + 1, \dots, n,$$

assim como

$$\tilde{m}_s(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial (L_a \circ f)}{\partial x_s}(p) = 0, \quad s = k + 1, \dots, n - 1.$$

Deste modo, $m(p) \neq 0$ se, e somente se, a matriz

$$\left[\frac{\partial^{(2)} (L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_s}(p) \right]_{k+1 \leq r, s \leq n}$$

é não singular. Analogamente, $\tilde{m}(p) \neq 0$ se, e somente se, a matriz

$$\left[\frac{\partial^{(2)} (L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_s}(p) \right]_{k+1 \leq r, s \leq n-1}$$

é não singular.

Novamente pela demonstração do Lema 2.2.2, sabemos que

$$\frac{\partial (L_a \circ f)}{\partial x_s}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_s}(x) \right) \quad (2.18)$$

e que sobre $\overline{A_k(f)} \cap \mathcal{U}_p$, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} c_j x_n^{j+1}, & j = 1, \dots, k; \\ x_j, & j = k + 1, \dots, n - 1; \\ c_n x_n^{k+2}, & j = n. \end{cases} \quad (2.19)$$

Assim, sobre $\overline{A_k(f)} \cap \mathcal{U}_p$, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left[\sum_{j=1}^k \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x))(j+1)c_j x_n^j \right\} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(x))(k+2)c_n x_n^{k+1} \right]$$

e derivando mais uma vez com respeito a x_n , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_\ell \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_\ell}{\partial x_n}(x) \right) (j+1)c_j x_n^j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x))j(j+1)c_j x_n^{j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_t \partial y_n}(g(x)) \frac{\partial g_t}{\partial x_n}(x) \right) (k+2)c_n x_n^{k+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(x))(k+1)(k+2)c_n x_n^k \right\}. \end{aligned}$$

Para $r = k+1, \dots, n-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_n}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \sum_{j=1}^k \left[\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_\ell \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_\ell}{\partial x_n}(x) \right) (j+1)c_j x_n^j \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_t \partial y_n}(g(x)) \frac{\partial g_t}{\partial x_n}(x) \right) (k+2)c_n x_n^{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Como $x_n = 0$ em $A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$, avaliando as derivadas parciais no ponto $p \in A_{k+1}(f)$ temos

$$\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(p) = \begin{cases} 2c_1 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(q)), & \text{se } k \neq 0; \\ 2c_n \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(q)), & \text{se } k = 0; \end{cases}$$

e para $r = k + 1, \dots, n - 1$,

$$\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_n}(p) = \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n \partial x_r}(p) = 0.$$

Desta forma, a matriz

$$\left[\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_s}(p) \right]_{k+1 \leq r, s \leq n}$$

é dada por

$$\begin{bmatrix} H_{(n-k-1)} & \vdots & O_{(n-k-1) \times 1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ O_{1 \times (n-k-1)} & \vdots & 2c_s \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(p)) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

em que $s = 1$, se $k \neq 0$ e $s = n$, se $k = 0$; $O_{i \times j}$ representam matrizes nulas de ordem $i \times j$ e

$$H_{(n-k-1)} = \left[\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_r \partial x_s}(p) \right]_{k+1 \leq r, s \leq n-1}.$$

Consideremos $G : \mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ a aplicação $G = (G_1, \dots, G_{m+1})$ definida por

$$G_r(x, a) = \begin{cases} x_r, & r = 1, \dots, k, n, \dots, m; \\ \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x), & r = k + 1, \dots, n - 1; \\ \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(x)), & r = m + 1. \end{cases}$$

Note que se $(x, a) \in G^{-1}(\vec{0})$, então $x \in A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$. Assim, pelas equações 2.18 e 2.19, para $r = k + 1, \dots, n - 1$, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_r}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_r}(g(x)).$$

Logo, a matriz Jacobiana de G em um ponto $(x, a) \in G^{-1}(\vec{0})$ é dada por

$$\begin{bmatrix} Id_{(k)} & \vdots & & O_{k \times (m+n-k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla_x G_{k+1}(x, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{k+1}}(g(x)) \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{k+1}}(g(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \nabla_x G_{n-1}(x, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}}(g(x)) \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}}(g(x)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{(m-n+1) \times (n-1)} & \vdots & Id_{(m-n+1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & O_{(m-n+1) \times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla_x G_{m+1}(x, a) & \vdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_s}(g(x)) \cdots \frac{\partial \psi_n}{\partial y_s}(g(x)) \end{bmatrix}.$$

Como os vetores $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_r}(g(x)), \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial y_r}(g(x)) \right)$ correspondem a colunas linearmente independentes da matriz Jacobiana do difeomorfismo ψ no ponto $g(x)$, a submatriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{k+1}}(g(x)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{k+1}}(g(x)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_{n-1}}(g(x)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_{n-1}}(g(x)) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y_s}(g(x)) & \cdots & \frac{\partial \psi_n}{\partial y_s}(g(x)) \end{bmatrix}$$

tem posto máximo igual a $n - k$. Então, a matriz Jacobiana de G em um ponto $(x, a) \in G^{-1}(\vec{0})$ tem posto máximo e $G^{-1}(\vec{0})$ é uma subvariedade de $\mathcal{U}_p \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ de dimensão $n - 1$.

Seja $\pi : G^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\pi(x, a) = a$. Pelo Teorema de

Sard, $\pi^{-1}(a) \cap G^{-1}(\vec{0}) = \emptyset$, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Mas,

$$\begin{aligned} & \pi^{-1}(a) \cap G^{-1}(\vec{0}) \\ &= \left\{ (x, a) \in \mathcal{U}_p \times \{a\} \mid x \in C(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}) \cap A_{k+1}(f), \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(x)) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Isto é, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, o conjunto dos pontos críticos da função $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ sobre a vizinhança $A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$ tais que $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(x)) = 0$ é vazio. Portanto, podemos supor que

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(p)) \neq 0.$$

E como c_1 e c_n são constantes não nulas, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$2c_s \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_s}(g(p)) \neq 0.$$

Assim, voltando à matriz 2.20, concluímos que $p \in A_{k+1}(f) \cap \mathcal{U}_p$ é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}$ se, e somente se, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_k(f)}$.

Por fim, como $A_{k+1}(f)$ é uma subvariedade de M , podemos cobri-la com uma quantia enumerável de vizinhanças \mathcal{U}_p de modo que o resultado é válido para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ sobre toda variedade $A_{k+1}(f)$.

3. Seja $p \in A_n(f)$ e $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M com $p \in \mathcal{U}_p$. Pelas formas locais das singularidades de Morin, existem coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ ao redor de p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ ao redor de $f(p)$ tais que, sobre \mathcal{U}_p , f tem a forma

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^{n-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned}$$

Escrevendo $\gamma := y_n \circ f$, pela caracterização de Morin ([3, p.342]), na

vizinhança \mathcal{U}_p temos

$$\begin{aligned} \overline{A_{n-1}(f)} &= \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, n-1; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n+1, \dots, m \right\}; \\ A_n(f) &= \left\{ \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, n; \frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 0, i = n+1, \dots, m; \frac{\partial^{(n+1)}\gamma}{\partial x_n^{n+1}} \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas, obtemos $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = \pm 2x_i$, para $i = n+1, \dots, m$.

E para $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-j)!} x_n^{n+1-j} + \sum_{i=1}^{n-j} \frac{(n-i)!}{(n-i-j)!} x_i x_n^{n-i-j}.$$

Logo, $\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}(x) = 0 \Rightarrow x_i = 0$, para $i = n+1, \dots, m$. Para $j = 1, \dots, n-1$,

$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j}(x) = 0$ implica

$$x_{n-j} = -\binom{n+1}{j} x_n^{n+1-j} - \sum_{i=1}^{n-1-j} \binom{n-i}{j} x_i x_n^{n-i-j}. \quad (2.21)$$

E $\frac{\partial^{(n)}\gamma}{\partial x_n^n}(x) = 0 \Rightarrow x_n = 0$. Assim, considerando as relações dadas por 2.21, em $\overline{A_{n-1}(f)} \cap \mathcal{U}_p$ podemos escrever x_1, x_2, \dots, x_{n-1} em função de x_n . Isto é,

$$x_r = c_r x_n^{r+1}; \quad r = 1, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Em que $c_r \in \mathbb{R}$ denotarão as constantes obtidas por meio da expressão 2.21, para $j = 1, \dots, n-1$.

Deste modo, sobre a vizinhança \mathcal{U}_p , os conjuntos $\overline{A_{n-1}(f)}$ e $A_n(f)$ são dados por

$$\begin{aligned} \overline{A_{n-1}(f)} &= \{x_r - c_r x_n^{r+1} = 0, r = 1, \dots, n-1; x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}; \\ A_n(f) &= \{x_1 = \dots = x_{n-1} = x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}. \end{aligned}$$

Podemos considerar x_n coordenada local em $\overline{A_{n-1}(f)}$. Assim, pela caracterização de Z. Szafraniec ([15]), p será um ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$ se,

e somente se,

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Sobre $\overline{A_{n-1}(f)}$, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas definidas por

$$g_j(x) = c_j x_n^{j+1}, \quad j = 1, \dots, n$$

em que $c_n \in \mathbb{R}$ é a constante obtida substituindo-se 2.22 na expressão de $g_n(x) = y_n \circ f(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) (j+1) c_j x_n^j \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como $p \in A_n(f)$ e $x_n = 0$ sobre $A_n(f) \cap \mathcal{U}_p$, então

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Portanto, p é ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$.

Também pela caracterização de Z. Szafraniec ([15]), p será um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$ se, e somente se,

$$\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(p) \neq 0.$$

Derivando 2.23, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_s \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(x) \right) (j+1) c_j x_n^j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) j(j+1) c_j x_n^{j-1} \right] \end{aligned}$$

e uma vez que $x_n = 0$ sobre $A_n(f) \cap \mathcal{U}_p$, obtemos

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(p) = 2c_1 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)).$$

Como a constante c_1 , obtida por meio da equação 2.21, é dada por

$$c_1 = -\binom{n+1}{n-1} \neq 0,$$

resta verificarmos que

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)) \neq 0$$

o que, por sua vez, ocorre se, e somente se,

$$(a_1, \dots, a_n) \in \left\langle \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(g(p)), \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(g(p)) \right) \right\rangle^\perp$$

ou $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(g(p)), \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(g(p)) \right) = \vec{0}$ em \mathbb{R}^n .

Como o vetor $v(p) := \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(g(p)), \dots, \frac{\partial \psi_n}{\partial y_1}(g(p)) \right)$ corresponde a uma coluna da matriz jacobiana do difeomorfismo ψ , então $v(p) \neq \vec{0}$. Além disso, podemos considerar (a_1, \dots, a_n) fora de $\langle v(p) \rangle^\perp$, que tem medida nula em \mathbb{R}^n . Logo, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(q)) \neq 0$ e p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$.

Como $A_n(f)$ é uma subvariedade 0-dimensional composta por um número finito de pontos, podemos cobri-la com um número finito de vizinhanças \mathcal{U}_p de forma que o resultado é válido para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. ■

Lema 2.2.6. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin. Para quase todo $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, a aplicação $L_a \circ f$ é uma função de Morse.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que $C(L_a \circ f) \subset A_1(f)$.

Seja $d(L_a \circ f)_p$ a derivada da aplicação $L_a \circ f$ em um ponto $p \in M$, então

$$d(L_a \circ f)_p(T_p M) = d(L_a)_{f(p)} df_p(T_p M).$$

Como f é uma aplicação de Morin, o conjunto singular de f é dada por

$$\overline{A_1(f)} = \cup_{k=1}^n A_k(f).$$

Assim, se $p \notin \overline{A_1(f)}$ então df_p é sobrejetora, isto é, $df_p(T_pM) = \mathbb{R}^n$. Logo,

$$d(L_a \circ f)_p(T_pM) = d(L_a)_{f(p)}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R},$$

pois L_a é uma aplicação linear não nula, ou seja, $p \notin C(L_a \circ f)$. Portanto,

$$C(L_a \circ f) \subset \overline{A_1(f)}.$$

Além disso, pelo item 1 do Lema 2.2.5 sabemos que $C(L_a \circ f) \cap \overline{A_2(f)} = \emptyset$ para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Portanto,

$$C(L_a \circ f) \subset A_1(f).$$

Deste modo, se $p \in C(L_a \circ f)$ então $p \in A_1(f)$ e pelo Lema 2.2.2, $p \in C(L_a \circ f|_{A_1(f)})$. Mas, $L_a \circ f|_{A_1(f)}$ é Morse para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Logo, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_1(f)}$ e pelo item 2 do Lema 2.2.5 concluímos que p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f$. Portanto, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $L_a \circ f$ é uma função de Morse. ■

Lema 2.2.7. *Seja $m - n + 1$ par. Se $p \in A_1(f)$ é um ponto crítico de $L_a \circ f$, então*

$$\begin{aligned} \text{Ind}(L_a \circ f, p) &= \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_1^+(f)}, p) \pmod{2}, \quad \text{se } p \in A_1^+(f), \\ \text{Ind}(L_a \circ f, p) &= 1 + \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_1^-(f)}, p) \pmod{2}, \quad \text{se } p \in A_1^-(f). \end{aligned}$$

Em que $\text{Ind}(g, x)$ denota o índice de Morse em um ponto crítico x de uma função g .

Demonstração. Vimos no lema anterior que genericamente $L_a \circ f$ é Morse e $C(L_a \circ f) \subset A_1(f)$. Assim, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, se $p \in C(L_a \circ f)$ então, pelo Lema 2.2.5, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_1(f)}$. Vamos comparar os índices de Morse de $L_a \circ f$ e $L_a \circ f|_{A_1(f)}$ em p .

Seja $\mathcal{U}_p \subset M$ uma vizinhança aberta de M com $p \in \mathcal{U}_p$. Como $p \in A_1(f)$, podemos considerar coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) em torno de p e (y_1, \dots, y_n) em torno de $f(p)$ tal que, sobre a vizinhança \mathcal{U}_p , f tem a forma:

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, \quad i \leq n - 1; \\ y_n \circ f &= -x_n^2 - \dots - x_{n+\lambda-1}^2 + x_{n+\lambda}^2 + \dots + x_m^2. \end{aligned}$$

Escrevendo $\gamma := y_n \circ f$, pela caracterização de Morin ([3, p.342]), na

vizinhança \mathcal{U}_p , $A_1(f)$ é definido por

$$\begin{aligned} A_1(f) &= \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} = 0, i = n, \dots, m; \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_n^2} \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_n = \dots = x_m = 0; \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_n^2} \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

E pelo Teorema da função implícita, podemos considerar x_1, \dots, x_{n-1} coordenadas locais de $A_1(f) \cap \mathcal{U}_p$. Desse modo, as matrizes Hessianas de $L_a \circ f|_{A_1(f)}$ e $L_a \circ f$ em p são dadas por

$$\text{Hess}(L_a \circ f|_{A_1(f)})(p) = \left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_\ell \partial x_s}(p) \right]_{1 \leq \ell, s \leq n-1}$$

e

$$\text{Hess}(L_a \circ f)(p) = \left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_\ell \partial x_s}(p) \right]_{1 \leq \ell, s \leq m}$$

Lembrando que a aplicação $L_a \circ f$ pode ser escrita como

$$L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x),$$

suas derivadas parciais são dadas por,

$$\frac{\partial L_a \circ f}{\partial x_\ell}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_\ell}(x) \right).$$

Sobre $A_1(f) \cap \mathcal{U}_p$ a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas dadas por $g_j = y_j \circ f$, assim

$$\frac{\partial L_a \circ f}{\partial x_\ell}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_\ell}(g(x)), & \ell = 1, \dots, n-1; \\ \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(x)) (\pm 2x_\ell), & \ell = n, \dots, m. \end{cases}$$

Calculando as derivadas de segunda ordem para $\ell = 1, \dots, n-1$ e $s =$

n, \dots, m , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_n \partial y_\ell}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_s}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_n \partial y_\ell}(g(x)) (\pm 2x_s). \end{aligned}$$

E para $\ell, s = n, \dots, m$, $\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(x)$ é igual a

$$\sum_{i=1}^n a_i \left[\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_j \partial y_n}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_s}(x) \right) (\pm 2x_\ell) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(x)) \frac{\partial (\pm 2x_\ell)}{\partial x_s} \right].$$

Logo, no ponto $p \in A_1(f)$, obtemos

$$\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) = \begin{cases} 0, & \ell = 1, \dots, n-1 \text{ e } s = n, \dots, m; \\ 0, & \ell, s = n, \dots, m \text{ e } \ell \neq s; \\ \pm 2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(p)), & \ell, s = n, \dots, m \text{ e } \ell = s. \end{cases}$$

Por isso, a matriz Hessiana da aplicação $L_a \circ f$ no ponto p é igual a

$$\begin{bmatrix} \text{Hess}(L_a \circ f|_{A_1(f)})(p) & \vdots & O_{(n-1) \times (m-n+1)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ O_{(m-n+1) \times (n-1)} & \vdots & \left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(q) \right]_{n \leq \ell, s \leq m} \end{bmatrix}$$

em que

$$\left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) \right]_{n \leq \ell, s \leq m} = \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(p)), & \ell = s \leq n + \lambda - 1; \\ 2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(p)), & \ell = s \geq n + \lambda. \end{cases}$$

Deste modo, o determinante da matriz $Hess(L_a \circ f)(p)$ é dado por

$$\det(Hess(L_a \circ f|_{A_1(f)})(p)) \cdot \det \left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) \right]_{n \leq \ell, s \leq m}$$

e, por sua vez,

$$\det \left[\frac{\partial^2 L_a \circ f}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) \right]_{n \leq \ell, s \leq m} = (-1)^\lambda \left(2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(p)) \right)^{m-n+1}.$$

Como, ψ é difeomorfismo e $m - n + 1$ é par, então, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,

$$\left(2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(p)) \right)^{m-n+1} > 0.$$

Logo,

$$\mathbf{sgn}(\det Hess(L_a \circ f)(p)) = (-1)^\lambda \cdot \mathbf{sgn}(\det Hess(L_a \circ f|_{A_1(f)})(p))$$

isto é,

$$(-1)^{Ind(L_a \circ f, p)} = (-1)^\lambda \cdot (-1)^{Ind(L_a \circ f|_{A_1(f)}, p)}.$$

O que implica que,

$$\begin{aligned} p \in A_1^+(f) &\Leftrightarrow \lambda \text{ é par} &\Leftrightarrow (-1)^\lambda > 0; \\ p \in A_1^-(f) &\Leftrightarrow \lambda \text{ é ímpar} &\Leftrightarrow (-1)^\lambda < 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Ind(L_a \circ f, p) &= Ind(L_a \circ f|_{A_1^+(f)}, p) \pmod{2}, &\text{ se } p \in A_1^+(f), \\ Ind(L_a \circ f, p) &= 1 + Ind(L_a \circ f|_{A_1^-(f)}, p) \pmod{2}, &\text{ se } p \in A_1^-(f). \end{aligned}$$

■

2.3 Demonstração dos Teoremas de T. Fukuda

Teorema 2.3.1. [3, Teorema 1] *Seja M uma variedade compacta, m -dimensional, com $m \geq n$. Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma aplicação de Morin, então*

$$\chi(M) = \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(f)}) \pmod{2}.$$

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $L_a \circ f$, $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ e $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$, $k = 1, \dots, n$, são todas funções de Morse que satisfazem as propriedades descritas nos lemas da seção anterior. Um resultado bem conhecido na Teoria de Morse é que para uma função de Morse g definida sobre uma variedade compacta N , temos

$$\chi(N) = \#C(g) \pmod{2},$$

em que $\#C(g)$ denota o número de pontos críticos da função g . Deste modo,

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \#C(L_a \circ f) \pmod{2}; \\ \chi(\overline{A_k(f)}) &= \#C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \pmod{2}. \end{aligned}$$

E pelos Lemas 2.2.6, 2.2.2 e 2.2.5, itens 1 e 3,

$$\begin{aligned} \#C(L_a \circ f) &= \#C(L_a \circ f|_{A_1(f)}); \\ \#C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) &= \#C(L_a \circ f|_{A_k(f)}) + \#C(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}); \\ \#C(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}) &= \#C(L_a \circ f|_{A_{n-1}(f)}) + \#A_n(f). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \chi(M) + \sum_{k=1}^{n-1} \chi(\overline{A_k(f)}) &= \#C(L_a \circ f) + \sum_{k=1}^{n-1} \#C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \pmod{2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{n-1} \#C(L_a \circ f|_{A_k(f)}) + \#A_n(f) \pmod{2} \\ &= \chi(A_n(f)) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\chi(M) = \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(f)}) \pmod{2}.$$

■

Teorema 2.3.2. [3, Teorema 2] *Sejam M uma variedade compacta, m -dimensional, com $m \geq n$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin que admite apenas pontos singulares de dobra. Se $m - n$ é ímpar, então*

$$\chi(M) = \chi(A_1^+(f)) - \chi(A_1^-(f)).$$

Demonstração. Seja g uma função de Morse definida sobre uma variedade compacta N , sabe-se que

$$\chi(N) = \#C_+(g) - \#C_-(g),$$

em que $\#C_+(g)$ (respectivamente $\#C_-(g)$) denota o número de pontos críticos de g com índice de Morse par (respectivamente índice de Morse ímpar). Pelo Lema 2.2.7, temos

$$\begin{aligned} \#C_+(L_a \circ f) &= \#C_+(L_a \circ f|_{A_1^+(f)}) + \#C_-(L_a \circ f|_{A_1^-(f)}) \\ \#C_-(L_a \circ f) &= \#C_-(L_a \circ f|_{A_1^+(f)}) + \#C_+(L_a \circ f|_{A_1^-(f)}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \#C_+(L_a \circ f) - \#C_-(L_a \circ f) \\ &= \chi(A_1^+(f)) - \chi(A_1^-(f)). \end{aligned}$$

■

CAPÍTULO 3

Sobre a Topologia das Singularidades de Morin: O Teorema de Dutertre-Fukui

A principal referência para este capítulo é o trabalho [2] de N. Dutertre e T. Fukui.

Recentemente, ao trabalharem com aplicações estáveis $f : M \rightarrow N$ em [2], N. Dutertre e T. Fukui obtiveram resultados que relacionam a topologia das variedades M e N com a topologia dos conjuntos singulares da aplicação f . Os autores mostraram, em especial, que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação de Morin satisfazendo determinadas condições, é possível estabelecer uma igualdade entre a característica de Euler de M e a característica de Euler dos conjuntos singulares A'_k s desta aplicação:

$$\chi(M) = \sum_{k: \text{impar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right].$$

Este resultado melhora e generaliza os Teoremas 2.1.1 e 2.1.2 de T. Fukuda apresentados anteriormente. Desta forma, o principal objetivo deste capítulo é exibir uma prova alternativa para este teorema de N. Dutertre e T. Fukui ([2, Teorema 6.2, p. 188]) para o caso em que $N = \mathbb{R}^n$.

O estudo dos resultados de T. Fukuda no capítulo anterior nos ajuda a entender a maneira como a Teoria de Morse pode ser aplicada para uma nova demonstração do teorema de N. Dutertre e T. Fukui. A principal diferença deste novo contexto é o fato de trabalharmos com $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ que são variedades com bordo. Deste modo, nesta nova

prova ao invés de utilizarmos o Cálculo de O. Viro ([17]) empregado pelos autores em [2], aplicaremos a Teoria de Morse para variedades com bordo.

3.1 O Teorema de Dutertre-Fukui

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de Morin C^∞ de uma variedade compacta m -dimensional M em uma variedade conexa n -dimensional N , com $m > n$ e $m - n$ ímpar.

Lembremos que se $p \in A_k(f)$, então existem coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_m)$ em torno de p e $y = (y_1, \dots, y_n)$ em torno de $f(p)$ tal que f pode ser escrita localmente como:

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, \quad i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_n^{k-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Note que, como $m - n$ é ímpar, então $\lambda = m - n - \lambda + 1 \pmod{2}$. Quando k é ímpar, N. Dutertre e T. Fukui apresentam em [2] uma definição para os subconjuntos $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ de $A_k(f)$ dada em termos da paridade do índice de Morse λ da parte quadrática da função $y_n \circ f$ em 3.1:

Definição 3.1.1. [2, p.186] *Seja k ímpar, então*

$$\begin{aligned} A_k^+(f) &= \{p \in M : p \in A_k(f) \text{ com } \lambda = 0 \pmod{2}\} \\ A_k^-(f) &= \{p \in M : p \in A_k(f) \text{ com } \lambda = 1 \pmod{2}\} \end{aligned}$$

Sabemos também que $A_k(f)$ e $\overline{A_k(f)}$ são variedades $(n - k)$ -dimensionais tais que $\overline{A_k(f)} = \cup_{i=1}^n A_i(f)$ (Lema 2.2.1). Em [2], os autores demonstram um resultado semelhante para os subconjuntos $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$. Isto é:

Proposição 3.1.1. [2, p.186] *Se k é ímpar, então $\overline{A_k^+(f)}$ e $\overline{A_k^-(f)}$ são variedades compactas com bordo de dimensão $n - k$. Além disso,*

$$\overline{\partial A_k^+(f)} = \overline{\partial A_k^-(f)} = \overline{A_{k+1}(f)}.$$

Por fim, N. Dutertre e T. Fukui provam que:

Teorema 3.1.2. [2, Teorema 6.2, p.188] *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin definida sobre uma variedade compacta m -dimensional M , com*

$m - n > 0$ ímpar. Então,

$$\chi(M) = \sum_{k: \text{ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right].$$

3.2 Pontos críticos corretos

Também trabalharemos aqui com as aplicações $L_a \circ f$, mantendo a notação do capítulo anterior, isto é,

$$L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x).$$

Ao longo deste capítulo, vamos considerar $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tal que $L_a \circ f(x)$, $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ e $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ são funções de Morse que satisfazem as propriedades dos lemas apresentados no Capítulo 2. Antes da demonstração do Teorema 3.1.2, faremos algumas considerações a respeito dos pontos críticos corretos e não corretos de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$.

Para provarmos o Teorema 3.1.2, precisamos estudar a soma

$$\sum_{k: \text{ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right]$$

e para isto, vamos analisar a expressão

$$\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) + \chi(\overline{A_{k+2}^+(f)}) - \chi(\overline{A_{k+2}^-(f)}).$$

Pela Proposição 3.1.1, sabemos que se k é ímpar, $\overline{A_k^+(f)}$ e $\overline{A_k^-(f)}$ são variedades com bordo de dimensão $n - k$ tal que

$$\begin{aligned} \partial \overline{A_k^+(f)} &= \partial \overline{A_k^-(f)} = \overline{A_{k+1}(f)}; \\ \overline{A_k^+(f)} &= A_k^+(f) \cup \overline{A_{k+1}(f)}; \\ \overline{A_k^-(f)} &= A_k^-(f) \cup \overline{A_{k+1}(f)}. \end{aligned}$$

Além disso, pelo Teorema 1.4.4, se $F : \overline{A_k^+(f)} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função correta de Morse, então

$$\chi(\overline{A_k^+(f)}) = \sum_{p \in C(F^\circ)} (-1)^{\lambda_k^+(p)} + \sum_{p \in C(\partial F), \nabla F \text{ entrando}} (-1)^{\bar{\lambda}_k(p)},$$

em que F° denota a restrição ao interior $F|_{A_k^+(f)}$, ∂F denota a restrição ao bordo $F|_{\overline{\partial A_k^+(f)}}$, $\lambda_k^+(p)$ denota o índice de Morse de F° em um ponto crítico $p \in A_k^+(f)$ e $\bar{\lambda}_k(p)$ o índice de Morse de ∂F em um ponto crítico correto p , tal que o gradiente $\nabla F(p)$ está entrando na variedade. De forma análoga, o resultado é válido para $F : \overline{A_k^-(f)} \rightarrow \mathbb{R}$.

Queremos aplicar o resultado anterior às funções $L_a \circ f|_{\overline{A_k^+(f)}}$ e $L_a \circ f|_{\overline{A_k^-(f)}}$ para estudarmos $\chi(\overline{A_k^+(f)})$ e $\chi(\overline{A_k^-(f)})$, respectivamente. Para isto, é necessário verificar se os pontos críticos das restrições ao bordo $L_a \circ f|_{\overline{\partial A_k^+(f)}}$ são de fato pontos críticos corretos. Ou seja, dado um ponto $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})$ precisamos verificar se $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})$.

Se $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})$, então $p \in \overline{A_{k+1}(f)} \setminus \overline{A_{k+3}(f)} = A_{k+1}(f) \cup A_{k+2}(f)$.

Suponha que $p \in A_{k+2}(f)$. Dessa forma, $p \notin C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})$ pois, pelo Lema 2.2.5, $C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}) \cap \overline{A_{k+2}(f)} = \emptyset$. Portanto, p é correto.

Por outro lado, se $p \in A_{k+1}(f) \cap C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})$, em particular temos $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})$. Então, pelo Lema 2.2.2, $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})$. Portanto, p não é correto neste caso.

Como vimos no Capítulo 1, as funções de Morse corretas, definidas sobre uma variedade compacta N , formam um conjunto aberto e denso no espaço das funções $C^\infty(N, \mathbb{R})$. No lema a seguir, verificamos que é possível perturbar ligeiramente a função $L_a \circ f$ nas vizinhanças dos pontos críticos que não são corretos, de modo a obtermos funções de Morse cujos pontos críticos no bordo são todos corretos e por fim avaliarmos $\chi(\overline{A_k^+(f)})$ e $\chi(\overline{A_k^-(f)})$.

Lema 3.2.1. *Seja $p \in A_{k+1}(f)$ um ponto crítico não correto de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$. Então:*

1. *Existe uma perturbação $\widetilde{L_a \circ f}$ de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ em uma vizinhança de p , de forma que, $\widetilde{L_a \circ f}$ é uma função de Morse correta e $p \in C(\widetilde{L_a \circ f})$;*
2. *Na vizinhança considerada, $\exists! \tilde{p} \in C(\widetilde{L_a \circ f})$ tal que $\tilde{p} \in A_k^+(f) \cup A_k^-(f)$;*
3. *Os índices de Morse de $\widetilde{L_a \circ f}$ nos pontos p e \tilde{p} são tais que p e \tilde{p} não interferem no cálculo de $\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)})$.*

Demonstração.

1. Seja $p \in A_{k+1}(f)$ um ponto crítico não correto de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$. Como $\overline{A_k(f)}$, $\overline{A_k^+(f)}$ e $\overline{A_k^-(f)}$ são variedades $(n-k)$ -dimensionais e

$$\overline{\partial A_k^+(f)} = \overline{\partial A_k^-(f)} = \overline{A_{k+1}(f)}$$

é uma variedade de dimensão $n-k-1$, podemos considerar coordenadas locais $x = (x_1, \dots, x_{n-k-1}, x_{n-k})$ em uma vizinhança $\mathcal{U}_p \subset \overline{A_k(f)}$, tal que $p \in \mathcal{U}_p$, $x(p) = \vec{0}$ e na qual $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$ pode ser escrita como

$$L_a \circ f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-k-1}^2. \quad (3.2)$$

Nesta vizinhança, podemos escrever, ainda, a aplicação $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ como

$$L_a \circ f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, x_{n-k}) = L_a \circ f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0) + h(x_1, \dots, x_{n-k}), \quad (3.3)$$

para alguma função $h : x(\mathcal{U}_p) \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, $\exists \varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\widetilde{L_a \circ f}(x_1, \dots, x_{n-k}) = L_a \circ f(x_1, \dots, x_{n-k}) + \varepsilon x_{n-k}$$

ainda é uma função de Morse numa vizinhança aberta $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, $\vec{0} \in \mathcal{V}$. Em particular, esta pequena perturbação coincide com a função inicial sobre $\overline{A_{k+1}(f)}$, próximo ao ponto p :

$$\widetilde{L_a \circ f}(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0) = L_a \circ f(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0).$$

Além disso,

$$\text{Hess}(\widetilde{L_a \circ f}, \vec{0}) = \text{Hess}(L_a \circ f, \vec{0}).$$

Derivando, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\widetilde{L_a \circ f})}{\partial x_i}(\vec{0}) &= \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0, & i = 1, \dots, n-k-1; \\ \frac{\partial(\widetilde{L_a \circ f})}{\partial x_{n-k}}(\vec{0}) &= \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_{n-k}}(\vec{0}) + \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, o gradiente da função $\widetilde{L_a \circ f}$ restrita ao bordo $\overline{A_{k+1}(f)}$, em $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$, é igual a

$$\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})(\vec{0}) = (0, \dots, 0)$$

e o gradiente da função $\widetilde{L_a \circ f}$ em $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$ é não nulo:

$$\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\vec{0}) = (0, \dots, 0, \varepsilon).$$

Isto é, p é um ponto crítico correto de $\widetilde{L_a \circ f}|_{A_k^+(f)}$ e $\widetilde{L_a \circ f}|_{A_k^-(f)}$.

2. Como p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{A_k(f)}$, então, olhando a aplicação $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ na vizinhança \mathcal{V} , temos $\nabla(L_a \circ f)(\vec{0}) = \vec{0}$ e

$$\det(\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0})) \neq 0.$$

Mas,

$$\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0}) = \text{Jac}(\nabla(L_a \circ f))(\vec{0}).$$

Assim, a aplicação $\nabla(L_a \circ f) : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ é um difeomorfismo local em $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$. Logo, $\exists!$ \tilde{p} em uma vizinhança de $\vec{0}$ tal que

$$\nabla(L_a \circ f)(\tilde{p}) = (0, \dots, 0, -\varepsilon)$$

e, conseqüentemente, $\exists!$ \tilde{p} em uma vizinhança de $\vec{0}$ tal que

$$\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\tilde{p}) = (0, \dots, 0).$$

Ou seja, $\tilde{p} \in C(\widetilde{L_a \circ f}) \setminus C(L_a \circ f|_{A_k(f)})$. Em particular, podemos considerar tal vizinhança de modo que

$$\mathbf{sgn} \left(\det \left(\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0}) \right) \right) = \mathbf{sgn} \left(\det \left(\text{Hess}(\widetilde{L_a \circ f})(\tilde{p}) \right) \right). \quad (3.4)$$

Nosso próximo passo é mostrar que $x_{n-k}(\tilde{p}) \neq 0$. Seja $x = (x_1, \dots, x_{n-k})$, como $\nabla(L_a \circ f)(\tilde{p}) = (0, \dots, 0, -\varepsilon)$, então podemos olhar \tilde{p} como solução de um sistema de equações lineares dado a partir de

$$\begin{cases} \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_j}(x) = 0, & j = 1, \dots, n-k-1; \\ \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_{n-k}}(x) = -\varepsilon. \end{cases}$$

Desta forma, se $\det(A(\tilde{p})) \neq 0$, então

$$x_{n-k}(\tilde{p}) = \frac{\det(A_{n-k}(\tilde{p}))}{\det(A(\tilde{p}))}, \quad (3.5)$$

em que $A(x) = (a_{i,j}(x))$ é a matriz formada pelos coeficientes $a_{i,j}(x)$ dos monômios x_j em $\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_i}(x)$, $i, j = 1, \dots, n-k$, e $A_{n-k}(x)$ é a matriz obtida substituindo-se a última coluna de $A(x)$ pelo vetor $(0, \dots, 0, -\varepsilon)$. Assim, se a equação 3.5 for válida e $\det(A_{n-k}(\tilde{p})) \neq 0$, obtemos

$$\mathbf{sgn}(x_{n-k}(\tilde{p})) = \mathbf{sgn}(\det(A_{n-k}(\tilde{p}))) \mathbf{sgn}(\det(A(\tilde{p}))).$$

Vamos verificar se $\det(A(\tilde{p})) \neq 0$. Para isto, primeiramente, vamos calcular as matrizes $A(x)$ e $A_{n-k}(x)$.

Derivando $(L_a \circ f)(x)$, pelas equações 3.2 e 3.3, obtemos:

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} -2x_j + \frac{\partial h}{\partial x_j}(x), & j = 1, \dots, \lambda; \\ 2x_j + \frac{\partial h}{\partial x_j}(x), & j = \lambda + 1, \dots, n-k-1; \\ \frac{\partial h}{\partial x_{n-k}}(x), & j = n-k. \end{cases} \quad (3.6)$$

Também pela equação 3.3,

$$h(x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0) = 0, \forall (x_1, \dots, x_{n-k-1}, 0) \in \mathbb{R}^{n-k}.$$

Logo $h(\vec{0}) = 0$, e como $\vec{0}$ é ponto crítico de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$, por 3.6,

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0, i = 1, \dots, n-k.$$

Como $h(\vec{0}) = 0$, pelo Lema de Hadamard, existem funções suaves h_i , $i = 1, \dots, n-k$, definidas em uma vizinhança aberta de $\vec{0}$ em \mathbb{R}^{n-k} , tal que

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n-k} x_i h_i(x).$$

Logo, para $j = 1, \dots, n-k$,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = h_j(x) + \sum_{i=1}^{n-k} x_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{0}) = h_j(\vec{0}). \quad (3.7)$$

Por sua vez, como $\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{0}) = 0, j = 1, \dots, n-k$, segue novamente pelo Lema

de Hadamard que existem funções suaves $l_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n - k$, definidas em uma vizinhança aberta de $\vec{0}$ em \mathbb{R}^{n-k} , tal que

$$h_j(x) = \sum_{i=1}^{n-k} x_i l_{i,j}(x). \quad (3.8)$$

Assim, substituindo as equações de 3.7 e 3.8 nas expressões das derivadas parciais 3.6, obtemos:

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} -2x_j + \sum_{i=1}^{n-k} x_i \left(l_{i,j}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right), & j = 1, \dots, \lambda; \\ 2x_j + \sum_{i=1}^{n-k} x_i \left(l_{i,j}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right), & j = \lambda + 1, \dots, n - k - 1; \\ \sum_{i=1}^{n-k} x_i \left(l_{i,n-k}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_{n-k}}(x) \right), & j = n - k. \end{cases}$$

Desta maneira, a matriz $A(x) = (a_{i,j}(x))$ em 3.5 é dada por:

$$a_{i,j}(x) = \begin{cases} -2 + l_{i,i}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x), & i, j = 1, \dots, \lambda \text{ e } i = j; \\ 2 + l_{i,i}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x), & i, j = \lambda + 1, \dots, n - k - 1 \text{ e } i = j; \\ l_{j,i}(x) + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x), & i, j = 1, \dots, n - k \text{ e } i \neq j; \\ l_{n-k,n-k}(x) + \frac{\partial h_{n-k}}{\partial x_{n-k}}(x), & i = j = n - k. \end{cases} \quad (3.9)$$

Mas note que, para $i, j = 1, \dots, n - k$, temos

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) = l_{i,j}(x) + \sum_{r=1}^{n-k} x_r \frac{\partial l_{r,j}}{\partial x_i}(x),$$

assim

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}) = l_{i,j}(\vec{0}), \quad i, j = 1, \dots, n - k.$$

Avaliando a matriz $A(x) = (a_{i,j}(x))$ em $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$, obtemos

$$a_{i,j}(\vec{0}) = \begin{cases} -2 + 2\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(\vec{0}), & i, j = 1, \dots, \lambda \text{ e } i = j; \\ 2 + 2\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(\vec{0}), & i, j = \lambda + 1, \dots, n - k - 1 \text{ e } i = j; \\ \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{0}) + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}), & i, j = 1, \dots, n - k \text{ e } i \neq j; \\ 2\frac{\partial h_{n-k}}{\partial x_{n-k}}(\vec{0}), & i = j = n - k. \end{cases}$$

Em seguida, mostremos que $A(\vec{0}) = Hess(L_a \circ f|_{A_k(f)}, \vec{0})$.

Derivando mais uma vez $L_a \circ f(x)$ em 3.6, obtemos:

Para $i, j = 1, \dots, \lambda$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{cases} -2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x), & i = j; \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x), & i \neq j. \end{cases}$$

Para $i, j = \lambda + 1, \dots, n - k - 1$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x), & i = j; \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x), & i \neq j. \end{cases}$$

E para $j = 1, \dots, \lambda$ e $i = \lambda + 1, \dots, n - k$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Por fim, para $i = \lambda + 1, \dots, n - k$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_{n-k}}(x) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_{n-k}}(x).$$

Avaliando as derivadas em $\vec{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$, verificamos que:

Para $i, j = 1, \dots, \lambda$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) = \begin{cases} -2 + 2 \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(\vec{0}), & i = j; \\ \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{0}), & i \neq j. \end{cases}$$

Para $i, j = \lambda + 1, \dots, n - k - 1$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) = \begin{cases} 2 + 2 \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(\vec{0}), & i = j; \\ \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{0}), & i \neq j. \end{cases}$$

E para $j = 1, \dots, \lambda$ e $i = \lambda + 1, \dots, n - k$,

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) = \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{0}).$$

Por fim, para $i = \lambda + 1, \dots, n - k$

$$\frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_{n-k}}(\vec{0}) = \frac{\partial h_{n-k}}{\partial x_i}(\vec{0}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_{n-k}}(\vec{0}).$$

Derivando $\frac{\partial h}{\partial x_j}(x)$ em 3.7, para $i, j = 1, \dots, n - k$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(x) &= 2 \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(x) + \sum_{r=1}^{n-k} x_r \frac{\partial^2 h_r}{\partial x_j^2}(x), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) + \sum_{r=1}^{n-k} x_r \frac{\partial^2 h_r}{\partial x_i \partial x_j}(x). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2}(\vec{0}) &= 2 \frac{\partial h_j}{\partial x_j}(\vec{0}), \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) &= \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\vec{0}) + \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\vec{0}). \end{aligned}$$

Portanto, $a_{i,j}(\vec{0}) = \frac{\partial^2(L_a \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0})$, $\forall i, j = 1, \dots, n-k$, isto é,

$$\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0}) = A(\vec{0}). \quad (3.10)$$

E lembrando que p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$, temos $\det(\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0})) \neq 0$. Logo, $\det A(\vec{0}) \neq 0$.

As funções que determinam a matriz $A(x)$ são contínuas, assim, podemos considerar a vizinhança de $\vec{0}$ em \mathbb{R}^{n-k} , na qual estamos trabalhando, suficientemente pequena, de modo que

$$\mathbf{sgn}(\det A(\tilde{p})) = \mathbf{sgn}(\det A(\vec{0})). \quad (3.11)$$

Como $\overline{A_k(f)} = \overline{A_k^+(f)} \cup \overline{A_k^-(f)}$ e $\partial \overline{A_k^+(f)} = \partial \overline{A_k^-(f)} = \partial \overline{A_{k+1}(f)}$, podemos tomar x_1, \dots, x_{n-k-1} coordenadas locais de $\overline{A_{k+1}(f)}$, de modo que a matriz Hessiana de $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$ em $\vec{0}$ é a submatriz de $\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0})$ obtida eliminando-se a última linha e a última coluna de $\text{Hess}(L_a \circ f)(\vec{0})$. Em particular, a matriz Hessiana

$$\text{Hess}(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})(\vec{0})$$

também é não singular, pois, pelo item 2 do Lema 2.2.5, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$, já que $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}) \cap A_{k+1}(f)$.

Desta forma,

$$\det A_{n-k}(\vec{0}) = -\varepsilon \det \text{Hess}(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})(\vec{0}) \neq 0, \quad (3.12)$$

e pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, podemos assumir que

$$\mathbf{sgn}(\det A_{n-k}(\tilde{p})) = \mathbf{sgn}(\det A_{n-k}(\vec{0})). \quad (3.13)$$

Logo, a equação 3.5 implica que $x_{n-k}(\tilde{p}) \neq 0$. Portanto $\tilde{p} \notin \overline{A_{k+1}(f)}$, isto é, $\tilde{p} \in A_k^+(f) \cup A_k^-(f)$.

3. Queremos verificar sob quais condições $\tilde{p} \in A_k^+(f)$, $\tilde{p} \in A_k^-(f)$ e como isto interfere no cálculo de $\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)})$. Para isto, é suficiente estudarmos o sinal de $x_{n-k}(\tilde{p})$, que, pelas equações 3.4, 3.5, 3.10, 3.11, 3.12 e 3.13 no item anterior, é dado por

$$-\mathbf{sgn}(\det \widetilde{\text{Hess}(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})}(\vec{0})) \cdot \mathbf{sgn}(\det \widetilde{\text{Hess}(L_a \circ f)}(\tilde{p})).$$

Isto é,

$$\text{sgn}(x_{n-k}(\tilde{p})) = -(-1)^{\text{Ind}(\widetilde{L_a \circ f}|_{A_{k+1}(f), \vec{0}})} (-1)^{\text{Ind}(\widetilde{L_a \circ f, \tilde{p}})}.$$

Já vimos que

$$\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\vec{0}) = (0, \dots, 0, \varepsilon) = \varepsilon \nabla\{x_{n-k}\}(\vec{0}), \quad \varepsilon > 0.$$

Assim, $\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\vec{0})$ está entrando no semi-espaço determinado por $x_{n-k} > 0$. Como $p \in A_{k+1}(f)$, existem coordenadas locais (u_1, \dots, u_m) em torno de p em M e coordenadas locais (z_1, \dots, z_n) em torno de $f(p)$ em \mathbb{R}^n tal que, localmente, f é da forma:

$$\begin{aligned} z_i \circ f &= u_i, \quad i \leq n-1, \\ z_n \circ f &= u_n^{k+2} + \sum_{i=1}^k u_i u_n^{k+1-i} + u_{n+1}^2 + \dots + u_{n+\mu-1}^2 - u_{n+\mu}^2 - \dots - u_m^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

E analogamente à demonstração do Lema 2.2.2, na vizinhança considerada, podemos escrever

$$\begin{aligned} A_k(f) &= \{u_r - c_r u_n^{r+1} = 0, r = 1, \dots, k; u_{n+1} = \dots = u_m = 0; u_n \neq 0\}; \\ \overline{A_k(f)} &= \{u_r - c_r u_n^{r+1} = 0, r = 1, \dots, k; u_{n+1} = \dots = u_m = 0\}, \end{aligned}$$

de modo que u_{k+1}, \dots, u_n são coordenadas locais em $\overline{A_k(f)}$.

Se k e $m - n > 0$ são ímpares, em [2, Proposição 6.1, p.188], os autores exibem uma caracterização para as variedades $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ dada em termos da paridade do índice de Morse μ da parte quadrática de $z_n \circ f$. Assim, de acordo com esta caracterização, devemos trabalhar com o seguintes casos:

- Se μ é par, então:

$$\begin{aligned} q \in A_k^+(f) &\Leftrightarrow u_n(q) > 0; \\ q \in A_k^-(f) &\Leftrightarrow u_n(q) < 0. \end{aligned}$$

- Se μ é ímpar, então:

$$\begin{aligned} q \in A_k^+(f) &\Leftrightarrow u_n(q) < 0; \\ q \in A_k^-(f) &\Leftrightarrow u_n(q) > 0; \end{aligned}$$

em que $q = (u_1(q), \dots, u_m(q))$ é um ponto próximo a p .

Note que temos dois sistemas de coordenadas locais de $\overline{A_k(f)}$ em torno de p dados por (x_1, \dots, x_{n-k}) e (u_{k+1}, \dots, u_n) , de modo que os hiperplanos $x_{n-k} = 0$ e $u_n = 0$ são isomorfos. Vamos supor, sem perda de generalidade, que o semi-espaço determinado por $x_{n-k} > 0$ corresponde ao semi-espaço determinado por $u_n > 0$. Deste modo, temos:

- Se μ é par, então:

$$\begin{aligned} q \in A_k^+(f) &\Leftrightarrow x_{n-k}(q) > 0; \\ q \in A_k^-(f) &\Leftrightarrow x_{n-k}(q) < 0. \end{aligned}$$

- Se μ é ímpar, então:

$$\begin{aligned} q \in A_k^+(f) &\Leftrightarrow x_{n-k}(q) < 0; \\ q \in A_k^-(f) &\Leftrightarrow x_{n-k}(q) > 0; \end{aligned}$$

em que $q = (x_1(q), \dots, x_m(q))$ é um ponto próximo a p .

Vejam, por fim, que os pontos críticos p e \tilde{p} não interferem no cálculo de $\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)})$.

Se μ é par, então $q \in A_k^+(f) \Leftrightarrow x_{n-k}(q) > 0$, isto é, $\{x_{n-k} > 0\} = A_k^+(f)$. Logo, $\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\vec{0})$ está entrando em $A_k^+(f)$.

- Suponha $\tilde{p} \in A_k^+(f)$, então $x_{n-k}(\tilde{p}) > 0$, e localmente

$$\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) = (-1)^{\text{Ind}(\widetilde{L_a \circ f}, \tilde{p})} + (-1)^{\text{Ind}(\widetilde{L_a \circ f}|_{A_{k+1}(f)}, \vec{0})} = 0,$$

pois a expressão que determina o sinal de $x_{n-k}(\tilde{p})$ nos diz que os respectivos índices tem paridades opostas, uma vez que $x_{n-k}(\tilde{p}) > 0$.

- Suponha $\tilde{p} \in A_k^-(f)$, então $x_{n-k}(\tilde{p}) < 0$, e localmente

$$\chi(A_k^+(f)) - \chi(A_k^-(f)) = (-1)^{\text{Ind}(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}, \vec{0})} - (-1)^{\text{Ind}(L_a \circ f, \tilde{p})} = 0,$$

pois a expressão que determina o sinal de $x_{n-k}(\tilde{p})$ nos diz que os respectivos índices tem paridades iguais, uma vez que $x_{n-k}(\tilde{p}) < 0$.

Se μ é ímpar, então $q \in A_k^+(f) \Leftrightarrow x_{n-k}(q) < 0$, assim, $\{x_{n-k} > 0\} = A_k^-(f)$. Logo, $\nabla(\widetilde{L_a \circ f})(\vec{0})$ está entrando em $A_k^-(f)$.

- Suponha $\tilde{p} \in A_k^+(f)$, então $x_{n-k}(\tilde{p}) < 0$, e localmente

$$\chi(A_k^+(f)) - \chi(A_k^-(f)) = (-1)^{Ind(L_a \circ f, \tilde{p})} - (-1)^{Ind(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}, \vec{0})} = 0,$$

pois a expressão que determina o sinal de $x_{n-k}(\tilde{p})$ nos diz que os respectivos índices tem paridades iguais, uma vez que $x_{n-k}(\tilde{p}) < 0$.

- Suponha $\tilde{p} \in A_k^-(f)$, então $x_{n-k}(\tilde{p}) > 0$, e localmente

$$\chi(A_k^+(f)) - \chi(A_k^-(f)) = -(-1)^{Ind(L_a \circ f|_{A_{k+1}(f)}, \vec{0})} - (-1)^{Ind(L_a \circ f, \tilde{p})} = 0,$$

pois a expressão que determina o sinal de $x_{n-k}(\tilde{p})$ nos diz que os respectivos índices tem paridades opostas, uma vez que $x_{n-k}(\tilde{p}) > 0$.

Portanto os pontos críticos $p \in A_{k+1}(f)$ e $\tilde{p} \in A_k^+(f) \cup A_k^-(f)$, aqui estudados, não interferem no cálculo global de $\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)})$, uma vez que, neste cálculo, os índices da perturbação $\widetilde{L_a \circ f}$ nestas singularidades anulam-se um ao outro. ■

3.3 Uma nova demonstração para o Teorema de Dutertre-Fukui

Como mencionado no início deste capítulo, faremos aqui uma nova prova para o Teorema de Dutertre-Fukui, quando $N = \mathbb{R}^n$, usando a Teoria de Morse para variedades com bordo:

Teorema 3.3.1. [2, Teorema 6.2, p.188] *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin definida sobre uma variedade compacta m -dimensional M , com $m - n > 0$ ímpar. Então,*

$$\chi(M) = \sum_{k: \text{ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right].$$

Demonstração. Pela Teoria de Morse sabemos que

$$\chi(M) = \sum_{p \in C(L_a \circ f)} (-1)^{\lambda(p)},$$

em que $\lambda(p) = Ind(L_a \circ f, p)$ é o índice de Morse de $L_a \circ f$ no ponto p .

Sabemos ainda que $C(L_a \circ f) \subset \overline{A_1(f)}$. Além disso, pelo Lema 2.2.5, podemos considerar $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ de modo que $C(L_a \circ f) \cap \overline{A_2(f)} = \emptyset$. Logo,

se $p \in C(L_a \circ f)$, então $p \in \overline{A_1(f)} \setminus \overline{A_2(f)} = A_1(f) = A_1^+(f) \cup A_1^-(f)$. E pelo Lema 2.2.7,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(L_a \circ f, p) &= \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_1^+(f)}, p) \pmod{2}, & \text{se } p \in A_1^+(f), \\ \text{Ind}(L_a \circ f, p) &= 1 + \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_1^-(f)}, p) \pmod{2}, & \text{se } p \in A_1^-(f). \end{aligned}$$

Portanto, denotando por $\lambda(p) = \text{Ind}(L_a \circ f, p)$, $\lambda^1(p) = \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_1(f)}, p)$ e por $C = C(L_a \circ f)$, temos

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{p \in C} (-1)^{\lambda(p)} \\ &= \sum_{p \in A_1^+(f) \cap C} (-1)^{\lambda(p)} + \sum_{p \in A_1^-(f) \cap C} (-1)^{\lambda(p)} \\ &= \sum_{p \in A_1^+(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)} + \sum_{p \in A_1^-(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)+1} \\ &= \sum_{p \in A_1^+(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)} - \sum_{p \in A_1^-(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Com respeito a soma

$$\sum_{k: \text{ ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right],$$

como vimos na seção anterior, os pontos críticos em $C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}) \cap A_{k+1}(f)$ não são pontos críticos corretos de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$. Por isso, consideramos uma partição da unidade composta por $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ e pelas perturbações $\widetilde{L_a \circ f}$ definidas em vizinhanças dos pontos críticos não corretos. Deste modo, obtemos uma função correta de Morse e poderemos aplicar o Teorema 1.4.4.

Por simplicidade de notação, vamos escrever

$$\begin{aligned} C(k) &= C(L_a \circ f|_{A_k(f)}); \\ C(\bar{k}) &= C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}); \\ C(k^+) &= C(L_a \circ f|_{A_k^+(f)}); \\ C(k^-) &= C(L_a \circ f|_{A_k^-(f)}). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Além disso, denotaremos

$$\begin{aligned}\nabla(\bar{k})(p)^\wedge &= \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ “saindo de”}; \\ \nabla(\bar{k})(p)^\vee &= \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ “entrando em”}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Por exemplo, $\nabla(\bar{k})(p)^\wedge A_\ell^+(f)$ representa o vetor gradiente da aplicação $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$ no ponto p , saindo de $A_\ell^+(f)$, isto é, apontando para fora da variedade $A_\ell^+(f)$.

Dessa maneira, pelo Teorema 1.4.4 e pelo Lema 3.2.1, obtemos

$$\begin{aligned}\chi(\overline{A_k^+(f)}) &= \sum_{p \in C(k^+)} (-1)^{\lambda^k(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}(f), \\ \nabla(\bar{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)}; \\ \chi(\overline{A_k^-(f)}) &= \sum_{p \in C(k^-)} (-1)^{\lambda^k(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}(f), \\ \nabla(\bar{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)}.\end{aligned}$$

Em que $\lambda^k(p)$ é o índice de Morse de $L_a \circ f|_{A_k(f)}$ em p e $\bar{\lambda}^{k+1}(p)$ é o índice de Morse de $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$ em p . Analogamente,

$$\begin{aligned}\chi(\overline{A_{k+2}^+(f)}) &= \sum_{p \in C((k+2)^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+3}) \cap A_{k+4}(f), \\ \nabla(\overline{k+2})(p)^\vee A_{k+2}^+(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{k+3}(p)}; \\ \chi(\overline{A_{k+2}^-(f)}) &= \sum_{p \in C((k+2)^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+3}) \cap A_{k+4}(f), \\ \nabla(\overline{k+2})(p)^\vee A_{k+2}^-(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{k+3}(p)}.\end{aligned}$$

Se $p \in A_{k+2}(f)$, existem coordenadas locais tais que

$$\begin{aligned}y_i \circ f &= x_i, \quad i \leq n-1, \\ y_n \circ f &= x_n^{k+3} + \sum_{i=1}^{k+1} x_i x_n^{k+2-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Assim, denotando $\gamma := y_n \circ f$, em uma vizinhança de p temos

$$\begin{aligned} A_k(f) &= \{x_{n+1} = \dots = x_m = 0; \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k; \frac{\partial^{(k+1)}\gamma}{\partial x_n^{k+1}} \neq 0\}; \\ \overline{A_k(f)} &= \{x_{n+1} = \dots = x_m = 0; \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0, j = 1, \dots, k\}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Em particular, nas vizinhanças consideradas, sobre a variedade $\overline{A_{k+1}(f)}$ temos $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$ e para $j = 1, \dots, k+1$,

$$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0 \Rightarrow \frac{(k+3)!}{(k+3-j)!} x_n^{k+3-j} + \sum_{i=1}^{k+2-j} \frac{(k+2-i)!}{(k+2-j-i)!} x_i x_n^{k+2-j-i} = 0;$$

isto é, para $j = 1, \dots, k+1$, vale

$$x_{k+2-j} = - \binom{k+3}{j} x_n^{k+3-j} - \sum_{i=1}^{k+1-j} \binom{k+2-i}{j} x_i x_n^{k+2-j-i}. \tag{3.20}$$

Utilizando as relações dadas por 3.20 para $j = 1, \dots, k+1$, sobre $\overline{A_{k+1}(f)}$ podemos escrever

$$x_r = c_r x_n^{r+1}, \quad r = 1, \dots, k+1; \tag{3.21}$$

para constantes $c_r \in \mathbb{R}$. Deste modo, podemos considerar x_{k+2}, \dots, x_n coordenadas locais em $\overline{A_{k+1}(f)}$.

Pelo Lema 2.2.5, como $p \in A_{k+2}(f)$, então $p \notin C(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})$. Além disso, pelo Lema 2.2.2, se $p \in C(L_a \circ f|_{A_{k+2}(f)})$, então $p \in C(L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}})$. Portanto, os pontos críticos de $L_a \circ f|_{A_{k+2}(f)}$ são pontos críticos corretos de $L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}}$. Em particular, $\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \neq \vec{0}$ e $\exists \eta(p) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) = \eta(p) \cdot \nabla \left(\frac{\partial^{k+1}\gamma}{\partial x_n^{k+1}} \right) (p).$$

Assim, pela caracterização de $A_{k+2}^+(f)$ e $A_{k+2}^-(f)$ dada em [2, p.186], e pela caracterização de $A_k^+(f)$ e $A_k^-(f)$ dada em [2, Proposição 6.1, p.188], temos:

Se $p \in A_{k+2}^+(f)$, então λ na expressão 3.18 é par e dizemos que

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_k^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0; \\ \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_k^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Se $p \in A_{k+2}^-(f)$, então λ na expressão 3.18 é ímpar e dizemos que

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_k^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0; \\ \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_k^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Como $\frac{\partial^{k+1}\gamma}{\partial x_n^{k+1}}(x) = \frac{(k+3)!}{2!}x_n^2 + (k+1)!x_1$, temos

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\partial^{k+1}\gamma}{\partial x_n^{k+1}}\right)(x) &= ((k+1)!, 0, \dots, 0, (k+3)!x_n, 0, \dots, 0); \\ \nabla\left(\frac{\partial^{k+1}\gamma}{\partial x_n^{k+1}}\right)(p) &= ((k+1)!, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) = (\eta(p)(k+1)!, 0, \dots, 0). \quad (3.24)$$

Assim, para analisarmos $\eta(p)$ é suficiente calcularmos $\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(p)$.

Localmente, sobre $\overline{A_k(f)}$, temos $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$ e $\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0$, $j = 1, \dots, k$. Desta forma, obtemos

$$x_r = c_n^r x_n^{r+1} + c_{1,n}^r x_1 x_n^{r-1}, \quad r = 2, \dots, k+1, \quad (3.25)$$

em que c_n^r e $c_{1,n}^r$ são constantes não nulas. Então, sobre $\overline{A_k(f)}$, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas $g_j = y_j \circ f$ dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} x_j, & j = 1, k+2, \dots, n-1; \\ c_n^j x_n^{j+1} + c_{1,n}^j x_1 x_n^{j-1}, & j = 2, \dots, k+1; \\ c_n x_n^{k+3} + c_{1,n} x_1 x_n^{k+1}, & j = n; \end{cases}$$

em que $c_n, c_{1,n} \in \mathbb{R}$ são constantes não nulas obtidas substituindo-se 3.25 na expressão de $y_n \circ f(x)$.

Como

$$\begin{aligned} L_a \circ f(x) &= \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x) \\ \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

então

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(p) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)). \quad (3.27)$$

Logo, por 3.24,

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)) = \eta(p) \cdot (k+1)! \quad (3.28)$$

Desta maneira, precisamos analisar a expressão $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p))$. Faremos isto a partir de algumas informações da matriz Hessiana de $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$ no ponto p .

Por 3.21, sabemos que, localmente, sobre $\overline{A_{k+1}(f)}$, as funções coordenadas da aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ são dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} c_j x_n^{j+1}, & j = 1, \dots, k+1; \\ x_j, & j = k+2, \dots, n-1; \\ c_n x_n^{k+3}, & j = n. \end{cases}$$

em que $c_n \in \mathbb{R}$ é uma constante, não nula, obtida substituindo-se as relações de 3.21 na expressão de $y_n \circ f(x)$.

Deste modo, retomando as equações de 3.26, temos

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_\ell}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_\ell}(x) \right).$$

E derivando pela segunda vez,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_s \partial x_\ell}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial^{(2)}\psi_i}{\partial y_r \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_r}{\partial x_s}(x) \right) \frac{\partial g_j}{\partial x_\ell}(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial^{(2)}g_j}{\partial x_s \partial x_\ell}(x) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} \left[\left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial^{(2)}\psi_i}{\partial y_r \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(x) \right) (j+1)c_j x_n^j \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) j(j+1)c_j x_n^{j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{t=1}^n \frac{\partial^{(2)}\psi_i}{\partial y_t \partial y_n}(g(x)) \frac{\partial g_t}{\partial x_n}(x) \right) (k+3)c_n x_n^{k+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_n}(g(x)) (k+2)(k+3)c_n x_n^{k+1} \right\}. \end{aligned}$$

Mas, localmente, $x_n = 0$ sobre $A_{k+2}(f)$. Então, avaliando a derivada acima no ponto $p \in A_{k+2}(f)$, obtemos

$$\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(p) = 2c_1 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)). \quad (3.29)$$

Pelas equações 3.19 e 3.21, sabemos que, na vizinhança considerada, $\overline{A_{k+1}(f)}$ tem coordenadas locais x_{k+2}, \dots, x_n e $A_{k+2}(f)$ tem coordenadas x_{k+2}, \dots, x_{n-1} . Assim, considerando as equações 3.27 e 3.29, a matriz Hessiana de $L_a \circ f|_{\overline{A_{k+1}(f)}}$ no ponto p é dada por

$$\begin{bmatrix} \left[\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) \right]_{k+2 \leq s, \ell \leq n-1} & \vdots & O_{(n-k-2) \times 1} \\ \dots & \vdots & \dots \\ O_{1 \times (n-k-2)} & \vdots & 2c_1 \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(p) \end{bmatrix}$$

em que, a submatriz

$$\left[\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_s \partial x_\ell}(p) \right]_{k+2 \leq s, \ell \leq n-1}$$

é a matriz Hessiana de $L_a \circ f|_{A_{k+2}(f)}$ no ponto p .

Podemos verificar em 3.21 que $c_1 = -\frac{(k+3)!}{2!(k+1)!} < 0$. Então, por meio de 3.27 e 3.28, encontramos

$$\mathbf{sgn} \left(\text{Hess}(L_a \circ f|_{A_{k+1}})(p) \right) = -\mathbf{sgn} \left(\text{Hess}(L_a \circ f|_{A_{k+2}})(p) \right) \cdot \mathbf{sgn}(\eta(p)),$$

logo,

$$\mathbf{sgn}(\eta(p)) = -(-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)} \cdot (-1)^{\lambda^{k+2}(p)}, \quad (3.30)$$

em que $\bar{\lambda}^{k+1}(p) = \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_{k+1}}, p)$ e $\lambda^{k+2}(p) = \text{Ind}(L_a \circ f|_{A_{k+2}}, p)$. E assim, pelas equações 3.22 e 3.23, temos:

Se $p \in A_{k+2}^+(f)$, então λ na expressão 3.18 é par, e

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{A_k(f)})(p) \text{ entra em } A_k^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)} \cdot (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{k+1}(p) = 1 + \lambda^{k+2}(p) \pmod{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{A_k(f)})(p) \text{ entra em } A_k^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)} \cdot (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{k+1}(p) = \lambda^{k+2}(p) \pmod{2}. \end{aligned}$$

Se $p \in A_{k+2}^-(f)$, então λ na expressão 3.18 é ímpar, e

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{A_k(f)})(p) \text{ entra em } A_k^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\bar{\lambda}^{k+1}(p)} \cdot (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{k+1}(p) = \lambda^{k+2}(p) \pmod{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_k(f)}})(p) \text{ entra em } A_k^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0 \\
&\Leftrightarrow (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} \cdot (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \overline{\lambda}^{k+1}(p) = 1 + \lambda^{k+2}(p) \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando estas equivalências, e retomando as notações 3.16 e 3.17:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} - \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} \\
+ &\sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} - \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
= &\sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}^+(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}^-(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} \\
- &\sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}^+(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} - \sum_{\substack{p \in C(\overline{k+1}) \cap A_{k+2}^-(f), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\overline{\lambda}^{k+1}(p)} \\
+ &\sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} - \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
= &- \sum_{\substack{p \in C(k+2^+), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(k+2^-), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^+(f)}} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
- &\sum_{\substack{p \in C(k+2^+), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(k+2^-), \\ \nabla(\overline{k})(p)^\vee A_k^-(f)}} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} - \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
& = \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} - \sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
& + \sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} - \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) & = \sum_{p \in C(k^+)} (-1)^{\lambda^k(p)} - \sum_{p \in C(k^-)} (-1)^{\lambda^k(p)} \\
& - \sum_{p \in C(k+2^+)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)} + \sum_{p \in C(k+2^-)} (-1)^{\lambda^{k+2}(p)}
\end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, n-4$, se n for ímpar e para todo $k = 1, \dots, n-3$, se n for par.

Se n é par, então, pelo Teorema 1.4.4 e pelo Lema 3.2.1, temos

$$\chi(\overline{A_{n-1}^+(f)}) - \chi(\overline{A_{n-1}^-(f)}) = \sum_{p \in C(n-1^+)} (-1)^{\lambda^{n-1}(p)} - \sum_{p \in C(n-1^-)} (-1)^{\lambda^{n-1}(p)}$$

Portanto, se n é par, então

$$\sum_{k: \text{ ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right] = \sum_{p \in C(1^+)} (-1)^{\lambda^1(p)} - \sum_{p \in C(1^-)} (-1)^{\lambda^1(p)}.$$

Suponha n ímpar, vamos estudar primeiramente o índice de Morse, $\bar{\lambda}^{n-1}(p)$, de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$ em um ponto $p \in A_n(f)$. Em torno de p e $f(p)$

existem coordenadas locais tais que

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, \quad i \leq n-1, \\ y_n \circ f &= x_n^{n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_n^{n-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

e denotando novamente $\gamma := y_n \circ f$,

$$\begin{aligned} A_k(f) &= \left\{ x_{n+1} = \dots = x_m = 0; \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0; j = 1, \dots, k; \frac{\partial^{(k+1)}\gamma}{\partial x_n^{k+1}} \neq 0 \right\} \\ \overline{A_k(f)} &= \left\{ x_{n+1} = \dots = x_m = 0; \frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0; j = 1, \dots, k; \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Em particular,

$$A_n(f) = \{x_1 = \dots = x_m = 0\}.$$

Como $p \in A_n(f)$, então, pelo Lema 2.2.5, p é um ponto crítico não degenerado de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}}$ e $p \notin C(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})$. Logo, p é um ponto crítico correto de $L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}}$ e $\exists \eta(p) \in \mathbb{R}/\{0\}$ tal que

$$\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) = \eta(p) \cdot \nabla \left(\frac{\partial^{(n-1)}\gamma}{\partial x_n^{n-1}} \right) (p). \quad (3.34)$$

Como $\frac{\partial^{(n-1)}\gamma}{\partial x_n^{n-1}}(x) = \frac{(n+1)!}{2}x_n^2 + (n-1)!x_1$, temos

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\partial^{(n-1)}\gamma}{\partial x_n^{n-1}} \right) (x) &= ((n-1)!, 0, \dots, (n+1)!x_n, 0, \dots, 0); \\ \nabla \left(\frac{\partial^{(n-1)}\gamma}{\partial x_n^{n-1}} \right) (p) &= ((n-1)!, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) = (\eta(p)(n-1)!, 0, \dots, 0).$$

Deste modo, para estudarmos o sinal de $\eta(p)$ é suficiente calcularmos a derivada $\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(p)$. Por 3.33 sabemos que, localmente, sobre $\overline{A_{n-2}(f)}$

temos $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$ e $\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0; j = 1, \dots, n-2$, em que

$$\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0 \Rightarrow x_{n-j} = c_n^{n-j} x_n^{n-j+1} + c_{1,n}^{n-j} x_1 x_n^{n-j-1}, \quad j = 1, \dots, n-2; \quad (3.35)$$

isto é, sobre $\overline{A_{n-2}(f)}$, temos

$$x_r = c_n^r x_n^{r+1} + c_{1,n}^r x_1 x_n^{r-1}, \quad r = 2, \dots, n-1; \quad (3.36)$$

em que $c_n^r, c_{1,n}^r \in \mathbb{R}$ são constantes não nulas obtidas em 3.35. Desta forma, considerando a notação usual, a aplicação $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ tem suas funções coordenadas $g_j(x) = y_j \circ f$ dadas por

$$g_j(x) = \begin{cases} x_1, & j = 1; \\ c_n^j x_n^{j+1} + c_{1,n}^j x_1 x_n^{j-1}, & j = 2, \dots, n; \end{cases}$$

em que $c_n^n, c_{1,n}^n \in \mathbb{R}$ são constantes não nulas obtidas substituindo-se as relações encontradas em 3.36 na expressão de $g_n(x) = y_n \circ f$. Como

$$\begin{aligned} L_a \circ f(x) &= \sum_{i=1}^n a_i (\psi_i \circ g)(x) \\ \frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_1}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

então

$$\frac{\partial(L_a \circ f)}{\partial x_1}(p) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p)).$$

Por 3.33, sabemos que, localmente, sobre $\overline{A_{n-1}(f)}$, temos $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$ e $\frac{\partial^{(j)}\gamma}{\partial x_n^j} = 0; j = 1, \dots, n-1$, o que nos permite escrever x_1, \dots, x_{n-1} em função de x_n . De fato, por 3.35, obtemos

$$x_r = c_n^r x_n^{r+1} + c_{1,n}^r x_1 x_n^{r-1}, \quad r = 2, \dots, n-1; \quad (3.38)$$

além disso,

$$\frac{\partial^{(n-1)}\gamma}{\partial x_n^{n-1}} = 0 \Rightarrow x_1 = c_n^1 x_n^2, \quad (3.39)$$

em que $c_n^1 = -\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$. Logo,

$$x_r = C_r x_n^{r+1}, \quad r = 2, \dots, n-1, \quad (3.40)$$

em que $C_r \in \mathbb{R}$ são constantes não nulas obtidas substituindo-se 3.39 em 3.38. Assim, sobre $\overline{A_{n-1}(f)}$ as funções coordenadas de $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ são dadas por

$$g_j(x) = C_j x_n^{j+1}, \quad j = 1, \dots, n$$

em que $C_1 = c_n^1$ e $C_n \in \mathbb{R}$ é a constante não nula obtida substituindo-se 3.39 e 3.40 na expressão de $y_n \circ f$.

Retomando as equações de 3.37, temos

$$\frac{\partial L_a \circ f}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(x) \right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_r \partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_r}{\partial x_n}(x) \right) \frac{\partial g_j}{\partial x_n}(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial^{(2)} g_j}{\partial x_n^2}(x) \right]. \end{aligned}$$

Assim, sobre $\overline{A_{n-1}(f)}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(x) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial^{(2)} \psi_i}{\partial y_r \partial y_j}(g(x)) (r+1) C_r x_n^r \right) (j+1) C_j x_n^j \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(g(x)) j(j+1) C_j x_n^{j-1} \right]. \end{aligned}$$

e como $x_n = 0$ sobre $A_n(f)$, temos

$$\frac{\partial^{(2)}(L_a \circ f)}{\partial x_n^2}(p) = 2C_1 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial \psi_i}{\partial y_1}(g(p))$$

e como $C_1 = c_n^1 < 0$, segue que

$$\mathbf{sgn}(\text{Hess}(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-1}(f)}})(p)) = -\mathbf{sgn}\left(\frac{\partial L_a \circ f}{\partial x_1}(p)\right) = -\mathbf{sgn}(\eta(p))$$

Logo,

$$\mathbf{sgn}(\eta(p)) = -(-1)^{\overline{\lambda}^{n-1}(p)}.$$

Pela caracterização de $A_n^+(f)$ e $A_n^-(f)$ dada em [2, p.186], e pela caracterização de $A_{n-2}^+(f)$ e $A_{n-2}^-(f)$ dada em [2, Proposição 6.1, p.188], temos:

Se $p \in A_n^+(f)$, então λ na expressão 3.32 é par e dizemos que

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_{n-2}^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0; \\ \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_{n-2}^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0. \end{aligned}$$

Se $p \in A_n^-(f)$, então λ na expressão 3.32 é ímpar e dizemos que

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_{n-2}^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0; \\ \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ está entrando em } A_{n-2}^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0. \end{aligned}$$

Assim, se $p \in A_n^+(f)$, então λ na expressão 3.32 é par e

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ entra em } A_{n-2}^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\overline{\lambda}^{n-1}(p)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda}^{n-1}(p) \text{ é ímpar} \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda}^{n-1}(p) = 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ entra em } A_{n-2}^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\overline{\lambda}^{n-1}(p)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda}^{n-1}(p) \text{ é par} \\ &\Leftrightarrow \overline{\lambda}^{n-1}(p) = 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

Se $p \in A_n^-(f)$, então λ na expressão 3.32 é ímpar e

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ entra em } A_{n-2}^+(f) &\Leftrightarrow \eta(p) < 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{n-1}(p) \text{ é par} \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{n-1}(p) = 0 \pmod{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla(L_a \circ f|_{\overline{A_{n-2}(f)}})(p) \text{ entra em } A_{n-2}^-(f) &\Leftrightarrow \eta(p) > 0 \\ &\Leftrightarrow (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{n-1}(p) \text{ é ímpar} \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda}^{n-1}(p) = 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

Portanto, usando estas equivalências, e retomando as notações 3.16 e 3.17, obtemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^+(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^-(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} \\ = &\sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^+(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} + \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^+(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} \\ - &\sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^-(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^-(f)}} (-1)^{\bar{\lambda}^{n-1}(p)} \\ = &\sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^+(f)}} (-1) + \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p)^\vee A_{n-2}^+(f)}} (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^-(f)}} (1) - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^-(f)}} (-1) \\
& = \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^+(f)}} (-1) - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^+(f)}} (-1) \\
& + \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^+(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^-(f)}} (-1) - \sum_{\substack{p \in C(\overline{n-1}) \cap A_n^-(f), \\ \nabla(\overline{n-2})(p) \vee A_{n-2}^-(f)}} (-1) \\
& = -\#A_n^+(f) + \#A_n^-(f)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\chi(\overline{A_{n-2}^+(f)}) - \chi(\overline{A_{n-2}^-(f)}) &= \sum_{p \in C(n-2^+)} (-1)^{\lambda^{n-2}(p)} - \sum_{p \in C(n-2^-)} (-1)^{\lambda^{n-2}(p)} \\
& - \#A_n^+(f) + \#A_n^-(f)
\end{aligned}$$

Como $\chi(\overline{A_n^+(f)}) - \chi(\overline{A_n^-(f)}) = \#A_n^+(f) - \#A_n^-(f)$, concluímos que, para n ímpar também temos

$$\sum_{k: \text{ ímpar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right] = \sum_{p \in C(1^+)} (-1)^{\lambda^1(p)} - \sum_{p \in C(1^-)} (-1)^{\lambda^1(p)}.$$

E como vimos em 3.15,

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{p \in A_1^+(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)} - \sum_{p \in A_1^-(f) \cap C} (-1)^{\lambda^1(p)} \\
&= \sum_{p \in C(1^+)} (-1)^{\lambda^1(p)} - \sum_{p \in C(1^-)} (-1)^{\lambda^1(p)}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Portanto,

$$\chi(M) = \sum_{k: \text{impar}} \left[\chi(\overline{A_k^+(f)}) - \chi(\overline{A_k^-(f)}) \right].$$

■

CAPÍTULO 4

Os n -campos de Morin: Definição

Nos dois próximos capítulos, vamos supor que M seja uma variedade Riemanniana.

Dada uma aplicação de Morin $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ , com $m \geq n$, as singularidades de $f = (f_1, \dots, f_n)$ são os pontos $x \in M$ tal que o posto da derivada df_x é igual a $n - 1$. Desta maneira, considerando os gradientes das funções coordenadas f_1, \dots, f_n , obtemos

$$(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x))$$

um n -campo de vetores sobre M de classe C^∞ cujas singularidades são dadas pelos pontos $x \in M$ tal que

$$\text{rank}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x)) = n - 1.$$

Pelo Lema 2.2.1 do Capítulo 2, sabemos que $\overline{A_k(f)}$ e $A_k(f)$ são variedades $(n - k)$ -dimensionais tais que $\overline{A_k(f)} = \cup_{i \geq k} A_i(f)$ e

$$\text{rank } d(f|_{\overline{A_k(f)}})_x = \begin{cases} n - k, & \text{se } x \in A_k(f); \\ n - k - 1, & \text{se } x \in \overline{A_{k+1}(f)}. \end{cases}$$

Isto é, a interseção de $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle$ com o espaço normal à $\overline{A_k(f)}$

no ponto x tem dimensão

$$\dim(\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_k(f)}) = \begin{cases} k-1, & \text{se } x \in A_k(f); \\ k, & \text{se } x \in \overline{A_{k+1}(f)}. \end{cases}$$

Em particular, se $x \in A_k(f)$, então

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_k(f)}.$$

Podemos notar ainda que se $x \in \overline{A_{k+1}(f)}$, então

$$\dim(\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k+1}(f)}) = \begin{cases} k, & \text{se } x \in A_{k+1}(f); \\ k+1, & \text{se } x \in \overline{A_{k+2}(f)}. \end{cases}$$

Assim, se $\{z_1(x), \dots, z_{n-k-1}(x)\}$ é base de um subespaço complementar a $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_k(f)}$ em $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle$, então

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k-1}(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k+1}(f)}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A_{k+1}(f); \\ 1, & \text{se } x \in \overline{A_{k+2}(f)}. \end{cases}$$

Inspirados pelas propriedades do n -campo gradiente $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ de uma aplicação de Morin $f = (f_1, \dots, f_n)$, queremos definir os conceitos de “singularidades A_k de Morin” e “ n -campos vetoriais de Morin” para o caso em que nosso n -campo (V_1, \dots, V_n) não seja necessariamente gradiente. Para isto, começaremos definindo $TM^{n,n-1}$ e o conceito de n -campos de coposto 1.

Sejam M uma variedade m -dimensional de classe C^∞ e $V = (V_1, \dots, V_n)$ um n -campo de vetores de classe C^∞ definido sobre M , com $m \geq n$:

$$\begin{aligned} V : M &\rightarrow TM^n \\ x &\mapsto (x, V_1(x), \dots, V_n(x)) \end{aligned}$$

em que $TM^n = \{(x, A_1, \dots, A_n) \mid x \in M; A_i \in T_x M, i = 1, \dots, n\}$ é o “ n -fibrado tangente” de M . Observe que TM^n é uma variedade de classe C^∞ e dimensão $m(n+1)$, pois localmente $TM^n \cong \mathcal{U} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ vezes}}$, para algum aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$.

Lema 4.0.1. *Seja $TM^{n,n-1} \subset TM^n$ definido por*

$$TM^{n,n-1} = \{(x, A_1, \dots, A_n) \in TM^n \mid \text{rank}(A_1, \dots, A_n) = n - 1\}.$$

Então $TM^{n,n-1}$ é uma subvariedade de TM^n de dimensão $n(m + 1) - 1$.

Demonstração. Denotaremos os pontos de TM^n por $(x, A) = (x, A_1, \dots, A_n)$ e por $A_i = (A_i^1, \dots, A_i^m)$ as coordenadas dos vetores A_i , para $i = 1, \dots, n$.

Seja $(\tilde{x}, \tilde{A}) \in TM^{n,n-1}$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$m(A) = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^{n-1} & A_2^{n-1} & \cdots & A_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

em uma vizinhança $\tilde{\mathcal{U}}$ de TM^n , com $(\tilde{x}, \tilde{A}) \in \tilde{\mathcal{U}}$. Então, localmente, $TM^{n,n-1}$ pode ser descrito como

$$TM^{n,n-1} = \{(x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid m_n = \dots = m_m = 0\}$$

em que $m_i := m_i(A)$ é o determinante

$$m_i(A) = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_{n-1}^1 & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_1^{n-1} & A_2^{n-1} & \cdots & A_{n-1}^{n-1} & A_n^{n-1} \\ A_1^i & A_2^i & \cdots & A_{n-1}^i & A_n^i \end{vmatrix}, \quad i = n, \dots, m.$$

Mostremos que $\text{rank}(\nabla m_n, \dots, \nabla m_m) = m - n + 1$ em $(TM^{n,n-1}) \cap \tilde{\mathcal{U}}$.

Por simplicidade de notação, consideremos $I = \{1, \dots, n\}$ e $I_i = \{1, \dots, n - 1, i\}$ para $i \in \{n, \dots, m\}$. Então,

$$\nabla m_i(A) = \sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) \nabla A_j^\ell, \quad (4.1)$$

em que $\text{cof}(A_j^\ell, m_i)$ é o cofator de A_j^ℓ na matriz

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_{n-1}^1 & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_1^{n-1} & A_2^{n-1} & \cdots & A_{n-1}^{n-1} & A_n^{n-1} \\ A_1^i & A_2^i & \cdots & A_{n-1}^i & A_n^i \end{bmatrix}$$

e

$$\nabla A_j^\ell = \left(\frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_1^1}, \dots, \frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_1^m}, \frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_2^1}, \dots, \frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_2^m}, \dots, \frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_n^1}, \dots, \frac{\partial A_j^\ell}{\partial A_n^m} \right)$$

é o vetor cuja coordenada $(j-1)m+\ell$ é igual a 1 e todas as outras coordenadas são nulas. Em particular, como $i \in \{n, \dots, m\}$,

$$\nabla A_n^i = (0, \dots, 0, \underbrace{0, \dots, 1, \dots, 0}_{m-n+1}) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ vezes}}$$

e ∇A_j^ℓ tem as $m-n+1$ últimas coordenadas nulas para todo $j \neq n$ ou $\ell \neq i$. Além disso, $\text{cof}(A_n^i, m_i) = m(A) \neq 0, \forall i = n, \dots, m$. Assim,

$$\frac{\partial(m_n, \dots, m_m)}{\partial(A_n^n, \dots, A_n^m)} = \begin{vmatrix} \text{cof}(A_n^n, m_n) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \text{cof}(A_n^m, m_m) \end{vmatrix}.$$

Isto é, para todo $(x, A) \in (TM^{n, n-1}) \cap \tilde{\mathcal{U}}$, temos

$$\frac{\partial(m_n, \dots, m_m)}{\partial(A_n^n, \dots, A_n^m)} = m(A)^{(m-n+1)} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.2)$$

Portanto,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla m_n \\ \vdots \\ \nabla m_m \end{bmatrix} = m - n + 1$$

em $(TM^{n, n-1}) \cap \tilde{\mathcal{U}}$, de onde concluímos que $\dim TM^{n, n-1} = n(m+1) - 1$. ■

Seja $G(V) = \{(x, V_1(x), \dots, V_n(x)) \mid x \in M\}$ o gráfico do n -campo V , definimos a seguir um n -campo de coposto 1.

Definição 4.0.1. Dizemos que o n -campo $V = (V_1, \dots, V_n)$ tem coposto 1 (escreveremos corank 1) se satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad G(V) \pitchfork TM^{n,n-1} \text{ em } TM^n;$$

$$(ii) \quad G(V) \cap TM^{n, \leq n-2} = \emptyset;$$

Em que $TM^{n, \leq n-2} = \{(x, A_1, \dots, A_n) \in TM^n \mid \text{rank}(A_1, \dots, A_n) \leq n-2\}$.

Lema 4.0.2. Se o n -campo $V = (V_1, \dots, V_n)$ tem coposto 1, então $\text{rank}(V_1(x), \dots, V_n(x))$ é igual a n ou $n-1$, para todo $x \in M$.

Demonstração. Segue da definição de um n -campo de coposto 1. ■

Definição 4.0.2. Definimos o conjunto singular, $\Sigma^1(V)$, do n -campo $V = (V_1, \dots, V_n)$ como o conjunto dos pontos nos quais o n -campo tem posto igual a $n-1$. Isto é,

$$\Sigma^1(V) = \{x \in M \mid \text{rank}(V_1(x), \dots, V_n(x)) = n-1\}.$$

Lema 4.0.3. Se V for um n -campo de coposto 1, então $\Sigma^1(V)$ é uma subvariedade de M de dimensão $n-1$.

Demonstração. Sejam $V = (V_1, \dots, V_n)$ um n -campo de coposto 1 e $p \in \Sigma^1(V)$, então $\text{rank}(V_1(p), \dots, V_n(p)) = n-1$. Escrevendo $V_i = (V_i^1, \dots, V_i^m)$, para $i = 1, \dots, n$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$, $p \in \mathcal{U}$. Deste modo, o conjunto $\Sigma^1(V)$ pode ser descrito localmente como $\Sigma^1(V) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathbf{M}_n = \dots = \mathbf{M}_m = 0\}$, em que

$\mathbf{M}_i := \mathbf{M}_i(x)$ é o determinante

$$\mathbf{M}_i(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) & V_n^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) & V_n^{n-1}(x) \\ V_1^i(x) & V_2^i(x) & \cdots & V_{n-1}^i(x) & V_n^i(x) \end{vmatrix},$$

para $i = n, \dots, m$. Mostremos que $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x)) = m - n + 1$, para todo $x \in \Sigma^1(V) \cap \mathcal{U}$.

Conforme o Lema 4.0.1, considere uma vizinhança $\tilde{\mathcal{U}}$ em TM^n contendo $(p, V(p))$, com $\pi_x(\tilde{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}$ para a projeção nas m primeiras coordenadas $\pi_x : (\mathbb{R}^m)^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, de modo que as variedades $TM^{n,n-1}$ e $G(V)$ possam ser escritas localmente como:

$$TM^{n,n-1} = \{(x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid m_n = \dots = m_m = 0\},$$

com $\text{rank}(\nabla m_n, \dots, \nabla m_m) = m - n + 1$ em $TM^{n,n-1} \cap \tilde{\mathcal{U}}$; e

$$\begin{aligned} G(V) &= \{(x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid V_j^\ell(x) = A_j^\ell; j = 1, \dots, n; \ell = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid g_{\ell j}(x, A) = 0; j = 1, \dots, n; \ell = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

com $\text{rank}(\nabla g_{11}, \dots, \nabla g_{m1}, \dots, \nabla g_{1n}, \dots, \nabla g_{mn}) = nm$ em $G(V) \cap \tilde{\mathcal{U}}$, em que as funções $g_{\ell j} : TM^n \rightarrow \mathbb{R}$ são dadas por $g_{\ell j}(x, A) = A_j^\ell - V_j^\ell(x)$.

Seja $x \in \Sigma^1(V) \cap \mathcal{U}$, então $G(V) \pitchfork TM^{n,n-1}$ em $(x, V(x)) \in \tilde{\mathcal{U}}$ e, neste ponto, $\text{rank}(\nabla m_n, \dots, \nabla m_m, \nabla g_{11}, \dots, \nabla g_{mn}) = m - n + 1 + nm$. Isto é, a

matriz abaixo tem posto máximo em $(x, V(x))$,

$$\begin{bmatrix} \nabla m_n \\ \vdots \\ \nabla m_m \\ \nabla g_{11} \\ \vdots \\ \nabla g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \vdots & \nabla_A m_n \\ & O_{(m-n+1) \times m} & \vdots & \vdots \\ & & \vdots & \nabla_A m_m \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ & -\nabla_x V_1^1 & \vdots & \\ & \vdots & \vdots & Id_{(nm)} \\ & -\nabla_x V_n^m & \vdots & \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

em que $O_{(m-n+1) \times m}$ representa a matriz nula de tamanho $(m-n+1) \times m$, $Id_{(nm)}$ a matriz identidade de tamanho nm e ∇_x e ∇_A denotam os gradientes com respeito a $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $A = (A_1^1, \dots, A_1^m, \dots, A_n^1, \dots, A_n^m)$ respectivamente.

Retomando a equação 4.1 no Lema 4.0.1, notamos que o gradiente considerado é o gradiente de m_i com respeito a A . Deste modo, podemos escrever

$$\nabla m_i(A) = \sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) e_{\ell j}, \quad (4.4)$$

para $I = \{1, \dots, n\}$, $I_i = \{1, \dots, n-1, i\}$ e $i = n, \dots, m$. Em que $e_{\ell j}$ denotando o vetor $e_{\ell j} = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \text{ vezes}}$ cujas coordenadas são todas nulas, exceto na posição $jm + \ell$, para $j \in I$ e $\ell \in I_i$.

Por outro lado,

$$\nabla \mathbf{M}_i(x) = \sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(V_j^\ell(x), \mathbf{M}_i(x)) \nabla_x V_j^\ell(x)$$

e como $(x, V(x)) \in G(V) \cap TM^{n, n-1}$, temos $V_j^\ell(x) = A_j^\ell$, de forma que

$$\nabla \mathbf{M}_i(x) = \sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) \nabla_x V_j^\ell(x). \quad (4.5)$$

Suponha que $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x)) < m - n + 1$. Então, existe $(\alpha_n, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$ tal que

$$\sum_{i=n}^m \alpha_i \nabla \mathbf{M}_i(x) = \vec{0}.$$

Logo,

$$\vec{0} = \sum_{i=n}^m \alpha_i \nabla \mathbf{M}_i(x) \stackrel{(4.5)}{=} \sum_{i=n}^m \alpha_i \left[\sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) \nabla_x V_j^\ell(x) \right]. \quad (4.6)$$

Seja $\nabla \tilde{V}_j^\ell(x) = (\nabla_x V_j^\ell(x), 0, \dots, 0) \in \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n+1 \text{ vezes}}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=n}^m \alpha_i \left[\sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) \nabla g_{\ell j} \right] &\stackrel{(4.3)}{=} \sum_{i=n}^m \alpha_i \left[\sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) (e_{\ell j} - \nabla \tilde{V}_j^\ell) \right] \\ &\stackrel{(4.6)}{=} \sum_{i=n}^m \alpha_i \left[\sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) e_{\ell j} \right] \\ &\stackrel{(4.4)}{=} \sum_{i=n}^m \alpha_i \nabla m_i \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=n}^m \alpha_i \left[\sum_{j \in I, \ell \in I_i} \text{cof}(A_j^\ell, m_i) \nabla g_{\ell j} \right] = \sum_{j \in I, \ell \in \{1, \dots, m\}} \beta_{\ell j} \nabla g_{\ell j} \quad (4.8)$$

em que

$$\beta_{\ell j} = \begin{cases} \sum_{i=n}^m \alpha_i \text{cof}(A_j^\ell, m_i), & j \in I, \ell = 1, \dots, n-1; \\ \alpha_\ell \text{cof}(A_j^\ell, m_\ell), & j \in I, \ell = n, \dots, m. \end{cases}$$

Como $(\alpha_n, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, das equações 4.7 e 4.8, obtemos

$$\sum_{j, \ell} \beta_{\ell j} \nabla g_{\ell j} - \sum_{i=n}^m \alpha_i \nabla m_i = \vec{0}$$

uma combinação linear com coeficientes não todos nulos das linhas da matriz 4.3. O que é uma contradição, já que $\text{rank}(\nabla m_n, \dots, \nabla m_m, \nabla g_{11}, \dots, \nabla g_{mn})$ é máximo. Portanto $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x)) = m - n + 1$ e $\Sigma^1(V)$ é uma variedade de codimensão $m - n + 1$ em M , isto é, $\dim(\Sigma^1(V)) = n - 1$. ■

Seja $V = (V_1, \dots, V_n) : M \rightarrow TM^n$ um n -campo de coposto 1 definido sobre uma variedade m -dimensional M . Definiremos a seguir os subconjuntos

$A_1(V)$, $A_k(V)$ e $\Sigma^k(V)$ de M , para $k = 2, \dots, n$. Esta definição será dada de forma indutiva a partir da definição do conjunto singular $\Sigma^1(V)$.

Notação. Denotaremos a variedade M por $\Sigma^0(V)$.

Vimos que $\Sigma^1(V) = \{x \in \Sigma^0(V) \mid \text{rank}(V_1(x), \dots, V_n(x)) = n - 1\}$ e $\dim(\Sigma^1(V)) = n - 1$. Em particular,

$$x \in \Sigma^1(V) \Rightarrow \dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^0(V)) = 0.$$

Suponhamos que $\Sigma^i(V)$ esteja definido para $i = 1, \dots, k - 1$ de modo que $\Sigma^i(V)$ seja uma subvariedade $(n - i)$ -dimensional de M , $\Sigma^i(V) \subset \Sigma^{i-1}(V)$ e

$$x \in \Sigma^i(V) \Rightarrow \dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{i-1}(V)) = i - 1,$$

definimos $\Sigma^k(V)$ da seguinte maneira:

Seja $(x, U) = (x, U_1, \dots, U_{n-k+1})$, consideremos primeiramente:

$$T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} = \{(x, U) \mid x \in \Sigma^{k-1}(V); U_1, \dots, U_{n-k+1} \in T_x M\}$$

e o subconjunto

$$N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} = \{(x, U) \in T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} \mid \text{rank}(U_1, \dots, U_{n-k+1}) = n - k + 1, \dim(\langle U_1, \dots, U_{n-k+1} \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1\}.$$

Lema 4.0.4. *O conjunto $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ é uma variedade de classe C^∞ e dimensão $m(n - k + 1) + (n - k + 1)$.*

Demonstração. Por hipótese de indução, $\Sigma^{k-1}(V)$ é uma subvariedade de dimensão $(n - k + 1)$. Então, localmente, $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} \cong \mathcal{U} \times (\mathbb{R}^m)^{n-k+1}$, para algum aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n-k+1}$. Portanto,

$$\dim(T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}) = m(n - k + 1) + (n - k + 1).$$

■

Lema 4.0.5. *O subconjunto $N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ é uma subvariedade de $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ de dimensão $m(n - k + 1) + (n - k)$.*

Demonstração. Por hipótese de indução, $\Sigma^{k-1}(V)$ é uma subvariedade de M de dimensão $(n - k + 1)$. Então existem, localmente, um aberto $\mathcal{U} \subset M$

e funções $F_1, \dots, F_{m-n+k-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\Sigma^{k-1}(V) = \{x \in \mathcal{U} \mid F_1(x) = \dots = F_{m-n+k-1}(x) = 0\}$$

e $\text{rank}(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x)) = m - n + k - 1, \forall x \in \Sigma^{k-1}(V) \cap \mathcal{U}$.

Seja $(\tilde{x}, \tilde{U}) \in N_{\Sigma^{k-1}}M^{n-k+1}$, então $\text{rank}(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-k+1}) = n - k + 1$ e

$$\dim(\langle \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-k+1} \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1.$$

Isto é, escrevendo $\tilde{U}_i = (\tilde{U}_i^1, \dots, \tilde{U}_i^m)$, $i = 1, \dots, n - k + 1$, podemos supor sem perda de generalidade que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_1}(\tilde{x}) & \tilde{U}_1^1 & \dots & \tilde{U}_{n-k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{m-1}}(\tilde{x}) & \dots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_{m-1}}(\tilde{x}) & \tilde{U}_1^{m-1} & \dots & \tilde{U}_{n-k}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

e consequentemente, que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_1}(x) & U_1^1 & \dots & U_{n-k}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{m-1}}(x) & \dots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_{m-1}}(x) & U_1^{m-1} & \dots & U_{n-k}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.9)$$

para todo $(x, U) \in (\Sigma^{k-1}(V) \cap \mathcal{U}) \times \mathcal{V}$, com $\mathcal{V} \subset (\mathbb{R}^m)^{n-k+1}$ aberto. Desta forma, podemos escrever $N_{\Sigma^{k-1}}M^{n-k+1}$ localmente, como

$$N_{\Sigma^{k-1}}M^{n-k+1} = \{(x, U) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mid F_1 = \dots = F_{m-n+k-1} = \Delta = 0\} \quad (4.10)$$

em que $\Delta(x, U) = \det(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), U_1, \dots, U_{n-k+1})$.

Mostremos que para todo $(x, U) \in N_{\Sigma^{k-1}}M^{n-k+1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$ temos

$$\text{rank}(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), \nabla \Delta(x, U)) = m - n + k.$$

Considere a matriz de ordem m ,

$$B(x, U) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x) & \dots & \nabla F_{m-n+k-1}(x) & U_1 & \dots & U_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

cujas colunas são dadas pelos vetores

$$\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), U_1, \dots, U_{n-k+1}.$$

Podemos escrever,

$$\Delta(x, U) = \sum_{i=1}^m U_{n-k+1}^i \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B)$$

de modo que,

$$\nabla \Delta(x, U) = \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B) \nabla U_{n-k+1}^i + U_{n-k+1}^i \nabla \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B).$$

Em particular,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial U_{n-k+1}^m}(x, U) = \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B) \frac{\partial U_{n-k+1}^i}{\partial U_{n-k+1}^m} + U_{n-k+1}^i \frac{\partial \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B)}{\partial U_{n-k+1}^m}$$

e como $\operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B)$ não depende da variável U_{n-k+1}^m ,

$$\frac{\partial \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^i, B)}{\partial U_{n-k+1}^m} = 0, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Assim,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial U_{n-k+1}^m}(x, U) = \operatorname{cof}(U_{n-k+1}^m, B) \stackrel{(4.9)}{\neq} 0,$$

o que implica que o gradiente de $\Delta(x, U)$ com respeito a U é não nulo, isto é, $\nabla_U \Delta(x, U) \neq \vec{0}$. Assim, a matriz

$$\begin{bmatrix} \nabla F_1(x) \\ \vdots \\ \nabla F_{m-n+k-1}(x) \\ \nabla \Delta(x, U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x F_1(x) & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \nabla_x F_{m-n+k-1}(x) & \vdots \\ \dots & \dots \\ \nabla_x \Delta(x, U) & \vdots \\ & \nabla_U \Delta(x, U) \end{bmatrix}$$

tem posto $m - n + k$, em que $O_{(m-n+k-1) \times (n-k+1)}$ representa uma matriz nula.

Logo,

$$\text{rank}(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), \nabla \Delta(x, U)) = m - n + k,$$

para todo $(x, U) \in N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V})$.

Portanto, $N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ é uma subvariedade de dimensão

$$m + m(n - k + 1) - (m - n + k) = m(n - k + 1) + (n - k).$$

■

Prosseguindo com a definição de $\Sigma^k(V)$ e $A_{k-1}(V)$: por hipótese de indução, para cada $x \in \Sigma^{k-1}(V)$,

$$\dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-2}(V)) = k - 2.$$

Então, podemos escolher $\{z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x)\}$ um $(n - k + 1)$ -referencial suave sobre \mathcal{U} que, quando restrito a $\Sigma^{k-1}(V)$, seja uma base suave para um subespaço vetorial complementar a

$$\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-2}(V) \quad (4.11)$$

em $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$. Seja

$$G(z) = \{(x, z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x)) \mid x \in \Sigma^{k-1}(V)\}$$

a restrição do gráfico de $(z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x))$ sobre $\Sigma^{k-1}(V)$, então $\dim(G(z)) = \dim(\Sigma^{k-1}(V)) = n - k + 1$.

Definição 4.0.3. Dizemos que o n -campo $V = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ satisfaz as condições “ I_k de interseção” se satisfizer:

$$(a) \ G(z) \pitchfork N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} \text{ em } T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1};$$

$$(b) \ G(z) \cap N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1, \geq 2} = \emptyset;$$

Em que $N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1, \geq 2} = \{(x, U) \in T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1} \mid \text{rank}(U_1, \dots, U_{n-k+1}) = n - k + 1, \dim(\langle U_1, \dots, U_{n-k+1} \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) \geq 2\}$.

Note que, se o n -campo $V = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ satisfaz as condições I_k (a) e (b), então $\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 0$ ou 1 .

Definição 4.0.4. A partir da construção anterior e supondo que o n -campo $V = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ satisfaz as condições I_k de interseção (a) e (b), dizemos que um ponto $x \in \Sigma^{k-1}(V)$ pertence a $A_{k-1}(V)$ se

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 0;$$

e dizemos que x pertence a $\Sigma^k(V)$ se $x \in \Sigma^{k-1}(V) \setminus A_{k-1}(V)$, isto é, se

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1.$$

Portanto,

$$A_{k-1}(V) = \{x \in \Sigma^{k-1}(V) \mid \dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 0\};$$

$$\Sigma^k(V) = \{x \in \Sigma^{k-1}(V) \mid \dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1\}.$$

Definição 4.0.5. Dizemos que $x \in M$ é uma singularidade de tipo A_k do n -campo V se $x \in A_k(V)$.

Lema 4.0.6. Se $x \in \Sigma^k(V)$, então

$$\dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = k - 1.$$

Demonstração. Por simplicidade de notação, escreveremos:

- $\langle V(x) \rangle = \langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$,
- $\langle z(x) \rangle = \langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle$.

Pela forma como o $(n - k + 1)$ -referencial $\{z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x)\}$ foi escolhido, para cada $x \in \Sigma^{k-1}(V)$ temos,

$$\langle V(x) \rangle = (\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-2}(V)) \oplus \langle z(x) \rangle .$$

Por hipótese de indução, sabemos que $\Sigma^{k-1}(V) \subset \Sigma^{k-2}(V)$, o que implica que $N_x \Sigma^{k-2}(V) \subset N_x \Sigma^{k-1}(V)$. Logo, $\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)$ é igual a

$$(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-2}(V)) \oplus (\langle z(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)).$$

Como $x \in \Sigma^k(V) \subset \Sigma^{k-1}(V)$, então $\dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-2}(V)) = k - 2$. Além disso, pela definição de $\Sigma^k(V)$, $\dim(\langle z(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1$. Portanto, $\dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = (k - 2) + 1 = k - 1$. ■

Observação 4.0.2. *Localmente, $G(z)$ pode ser descrito como:*

$$G(z) = \{(x, U_1, \dots, U_{n-k+1}) \in TM^{n-k+1} \mid F_1(x) = \dots = F_{m-n+k-1}(x) = 0; \\ z_i^j(x) - U_i^j = 0, i = 1, \dots, n - k + 1 \text{ e } j = 1, \dots, m\},$$

em que TM^{n-k+1} denota o “ $(n - k + 1)$ -fibrado tangente” da variedade M , $z_i(x) = (z_i^1(x), \dots, z_i^m(x))$ e $U_i = (U_i^1, \dots, U_i^m)$, para $i = 1, \dots, n - k + 1$.

Em particular, as equações locais de $G(z)$ são claramente independentes e $\dim G(z) = m(n - k + 1) + m - (m - n + k - 1 + m(n - k + 1)) = n - k + 1$.

Lema 4.0.7. *Pela Definição 4.0.4, $\Sigma^k(V)$ é uma subvariedade de M de dimensão $n - k$.*

Demonstração. De acordo com a Definição 4.0.4, $x \in \Sigma^k(V)$ se, e somente se, $x \in \Sigma^{k-1}(V)$ e $\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1$.

Por outro lado, vimos na demonstração do Lema 4.0.5 que, localmente, existem $\mathcal{U} \subset M$ aberto e funções $F_1, \dots, F_{m-n+k-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$\Sigma^{k-1}(V) = \{x \in \mathcal{U} \mid F_1(x) = \dots = F_{m-n+k-1}(x) = 0\} \quad (4.12)$$

e $\text{rank}(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x)) = m - n + k - 1, \forall x \in \Sigma^{k-1}(V) \cap \mathcal{U}$. Considerando $\Delta_k(x) = \det(z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x), \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x))$, mostremos primeiramente que, para todo $x \in \Sigma^{k-1}(V) \cap \mathcal{U}$,

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1 \Leftrightarrow \Delta_k(x) = 0. \quad (4.13)$$

Se $\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = 1$, então $\exists \vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $\vec{v} \in \langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap \langle \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x) \rangle$. Isto é, existem $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k+1}) \neq (0, \dots, 0)$ e $(\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (0, \dots, 0)$ de modo que

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \alpha_i z_i(x) = \sum_{j=1}^{m-n+k-1} \beta_j \nabla F_j(x)$$

e assim,

$$\sum_{i=1}^{n-k+1} \alpha_i z_i(x) - \sum_{j=1}^{m-n+k-1} \beta_j \nabla F_j(x) = \vec{0}$$

é uma soma com coeficientes não todos nulos. Portanto, $z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x), \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x)$ são linearmente dependentes e $\Delta_k(x) = 0$.

Por outro lado, se $\Delta_k(x) = 0$, então os vetores $z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x), \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x)$ são linearmente dependentes e portanto,

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) > 0.$$

Mas, por hipótese, o n -campo $V(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ satisfaz a condição de interseção $I_k(b)$, logo, $\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) < 2$ e portanto é igual a 1.

Assim, pela equação 4.12 e pela afirmação 4.13, podemos escrever $\Sigma^k(V)$, localmente, como

$$\Sigma^k(V) = \{x \in \mathcal{U} \mid F_1(x) = \dots = F_{m-n+k-1}(x) = \Delta_k(x) = 0\}.$$

Mostremos que $\text{rank}(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), \nabla \Delta_k(x)) = m-n+k$, para todo $x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U}$.

Primeiramente, vamos considerar os gradientes em TM^{n-k+1} das equações locais de $N_{\Sigma^{k-1}}M^{n-k+1}$ e $G(z)$ descritas, respectivamente, na equação (4.10) do Lema 4.0.5 e na Observação 4.0.2. Denotando por ∇_x o gradiente com respeito a $x = (x_1, \dots, x_m)$ e por ∇_U o gradiente com respeito a $U = (U_1^1, \dots, U_1^m, U_2^1, \dots, U_2^m, \dots, U_{n-k+1}^1, \dots, U_{n-k+1}^m)$, temos

$$\nabla(z_i^j(x) - U_i^j) = (\nabla_x z_i^j(x), -\nabla_U U_i^j), \quad (4.14)$$

para $i = 1, \dots, n-k+1$ e $j = 1, \dots, m$. Em que $\nabla_U U_i^j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ é o vetor cuja entrada $m(i-1) + j$ é igual a 1 e as restantes são todas nulas. Quanto a $\Delta(x, U) = \det(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x), U_1, \dots, U_{n-k+1})$, podemos escrever

$$\Delta(x, U) = \sum_I F_I(x) N_I(U),$$

para $I = \{i_1, \dots, i_{n-k+1}\} \subset \{1, \dots, m\}$, Em que

$$N_I(U) = \begin{vmatrix} U_1^{i_1} & \dots & U_{n-k+1}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1^{i_{n-k+1}} & \dots & U_{n-k+1}^{i_{n-k+1}} \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

é o menor obtido a partir da matriz

$$\begin{bmatrix} U_1^1 & \cdots & U_{n-k+1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1^m & \cdots & U_{n-k+1}^m \end{bmatrix},$$

escolhendo-se as linhas i_1, \dots, i_{n-k+1} . Além disso,

$$F_I(x) = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{k_1}}(x) & \cdots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_{k_1}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_{k_{m-n+k-1}}}(x) & \cdots & \frac{\partial F_{m-n+k-1}}{\partial x_{k_{m-n+k-1}}}(x) \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

é, a menos de sinal, o menor obtido a partir da matriz $(\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x))$, excluindo-se as linhas i_1, \dots, i_{n-k+1} , isto é, $\{k_1, \dots, k_{m-n+k-1}\} = \{1, \dots, m\} \setminus I$. Portanto,

$$\nabla \Delta(x, U) = \left(\sum_I N_I(U) \nabla_x F_I(x), \sum_I F_I(x) \nabla_U N_I(U) \right).$$

Como $G(z) \pitchfork N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ em $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$, para todo $(x, z(x))$ com $x \in \Sigma^{k-1}(V)$, consideramos a projeção de TM^{n-k+1} sobre $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$:

$$\begin{aligned} \pi_1 : T_{(x,U)}(TM^{n-k+1}) &\longrightarrow T_{(x,U)}(T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}) \\ (v, U_1, \dots, U_{n-k+1}) &\longmapsto (\pi(v), U_1, \dots, U_{n-k+1}) \end{aligned}$$

em que π é a projeção ortogonal de $T_x M$ sobre $T_x \Sigma^{k-1}(V)$. Deste modo, por 4.14,

$$\pi_1(\nabla(z_i^j(x) - U_i^j)) = (\pi(\nabla_x z_i^j(x)), -\nabla_U U_i^j),$$

para $i = 1, \dots, n - k + 1$ e $j = 1, \dots, m$. Além disso, projetando $\nabla \Delta(x, U)$, temos

$$\pi_1(\nabla \Delta(x, U)) = \left(\pi \left(\sum_I N_I(U) \nabla_x F_I(x) \right), \sum_I F_I(x) \nabla_U N_I(U) \right).$$

E pela transversalidade, $G(z) \pitchfork N_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$ em $T_{\Sigma^{k-1}} M^{n-k+1}$, concluímos

que a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc} \pi(\nabla_x z_1^1(x)) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ \pi(\nabla_x z_1^m(x)) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & -Id_{m(n-k+1)} \\ \pi(\nabla_x z_{n-k+1}^1(x)) & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ \pi(\nabla_x z_{n-k+1}^m(x)) & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots \\ \pi\left(\sum_I N_I(U)\nabla_x F_I(x)\right) & \vdots & \sum_I F_I(x)\nabla_U N_I(U) \end{array} \right] \quad (4.17)$$

tem posto máximo para todo $x \in \Sigma^{k-1}(V)$. Pela expressão de $N_I(U)$ na equação 4.15, temos

$$\nabla_U N_I(U) = \sum_{i,j} \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j,$$

com $i = 1, \dots, n - k + 1$, $j \in I$ e $\text{cof}(U_i^j)$ o cofator de U_i^j na matriz

$$\begin{bmatrix} U_1^{i_1} & \dots & U_{n-k+1}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_1^{i_{n-k+1}} & \dots & U_{n-k+1}^{i_{n-k+1}} \end{bmatrix}.$$

Assim, para $i = 1, \dots, n - k + 1$ e $j = 1, \dots, m$, podemos escrever

$$\sum_I F_I(x) \nabla_U N_I(U) = \sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) \nabla U_i^j, \quad (4.18)$$

em que

$$\beta_i^j(x, U) = \left(\sum_{j \in I} F_I(x) \right) \text{cof}(U_i^j).$$

$$\begin{aligned}
\text{Pois, } \sum_I F_I(x) \nabla_U N_I(U) &= \sum_I F_I(x) \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j \in I} \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j \right) \text{ e} \\
\sum_I F_I(x) \left(\sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j \in I} \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \left[F_{I_1}(x) \left(\sum_{j \in I_1} \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j \right) + \dots + F_{I_d}(x) \left(\sum_{j \in I_d} \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \left[\left(\sum_{I:1 \in I} F_I(x) \right) \text{cof}(U_i^1) \nabla U_i^1 + \dots + \left(\sum_{I:m \in I} F_I(x) \right) \text{cof}(U_i^m) \nabla U_i^m \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n-k+1} \left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{I:j \in I} F_I(x) \right) \text{cof}(U_i^j) \nabla U_i^j \right].
\end{aligned}$$

Denote as linhas da matriz 4.17 por $L_i^j = (\pi(\nabla_x z_i^j(x)), -\nabla_U U_i^j)$, para $i = 1, \dots, n-k+1$ e $j = 1, \dots, m$ e por L_Δ a última linha desta mesma matriz. Substituindo a linha L_Δ por

$$L_\Delta + \sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) L_i^j,$$

para $i = 1, \dots, n-k+1$ e $j = 1, \dots, m$, obtemos uma nova matriz de posto máximo

$$\left[\begin{array}{ccc}
\pi(\nabla_x z_1^1(x)) & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \\
\pi(\nabla_x z_1^m(x)) & \vdots & \\
\vdots & \vdots & -Id_{m(n-k+1)} \\
\pi(\nabla_x z_{n-k+1}^1(x)) & \vdots & \\
\vdots & \vdots & \\
\pi(\nabla_x z_{n-k+1}^m(x)) & \vdots & \\
\cdots & \vdots & \cdots \\
L'_\Delta & \vdots & L''_\Delta
\end{array} \right] \quad (4.19)$$

em que

$$L''_{\Delta} = \sum_I F_I(x) \nabla_U N_I(U) + \sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) (-\nabla U_i^j) \stackrel{(4.18)}{=} \vec{0}$$

e

$$\begin{aligned} L'_{\Delta} &= \pi \left(\sum_I N_I(U) \nabla_x F_I(x) \right) + \sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) \pi(\nabla_x z_i^j(x)) \\ &= \pi \left(\sum_I N_I(U) \nabla_x F_I(x) + \sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) \nabla_x z_i^j(x) \right). \end{aligned}$$

Como, para $x \in \Sigma^k(V)$ temos $z_i^j(x) = U_i^j$, por 4.18 segue que

$$\sum_{i,j} \beta_i^j(x, U) \nabla_x z_i^j(x) = \sum_{i,j} \beta_i^j(x, z(x)) \nabla_x z_i^j(x) = \sum_I F_I(x) \nabla_x N_I(z(x)).$$

Logo, se $x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U}$, então

$$L'_{\Delta} = \pi \left(\sum_I N_I(z(x)) \nabla_x F_I(x) + \sum_I F_I(x) \nabla_x N_I(z(x)) \right) = \pi(\nabla \Delta_k(x))$$

e a matriz 4.19, que tem posto máximo, é igual a

$$\begin{bmatrix} \pi(\nabla_x z_1^1(x)) & \vdots & \\ & \vdots & \\ \pi(\nabla_x z_1^m(x)) & \vdots & \\ & \vdots & -Id_{m(n-k+1)} \\ \pi(\nabla_x z_{n-k+1}^1(x)) & \vdots & \\ & \vdots & \\ \pi(\nabla_x z_{n-k+1}^m(x)) & \vdots & \\ \dots & \vdots & \dots \\ \pi(\nabla \Delta_k(x)) & \vdots & \vec{0} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\pi(\nabla \Delta_k(x)) \neq \vec{0}$. Isto é, a projeção ortogonal de $\nabla \Delta_k(x)$ sobre

$T_x \Sigma^{k-1}(V)$ é não nula. Assim, para todo $x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U}$,

$$\nabla \Delta_k(x) \notin \langle \nabla F_1(x), \dots, \nabla F_{m-n+k-1}(x) \rangle.$$

Portanto, $\dim(\Sigma^k(V)) = m - (m - n + k) = n - k$. ■

Pela forma como definimos os conjuntos singulares $\Sigma^{k+1}(V)$ e $A_k(V)$, devemos considerar uma base $\{z_1(x), \dots, z_{n-k}(x)\}$ de um subespaço vetorial complementar a $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_n \Sigma^{k-1}(V)$ em $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$ (vide equação 4.11). Mostraremos a seguir que as definições de $\Sigma^{k+1}(V)$ e $A_k(V)$ são independentes da escolha destas bases. Começaremos provando dois lemas técnicos.

Lema 4.0.8. *Sejam $f_i : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, s$ funções suaves definidas em um aberto de \mathbb{R}^ℓ . Seja $M \subset \mathbb{R}^\ell$ uma variedade dada localmente por $M = \{x \in \mathcal{V} | f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}$, com $\text{rank}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x)) = s, \forall x \in M \cap \mathcal{V}$.*

Se $g, h : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves tais que $g|_{M \cap \mathcal{V}} = h|_{M \cap \mathcal{V}}$, então para todo $x \in M \cap \mathcal{V}$,

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla g(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla h(x) \rangle.$$

Demonstração. Se $g|_{M \cap \mathcal{V}} = h|_{M \cap \mathcal{V}}$, então $g - h \equiv 0$ sobre $M \cap \mathcal{V}$. Isto é,

$$\nabla(g - h)(x) \in N_x M \Rightarrow \nabla g(x) = \nabla h(x) + \sum_{i=1}^s \lambda_i \nabla f_i(x).$$

Logo $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla g(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla h(x) \rangle$. ■

Lema 4.0.9. *Sejam $f_i : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, s$ funções suaves definidas em um aberto de \mathbb{R}^ℓ . Seja $M \subset \mathbb{R}^\ell$ uma variedade dada localmente por $M = \{x \in \mathcal{V} | f_1(x) = \dots = f_s(x) = 0\}$, com $\text{rank}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x)) = s, \forall x \in M \cap \mathcal{V}$.*

Se $g, h : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves tais que $g(x) = \lambda(x)h(x), \forall x \in M \cap \mathcal{V}$, para alguma função suave $\lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, então:

(i) *Se $\lambda(x) \neq 0$ e $x \in M$, então $g(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.*

(ii) *Se $\lambda(x) \neq 0, x \in M$ e $h(x) = 0$, então*

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla g(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla h(x) \rangle.$$

Demonstração. A afirmação (i) é claramente verdadeira. Mostremos (ii).

Seja $\tilde{\lambda} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, tal que $\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x)$, $\forall x \in M \cap \mathcal{V}$ e seja $\tilde{g} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{g}(x) = \tilde{\lambda}(x)h(x)$. Assim, como $\tilde{g} \equiv g$ sobre $M \cap \mathcal{V}$, pelo Lema 4.0.8, temos

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla \tilde{g}(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla g(x) \rangle,$$

para todo $x \in M \cap \mathcal{V}$. Como $\nabla \tilde{g}(x) = \tilde{\lambda}(x)\nabla h(x) + h(x)\nabla \tilde{\lambda}(x)$, se $x \in M \cap \mathcal{V}$, $\tilde{\lambda}(x) \neq 0$ e $h(x) = 0$, então $\nabla \tilde{g}(x) = \nabla \tilde{\lambda}\nabla h(x)$. Logo,

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla \tilde{g}(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla h(x) \rangle.$$

Portanto,

$$\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla g(x) \rangle = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_s(x), \nabla h(x) \rangle.$$

■

Lema 4.0.10. *As definições de $\Sigma^{k+1}(V)$ e $A_k(V)$ são independentes da escolha das bases, $k \geq 1$.*

Demonstração. Assim como a definição de $\Sigma^{k+1}(V)$ e $A_k(V)$, $k \geq 1$, a demonstração deste resultado será feita por indução.

Notemos primeiramente que, conforme o Lema 4.0.3, localmente

$$\Sigma^1(V) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = 0\},$$

em que $\mathbf{M}_i(x)$ depende apenas do n -campo V no ponto x . Isto é, a definição de $\Sigma^1(V)$ não depende da escolha de nenhuma base.

Suponha que a definição de $\Sigma^i(V)$ independe da escolha das bases para todo $i \leq k$. Localmente, temos

$$\Sigma^k(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_k(x) = 0\},$$

$$\Sigma^{k+1}(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{k+1}(x) = 0\},$$

com

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k) = m - n + k,$$

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{k+1}) = m - n + k + 1.$$

Lembre-se que

$$\Delta_{k+1}(x) = \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, U_1, \dots, U_{n-k})(x),$$

em que, para cada $x \in \Sigma^k(V)$, $\{U_1(x), \dots, U_{n-k}(x)\}$ é base de um subespaço complementar a $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)$ em $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$.

Para cada $x \in \Sigma^k(V)$, consideremos $\{\tilde{U}_1(x), \dots, \tilde{U}_{n-k}(x)\}$ uma outra base de um subespaço vetorial complementar a $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)$ em $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$. Então, no ponto x temos

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle = (\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) \oplus \langle \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-k} \rangle$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_1(x) = \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell 1}(x) U_\ell(x) + v_1(x) \\ \tilde{U}_2(x) = \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell 2}(x) U_\ell(x) + v_2(x) \\ \vdots \\ \tilde{U}_{n-k}(x) = \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell(n-k)}(x) U_\ell(x) + v_{n-k}(x) \end{array} \right.$$

em que $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}$ e $v_j(x) \in \langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)$, para todo $j = 1, \dots, n-k$.

Mostremos que para cada $x \in \Sigma^k(V)$

$$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1(n-k)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(n-k)1}(x) & a_{(n-k)2}(x) & \cdots & a_{(n-k)(n-k)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Suponha que a afirmação seja falsa, isto é, que $\det(A(x)) = 0$. Então as colunas da matriz $A(x)$ são linearmente dependentes. Ou seja, podemos supor, sem perda de generalidade, que a primeira coluna de $A(x)$ pode ser escrita como combinação linear das outras colunas:

$$(a_{11}(x), \dots, a_{(n-k)1}(x)) = \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s (a_{1s}(x), \dots, a_{(n-k)s}(x)),$$

$\lambda_s \in \mathbb{R}$, $s = 2, \dots, n-k$. Logo, suprimindo x da notação, temos

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1 = \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell 1} U_\ell + v_1 &\Rightarrow \tilde{U}_1 = \sum_{\ell=1}^{n-k} \left(\sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s a_{\ell s} \right) U_\ell + v_1 \\ &\Rightarrow \tilde{U}_1 = \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s \left(\sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell s} U_\ell \right) + v_1\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1 - \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s \tilde{U}_s &= \left[\sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s \left(\sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell s} U_\ell \right) + v_1 \right] - \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s \left(\sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell s} U_\ell + v_s \right) \\ &= v_1 - \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s v_s.\end{aligned}$$

Mas isto significa que

$$\tilde{U}_1 - \sum_{s=2}^{n-k} \lambda_s \tilde{U}_s \in (\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) \cap \langle \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-k} \rangle = \vec{0},$$

ou seja, que $\tilde{U}_1(x), \dots, \tilde{U}_{n-k}(x)$ são linearmente dependentes. Mas isto é uma contradição, já que por hipótese, $\text{rank}(\tilde{U}_1(x), \dots, \tilde{U}_{n-k}(x)) = n-k$, para todo x em $\Sigma^k(V)$. Portanto, $\det(A(x)) \neq 0$.

Assim, para cada $x \in \Sigma^k(V)$, temos $\det(A^t(x)) = \det(A(x)) \neq 0$ e, suprimindo x da notação,

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_{k+1} &= \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, \tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{n-k}) \\ &= \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell 1} U_\ell, \dots, \sum_{\ell=1}^{n-k} a_{\ell(n-k)} U_\ell) \\ &= \det(A^t) \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, U_1, \dots, U_{n-k}) \\ &= \det(A^t) \Delta_{k+1}.\end{aligned}$$

Então, pelo item (i) do Lema 4.0.9, $\tilde{\Delta}_{k+1} = 0 \Leftrightarrow \Delta_{k+1} = 0$ em x . Mas, se $x \in \Sigma^{k+1}(V)$, então $\Delta_{k+1}(x) = 0$. Logo, $\tilde{\Delta}_{k+1}(x) = 0$ e pelo item (ii) do

Lema 4.0.9, temos

$$\begin{aligned} & \langle \nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_k(x), \nabla \Delta_{k+1}(x) \rangle \\ & = \langle \nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_k(x), \nabla \tilde{\Delta}_{k+1}(x) \rangle. \end{aligned}$$

E conseqüentemente,

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_k(x), \nabla \tilde{\Delta}_{k+1}(x)) = m - n + k + 1.$$

Portanto, a definição de $\Sigma^{k+1}(V)$ independe da escolha da base $\{U_1, \dots, U_{n-k}\}$. E como

$$A_k(V) = \Sigma^k(V) \setminus \Sigma^{k+1}(V),$$

segue que $A_k(V)$ também independe da escolha da base. ■

Observação 4.0.3. *Note que, pelo modo como definimos $\Sigma^k(V)$ e $A_k(V)$, $k \geq 1$, obtemos*

$$\begin{aligned} \Sigma^k(V) &= A_k(V) \cup \Sigma^{k+1}(V); \\ \Sigma^k(V) &= \cup_{i \geq k} A_i(V); \end{aligned}$$

de modo que

$$A_k(V) = \Sigma^k(V) \setminus \Sigma^{k+1}(V).$$

Logo, os conjuntos singulares $A_k(V)$ são subvariedades $(n - k)$ -dimensionais de $\Sigma^k(V)$ tais que $\overline{A_k(V)} = \Sigma^k(V)$.

Finalmente, baseados na construção anterior, definimos:

Definição 4.0.6. *Um n -campo de vetores $V = (V_1, \dots, V_n)$ é um n -campo de Morin se V tem coposto 1 e satisfaz as condições I_k (a) e (b) de interseção para $k = 2, \dots, n$.*

Observação 4.0.4. *Pela definição anterior, se $V = (V_1, \dots, V_n)$ é um n -campo de Morin, então V tem apenas singularidades de tipo $A_k(V)$ para $k = 1, \dots, n$.*

Observação 4.0.5. *Ao longo deste capítulo, apresentamos vários lemas que possuem extensas demonstrações. Muitas destas demonstrações poderiam ser exibidas de uma forma mais rápida e simples, utilizando-se as propriedades de transversalidade envolvidas nestes resultados e aplicando-se o Teorema 1.1.4 apresentado na Seção 1.1. Queremos destacar, porém, que, embora*

mais técnicas, as demonstrações tais como apresentamos são essenciais para os próximos resultados que apresentaremos no Capítulo 5, uma vez que elas exibem explicitamente as equações locais que determinam as subvariedades $\Sigma^k(V)$ e $A_k(V)$, $k = 1, \dots, n$.

Exemplo 4.0.6. *Seja $f = (f_1, \dots, f_n) : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de Morin de classe C^∞ , com $m \geq n$. O n -campo de vetores $\nabla f = (\nabla f_1, \dots, \nabla f_n)$ é um n -campo de Morin.*

Mostremos primeiramente que ∇f tem coposto 1. Seja

$$G(\nabla f) = \{(x, \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x)) \mid x \in M\}$$

o gráfico do n -campo gradiente ∇f . Como f é uma aplicação de Morin, então $\text{rank}(\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x))$ é igual a n se x for um ponto regular de f e igual a $n - 1$ se x for um ponto singular de f . Assim,

$$G(\nabla f) \cap TM^{n, \leq n-2} = \emptyset.$$

Além disso, se $x \in M$ for um ponto regular de f , então $G(\nabla f) \cap TM^{n, n-1} = \emptyset$, de modo que $G(\nabla f) \pitchfork TM^{n, n-1}$ no ponto $(x, \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x)) \in TM^n$.

Agora, se $p \in M$ é um ponto singular de f , então

$$(p, \nabla f(p)) = (x, \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_n(p)) \in G(\nabla f) \cap TM^{n, n-1}$$

e conforme a demonstração do Lema 4.0.1, escrevemos $TM^{n, n-1}$ localmente como

$$TM^{n, n-1} = \left\{ (x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid m_n = \dots = m_m = 0 \right\},$$

para uma vizinhança $\tilde{\mathcal{U}} \subset TM^n$ tal que $(p, \nabla f(p)) \in \tilde{\mathcal{U}}$. Além disso, pela equação 4.2, para todo $(x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \cap TM^{n, n-1}$

$$\frac{\partial(m_n, \dots, m_m)}{\partial(A_n^n, \dots, A_n^m)} = C \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.20)$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula e para cada $A = (A_1, \dots, A_n)$ em TM^n , denotamos $A_i = (A_i^1, \dots, A_i^m)$. Também nesta vizinhança, escrevemos

$$G(\nabla f) = \left\{ (x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid \nabla f_i(x) = A_i; \ i = 1, \dots, n \right\}$$

isto é,

$$G(\nabla f) = \left\{ (x, A) \in \tilde{\mathcal{U}} \mid \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - A_i^j = 0; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m \right\}.$$

Seja $g_i^j(x, A) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - A_i^j$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$; então

$$\nabla g_i^j = \left(\nabla_x \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), -\nabla_A(A_i^j) \right).$$

Em particular, se p é uma singularidade de tipo A_k da aplicação f , então, localmente, f é da forma

$$\begin{aligned} y_i \circ f &= x_i, i \leq n-1; \\ y_n \circ f &= x_n^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_n^{k-i} + x_{n+1}^2 + \dots + x_{n+\lambda-1}^2 - x_{n+\lambda}^2 - \dots - x_m^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\partial^{(2)} f_i}{\partial x_r \partial x_j}(p) = \begin{cases} 1, & i = j = n; r = k-1; k \geq 2; \\ 2, & i = j = r = n; k = 1; \\ \pm 2, & i = n; j, r = n+1, \dots, m; j = r; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.21)$$

E a matriz cujas linhas são dadas pelos gradientes

$$\nabla g_1^1(p, \nabla f(p)), \dots, \nabla g_1^m(p, \nabla f(p)), \nabla g_2^1(p, \nabla f(p)), \dots, \nabla g_n^m(p, \nabla f(p))$$

é dada por

$$\left[\begin{array}{cccc} & \vdots & & \vdots \\ & B & \vdots & -Id_{(n-1)(m+1)} & \vdots & O_{(n-1)(m+1) \times (m-n+1)} \\ & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D & \vdots & E & \vdots & O_{(m-n+1) \times (n-1)(m+1)} & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & & -Id_{(m-n+1)} \end{array} \right] \quad (4.22)$$

Em que B é a matriz com $(n-1)(m+1)$ linhas e m colunas:

$$B_{(n-1)(m+1) \times m} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^{(2)} f_1}{\partial x_1^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_1}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_1 \partial x_{n-1}}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_m \partial x_{n-1}}(p) \end{array} \right];$$

D é a matriz com $(m-n+1)$ linhas e $(n-1)$ colunas:

$$D_{(m-n+1) \times (n-1)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_1 \partial x_n}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_{n-1} \partial x_m}(p) \end{array} \right];$$

E por fim, E é a matriz de ordem $(m-n+1)$:

$$E_{(m-n+1)} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_n^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_m \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_n \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_m^2}(p) \end{array} \right];$$

Por 4.21, se $k = 1$, as matrizes B e D são nulas e

$$E = \begin{bmatrix} 2Id_{(\lambda)} & \vdots & O_{(\lambda) \times (m-n\lambda+1)} \\ \dots & \vdots & \dots \\ O_{(m-n-\lambda+1) \times (\lambda)} & \vdots & -2Id_{(m-n-\lambda+1)} \end{bmatrix}.$$

Se $k \geq 2$, as matrizes B e D tem todos elementos nulos, exceto, respectivamente, pelos elementos $\frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_n \partial x_{k-1}}(p)$ e $\frac{\partial^{(2)} f_n}{\partial x_{k-1} \partial x_n}(p)$ que são iguais a 1. Além disso,

$$E = \begin{bmatrix} O_{1 \times 1} & \vdots & O_{1 \times (\lambda-1)} & \vdots & O_{1 \times (m-n-\lambda+1)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ O_{(\lambda-1) \times 1} & \vdots & 2Id_{(\lambda-1)} & \vdots & O_{(\lambda-1) \times (m-n-\lambda+1)} \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ O_{(m-n-\lambda+1) \times 1} & \vdots & O_{(m-n-\lambda+1) \times (\lambda-1)} & \vdots & -2Id_{(m-n-\lambda+1)} \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz cujas linhas são dadas pelos gradientes em $(p, \nabla f(p))$ das funções $g_i^j(x, A)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ e $m_r(A)$, $r = n, \dots, m$, que definem $G(\nabla f)$ e $TM^{n, n-1}$ localmente, é igual a

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B & \vdots & -Id_{(n-1)(m+1)} & \vdots & O_{(n-1)(m+1) \times (m-n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ D & \vdots & E & \vdots & -Id_{(m-n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ O & \vdots & O & \vdots & CId_{(m-n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é não nula, por 4.20. Pela maneira como as matrizes B , D e E são dadas, concluímos que a matriz 4.23 tem posto máximo. Portanto,

$G(\nabla f) \pitchfork TM^{n,n-1}$ em $(p, \nabla f(p)) \in TM^n$. Isto é, o n -campo $\nabla f(x)$ é de coposto 1.

Mostremos agora que $\nabla f(x)$ satisfaz as condições “ I_k (a) e (b)” de interseção, para $k = 2, \dots, n$.

Conforme observamos no início deste capítulo, se $x \in \overline{A_{k-1}(f)}$, então $\dim(\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k-2}(f)}) = k - 2$ e

$$\dim(\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k-1}(f)}) = \begin{cases} k - 2, & \text{se } x \in A_{k-1}(f); \\ k - 1, & \text{se } x \in \overline{A_k(f)}. \end{cases}$$

Assim, se $\{z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x)\}$ é base de um subespaço complementar a $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k-2}(f)}$ em $\langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x) \rangle$ para cada $x \in A_{k-1}(f)$, então

$$\dim(\langle z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x) \rangle \cap N_x \overline{A_{k-1}(f)}) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in A_{k-1}(f); \\ 1, & \text{se } x \in \overline{A_k(f)}. \end{cases}$$

Logo, o gráfico $G(z) = \{(x, z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x)) \mid x \in \overline{A_{k-1}(f)}\}$ é tal que

$$G(z) \cap N_{\overline{A_{k-1}(f)}} M^{n-k+1, \geq 2} = \emptyset \quad (\text{condição } I_k \text{ (b)}).$$

Se $x \in A_{k-1}(f)$, então $(x, z(x)) = (x, z_1(x), \dots, z_{n-k+1}(x))$ não pertence a $N_{\overline{A_{k-1}(f)}} M^{n-k+1}$, logo

$$G(z) \pitchfork N_{\overline{A_{k-1}(f)}} M^{n-k+1}, \text{ em } (x, z(x)).$$

Se $x \in \overline{A_k(f)}$, então $(x, z(x)) \in G(z) \cap N_{\overline{A_{k-1}(f)}} M^{n-k+1}$. Para concluirmos a condição “ I_k ” (a), resta mostrarmos que esta interseção é transversal. Mas isto pode ser verificado através do cálculo dos gradientes das equações locais de $G(z)$ e $N_{\overline{A_{k-1}(f)}} M^{n-k+1}$ de modo análogo ao que mostramos para $\nabla f(x)$ de coposto 1.

Exemplo 4.0.7. *Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional, compacta e paralelizável. Então, existe um m -referencial $V = (V_1, \dots, V_m)$ definido sobre M tal que, para cada $x \in M$, $\{V_1(x), \dots, V_m(x)\}$ é uma base para $T_x M$. Seja $p \in \{1, \dots, m\}$, então $\text{rank}(V_{i_1}(x), \dots, V_{i_p}(x)) = p$, para todo $x \in M$. Isto é, $(V_{i_1}, \dots, V_{i_p})$ é um p -campo de Morin, pois não possui singularidades.*

Por outro lado, seja $f = (f_1, \dots, f_p) : M \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação de Morin sobre M e seja $(\nabla f_1, \dots, \nabla f_p)$ o p -campo gradiente associado à f . Como M

é compacta, existe $x \in M$ tal que $\nabla f_p(x) = \vec{0}$.

Desta forma, o p -campo de Morin $(V_{i_1}, \dots, V_{i_p})$ não pode ser descrito globalmente como o gradiente de uma aplicação de Morin $f : M \rightarrow \mathbb{R}^p$. Isto é, nem todo p -campo de Morin é um campo gradiente.

Sobre a Topologia dos n -campos de Morin

Sejam $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ e $V = (V_1, \dots, V_n)$ um n -campo de Morin sobre a variedade m -dimensional M . Estudaremos a seguir algumas propriedades do campo de vetores $z(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(x)$ definido sobre M e de suas restrições aos conjuntos singulares de V definidos no capítulo anterior.

5.1 Zeros de um campo vetorial genérico $z(x)$ associado a um n -campo de Morin

Lema 5.1.1. *Se p for um zero do campo z , isto é, $z(p) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(p) = \vec{0}$, então $p \in \Sigma^1(V)$ e $z|_{\Sigma^1(V)} = \vec{0}$ em p .*

Demonstração. Suponha que $z(p) = \vec{0}$. Como $a = (a_1, \dots, a_n) \neq \vec{0}$, então $\text{rank}(V_1(p), \dots, V_n(p)) \leq n - 1$. Mas V é um n -campo de coposto 1, logo $\text{rank}(V_1(p), \dots, V_n(p)) = n - 1$. Portanto, $p \in \Sigma^1(V)$.

Se $z(p) = \vec{0}$, então $z(p) \in N_p \Sigma^1(V)$. Portanto, a projeção ortogonal de $z(p)$ sobre $\Sigma^1(V)$ é nula, ou seja, $z|_{\Sigma^1(V)} = \vec{0}$ em p . ■

Lema 5.1.2. *Se $p \in A_{k+1}(V)$, então $z|_{\Sigma^{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p se, e somente se, $z|_{\Sigma^k(V)} = \vec{0}$ em p , para $k = 0, \dots, n - 2$.*

Demonstração. Seja $p \in A_{k+1}(V)$. Suponha que

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

em uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$, com $p \in \mathcal{U}$ de maneira que, localmente, escrevemos:

$$\begin{aligned} \Sigma^k(V) &= \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_k(x) = 0\}; \\ \Sigma^{k+1}(V) &= \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{k+1}(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Se $z|_{\Sigma^k(V)} = \vec{0}$ em p , então $z(p) \in N_p \Sigma^k(V)$, isto é,

$$z(p) \in \langle \nabla \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(p), \nabla \Delta_2(p), \dots, \nabla \Delta_k(p) \rangle.$$

Em particular,

$$z(p) \in \langle \nabla \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(p), \nabla \Delta_2(p), \dots, \nabla \Delta_k(p), \nabla \Delta_{k+1}(p) \rangle.$$

Isto é, $z(p) \in N_p \Sigma^{k+1}(V)$, portanto $z|_{\Sigma^{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p .

Por outro lado, se $z|_{\Sigma^{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p , então $z(p) \in N_p \Sigma^{k+1}(V) \cap \langle V(p) \rangle$, em que $\langle V(p) \rangle = \langle V_1(p), \dots, V_n(p) \rangle$, por simplicidade de notação.

Como $p \in A_{k+1}(V)$, então $p \in \Sigma_{k+1}(V) \setminus \Sigma_{k+2}(V)$, logo

$$\begin{cases} \dim(\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^k(V)) = k; \\ \dim(\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)) < k + 1. \end{cases}$$

Como $\dim(N_p \Sigma^k(V)) = m - n + k$, $\dim(N_p \Sigma^{k+1}(V)) = m - n + k + 1$ e $N_p \Sigma^k(V) \subset N_p \Sigma^{k+1}(V)$, então

$$\dim(\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)) = \dim(\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^k(V)) = k.$$

Assim, $\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^k(V) = \langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)$. Portanto, $z(p) \in N_p \Sigma^k(V)$, isto é, $z|_{\Sigma^k(V)} = \vec{0}$ em p . ■

Lema 5.1.3. Se $p \in A_n(V)$, então $z|_{\Sigma_{n-1}(V)} = \vec{0}$ em p .

Demonstração. Analogamente ao lema anterior, podemos supor que, localmente, $\mathbf{M}(x) \neq 0$, de modo que

$$\begin{aligned}\Sigma^n(V) &= \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_n(x) = 0\}; \\ N_x \Sigma^n(V) &= \langle \nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_n(x) \rangle.\end{aligned}$$

Como $A_n(V) = \Sigma^n(V)$, temos

$$\begin{aligned}p \in A_n(V) &\Rightarrow \dim(\langle V(p) \rangle \cap N_p \Sigma^{n-1}(V)) = n - 1 \\ &\Rightarrow \langle V(p) \rangle \subset N_p \Sigma^{n-1}(V) \\ &\Rightarrow z(p) \in N_p \Sigma^{n-1}(V).\end{aligned}$$

Portanto, se $p \in A_n(V)$ então $z_{|\Sigma^{n-1}(V)} = \vec{0}$ em p . ■

Lema 5.1.4. *Seja $p \in \Sigma^1(V)$ e $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança de p na qual*

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5.1)$$

Então, $z(p) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(p) = \vec{0}$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^n a_i V_i^j(p) = 0$, para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Demonstração. Como $V_i(x) = (V_i^1(x), \dots, V_i^m(x))$, $i = 1, \dots, n$, é claro que

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i(p) = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i V_i^j(p) = 0,$$

para todo $j = 1, \dots, m$. Por outro lado, suponha que $\sum_{i=1}^n a_i V_i^j(p) = 0$, para $j = 1, \dots, n-1$. Como $p \in \Sigma^1(V)$, temos $\text{rank}(V_1(p), \dots, V_n(p)) = n-1$, e como $\mathbf{M}(x) \neq 0$, $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tal que $V_n(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i V_i(p)$.

Assim,

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i^j(p) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) V_i^j(p) = 0,$$

para $j = 1, \dots, n-1$. Isto é,

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) V_i^1(p) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) V_i^{n-1}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) \begin{pmatrix} V_i^1(p) \\ \vdots \\ V_i^{n-1}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

que corresponde a uma combinação linear dos vetores coluna da matriz em (5.1). Logo, $a_i + \lambda_i a_n = 0$, para $i = 1, \dots, n-1$. Portanto,

$$z(p) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(p) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i a_n) V_i(p) = \vec{0}.$$

■

Observação 5.1.1. Note que pelo lema anterior, concluímos também que $a_n \neq 0$, caso contrário, teríamos $a_1 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$, o que não ocorre visto que trabalhamos com $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Lema 5.1.5. Seja $C(z) = C\left(\sum_{i=1}^n a_i V_i\right)$ o conjunto dos zeros do campo vetorial z . Então para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $C\left(\sum_{i=1}^n a_i V_i\right) \cap \Sigma^2(V) = \emptyset$.

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança na qual

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

de forma que, localmente, podemos escrever

$$\Sigma^2(V) = \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = 0\},$$

com $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x)) = m - n + 2$.

A seguir, considere a aplicação $F : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ definida por

$$F(x, a) = (\mathbf{M}_n(x), \dots, \mathbf{M}_m(x), \Delta_2(x), \sum_{i=1}^n a_i V_i^1(x), \dots, \sum_{i=1}^n a_i V_i^{n-1}(x)).$$

Pelo Lema 5.1.4, se $x \in \Sigma^1(V)$, temos

$$\sum_{i=1}^n a_i V_i(x) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i V_i^j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Dessa forma, se $(x, a) \in F^{-1}(\vec{0})$, então $x \in C(z) \cap \Sigma^2(V)$. Além disso, a matriz Jacobiana de F em $(x, a) \in F^{-1}(\vec{0})$:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x \mathbf{M}_n(x) & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ & & O_{(m-n+2) \times n} & & & \\ \nabla_x \mathbf{M}_m(x) & \vdots & & & & \\ \nabla_x \Delta_2(x) & \vdots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \vdots & V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) & V_n^1(x) \\ (*) & \vdots & V_1^2(x) & \cdots & V_{n-1}^2(x) & V_n^2(x) \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \vdots & V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) & V_n^{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

tem posto $(m - n + 2) + (n - 1) = m + 1$. Portanto, $\vec{0}$ é valor regular de F e $F^{-1}(\vec{0})$ é uma subvariedade de dimensão $n - 1$.

Seja $\pi : F^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, isto é, $\pi(x, a) = a$. Então, pelo Teorema de Sard, a é valor regular de π para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Portanto, $\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \emptyset$ para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Mas,

$$\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \{(x, a) \in \mathcal{U} \times \{a\} : x \in C(z) \cap \Sigma^2(V)\}.$$

Logo, $C(z) \cap \Sigma^2(V) = \emptyset$ para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. ■

Lema 5.1.6. *Seja $C(z|_{\Sigma^k(V)})$ o conjunto dos zeros da restrição do campo z a $\Sigma^k(V)$. Então para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $C(z|_{\Sigma^k(V)}) \cap \Sigma^{k+2}(V) = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança na qual

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & V_2^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & V_2^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

de forma que, localmente, podemos escrever

$$\Sigma^k(V) = \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_k(x) = 0\},$$

com $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_k(x)) = m - n + k$. E

$$\Sigma^{k+2}(V) = \{\mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{k+2}(x) = 0\},$$

com $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_{k+2}(x)) = m - n + k + 2$.

Pela caracterização de Szafraniec (Lema 1.3.3), a restrição do campo $z|_{\Sigma^k(V)}$ se anula em x se, e somente se, existe $(\lambda_n, \dots, \lambda_m, \beta_2, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{m-n+k}$ tal que

$$z(x) = \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) + \sum_{\ell=2}^k \beta_\ell \nabla \Delta_\ell(x).$$

Isto é, se e somente se, $z(x) - \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) - \sum_{\ell=2}^k \beta_\ell \nabla \Delta_\ell(x) = \vec{0}$.

Escrevendo $z(x) = (z_1(x), \dots, z_m(x))$, em que $z_s(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i^s(x)$ para

e $C_{m \times (m-n+k)}$ é a matriz cujas colunas são, a menos de sinal, os gradientes $\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k$ com respeito a x :

$$C_{m \times (m-n+k)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(x) & -\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & -\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(x) & -\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_m}(x) & \cdots & -\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Note que, se $(x, a, \lambda, \beta) \in F^{-1}(\vec{0})$ então, em particular, $x \in \Sigma^{k+1}(V)$ e pelo Lema 4.0.6, $\dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^k(V)) = k$. Logo,

$$\begin{aligned} & \dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle + N_x \Sigma^k(V)) \\ &= \dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle) + \dim(N_x \Sigma^k(V)) \\ & \quad - \dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^k(V)) \\ &= (n-1) + m - (n-k) - k \\ &= m-1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla_x N_1(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & B_{m \times n} & \vdots \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} = m-1$$

e a matriz Jacobiana de F em (x, a, λ, β) tem posto $2m-n+k+1$. Isto é, $F^{-1}(\vec{0})$ tem dimensão $n-1$.

Seja $\pi : F^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, isto é,

$$\pi(x, a, \lambda, \beta) = a.$$

Então, pelo Teorema de Sard, a é valor regular de π para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Portanto, $\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \emptyset$ para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Mas,

$$\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0}) = \{(x, a, \lambda, \beta) \in \mathcal{U} \times \{a\} \times \mathbb{R}^{m-n+k} : x \in C(z_{|\Sigma^k(V)}) \cap \Sigma^{k+2}(V)\}.$$

Logo, $C(z_{|\Sigma^k(V)}) \cap \Sigma^{k+2}(V) = \emptyset$ para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. ■

5.2 Zeros não degenerados de um campo genérico $z(x)$ associado a um n -campo de Morin

Nesta seção verificaremos que, genericamente, o campo $z(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(x)$ e suas restrições $z|_{\Sigma^k(V)}$ admitem apenas zeros não degenerados. Estudaremos também como estes zeros não degenerados de $z(x)$ e $z|_{\Sigma^k(V)}$ podem ser relacionados de acordo com sua ocorrência sobre os conjuntos singulares $\Sigma^k(V)$, $k = 1, \dots, n$. Começaremos provando o seguinte lema técnico.

Lema 5.2.1. *Considere a matriz*

$$M_i(x) = \begin{bmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) & V_n^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) & V_n^{n-1}(x) \\ V_1^i(x) & \cdots & V_{n-1}^i(x) & V_n^i(x) \end{bmatrix}.$$

Se x é um zero do campo z , então para $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, $j \in \{1, \dots, n-1, i\}$ e $i \in \{n, \dots, m\}$, temos

$$a_n \operatorname{cof}(V_\ell^j, M_i) = a_\ell \operatorname{cof}(V_n^j, M_i).$$

Demonstração. Suponha que $z(x) = \sum_{\ell=1}^n a_\ell V_\ell(x) = \vec{0}$, então

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell V_\ell^j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Isto é, para $i = n, \dots, m$, temos

$$\begin{cases} a_1 V_1^1(x) + \dots + a_{n-1} V_{n-1}^1(x) + a_n V_n^1(x) = 0 \\ \vdots \\ a_1 V_1^{n-1}(x) + \dots + a_{n-1} V_{n-1}^{n-1}(x) + a_n V_n^{n-1}(x) = 0 \\ a_1 V_1^i(x) + \dots + a_{n-1} V_{n-1}^i(x) + a_n V_n^i(x) = 0 \end{cases}$$

Seja $\{1, 2, \dots, n-1, i\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$, se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} V_1^{\alpha_1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1}(x) & V_n^{\alpha_1}(x) \\ V_1^{\alpha_2}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_2}(x) & V_n^{\alpha_2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(x) & V_n^{\alpha_{n-1}}(x) \end{bmatrix} < n-1,$$

então todos os menores de ordem $n-1$ são nulos. Logo, $\text{cof}(V_\ell^{\alpha_n}, M_i) = 0$, $\ell = 1, \dots, n$ e conseqüentemente,

$$a_n \text{cof}(V_\ell^{\alpha_n}, M_i) = a_\ell \text{cof}(V_n^{\alpha_n}, M_i) = 0,$$

para $\ell = 1, \dots, n-1$ e $i = n, \dots, m$. (Note também que, pela arbitrariedade de α_n , a equação é válida para $\alpha_n = 1, \dots, n-1, i$.)

Agora, se

$$\text{rank} \begin{bmatrix} V_1^{\alpha_1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1}(x) & V_n^{\alpha_1}(x) \\ V_1^{\alpha_2}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_2}(x) & V_n^{\alpha_2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(x) & V_n^{\alpha_{n-1}}(x) \end{bmatrix} = n-1,$$

podemos supor sem perda de generalidade que

$$\begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1}(x) \\ V_1^{\alpha_2}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_2}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}}(x) & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Como $z(x) = \vec{0}$, consideramos o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 V_1^{\alpha_1}(x) + \cdots + a_{n-1} V_{n-1}^{\alpha_1}(x) = -a_n V_n^{\alpha_1}(x) \\ \vdots \\ a_1 V_1^{\alpha_{n-1}}(x) + \cdots + a_{n-1} V_{n-1}^{\alpha_{n-1}}(x) = -a_n V_n^{\alpha_{n-1}}(x) \end{cases}$$

de maneira que, suprimindo x da notação, obtemos

$$a_\ell \begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} = -a_n \begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1} & \cdots & V_{\ell-1}^{\alpha_1} & V_n^{\alpha_1} & V_{\ell+1}^{\alpha_1} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{\ell-1}^{\alpha_{n-1}} & V_n^{\alpha_{n-1}} & V_{\ell+1}^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix}$$

e reordenando as colunas da matriz à direita, temos

$$\begin{aligned} a_\ell \begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} &= (-1)^{n-\ell} a_n \begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1} & \cdots & V_{\ell-1}^{\alpha_1} & V_{\ell+1}^{\alpha_1} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1} & V_n^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{\ell-1}^{\alpha_{n-1}} & V_{\ell+1}^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} & V_n^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-\ell} (-1)^{\ell+\alpha_n} a_n \operatorname{cof}(V_\ell^{\alpha_n}, M_i) \\ &= (-1)^{n+\alpha_n} a_n \operatorname{cof}(V_\ell^{\alpha_n}, M_i). \end{aligned}$$

Por sua vez,

$$a_\ell \begin{vmatrix} V_1^{\alpha_1} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{\alpha_{n-1}} & \cdots & V_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^{n+\alpha_n} a_\ell \operatorname{cof}(V_n^{\alpha_n}, M_i).$$

Logo,

$$a_\ell \operatorname{cof}(V_n^{\alpha_n}, M_i) = a_n \operatorname{cof}(V_\ell^{\alpha_n}, M_i), \quad \ell = 1, \dots, n-1$$

e pela arbitrariedade de α_n , concluímos que

$$a_\ell \operatorname{cof}(V_n^j, M_i) = a_n \operatorname{cof}(V_\ell^j, M_i),$$

para todo $\ell = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, n-1$, i e $i = n, \dots, m$. ■

Vimos na seção anterior que os zeros do campo $z(x)$ estão todos sobre $\Sigma^1(V)$. Mostraremos no lema a seguir que, genericamente, estes zeros estão sobre $A_1(V)$ e são não degenerados.

$x \in \Sigma^1(V) \cap \mathcal{U}$, então $\text{rank}(\text{Jac } F(x, a)) = m$ para $(x, a) \in F^{-1}(\vec{0})$. Assim, $\dim F^{-1}(\vec{0}) = (m + n) - m = n$.

Seja $\pi : F^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\pi(x, a) = a$, então quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ é valor regular de π , de forma que $\pi^{-1}(a) \cap F^{-1}(\vec{0})$ tem dimensão zero. Isto é, os zeros do campo vetorial z são isolados em $\Sigma^1(V)$. Mostremos que, além disso, estes zeros são não degenerados.

Como $\text{rank}(\text{Jac } F(x, a)) = m$, $\forall (x, a) \in F^{-1}(\vec{0})$, então pelo Lema 2.2.3 temos $\text{rank}(\nabla_x \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla_x \mathbf{M}_m(p), \nabla_x z_1(p), \dots, \nabla_x z_{n-1}(p)) = m$, o que ocorre se, e somente se, $\text{rank}(B) = m$, em que B é a matriz

$$B = \begin{bmatrix} \nabla_x z_1(p) \\ \vdots \\ \nabla_x z_{n-1}(p) \\ a_n \nabla_x \mathbf{M}_n(p) \\ \vdots \\ a_n \nabla_x \mathbf{M}_m(p) \end{bmatrix}$$

cujas linhas denotaremos por $L_i, i = 1, \dots, m$ (lembre-se que, pela Observação 5.1.1, $a_n \neq 0$).

Por simplicidade de notação, consideremos novamente $I = \{1, \dots, n\}$ e $I_i = \{1, \dots, n-1, i\}$ para $i \in \{n, \dots, m\}$. Como

$$\mathbf{M}_i(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) & V_n^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) & V_n^{n-1}(x) \\ V_1^i(x) & \cdots & V_{n-1}^i(x) & V_n^i(x) \end{vmatrix},$$

então,

$$\nabla \mathbf{M}_i(x) = \sum_{\ell \in I, j \in I_i} \text{cof}(V_\ell^j(x), M_i) \nabla V_\ell^j(x)$$

e pelo Lema 5.2.1,

$$\nabla \mathbf{M}_i(p) = \sum_{\ell \in I, j \in I_i} \frac{a_\ell}{a_n} \text{cof}(V_n^j(p), M_i) \nabla V_\ell^j(p).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
a_n \nabla \mathbf{M}_i(p) &= \sum_{\ell \in I, j \in I_i} a_\ell \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) \nabla V_\ell^j(p) \\
&= \sum_{j \in I_i} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) \left[\sum_{\ell \in I} a_\ell \nabla V_\ell^j(p) \right] \\
&= \sum_{j \in I_i} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) [\nabla_x z_j(p)] \\
&= \operatorname{cof}(V_n^i(p), M_i) [\nabla_x z_i(p)] + \sum_{j \in I_i \setminus \{i\}} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) [\nabla_x z_j(p)]
\end{aligned}$$

Observe que $\operatorname{cof}(V_n^i(p), M_i) = \mathbf{M}(p) \neq 0$, para $i = n, \dots, m$. Então, para cada $i = n, \dots, m$, substituímos a i -ésima linha L_i da matriz B por

$$\frac{1}{\operatorname{cof}(V_n^i(p), M_i)} \left(L_i - \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) L_j \right)$$

e obtemos a matriz de posto máximo:

$$\begin{bmatrix}
\nabla_x z_1(p) \\
\vdots \\
\nabla_x z_{n-1}(p) \\
\nabla_x z_n(p) \\
\vdots \\
\nabla_x z_m(p)
\end{bmatrix}.$$

Portanto, os zeros de $z(x)$ são não degenerados. ■

Lema 5.2.3. *Para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, o campo $z|_{A_k(V)} = \sum_{i=1}^n a_i V_i|_{A_k(V)}$ tem apenas zeros não degenerados, $k \geq 2$.*

Demonstração. Suponha que $z|_{A_k(V)} = \vec{0}$ em p . Consideremos $\mathcal{U} \subset M$ uma

vizinhança de p em que

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

e na qual os respectivos conjuntos singulares podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \Sigma^1(V) &= \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = 0\}, \\ \Sigma^k(V) &= \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_k(x) = 0\}, \\ \Sigma^{k+1}(V) &= \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{k+1}(x) = 0\}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m) &= m - n + 1, \text{ em } x \in \Sigma^1(V) \cap \mathcal{U}, \\ \text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k) &= m - n + k, \text{ em } x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U}, \\ \text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{k+1}) &= m - n + k + 1, \text{ em } x \in \Sigma^{k+1}(V) \cap \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Analogamente à demonstração do Lema 5.1.6, pela caracterização de Szafraniec (Lema 1.3.3), sabemos que a restrição do campo $z|_{\Sigma^k(V)}$ se anula em x se, e somente se, existe $(\lambda_n, \dots, \lambda_m, \beta_2, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^{m-n+k}$ tal que

$$z(x) = \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) + \sum_{\ell=2}^k \beta_\ell \nabla \Delta_\ell(x).$$

Assim, consideremos novamente as funções

$$N_s(x, a, \lambda, \beta) := z_s(x) - \sum_{j=n}^m \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_s}(x) - \sum_{\ell=2}^k \beta_\ell \frac{\partial \Delta_\ell}{\partial x_s}(x), \quad s = 1, \dots, m,$$

de modo que $z|_{\Sigma^k(V)}(x) = \vec{0}$ se, e somente se, $N_s(x, a, \lambda, \beta) = 0, s = 1, \dots, m$.

Seja $G : \mathcal{U} \setminus \{\Delta_{k+1} = 0\} \times \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} \times \mathbb{R}^{m-n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-n+k}$ a aplicação dada por

$$G(x, a, \lambda, \beta) = (\mathbf{M}_n, \dots, \mathbf{M}_m, \Delta_2, \dots, \Delta_k, N_1, \dots, N_m).$$

Consideremos $\text{Jac}G(x, a, \lambda, \beta)$ a matriz Jacobiana de G em um ponto $(x, a, \lambda, \beta) \in G^{-1}(\vec{0})$:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x \mathbf{M}_n(x) & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \nabla_x \mathbf{M}_m(x) & \vdots & & & \\ \nabla_x \Delta_2(x) & \vdots & & O_{(m-n+k) \times (m+k)} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \nabla_x \Delta_k(x) & \vdots & & & \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \nabla_x N_1(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & B_{m \times n} & \vdots & C_{m \times (m-n+k)} \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

em que $O_{(m-n+k) \times (m+k)}$ é uma matriz nula, $B_{m \times n}$ é a matriz cujas colunas são dadas pelos vetores $V_1(x), \dots, V_n(x)$ do n -campo

$$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) & V_n^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1^m(x) & \cdots & V_{n-1}^m(x) & V_n^m(x) \end{bmatrix}$$

e $C_{m \times (m-n+k)}$ é a matriz cujas colunas são, a menos de sinal, os gradientes $\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k$ com respeito a x :

$$C_{m \times (m-n+k)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(x) & -\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & -\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(x) & -\frac{\partial \Delta_2}{\partial x_m}(x) & \cdots & -\frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Assim, se $(x, a, \lambda, \beta) \in G^{-1}(\vec{0})$, então $x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U}$, $\Delta_{k+1}(x) \neq 0$ e $z|_{\Sigma^k(V)}(x) = \vec{0}$. E como $A_k(V) = \Sigma^k(V) \setminus \Sigma^{k+1}(V)$, temos

$$x \in A_k(V) \cap C(z|_{\Sigma^k(V)}), \quad \forall (x, a, \lambda, \beta) \in G^{-1}(\vec{0}).$$

Por sua vez, se $x \in A_k(V) = \Sigma^k(V) \setminus \Sigma^{k+1}(V)$, entÃ£o

$$\begin{cases} \dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = k - 1; \\ \dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^k(V)) < k. \end{cases}$$

Como $\dim(N_x \Sigma^{k-1}(V)) = m - n + k - 1$, $\dim(N_x \Sigma^k(V)) = m - n + k$ e $N_x \Sigma^{k-1}(V) \subset N_x \Sigma^k(V)$, entÃ£o

$$\dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^k(V)) = \dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)) = k - 1.$$

Logo,

$$\dim(\langle V(x) \rangle + N_x \Sigma^k(V)) = (n - 1) + (m - n + k) - (k - 1) = m.$$

Portanto,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla_x N_1(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & B_{m \times n} & \vdots \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda, \beta) & \vdots & \vdots & C_{m \times (m-n+k)} \end{bmatrix} = m$$

e a matriz Jacobiana de G tem posto mÃ¡ximo em todo $(x, a, \lambda, \beta) \in G^{-1}(\vec{0})$. Assim, $\dim G^{-1}(\vec{0}) = (2m + k) - (2m - n + k) = n$.

Seja $\pi : G^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeÃ§Ã£o $\pi(x, a, \lambda, \beta) = a$, entÃ£o quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ Ã© valor regular de π . Deste modo, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\dim(\pi^{-1}(a) \cap G^{-1}(\vec{0})) = 0$ e $\pi^{-1}(a) \pitchfork G^{-1}(\vec{0})$. Portanto, os zeros de $z|_{A_k(V)}$ sÃ£o nÃ£o degenerados. \blacksquare

Lema 5.2.4. Para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, o campo $z|_{A_1(V)} = \sum_{i=1}^n a_i V_i|_{A_1(V)}$ tem apenas zeros nÃ£o degenerados.

DemonstraÃ§Ã£o. Suponha que $z|_{A_1(V)} = 0$ em p . Consideremos $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhanÃ§a de p em que

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m$ com respeito a x :

$$C_{m \times (m-n+1)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(x) & \cdots & -\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Assim, se $(x, a, \lambda) \in G^{-1}(\vec{0})$, então $x \in \Sigma^1(V) \cap \mathcal{U}$, $\Delta_2(x) \neq 0$ e $z_{|\Sigma^1(V)}(x) = \vec{0}$. E como $A_1(V) = \Sigma^1(V) \setminus \Sigma^2(V)$, temos

$$x \in A_1(V) \cap C(z_{|\Sigma^1(V)}), \quad \forall (x, a, \lambda) \in G^{-1}(\vec{0}).$$

Por sua vez, se $x \in A_1(V) = \Sigma^1(V) \setminus \Sigma^2(V)$, então

$$\dim(\langle V(x) \rangle \cap N_x \Sigma^1(V)) = 0.$$

Logo,

$$\dim(\langle V(x) \rangle + N_x \Sigma^1(V)) = (n-1) + (m-n+1) = m.$$

Portanto,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla_x N_1(x, a, \lambda) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & B_{m \times n} & \vdots & C_{m \times (m-n+1)} \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda) & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = m$$

e a matriz Jacobiana de G tem posto máximo em todo $(x, a, \lambda) \in G^{-1}(\vec{0})$. Assim, $\dim G^{-1}(\vec{0}) = (2m+1) - (2m-n+1) = n$.

Seja $\pi : G^{-1}(\vec{0}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ a projeção $\pi(x, a, \lambda) = a$, então quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ é valor regular de π . Deste modo, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, $\dim(\pi^{-1}(a) \cap G^{-1}(\vec{0})) = 0$ e $\pi^{-1}(a) \pitchfork G^{-1}(\vec{0})$. Portanto, os zeros de $z_{|A_1(V)}$ são não degenerados. ■

Observação 5.2.1. *Seja $(x, a, \lambda) \in G^{-1}(\vec{0})$, pelo Lema 2.2.3, se o posto da matriz Jacobiana de G em (x, a, λ) é igual a $2m - n + 1$, então, para quase todo $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$,*

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \nabla_x \mathbf{M}_n(x) \\ \vdots \\ \nabla_x \mathbf{M}_m(x) \\ \nabla_x N_1(x, a, \lambda) \\ \vdots \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda) \end{bmatrix} = 2m - n + 1.$$

Mas, note que

$$\begin{bmatrix} \nabla_x N_1(x, a, \lambda) \\ \vdots \\ \nabla_x N_m(x, a, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x z_1(x, a) + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla_x \frac{\partial \mathbf{M}_i}{x_1}(x) \\ \vdots \\ \nabla_x z_m(x, a) + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla_x \frac{\partial \mathbf{M}_i}{x_m}(x) \end{bmatrix}$$

que é a matriz Jacobiana de $z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i$ com respeito a x . Ou seja, a matriz Jacobiana de $\tilde{H}(x, \lambda) = (z(x) + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i(x), \mathbf{M}_n(x), \dots, \mathbf{M}_m(x))$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(x) \\ \text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i \right) (x) & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(x) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(x) \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \nabla_x \mathbf{M}_n(x) & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & O_{(m-n+1)} \\ \nabla_x \mathbf{M}_m(x) & \vdots & & \end{bmatrix}$$

tem posto $2m - n + 1$. Portanto, pela caracterização de Szafraniec (Lema 1.3.3), x é um zero não degenerado de $z|_{A_1(V)}$.

Vimos no Lema 5.1.2 que se $p \in A_{k+1}(V)$, então p será um zero de $z|_{\Sigma^{k+1}(V)}$ se, e somente se, p for um zero de $z|_{\Sigma^k(V)}$. Nos resultados a seguir mostraremos que, além disso, essa propriedade é válida para o fato destes zeros serem não degenerados. Isto é:

Lema 5.2.5. *Seja $p \in A_1(V)$ tal que $z|_{\Sigma^1(V)} = \vec{0}$ em p , então p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^1(V)}$ se, e somente se, p é um zero não degenerado do campo z .*

Demonstração. Seja $p \in A_1(V)$ um zero do campo $z|_{\Sigma^1(V)}$ e $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança de p na qual

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Assim, localmente, temos $\Sigma^1(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = 0\}$, com $\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x)) = m - n + 1$. Pela caracterização de Szafraniec (Lema 1.3.3), $\exists!(\lambda_n, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ tal que $z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i = \vec{0}$ em p . Além disso, p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^1(V)}$ se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(p) \\ \text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i \right) (p) & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(p) \\ \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \nabla_x \mathbf{M}_n(p) & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & O_{(m-n+1)} \\ \nabla_x \mathbf{M}_m(p) & \vdots & & \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

tem determinante não nulo.

Como $z(p) = \vec{0}$, então $\lambda_n \nabla \mathbf{M}_n(p) + \dots + \lambda_m \nabla \mathbf{M}_m(p) = \vec{0}$, com $p \in \Sigma^1(V)$. Logo, $\lambda_n = \dots = \lambda_m = 0$ e assim,

$$\text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i \right) (p) = [dz_p] = \begin{bmatrix} \nabla_x z_1(p) \\ \vdots \\ \nabla_x z_m(p) \end{bmatrix}$$

em que $z = (z_1, \dots, z_m)$.

Como $p \in A_1(V)$, então

$$\dim(\langle V_1(p), \dots, V_n(p) \rangle \cap N_p \Sigma^1(V)) = 0,$$

logo

$$\dim(\langle V_1(p), \dots, V_n(p) \rangle \oplus N_p \Sigma^1(V)) = m.$$

Podemos considerar $V_1(p), \dots, V_{n-1}(p)$ base de $\langle V_1(p), \dots, V_n(p) \rangle$ e portanto, a matriz

$$\begin{bmatrix} V_1^1(p) & \cdots & V_1^{n-1}(p) & V_1^n(p) & \cdots & V_1^m(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n-1}^1(p) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(p) & V_{n-1}^n(p) & \cdots & V_{n-1}^m(p) \\ \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_{n-1}}(p) & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_n}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_{n-1}}(p) & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_n}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

tem determinante não nulo, isto é, posto igual a m .

Por outro lado, sabemos que

$$\nabla \mathbf{M}_i(x) = \sum_{\ell \in I, j \in I_i} \text{cof}(V_\ell^j(x), M_i) \nabla V_\ell^j(x)$$

e como $z(p) = \vec{0}$, $a_n \neq 0$ e pelo Lema 5.2.1,

$$\begin{aligned} a_n \nabla \mathbf{M}_i(p) &= \sum_{\ell \in I, j \in I_i} a_\ell \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) \nabla V_\ell^j(p) \\ &= \sum_{j \in I_i} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) \left[\sum_{\ell \in I} a_\ell \nabla V_\ell^j(p) \right] \\ &= \sum_{j \in I_i} \operatorname{cof}(V_n^j(p), M_i) [\nabla_x z_j(p)]. \end{aligned}$$

Logo, a matriz 5.2 tem determinante não nulo se, e somente se, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \nabla_x z_1(p) & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x z_m(p) & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n \nabla_x \mathbf{M}_n(p) & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & O_{(m-n+1)} & \\ a_n \nabla_x \mathbf{M}_m(p) & \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

também é diferente de zero. Denotemos por $L_j, j = 1, \dots, m$, as m primeiras linhas da matriz 5.4 e por $R_i, i = n, \dots, m$, as $m - n + 1$ últimas linhas dessa mesma matriz. Então,

$$\begin{aligned} L_j &= \left(\nabla_x z_j(p), \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_j}(p), \dots, \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_j}(p) \right); \\ R_i &= \left(a_n \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_1}(p), \dots, a_n \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_m}(p), \vec{0} \right). \end{aligned}$$

Substituímos então cada linha $R_i, i = n, \dots, m$ por $R_i - \sum_{j \in I_i} \operatorname{cof}(V_n^j, M_i) L_j$

de modo que após a substituição, obtemos

$$R_i = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ vezes}}, - \sum_{j \in I_i} \text{cof}(V_n^j, M_i) \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_j}, \dots, - \sum_{j \in I_i} \text{cof}(V_n^j, M_i) \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_j} \right).$$

Assim, a matriz 5.4 fica:

$$\begin{bmatrix} \nabla_x z_1(p) & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_x z_m(p) & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m}(p) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & & \\ O_{(m-n+1) \times m} & \vdots & & \mathbf{M}'_{(m-n+1)} & \\ & \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

em que a matriz

$$\mathbf{M}'_{(m-n+1)} = - \left(m_{ij} \right)_{n \leq i, j \leq m}$$

é dada por

$$m_{ij} = \sum_{k \in I_i} \text{cof}(V_n^k, M_i) \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k}. \quad (5.6)$$

Verificamos a seguir que a matriz \mathbf{M}' tem determinante diferente de zero. Retomando a matriz 5.3 de posto m e denotando suas respectivas linhas por $L'_j, j = 1, \dots, m$. Para $j = 1, \dots, n-1$, substituímos L'_j por

$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{cof}(V_k^j, M) L'_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \text{cof}(V_k^j, M) V_k^1, \dots, \sum_{k=1}^{n-1} \text{cof}(V_k^j, M) V_k^m \right) \quad (5.7)$$

em que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \text{cof}(V_k^j, M) V_k^\ell = \begin{cases} \mathbf{M}, & \ell = 1, \dots, n-1 \text{ e } \ell = j; \\ 0 & \ell = 1, \dots, n-1 \text{ e } \ell \neq j; \\ -\text{cof}(V_n^j, \mathbf{M}_\ell), & \ell = n, \dots, m. \end{cases}$$

De fato,

- Para $\ell = 1, \dots, n-1$ com $\ell = j$, temos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cof}(V_k^j, M) V_k^j = \begin{vmatrix} V_1^1 & \cdots & V_k^1 & \cdots & V_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^j & \cdots & V_k^j & \cdots & V_{n-1}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1} & \cdots & V_k^{n-1} & \cdots & V_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \mathbf{M}$$

- Para $\ell = 1, \dots, n-1$ e $\ell \neq j$, temos:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cof}(V_k^j, M) V_k^\ell = \begin{vmatrix} V_1^1 & \cdots & V_k^1 & \cdots & V_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{j-1} & \cdots & V_k^{j-1} & \cdots & V_{n-1}^{j-1} \\ V_1^\ell & \cdots & V_k^\ell & \cdots & V_{n-1}^\ell \\ V_1^{j+1} & \cdots & V_k^{j+1} & \cdots & V_{n-1}^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1} & \cdots & V_k^{n-1} & \cdots & V_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

uma vez que este determinante corresponde ao determinante da matriz M após substituirmos a j -ésima linha pela linha $(V_1^\ell, \dots, V_{n-1}^\ell)$, para algum $\ell \in \{1, \dots, n-1\} \setminus \{j\}$. Ou seja, este é o determinante de uma matriz que contém duas linhas iguais.

- Para $\ell = n, \dots, m$ temos:

$$\operatorname{cof}(V_n^j, \mathbf{M}_\ell) = (-1)^{n+j} \begin{vmatrix} V_1^1 & \cdots & V_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{j-1} & \cdots & V_{n-1}^{j-1} \\ V_1^{j+1} & \cdots & V_{n-1}^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1} & \cdots & V_{n-1}^{n-1} \\ V_1^\ell & \cdots & V_{n-1}^\ell \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+j} \sum_{k=1}^{n-1} V_k^\ell (-1)^{n-1+k} \begin{vmatrix} V_1^1 & \cdots & V_{k-1}^1 & V_{k+1}^1 & \cdots & V_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{j-1} & \cdots & V_{k-1}^{j-1} & V_{k+1}^{j-1} & \cdots & V_{n-1}^{j-1} \\ V_1^{j+1} & \cdots & V_{k-1}^{j+1} & V_{k+1}^{j+1} & \cdots & V_{n-1}^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1} & \cdots & V_{k-1}^{n-1} & V_{k+1}^{n-1} & \cdots & V_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{j-1+k} V_k^\ell (-1)^{j+k} \operatorname{cof}(V_k^j, M) = - \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cof}(V_k^j, M) V_k^\ell
\end{aligned}$$

Assim, após a substituição das linhas $L'_j, j = 1, \dots, n-1$ da matriz 5.3, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{M} & \cdots & 0 & \vdots & -\operatorname{cof}(V_n^1, \mathbf{M}_n) & \cdots & -\operatorname{cof}(V_n^1, \mathbf{M}_m) & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \mathbf{M} & \vdots & -\operatorname{cof}(V_n^{n-1}, \mathbf{M}_n) & \cdots & -\operatorname{cof}(V_n^{n-1}, \mathbf{M}_m) & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_{n-1}} & \vdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m} & \end{array} \right] \quad (5.8)$$

que ainda tem posto máximo: se denotarmos por $L''_j, j = 1, \dots, n-1$ as linhas da matriz 5.8 obtida, verificamos que

$$\dim \langle L''_1, \dots, L''_{n-1} \rangle = n-1$$

pois a submatriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \operatorname{Id}_{(n-1)}$$

tem determinante não nulo. Além disso,

$$\langle L''_1, \dots, L''_{n-1} \rangle \subset \langle L'_1, \dots, L'_{n-1} \rangle,$$

uma vez que cada linha L_j'' é uma combinação linear das linhas L_1', \dots, L_{n-1}' , como podemos ver em 5.7. Por fim, como

$$\dim \langle L_1', \dots, L_{n-1}' \rangle = n - 1,$$

concluimos que

$$\langle L_1'', \dots, L_{n-1}'' \rangle = \langle L_1', \dots, L_{n-1}' \rangle.$$

Agora para $j = n, \dots, m$, considere a expressão

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}L_j' - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} L_k'' \\ &= \mathbf{M} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_m} \right) \\ &+ \left(-\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_1}, \dots, -\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_{n-1}}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_n), \dots, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_m) \right) \\ &= \left(0, \dots, 0, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_n) + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_n}, \dots, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_m) + \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_m} \right). \end{aligned}$$

E observando que $\mathbf{M} = \operatorname{cof}(V_n^i, \mathbf{M}_j)$, para $i = n, \dots, m$, a expressão

$$\mathbf{M}L_j' - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} L_k''$$

é igual a

$$\left(0, \dots, 0, \sum_{k \in I_n} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_n), \dots, \sum_{k \in I_m} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} \operatorname{cof}(V_n^k, M_m) \right).$$

Logo, pela equação 5.6, obtemos

$$\mathbf{M}L_j' - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} L_k'' = (0, \dots, 0, m_{nj}, \dots, m_{mj}).$$

Então, para $j = n, \dots, m$, substituimos L_j' na matriz 5.8 por

$$\mathbf{M}L_j' - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_k} L_k'',$$

de maneira que a matriz obtida ainda tem posto máximo e é dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \cdots & 0 & \vdots & -\operatorname{cof}(V_n^1, \mathbf{M}_n) & \cdots & -\operatorname{cof}(V_n^1, \mathbf{M}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{M} & \vdots & -\operatorname{cof}(V_n^{n-1}, \mathbf{M}_n) & \cdots & -\operatorname{cof}(V_n^{n-1}, \mathbf{M}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ & O_{(n-1)} & & \vdots & & & (-\mathbf{M}')^t \\ & & & \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Assim, visto que a matriz anterior tem determinante diferente de zero e $\mathbf{M} \neq 0$, temos $\det(-\mathbf{M}')^t \neq 0$. Logo, $\det \mathbf{M}' \neq 0$.

Por fim, recapitulando as considerações anteriores, concluímos que a matriz 5.4 tem determinante não nulo se, e somente se, a matriz 5.5 tem determinante não nulo, o que ocorre se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \nabla_x z_1(p) \\ \vdots \\ \nabla_x z_m(p) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Portanto, p será um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^1(V)}$ se, e somente se, p for um zero não degenerado de z . ■

Lema 5.2.6. *Dada uma matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

se existirem $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{j=1}^m \lambda_j a_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, então

$$\lambda_j \operatorname{cof}(a_{ik}) - \lambda_k \operatorname{cof}(a_{ij}) = 0.$$

Demonstração. O resultado é claramente verdadeiro se $k = j$, ou se $\text{cof}(a_{ik}) = \text{cof}(a_{ij}) = 0$. Desta forma, suponhamos que $k \neq j$ e $\text{cof}(a_{ik}) \neq 0$. Podemos considerar o seguinte sistema linear nas “incógnitas” λ_j , com $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, m$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_{1j} + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{1j} = -\lambda_k a_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_{(i-1)j} + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{(i-1)j} = -\lambda_k a_{(i-1)k} \\ \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_{(i+1)j} + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{(i+1)j} = -\lambda_k a_{(i+1)k} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j a_{mj} + \sum_{j=k+1}^m \lambda_j a_{mj} = -\lambda_k a_{mk} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Para simplificar nossos cálculos, denotaremos por A_{ik} a matriz obtida eliminando-se a linha i e a coluna k da matriz A :

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(k-1)} & a_{1(k+1)} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(k-1)} & a_{(i-1)(k+1)} & \cdots & a_{(i-1)m} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(k-1)} & a_{(i+1)(k+1)} & \cdots & a_{(i+1)m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(k-1)} & a_{m(k+1)} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

por A_{ik}^j suas respectivas colunas, isto é, $A_{ik} = [A_{ik}^1 \cdots A_{ik}^{k-1} A_{ik}^{k+1} \cdots A_{ik}^m]$, por A_{ik}^k a coluna

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{(i-1)k} \\ a_{(i+1)k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix},$$

e por $A_{ik}(\ell \rightarrow j)$ a matriz obtida a partir da matriz A_{ik} , substituindo-se a coluna j pela coluna ℓ . Isto é,

$$A_{ik}(\ell \rightarrow j) = [A_{ik}^1 \cdots A_{ik}^{j-1} A_{ik}^\ell A_{ik}^{j+1} \cdots A_{ik}^{k-1} A_{ik}^{k+1} \cdots A_{ik}^m].$$

Como $\text{cof}(a_{ik}) \neq 0$, então $\det(A_{ik}) \neq 0$ e aplicando a regra de Cramer para o sistema linear 5.10, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{\det(A_{ik}^1 \cdots A_{ik}^{j-1} - \lambda_k A_{ik}^k A_{ik}^{j+1} \cdots A_{ik}^m)}{\det(A_{ik})} \\ \Rightarrow \lambda_j &= \frac{-\lambda_k \det(A_{ik}(k \rightarrow j))}{(-1)^{i+k} \text{cof}(a_{ik})} \end{aligned}$$

Se $k > j$, permutando as colunas da matriz $A_{ik}(k \rightarrow j)$ obtemos

$$\begin{aligned} \det(A_{ik}(k \rightarrow j)) &= (-1)^{k-1-j} \det(A_{ik}^1 \cdots A_{ik}^{j-1} A_{ik}^{j+1} \cdots A_{ik}^{k-1} A_{ik}^k A_{ik}^{k+1} \cdots A_{ik}^m) \\ &= (-1)^{k-1-j} (-1)^{i+j} \text{cof}(a_{ij}) \\ &= (-1)^{k+i-1} \text{cof}(a_{ij}) \end{aligned}$$

Se $k < j$, permutando as colunas da matriz $A_{ik}(k \rightarrow j)$ obtemos

$$\begin{aligned} \det(A_{ik}(k \rightarrow j)) &= (-1)^{j-1-k} \det(A_{ik}^1 \cdots A_{ik}^{k-1} A_{ik}^k A_{ik}^{k+1} \cdots A_{ik}^{j-1} A_{ik}^{j+1} \cdots A_{ik}^m) \\ &= (-1)^{j-1-k} (-1)^{i+j} \text{cof}(a_{ij}) \\ &= (-1)^{2j+i-1-k} \text{cof}(a_{ij}) \\ &= (-1)^{i-1-k} \text{cof}(a_{ij}) \\ &= (-1)^{i-1+k} \text{cof}(a_{ij}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_j = \frac{-\lambda_k (-1)^{i-1+k} \text{cof}(a_{ij})}{(-1)^{i+k} \text{cof}(a_{ik})}.$$

Isto é,

$$\lambda_j \text{cof}(a_{ik}) = \lambda_k \text{cof}(a_{ij}).$$

■

Lema 5.2.7. *Seja $p \in A_{k+1}(V)$ tal que $z|_{\Sigma_{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p . Então, p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma_{k+1}(V)}$ se, e somente se, p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma_k(V)}$.*

Demonstração. Seja $p \in A_{k+1}(V)$ um zero do campo $z|_{\Sigma_{k+1}(V)}$. Consideremos $\mathcal{U} \subset M$ uma vizinhança de p na qual

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

e os respectivos conjuntos singulares podem ser escritos como

$$\Sigma^k(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_k(x) = 0\},$$

$$\Sigma^{k+1}(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{k+1}(x) = 0\},$$

com

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k) = m - n + k, \text{ em } x \in \Sigma^k(V) \cap \mathcal{U},$$

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{k+1}) = m - n + k + 1, x \in \Sigma^{k+1}(V) \cap \mathcal{U}.$$

Pela caracterização de Szafraniec (Lema 1.3.3), p é um zero da restrição $z|_{\Sigma^{k+1}(V)}$ se, e somente se, existe um único $(\lambda_n, \dots, \lambda_m, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^{m-n+k}$ tal que

$$z(p) + \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(p) + \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j \nabla \Delta_j(p) = \vec{0}.$$

Mas, como p é um zero de $z|_{\Sigma_k(V)}$, temos $\beta_{k+1} = 0$. Assim, pelo Lema 1.3.4, p será um zero não degenerado de $z|_{\Sigma_{k+1}(V)}$ se, e somente se, o determinante

da matriz a seguir for diferente de zero em p :

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 \text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^k \beta_j \nabla \Delta_j \right) & : & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_{k+1}}{\partial x_1} \\
 & : & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & : & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} & \frac{\partial \Delta_{k+1}}{\partial x_m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_n & \vdots & & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_m & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \Delta_2 & \vdots & & & O_{(m-n+k)} & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \Delta_k & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \Delta_{k+1} & \vdots & & & & & &
 \end{array} \right] \quad (5.11)$$

Por outro lado, p será um zero não degenerado de $z|_{\Sigma_k(V)}$ se, e somente se, o determinante da matriz abaixo for diferente de zero em p :

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 & & : & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} \\
 \text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^k \beta_j \nabla \Delta_j \right) & : & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & : & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_m} & \dots & \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_n & \vdots & & & & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_m & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \Delta_2 & \vdots & & & O_{(m-n+k)} & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 & \nabla_x \Delta_k & \vdots & & & & & &
 \end{array} \right] \quad (5.12)$$

isto é, se o determinante da matriz obtida eliminando-se o gradiente $\nabla \Delta_{k+1}(p)$ continuar não nulo. Desta forma, é preciso mostrar que o determinante da matriz 5.11 será não nulo em p se, e somente se, o determinante

da matriz 5.12 for não nulo em p .

Começaremos analisando a matriz Jacobiana com respeito a x

$$\text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^k \beta_j \nabla \Delta_j \right)$$

que é uma submatriz comum às matrizes 5.11 e 5.12.

Por definição, $\Delta_{k+1} = \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, U_1, \dots, U_{n-k})$, em que U_1, \dots, U_{n-k} é base de um subespaço vetorial complementar ao subespaço $\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)$ de $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Assim,

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle = \langle U_1, \dots, U_{n-k} \rangle \oplus (\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_x \Sigma^{k-1}(V)).$$

Como $z|_{\Sigma^{k-1}(V)} \neq \vec{0}$ em p , então $z(p) \in \langle V_1(p), \dots, V_n(p) \rangle \setminus N_p \Sigma^{k-1}(V)$ e assim,

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_i(x) + v(x),$$

para algum $v(x) \in N_x \Sigma^{k-1}(V)$, isto é, $v(x) = \sum_{i=n}^m \tilde{\lambda}_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\beta}_j \nabla \Delta_j$. Ou seja,

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_i(x) + \sum_{i=n}^m \tilde{\lambda}_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\beta}_j \nabla \Delta_j,$$

e a expressão

$$z(x) + \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) + \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j \nabla \Delta_j(x)$$

pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_i(x) + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \nabla \Delta_j + \beta_k \nabla \Delta_k, \quad (5.13)$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n-k} \mu_i \begin{bmatrix} U_{1i} \\ \vdots \\ U_{mi} \end{bmatrix} + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_m} \end{bmatrix} + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_m} \end{bmatrix} + \beta_k \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

que, por sua vez, é igual a

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_{1i} + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_1} + \beta_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_{mi} + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_m} + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_m} + \beta_k \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Então, a matriz Jacobiana de $z(x) + \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) + \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j \nabla \Delta_j(x)$, com respeito a x , é dada por:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i \nabla_x U_{1i} + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \nabla_x \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_1} + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \nabla_x \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_1} + \beta_k \nabla_x \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i \nabla_x U_{mi} + \sum_{i=n}^m (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i) \nabla_x \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial x_m} + \sum_{j=2}^{k-1} (\beta_j + \tilde{\beta}_j) \nabla_x \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_m} + \beta_k \nabla_x \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Para aplicarmos o Lema 5.2.6 com mais clareza, fixaremos a seguinte notação: seja $A_i(x) = (a_{1i}(x), \dots, a_{mi}(x))$ tal que

$$A_i := \begin{cases} U_i, & i = 1, \dots, n-k; \\ \nabla \mathbf{M}_i, & i = n, \dots, m; \end{cases}$$

$$A_{n-k+j-1} := \nabla \Delta_j, \quad j = 2, \dots, k;$$

$$\alpha_i := \begin{cases} \mu_i, & i = 1, \dots, n-k; \quad (\alpha_1 \neq 0, \text{ pois } z(x) \neq v(x)) \\ (\lambda_i + \tilde{\lambda}_i), & i = n, \dots, m; \end{cases}$$

$$\alpha_{n-k+j-1} := (\beta_j + \tilde{\beta}_j), \quad j = 2, \dots, k; \quad (\tilde{\beta}_k = 0).$$

Então, como $z(x) + \sum_{j=n}^m \lambda_j \nabla \mathbf{M}_j(x) + \sum_{j=2}^{k+1} \beta_j \nabla \Delta_j(x) = 0$ em p , pela expres-

são 5.13, temos

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i = \vec{0}$$

em p . Isto é,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ji}(p) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

E pelo Lema 5.2.6, obtemos

$$\alpha_1 \operatorname{cof}(a_{ik}) - \alpha_k \operatorname{cof}(a_{i1}) = 0, \quad (5.15)$$

no ponto p , para $i, k = 1, \dots, m$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta_{k+1} &= \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, U_1, \dots, U_{n-k}) \\ &= \det(A_n, \dots, A_m, A_{n-k+1}, \dots, A_{n-1}, A_1, \dots, A_{n-k}) \\ &= (-1)^\varepsilon \det(A_1, \dots, A_m) \end{aligned}$$

em que $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 1$, dependendo do número de permutações necessárias entre as colunas da matriz $(A_n, \dots, A_m, A_{n-k+1}, \dots, A_{n-1}, A_1, \dots, A_{n-k})$ para obtermos a matriz (A_1, \dots, A_m) . Deste modo,

$$\begin{aligned} (-1)^\varepsilon \nabla \Delta_{k+1} &= \sum_{i,j=1}^m \operatorname{cof}(a_{ij}) \nabla a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\operatorname{cof}(a_{i1}) \nabla a_{i1} + \sum_{j=2}^m \operatorname{cof}(a_{ij}) \nabla a_{ij} \right) \\ &\stackrel{\alpha_1 \neq 0}{=} \sum_{i=1}^m \left(\operatorname{cof}(a_{i1}) \nabla a_{i1} + \sum_{j=2}^m \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \operatorname{cof}(a_{i1}) \nabla a_{ij} \right) \end{aligned}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} (-1)^\varepsilon \alpha_1 \nabla \Delta_{k+1} &= \sum_{i=1}^m \left(\alpha_1 \operatorname{cof}(a_{i1}) \nabla a_{i1} + \sum_{j=2}^m \alpha_j \operatorname{cof}(a_{i1}) \nabla a_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j \nabla a_{ij} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \mathcal{L}_i \end{aligned} \quad (5.16)$$

em que $\mathcal{L}_i, i = 1, \dots, m$ denotam as linhas da matriz Jacobiana 5.14.

Voltando à matriz 5.11, denotaremos por $L_i, i = 1, \dots, m$, suas m primeiras linhas e por $L_{\Delta_{k+1}}$ sua última linha. Considerando a expressão 5.16 e substituindo a linha $L_{\Delta_{k+1}}$ por

$$(-1)^\varepsilon \alpha_1 L_{\Delta_{k+1}} - \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) L_i, \quad (5.17)$$

obtemos

$$L_{\Delta_{k+1}} := (\underbrace{0, \dots, 0}_m, \gamma_n, \dots, \gamma_m, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_k, \gamma_{k+1})$$

em que

$$\gamma_j = - \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_i}, \quad j = n, \dots, m;$$

$$\tilde{\gamma}_j = - \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_i}, \quad j = 2, \dots, k+1.$$

Mas note que, para $j = n, \dots, m$,

$$\gamma_j = - \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_i} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_1} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{M}_j}{\partial x_m} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_j = - \det(A_j, A_2, \dots, A_m) = 0$$

e para $j = 2, \dots, k$,

$$\tilde{\gamma}_j = - \sum_{i=1}^m \operatorname{cof}(a_{i1}) \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_i} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_1} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_j}{\partial x_m} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_j = - \det(A_{n-k+j-1}, A_2, \dots, A_m) = 0.$$

Portanto, após a substituição da linha $L_{\Delta_{k+1}}$ na matriz 5.11, obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{cccccc}
 & & & & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \Delta_{k+1}}{\partial x_1} \\
 \text{Jac} \left(z + \sum_{i=n}^m \lambda_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^k \beta_j \nabla \Delta_j \right) & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \frac{\partial \mathbf{M}_n}{\partial x_m} \dots \frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial x_m} \frac{\partial \Delta_2}{\partial x_m} \dots \frac{\partial \Delta_k}{\partial x_m} & \frac{\partial \Delta_{k+1}}{\partial x_m} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_n & \vdots & & & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 & \nabla_x \mathbf{M}_m & \vdots & & & 0 \\
 & \nabla_x \Delta_2 & \vdots & O_{(m-n+k-1)} & & 0 \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 & \nabla_x \Delta_k & \vdots & & & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \vec{0} & \vdots & & \vec{0} & \gamma_{k+1}^{\tilde{}}
 \end{array} \right] \quad (5.18)$$

Mostremos que $\gamma_{k+1}^{\tilde{}}(p) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 \gamma_{k+1}^{\tilde{}} &= - \sum_{i=1}^m \text{cof}(a_{i1}) \frac{\partial \Delta_{k+1}}{\partial x_i} \\
 &= - \det(\nabla \Delta_{k+1}, A_2, \dots, A_m) \\
 &= - \det(\nabla \Delta_{k+1}, U_2, \dots, U_{n-k}, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, \nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m)
 \end{aligned}$$

Suponha que $\gamma_{k+1}^{\tilde{}} = 0$. Como cada um dos conjuntos $\{U_2, \dots, U_{n-k}\}$ e $\{\nabla \Delta_{k+1}, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, \nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m\}$ é linearmente independente no ponto p , existe $j \in \{2, \dots, n-k\}$ tal que

$$U_j \in N_p \Sigma^{k+1}(V).$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $j = n-k$, isto é,

$$U_{n-k} \in N_p \Sigma^{k+1}(V) = \langle \nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_k, \nabla \Delta_{k+1} \rangle.$$

Assim, $z|_{\Sigma^{k+1}} = \vec{0}$ em p implica que $z(p) \in N_p\Sigma^{k+1}(V)$. Logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_i + \underbrace{\sum_{i=n}^m \tilde{\lambda}_i \nabla \mathbf{M}_i + \sum_{j=2}^{k-1} \tilde{\beta}_j \nabla \Delta_j}_{\in N_p \Sigma^{k+1}} \in N_p \Sigma^{k+1}(V) \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^{n-k-1} \mu_i U_i = \sum_{i=1}^{n-k} \mu_i U_i - \mu_{n-k} U_{n-k} \in N_p \Sigma^{k+1}(V). \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n-k-1} \mu_i U_i$ e $\mu_{n-k} U_{n-k}$ são vetores linearmente independentes do subespaço vetorial $\langle U_1, \dots, U_{n-k} \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)$. Isto é,

$$\dim(\langle U_1(p), \dots, U_{n-k}(p) \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)) \geq 2.$$

Como $\langle V_1, \dots, V_n \rangle = \langle U_1, \dots, U_{n-k} \rangle \oplus (\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_p \Sigma^{k-1}(V))$, temos

$$\begin{aligned} \langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V) &= \langle U_1(p), \dots, U_{n-k} \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V) \\ &\oplus \langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_p \Sigma^{k-1}(V) \cap N_p \Sigma^{k+1}(V) \\ &= (\langle U_1(p), \dots, U_{n-k} \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)) \\ &\oplus (\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_p \Sigma^{k-1}(V)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\dim(\langle V_1, \dots, V_n \rangle \cap N_p \Sigma^{k+1}(V)) \geq 2 + (k-1) = k+1$$

em $p \in A_{k+1}(V)$, de onde segue que $p \in \Sigma^{k+2}(V)$. O que é uma contradição, uma vez que $\Sigma^{k+2}(V) = \Sigma^{k+1}(V) \setminus A_{k+1}(V)$ e sabemos que $p \in A_{k+1}(V)$. Portanto $\gamma_{k+1}^{\tilde{\cdot}}(p) \neq 0$.

Deste modo, a matriz 5.11 é não singular em p se, e somente se, a matriz 5.18 é não singular em p . O que ocorre se, e somente se, a matriz 5.12 é não singular no ponto p . ■

Observação 5.2.2. *Seja*

$$\mathbf{M}(x) = \begin{vmatrix} V_1^1(x) & \cdots & V_{n-1}^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{n-1}(x) & \cdots & V_{n-1}^{n-1}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

em $\mathcal{U} \subset M$, uma vizinhança na qual os respectivos conjuntos singulares podem ser escritos como

$$\Sigma^{n-2}(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{n-2}(x) = 0\},$$

$$\Sigma^{n-1}(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_{n-1}(x) = 0\},$$

$$\Sigma^n(V) = \{x \in \mathcal{U} : \mathbf{M}_n(x) = \dots = \mathbf{M}_m(x) = \Delta_2(x) = \dots = \Delta_n(x) = 0\},$$

com

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-2}) = m - 2, \text{ em } x \in \Sigma^{n-2}(V) \cap \mathcal{U},$$

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-1}) = m - 1, \text{ } x \in \Sigma^{n-1}(V) \cap \mathcal{U},$$

$$\text{rank}(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_n) = m, \text{ } x \in \Sigma^n(V) \cap \mathcal{U}.$$

Para cada $x \in \Sigma^{i-1}(V)$, $i \geq 2$, temos

$$\dim(\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{i-2}(V)) = i - 2$$

e

$$\Delta_i(x) = \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{i-1}, z_1^{i-1}, \dots, z_{n-i+1}^{i-1})(x)$$

em que $\{z_1^{i-1}(x), \dots, z_{n-i+1}^{i-1}(x)\}$ é base de um subespaço complementar ao subespaço $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{i-2}(V)$ em $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$.

Sabemos que se $p \in A_n(V)$, então $z|_{\Sigma^{n-1}(V)}(p) = \vec{0}$ e $z|_{\Sigma^{n-2}(V)} \neq \vec{0}$ em p . O lema a seguir mostra que, além disso, p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^{n-1}(V)}$.

Lema 5.2.8. *Se $p \in A_n(V)$, então p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^{n-1}(V)}$.*

Demonstração. Pelos Lemas 1.3.1 e 1.3.2, p é um zero não degenerado de

$z|_{\Sigma^{n-1}(V)}$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \Delta(p) = \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-1}, z)(p) = 0; \\ \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-1}, \nabla \Delta)(p) \neq 0. \end{cases}$$

Sabemos que $\Delta(p)$ é igual a zero. Mostremos que a segunda condição também é satisfeita.

Para cada $x \in \Sigma^{n-1}(V)$, consideramos $\{z'(x)\}$ uma base suave para um subespaço vetorial complementar a $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{n-2}(V)$ no espaço $\langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$. Então, como $z(x) \in \langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle$, temos

$$z(x) = \lambda(x)z'(x) + v(x),$$

com $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ e $v(x) \in \langle V_1(x), \dots, V_n(x) \rangle \cap N_x \Sigma^{n-2}(V)$, $\forall x \in \Sigma^{n-1}(V)$.

Em particular, se $x \in A_n(V)$, sabemos que $z|_{\Sigma^{n-2}(V)}(x) \neq \vec{0}$ e por isso, $z(x) \notin N_x \Sigma^{n-2}(V)$. Logo $\lambda(x) \neq 0$, $\forall x \in A_n(V)$.

Para todo $x \in \Sigma^{n-1}(V)$,

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-1}, \lambda z' + v)(x) \\ &= \lambda(x) \det(\nabla \mathbf{M}_n, \dots, \nabla \mathbf{M}_m, \nabla \Delta_2, \dots, \nabla \Delta_{n-1}, z')(x) \\ &= \lambda(x) \Delta_n(x). \end{aligned}$$

E como $\Delta_n(x) = 0$ e $\lambda(x) \neq 0$, $\forall x \in A_n(V)$, pelo Lema 4.0.9 temos

$$\begin{aligned} &\langle \nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_{n-1}(x), \nabla \Delta(x) \rangle \\ &= \langle \nabla \mathbf{M}_n(x), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(x), \nabla \Delta_2(x), \dots, \nabla \Delta_{n-1}(x), \nabla(\lambda \Delta_n)(x) \rangle \end{aligned}$$

Mas, $\nabla(\lambda \Delta_n)(x) = \nabla \lambda(x) \Delta_n(x) + \lambda(x) \nabla \Delta_n(x)$, $\Delta_n(p) = 0$ e $\lambda(p) \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} &\langle \nabla \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(p), \nabla \Delta_2(p), \dots, \nabla \Delta_{n-1}(p), \nabla \Delta(p) \rangle \\ &= \langle \nabla \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(p), \nabla \Delta_2(p), \dots, \nabla \Delta_{n-1}(p), \nabla \Delta_n(p) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\det(\nabla \mathbf{M}_n(p), \dots, \nabla \mathbf{M}_m(p), \nabla \Delta_2(p), \dots, \nabla \Delta_{n-1}(p), \nabla \Delta(p)) \neq 0$. ■

Lema 5.2.9. *O campo $z|_{\Sigma^k(V)}$ tem apenas zeros não degenerados, $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que $z|_{\Sigma^k(V)} = \vec{0}$ em p , então $p \in A_k(V) \cup A_{k+1}(V)$, pois $C(z|_{\Sigma^k(V)}) \cap \Sigma^{k+2}(V) = \emptyset$, (Lema 5.1.6) e $\Sigma^k(V) = A_k(V) \cup \Sigma^{k+1}(V)$.

Se $p \in A_k(V)$, então $z|_{A_k(V)} = \vec{0}$ em p . Como $z|_{A_k(V)}$ tem apenas zeros não degenerados, (Lemas 5.2.4 e 5.2.3) e $A_k(V) \subset \Sigma^k(V)$ é um subconjunto aberto, concluímos que p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^k(V)}$.

Se $p \in A_{k+1}(V)$ e $k \leq n-1$ então, pelo Lema 5.1.2, $z|_{\Sigma^{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p . Em particular, como $A_{k+1}(V) \subset \Sigma^{k+1}(V)$ é um subconjunto aberto, então $z|_{A_{k+1}(V)} = \vec{0}$ em p . Pelos Lemas 5.2.4 e 5.2.3, $z|_{A_{k+1}(V)}$ tem apenas zeros não degenerados, e novamente pelo fato de $A_{k+1}(V)$ ser um aberto de $\Sigma^{k+1}(V)$, concluímos que p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^{k+1}(V)}$. Portanto, pelo Lema 5.2.7, p é zero não degenerado de $z|_{\Sigma^k(V)}$. Por fim, se $p \in A_{k+1}(V)$ e $k = n-1$, isto é, $p \in A_n(V)$, pelo Lema 5.2.8, p é um zero não degenerado de $z|_{\Sigma^{n-1}(V)}$. ■

Ao longo deste capítulo, pudemos verificar que um campo genérico

$$z(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(x),$$

associado a um n -campo de Morin $V = (V_1, \dots, V_n)$, possui propriedades análogas às propriedades das projeções genéricas

$$L_a \circ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x),$$

associadas a uma aplicação de Morin $f = (f_1, \dots, f_n)$. Os resultados aqui exibidos para o contexto dos n -campos de Morin podem ser comparados aos lemas da Seção 2.2 utilizados na prova do Teorema 2.1.1 de T. Fukuda. Dessa forma, é natural que apliquemos estes resultados para obtermos uma generalização do Teorema 2.1.1 para o caso dos n -campos vetoriais. Concluímos este trabalho apresentando esta generalização no teorema a seguir, que tem como ponto-chave a aplicação do importante Teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 5.2.3. *Seja (V_1, \dots, V_n) um n -campo de Morin definido sobre uma variedade compacta m -dimensional M e seja*

$$z(x) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(x)$$

um campo de vetores com $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ satisfazendo as condições dos lemas anteriores. Então,

$$\chi(M) = \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(V)}) \pmod{2}.$$

Demonstração. Denotaremos por $C(v)$ o conjunto dos zeros de um campo vetorial v e por $\#C(v)$ o número de elementos neste conjunto, quando o mesmo for finito.

Como M é compacta e as subvariedades $\Sigma^k(V)$ são fechadas em M , pelo Teorema de Poincaré-Hopf obtemos

- $\chi(M) = \#C(z) \pmod{2}$;
- $\chi(\overline{A_k(V)}) = \chi(\Sigma^k(V)) = \#C(z|_{\Sigma^k(V)}) \pmod{2}$, $k = 1, \dots, n-1$;
- $\chi(\overline{A_n(V)}) = \chi(\Sigma^n(V)) = \#C(z|_{\Sigma^n(V)}) \pmod{2}$.

Pelo Lema 5.1.1, se $p \in C(z)$, então $p \in \Sigma^1(V)$ e $z|_{\Sigma^1(V)} = \vec{0}$ em p . Além disso, pelo Lema 5.1.5, $C(z) \cap \Sigma^2(V) = \emptyset$. Logo $p \in A_1(V)$. Por outro lado, o Lema 5.1.2 nos diz que se $p \in C(z|_{\Sigma^1(V)}) \cap A_1(V)$, então p também é um zero do campo z . Assim,

$$\#C(z) = \#C(z|_{\Sigma^1(V)} \cap A_1(V)) \pmod{2}.$$

Pelo Lema 5.1.6, se $p \in C(z|_{\Sigma^k(V)})$, então $p \notin \Sigma^{k+2}(V)$. Logo,

$$p \in A_k(V) \cup A_{k+1}(V)$$

e assim, para $k = 1, \dots, n-1$, temos

$$\#C(z|_{\Sigma^k(V)}) = \#C(z|_{\Sigma^k(V)} \cap A_k(V)) + \#C(z|_{\Sigma^k(V)} \cap A_{k+1}(V)) \pmod{2}.$$

Temos ainda, pelo Lema 5.1.2,

$$\#C(z|_{\Sigma^k(V)} \cap A_{k+1}(V)) = \#C(z|_{\Sigma^{k+1}(V)} \cap A_{k+1}(V))$$

e pelo Lema 5.1.3,

$$\#A_n(V) = \#C(z|_{\Sigma^{n-1}(V)} \cap A_n(V)).$$

Deste modo,

- $\chi(M) = \#C(z_{|\Sigma^1(V)} \cap A_1(V)) \pmod 2;$

- Para $k = 1, \dots, n - 1,$

$$\chi(\overline{A_k(V)}) = \#C(z_{|\Sigma^k(V)} \cap A_k(V)) + \#C(z_{|\Sigma^{k+1}(V)} \cap A_{k+1}(V)) \pmod 2;$$

- $\chi(\overline{A_n(V)}) = \#C(z_{|\Sigma^{n-1}(V)} \cap A_n(V)).$

Portanto,

$$\begin{aligned} \chi(M) + \sum_{k=1}^n \chi(\overline{A_k(V)}) &= 2\#C(z_{|\Sigma^1(V)} \cap A_1(V)) \\ &+ 2\#C(z_{|\Sigma^2(V)} \cap A_2(V)) + \dots \\ &+ 2\#C(z_{|\Sigma^{n-1}(V)} \cap A_{n-1}(V)) \\ &+ 2\#C(z_{|\Sigma^{n-1}(V)} \cap A_n(V)) \pmod 2 \\ &= 0 \pmod 2. \end{aligned}$$

■

5.3 Considerações finais

Na primeira parte deste trabalho, vimos que o Teorema 3.1.2 de N. Dutertre e T. Fukui melhora o resultado 2.1.1 de T. Fukuda, exibindo não mais uma congruência módulo 2, mas uma igualdade que relaciona a topologia de uma variedade diferenciável M à topologia dos conjuntos singulares $\overline{A_k^+}(f)$ e $\overline{A_k^-}(f)$ de uma aplicação de Morin f definida sobre M .

No Capítulo 3, exibimos uma nova prova para o Teorema 3.1.2 que utiliza os lemas de T. Fukuda apresentados no Capítulo 2 e, em especial, a teoria de Morse para variedades com bordo. Deste modo, parece adequado aplicarmos novamente o Teorema de Poincaré-Hopf para provarmos uma generalização do Teorema 3.1.2 de N. Dutertre e T. Fukui para o contexto dos n -campos de Morin, que melhore o Teorema 5.2.3 ao apresentar uma igualdade relacionando a topologias de uma variedade diferenciável M às topologias dos conjuntos singulares de um n -campo de Morin definido sobre M .

Assim, dentre os trabalhos futuros relacionados aos resultados apresentados nesta tese, nosso próximo objetivo é encontrar uma definição adequada

para o que seriam os conjuntos singulares $\overline{A_k^+(V)}$ e $\overline{A_k^-(V)}$ de um n -campo de Morin V . Se com esta definição pudermos obter propriedades semelhantes às propriedades das variedades $\overline{A_k^+(f)}$ e $\overline{A_k^-(f)}$ de uma aplicação de Morin f , a nova prova do Teorema 3.1.2 apresentada no Capítulo 3 indicará um possível caminho para a generalização do Teorema 3.1.2 que melhora 5.2.3.

Referências Bibliográficas

- [1] Nicolas Dutertre. *Sur le calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'ensembles semi-algébriques et de fibres de Milnor réelles*. PhD thesis, L'Université de Rennes 1-Institut de Recherche Mathématiques de Rennes, Rennes, France, 1998.
- [2] Nicolas Dutertre and Toshizumi Fukui. On the topology of stable maps. *J. Math. Soc. Japan*, 66(1):161–203, 2014.
- [3] Takuo Fukuda. Topology of folds, cusps and Morin singularities. In *A fête of topology*, pages 331–353. Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [4] C.G. Gibson. *Singular points of smooth mappings*. Research notes in mathematics. Pitman, 1979.
- [5] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*. AMS Chelsea Publishing Series. American Mathematical Soc., 2010.
- [6] Helmut A. Hamm and Lê Dung Tráng. Un théorème de Zariski du type de Lefschetz. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 6:317–355, 1973.
- [7] Hisao Kamiya. Weighted trace functions as examples of Morse functions. *J. Fac. Sci. Shinshu Univ.*, 6:85–96, 1971.
- [8] Harold I. Levine. Mappings of manifolds into the plane. *Amer. J. Math.*, 88:357–365, 1966.
- [9] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

- [10] Bernard Morin. Formes canoniques des singularités d'une application différentiable. *Comptes Rendus Hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 260(25):6503–6506, 1965.
- [11] I. Nakai. Elementary topology of stratified mappings. In *Singularities—Sapporo 1998*, volume 29 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 221–243. Kinokuniya, Tokyo, 2000.
- [12] I. Nakai. Characteristic classes and fiber products of smooth mappings. Preprint.
- [13] Osamu Saeki. Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 117(2):223–235, 1995.
- [14] Zbigniew Szafraniec. The Euler characteristic of algebraic complete intersections. *J. Reine Angew. Math.*, 397:194–201, 1989.
- [15] Zbigniew Szafraniec. A formula for the Euler characteristic of a real algebraic manifold. *Manuscripta Math.*, 85(3-4):345–360, 1994.
- [16] R. Thom. Les singularités des applications différentiables. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 6:43–87, 1955–1956.
- [17] O. Ya. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. In *Topology and geometry—Rohlin Seminar*, volume 1346 of *Lecture Notes in Math.*, pages 127–138. Springer, Berlin, 1988.
- [18] Yosef Yomdin. The structure of strata $\mu = \text{const}$ in a critical set of a complete intersection singularity. In *Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981)*, volume 40 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 663–665. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.