Comportamento assintótico de sistemas não lineares discretos ¹

Luís Roberto Almeida Gabriel Filho

Orientador: *Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos

Março/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

Ofereço

*À minha noiva,
Camila.*

*Ao meu irmão,
Leonardo.*

*Aos meus pais,
Gabriel e Delfina.*

*Às minhas avós,
Luzinete e Nadyr.*

Agradecimentos

Ao professor Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues pela dedicação, responsabilidade e determinação com que orientou este trabalho. A sua humildade, paciência, tolerância e sabedoria fizeram com que as barreiras quase intransponíveis que enfrentei pudessem ser superadas.

Ao meu pai Luiz Roberto Almeida Gabriel que nunca desistiu de acreditar em mim na sua ilimitada sabedoria.

À minha mãe Delfina Aparecida Rigo Gabriel e ao meu irmão Leonardo Rigo Almeida Gabriel pelo carinho e paciência que sempre tiveram comigo.

Aos professores Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon e Dr. José Gaspar Ruas Filho pela amizade e apoio nos momentos mais difíceis da realização de minha pós-graduação.

Aos amigos Germán Jesús Lozada Cruz e Ricardo Parreira da Silva pelas preciosas contribuições dadas neste trabalho.

Aos professores Francisco Regis Zago de Oliveira e Ricardo Toshio Kuniyoshi pela grande amizade, pelo apoio e por estarem presentes nas horas mais incertas.

Aos professores Antônio Assis de Carvalho Filho, José Roberto Nogueira, Luiz Carlos Benini, Márcio Cardim, Messias Meneguette Júnior e Suetônio de Almeida Meira pelo apoio e incentivo durante toda a minha formação acadêmica.

À minha querida amiga Celeste Corral Tacaci Neves Baptista por estar presente nos momentos mais difíceis de minha vida.

À minha futura esposa Camila Pires Cremasco pelo seu amor.

Aos colegas de curso, aos professores e funcionários do ICMC e, de uma forma geral, a todos que de alguma maneira contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos em primeiro lugar um estudo de dois trabalhos de J. P. LaSalle, abordando o comportamento assintótico de sistemas discretos.

Em segundo lugar, estudamos a dinâmica de um sistema discreto que depende de um parâmetro $\lambda \in \Lambda$, da forma $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$. Como uma parte deste objetivo geral, desenvolvemos técnicas para obter estimativas uniformes (em relação ao parâmetro $\lambda \in \Lambda$) do atrator quando o sistema for globalmente dissipativo. Esses métodos são baseados em funções auxiliares tipo Liapunov. No final deste trabalho, apresentamos algumas simulações envolvendo sistemas discretos caóticos, como os sistemas de Chua, Hénon, Ikeda, Lorenz e Rössler.

Abstract

Firstly, in this work, we present a study of part of two works by J. P. LaSalle, concerning with asymptotic behavior of discrete systems.

Secondly, we study the dynamics of a discrete system that depends on a parameter $\lambda \in \Lambda$, of the form $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$. As part of this general purpose, we develop techniques to obtain uniform estimates (with respect to the parameter $\lambda \in \Lambda$) of the attractor when the system is globally dissipative. These methods are based on auxiliary functions of Liapunov type. In the last part of this work we present some simulations envolving chaotic discrete systems, namely: Chua, Hénon, Ikeda, Lorenz and Rössler.

Sumário

Introdução	1
1 Sistemas Semidinâmicos Discretos	3
1.1 Equações de Diferenças	3
1.2 Sistemas Dinâmicos Discretos em $\mathbb{R}^m$	5
1.3 Conjunto Limite de Órbitas	6
1.4 Invariância	8
1.5 Propriedades Básicas dos Conjuntos Limites	15
1.6 Funções de Liapunov. Uma extensão do método direto de Liapunov	23
1.7 Estabilidade e Instabilidade	29
2 Sistemas Semidinâmicos Discretos Não Lineares	37
2.1 Teoremas e Métodos	37
2.2 Exemplos de Sistemas Não Lineares	53
2.3 Simulações	55
2.3.1 Atrator de Chua Discreto	55
2.3.2 Atrator de Hénon	57
2.3.3 Atrator de Ikeda	58
2.3.4 Atrator de Lorenz Discreto	59
2.3.5 Atrator de Rössler Discreto	61
2.4 Comentários Finais	62
Bibliografia	63

Introdução

Devido à grande variedade de aplicações, cientistas de áreas aplicadas têm concentrado esforços no estudo de sistemas não lineares. O objetivo deste trabalho é desenvolver métodos matemáticos para estudar o comportamento assintótico de sistemas não lineares discretos. Utilizamos alguns resultados de J. P. LaSalle, [17, 18]. Vamos considerar um sistema discreto do tipo $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, definido em um espaço de Banach.

Dentro de certas condições, provamos que existe um conjunto limitado $\mathcal{B}$, independente de parâmetros, com a propriedade que toda solução do sistema entra neste conjunto em um número finito de iterações, não saindo mais dele. O conjunto $\mathcal{B}$ fornece, então, uma estimativa uniforme para o atrator. Para a realização desta etapa, utilizamos técnicas adaptadas à sistemas discretos de funções tipo Liapunov, correspondentes a algumas já conhecidas para sistemas contínuos.

Os modelos matemáticos envolvendo sistemas não lineares vêm sendo aplicados com sucesso em problemas de engenharia elétrica nos trabalhos de Rodrigues - Alberto - Bretas [26, 27] em problemas parabólicos, Carvalho - Dlotko - Rodrigues [4] em problemas de sistemas de comunicação, Gameiro - Rodrigues [7] em osciladores gerais, Afraimovich - Rodrigues [1, 2, 24, 25] estudando dissipatividade uniforme de equações diferenciais autônomas e não autônomas, e Labouriau - Rodrigues [16] estudando sincronização de células.

Dada uma função contínua $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que $x' = Tx$ é uma equação de diferenças, onde $x'(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Um sistema semidinâmico discreto em $\mathbb{R}^m$ é uma função $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua satisfazendo $\pi(0, x) = x$ e $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n+k, x)$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^m$. Toda equação de diferenças define um

sistema semidinâmico π da forma $\pi(n, x) = T^n(x), x \in \mathbb{R}$. A órbita $T^n x$ de x refere-se à seqüência $T^n x, n \in \mathbb{N}$.

Neste trabalho foram desenvolvidos teoremas inéditos e métodos que serão úteis para o desenvolvimento de aplicações e simulações. Citamos a seguir, um resultado fundamental desenvolvido.

Sejam contínuas as funções $T : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m, V : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$; e também contínuas as funções $a, b, c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $0 \leq a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x)$, $a(x) \rightarrow \infty$, quando, $|x| \rightarrow \infty$ e $-\dot{V}(x, \lambda) := V(x, \lambda) - V(Tx, \lambda) \geq c(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $\lambda \in \Lambda$. Sejam $\{x \in \mathbb{R}^m : c(x) < 0\} \neq \emptyset$, $\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^m : c(x) \leq 0\}$ limitado, R e μ tais que $R > \sup_{x \in \mathcal{C}} b(x)$ e $-\mu \leq \min_{x \in \mathcal{C}} c(x)$, e consideremos os conjuntos $B_R := \{x \in \mathbb{R}^m : b(x) \leq R\}$ e $A_{R+\mu} := \{x \in \mathbb{R}^m : a(x) \leq R + \mu\}$. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Então, (i) se $x_0 \in B_R$, temos que $T^n(x_0, \lambda_0) \in A_{R+\mu}, \forall n \in \mathbb{N}$; (ii) se $x_0 \in \mathbb{R}^m$, existe $n_0 = n_0(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x_0, \lambda_0) \in A_{R+\mu}, \forall n \geq n_0$; e (iii) se $x_0 \in \mathbb{R}^m$, existe subsequência $n_j \in \mathbb{N}$, com $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tal que $T^{n_j}(x_0, \lambda_0) \in B_R, \forall j \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, considerando $T : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m, V : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+, a, c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo $0 \leq a(x) \leq V(x, \lambda)$, $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e $-\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $\lambda \in \Lambda$; e, se $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda_0 \in \Lambda$, então $\mathcal{E}_c := \{x \in \mathbb{R}^m : c(x) = 0\} \neq \emptyset$ e $T^n(x_0, \lambda_0)$ tende, quando $n \rightarrow \infty$, para o maior conjunto invariante contido em $\mathcal{E}_c$. Em particular, fizemos um estudo detalhado de sistemas discretos lineares e sistemas não lineares perturbados dos mesmos.

Quando X for um espaço de Banach, Γ subconjunto compacto de um espaço de Banach, se $\sigma(A_\gamma)$ contido no interior do disco unitário com centro na origem $\forall \gamma \in \Gamma$, e a aplicação $\Gamma \ni \gamma \mapsto A_\gamma \in \mathcal{L}(X)$ for contínua, temos que existem $M > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que $|A_\gamma^k| \leq M\theta^k$ e $r(A_\gamma) \leq \theta$ para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{N}$, onde denotamos $r(A_\gamma)$ o raio espectral de A_γ .

No Capítulo 1, apresentamos alguns resultados sobre sistemas semidinâmicos discretos. Na verdade, este capítulo descreve nosso estudo e interpretação dos livros [17, 18] de J. P. LaSalle. No Capítulo 2, apresentamos alguns teoremas inéditos, juntamente com suas demonstrações, os quais serão muito úteis no estudo de vários exemplos desenvolvidos em simulações.

Capítulo 1

Sistemas Semidinâmicos Discretos

Neste capítulo, faremos a descrição de sistemas dinâmicos discretos, estudando conceitos e propriedades. Analisaremos invariância e propriedades de conjuntos limites. Introduziremos o conceito de estabilidade e, com o auxílio de funções de Liapunov, estudaremos o Princípio da Invariância.

1.1 Equações de Diferenças

Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto de todos inteiros, $\mathbb{N}$ o conjunto de todos inteiros não negativos e $\mathbb{R}^m$ o espaço Euclidiano de dimensão m , munido da norma Euclidiana representada por $|x|$.

Seja $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos x' e $\dot{x}$ funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^m$ definidas por $x'(n) = x(n+1)$ e $\dot{x} = x' - x$. Consideremos a função $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. A equação de diferenças:

$$x' = Tx \tag{1.1}$$

é dada por $x(n+1) = T(x(n))$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A solução do problema de valor inicial

$$x' = Tx, \quad x(0) = x^0 \tag{1.2}$$

é $x(n) = T^n(x^0)$, $n \in \mathbb{N}$, onde T^n é a n -ésima iterada de T , à saber, $T^{n+1} = T(T^n)$ e $T^0 = I$

é a função identidade. O produto de funções utilizado é a composição. A equação (1.2) é simplesmente um algoritmo definindo a função x .

Proposição 1.1.1. *Seja $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua e*

$$u(n+m) = g(u(n), u(n+1), \dots, u(n+m-1)). \quad (1.3)$$

Chamamos (1.3) de uma equação de diferenças de ordem m , que é equivalente a um sistema de m equações de diferenças de primeira ordem.

Prova:

De fato, primeiramente notemos que o valor de u em $n+1$ depende dos valores de u em $n, n-1, \dots, n-m+1$. A equação (1.3) pode ser escrita na forma (1.1) definindo $x_1(n) = u(n)$, $x_2(n) = u(n+1)$, $\dots$, $x_m(n) = u(n+m-1)$. Notemos que:

$$\begin{aligned} x_2(n) &= u(n+1) = x_1(n+1) = x'_1(n) \Rightarrow x_2 = x'_1 \\ x_3(n) &= u(n+2) = x_2(n+1) = x'_2(n) \Rightarrow x_3 = x'_2 \\ &\vdots \\ x_{m-1}(n) &= u(n+m-2) = x_{m-2}(n+1) = x'_{m-2}(n) \Rightarrow x_{m-1} = x'_{m-2} \\ x_m(n) &= u(n+m-1) = x_{m-1}(n+1) = x'_{m-1}(n) \Rightarrow x_m = x'_{m-1} \end{aligned}$$

E também, desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} g(x_1(n), x_2(n), \dots, x_m(n)) &= g(u(n), u(n+1), \dots, u(n+m-1)) \\ &= u(n+m) \\ &= x_m(n+1) \\ &= x'_m(n). \end{aligned}$$

Portanto, $g(x_1, x_2, \dots, x_m) = x'_m$. Logo, (1.3) é equivalente à um sistema de m equações

de diferenças de primeira ordem $x' = Tx$, onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} \quad e \quad Tx = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

1.2 Sistemas Dinâmicos Discretos em $\mathbb{R}^m$

Assumimos daqui em diante $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua.

Definição 1.2.1. Um sistema semidinâmico discreto em $\mathbb{R}^m$ é uma função $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo para todo $n, k \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^m$:

- (i) $\pi(0, x) = x$;
- (ii) $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n + k, x)$;
- (iii) π é contínua.

Observação 1.2.1. Dizemos que a função π é um sistema dinâmico quando trocamos $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$ na Definição 1.2.1.

Toda equação de diferenças (1.1) define um sistema semidinâmico π da forma $\pi(n, x) := T^n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. De fato, $\pi(0, x) = T^0x = x$ e, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, temos:

$$\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n, T^k x) = T^n(T^k x) = T^{n+k}x = \pi(n + k, x).$$

Também, todo sistema semidinâmico está associado à uma equação de diferenças (1.1) da forma $T(x) := \pi(1, x)$. Notemos que $T^2x = T(Tx) = T(\pi(1, x)) = \pi(1, \pi(1, x)) = \pi(2, x)$. E se $T^r x = \pi(r, x)$, para $r \in \mathbb{N}$, temos $T^{r+1}x = T^r(Tx) = \pi(r, Tx) = \pi(r, \pi(1, x)) = \pi(r+1, x)$. Portanto, $T^n(x) = \pi(n, x)$.

Exemplo 1.2.1. Seja $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi(n, x) = x.e^n$. Então π é um sistema semidinâmico. De fato, π é contínua e, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n, k \in \mathbb{N}$, temos $\pi(0, x) = x.e^0 = x$ e $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n + k, x)$, pois

$$\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n, x.e^k) = (x.e^k)e^n = x.e^{n+k} = \pi(n + k, x).$$

Definição 1.2.2. Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. A órbita $T^n x$ de x refere-se à seqüência $x, Tx, \dots, T^n x, \dots$.

1.3 Conjunto Limite de Órbitas

Definição 1.3.1. Sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e L, S subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Definimos ρ da seguinte forma: $\rho(x, S) := \inf\{|y - x| : y \in S\}$ e $\rho(S, L) := \sup_{y \in S} \rho(y, L) = \sup_{y \in S} \inf\{|x - y| : x \in L\}$. Notemos que, em geral, $\rho(S, L) \neq \rho(L, S)$. Consideremos as seqüências $x_n \in \mathbb{R}^m$ e $S_n \subset \mathbb{R}^m$, S_n subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que x_n aproxima-se de S , ou $x_n \rightarrow S$, se $\rho(x_n, S) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Dizemos que S_n aproxima-se de S , ou $S_n \rightarrow S$, se $\rho(S_n, S) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Denotamos por $\overline{S}$ o fecho de S , $\mathbb{C} S$ o complementar de S e ∂S a fronteira de S . Um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ aberto B é dito vizinhança de S se $\overline{S} \subset B$. Sendo $r \in \mathbb{R}_+$, definimos $B_r(S) := \{x \in \mathbb{R}^m : \rho(x, S) < r\}$, $T(S) := \{T(x) : x \in S\}$ e $T^{-1}(S) := \{z \in \mathbb{R}^m : T(z) \in S\}$ a imagem inversa de S .

Definição 1.3.2. Um ponto y é chamado ponto limite de $T^n x$ se existir uma seqüência de inteiros n_i tal que $T^{n_i} x \rightarrow y$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Chamamos de conjunto ω -limite da órbita $T^n x$ de x ao conjunto de todos pontos limites de $T^n x$, e denotamos $\Omega(x)$.

Proposição 1.3.1. *Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Então*

$$\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}. \quad (1.4)$$

Prova:

Seja $y \in \Omega(x)$. Então, existe uma seqüência $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_i} x \rightarrow y$ e $n_i \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$. Logo, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $n_{i_0} \in \{n_i, i \in \mathbb{N}\}$ tal que $n_{i_0} > j$. Podemos supor, sem perda

de generalidade, (n_i) crescente. Agora, a seqüência $T^{n_i}x, n_i \geq n_{i_0}$, converge para y e é uma subsequência de $T^n x, n \geq j$. Logo, $y \in \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}, \forall j \in \mathbb{N}$, o que implica $y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}$.

Provemos agora a outra inclusão. Sejam $A_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x$ e $y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{A_j}$. Então $y \in \overline{A_0}$. Logo, existe uma seqüência em A_0 convergindo para y . Seja $y_0 = T^{n_0}x$ um termo desta seqüência, tal que $|y - y_0| < 1$, para algum $n_0 \geq 0$. Como $y \in \overline{A(n_0+1)}$, existe uma seqüência em A_{n_0+1} convergindo para y . Seja $y_1 = T^{n_1}x$ um termo desta seqüência, tal que $|y - y_1| < 1/2$, para algum $n_1 \geq n_0 + 1$. Como $y \in \overline{A(n_1+1)}$, existe uma seqüência em A_{n_1+1} convergindo para y . Seja $y_2 = T^{n_2}x$ um termo desta seqüência, tal que $|y - y_2| < 1/2^2$, para algum $n_2 \geq n_1 + 1$.

Desta maneira, criamos uma seqüência $y_k \in \mathbb{R}^m$ tal que $|y - y_k| < 1/2^k$, $y_k = T^{n_k}x$ e $n_k > n_{k-1}$, pois $n_k \geq n_{k-1} + 1$, ou seja n_k é estritamente crescente. Portanto, $y_k \rightarrow y$ ou $T^{n_k}x \rightarrow y$ e $n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$, isto é, $y \in \Omega(x)$. ■

Definição 1.3.3. Dado $H \subset \mathbb{R}^m$, definimos:

$$\Omega(H) := \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}. \quad (1.5)$$

Proposição 1.3.2. Se $H \subset \mathbb{R}^m$, então $y \in \Omega(H)$ se, e somente se, existirem seqüências $n_j \in \mathbb{N}$ e $y_j \in H$ tais que $T^{n_j}y_j \rightarrow y$ e $n_j \rightarrow \infty$, quando $j \rightarrow \infty$.

Prova:

Suponhamos que existam seqüências $n_i \in \mathbb{N}$ e $y_i \in H$ tais que $T^{n_i}y_i \rightarrow y \in \mathbb{R}^m$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Podemos supor, sem perda de generalidade (n_i) crescente. Logo, dado $j \in \mathbb{N}$, existe $i_0 \in \{n_i\}$ tal que $i_0 > j$. Agora, a seqüência $T^{n_i}y_i, i \geq i_0$, converge para y e $T^{n_i}y_i \in T^{n_i}(H) \subset \bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)$, para $i \geq i_0$. Desta forma, $y \in \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}, \forall j \in \mathbb{N}$, o que acarreta $y \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}$.

Provemos a outra implicação. Sejam $A_j = \bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)$ e $y \in \Omega(H) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{A_j}$. Como $y \in \overline{A_0}$, existe uma seqüência em A_0 convergindo para y . Seja $w_0 = T^{n_0}y_0$ um termo desta seqüência, tal que $|y - w_0| < 1$, para alguns $n_0 \geq 0$ e $y_0 \in H$. Como $y \in \overline{A(n_0+1)}$, existe uma seqüência em A_{n_0+1} convergindo para y . Seja $w_1 = T^{n_1}y_1$ um termo desta seqüência,

tal que $|y - w_1| < 1/2$, para algum $n_1 \geq n_0 + 1$ e algum $y_1 \in H$. Como $y \in \overline{A_{n_1+1}}$, existe uma seqüência em A_{n_1+1} convergindo para y . Seja $w_2 = T^{n_2}y_2$ um termo desta seqüência, tal que $|y - w_2| < 1/2^2$, para alguns $n_2 \geq n_1 + 1$ e $y_2 \in H$.

Desta maneira, criamos uma seqüência $y_k \in H$ tal que $|y - y_k| < 1/2^k$, $w_k = T^{n_k}y_k$ e $n_k > n_{k-1}, k \geq 1$, pois $n_k \geq n_{k-1} + 1$, ou seja n_k é estritamente crescente. Portanto, $w_k \rightarrow y$ ou $T^{n_k}y_k \rightarrow y$ e $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, o que completa a demonstração. ■

Corolário 1.3.3. *Dado $x \in H$, temos*

$$\Omega(x) \subset \Omega(H), \quad \forall x \in H. \quad (1.6)$$

Prova:

Seja $y \in \Omega(x)$. Logo, existe seqüência $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_i}x \rightarrow y$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Tomando $y_i = x$, concluimos que $y \in \Omega(H)$. ■

1.4 Invariância

Definição 1.4.1. Relativamente à $x(n+1) = T(x(n))$, ou à função T , um conjunto H é chamado positivamente (negativamente) invariante se $T(H) \subset H$ ($H \subset T(H)$). Se $T(H) = H$, dizemos que H é invariante.

Exemplo 1.4.1. Se $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a função identidade em $\mathbb{R}^m$ ($T = I$) e H um conjunto em $\mathbb{R}^m$. Então H é invariante.

Proposição 1.4.1. *Seja $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e H um conjunto invariante com um número finito de elementos. Então, $T|_H$ é inversível.*

Prova:

Pela invariância de H e continuidade de T , segue que $T(H) = H$ e então $T|_H$ é sobrejetora. Visto também que H tem um número finito de elementos, concluimos que $T|_H$ é também injetora. ■

Proposição 1.4.2. *Seja H um conjunto invariante e $T|_H$ inversível. Se $M \neq \emptyset$ é um subconjunto invariante de H , então $H - M$ é invariante.*

Prova:

Seja $x \in H - M$. Como H é invariante, então $Tx \in H$ e por $T|_H$ ser inversível, existe $y \in H$ tal que $Ty = x$. Mostremos que $H - M$ é positivamente invariante, isto é, $T(H - M) \subset H - M$. Suponhamos $Tx \in M$. Visto que M é invariante, existe $z \in M$ tal que $Tz = Tx$. Como $T|_H$ é inversível, temos $z = x$, o que é uma contradição. Logo, $Tx \in H - M$, implicando $T(H - M) \subset H - M$.

Seja $x \in H - M$. Por $T|_H$ ser inversível, existe $y \in H$ tal que $Ty = x$. Mostremos que $H - M$ é negativamente invariante, isto é, $H - M \subset T(H - M)$. Suponhamos que $y \in M$. Visto que M é invariante, temos $x = Ty \in M$, o que é uma contradição. Logo, $y \in H - M$, implicando $x = Ty \in T(H - M)$. Portanto $H - M \subset T(H - M)$. ■

Definição 1.4.2. Um conjunto fechado invariante H é chamado invariantemente conexo se ele não puder ser escrito como a reunião disjunta de dois conjuntos fechados não vazios e invariantes.

Exemplo 1.4.2. Seja $z' = Tz, z^0 = z(0) = (x^0, y^0)$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, -y)$. Tomando n_i a seqüência dos inteiros pares, temos que $T^{n_i}z^0 \rightarrow (x^0, y^0)$. Se tomarmos n_i a seqüência dos inteiros ímpares, temos que $T^{n_i}z^0 \rightarrow (x^0, -y^0)$. E qualquer outra subseqüência convergente de $T^n z^0$ converge para (x^0, y^0) ou $(x^0, -y^0)$. Logo, $\Omega(z^0) = \{(x^0, y^0), (x^0, -y^0)\}$. Notemos que $\Omega(z^0)$ é fechado e invariante. A única reunião não vazia que $\Omega(z^0)$ poderia ser expressado é $\Omega(z^0) = A \cup B$, onde $A = \{(x^0, y^0)\}$ e $B = \{(x^0, -y^0)\}$. Mas A e B não são invariantes. Logo $\Omega(z^0)$ é invariantemente conexo. Notemos também que $\Omega(z^0)$ é uma órbita periódica.

Definição 1.4.3. A órbita $T^n x$ é chamada periódica (ou cíclica) se para algum $k > 0, T^k x = x$. O menor inteiro k tal que isto ocorre é chamado de período da órbita ou ordem do ciclo. Se $k = 1, x$ é um ponto fixo de T e é chamado estado de equilíbrio de $x(n+1) = T(x(n))$.

Proposição 1.4.3. *Um conjunto invariante com número finito de elementos é invariantemente conexo se, e somente se, for uma órbita periódica.*

Prova:

Mostremos que se H é um conjunto invariantemente conexo com número finito de elementos, digamos $\#H = k$, então H é uma órbita periódica. Seja $x \in H$. Como H é invariante, então $T^n x \in H, \forall n \in \mathbb{N}$.

Notemos que $T^i x \neq T^j x$, para todo $i, j, 0 \leq i < j < k$. De fato, suponhamos $T^i x = T^j x$.

Como pela Proposição 1.4.1 $T|_H$ é inversível, então denotando $T = T|_H$, temos $T^{j-i} x = x$, implicando $\{x, Tx, \dots, T^{j-i} x\}$ invariante, à saber $0 \leq j - i < k$. Pela Proposição 1.4.2, temos também $H - \{x, Tx, \dots, T^{j-i} x\}$ invariante, o que é uma contradição, pois H é invariantemente conexo. Portanto, $T^i x \neq T^j x$, para todo $i, j, 0 \leq i < j < k$. Assim, $\{x, Tx, \dots, T^{k-1} x\}$ tem exatamente k elementos, o que acarreta $H = \{x, Tx, \dots, T^{k-1} x\}$.

Afirmamos agora que $T^k x = x$. Suponhamos $T^k x \neq x$. Logo, existe $i, 0 < i < k$, tal que $T^k x = T^i x$. Como $T|_H$ é inversível, temos $T^{k-i} x = x$, o que é uma contradição, pois $0 < k - i < k$. Portanto, $T^k x = x$.

E mais, k é o menor inteiro não nulo tal que $T^n x = x$, pois $T^i x \neq x$, para $0 < i < k - 1$. Portanto, $H = \{x, Tx, \dots, T^{k-1} x\}$ é uma órbita periódica.

Provemos a outra implicação. Suponhamos que H seja uma órbita periódica de período k , digamos $H = \{x, Tx, \dots, T^{k-1} x\}$ e $T^i x \neq T^j x$, para todo $i, j, 0 \leq i < j < k$. Seja M um subconjunto não vazio invariante de H . Então, existe $n_0, 0 \leq n_0 < k$ tal que $T^{n_0} x \in M$. Como M é invariante, $T^{n_0+n} x \in M, \forall n \in \mathbb{N}$. Assim, visto que $T^k x = x$, temos $M = H$, pois $\{T^{n_0} x, \dots, T^{k-1} x, T^k x, T^{k+1} x, \dots, T^{n_0+k-1} x\} \subset M$, o que implica $H \subset \{T^{n_0} x, \dots, T^{k-1} x, x, Tx, \dots, T^{n_0-1} x\} \subset M$. Agora, se H não fosse invariantemente conexo, então seria a união disjunta não vazia de dois conjuntos fechados invariantes M_1 e M_2 . Logo, $M_1 = M_2 = H$, o que é uma contradição, pois $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Portanto, H é invariantemente conexo. ■

Proposição 1.4.4. (i) *O fecho de um conjunto positivamente invariante é positivamente invariante*

(ii) *O fecho de um conjunto limitado invariante é invariante.*

Prova:

- (i) Mostremos que se $T(H) \subset H$, então $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$. De fato, seja $y \in T(\overline{H})$. Logo, existe $x \in \overline{H}$ tal que $y = Tx$, e desta forma, existe seqüência convergente $H \ni x_j \rightarrow x$. Visto que $T(x_j) \in H$, devido à $T(H) \subset H$, e pela continuidade de T , temos que

$$y = Tx = T(\lim x_j) = \lim(Tx_j) \in \overline{H} \Rightarrow y \in \overline{H}.$$

Portanto, $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$.

- (ii) Mostremos que se H é um conjunto limitado invariante, então $\overline{H}$ é invariante.

Seja $x \in \overline{H}$. Então existe seqüência $H \ni x_j \rightarrow x$. Da invariância de H , $x_j \in T(H)$. Logo, existe seqüência $y_j \in H$ tal que $x_j = T(y_j)$.

Devido a H ser limitado, temos que $\overline{H}$ é compacto, e podemos supor y_j convergente, pois poderíamos ter uma subsequência convergente. Daqui para a frente neste trabalho, este procedimento será feito sistematicamente sem mais explicação. Digamos $y_j \rightarrow y$. Pela continuidade de T , segue que:

$$x = \lim x_j = \lim T(y_j) = T(\lim y_j) = Ty \in T(\overline{H}) \Rightarrow x \in T(\overline{H}).$$

Portanto, $\overline{H} \subset T(\overline{H})$. O resultado segue pelo item (i). ■

Definição 1.4.4. $T_n x$ (definida para todo $n \in \mathbb{Z}$) é chamada extensão da órbita $T^n x$ se $T_0 x = x$ e $T(T_n x) = T_{n+1} x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observação 1.4.5. *Notemos que se $x \in H$, então $T_n x = T^n x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, se $H \neq \emptyset$ é invariante, então a órbita $T^n x$ tem sempre uma extensão, que pode não ser única e também pode não estar toda em H . De fato, mostremos primeiramente que $T_n x = T^n x$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

$$T_0 x = x = T^0 x,$$

$$T_1x = T(T_0x) = T^1x,$$

$$T_2x = T(T_1x) = T(T^1x) = T^2x.$$

Suponhamos que $T^rx = T_rx$, com $r \in \mathbb{N}$. Então, $T_{r+1}x = T(T_rx) = T(T^rx) = T^{r+1}x$. Portanto $T_nx = T^nx$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que existe pelo menos uma extensão de T^nx , quando $H \neq \emptyset$ é invariante. Pela invariância de H , temos que $x \in T(H)$. Logo, existe $y_1 \in H$ tal que $T(y_1) = x$. Tomemos $T_{-1}x = y_1$. Então, $T(T_{-1}x) = Ty_1 = x = T^0x$. Agora, $y_1 \in T(H)$. Logo, existe $y_2 \in H$ tal que $T(y_2) = y_1$. Tomemos $T_{-2}x = y_2$. Então, $T(y_2) = y_1 \Rightarrow T(T_{-2}x) = T^{-1}x$. Suponhamos que $T(T_{-r}x) = T_{-r+1}x$, com $r \in \mathbb{N}$ e $T_{-r}x \in H$. Seja $y_r = T_{-r}x$. Como $y_r \in T(H)$, então existe $y_{r+1} \in H$ tal que $T(y_{r+1}) = y_r$. Tomemos $T_{-r-1}x = y_{r+1}$. Assim, $T(y_{r+1}) = y_r \Rightarrow T(T_{-r-1}x) = T_{-r}x$. Desta forma, esboçamos a seqüência $T_{-n}x = y_n$, para $n \in \mathbb{N}$, em H , que juntamente com a seqüência $T_nx = T^nx, n \in \mathbb{N}$, formam uma extensão da órbita T^nx . E mais, esta extensão está toda em H .

Notemos ainda que a seqüência $y_n = T_{-n}x$, para $n \in \mathbb{N}$, pode não ser única, visto que a escolha de y_n pode também não ser também única. Entretanto, isto ocorre se T for inversível, o que será mostrado mais para a frente. De fato, mostremos que, se $x \in H$ e T inversível, então T^nx tem uma única extensão, à saber $T_nx = T^nx, n \in \mathbb{Z}$. E se H for invariante e apenas $T|_H$ inversível, então a extensão permanece em H . De fato,

$$T(T_{-1}x) = T(T^{-1}x) = x,$$

$$T(T_{-2}x) = T(T^{-2}x) = T^{-1}x = T_{-1}x.$$

Suponhamos $T(T_r x) = T_{r+1}x, r \in \mathbb{Z}_-$. Então

$$\begin{aligned}
 T(T_{r-1}x) &= T(T^{r-1}x) \\
 &= T(T^{-1}(T^r x)) \\
 &= T^{-1}(T(T_r x)) \\
 &= T^{-1}(T_{r+1}x) \\
 &= T^{-1}(T^{r+1}x) \\
 &= T^r x \\
 &= T_r x.
 \end{aligned}$$

Portanto, $T_n x = T^n x, n \in \mathbb{Z}_-$. Como provado acima, $T_n x = T^n x, n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $T_n x = T^n x, n \in \mathbb{Z}$. Ainda, se H é invariante, então $T_n x \in H, n \in \mathbb{Z}_-$, e logo a extensão de $T^n x$ permanece em H . Notemos que, se $x \in H$, nestas condições, T não precisa ser inversível em todo $\mathbb{R}^m$, mas somente em H .

Pode ocorrer também que alguma extensão não esteja toda em H , mesmo se H for invariante. De fato, seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1], Tx = 4x(1 - x)$. A função T não é inversível e tem um ponto fixo $x_0 = 3/4$. Se $H = \{x_0\}$, então H é invariante. Uma extensão da órbita $T^n x_0 = x_0$ é $T_n x_0 = x_0, n \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, se $y = 1/4$, então $Ty = x_0$ e $\Omega(y) = H$. Pode-se mostrar que $T^n\{y\} \neq \emptyset$, para $n \in \mathbb{Z}_-$. Logo, podemos definir uma outra extensão de $T^n x_0$ que difere da anterior da seguinte forma:

$$T_n x_0 = \begin{cases} x_0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \\ w \in T^{n+1}\{y\}, & \text{se } n \leq -1 \end{cases}$$

Proposição 1.4.6. *Um conjunto H é invariante se, e somente se, cada órbita começando em H tem uma extensão em H para todo n .*

Prova:

Suponhamos H invariante. Pela Observação 1.4.5, cada órbita começando em H tem uma extensão em H para todo n .

Supondo que cada órbita começando em H tenha uma extensão em H , mostremos que $T(H) \subset H$. De fato, seja $w \in T(H)$. Então existe $x \in H$ tal que $w = T(x)$. Seja $T_n x$ a extensão de x que está em H por hipótese. Assim, $T_n(x) \in H$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular, para $n = 1$, temos $T_1(x) = T(x) = w \in H$. Portanto, $T(H) \subset H$.

Mostremos agora que $H \subset T(H)$. De fato, seja $x \in H$ e $T_n x$ a extensão da órbita $T^n x$. Por hipótese, $T_n x \in H$. Mas $x = T_0 x \in T(H)$. Logo $H \subset T(H)$. Portanto, $T(H) = H$. ■

Proposição 1.4.7. *Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ e seja M o maior subconjunto (por inclusão) invariante contido em E . Se $M \neq \emptyset$, então:*

- (i) *M é a união de todas órbitas estendidas de elementos em E que permanecem em E para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
- (ii) *$x \in M$ se, e somente se, existir uma órbita estendida $T_n x$ com $T_n x \in E$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*
- (iii) *Se E é compacto, temos que M é compacto.*

Prova:

- (i) Seja L a união de todas órbitas estendidas que começam em E e permanecem em E para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então, $L \subset E$. Provemos que $L \subset M$. Pela Proposição 1.4.6, L é invariante. Como M é o maior conjunto invariante em E , então $L \subset M$.

Mostremos que $M \subset L$. Seja $x \in M$. Devemos provar que $x \in L$, isto é, que existe alguma órbita estendida que permaneça em E tal que x esteja nesta órbita. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos a seqüência $T_n x = T^n x \in M$, $n \in \mathbb{N}$, pois M é invariante. Pela Observação 1.4.5, existe uma extensão da órbita $T^n x$ dada por $T_0 x = x$ e $T(T_n x) = T_{n+1} x$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Logo, $T_n x \in E$ e $T(T_{-1} x) = T_0 x = x$, o que prova que $M \subset L$. Portanto, $L = M$.

- (ii) Seja $x \in M$. Por (i), existe uma órbita estendida $T_n x \in E$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que prova uma implicação.

Provemos a outra implicação. Como $T_n x \in E$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, então por (i) temos que $T_n x \in M$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Logo, $x = T_0 x \in M$.

(iii) Se E é compacto, então E é fechado e limitado. Visto que $M \subset E$, temos que M é limitado. Mas M é também invariante. Pela Proposição 1.4.4-(ii), $\overline{M}$ é invariante. E mais, $M \subset E \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{E} = E \Rightarrow \overline{M} \subset E$. Como M é o maior conjunto invariante em E , segue que $\overline{M} \subset M$. Logo, $M = \overline{M}$, isto é, M é fechado. Como M é também limitado, concluímos que M é compacto. ■

1.5 Propriedades Básicas dos Conjuntos Limites

Teorema 1.5.1. *Dado $x \in \mathbb{R}^m$ e $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, então o conjunto ω -limite $\Omega(x)$ é fechado e positivamente invariante.*

Prova:

Como $\Omega(x) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n x}$, segue que $\Omega(x)$ é fechado. Provemos que $T(\Omega(x)) \subset \Omega(x)$.

$$\begin{aligned}
 T(\Omega(x)) &= T \left(\bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)} \right) \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} T \left(\overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)} \right) \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{T \left(\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x) \right)} \\
 &= \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^{n+1}(x)} \\
 &= \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j+1}^{\infty} T^n(x)} \\
 &\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(x)} \\
 &= \Omega(x).
 \end{aligned}$$

■

Teorema 1.5.2. *Se $T^n x$ for limitada, então $\Omega(x)$ é não vazio, compacto, invariante, invariantemente conexo, e é o menor conjunto fechado que $T^n x$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$.*

Prova:

Mostremos que $\Omega(x)$ é compacto. Pelo Teorema 1.5.1, $\Omega(x)$ é fechado. Como $T^n x$ é limitado então $\Omega(x) \neq \emptyset$, pois existe subsequência convergente de $T^n x$. Notemos também que $\Omega(x)$ é limitado. De fato, seja $y \in \Omega(x)$. Logo, existe sequência de inteiros n_i tal que $T^{n_i} x \rightarrow y$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Como $T^n x$ é limitada, existe $r > 0$ tal que $|T^n x| \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos então que $\Omega(x)$ é compacto, pois $\Omega(x)$ é limitado devido à

$$|T^{n_i} x| \leq r \Rightarrow \lim_{n_i \rightarrow \infty} |T^{n_i} x| \leq r \Rightarrow \left| \lim_{n_i \rightarrow \infty} T^{n_i} x \right| \leq r \Rightarrow |y| \leq r.$$

Mostremos que $\Omega(x)$ é invariante. Provemos que $\Omega(x)$ é negativamente invariante, isto é, $\Omega(x) \subset T(\Omega(x))$. De fato, seja $y \in \Omega(x)$ e seja $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_i} x \rightarrow y$. Como $T^n(x)$ é limitada, podemos assumir que $T^{n_i-1} x$ converge, digamos $T^{n_i-1} x \rightarrow z \in \Omega(x)$. Pela continuidade de T ,

$$T^{n_i} x = \lim_{i \rightarrow \infty} T(T^{n_i-1} x) = T \left(\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i-1} x \right) = Tz \Rightarrow y = Tz.$$

Logo, $\Omega(x) \subset T(\Omega(x))$. Pelo Teorema 1.5.1, concluimos que $\Omega(x)$ é invariante.

Mostremos que $T^n x$ aproxima-se de $\Omega(x)$, quando $n \rightarrow \infty$, se $T^n x$ é limitada. De fato, como $\Omega(x)$ é limitado, então $\rho(T^n x, \Omega(x))$ é limitada. Seja $r_n := \rho(T^n x, \Omega(x))$. Suponhamos que $T^n(x)$ não se aproxime de $\Omega(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, existe uma sequência $n_i \in \mathbb{N}$ tal que r_{n_i} não converge para 0. Como r_n é limitada, podemos assumir que r_{n_i} converge, digamos $r_{n_i} \rightarrow r > 0$. Agora, como $T^{n_i} x$ é limitada, existe uma subsequência convergente $T^{n_{i_j}} x \rightarrow y \in \Omega(x)$. Logo,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_{n_{i_j}} = r \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(T^{n_{i_j}} x, \Omega(x)) = r \Rightarrow \rho(y, \Omega(x)) = r > 0,$$

o que é uma contradição.

Mostremos que $\Omega(x)$ é o menor conjunto fechado ao qual $T^n x$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$. De fato, seja E um conjunto fechado em $\mathbb{R}^m$ tal que $T^n x \rightarrow E$. Seja $y \in \Omega(x)$.

Então, existe $n_i \rightarrow \infty, i \rightarrow \infty$ tal que $T^{n_i}x \rightarrow y$. Logo, $\rho(T^{n_i}x, E) \rightarrow \rho(y, E)$. Mas $\rho(T^{n_i}x, E) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$, pois $T^n x \rightarrow E$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $\rho(y, E) = 0$, o que implica que $y \in E$, pois $\overline{E} = E$ é fechado.

Mostremos que $\Omega(x)$ é invariantemente conexo. Suponhamos que $\Omega(x)$ seja a união disjunta de dois conjuntos não vazios fechados invariantes Ω_1 e Ω_2 . Como foi provado acima, $\Omega(x)$ é compacto e então Ω_1 e Ω_2 são limitados, o que implica a compacidade destes conjuntos. Visto que $\mathbb{R}^m$ é normal, existem conjuntos abertos disjuntos U_1 e U_2 tais que $\Omega_1 \subset U_1$ e $\Omega_2 \subset U_2$.

Devido à continuidade de T , mostraremos que existe um conjunto aberto B_1 tal que $\Omega_1 \subset B_1$ e $T(B_1) \subset U_1$. De fato, tomando $B_1 := T^{-1}(U_1)$ que é aberto, temos $T(B_1) = T(T^{-1}(U_1)) \subset U_1$ e, como Ω_1 é invariante, segue que $\Omega_1 \subset T^{-1}(T(\Omega_1)) = T^{-1}(\Omega_1) \subset T^{-1}(U_1) = B_1$. Como foi provado acima, $T^n x \rightarrow \Omega(x) = \Omega_1 \cup \Omega_2$, e visto também que $\Omega_1 \subset U_1 \cap B_1$, $\Omega_2 \subset U_2$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \in (U_1 \cap B_1) \cup U_2, \forall n \geq n_0$. Como $\Omega_1 \neq \emptyset$, podemos supor que existe n_0 tal que $T^{n_0}x \in U_1 \cap B_1$. Suponhamos que exista $n_1 \geq n_0$ tal que $T^{n_1}x \in U_1 \cap B_1$ e $T^{n_1+1}x \in U_2$. Mas, como $T(B_1) \subset U_1$, então $T(T^{n_1}x) \in T(U_1 \cap B_1) \subset U_1 \Rightarrow T^{n_1+1}x \in U_1$, o que é uma contradição, pois $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Portanto, $\Omega(x)$ é invariantemente conexo. ■

Definição 1.5.1. Um sistema dinâmico discreto em $\mathbb{R}^m$ propriamente dito é uma função $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo para todo $n, k \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}^m$:

- (i) $\pi(0, x) = x$;
- (ii) $\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n + k, x)$;
- (iii) π é contínua.

Observação 1.5.3. Toda equação de diferenças $x(n+1) = T(x(n))$ com T inversível define um sistema dinâmico da forma $\pi(n, x) = T_n x$, com $x \in \mathbb{R}^m, n \in \mathbb{Z}$. Pela Observação 1.4.5, temos $\pi(0, x) = T_0 x = x$ e

$$\pi(n, \pi(k, x)) = \pi(n, T_k x) = T_n(T_k x) = T^n(T^k x) = T^{n+k} x = T_{n+k} x = \pi(n + k, x).$$

Também todo sistema dinâmico está associado à uma equação de diferenças $x(n+1) = T(x(n))$ com T inversível da forma $Tx = \pi(1, x)$ e $T^{-1}x = \pi(-1, x)$. De fato, se $S(x) = \pi(-1, x)$, então $T \circ S = S \circ T = I \Rightarrow S = T^{-1}$, pois

$$(T \circ S)(x) = T(Sx) = T(\pi(-1, x)) = \pi(1, \pi(-1, x)) = \pi(1 - 1, x) = \pi(0, x) = x \quad e$$

$$(S \circ T)(x) = S(Tx) = S(\pi(1, x)) = \pi(-1, \pi(1, x)) = \pi(-1 + 1, x) = \pi(0, x) = x.$$

Notemos também que $T_2x = T^2x = T(Tx) = T(\pi(1, x)) = \pi(1, \pi(1, x)) = \pi(2, x)$. E se $T_r x = \pi(r, x), r \in \mathbb{Z}$, segue que:

$$T_{r+1}x = T^{r+1}x = T(T^r x) = T(\pi(r, x)) = \pi(1, \pi(r, x)) = \pi(r + 1, x).$$

Portanto, $T_n x = \pi(n, x), n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.5.4. Dado $H \subset \mathbb{R}^m$ e $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, então o conjunto $\Omega(H)$ é fechado e positivamente invariante.

Prova:

Como $\Omega(H) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}$, segue que $\Omega(H)$ é fechado. Provemos que $T(\Omega(H)) \subset \Omega(H)$.

$$\begin{aligned}
T(\Omega(H)) &= T\left(\overline{\bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}\right) \\
&\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} T\left(\overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)}\right) \\
&\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{T\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)\right)} \\
&= \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} T^{n+1}(H)\right)} \\
&= \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{n=j+1}^{\infty} T^n(H)\right)} \\
&\subset \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\left(\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(H)\right)} \\
&= \Omega(H).
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.5.5. *Se $H \neq \emptyset$ e $T^n(H)$ é limitada uniformemente, ou seja existe subconjunto limitado W tal que $T^n H \subset W$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\Omega(H)$ é não vazio, compacto, invariante e é o menor conjunto fechado que $T^n(H)$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$.*

Prova:

Mostremos que $\Omega(H)$ é não vazio. Se $x \in H$, então $T^n x$ é limitada, pois $T^n x \in T^n(H)$, e esta última seqüência é limitada por hipótese. Pelo Teorema 1.5.4 e por (1.6), temos que $\emptyset \neq \Omega(x) \subset \Omega(H) \Rightarrow \Omega(H) \neq \emptyset$.

Mostremos que $\Omega(H)$ é compacto. De fato, como $T^n(H)$ é limitada, existe $r > 0$ tal que $|T^n x| \leq r$, para todo $x \in H$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $y \in \Omega(H)$. Logo, existem seqüências $n_j \in \mathbb{N}$ e $y_j \in H$ tais que $T^{n_j} y_j \rightarrow y$ e $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Desta forma, $r \geq \lim_{j \rightarrow \infty} |T^{n_j} y_j| = |y|$. Logo, $\Omega(H)$ é limitado. Também pelo Teorema 1.5.4, $\Omega(H)$ é fechado. Assim, $\Omega(H)$ é compacto.

Mostremos que $\Omega(H)$ é invariante. Basta mostrar que $\Omega(H) \subset T(\Omega(H))$. De fato, seja $y \in \Omega(H)$. Então, existem seqüências $n_j \in \mathbb{N}$ e $y_j \in H$ tais que $T^{n_j}y_j \rightarrow y$ e $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Como $T^n(H)$ é limitada, podemos assumir que $T^{n_j-1}y_j$ converge, digamos $T^{n_j-1}y_j \rightarrow z$, $z \in \Omega(H)$. Assim, pela continuidade de T , temos:

$$y = \lim_{j \rightarrow \infty} (T^{n_j}y_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(T^{n_j-1}y_j) = T\left(\lim_{j \rightarrow \infty} T^{n_j-1}y_j\right) = Tz.$$

Logo, $\Omega(H) \subset T(\Omega(H))$ e, pelo Teorema 1.5.4, temos $\Omega(H) = T(\Omega(H))$, isto é, $\Omega(H)$ é invariante.

Mostremos que $T^n(H)$ aproxima-se de $\Omega(H)$, para $n \rightarrow \infty$. De fato, como $\Omega(H)$ é limitado, então $r_n := \rho(T^n H, \Omega(H))$ é limitada, isto é, existe $\eta > 0$ tal que $r_n \leq \eta, \forall n \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $T^n(H)$ não se aproxime de $\Omega(H)$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, existe uma seqüência $n_i \in \mathbb{N}$ tal que r_{n_i} não converge para 0. Como r_n é limitada, podemos assumir que r_{n_i} converge, digamos $r_{n_i} \rightarrow r > 0$. Seja $A_{n_i}(y) = \rho(T^{n_i}y, \Omega(H)), y \in H$. Assim,

$$r_{n_i} = \rho(T^{n_i}(H), \Omega(H)) = \sup_{y \in H} \rho(T^{n_i}y, \Omega(H)) = \sup_{y \in H} A_{n_i} \Rightarrow r_{n_i} = \sup_{y \in H} A_{n_i}$$

Por conseguinte, dado $\epsilon > 0$, existe $a_{(n_i, \epsilon)} \in A_{n_i}$ tal que $a_{(n_i, \epsilon)} > r_{n_i} - \epsilon$. Como $a_{(n_i, \epsilon)} \in A_{n_i}$, então existe $y_{(n_i, \epsilon)} \in H$ tal que $a_{(n_i, \epsilon)} := \rho(T^{n_i}y_{(n_i, \epsilon)}, \Omega(H))$. Agora, visto que $T^n(H)$ é limitada, temos que $T^{n_i}y_{(n_i, \epsilon)}$ também é limitada. Logo podemos assumir que converge, digamos $T^{n_i}y_{(n_i, \epsilon)} \rightarrow z_{(n_i, \epsilon)} \in \Omega(H)$. Assim,

$$\begin{aligned} a_{(n_i, \epsilon)} > r_{n_i} - \epsilon &\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} a_{(n_i, \epsilon)} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} r_{n_i} - \epsilon \\ &\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(T^{n_i}y_{(n_i, \epsilon)}, \Omega(H)) \geq r - \epsilon \\ &\Rightarrow \rho\left(\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i}y_{(n_i, \epsilon)}, \Omega(H)\right) \geq r - \epsilon \\ &\Rightarrow \rho(z_{(n_i, \epsilon)}, \Omega(H)) \geq r - \epsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = r/2$, temos que $\rho(z, \Omega(H)) \geq r/2 > 0$, o que é uma contradição, pois $z \in \Omega(H)$. Portanto, $T^n(H)$ aproxima-se de $\Omega(H)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Mostremos que $\Omega(H)$ é o menor conjunto fechado que $T^n(H)$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$. Suponhamos que E é um conjunto fechado e $T^n(H) \rightarrow E$ quando $n \rightarrow \infty$. Provemos que

$\Omega(H) \subset E$. De fato, seja $\epsilon > 0$ e $A_n = \{\rho(w, E) : w \in T^n(H)\}$. Então, existe n_0 tal que $\sup A_n < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Seja $y \in \Omega(H)$. Logo, existem seqüências $y_j \in H$ e $n_j \geq n_0$ tais que $T^{n_j}y_j \rightarrow y$ e $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. Notemos que $T^{n_j}y_j \in T^{n_j}(H) \Rightarrow \rho(T^{n_j}y_j, E) \in A_{n_j}$. Como $n_j \geq n_0$, temos:

$$\begin{aligned} \rho(T^{n_j}y_j, E) < \epsilon &\Rightarrow \rho(y, E) = \rho\left(\lim_{j \rightarrow \infty} T^{n_j}y_j, E\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(T^{n_j}y_j, E) \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \rho(y, E) \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0, \end{aligned}$$

o que implica $y \in \overline{E} = E$. Portanto $\Omega(H) \subset E$ e então $\Omega(H)$ é o menor conjunto fechado que $T^n x$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$. ■

Observação 1.5.6. (a) Se $T^n(H)$ for limitada uniformemente em $n \in \mathbb{N}$, então, para todo $y \in H$, $T^n y$ é limitada e, pelo Teorema 1.5.2, aproxima-se de $\Omega(y)$. Assim, como $\Omega(y) \subset \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}$, temos, $\forall x \in H$,

$$\rho(T^n y, \Omega(y)) \rightarrow 0 \Rightarrow \rho\left(T^n y, \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}\right) \rightarrow 0.$$

(b) Notemos que, em geral, $\Omega(H)$ não é invariantemente conexo quando $T^n(H)$ é limitada.

De fato, seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, -y)$ e $H = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Então, $\Omega(H) = \{(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2)\}$. Mas $\Omega(1, 1) = \{(1, 1), (1, -1)\}$ e $\Omega(2, 2) = \{(2, 2), (2, -2)\}$ são conjuntos disjuntos fechados invariantes e $\Omega(H) = \Omega(1, 1) \cup \Omega(2, 2)$, o que implica que $H = \{(1, 1), (2, 2)\}$ não é invariantemente conexo.

Corolário 1.5.7. Suponhamos $T^n(H)$ limitada uniformemente e seja $f_n : H \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(y) := \rho\left(T^n y, \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}\right)$, com $y \in H$. Se $f_n \rightarrow 0$ uniformemente em H , então:

$$\Omega(H) = \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}.$$

(Notemos que pela Observação 1.5.6-(a), f_n é convergente).

Prova:

Mostremos que $\overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)} \subset \Omega(H)$. Pelo Teorema 1.5.4, segue que $\Omega(H)$ é fechado. Como $\Omega(x) \subset \Omega(H)$, temos que:

$$\bigcup_{x \in H} \Omega(x) \subset \Omega(H) \Rightarrow \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)} \subset \overline{\Omega(H)} = \Omega(H) \Rightarrow \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)} \subset \Omega(H).$$

Mostremos a outra inclusão. Como $f_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, uniformemente, em H , então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $f_n(y) < \epsilon$, para todo $y \in H$. Assim, $n \geq n_0$ implica

$$\begin{aligned} \sup_{y \in H} f_n(y) \leq \epsilon &\Rightarrow \sup_{y \in H} \rho(T^n y, \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}) \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \sup_{y \in H} \rho(T^n H, \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}) \leq \epsilon \\ &\Rightarrow \sup_{z \in T^n(H)} \rho(z, \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}) \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, $\rho(T^n(H), \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $T^n(H)$ aproxima-se de $\overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\Omega(H)$ é o menor conjunto fechado que $T^n(H)$ aproxima-se quando $n \rightarrow \infty$ e $\overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}$ é fechado, então $\Omega(H) \subset \overline{\bigcup_{x \in H} \Omega(x)}$. ■

Proposição 1.5.8. *Se K é não vazio, compacto e positivamente invariante, então $\Omega(K) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(K)$ é não vazio, compacto, invariante e é o maior conjunto invariante contido em K .*

Prova:

Como K é compacto, logo limitado, e $T(K) \subset K$, então $T^n(K) \subset K$ é limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.5.5, $\Omega(K)$ é não vazio, compacto e invariante.

Mostremos que $\Omega(K) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(K)$. De fato, como $\Omega(K) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(K)}$ e $T(K) \subset K$, temos que $T^n(K) \subset T^j(K)$, para $n \geq j$ e daí

$$\overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(K)} \subset \overline{T^j(K)} = T^j(K).$$

Portanto,

$$\Omega(K) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} T^n(K)} \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} T^j(K).$$

Portanto, $\Omega(K) \subset \bigcap_{j=0}^{\infty} T^j(K)$. A outra inclusão é trivial. Assim, $\Omega(K) = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(K)$.

Mostremos que $\Omega(K)$ é o maior conjunto invariante contido em K . Seja E um conjunto invariante tal que $E \subset K$. Como $E = T^n(E) \subset T^n(K), \forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$E \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(K) = \Omega(K).$$

■

1.6 Funções de Liapunov. Uma extensão do método direto de Liapunov

Seja $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Relativamente ao sistema $x(n+1) = T(x(n))$, definimos

$$\dot{V}(x) = V(T(x)) - V(x). \quad (1.7)$$

Se $x(n)$ é solução de $x(n+1) = T(x(n))$, então $\dot{V}(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n))$. Notemos que $\dot{V}(x) \leq 0$ significa V não-crescente ao longo das soluções. Para o cálculo de $\dot{V}(x)$ não é preciso conhecer as soluções – sua determinação é feita diretamente conhecendo-se o lado direito da equação $x(n+1) = T(x(n))$, isto é, conhecendo-se T . Esta é a razão do método ser denominado “direto”.

Definição 1.6.1. Seja G um conjunto qualquer em $\mathbb{R}^m$. Dizemos que V é uma função de Liapunov de $x(n+1) = T(x(n))$ em G se V é contínua e $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo $x \in G$.

Definição 1.6.2. Se V é uma função de Liapunov de $x(n+1) = T(x(n))$ em G , definimos:

$$E := \{x \in \overline{G} : \dot{V}(x) = 0\} \quad (1.8)$$

Denotemos por M o maior conjunto invariante contido em E e $V^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) = c\}$.

Exemplo 1.6.1. Consideremos o sistema bidimensional:

$$x(n+1) = x(n), \quad y(n+1) = -y(n)$$

ou

$$x' = x, \quad y' = -y.$$

Se, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definimos $V(x, y) = x^2 + y^2$, e visto que $T(x, y) = (x', y') = (x, -y)$, então $\dot{V}(x, y) = 0$, pois

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= V(T(x, y)) - V(x, y) \\ &= V(x, -y) - V(x, y) \\ &= x^2 + (-y)^2 - (x^2 + y^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como V é contínua, então é uma função de Liapunov em $\mathbb{R}^2$. Agora, $E = M = \mathbb{R}^2$, pois, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $\dot{V}(x, y) = 0$, $T(x, y) = (x, -y)$ e $(x, y) = T(x, -y)$. E mais, pelo Exemplo 1.4.2, temos que se $z(n)$ é solução de $z' = Tz$, $z(0) = z^0 = (x^0, y^0)$, então $\Omega(z^0) = \{(x^0, y^0), (x^0, -y^0)\}$. Portanto, $\Omega(z^0) \subset V^{-1}(V(z_0))$.

Teorema 1.6.1. (*Princípio da Invariância*)

Sejam $G \subset \mathbb{R}^m$ e $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Se

(i) V é uma função de Liapunov de (1.1) em G ; e

(ii) $x(n)$ é solução de (1.1) limitada e em G , para todo $n \geq 0$,

então $\emptyset \neq \Omega(x(0)) \subset E$ e existe um número c tal que $x(n) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Prova:

Seja $x^0 = x(0)$ tal que $x(n) = T^n x^0$. Como $V(x(n))$ é não-crescente em n e $x(n)$ é limitada, então $V(x(n))$ é limitada inferiormente em n e, desta forma, existe c tal que $V(x(n)) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $y \in \Omega(x^0)$. Então, existe uma seqüência $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $x(n_i) \rightarrow y$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Visto que V é contínua, $V(x(n_i)) \rightarrow V(y) = c$, o que implica $y \in V^{-1}(c)$. Logo, $\Omega(x^0) \subset V^{-1}(c)$. Como $\Omega(x^0)$ é invariante, pois $x(n)$ é limitada, então $Ty \in \Omega(x^0)$.

Agora, $x(n_i+1) = T(x(n_i)) \rightarrow Ty$, pois T é contínua e, assim, $V(x(n_i+1)) \rightarrow V(Ty) = c$.

Logo,

$$\dot{V}(y) = V(Ty) - V(y) = c - c = 0 \Rightarrow \dot{V}(y) = 0 \Rightarrow y \in E,$$

ou seja, $\Omega(x^0) \subset E$. Como M é o maior conjunto invariante em E , segue que $\Omega(x^0) \subset M$.

Portanto, $\Omega(x^0) \subset M \cap V^{-1}(c)$, ou ainda, $x(n) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$. ■

Exemplo 1.6.2. Consideremos o sistema bidimensional:

$$x(n+1) = \frac{ay(n)}{1+x^2(n)}, \quad y(n+1) = \frac{bx(n)}{1+y^2(n)}$$

ou

$$x' = \frac{ay}{1+x^2}, \quad y' = \frac{bx}{1+y^2}. \quad (1.9)$$

Logo, $T(x, y) = (x', y') = \left(\frac{ay}{1+x^2}, \frac{bx}{1+y^2} \right)$. Seja $V(x, y) = x^2 + y^2$. Então $\dot{V}(x, y) = \left(\frac{b^2}{(1+y^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{a^2}{(1+x^2)^2} - 1 \right) y^2$, pois

$$\dot{V}(x, y) = V(T(x, y)) - V(x, y) = \frac{a^2 y^2}{(1+x^2)^2} + \frac{b^2 x^2}{(1+y^2)^2} - x^2 - y^2.$$

Notemos que, se $a^2 \leq 1$ e $b^2 \leq 1$, temos:

$$|x(n+1)| = \left| \frac{ay(n)}{1+x^2(n)} \right| = |a| \left| \frac{y(n)}{1+x^2(n)} \right| \leq \left| \frac{y(n)}{1+x^2(n)} \right| \leq |y(n)| \quad \text{e}$$

$$|y(n+1)| = \left| \frac{bx(n)}{1+y^2(n)} \right| = |b| \left| \frac{x(n)}{1+y^2(n)} \right| \leq \left| \frac{x(n)}{1+y^2(n)} \right| \leq |x(n)|.$$

Logo, $|x(n)| \leq \max\{|x(0)|, |y(0)|\}$ e $|y(n)| \leq \max\{|x(0)|, |y(0)|\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e então:

$$\begin{aligned} |(x(n), y(n))| &= \sqrt{x^2(n) + y^2(n)} \\ &\leq \sqrt{2(\max\{|x(0)|, |y(0)|\})^2} \\ &= \sqrt{2} \cdot \max\{|x(0)|, |y(0)|\}. \end{aligned}$$

Assim, a solução $(x(n), y(n))$ é limitada quando $a^2 \leq 1$ e $b^2 \leq 1$. Observamos que V é definida positiva, isto é $V(w) > 0, \forall w \neq 0$, e $V(0) = 0$.

Caso 1: Suponhamos $a^2 < 1$ e $b^2 < 1$. Assim,

$$\dot{V}(x, y) \leq (b^2 - 1)x^2 + (a^2 - 1)y^2 \leq 0$$

e V é uma função de Liapunov de (1.9) em $\mathbb{R}^2$. E mais, $E = M$ é a origem, pois $T(0,0) = (0,0)$ e então

$$\dot{V}(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Como neste caso toda solução é limitada, temos, pelo Teorema 1.6.1, que toda solução aproxima-se da origem quando $n \rightarrow \infty$. Assim, o conjunto ω -limite é a origem. Este é um caso clássico de funções de Liapunov, onde V e $-\dot{V}$ são definidas positiva.

Caso 2: Suponhamos $a^2 \leq 1$ e $b^2 \leq 1$ e $a^2 + b^2 < 2$. Como toda solução $(x(n), y(n))$ é limitada, segue do Teorema 1.6.1 que ela tende para M quando $n \rightarrow \infty$. Em virtude do Caso 1, basta analisar apenas os seguintes subcasos abaixo.

- (i) Suponhamos $a^2 < 1$ e $b^2 = 1$. Então, V é ainda uma função de Liapunov de (1.9) em $\mathbb{R}^2$, mas $-\dot{V}$ não é definida positiva. De fato,

$$\dot{V}(x, y) \leq (a^2 - 1)y^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Logo, E é o eixo x . Como $T(x, 0) = (0, bx)$, então M é a origem. Portanto, o conjunto ω -limite é a origem.

- (ii) Supondo $b^2 < 1$ e $a^2 = 1$, temos $a^2 + b^2 < 2$. Então, V é ainda uma função de Liapunov de (1.9) em $\mathbb{R}^2$, mas $-\dot{V}$ não é definida positiva. De fato,

$$\dot{V}(x, y) \leq (b^2 - 1)x^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{V}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Logo, E é o eixo y . Como $T(0, y) = (ay, 0)$, então M é a origem. Portanto, o conjunto ω -limite é a origem.

Caso 3: Suponhamos $a^2 = b^2 = 1$. Neste caso, V ainda é uma função de Liapunov de (1.9) em $\mathbb{R}^2$, e $-\dot{V}$ não é definida positiva, pois

$$\dot{V}(x, y) = \left(\frac{1}{(1+y^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{1}{(1+x^2)^2} - 1 \right) y^2 \leq 0,$$

$$\dot{V}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0, \quad \text{e}$$

$$T(0, 0) = (0, 0).$$

Logo, como $T(x, 0) = (0, bx)$, $T(y, 0) = (ay, 0)$, $(x, 0) = T\left(0, \frac{x}{a}\right)$ e $(0, y) = T\left(\frac{y}{b}, 0\right)$, então $E = M$ é a união dos eixos coordenados. Como neste caso toda solução é limitada, temos, pelo Teorema 1.6.1, que cada solução aproxima-se de $\{(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)\}$, para algum $c \in \mathbb{R}$ – esta é a interseção de M com a circunferência $x^2 + y^2 = c^2$, ou seja, com $V^{-1}(c^2)$. Devemos analisar os seguintes subcasos:

(i) Suponhamos $a = b = 1$. Então,

$$T(c, 0) = (0, c), \quad T^2(c, 0) = (c, 0), \quad T(-c, 0) = (0, -c), \quad T^2(-c, 0) = (-c, 0).$$

Assim, os conjuntos $\{(c, 0), (0, c)\}$ e $\{(-c, 0), (0, -c)\}$ são invariantes. Como, pelo Teorema 1.5.2, o conjunto ω -limite é invariantemente conexo e não vazio, então é dado pela por uma órbita periódica da forma $\{(r, 0), (0, r)\}$, com $r \in \mathbb{R}$. Portanto, toda solução se aproxima da origem, se $r = 0$, ou de uma órbita periódica de período 2, se $r \neq 0$.

(ii) Suponhamos $a = b = -1$. Então,

$$T(c, 0) = (0, -c), \quad T^2(c, 0) = (c, 0), \quad T(-c, 0) = (0, c), \quad T^2(-c, 0) = (-c, 0).$$

Assim, os conjuntos $\{(c, 0), (0, -c)\}$ e $\{(-c, 0), (0, c)\}$ são invariantes. Como, pelo Teorema 1.5.2, o conjunto ω -limite é invariantemente conexo e não vazio, então é dado por uma órbita periódica da forma $\{(r, 0), (0, -r)\}$, com $r \in \mathbb{R}$. Portanto, toda solução nestas condições se aproxima de uma da origem, se $r = 0$, ou de uma órbita periódica de período 2, se $r \neq 0$.

(iii) Suponhamos $ab = -1$. Então,

$$T(c, 0) = (0, bc), \quad T^2(c, 0) = (-c, 0), \quad T^3(c, 0) = (0, -bc), \quad T^4(c, 0) = (c, 0).$$

Se $c \neq 0$, temos $T(c, 0) \neq T^3(c, 0)$. Como o conjunto ω -limite é não vazio, então é dado pela órbita periódica: $\{(c, 0), (0, c), (-c, 0), (0, -c)\}$. Portanto, toda solução nestas condições se aproxima de uma órbita periódica – a origem (se $r = 0$) ou uma órbita periódica de período 4.

Caso 4: Suponhamos $a^2 > 1$ e $b^2 > 1$. Seja $B_\delta := B_\delta(x, y)$. Para $(x, y) \in B_\delta$ e δ suficientemente pequeno,

$$\dot{V}(x, y) \geq \left(\frac{b^2}{(1 + \delta^2)^2} - 1 \right) x^2 + \left(\frac{a^2}{(1 + \delta^2)^2} - 1 \right) y^2 \geq 0$$

e $-V$ é uma função de Liapunov de (1.9) em B_δ , para δ suficientemente pequeno. Neste caso, temos que $E = M$ é a origem. Agora, não existe solução começando em $B_\delta - \{(0, 0)\}$ que se aproxime da origem, pois em virtude de $\dot{V}(x, y) > 0$, para $(x, y) \in B_\delta - (0, 0)$, temos que a distância de qualquer solução começando em $B_\delta - (0, 0)$ é crescente. Mas, como $T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$, então temos que não existe solução que salte para a origem em um número finito de iterações. Notemos que a única solução limitada neste caso é a solução trivial, ou seja, a origem. Portanto, não existe solução não trivial que se aproxime da origem quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 1.6.2. *Se V é uma função de Liapunov de (1.1) em G limitado, então V é também uma função de Liapunov de (1.1) em $\overline{G}$.*

Prova:

De fato, como V é uma função de Liapunov de (1.1) em G , então V é contínua e $\dot{V}(x) \leq 0$, para todo $x \in G$. Seja $y \in \overline{G}$. Então, existe uma seqüência em G convergente tal que $y_n \rightarrow y$. Pela continuidade de $\dot{V}$, $\dot{V}(y) = \dot{V}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{V}(y_n) \leq 0$. Logo, V é também é uma função de Liapunov de (1.1) em $\overline{G}$. ■

1.7 Estabilidade e Instabilidade

Definição 1.7.1. Um conjunto H é dito estável se, dado uma vizinhança U de H , existir uma vizinhança W de H tal que $T^n(W) \subset U$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 1.7.1. Se H é estável, então $\overline{H}$ é também estável.

Exemplo 1.7.1. Consideremos a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, -y)$. Pelo Exemplo 1.4.2, se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, então $\Omega(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0), (x_0, -y_0)\}$. Tomemos $H := \Omega(x_0, y_0)$. Dado uma vizinha U de H , seja r suficientemente pequeno tal que $B_r(x_0, y_0) \subset U$ e $B_r(x_0, -y_0) \subset U$. Tomemos $W = B_r(x_0, y_0) \cup B_r(x_0, -y_0)$. Notemos que W é invariante, pois $T(B_r(x_0, y_0)) = B_r(x_0, -y_0)$ e $T(B_r(x_0, -y_0)) = B_r(x_0, y_0)$. Logo, H é estável, pois $T^n(W) = W \subset U$.

Proposição 1.7.2. Se H é estável, então $\overline{H}$ é positivamente invariante. Em particular, se um ponto é estável, então é um ponto de equilíbrio.

Prova:

Mostremos que se H é estável, então $\overline{H}$ é positivamente invariante, ou seja, $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Consideremos as vizinhanças $U_i = B_{1/i}(H)$, $i \in \mathbb{N}^*$. Afirmamos inicialmente que $\overline{H} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. De fato, seja $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Logo, $\rho(x, H) < 1/i$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$, o que implica $\rho(x, H) = 0$ e então, $x \in \overline{H}$. Portanto $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subset \overline{H}$. A outra inclusão é trivial. Logo, $\overline{H} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$.

Pela estabilidade de H , existe vizinhança W_i de H tais que $T^n(W_i) \subset U_i$, para todo $n, i \in \mathbb{N}, i \neq 0$.

Afirmamos agora que $\overline{H} = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$. De fato, como $W_i \subset U_i$, então $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \overline{H}$, o que implica $\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i \subset \overline{H}$. A outra inclusão é trivial. Portanto $\overline{H} = \bigcap_{i=1}^{\infty} W_i$.

Concluimos que $\overline{H}$ é positivamente invariante da seguinte forma:

$$T(\overline{H}) = T\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} W_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} T(W_i) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \overline{H} \Rightarrow T(\overline{H}) \subset \overline{H}.$$

Ainda, se $H = \{p\}$ é estável, temos que $\overline{H} = \{p\}$ é positivamente invariante, ou seja, $T(\overline{H}) \subset \overline{H}$ implicando $Tp = p$. Portanto, p é um ponto de equilíbrio. ■

Definição 1.7.2. Para H um conjunto em $\mathbb{R}^m$, definimos $\hat{H}$ da seguinte forma: $z \in \hat{H}$ se existirem seqüências $x_i \in \mathbb{R}^m$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$ e $T^{n_i}(x_i) \rightarrow z$, quando $i \rightarrow \infty$. Em dinâmica topológica, $\hat{H}$ é chamado prolongamento de H . O conjunto de todos z para os quais $n_i \rightarrow \infty$, quando $i \rightarrow \infty$, é chamado conjunto prolongamento limite de H , e denotamos por $\hat{H}_\infty$.

Proposição 1.7.3. *Seja H um conjunto em $\mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\overline{H} = \hat{H}$, $\hat{H}_\infty \subset \hat{H}$, e $\overline{H} \subset \hat{H}$;
- (ii) $\hat{H} \subset \hat{H}_\infty \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(\overline{H})$ e, se H é positivamente invariante, então $\hat{H} = \hat{H}_\infty \cup \overline{H}$.

Prova:

- (i) Se $z \in \overline{H}$, tomando $x_i = z$ e $n_i = 0$, temos $z \in \hat{H}$. Logo, $\overline{H} \subset \hat{H}$. As demais relações deste item seguem diretamente da definição.
- (ii) Seja $z \in \hat{H}$. Então, existem seqüências $x_i \in \mathbb{R}^m$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$ e $T^{n_i}x_i \rightarrow z$, quando $i \rightarrow \infty$. Se a seqüência n_i é limitada, então podemos assumir que converge, digamos $n_i \rightarrow k \in \mathbb{N}$. Como n_i é uma seqüência de inteiros, então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_i = k$, para $i \geq i_0$. Logo, $T^k x_i = T^{n_i} x_i$, para $i \geq i_0$. Visto que $x_i \rightarrow y$, pela continuidade de T^k , segue que $T^k y = z$. Logo, $z \in T^k(\overline{H})$. Logo, $\hat{H} \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} T^n(\overline{H})$.

Se a seqüência n_i não é limitada, podemos assumir $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Logo, $z \in \hat{H}_\infty$. Portanto,

$$\hat{H} \subset \hat{H}_\infty \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} T^n(\overline{H}).$$

Ainda, se H é positivamente invariante, $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^n(\overline{H}) \subset \overline{H}$ e $\hat{H} \subset \hat{H}_\infty \cup \overline{H}$. Mas, por (i), temos $\hat{H}_\infty \cup \overline{H} \subset \hat{H}$. Assim, $\hat{H} = \hat{H}_\infty \cup \overline{H}$. ■

Proposição 1.7.4. *Seja H um conjunto limitado em $\mathbb{R}^m$. Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) $\Omega(H) \subset \hat{H}_\infty \subset \Omega(B)$, onde B é aberto e $\overline{H} \subset B$;

$$(ii) \quad \overline{H} \cup \Omega(H) \subset \hat{H}.$$

Prova:

(i) Seja $z \in \Omega(H)$. Então, existem seqüências $n_i \in \mathbb{N}$ e $x_i \in H$ tais que $T^{n_i}x_i \rightarrow z$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Como H é limitado, então $\overline{H}$ é compacto e, desta forma, podemos assumir que x_i converge, digamos $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$. Assim, $z \in \hat{H}_\infty$. Logo, $\Omega(H) \subset \hat{H}_\infty$. Ainda, sejam $w \in \hat{H}_\infty$ e B um conjunto aberto tal que $\overline{H} \subset B$. Então, existem seqüências $x_i \in B$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$ e $T^{n_i}x_i \rightarrow w$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Portanto, $w \in \Omega(B)$. Concluimos então que $\Omega(H) \subset \hat{H}_\infty \subset \Omega(B)$.

(ii) Por (i) e pela Proposição 1.7.3-(i), segue o resultado. ■

Lema 1.7.5. (i) *Se H é um conjunto estável, então $\hat{H} = \overline{H}$;*

(ii) *Se H é um conjunto compacto positivamente invariante, então H é estável se, e somente se, $\hat{H} = H$;*

(iii) *Se H é um conjunto em $\mathbb{R}^m$, então $\hat{H}$ e $\hat{H}_\infty$ são positivamente invariantes;*

(iv) *Se H é um conjunto fechado invariante contido em um conjunto G aberto limitado positivamente invariante, então $\hat{H}$ e $\hat{H}_\infty$ são invariantes.*

Prova:

(i) Seja H estável. Suponhamos que exista $z \in \hat{H} - \overline{H}$. Logo, existem seqüências $x_i \in \mathbb{R}^m$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$ e $T^{n_i}x_i \rightarrow z$. Tomemos alguma vizinhança U de H tal que $z \notin \overline{U}$. Como H é estável, existe vizinhança W de H tal que $T^n(W) \subset U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $i = i_0$ suficientemente grande, $x_i \in W, i \geq i_0$ e, desta forma, $T^{n_i}(x_i) \in U, i \geq i_0$. Como $T^{n_i}(x_i) \rightarrow z$, então $z \in \overline{U}$, o que é uma contradição. Logo, $\hat{H} \subset H$. A outra inclusão é devido à Proposição 1.7.3-(i). Portanto $\hat{H} = \overline{H}$.

(ii) Seja H um conjunto compacto positivamente invariante tal que $\hat{H} = H$. Suponhamos que H não seja estável. Logo, existe uma vizinhança U de H , que podemos assumir

limitada, tal que para qualquer vizinhança W de H , existe $n(W) \in \mathbb{N}$ para o qual $T^{n(W)}(W) \not\subseteq U$.

Consideremos as vizinhanças $W_i = B_{1/i}(H)$. Logo, existe $n(W_i) \in \mathbb{N}$ para o qual $T^{n(W_i)}(W_i) \not\subseteq U$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W_i \subset U$, para todo $i \geq i_0$. Tomemos $\Pi_i = \{n \in \mathbb{N} : T^n(W_i) \not\subseteq U\}$ e $n_i = \min \Pi_i$. Notemos que $\Pi_i \neq \emptyset$, pois $n(W_i) \in \Pi_i$; e $n_i \geq 1$, pois $T^0(W_i) = W_i \subset U$. Desta forma, $T^{n_i}(W_i) \not\subseteq U$ e $T^{n_i-1}(W_i) \subset U$, o que acarreta $T^{n_i}(W_i) \subset T(U)$. Como U é limitado, temos que $T^{n_i}(W_i)$ é também limitado (uniformemente em i).

Seja $x_i \in W_i, i \geq i_0$, tal que $T^{n_i}(x_i) \notin U$. Logo, $\rho(x_i, H) < 1/i$, para todo $i \geq i_0$. Assim, $\rho(x_i, H) \rightarrow 0$, ou seja, $x_i \rightarrow H$. Agora, $x_i \in W_i \subset U$, isto é, x_i é limitada. Então, podemos assumir que $x_i \rightarrow y \in \overline{H} = H$.

Agora, $T^{n_i}(x_i) \notin U$ e $T^{n_i}(x_i)$ é limitada. Assim, podemos assumir que $T^{n_i}(x_i) \rightarrow z \in \mathbb{R}^m$. Logo, $z \in \hat{H}$. Visto que $T^{n_i}(x_i) \notin U$, temos que $z \notin U \supset H$, isto é, $z \notin H$. Portanto, $\hat{H} \not\subseteq H$, ou seja $\hat{H} \neq H$, o que é uma contradição. Provamos então que H é estável se $\hat{H} = \overline{H}$. A outra implicação é devido à (i).

(iii) Seja $z \in \hat{H}$. Então, existem seqüências $x_i \in \mathbb{R}^m$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H}$ e $T^{n_i}x_i \rightarrow z$. Logo, $T^{n_i+1}(x_i) \rightarrow T(z)$, e então $T(z) \in \hat{H}$. Portanto, $T(\hat{H}) \subset \hat{H}$, ou seja, $\hat{H}$ é positivamente invariante. Analogamente para $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, temos que $T(\hat{H}_\infty) \subset \hat{H}_\infty$, e logo $\hat{H}_\infty$ é também positivamente invariante.

(iv) Seja $z \in \hat{H}_\infty$. Então, podemos assumir que existem seqüências $x_i \in G$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in \overline{H} = H$, $T^{n_i}x_i \rightarrow z$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Como G é positivamente invariante, temos que $T^{n_i-1}x_i \in G$, e esta é uma seqüência limitada. Conseqüentemente, podemos assumir que $T^{n_i-1}x_i \rightarrow w$. Logo, $w \in \hat{H}_\infty$. E mais, $T^{n_i}x_i \rightarrow Tw = z$, ou seja, $\hat{H}_\infty \subset T(\hat{H}_\infty)$. Portanto, $\hat{H}_\infty$ é negativamente invariante e, por (iii), $\hat{H}_\infty$ é invariante. Como H é invariante, então pela Proposição 1.7.3-(ii), concluímos que $\hat{H} = T(\hat{H})$, ou seja $\hat{H}$ é invariante, pois

$$\hat{H} = \hat{H}_\infty \cup H = T(\hat{H}_\infty) \cup T(H) = T(\hat{H}_\infty \cup H) = T(\hat{H}).$$

■

Definição 1.7.3. Um conjunto H é chamado atrator se existir uma vizinhança U de H tal que se $x \in U$, então $T^n x \rightarrow \overline{H}$, quando $n \rightarrow \infty$. H é assintoticamente estável se é um atrator estável. Se H é assintoticamente estável e $T^n x \rightarrow \overline{H}$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^m$, então H é dito globalmente assintoticamente estável. H é instável se não é estável. Se H não é estável e também não é um atrator, dizemos que H é fortemente instável.

Definição 1.7.4. Um conjunto H em $\mathbb{R}^m$ é dito inversamente invariante se $T^{-1}(H) = H$.

Proposição 1.7.6. *Seja H um conjunto em $\mathbb{R}^m$. Então:*

- (i) *H é inversamente invariante se, e somente se, H é positivamente invariante e $T^{-1}(H) \subset H$.*
- (ii) *H é negativamente invariante se, e somente se, $T^{-1}\{x\}$ intercepta H para cada $x \in H$.*

Prova:

- (i) Mostremos que H é positivamente invariante e $T^{-1}(H) \subset H$, se H é inversamente invariante. Como $T^{-1}(H) = H$, então $T(H) = T(T^{-1}(H)) \subset H$.

Mostremos que H é inversamente invariante, se $T(H) \subset H$ e $T^{-1}(H) \subset H$. De fato, $H \subset T^{-1}T(H) \subset T^{-1}(H)$, e daí $T^{-1}(H) = H$.

- (ii) Mostremos que $T^{-1}\{x\}$ intercepta H para cada $x \in H$, se H é negativamente invariante. Seja $x \in H$. Como $H \subset T(H)$, então existe $w \in H$ tal que $T(w) = x$. Logo, $w \in T^{-1}\{x\} \cap H$, ou seja, $T^{-1}\{x\} \cap H \neq \emptyset$.

Mostremos que H é negativamente invariante, se $T^{-1}\{x\}$ intercepta H para cada $x \in H$. Seja $x \in H$. Por hipótese, existe $w \in T^{-1}\{x\} \cap H$, e logo $Tw = x$ e $w \in H$. Portanto $H \subset T(H)$. ■

Definição 1.7.5. A região de atração $\mathfrak{R}(H)$ de um conjunto H é o conjunto de todos $x \in \mathbb{R}^m$ tais que $T^n(x) \rightarrow H$ quando $n \rightarrow \infty$.

Proposição 1.7.7. *Se H é assintoticamente estável, então:*

- (i) $\mathfrak{R}(H)$ é aberto;
- (ii) $\mathfrak{R}(H)$ e $\mathbb{C}\mathfrak{R}(H)$ são inversamente invariantes.

Prova:

- (i) Mostremos que $\mathfrak{R}(H)$ é aberto. Seja $x_0 \in \mathfrak{R}(H)$. Logo, $T^n x_0 \rightarrow H$ quando $n \rightarrow \infty$. Como H é um atrator, então existe U vizinhança de H tal que $T^n w \rightarrow \overline{H}$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $w \in U$. Como $T^n x_0 \rightarrow H$, temos, para n suficientemente grande, $T^n x_0 \in U$, digamos, $T^{n_0} x_0 \in U$, para $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Como U é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(T^{n_0} x_0) \subset U$. Mas T^{n_0} é contínua, o que acarreta a existência de $\delta > 0$ tal que:

$$T^{n_0}(V_\delta(x_0)) \subset V_\epsilon(T^{n_0} x_0) \subset U \Rightarrow T^{n_0}(V_\delta(x_0)) \subset U.$$

Seja $y \in V_\delta(x_0)$. Logo, $T^{n_0} y \in U$ e,

$$T^{n+n_0} y = T^n(T^{n_0} y) \rightarrow \overline{H} \Rightarrow T^n y \rightarrow \overline{H}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Assim, $y \in \mathfrak{R}(H)$ e portanto, $\mathfrak{R}(H)$ é aberto.

- (ii) Mostremos que $\mathfrak{R}(H)$ e $\mathbb{C}\mathfrak{R}(H)$ são inversamente invariantes. De fato,

$$\begin{aligned} z \in T^{-1}(\mathfrak{R}(H)) &\Leftrightarrow Tz \in \mathfrak{R}(H) \\ &\Leftrightarrow T^{n+1}z = T^n(Tz) \rightarrow \overline{H}, n \rightarrow \infty \\ &\Leftrightarrow T^n z \rightarrow \overline{H}, n \rightarrow \infty \\ &\Leftrightarrow z \in \mathfrak{R}(H). \end{aligned}$$

Portanto, $T^{-1}(\mathfrak{R}(H)) = \mathfrak{R}(H)$. E também $\mathbb{C}(\mathfrak{R}(H))$ é inversamente invariantes, pois

$$T^{-1}(\mathbb{C} \mathfrak{R}(H)) = \mathbb{C} (T^{-1}(\mathfrak{R}(H))) = \mathbb{C} (\mathfrak{R}(H)) \Rightarrow T^{-1}(\mathbb{C} \mathfrak{R}(H)) = \mathbb{C} (\mathfrak{R}(H)).$$

■

Observação 1.7.8. *Notemos que se H é globalmente assintoticamente estável, então $\mathfrak{R}(H) = \mathbb{R}^m$.*

Teorema 1.7.9. *Seja G um conjunto aberto limitado positivamente invariante. Se*

(i) *V é uma função de Liapunov de T em G ; e*

(ii) *$M \subset G$;*

então M é um atrator e $\overline{G} \subset \mathfrak{R}(M)$. Se, adicionalmente,

(iii) *V é constante em M ,*

então M é assintoticamente estável (globalmente assintoticamente estável relativamente à G).

Prova:

Mostremos inicialmente que M é um atrator e $\overline{G} \subset \mathfrak{R}(M)$. Como V e T são funções contínuas, então $\dot{V} = V(T) - V$ é contínua e $E = (\dot{V})^{-1}(0)$ é fechado. Agora, M é o maior conjunto invariante em E . Assim, $\overline{M} \subset \overline{E} = E$ e $M \subset G$ é limitado. Pela Proposição 1.4.4-(ii), $\overline{M}$ é invariante. Logo, $M = \overline{M}$, isto é, M é fechado, e então M é compacto.

Pela Proposição 1.6.2, temos que V é também uma função de Liapunov de (1.1) em $\overline{G}$. Visto que G é limitado, então $\overline{G}$ também é limitado. Como G é positivamente invariante, então pela Proposição 1.4.4-(i), $\overline{G}$ é positivamente invariante.

Assim, toda solução $x(n)$ começando em $\overline{G}$ permanece em $\overline{G}$ e, desta forma, é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 1.6.1, $x(n) \rightarrow M$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, M é um atrator sobre $\overline{G}$. Daí, segue que $\overline{G} \subset \mathfrak{R}(M)$.

Suponhamos que V seja constante em M . Mostraremos à seguir que $\hat{M} = M$. Mostremos antes que $V(z) = c, \forall z \in \hat{M}$. Seja $z \in \hat{M}$. Então, podemos assumir que existem seqüências $x_i \in G$ e $n_i \in \mathbb{N}$ tais que $x_i \rightarrow y \in M = \overline{M}$ e $T^{n_i}(x_i) \rightarrow z$ e $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Como G é positivamente invariante, $T^{n_i}(x_i) \in G, \forall i$, e assim $z \in \overline{G}$. Logo, $\hat{M} \subset \overline{G}$. Assim, $T^n z \rightarrow M$, pois $\hat{M} \subset \overline{G} \subset \mathfrak{R}(M)$. Visto que $T^n z$ é limitada, existe uma subsequência

convergente $T^{n_j}z \rightarrow u \in M$ e $T^{n_j}z \in \overline{G}$. Notemos que $-\dot{V}(w) \geq 0, \forall w \in \overline{G}$, e $T^n z \in \overline{G}$. Como $-\dot{V}(z) = -V(Tz) + V(z) \geq 0$, então $V(z) \geq V(T^n(z)), \forall n \geq 1$, o que implica

$$V(z) \geq V(T^{n_j}z) \rightarrow V(u) = c \Rightarrow V(z) \geq c.$$

Também pelo fato de $-\dot{V}(w) \geq 0, \forall w \in \overline{G}$, e $x_i \in G$ e $T^{n_i}(x_i) \in G$, temos:

$$V(x_i) \geq V(T^{n_i}(x_i)) \Rightarrow c = V(y) \geq V(z) \Rightarrow V(z) \leq c.$$

Logo, $V(z) = c$. Provamos então que V é constante em $\hat{M}$.

Ainda, pelo Lema 1.7.5-(iv), $\hat{M}$ é invariante. Seja $w \in \hat{M}$. Então $Tw \in \hat{M}$ e $\dot{V}(w) = 0$, pois

$$\dot{V}(w) = V(Tw) - V(w) = c - c = 0.$$

Assim, $\hat{M} \subset E$. Mas M é o maior conjunto invariante em E , o que implica $\hat{M} = M$. Pelo Lema 1.7.5-(ii), M é estável. Como já vimos que M também é um atrator, então M é assintoticamente estável. Pelo fato de $G \subset \mathfrak{R}(M)$, então podemos dizer que M é globalmente assintoticamente estável em relação à G . ■

Capítulo 2

Sistemas Semidinâmicos Discretos Não Lineares

Neste capítulo trataremos de sistemas discretos dependentes de um parâmetro. Em particular, utilizando funções tipo Liapunov, estabelecemos resultados construtivos sobre estimativas uniformes de atrator. Também obtemos funções tipo Liapunov para uma classe de sistemas lineares e de seus perturbados, inclusive com estimativas uniformes sobre as mesmas e sobre suas derivadas. No final, apresentamos simulações de alguns sistemas caóticos discretos clássicos. Alguns resultados apresentados acreditamos serem inéditos, tais como os Teoremas 2.1.1, 2.1.2, 2.1.12, 2.2.1, e as Proposições 2.1.3, 2.1.10.

2.1 Teoremas e Métodos

Teorema 2.1.1. *Sejam Λ subconjunto compacto de um espaço de Banach e $T : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$, $V : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$; $a, b, c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, satisfazendo:*

$$0 \leq a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x), \quad (2.1)$$

$a(x) \rightarrow \infty$, quando $|x| \rightarrow \infty$ e $-\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \Lambda$. Suponhamos $\{x \in \mathbb{R}^m : c(x) < 0\} \neq \emptyset$ e $\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R}^m : c(x) \leq 0\}$ limitado. Sejam R e μ tais que

$\infty > R > \max_{x \in \mathcal{C}} b(x)$ e $-\mu \leq \min_{x \in \mathcal{C}} c(x)$, e consideremos os conjuntos $B_R := \{x \in \mathbb{R}^m : b(x) \leq R\}$ e $A_{R+\mu} := \{x \in \mathbb{R}^m : a(x) \leq R + \mu\}$. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Então,

- (i) Se $x_0 \in B_R$, então $T^n(x_0, \lambda_0) \in A_{R+\mu}, \forall n \in \mathbb{N}$;
- (ii) Se $x_0 \in \mathbb{R}^m$, existe $n_0 = n_0(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x_0, \lambda_0) \in A_{R+\mu}, \forall n \geq n_0$;
- (iii) Se $x_0 \in \mathbb{R}^m$, existe subsequência $n_j \in \mathbb{N}$, com $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tal que $T^{n_j}(x_0, \lambda_0) \in B_R, \forall j \in \mathbb{N}$.

Prova:

Denotamos $T(\cdot) = T(\cdot, \lambda_0)$ e $V(\cdot) = V(\cdot, \lambda_0)$. Observamos que se $\rho \in \mathbb{R}$, então $B_\rho \subset V_\rho \subset A_\rho$, onde $B_\rho := \{x \in \mathbb{R}^m : b(x) \leq \rho\}$, $V_\rho = V_\rho(\lambda_0) := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) \leq \rho\}$ e $A_\rho := \{x \in \mathbb{R}^m : a(x) \leq \rho\}$. Este fato decorre de (2.1). Observamos também que $\mu > 0$. Afirmamos que:

$$\rho \geq R + \mu \Rightarrow V_\rho \text{ é positivamente invariante com relação à } T(\cdot). \quad (2.2)$$

De fato, seja $x \in V_\rho$. Se $x \in B_R - \mathcal{C}$, então $c(x) > 0$. Logo, $\inf_{x \in B_R} c(x) = \min_{x \in \mathcal{C}} c(x) \geq -\mu$. Desta forma, se $x \in B_R$, temos:

$$\begin{aligned} c(x) \geq -\mu &\Rightarrow -\dot{V}(x) \geq c(x) \geq -\mu \\ &\Rightarrow \dot{V}(x) \leq \mu \\ &\Rightarrow V(T(x)) - V(x) = \dot{V}(x) \leq \mu \\ &\Rightarrow V(T(x)) \leq V(x) + \mu \leq b(x) + \mu \leq R + \mu \leq \rho \\ &\Rightarrow V(T(x)) \leq \rho \\ &\Rightarrow T(x) \in V_\rho. \end{aligned}$$

Portanto, $T(x) \in V_\rho$, se $x \in B_R$. Além disso, se $x \in V_\rho - B_R$, temos:

$$\begin{aligned} -\dot{V}(x) \geq c(x) > 0 &\Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \\ &\Rightarrow V(T(x)) - V(x) = \dot{V}(x) < 0 \\ &\Rightarrow V(T(x)) < V(x) \leq \rho \\ &\Rightarrow V(T(x)) < \rho. \end{aligned}$$

Portanto, $T(x) \in V_\rho$, se $x \in V_\rho - B_R$. Logo, $T(x) \in V_\rho$, $\forall x \in V_\rho$.

Concluimos que $T^n(x) \in V_\rho$, $\forall x \in V_\rho$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Em particular, ficou demonstrado que se $x_0 \in B_R$, então $T^n(x_0) \in V_{R+\mu} \subset A_{R+\mu}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ficando assim justificado o item (i).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Provaremos à seguir que, dado } x_0 \in \mathbb{R}^m, x_0 \notin B_R, \\ \text{existe } n_0 \geq 1 \text{ tal que } T^{n_0}(x_0) \in B_R. \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

Tomemos $\rho = \rho(x_0, \lambda_0) := \max\{V(x_0), R + \mu\}$. Logo, V_ρ é positivamente invariante com relação à T . Consideremos o conjunto

$$W = W_{R, x_0, \lambda_0} := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) \leq \rho\} - B_R.$$

Notemos que se $x \in \overline{W}$, temos $b(x) \geq R > \sup_{y \in \mathcal{C}} b(y)$, o que implica $x \notin \mathcal{C}$. Como $\overline{W} \neq \emptyset$, pois $x_0 \in \overline{W}$ e $c(x) > 0$ para todo $x \in \overline{W}$, temos que $0 < \overline{m} = \overline{m}(x_0, \lambda_0) := \min\{c(x) : x \in \overline{W}\}$, pois $\overline{W}$ é compacto e c é contínua. Desta forma, $-\dot{V}(x) \geq c(x) \geq \overline{m}$, $\forall x \in \overline{W}$, ou ainda, $\dot{V}(x) \leq -\overline{m}$, $\forall x \in \overline{W}$. Como $x_0 \in \overline{W}$, temos:

$$\dot{V}(x_0) \leq -\overline{m} \Rightarrow V(T(x_0)) - V(x_0) = \dot{V}(x_0) \leq -\overline{m} \Rightarrow V(T(x_0)) \leq -\overline{m} + V(x_0) < V(x_0) \leq \rho.$$

Se $T(x_0) \in B_R$, a afirmação acima estaria satisfeita tomando-se $n_0 = 1$. Se $T(x_0) \notin B_R$, do cálculo acima, decorre que $T(x_0) \in W \subset \overline{W}$. Logo,

$$\begin{aligned} V(T^2(x_0)) - V(T(x_0)) &= \dot{V}(T(x_0)) \leq -\overline{m} \Rightarrow V(T^2(x_0)) \leq -\overline{m} + V(T(x_0)) \\ &\Rightarrow V(T^2(x_0)) \leq -2\overline{m} + V(x_0) < V(x_0) \leq \rho. \end{aligned}$$

Se $T^2(x_0) \in B_R$, a afirmação acima estaria satisfeita tomando-se $n_0 = 2$. Se $T^2(x_0) \notin B_R$, das últimas desigualdades decorre que $T^2(x_0) \in W \subset \overline{W}$. Por indução, se $T^j(x_0) \notin B_R$ e $T^j(x_0) \in \overline{W}$, para $j = 1, \dots, n$, concluimos que $0 \leq a(T^n(x_0)) \leq V(T^n(x_0)) \leq -n\overline{m} + V(x_0)$.

Se $T^n(x_0, \lambda_0) \notin B_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então existe $n_p \in \mathbb{N}$ tal que $V(T^{n_p}(x_0)) \leq -n_p\overline{m} + V(x_0) < 0$, o que consiste numa contradição, pois $V \geq 0$. Logo, se $x_0 \notin B_R$, então existe n_0 tal que $B_R \ni T^{n_0}(x_0) \rightarrow T^{n_0}(x_0)$. Agora, se $x_0 \in B_R$, seja $y_0 = T(x_0)$. Se $y_0 \in B_R$ a afirmação acima estaria satisfeita tomando-se $n_0 = 1$. Se $y_0 \notin B_R$, pela demonstração acima, existe $n_0 \geq 1$

tal que $T^{n_0}(y_0) = T^{n_0}(T(x_0)) = T^{n_0+1}(x_0) \in B_R$. Provamos, então, que existe $n_0 \geq 1$ tal que $T^{n_0}(x_0) \in B_R$, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Vamos demonstrar (ii) a seguir. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Se $x_0 \in B_R$, por (i), a afirmação está satisfeita. Se $x_0 \notin B_R$, pela Afirmação (2.3), existe $n_0 \geq 1$ tal que $T^{n_0}(x_0) \in B_R$. E como $B_R \subset V_R \subset A_R \subset A_{R+\mu}$, pela Afirmação (2.2), temos que $T^n(x_0) \in A_{R+\mu}, \forall n \geq n_0$.

Vamos demonstrar (iii) a seguir. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Pela Afirmação (2.3), existe $n_0 \geq 1$ tal que $T^{n_0}(x_0) \in B_R$. Seja $y_0 = T^{n_0}(x_0) \in B_R$. Novamente pela Afirmação (2.3), existe $p_1 \geq 1$ tal que $T^{p_1}(y_0) = T^{p_1}(T^{n_0}(x_0)) = T^{p_1+n_0}(x_0) \in B_R$. Tomemos $n_1 = p_1 + n_0 > n_0$. Logo, $T^{n_1}(x_0) \in B_R$. E, desta maneira, construímos uma subsequência $n_j \in \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $T^{n_j}(x_0) \in B_R, \forall j \in \mathbb{N}$, com $n_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$. ■

Teorema 2.1.2. (*Princípio da Invariância Uniforme*)

Sejam contínuas as funções $T : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m, V : \mathbb{R}^m \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$, e também contínuas as funções $a, c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo $0 \leq a(x) \leq V(x, \lambda)$, $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e $-\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $\lambda \in \Lambda$. Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^m, \lambda_0 \in \Lambda$. Então $\mathcal{E}_c := \{x \in \mathbb{R}^m : c(x) = 0\} \neq \emptyset$ e $T^n(x_0, \lambda_0)$ tende, quando $n \rightarrow \infty$, para o maior conjunto invariante de $T(\cdot, \lambda_0)$ contido em $\mathcal{E}_c$.

Prova:

Denotamos $T(\cdot) = T(\cdot, \lambda_0)$ e $V(\cdot) = V(\cdot, \lambda_0)$. Assim, como $c(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$, então $-\dot{V}(x) \geq c(x) \geq 0 \Rightarrow -\dot{V}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^m$. E mais,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq 0 &\Rightarrow V(T(x_0)) - V(x_0) \leq 0 \\ &\Rightarrow V(T(x_0)) \leq V(x_0) \\ &\Rightarrow V(T^n(x_0)) \leq \dots \leq V(T^2(x_0)) \leq V(T(x_0)) \leq V(x_0) \\ &\Rightarrow V(T^n(x_0)) \leq V(x_0) =: \rho(x_0, \lambda_0) = \rho \\ &\Rightarrow T^n(x_0) \in V_\rho = V_\rho(\lambda_0) := \{x \in \mathbb{R}^m : V(x) \leq \rho\}. \end{aligned}$$

Logo, $T^n(x_0)$ é limitada, pois $x \in V_\rho \Rightarrow V(x, \lambda) \leq \rho \Rightarrow a(x) \leq V(x, \lambda) \leq \rho \Rightarrow a(x) \leq \rho$. E, como $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, então $A_\rho := \{x \in \mathbb{R}^m : a(x) \leq \rho\}$ é limitado.

Concluimos que V é uma função de Liapunov em todo $\mathbb{R}^m$. Como toda solução $x(n) = x(n, \lambda_0) = T^n(x_0)$ é limitada em $\mathbb{R}^m$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então, pelo Teorema 1.6.1, $x(n)$ aproxima-se do maior conjunto invariante contido em $E = E_{\lambda_0} = \{x \in \mathbb{R}^m : \dot{V}(x) = 0\}$ quando $n \rightarrow \infty$.

E mais,

$$x \in E \Rightarrow \dot{V}(x) = 0 \Rightarrow 0 = -\dot{V}(x) \geq c(x) \geq 0 \Rightarrow c(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{E}_c \Rightarrow E \subset \mathcal{E}_c.$$

Pelo Teorema 1.6.1, $\emptyset \neq \Omega(x(0)) \subset E$, o que conclui a demonstração. $\blacksquare$

Proposição 2.1.3. *Consideremos as funções contínuas $a, b : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que $0 \leq a(x) \leq b(x)$ e $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Sejam $A, B : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ funções definidas por:*

$$A(r) := \inf_{|x| \geq r} a(x) \quad e \quad B(r) := \sup_{|x| \leq r} b(x).$$

Então,

$$A(r) = \min_{|x| \geq r} a(x) \quad e \quad B(r) = \max_{|x| \leq r} b(x).$$

Além disso, A e B são não-decrescentes, contínuas, $A(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$, e

$$A(|x|) \leq a(x) \quad e \quad B(|x|) \geq b(x), \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Prova:

Dado $r > 0$, como $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, existe $\rho = \rho(r) > r$ tal que $a(x) > M$, para $|x| \geq \rho$, onde $M > A(r)$. Logo $A(r) = \inf_{|x| \geq \rho} a(x) = \min_{r \leq |x| \leq \rho} a(x) = \min_{|x| \geq r} a(x)$. O fato de que $B(r) = \sup_{|x| \leq r} b(x) = \max_{|x| \leq r} b(x)$ é trivial.

Mostremos que A e B são não-decrescentes. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ tais que $r_1 \leq r_2$. Como $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \geq r_1\} \supset \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \geq r_2\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r_1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r_2\}$, temos:

$$A(r_2) = \inf_{|x| \geq r_2} a(x) \geq \inf_{|x| \geq r_1} a(x) = A(r_1) \Rightarrow A(r_2) \geq A(r_1) \quad e$$

$$B(r_2) = \sup_{|x| \leq r_2} b(x) \geq \sup_{|x| \leq r_1} b(x) = B(r_1) \Rightarrow B(r_2) \geq B(r_1).$$

Afirmamos também que $A(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$. Seja $M > 0$. Como $a(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, $x \in \mathbb{R}^m$, então existe $R > 0$ tal que $a(x) \geq M$, se $|x| \geq R$. Tomemos

$r > R$. Logo, como $A(r) = \min_{|x| \geq r} a(x)$, existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $|y| \geq r > R$ e $A(r) = a(y) \geq M$. Assim, $A(r) \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow \infty$

Garantimos que $A(|x|) \leq a(x)$ e $B(|x|) \geq b(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Como $A(|x|) = \min_{|y| \geq |x|} a(y)$, então $A(|x|) \leq a(y)$, se $|y| \geq |x|$ e, desta forma, $A(|x|) \leq a(x)$. E mais, $B(|x|) = \max_{|y| \leq |x|} b(y) \Rightarrow B(|x|) \geq b(y)$, se $|y| \leq |x|$. Logo, $B(|x|) \geq b(x)$.

Provemos a continuidade de A pela direita. Seja r_n uma seqüência real positiva convergente tal que $r_n \rightarrow r_0, r_n > r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Garantimos que $A(r_n) \rightarrow A(r_0)$. Seja $\rho_0 > r_0$ tal que $a(x) > A(r_0)$, para $|x| \geq \rho_0$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $r_0 \leq |x_0| \leq \rho_0$ e $a(x_0) = \min_{r_0 \leq |x| \leq \rho_0} a(x) = A(r_0)$.

Suponhamos primeiramente que $|x_0| > r_0$. Afirmamos que, para n suficientemente grande, $A(r_n) = A(r_0)$. De fato, como $r_n \rightarrow r_0, r_n > r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r_n < |x_0|$, para $n \geq n_0$. Logo, para $n \geq n_0$ e $|x| \geq r_n$, temos que $|x_0| > r_n$ e $a(x) \geq a(x_0)$. Portanto, $A(r_n) = \min_{|x| \geq r_n} a(x) = a(x_0) = A(r_0)$, se $n \geq n_0$.

Agora, consideremos $|x_0| = r_0$. Seja $\epsilon > 0$. Pela continuidade de a , existe $\delta > 0$ tal que $a(x_0) - \epsilon < a(x) < a(x_0) + \epsilon$, se $x \in B_\delta(x_0)$. Como $r_n \rightarrow r_0, r_n > r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r_0 < r_n < r_0 + \delta$, para $n \geq n_0$. Logo, se $n \geq n_0$, temos $0 \leq A(r_n) - A(r_0) \leq \epsilon$, pois $A(r_n) = \min_{|x| \geq r_n} a(x) \leq \min\{a(x) : |x| \geq r_n \text{ e } x \in B_\delta(x_0)\} \leq a(x_0) + \epsilon = A(r_0) + \epsilon$. Logo, A é contínua pela direita.

Provemos a continuidade de A pela esquerda. Seja r_n uma seqüência real positiva convergente tal que $r_n \rightarrow r_0, r_n < r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Garantimos que $A(r_n) \rightarrow A(r_0)$. Seja $\rho_0 > r_0$ tal que $a(x) > A(r_0) \geq A(r_n)$, para $|x| \geq \rho_0$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $r_0 \leq |x_0| \leq \rho_0$ e $a(x_0) = \min_{r_0 \leq |x| \leq \rho_0} a(x) = A(r_0)$. Logo, $A(r_n) = \min_{|x| \geq r_n} a(x) = \min_{r_n \leq |x| \leq \rho_0} a(x)$. Seja $y_n \in \mathbb{R}^m$ tal que $r_n \leq |y_n| \leq \rho_0$ e $A(r_n) = a(y_n)$. Podemos supor que $y_n \rightarrow y_0, r_0 \leq |y_0| \leq \rho_0$. Afirmamos que $a(x_0) = a(y_0)$. De fato, $a(x_0) \geq a(y_0)$, pois $a(x_0) = A(r_0) \geq A(r_n) = a(y_n) \rightarrow a(y_0)$, e suponhamos $a(y_0) < a(x_0)$. Porém, isto não é possível, pois $a(x_0) = \min_{|x| \geq r_0} a(x)$. Assim, $A(r_n) = a(y_n) \rightarrow a(y_0) = a(x_0) = A(r_0) \Rightarrow A(r_n) \rightarrow A(r_0)$. Logo, A é contínua pela esquerda.

Provemos a continuidade de B pela esquerda. Seja r_n uma seqüência real positiva

convergente tal que $r_n \rightarrow r_0, r_n < r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Garantimos que $B(r_n) \rightarrow B(r_0)$. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $|x_0| \leq r_0$ e $b(x_0) = \max_{|x| \leq r_0} b(x) = B(r_0)$.

Suponhamos primeiramente que $|x_0| < r_0$. Afirmamos que, para n suficientemente grande, $B(r_n) = B(r_0)$. De fato, como $r_n \rightarrow r_0, r_n < r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r_n > |x_0|$, para $n \geq n_0$. Logo, para $n \geq n_0$ e $|x| \leq r_n$, temos que $|x_0| < r_n$ e $b(x) \leq b(x_0)$. Portanto, $B(r_n) = \max_{|x| \leq r_n} b(x) = b(x_0) = B(r_0)$, se $n \geq n_0$.

Agora, consideremos $|x_0| = r_0$. Seja $\epsilon > 0$. Pela continuidade de b , existe $\delta > 0$ tal que $b(x_0) - \epsilon < b(x) < b(x_0) + \epsilon$, se $x \in B_\delta(x_0)$. Como $r_n \rightarrow r_0, r_n < r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $r_0 - \delta < r_n < r_0$, para $n \geq n_0$. Logo, se $n \geq n_0$, temos $B(r_n) - B(r_0) \geq -\epsilon$, pois $B(r_n) = \max_{|x| \leq r_n} b(x) \geq \max\{b(x) : |x| \leq r_n \text{ e } x \in B_\delta(x_0)\} \geq b(x_0) - \epsilon = B(r_0) - \epsilon$. Logo, B é contínua pela esquerda.

Provemos a continuidade de B pela direita. Seja r_n uma seqüência real positiva convergente tal que $r_n \rightarrow r_0, r_n > r_0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Garantimos que $B(r_n) \rightarrow B(r_0)$. Sejam $x_0, y_n \in \mathbb{R}^m, \forall n \in \mathbb{N}^*$ tais que $B(r_0) = \max_{|x| \leq r_0} b(x) = b(x_0)$ e $B(r_n) = \max_{|x| \leq r_n} b(x) = b(y_n)$, onde $|x_0| \leq r_0$ e $|y_n| \leq r_n < L$, para algum L . Logo, podemos supor que $y_n \rightarrow y_0, |y_0| \leq r_0$. Afirmamos que $b(x_0) = b(y_0)$. De fato, $b(x_0) \leq b(y_0)$, pois $b(x_0) = B(r_0) \leq B(r_n) = b(y_n) \rightarrow b(y_0)$, e suponhamos $b(y_0) > b(x_0)$. Porém, isto não é possível, pois $b(x_0) = \max_{|x| \leq r_0} b(x)$. Assim, $B(r_n) = b(y_n) \rightarrow b(y_0) = b(x_0) = B(r_0) \Rightarrow B(r_n) \rightarrow B(r_0)$. Logo, B é contínua pela direita.

■

Definição 2.1.1. Sejam X espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ o conjunto dos operadores limitados de X em X , $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $A - \lambda$ é inversível e $R_\lambda(A) := (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, dizemos que λ pertence ao conjunto resolvente de A e denotamos $\rho(A)$. Chamamos de operador resolvente de A a função R_λ . O conjunto complementar $\sigma(A)$, em $\mathbb{C}$, de $\rho(A)$ é denominado espectro de A .

Proposição 2.1.4. *Seja $(X, |\cdot|)$ espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Então, vale a igualdade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A^n|^{1/n} = \inf_{n=1,2,\dots} |A^n|^{1/n}.$$

Este resultado pode ser encontrado em [15], página 27.

Definição 2.1.2. Seja $(X, |\cdot|)$ espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Chamamos de raio espectral de A , e denotamos por $r(A)$, o limite $r(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} |A^n|^{1/n}$. Notemos que pela Proposição 2.1.4, segue que $r(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} |A^n|^{1/n} = \inf_{n=1,2,\dots} |A^n|^{1/n}$.

Proposição 2.1.5. *Sejam X espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Então, $r(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ e $\sigma(A)$ é um conjunto compacto em $\mathbb{C}$.*

Estes resultados podem ser encontrados em [22], página 151.

Definição 2.1.3. Seja X espaço de Banach munido da norma $|\cdot|$. Vamos definir uma norma no espaço $\mathcal{L}(X)$ como sendo

$$|A| := \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|, A \in \mathcal{L}(X). \quad (2.4)$$

Observação 2.1.6. Na Definição 2.1.3, se $\dim X < \infty$, podemos trocar “sup” por “max” em (2.4) devido à compacidade do conjunto dos x tais que $|x| = 1$.

Proposição 2.1.7. *Sejam $(X, |\cdot|)$ espaço de Banach e $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Então $r(A) \leq |A|$, $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ e $(\mathcal{L}(X), |\cdot|)$ é um espaço de Banach.*

Estes resultados podem ser encontrados em [15], páginas 26 e 176.

Lema 2.1.8. *A aplicação $\mathcal{L}(X) \ni A \mapsto \sigma(A)$ é semicontínua superiormente, ou seja, dados $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(B) \subset V_\epsilon(\sigma(A))$, se $|B - A| < \delta$, para $B \in \mathcal{L}(X)$.*

Este resultado pode ser encontrado em [15], página 208.

Proposição 2.1.9. *A aplicação $\mathcal{L}(X) \ni A \mapsto r(A)$ é semicontínua superiormente, ou seja, dados $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $r(B) < r(A) + \epsilon$, se $|B - A| < \delta$, para $B \in \mathcal{L}(X)$.*

Prova:

Sejam $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\epsilon > 0$. Como a aplicação $\mathcal{L}(X) \ni A \mapsto \sigma(A)$ é semicontínua superiormente, então pelo Lema 2.1.8, existe $\delta > 0$ tal que $\sigma(B) \subset V_\epsilon(\sigma(A))$, se $|B - A| < \delta$, para $B \in \mathcal{L}(X)$.

Em virtude da Proposição 2.1.5, existe $\lambda_1 \in \sigma(B)$ tal que $r(B) = |\lambda_1|$. Como $\lambda_1 \in V_\epsilon(\sigma(A))$, temos que existe $\lambda_0 \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda_1 - \lambda_0| < \epsilon$. Assim, $r(B) < r(A) + \epsilon$, pois

$$|\lambda_1| - |\lambda_0| \leq |\lambda_1 - \lambda_0| < \epsilon \Rightarrow |\lambda_1| < |\lambda_0| + \epsilon \leq r(A) + \epsilon.$$

■

Proposição 2.1.10. *Sejam X espaço de Banach, Γ subconjunto compacto de X e $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua superiormente. Então, existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que $f(\bar{\gamma}) \geq f(\gamma), \forall \gamma \in \Gamma$.*

Prova:

Afirmamos que f é limitada superiormente em Γ . De fato, suponhamos que exista seqüência $\gamma_n \in \Gamma$ tal que $f(\gamma_n) \rightarrow \infty$. Podemos supor $f(\gamma_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\Gamma \subset X$ é compacto, podemos também supor que $\gamma_n \rightarrow \gamma_0 \in \Gamma$. Seja $\epsilon > 0$. Como f é semicontínua superiormente, existe $\delta > 0$ tal que $f(\gamma) < f(\gamma_0) + \epsilon$, se $\gamma \in B_\delta(\gamma_0)$. Como $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, temos $\gamma_n \in B_\delta(\gamma_0)$, o que acarreta $f(\gamma_n) < f(\gamma_0) + \epsilon$, o que é uma contradição. Logo, f é limitada.

Seja $S := \sup_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \in \mathbb{R}$. Logo, $S \geq f(\gamma), \forall \gamma \in \Gamma$. Então, existe $(\gamma_n) \subset \Gamma$ tal que $f(\gamma_n) \rightarrow S$. Podemos supor $\gamma_n \rightarrow \bar{\gamma} \in \Gamma$. Mostremos que $f(\bar{\gamma}) = S$. De fato, seja $\epsilon > 0$ um número real qualquer. Como f é semicontínua superiormente, existe $\delta > 0$ tal que $f(\gamma) < f(\bar{\gamma}) + \epsilon$, se $\gamma \in B_\delta(\bar{\gamma})$. Como $\gamma_n \rightarrow \bar{\gamma}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, temos $\gamma_n \in B_\delta(\bar{\gamma})$, o que acarreta $f(\gamma_n) < f(\bar{\gamma}) + \epsilon$. Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $S \leq f(\bar{\gamma}) + \epsilon$, para qualquer $\epsilon > 0$. Portanto, $S \leq f(\bar{\gamma})$ e, daí, $S = f(\bar{\gamma})$. ■

Analogamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.11. *Sejam X espaço de Banach, Γ subconjunto compacto de X e $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua inferiormente, ou seja, dados $\alpha \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(\beta) > f(\alpha) - \epsilon$, se $|\beta - \alpha| < \delta$, para $\beta \in X$. Então, existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que $f(\bar{\gamma}) \leq f(\gamma), \forall \gamma \in \Gamma$.*

Teorema 2.1.12. *Sejam X espaço de Banach, Γ subconjunto compacto de um espaço de Banach e contínua a aplicação $\Gamma \ni \gamma \mapsto A_\gamma \in \mathcal{L}(X)$. Suponhamos ainda que $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A_\gamma)$. Então, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $r(A_\gamma) \leq \theta < 1, \forall \gamma \in \Gamma$.*

Prova:

Como pela Proposição 2.1.7, a aplicação $\mathcal{L}(X) \ni A_\gamma \mapsto r(A_\gamma)$ é semicontínua superiormente, então também a aplicação $\gamma \in \Gamma \mapsto r(A_\gamma)$ é semicontínua superiormente. Pela Proposição 2.1.10, existe $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tal que $r(A_{\bar{\gamma}}) \geq r(A_\gamma), \forall \gamma \in \Gamma$. Tomando $\theta := r(A_{\bar{\gamma}}) = \sup_{\lambda \in \sigma(A_\gamma)} |\lambda|$, temos $r(A_\gamma) \leq \theta < 1, \forall \gamma \in \Gamma$. ■

Observação 2.1.13. *Dado $K \subset \mathbb{C}$, K compacto, existe espaço de Hilbert H e operador $A \in \mathcal{L}(H)$ tal que $\sigma(A) = K$.*

Este resultado pode ser encontrado em [28], página 263, exercício 1.

Teorema 2.1.14. (Holmes) *Seja $(X, |\cdot|)$ espaço de Banach. Dados $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\epsilon > 0$, existe $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{A,\epsilon}$ norma em X , equivalente à $|\cdot|$, tal que $r(A) \leq \|A\| \leq r(A) + \epsilon$.*

Prova:

Pela definição de raio espectral, existe $s(A, \epsilon) = s \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > s$, temos $|A^n|^{1/n} < r(A) + \epsilon := k(A, \epsilon) = k$ e $|A^n| < k^n$ se $n > s$. Logo,

$$\frac{|A^n x|}{k^n} \leq \frac{|A^n||x|}{k^n} \leq \frac{k^n|x|}{k^n} = |x| \Rightarrow \frac{|A^n x|}{k^n} \leq |x|, \forall n > s. \quad (2.5)$$

Afirmamos que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{A,\epsilon}$ é uma norma equivalente à $|\cdot|$ em X dada por

$$\|x\| := \max_{p=0,\dots,s} \left\{ \frac{|A^p x|}{k^p} \right\}, \forall x \in X.$$

De fato, Sejam $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Provemos primeiramente que $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De fato, como $|\cdot|$ é uma norma em X , então $\|x\| \geq 0$, pois $|A^p x| \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}$. Ainda, se $x = 0 \Rightarrow A^p x = 0 \Rightarrow |A^p x| = 0, \forall p \in \mathbb{N}$, o que acarreta $\|x\| = 0$. Suponhamos agora $\|x\| = 0$. Logo $\frac{|A^p x|}{k^p} = 0$, para $p = 0, \dots, s$, e daí $|x| = 0$. Assim $x = 0$.

Provemos agora que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. De fato, visto que $|A^p(x + y)| = |A^p x + A^p y| \leq$

$|A^p x| + |A^p y|, \forall p \in \mathbb{N}$, por $|\cdot|$ ser norma, temos:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p(x + y)|}{k^p} \right\} \\ &\leq \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p x| + |A^p y|}{k^p} \right\} \\ &= \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p x|}{k^p} \right\} + \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p y|}{k^p} \right\} \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Provemos que $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$. De fato, visto que $|A^p(\alpha x)| = |\alpha A^p x| = |\alpha| |A^p x|, \forall p \in \mathbb{N}$, por $|\cdot|$ ser norma, temos:

$$\|\alpha x\| = \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p(\alpha x)|}{k^p} \right\} = \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|\alpha| |A^p x|}{k^p} \right\} = |\alpha| \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p x|}{k^p} \right\} = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

E temos também que $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes, pois:

$$\begin{aligned} |x| &\leq \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p x|}{k^p} \right\} \leq \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p| |x|}{k^p} \right\} \leq |x| \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p|}{k^p} \right\} \\ &\Rightarrow |x| \leq \|x\| \leq |x| \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p|}{k^p} \right\} \end{aligned}$$

Seja $0 \neq x \in X$. Agora, $\|A\| \leq r(A) + \epsilon$, pois por (2.5), temos:

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^p(Ax)|}{k^p} \right\} = \\ &= \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^{p+1}x|}{k^p} \right\} = k \max_{p=0, \dots, s} \left\{ \frac{|A^{p+1}x|}{k^{p+1}} \right\} \leq k \max_{p=0, \dots, s-1} \left\{ \frac{|A^{p+1}x|}{k^{p+1}}, |x| \right\} = k\|x\|. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1.7, segue o resultado. ■

Observação 2.1.15. Se X é um espaço de Hilbert na Proposição 2.1.14, poderíamos utilizar a norma $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{A, \epsilon}$, dada por

$$\|x\| = \left[\sum_{p=0}^n \left(\frac{|A^p x|}{k^p} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad x \in X,$$

sendo a demonstração muito similar à demonstração do Teorema 2.1.14.

Corolário 2.1.16. *Sejam $(X, |\cdot|)$ espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$, e suponhamos $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A)$. Então, A é uma contração em alguma norma equivalente à $|\cdot|$ em X .*

Prova:

Seja $\epsilon > 0$ tal que $r(A) + \epsilon < 1$. Pelo Teorema 2.1.14, existe $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$ norma em X , equivalente à $|\cdot|$, tal que $\|A\|_{A,\epsilon} \leq r(A) + \epsilon < 1$. Logo, A é uma contração em relação à norma $\|\cdot\|_{A,\epsilon}$. ■

Proposição 2.1.17. *Sejam X espaço de Banach, Γ subconjunto compacto de um espaço de Banach. Suponhamos contínua a aplicação $\Gamma \ni \gamma \mapsto A_\gamma \in \mathcal{L}(X)$ e que $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A_\gamma)$. Então, existem $M > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que $|A_\gamma^k| \leq M\theta^k$ para quaisquer $\gamma \in \Gamma$ e $k \in \mathbb{N}$.*

Prova:

Sejam $\gamma \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, $A = A_\gamma \in \mathcal{L}(X)$, $M := \sup_{\lambda \in C_\theta} |(A_\gamma - \lambda)^{-1}| = \max_{\lambda \in C_\theta} |(A_\gamma - \lambda)^{-1}|$, C_θ o círculo de centro na origem e raio θ e γ orientada positivamente. Por [28], página 287, temos que

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\theta} \lambda^k R_\lambda d\lambda \Rightarrow A^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\theta} \lambda^k (A - \lambda)^{-1} d\lambda \\ &\Rightarrow |A^k| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\lambda \in C_\theta} |\lambda^k (A_\lambda)^{-1}| 2\pi\theta \leq M\theta^{k+1} \leq M\theta^k. \end{aligned}$$

■

Definição 2.1.4. Seja H espaço de Hilbert e A um operador em H . Por [12], página 39, existe um único operador A^* , chamado adjunto de A , tal que $(Ax|y) = (x|A^*y)$, para todo $x, y \in H$; e $|A^*| = |A|$

Proposição 2.1.18. *Sejam X espaço de Banach, Γ um subconjunto compacto de um espaço de Banach e $f_k : \Gamma \rightarrow X$ funções contínuas, com $|f_k(\gamma)| \leq \alpha_k, \forall \gamma \in \Gamma$, e $\sum \alpha_k < \infty$. Então a aplicação $\gamma \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\gamma) =: F(\gamma)$ é uniformemente contínua em Γ .*

Prova:

Dado $\epsilon > 0$, $\exists k_0(\epsilon)$ tal que $n \geq k_0$ e

$$\left| \sum_{k=0}^{k_0} f_k(x) - F(\gamma) \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k(\gamma) \right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \alpha_k < \epsilon, \forall \gamma \in \Gamma$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} |F(\gamma_1) - F(\gamma_2)| &= \left| \sum_{k=0}^{k_0} f_k(\gamma_1) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k(\gamma_1) - \sum_{k=0}^{k_0} f_k(\gamma_2) - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} f_k(\gamma_2) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{k_0} |f_k(\gamma_1) - f_k(\gamma_2)| \right| + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Tomamos então $f_k, k = 0, \dots, k_0$. Assim, $\exists \delta_k = \delta_k(\epsilon) > 0$ tal que

$$|f_k(\gamma_1) - f_k(\gamma_2)| < \frac{\epsilon}{k_0 + 1}, \text{ para } |\gamma_1 - \gamma_2| < \delta_k.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_k, k = 0, \dots, k_0\}$, temos:

$$|\gamma_1 - \gamma_2| < \delta \Rightarrow |F(\gamma_1) - F(\gamma_2)| < \frac{\epsilon}{k_0 + 1} \cdot (k_0 + 1) + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

■

Daqui para a frente assumimos que $H = \mathbb{R}^m$; e fixamos as matrizes, $n \times n$,

$$\left. \begin{aligned} &A_\gamma, C \text{ e } B_\gamma := \sum_{k=0}^{\infty} (A_\gamma^*)^k C A_\gamma^k, \text{ com } \gamma \in \Gamma, \text{ e} \\ &\Gamma \text{ subconjunto compacto de um espaço de Banach.} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Seja

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in H$$

e $A = (a_{ij})$. Denotamos $x^* = [x_1 \dots x_m]$ e A^* pela matriz transposta conjugada de A .

Consideraremos os operadores de $\mathcal{L}(H)$ definidos da seguinte maneira: dada a matriz A e x como explicitados acima, Ax é definido por

$$(a_{ij}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Neste caso, o operador A^* estará relacionado com a matriz transposta conjugada de $A = (a_{ij})$.

Teorema 2.1.19. *Se $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A_\gamma)$, então a série $\sum_{k=0}^{\infty} (A_\gamma^*)^k C A_\gamma^k$ é absolutamente uniformemente convergente e a aplicação $\gamma \mapsto B_\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} (A_\gamma^*)^k C A_\gamma^k$ é contínua.*

Prova:

De fato, pela Proposição 2.1.17, existem $M > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que $|A_\gamma^k| \leq M\theta^k$ para quaisquer $\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, 1)$ e $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 |B_\gamma| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |(A_\gamma^*)^k| |C| |A_\gamma^k| \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} |A_\gamma^*|^k |C| |A_\gamma|^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} |A_\gamma|^k |C| |A_\gamma|^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} |C| |A_\gamma|^{2k} \\
 &= |C| \sum_{k=0}^{\infty} |A_\gamma|^{2k} \\
 &\leq |C| M^2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k}.
 \end{aligned}$$

Assim, B_γ converge absolutamente e pela majoração da série numérica $|C| M^2 \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k}$, decorre a convergência uniforme da série $\sum_{k=0}^{\infty} (A_\gamma^*)^k C A_\gamma^k$. Pela Proposição 2.1.18, a aplicação $\gamma \mapsto B_\gamma$ é contínua. ■

Definição 2.1.5. Seja $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que V é definida positiva em relação a $\bar{x}$ se $V(\bar{x}) = 0$ e existir uma vizinhança G de $\bar{x}$ tal que $V(x) > 0, \forall x \in G, x \neq \bar{x}$. Dizemos simplesmente que V é definida positiva se V é definida positiva em relação à origem, isto é, $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para x em uma vizinhança de 0 e $x \neq 0$. Ainda, se D é um operador em $\mathbb{R}^m$, dizemos que D é definida positiva se a forma quadrática $(Dx|x) := x^* D x$ for definida positiva, com $x \in \mathbb{R}^m$.

Proposição 2.1.20. *São válidas as seguintes afirmativas:*

- (i) $A_\gamma^* B_\gamma A_\gamma - B_\gamma = -C$;
- (ii) Se C é definida positiva, então B_γ também é definida positiva;
- (iii) Se C é simétrica, então B_γ também é simétrica.

Prova:

Fixemos $A := A_\gamma$ e $B := B_\gamma$. Seja $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$.

(i)

$$\begin{aligned}
 A^* B A - B &= A^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k \right) A - B \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^{k+1} C A^{k+1} - B \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^{k+1} C A^{k+1} + C - C - B \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k - C - B \\
 &= B - C - B \\
 &= -C.
 \end{aligned}$$

(ii) Notemos que $x^* C x > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
 (B_\gamma x | x) &= x^* B_\gamma x \\
 &= x^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k \right) x \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x^* ((A^*)^k C A^k) x \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x^* (A^*)^k C A^k x \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k x)^* C A^k x > 0.
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
B^* &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k \right)^* \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} ((A^*)^k C A^k)^* \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (C A^k)^* ((A^*)^k)^* \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A^k)^* C A^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k C A^k \\
&= B.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.1.21. *Seja C definida positiva e suponhamos $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A_\gamma)$. Seja $T_\gamma x := A_\gamma x$ e $V_\gamma(x) = (B_\gamma x|x) = x^* B_\gamma x, \forall x \in \mathbb{R}^m$. Então, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e todo $\gamma \in \Gamma$, temos que:*

(i) V_γ é definida positiva e existe constante $c_0 > 0$ tal que $-\dot{V}_\gamma(x) = x^* C x \geq c_0 |x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^m$;

(ii) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 |x|^2 \leq V_\gamma(x) \leq c_2 |x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^m$.

Prova:

(i) Pelo Teorema 2.1.19, B_γ é contínua em γ . Como C é definida positiva, então B é definida positiva, devido à Proposição 2.1.20-(ii). Isto implica que V é definida positiva. Para simplificar notações, coloquemos $A := A_\gamma$, $B := B_\gamma$, $T := T_\gamma$ e $V := V_\gamma$.

Assim, como pela Proposição 2.1.20-(i), ocorre $A^*BA - B = -C$, temos que:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= V(Tx) - V(x) \\
 &= V(Ax) - V(x) \\
 &= (Ax)^*B(Ax) - x^*Bx \\
 &= (x^*A^*)B(Ax) - x^*Bx \\
 &= x^*A^*BAx - x^*Bx \\
 &= x^*(-C + B)x - x^*Bx \\
 &= -x^*Cx.
 \end{aligned}$$

Como C é definida positiva, temos x^*Cx definida positiva. Logo, $-\dot{V}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0$ e $-\dot{V}(0) = 0$. Portanto, V é uma função de Liapunov de T .

E mais, provemos que existe constante $c_0 > 0$ tal que $-\dot{V}_\gamma = x^*Cx \geq c_0|x|^2$. De fato, pela continuidade de x^*Cx e compacidade de $S := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, segue que existe constante $c_0 > 0$ tal que $c_0 := \min_{(x,\gamma) \in S \times \Gamma} x^*Cx$. Sejam $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$ e $y = \frac{x}{|x|} \in S$. Logo,

$$c_0 \leq y^*Cy \Rightarrow c_0 \leq \frac{x^*}{|x|} C \frac{x}{|x|} \Rightarrow c_0 \leq \frac{1}{|x|^2} x^*Cx \Rightarrow x^*Cx \geq c_0|x|^2.$$

(ii) Pela continuidade de V_γ e compacidade de $S := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, segue que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1 := \min_{(x,\gamma) \in S \times \Gamma} x^*B_\gamma x$ e $c_2 := \max_{(x,\gamma) \in S \times \Gamma} x^*B_\gamma x$. Sejam $0 \neq x \in \mathbb{R}^m$ e $y = \frac{x}{|x|} \in S$. Logo,

$$c_1 \leq V_\gamma(y) \leq c_2 \Rightarrow c_1 \leq y^*B_\gamma y \leq c_2 \Rightarrow c_1 \leq \frac{x^*}{|x|} B_\gamma \frac{x}{|x|} \leq c_2 \Rightarrow c_1 \leq \frac{1}{|x|^2} x^*B_\gamma x \leq c_2$$

e, portanto, $c_1|x|^2 \leq V_\gamma(x) \leq c_2|x|^2, x \in \mathbb{R}^m$.

2.2 Exemplos de Sistemas Não Lineares

Teorema 2.2.1. *Sejam A_γ e B_γ como em (2.6), $V_\gamma(x) = (B_\gamma x|x) = x^*B_\gamma x, x \in \mathbb{R}^m$, C definida positiva e C simétrica. Suponhamos $|\lambda| < 1, \forall \lambda \in \sigma(A_\gamma)$. Sejam $f_\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua com $|f_\gamma(x)| \leq L, \forall x \in \mathbb{R}^m$, e $T_\gamma := A_\gamma + f_\gamma$.*

- (i) Então existe função $c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-\dot{V}_\gamma(x) \geq c(x)$ e existe $M > 0$ tal que $c(x) > 0$, se $|x| \geq M$, e $c(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$.
- (ii) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $c_1|x|^2 \leq V_\gamma(x) \leq c_2|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^m, \gamma \in \Gamma$.

Prova:

- (i) Pelo Teorema 2.1.19, B_γ é contínua em γ . Para simplificar notações, coloquemos $A := A_\gamma, B := B_\gamma, f := f_\gamma, T := T_\gamma$ e $V := V_\gamma$. Pela Proposição 2.1.20, temos que $A^*BA - B = -C$, B é definida positiva e simétrica.

Mostraremos à seguir que existe função $c : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $-\dot{V}_\gamma(x) \geq c(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= V(Tx) - V(x) \\
 &= V(Ax + f(x)) - V(x) \\
 &= (Ax + f(x))^*B(Ax + f(x)) - x^*Bx \\
 &= (x^*A^* + f^*(x))B(Ax + f(x)) - x^*Bx \\
 &= x^*A^*BAx + x^*A^*Bf(x) + f^*(x)BAx + f^*(x)Bf(x) - x^*Bx \\
 &= x^*A^*BAx + x^*A^*Bf(x) + (x^*A^*Bf(x))^* + f^*(x)Bf(x) - x^*Bx \\
 &= x^*A^*BAx + 2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x) - x^*Bx \\
 &= x^*(-C + B)x + (2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x)) - x^*Bx \\
 &= -x^*Cx + (2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x)).
 \end{aligned}$$

Logo, $\dot{V}(x) = -x^*Cx + (2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x))$. Como f é limitada, existem constantes $P > 0$ e $Q > 0$ tais que $2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x) \leq P|x| + Q$, pois

$$\begin{aligned}
 2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x) &\leq |2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x)| \\
 &\leq |2x^*A^*Bf(x)| + |f^*(x)Bf(x)| \\
 &\leq |2x^*A^*Bf(x)| + |B| \\
 &\leq P|x| + Q.
 \end{aligned}$$

Tal como 2.1.21-(i), existe constante $c_0 > 0$ tal que $x^*Cx \geq c_0|x|^2$. Agora,

$$\begin{aligned} -\dot{V}(x) = x^*Cx - (2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x)) &\geq x^*Cx - |2x^*A^*Bf(x) + f^*(x)Bf(x)| \\ &\geq c_0|x|^2 - P|x| - Q =: c(x). \end{aligned}$$

Logo, $-\dot{V}_\gamma(x) \geq c(x)$, para $c(x) = c_0|x|^2 - P|x| - Q$, com c_0, P e Q constantes positivas.

Notemos ainda que $c(x) \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Logo, existe $\eta > 0$ tal que $c(x) > 0$, para $|x| \geq \eta$.

(ii) Demonstração análoga à feita no Teorema 2.1.21-(ii). ■

Observação 2.2.2. *Pelo item (i) acima, temos, $-\dot{V}(x) \geq c(x)$, e podemos aplicar o Teorema 2.1.1.*

2.3 Simulações

Nesta seção apresentamos algumas simulações de sistemas discretos clássicos. Essas figuras foram geradas utilizando o software Matlab. Em geral, considera-se uma função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e o sistema discreto $x(n+1) = f(x(n))$.

Em alguns modelos, tais como nos atratores de Chua, Lorenz e Rössler, fizemos adaptações a partir de um modelo contínuo para um modelo discreto, como será descrito à seguir. Consideremos a equação diferencial em $\mathbb{R}^m$ dada por $x' = f(x)$ e consideremos a discretização $x(n+1) - x(n) = hf(x(n))$. Tomaremos a aplicação $T(x) = x + hf(x)$.

2.3.1 Atrator de Chua Discreto

Este atrator representa o comportamento de um circuito de fileiras em paralelo (resistência e indutância em uma; condensador na outra) unidas mediante uma resistência em série a outras mais duas fileiras (um condensador em uma fileira e em outra um diodo).

Para simular o Atrator de Chua, utilizamos a seguinte função não linear

$$T(x, y, z) = (x + h(-\alpha x + \alpha y - \alpha w(x)), y + h(x - y + z), z + h(-\beta_1 y - \beta_2 z))$$

onde $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$w(x) = -bx + \frac{b-a}{2} (|x+1| - |x-1|),$$

com $a > b > 0$ e $b < 1$. Tomemos $\alpha = 7, \beta_1 = 100, \beta_2 = 1/2, a = 8/7, b = 5/7$ e $h = 0,01$. Fazendo $x(1) = 0,1, y(1) = 0,1, z(1) = 0,1$ as condições iniciais e utilizando o software Matlab com os comandos:

```
clear; close all;
x(1)=0.1; y(1)=0.1; z(1)=0.1; h=0.01;
for i=1:50000
x(i+1) = x(i) + h*( - 7*x(i) + 7*y(i) - 7*(-(5/7)*x(i) + (-3/14)*(abs(x(i)+1) - abs(x(i)-1)))));
y(i+1) = y(i) + h*( x(i) - y(i) + z(i));
z(i+1) = z(i) + h*(-100*y(i) - (1/2)*z(i));
end
plot3(x,y,z,'.');xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
```

obtemos a figura seguinte.

Figura 2.1: Atrator de Chua.

2.3.2 Atrator de Hénon

O atrator de Hénon pertence à classe de sistemas dissipativos e pode ser descrito por uma aplicação de tempo discreto: $x(n+1) = T(x(n))$. Notemos que não importam quais condições iniciais são dadas, visto que a curva aparece da mesma forma.

Para simular o Atrator de Hénon, utilizamos a seguinte função não linear:

$$T(x, y) = (1 - ax^2 + y, bx) .$$

Tomemos $a = 1,4$ e $b = 0.3$. Fazendo $x(1) = 1, y(1) = 1, z(1) = 1$ as condições iniciais e utilizando o software Matlab com os comandos:

```
clear; close all;  
x(1)=1; y(1)=1;  
for i=1:50000  
    x(i+1)= 1 - 1.4*(x(i))^ 2 + y(i);  
    y(i+1)= 0.3*x(i);  
end  
plot(x,y,'.'); xlabel('x') ; ylabel('y');
```

obtemos a figura seguinte.

Figura 2.2: Atrator de Hénon.

2.3.3 Atrator de Ikeda

Outro famoso atrator bidimensional é o atrator de Ikeda. A equação proposta por Ikeda tinha como modelo um problema de óptica não linear. Desta vez, trabalhamos no plano complexo e fizemos as devidas modificações para a simulação em $\mathbb{R}^2$.

Para simular o Atrator de Ikeda, faremos uso da seguinte função não linear

$$f(x, y) = (p + Bx \sin(w(x, y)) - By \cos(w(x, y)), By \sin(w(x, y)) - Bx \cos(w(x, y))) .$$

onde $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$w(x, y) = k - \frac{a}{1 + x^2 + y^2}$$

e $p = 1, B = 0,9, k = 0.4$ e $a = 6$.

Seja $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $G(z) = z$, se $|z| \leq R$, e $G(z) = R \frac{z}{|z|}$, se $|z| > R$. Notemos que G é contínua; e consideremos a função $T := G \circ f$.

Fazendo $x(1) = 0,1$, $y(1) = 0,1$, $z(1) = 0,1$ as condições iniciais e utilizando o software Matlab com os comandos:

```
clear; close all;
x(1)=0.01; y(1)=0.01; R=1.5;
for i=1:50000
if x(i)^2+y(i)^2 <= R
x(i+1)= 1 + 0.9*x(i)*cos(0.4 - 6/(1+(x(i))^2 +(y(i))^2))
- 0.9*y(i)*sin(0.4 - 6/(1+(x(i))^2 +(y(i))^2));
y(i+1)= 0.9*y(i)*cos(0.4 - 6/(1+(x(i))^2 + (y(i))^2))
+ 0.9*x(i)*sin(0.4 - 6/(1+(x(i))^2 + (y(i))^2));
else
x(i+1)= R*x(i)/(x(i)^2 + y(i)^2);
y(i+1)=R*y(i)/(x(i)^2 + y(i)^2);
end
end
plot(x,y,'.'); xlabel('x') ; ylabel('y');
```

obtemos a figura seguinte.

Figura 2.3: Atrator de Ikeda.

2.3.4 Atrator de Lorenz Discreto

O atrator de Lorenz é uma representação de um sistema de equações diferenciais autônomo. É um sistema dinâmico que, em princípio, foi idealizado para a compreensão de fenômenos meteorológicos. Se determinado o atrator, temos que suas infinitas trajetórias nunca se cortam, e também pode-se provar que apresenta auto-similaridade características dos fractais.

O modelo atmosférico que faz uso do sistema de Lorenz consiste em uma atmosfera bidimensional retangular, cujo extremo inferior está a uma temperatura maior que a superior. Desta maneira, o ar quente fará aumentar a variável y , enquanto o ar frio fará abaixar, criando correntes que farão uma troca de calor por convecção.

As equações que descrevem este processo são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha_1(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \alpha_2 x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

onde as variáveis, que dependem unicamente do tempo são:

- “ x ”: representa o fluxo convectivo;
- “ y ”: distribuição de temperatura horizontal;
- “ z ”: distribuição de temperatura vertical.

E mais, temos três parâmetros que interferem nas equações:

- “ α_1 ”: quociente entre a viscosidade e a condutividade térmica;
- “ α_2 ”: diferença de temperaturas entre as camadas inferior e superior;
- “ β ”: quociente entre altura e a largura do retângulo citado.

Para simular o atrator de Lorenz, utilizamos a seguinte função não linear

$$T(x, y, z) = (x + h\alpha_1(y - x), y + h(\alpha_2x - y - xz), z + h(-\beta z + xy)).$$

Tomemos $\alpha_1 = 10$, $\alpha_2 = 28$, $\beta = 8/3$ e $h = 0,01$. Fazendo $x(1) = 10$, $y(1) = 10$, $z(1) = 10$ as condições iniciais e utilizando o software Matlab com os comandos:

```
clear; close all;
x(1)=10; y(1)=10; z(1)=10; h=0.01;
for i=1:50000
    x(i+1) = x(i) + h*(- 10*x(i) + 10*y(i));
    y(i+1) = y(i) + h*(- y(i) + 28*x(i) - x(i)*z(i));
    z(i+1) = z(i) + h*(-(8/3)*z(i) + x(i)*y(i));
end
plot3(x,y,z,'.'); xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
```

obtemos a figura seguinte.

Figura 2.4: Atrator de Lorenz.

2.3.5 Atrator de Rössler Discreto

Este atrator não difere muito do atrator de Lorenz, sendo um pouco mais simples (possui somente um termo não linear). Foi descoberto por Otto Rössler ao estudar oscilações em reações químicas, chegando a um modelo que tinha um comportamento caótico para certos valores dos parâmetros.

As equações que descrevem este processo são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + xz - cz\end{aligned}$$

onde $x(t), y(t), z(t)$ são as variáveis espaciais, funções do tempo (variável independente); a, b, c são parâmetros da reação, tais quais para este caso (atrator caótico), devemos ter $c > 5$.

Para simular o atrator de Rössler, utilizamos a seguinte função não linear

$$T(x, y, z) = (x - h(y + z), y + h(x + 0, 2y), z + h(0, 4 + xz - 5, 7z)).$$

Tomemos $h = 0,01$. Fazendo $x(1) = 1$, $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ as condições iniciais e

utilizando o software Matlab com os comandos:

```
clear; close all;  
x(1)=1; y(1)=1; z(1)=1; h=0.01;  
for i=1:50000  
    x(i+1) = x(i) + h*(- y(i) - z(i));  
    y(i+1) = y(i) + h*(x(i) + 0.2*y(i));  
    z(i+1) = z(i) + h*( 0.4 + x(i)*z(i) - 5.7*z(i));  
end  
plot3(x,y,z,'.'); xlabel('x') ; ylabel('y'); zlabel('z');
```

obtemos a figura seguinte.

Figura 2.5: Atrator de Rössler Discreto.

2.4 Comentários Finais

Como continuação deste trabalho, pretendemos encontrar funções tipo Liapunov explícitas para certos sistemas dinâmicos discretos como o de Chua, Hénon, Ikeda, Lorenz, Rössler, etc.

Procuraremos estabelecer estimativas uniformes de atratores de sistemas acoplados e obter resultados que permitam concluir sobre a sincronização dos mesmos.

Referências Bibliográficas

- [1] AFRAIMOVICH, V. S., E RODRIGUES, H. M., *Uniform Dissipativeness and Synchronization on Nonautonomous Equations*, Equadiff95, International Conference on Differential, World Scientific, p. 3-17. (1998).
- [2] AFRAIMOVICH, V. S., E RODRIGUES, H. M., *Uniform Ultimate Boundedness and Synchronization for Nonautonomous Equations*, Technical Report, CDSNS 94-2002, Center for Dynamic Systems and Nonlinear Studies, Georgia Institute of Technology - Atlanta, (1994).
- [3] BHATIA, N. P., E SZEGO, G. P., *Stability Theory of Dynamical Systems*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer - Verlag, v. 161. (1970).
- [4] CARVALHO, A. N., DLOTKO, T. E RODRIGUES, H. M., *Upper Semicontinuity of attractors and synchronization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, n.220, p. 13-41, (1998).
- [5] DUNFORD, N., E SCHWARTZ, J. T., *Linear operators*, Wiley - Interscience - New York. (1971).
- [6] FIGUEIREDO, D. G., *Análise I*, Coleção Elementos de Matemática , IMPA - Rio de Janeiro. (1975).
- [7] GAMEIRO, M. F., E RODRIGUES, H. M., *Applications of Robust Synchronization to Communication Systems*, Applicable Analysis an International Journal, v. 79, pp. 21-45 (2001).

-
- [8] HAHN, W., *Stability of Motion*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer - Verlag, v. 138. (1967).
- [9] HALE, J. K., *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, A. M. S. , v. 25. (1988).
- [10] HALE, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Wiley - Interscience. (1969).
- [11] HALE, J. K., E KOÇAK, H., *Dynamics and Bifurcations*, Texts in Applied Mathematics, Springer - Verlag, v. 3. (1991).
- [12] HALMOS, P. R., *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea Publishing Company. (1951).
- [13] HARTMAN, P., *Ordinary Differential Equations*, Wiley. (1964).
- [14] IRWIN, M. C., *Smooth Dynamical System*, Academic Press. (1980).
- [15] KATO, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer - Verlag, v. 132. (1976).
- [16] LABOURIAU, I. S., E RODRIGUES, H. M., *Synchronization of Coupled Equations of Hodgkin-Huxley Type*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A 10 (1-3) pp. 463-476. (2003).
- [17] LASALLE, J. P., *The Stability and Control of Discrete Processes*, Applied Mathematical Sciences, Springer - Verlag, v. 62. (1986).
- [18] LASALLE, J. P., *The Stability of Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 25. (1976).
- [19] LASALLE, J. P., E LEFSCHETZ, S., *Stability by Liapunov's Direct Method*, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, v. 4. (1961).

-
- [20] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA - Rio de Janeiro. (1998).
- [21] LIMA, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA - Rio de Janeiro. (1997).
- [22] OLIVEIRA, C. R., *Introdução à Análise Funcional*, Publicações matemáticas, IMPA. (2001).
- [23] OTT, E., SAUER, T. E YORKE, J. A., *Coping with Chaos - Analysis of Chaotic Data and the Exploitation of Chaotic Systems*, Wiley Series in Nonlinear Science. (1994).
- [24] RODRIGUES, H. M., *Abstract Methods for Synchronization and Applications*, Applicable Analysis, v.62, p.263-296, (1996).
- [25] RODRIGUES, H. M., *Uniform Ultimate Boundedness and Synchronization*, CDSNS94, Center for Dynamic Systems and Nonlinear Studies, Georgia Institute of Technology - Atlanta, (1994).
- [26] RODRIGUES, H. M., ADALBERTO, L. F. C. E BRETAS, N. C., *On the Invariance Principle. Generalizations and Applications to Synchronism*, IEEE Transactions on Circuit and Systems, IEEE Transactions on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, v. 47, n.5, May (2000).
- [27] RODRIGUES, H. M., ALBERTO, L. F. C. E BRETAS, N. C., *Uniform Invariance Principle and Synchronization*, Robustness with respect to parameter variation, Journal of Differential Equations, v. 169, n.1, (2001).
- [28] TAYLOR, A. E. E LAY, D. C., *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons - New York. (1980).