Homeomorfismos do toro cujo conjunto de
rotação é um segmento de reta

Romenique da Rocha Silva

Homeomorfismos do toro cujo conjunto de rotação é um segmento de reta

Romenique da Rocha Silva

Orientador: *Carlos Alberto Maquera Apaza*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos

Julho/2007

Aos meus pais,
Ranulfo Florencio da Silva e
Margarida Maria da Rocha,
e minhas “meninas”,
Lília Belém de Assunção e
Letícia Assunção Silva

Agradecimentos

A José Carlos e Joatan Santos, pessoas que foram fundamentais para que eu iniciasse o mestrado.

Ao professor Carlos Maquera, pela orientação.

A todos os meus colegas e amigos do ICMC-USP, que tornaram os dias mais agradáveis.

A minha família, que esteve comigo nos momentos mais difíceis, Lília e Letícia.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro recebido durante o mestrado.

Resumo

Um dos teoremas conhecidos de Poincaré afirma: *Seja f um homeomorfismo do círculo que preserva orientação. Se p/q , com $\text{mdc}(p, q) = 1$, é o número de rotação de f , então f possui um ponto periódico de período q .* Quando o conceito de número de rotação para um homeomorfismo do círculo é generalizado para um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade, o resultado é um subconjunto convexo do plano $\mathbb{R}^2$, chamado conjunto de rotação e é denotado por $\rho(F)$ onde F é um levantamento de f . No caso que $\rho(F)$ tem interior não vazio, J. Franks obteve resultados análogos ao Teorema de Poincaré. Nesta dissertação estudamos um resultado análogo, obtido por Jonker e Zhang, quando $\rho(F)$ não tem interior. Mais precisamente: assumimos que $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional e mostramos que se $\frac{1}{n}(p_1, p_2) \in \rho(F)$, com $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então f possui um ponto periódico de período n .

Abstract

One of the well know results of Poincaré state: *Let f be an orientation preserving circle homeomorphism. If p/q , with $\text{mdc}(p, q) = 1$, is the rotation number of f , then there is a periodic point for f whose period is q .* When the concept of rotations number, for orientation preserving circle homeomorphism, is generalized for torus homeomorphism $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ that are homotopic to the identity, it results in a convex subset of $\mathbb{R}^2$, called rotation set and is denoted by $\rho(F)$ where F is a lifting of f . In the case that $\rho(F)$ has non-empty interior, J. Franks proved similar results to the Poincaré Theorem. In this work, when $\rho(F)$ has empty interior, we study an similar result obtained by Jonker and Zhang. More precisely: they suppose that the rotation set $\rho(F)$ is a line segment with irrational slope and demonstrate that if $\frac{1}{n}(p_1, p_2) \in \rho(F)$, with $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, then f has a periodic point of period n .

Lista de Figuras

1.1	Grafo.	6
1.2	Grafo orientado.	6
2.1	Imagem da reta r pela aplicação π	22
2.2	Anel essencial no toro $\mathbb{T}^2$	24
2.3	$\pi^{-1}(M_j)$ e as retas paralelas com a mesma inclinação de $\widetilde{M}_j$	25
3.1	ε -partição de I^2	28
3.2	Caminho orientado $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ em $G_n(\varepsilon)$	30
3.3	Segmento com inclinação racional.	38
3.4	O conjunto $E(v, \theta, r)$	39
3.5	O conjunto $E(\omega, \theta, r) \cup E(v, \theta, r)$	41
3.6	Campo de vetores $\widetilde{X}$	43

Lista de Símbolos

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Conceitos e resultados importantes	5
1.2 Homeomorfismos do círculo e número de rotação	6
2 Conjunto de rotação e transitividade por cadeias	15
2.1 Conjunto de rotação: propriedades gerais	15
2.2 Recorrência e transitividade por cadeias	18
3 Conjunto de rotação e pontos periódicos	27
3.1 O grafo orientado $G_n(\varepsilon)$ de uma ε -partição	28
3.1.1 Caminhos e laços orientados em $G_n(\varepsilon)$	30
3.1.2 A componente de 0 em $\mathbb{Z}^2$ por ε -cadeias	34
3.2 Prova do Teorema Principal	40
Referências Bibliográficas	45

Introdução

O conceito de número de rotação de homeomorfismos do círculo $\mathbb{S}^1$ que são homotópicos à identidade foi introduzido por Henri Poincaré em [18] e tem tido uma história rica nos sistemas dinâmicos. Quando esse conceito é generalizado para a família de homeomorfismos homotópicos à identidade do toro $\mathbb{T}^n$, obtemos um subconjunto do espaço Euclidiano chamado *conjunto de rotação*. Existem várias noções deste conjunto para aplicações de $\mathbb{T}^n$, sendo mais usada a definição introduzida por Misiurewicz e Ziemian em [16].

Nas duas últimas décadas o conjunto de rotação tem sido amplamente explorado por vários matemáticos, entre eles, J. Franks [7], [9], M. Handel [10], [11], Libre e MacKay [15], Berge e Walker [2], Jonker e Zhang [12], além de Misiurewicz e Ziemian [16], [17]. Espera-se que o conjunto contenha informações a respeito da dinâmica do homeomorfismo e especialmente sobre a existência de pontos periódicos (como no caso de homeomorfismos do círculo). O que acontece é que no caso de um homeomorfismo f do toro $\mathbb{T}^2$, o conjunto de rotação, denotado por $\rho(F)$ onde F é um levantamento de f , tem “boas” propriedades e continua nos fornecendo informações sobre a dinâmica do homeomorfismo, embora essas informações não sejam tão completas como no caso do círculo. Já em dimensões maiores, no toro $\mathbb{T}^n$ com $n \geq 3$, o conjunto de rotação parece ser pouco útil até o momento.

Misiurewicz e Ziemian, em [16], mostraram que $\rho(F)$ é convexo. Franks mostrou em [7] que, se o conjunto de rotação possui um ponto racional com coordenadas $(p_1/n, p_2/n)$ em seu interior e $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então f possui ponto periódico de período n .

Quando $\rho(F)$ é um segmento de reta (interior vazio), assumindo que f preserva área, Franks mostrou em [9] que, se existe um vetor $v \in \rho(F)$ com coordenadas racionais, então f tem ponto periódico.

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar o teorema seguinte, obtido por Jonker e Zhang em [12], para o caso em que o conjunto de rotação é um segmento de reta com inclinação irracional:

Teorema Principal *Suponha que f é um homeomorfismo do toro $\mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Seja F um levantamento de f e suponha que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional. Se $(p_1/n, p_2/n) \in \rho(F)$, com $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então f tem um ponto periódico de período n .*

A seguir damos uma breve descrição de como a presente dissertação está organizada.

No Capítulo 1, veremos algumas definições e resultados importantes que serão utilizados posteriormente, o conceito de número de rotação para homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ e o Teorema de Poincaré, onde observaremos que “o número de rotação de um homeomorfismo f de $\mathbb{S}^1$ homotópico à identidade é um racional $\frac{p}{q}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, se, e somente se, f tem um ponto periódico de período q ”.

No Capítulo 2, definiremos o conjunto de rotação para homeomorfismos de $\mathbb{T}^2$ que são homotópicos à identidade e veremos propriedades importantes que são semelhantes ao caso dos homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$, além dos resultados do trabalho de Conley sobre recorrência por cadeia em [4], a definição de função de Lyapounov completa e o Teorema de Conley. Apresentaremos também, um dos resultados fundamentais para a demonstração do Teorema Principal, a Proposição 2.3, onde concluímos que, “se f não tem ponto periódico e o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional, então $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia por f ”.

O Capítulo 3 é dedicado à prova do Teorema Principal, dividindo-a em três casos. Quando o ponto racional $(p_1/n, p_2/n)$ é um extremo do conjunto de rotação, a conclusão segue imediatamente do Lema 2.1, que é um corolário dos Teoremas 2.4 e 3.10 do trabalho de Misiurewicz e Ziemian em [16], e diz o seguinte:

“Seja F um levantamento do homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Se $v \in \rho(F)$ é um ponto extremo, então existe um $x \in \mathbb{T}^2$ com $\rho(F, x) = v$. Se, além disso, v é um ponto racional, digamos $v = (p_1/n, p_2/n)$ onde $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então x pode ser escolhido de maneira que ele seja um ponto periódico com período n ”.

Para o caso em que o ponto racional não é um extremo, supondo que ele seja a origem, a existência de um ponto periódico é provada utilizando a Proposição 3.1 e o Lema 3.8, sendo que, a Proposição 3.1 é encontrada após construir um grafo orientado definido por meio de uma partição do toro $\mathbb{T}^2$, e o Lema 3.8 é um resultado do trabalho de Franks em [7].

Quando o ponto racional não é um extremo de $\rho(F)$ e não é a origem, através da

Proposição 2.1, que mostra algumas propriedades do conjunto de rotação, nós voltamos ao caso anterior e a conclusão segue imediatamente. Finalmente, mostramos que o ponto periódico tem período n .

No final do Capítulo 3 nós damos um exemplo de um homeomorfismo do toro homotópico à identidade cujo conjunto de rotação é um segmento de reta com inclinação racional que contém infinitos pontos racionais mas que não possui nenhum ponto periódico.

Capítulo 1

Preliminares

Veremos algumas definições e resultados importantes que serão utilizados posteriormente. Além do conceito de número de rotação para homeomorfismos do círculo que são homotópicos à identidade, algumas propriedades, e o Teorema 1.4 (Poincaré) que mostra a relação entre o número de rotação e a existência de pontos periódicos.

1.1 Conceitos e resultados importantes

Os resultados desta seção serão apenas enunciados. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [14] e [19].

Dado um espaço métrico X e uma função contínua $f : X \rightarrow X$, dizemos que o par (X, f) é um *sistema dinâmico* e chamamos X de *espaço de fase*.

Definição 1.1 Seja (X, f) um sistema dinâmico.

1. Dado $x \in X$, x é *periódico* se existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = x$. Neste caso, se $f^k(x) \neq x$ para todo $k < p$, dizemos que x tem *período* p . Se $f(x) = x$, x é um *ponto fixo* para f .
2. Denotaremos o conjunto dos pontos periódicos de f por $Per(f)$, e o conjunto dos pontos fixos por $Fix(f)$.
3. A *órbita* do ponto $x \in X$ é o conjunto $\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x); n \geq 0\}$.

Teorema 1.1 (Ponto fixo de Brouwer) *Seja B uma bola fechada de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^{n+1}$. Toda aplicação contínua $f : B \rightarrow B$ possui (pelo menos) um ponto fixo.*

O Teorema 1.2 obtido por Brouwer será utilizado na demonstração do Teorema Principal e pode ser encontrado nos trabalhos de Brown em [3] e Fathi em [6].

Teorema 1.2 (Brouwer) *Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo que preserva orientação e possui um ponto periódico, então f tem um ponto fixo.*

Definição 1.2 Um grafo G é um par $(V(G), E(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto finito não-vazio cujos elementos são chamados de *vértices*, e $E(G)$ é um conjunto finito de pares distintos de elementos de $V(G)$, estes pares são chamados de *arestas*.

Um grafo G é dito *orientado* quando o conjunto de arestas $E(G)$ é formado por pares ordenados.

Figura 1.1: Grafo.

Figura 1.2: Grafo orientado.

Lema 1.1 *Sejam $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $n \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$. Se $h = \frac{k}{n}p \in \mathbb{Z}^2$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então k é múltiplo de n .*

O seguinte teorema aparece na teoria de variedades diferenciáveis em contextos mais gerais.

Teorema 1.3 *Sejam U um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k , $k \geq 1$. Se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma sub-variedade de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k e dimensão m .*

1.2 Homeomorfismos do círculo e número de rotação

Primeiro introduziremos a noção número de rotação para homeomorfismos do círculo que são homotópicos à identidade. Para isso precisaremos de alguns resultados sobre

os levantamentos desses homeomorfismos. Finalmente, após estabelecer uma série de propriedades do número de rotação, mostramos o Teorema de Poincaré, Teorema 1.4. Para maiores detalhes podem ser consultadas as referências [5] e [13].

Denotaremos o círculo por $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ a projeção natural, isto é, $\pi(x) = x \pmod{1}$. Um *levantamento* de um homeomorfismo $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade:

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Observação 1.1 (1) Se F e G são dois levantamentos de f , então $F - G$ é uma aplicação constante de valor inteiro.

De fato, como $\pi \circ F = \pi \circ G$ temos que

$$\pi \circ F(x) = \pi \circ G(x) \Rightarrow F(x) - G(x) = N(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},$$

evidentemente $F - G$ é uma função contínua e portanto $F - G$ é constante.

(2) $f^n \circ \pi = \pi \circ F^n$, ou seja, F^n é um levantamento de f^n para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

De fato,

$$\begin{aligned} f^n \circ \pi &= f^{n-1} \circ f \circ \pi \\ &= f^{n-1} \circ \pi \circ F \\ &= f^{n-2} \circ f \circ \pi \circ F \\ &= f^{n-2} \circ \pi \circ F^2 \\ &\vdots \\ &= \pi \circ F^n. \end{aligned}$$

Lema 1.2 Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação contínua, se F é um levantamento de f , então $F(x+1) - F(x)$ é um inteiro que independe de x e do levantamento.

Prova: Primeiro mostramos a independência em x . Sabemos que $\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$, ou seja, $F(x+1) - F(x) = Z(x) \in \mathbb{Z}$, e pela continuidade $F(x+1) - F(x)$ não depende de x . Finalmente mostramos a independência em relação ao levantamento. Se G é outro levantamento de f então $\pi(G(x)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x))$, isso implica que $F(x) - G(x) = N(x) \in \mathbb{Z}$, e novamente pela continuidade $F - G$ é uma função constante, portanto $F(x+1) - G(x+1) = F(x) - G(x)$, com isso $F(x+1) - F(x) = G(x+1) - G(x)$. ■

Definição 1.3 Se $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma aplicação contínua e F é um levantamento de f , então $F(x+1) - F(x)$ é chamado de *grau* de f e denotamos por $\deg(f)$.

Observação 1.2 Se $\deg(f)=1$, então $F(x+k) - F(x) = k$ para qualquer $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, dado $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned} F(x+k) &= F(x+(k-1)) + 1 \\ &= F(x+(k-2)) + 2 \\ &\vdots \\ &= F(x) + k, \end{aligned}$$

ou seja, $F(x+k) - F(x) = k$.

No caso em que $k \in \mathbb{Z}_-$ basta verificar que $F(x-1) - F(x) = -1$ e chegamos a $F(x+k) - F(x) = k$ de maneira análoga.

$$\begin{aligned} F(x-1) - F(x) &= F(x-1) - F((x-1)+1) \\ &= F(x-1) - (F(x-1) + 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Proposição 1.1 Sejam $f, g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ aplicações contínuas. Então $\deg(f)=\deg(g)$ se, e somente se, f e g são homotópicas.

A prova da proposição anterior pode ser encontrada em [13].

Corolário 1.1 Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ contínua. Então $\deg(f)=1$ se, e somente se, f é homotópica à identidade.

Proposição 1.2 $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.

Prova: Sejam $k = \deg(f)$, $r = \deg(g)$ e F, G levantamentos de f e g respectivamente, então $F \circ G$ é um levantamento de $f \circ g$ e

$$\begin{aligned} F \circ G(x+1) &= F(G(x+1)) \\ &= F(G(x) + r) \\ &= F(G(x)) + kr \\ &= F \circ G(x) + kr. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

Corolário 1.2 $\deg(f^n) = (\deg(f))^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.3 *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo homotópico à identidade. Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f , então F é uma função crescente.*

Prova: Como f é homotópica à identidade, $\deg(f) = 1$. Sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um homeomorfismo, F é crescente ou decrescente. Escolhemos um levantamento F de modo que $F(1) \in [0, 1)$.

Se o grau de f é 1, então $F(x+1) - F(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e em particular, para $x = 0$ e $x = -1$ temos

$$F(1) - F(0) = 1 \quad (1.1)$$

$$F(0) - F(-1) = 1. \quad (1.2)$$

Somando membro a membro as igualdades (1.1) e (1.2), obtemos

$$F(1) - F(-1) = 2 \Rightarrow F(1) = 2 + F(-1)$$

mas $0 \leq F(1) < 1$, segue que

$$-2 \leq F(-1) < -1.$$

Daí, $F(-1) < F(1)$, e deste modo F não pode ser decrescente, pois é um homeomorfismo de $\mathbb{R}$. Portanto, F é crescente. Como qualquer levantamento de f difere de F apenas pela soma de um inteiro, concluímos que todo levantamento de f é uma função crescente. ■

Proposição 1.4 *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um levantamento de f . Então vale o seguinte:*

(1) O limite $\tau(F) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $\tau(F)$ não depende de x ;

(3) Dados F, G dois levantamentos de f , $\tau(F) - \tau(G) = F - G \in \mathbb{Z}$;

(4) Se f tem ponto periódico de período q então $\tau(F) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ para algum $p \in \mathbb{Z}$.

Prova: (2) Como f é um homeomorfismo homotópico à identidade $\deg(f) = 1$, consequentemente, pelo Corolário 1.2, $\deg(f^n) = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $F^n(x+1) = F^n(x) + 1$. Mais ainda, pela Proposição 1.3, F^n é crescente. Logo, se x e y são dois números reais tais que $|y - x| < 1$, então

$$y < x + 1 \Rightarrow F^n(y) < F^n(x + 1) = F^n(x) + 1 \Rightarrow F^n(y) - F^n(x) < 1$$

e

$$x < y + 1 \Rightarrow F^n(x) < F^n(y + 1) = F^n(y) + 1 \Rightarrow F^n(x) - F^n(y) < 1,$$

$$\therefore |F^n(y) - F^n(x)| < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F^n(x) - x}{n} - \frac{F^n(y) - y}{n} \right| &= \frac{1}{n} |(F^n(x) - F^n(y)) + (y - x)| \\ &\leq \frac{1}{n} (|F^n(x) - F^n(y)| + |y - x|) \\ &< \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Deste modo, se o limite de $\frac{F^n(x) - x}{n}$ quando $n \rightarrow \infty$ existe, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(y) - y}{n}, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ com } |y - x| < 1$$

e portanto $\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ é o mesmo para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(4) Seja $\pi(x_0)$ um ponto periódico de f de período q . Como $\pi(F^q(x_0)) = f^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ temos que,

$$F^q(x_0) = x_0 + p$$

para algum $p \in \mathbb{Z}$. Consequentemente,

$$F^{mq}(x_0) = x_0 + mp, \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Mostraremos que $\tau(F) = \frac{p}{q}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, existem $m, i \in \mathbb{Z}_+$, satisfazendo $n = mq + i$, com $0 \leq i < q$. Daí, como $F^n(x_0) = F^{mq+i}(x_0) = F^i(F^{mq}(x_0)) = F^i(x_0 + mp) = F^i(x_0) + mp$, temos que

$$\frac{F^n(x_0) - x_0}{n} = \frac{F^i(x_0) + mp - x_0}{mq + i} = \frac{F^i(x_0) - x_0}{mq + i} + \frac{mp}{mq + i}.$$

Portanto,

$$\tau(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n} = \frac{p}{q}.$$

(1) Pelo que vimos em (2) basta mostrar que o limite existe para $x = 0$. Do item (4) sabemos que se f tem ponto periódico, então existe $\tau(F)$. Sendo assim, suponhamos que

f não tem ponto periódico, com isso $F^m(x) - x \notin \mathbb{Z}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e qualquer x real. Em particular, tomando $x = 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe um $h_m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$h_m < F^m(0) < h_m + 1.$$

Conseqüentemente, para $r \in \mathbb{Z}_+$ arbitrário, temos:

$$F^r(h_m) < F^r(F^m(0)) < F^r(h_m + 1)$$

$$F^r(0) + h_m < F^{r+m}(0) < F^r(0) + h_m + 1$$

$$h_m < F^{r+m}(0) - F^r(0) < h_m + 1.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ e tomando $r = 0, m, 2m, \dots, (n-1)m$ obtemos as desigualdades

$$h_m < F^m(0) < h_m + 1$$

$$h_m < F^{2m}(0) - F^m(0) < h_m + 1$$

$$\vdots$$

$$h_m < F^{nm}(0) - F^{(n-1)m}(0) < h_m + 1.$$

Somando estas desigualdades membro a membro, obtemos

$$nh_m < F^{nm}(0) < n(h_m + 1).$$

Logo,

$$\frac{h_m}{m} < \frac{F^{nm}(0)}{nm} < \frac{h_m + 1}{m},$$

em particular para $n = 1$,

$$\frac{h_m}{m} < \frac{F^m(0)}{m} < \frac{h_m + 1}{m}.$$

Daí concluímos que

$$\left| \frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}.$$

De maneira análoga trocando n por m e m por n também temos

$$\left| \frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Destas duas últimas desigualdades obtemos

$$\left| \frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \left| \frac{F^m(0)}{m} - \frac{F^{nm}(0)}{nm} \right| + \left| \frac{F^{nm}(0)}{nm} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Isto significa que a sequência $\{\frac{F^n(0)}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, e portanto o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(0)}{n}$ existe.

(3) Dados F e G dois levantamentos de f , existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F - G = k$. Daí,

$$\begin{aligned} \tau(F) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(G + k)^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) - x + nk}{n} \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) - x}{n} \right] + k \\ &= \tau(G) + k. \end{aligned}$$

■

Ao limite $\tau(F)$ nós chamamos de *número de translação* de F , e o resultado anterior nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 1.4 $\rho(f) := \pi(\tau(F))$ é chamado de *número de rotação* de f .

Exemplo: Vejamos os tipos mais simples de homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ que são homotópicos à identidade, as rotações. Se $\alpha \in [0, 1)$, definimos R_α a rotação em $\mathbb{S}^1$ como:

$$R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha \pmod{1}.$$

A órbita de um ponto θ_0 pela rotação R_α é

$$\mathcal{O}_{R_\alpha}(\theta_0) = \{\theta_0 + n\alpha : n \geq 0\}.$$

Se α é um número racional, digamos $\alpha = p/q$ para p e q inteiros primos entre si, então $q\alpha \in \mathbb{Z}$, e neste caso a órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}(\theta_0) = \{\theta_0 + n\frac{p}{q} : n \geq 0\}$ é periódica de período q para qualquer θ_0 . Quando α é irracional, pode ser mostrado que não existem órbitas periódicas, mais ainda, a órbita de qualquer ponto é densa em $\mathbb{S}^1$. Em ambos os casos $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

Para qualquer homeomorfismo do círculo homotópico à identidade Poincaré demonstrou o seguinte teorema:

Teorema 1.4 (Poincaré) *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo homotópico à identidade. Então o número de rotação $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, se, e somente se, a aplicação f tem um ponto periódico de período q .*

Prova: Pela Proposição 1.4, se f tem um ponto periódico de período q , então $\rho(f) = \frac{p}{q}$.

Suponhamos agora que $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Mostraremos que f tem ponto periódico de período q .

$$\begin{aligned}\rho(f^m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(F^m)^n(x) - x}{n} \pmod{1} \\ &= m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} \pmod{1} \\ &= m\rho(f) \pmod{1},\end{aligned}$$

para $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\rho(f^q) = p \pmod{1} = 0.$$

Logo, é suficiente mostrar que f^q tem ponto fixo.

Suponhamos que f^q não tem ponto fixo, conseqüentemente $F^q(x) - x \notin \mathbb{Z}$ para qualquer x real. Escolhemos o levantamento F de maneira que $F^q(0) \in (0, 1)$. Com isso, pela continuidade de $F^q - id_{\mathbb{R}}$, temos que $0 < F^q(x) - x < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Deste modo, como $(F^q - id_{\mathbb{R}})([0, 1]) = (F^q - id_{\mathbb{R}})(\mathbb{R})$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < \delta \leq F^q(x) - x \leq 1 - \delta < 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dado $r \in \mathbb{Z}_+$ qualquer, e fazendo $x = F^r(0)$,

$$\begin{aligned}\delta \leq F^q(x) - x \leq 1 - \delta &\Rightarrow \delta \leq F^q(F^r(0)) - F^r(0) \leq 1 - \delta \\ &\Rightarrow \delta \leq F^{q+r}(0) - F^r(0) \leq 1 - \delta.\end{aligned}$$

Tomando $r = 0, q, 2q, \dots, (n-1)q$ para $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\delta &\leq F^q(0) \leq 1 - \delta \\ \delta &\leq F^{2q}(0) - F^q(0) \leq 1 - \delta \\ &\vdots \\ \delta &\leq F^{nq}(0) - F^{(n-1)q}(0) \leq 1 - \delta\end{aligned}$$

somando todos os termos,

$$\begin{aligned}n\delta \leq F^{nq}(0) \leq n(1 - \delta) &\Rightarrow n\delta \leq (F^q)^n(0) \leq n(1 - \delta) \\ &\Rightarrow 0 < \delta \leq \frac{(F^q)^n(0)}{n} \leq (1 - \delta) < 1\end{aligned}$$

e portanto $\rho(f^q) > 0$, o que é uma contradição. Então f^q tem ponto fixo. E assim concluímos que f tem ponto periódico de período q . ■

Capítulo 2

Conjunto de rotação e transitividade por cadeias

Na Seção 2.1 definiremos o conjunto de rotação (Definição 2.1) para homeomorfismos do toro $\mathbb{T}^2$ que são homotópicos à identidade e veremos propriedades importantes que são semelhantes ao caso dos homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$.

Em seguida, na Seção 2.2, exploramos os resultados do trabalho de Conley em [4] sobre recorrência por cadeia, a definição de função de Lyapounov completa e o Teorema de Conley. Tudo isso para mostrar o resultado principal deste capítulo que é a Proposição 2.3, que estabelece o seguinte:

“Se f não tem ponto periódico e o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional, então o toro $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia por f ”.

2.1 Conjunto de rotação: propriedades gerais

Sejam $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade e $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ a aplicação de recobrimento. Um *levantamento* de f é um homeomorfismo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f \circ \pi = \pi \circ F.$$

Com essas condições definimos o conjunto de rotação.

Definição 2.1 O *conjunto de rotação* $\rho(F)$ é o conjunto de todos os pontos $v \in \mathbb{R}^2$ para

os quais existem seqüências $\{\tilde{x}_i\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$ com $n_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tais que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{n_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{n_i} = v.$$

Se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}$$

existe, para $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, nós o chamamos de *vetor rotação* de $x \in \mathbb{T}^2$ e denotamos este limite por $\rho(F, x)$.

O levantamento F tem propriedades parecidas com as que observamos para homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ na Seção 1.2.

Observação 2.1 (1) Se F e G são dois levantamentos de f , então $F - G$ é uma aplicação constante e $F(x) - G(x) = h$, para algum $h \in \mathbb{Z}^2$;

(2) Além disso, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^2$ e $p \in \mathbb{Z}^2$,

$$F(x + p) = F(x) + p.$$

O conjunto de rotação não depende apenas de f , se substituimos F por outro levantamento G , $\rho(G)$ é a translação de $\rho(F)$ por um ponto de $\mathbb{Z}^2$. Por esta razão nós escrevemos $\rho(F)$ e não $\rho(f)$. A Proposição 2.1 confirma esta afirmação e mostra a relação que existe entre $\rho(F^n)$ e $\rho(F)$.

Proposição 2.1 Dado $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}^2$,

(1) $\rho(F + p) = \rho(F) + p$;

(2) $\rho(F^n) = n\rho(F)$.

Prova: (1) Sejam $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ com $m_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Então

$$\begin{aligned} v &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} \Leftrightarrow v + p = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} + p \\ &\Leftrightarrow v + p = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) + m_i p - \tilde{x}_i}{m_i} \\ &\Leftrightarrow v + p = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F + p)^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$v \in \rho(F) \Leftrightarrow v + p \in \rho(F + p).$$

Isto prova (1).

(2) $\rho(F^n) \subset n\rho(F)$: Se $v \in \rho(F^n)$ então existem $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ com $m_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tais que

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^n)^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{nm_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i},$$

isto implica que

$$\frac{1}{n}v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{nm_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nm_i}.$$

Conseqüentemente, $\frac{1}{n}v \in \rho(F)$. Assim, $\rho(F^n) \subset n\rho(F)$.

(2) $n\rho(F) \subset \rho(F^n)$: Se $v \in \rho(F)$, então existem $\{\tilde{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ e $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tais que $m_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} = v.$$

Dado $r \in \mathbb{Z}_+$, como $F^r - id_{\mathbb{R}^2}$ é limitada em $[0, 1] \times [0, 1]$ e para cada $z \in \mathbb{R}^2$ existem $y \in [0, 1] \times [0, 1]$ e $h \in \mathbb{Z}^2$ tais que $z = y + h$, então existe um $M_r > 0$ tal que

$$\|F^r(z) - z\| \leq M_r, \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Mais ainda, tomando $M := \max\{M_r; 0 \leq r \leq n-1\}$, obtemos

$$\|F^r(z) - z\| \leq M, \forall z \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \forall r \in \mathbb{Z} \text{ com } 0 \leq r \leq n-1.$$

Vamos mostrar que existe $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$ com $k_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$ tal que $nv \in \rho(F^n)$. Isto mostrará que $n\rho(F) \subset \rho(F^n)$.

Pelo algoritmo da divisão, para $m_i \geq n$ existem $\{k_i\} \subset \mathbb{N}$ e $\{r_i\} \subset \mathbb{Z}$ com $0 \leq r_i \leq n-1$ tais que

$$m_i = nk_i + r_i.$$

Afirmamos que $v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i}$. De fato, fazendo $z_i = F^{nk_i}(\tilde{x}_i)$ ($\tilde{x}_i = F^{-nk_i}(z_i)$),

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} - \frac{F^{nk_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} \right\| \leq \\ & \left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} - \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} \right\| + \left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} - \frac{F^{nk_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} \right\| = \\ & \left\| \frac{(nk_i - m_i)(F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i)}{m_i nk_i} \right\| + \left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - F^{nk_i}(\tilde{x}_i)}{nk_i} \right\| = \\ & \left\| \frac{-r_i(F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i)}{m_i nk_i} \right\| + \|F^{m_i - nk_i}(z_i) - z_i\| \frac{1}{nk_i} = \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} \right\| \frac{r_i}{nk_i} + \|F^{r_i}(z_i) - z_i\| \frac{1}{nk_i}.$$

Mas, como $\left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} \right\| \rightarrow \|v\|$ e $\|F^r(z_i) - z_i\| \leq M$, então

$$\left\| \frac{F^{m_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{m_i} - \frac{F^{nk_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} \right\| \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty,$$

ou seja,

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F^{nk_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{nk_i} = \frac{1}{n} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^n)^{k_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{k_i}.$$

Isto significa que

$$nv = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(F^n)^{k_i}(\tilde{x}_i) - \tilde{x}_i}{k_i} \Rightarrow nv \in \rho(F^n).$$

Portanto,

$$n\rho(F) \subset \rho(F^n).$$

■

O teorema seguinte foi obtido por Misiurewicz e Ziemian em [16].

Teorema 2.1 $\rho(F)$ é fechado, conexo e convexo.

Em particular, se $\rho(F)$ tem interior vazio, então $\rho(F)$ é um ponto ou um segmento de reta.

2.2 Recorrência e transitividade por cadeias

Nesta seção introduzimos três noções muito importantes, recorrência, transitividade por cadeia (Definição 2.2) e função de Lyapounov completa (Definição 2.3), além do teorema obtido por Conley em [4] sobre a existência dessa função.

O resultado principal desta seção é a Proposição 2.3, a qual garante que, “se f não tem ponto periódico e o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional, então o toro $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia por f^n ”.

Definição 2.2 Sejam (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Uma ε -cadeia de x_0 a x_n para f é uma sequência finita de pontos $\{x_i\}_{i=0}^n$ em X , tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para $0 \leq i < n$. Se $x_0 = x_n$, dizemos que a ε -cadeia é *periódica*. Um ponto x é dito *recorrente por cadeia* se para todo $\varepsilon > 0$ existe um ε -cadeia de x a

x . Denotamos por $R(f)$ o conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeia por f . Um subconjunto $\Lambda \subset X$ é chamado *transitivo por cadeia* por f se para todo $\varepsilon > 0$ e qualquer $x, y \in \Lambda$, existe uma ε -cadeia de x a y .

Proposição 2.2 *Seja $f : X \rightarrow X$. O conjunto dos pontos recorrentes por cadeia por f é fechado e $f(R(f)) = R(f)$.*

Prova: (i) $R(f)$ é fechado: Provaremos que $X - R(f)$ é aberto. Se $\tilde{x} \in X - R(f)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que não existe nenhuma ε -cadeia de $\tilde{x}$ a $\tilde{x}$. Como X é compacto, a continuidade de f é uniforme, e portanto para $\varepsilon/3 > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ de modo que, para quaisquer $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3 \quad (2.1)$$

Definimos $r := \min\{\varepsilon/3, \delta\}$. Mostraremos que $\tilde{x}$ está no interior de $X - R(f)$, ou seja, dado $\tilde{y} \in X$ com $d(\tilde{x}, \tilde{y}) < r$, veremos que $\tilde{y} \in X - R(f)$. Para isso, suponhamos por absurdo que $\tilde{y}$ é recorrente por cadeia. Deste modo, existe uma seqüência finita $\{\tilde{y}_i\}_{i=0}^n$ com $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_n = \tilde{y}$ e $d(f(\tilde{y}_i), \tilde{y}_{i+1}) < r$ para $0 \leq i < n$. Escolhemos uma seqüência de pontos $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^n$ com $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n = \tilde{x}$ tal que $d(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) < r \leq \delta$. De (2.1) temos que $d(f(\tilde{x}_i), f(\tilde{y}_i)) < \varepsilon/3$ para $0 \leq i < n$, conseqüentemente

$$\begin{aligned} d(f(\tilde{x}_i), \tilde{x}_{i+1}) &\leq d(f(\tilde{x}_i), f(\tilde{y}_i)) + d(f(\tilde{y}_i), \tilde{y}_{i+1}) + d(\tilde{y}_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}) \\ &< \varepsilon/3 + 2r \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

contradizendo o fato de não existir uma ε -cadeia de $\tilde{x}$ a $\tilde{x}$. Isto mostra que $X - R(f)$ é aberto.

(ii) $f(R(f)) \subset R(f)$: Dado $\tilde{y} \in f(R(f))$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ para algum $\tilde{x} \in R(f)$. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer, pela continuidade uniforme de f , existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Como $\tilde{x}$ é recorrente por cadeia por f , encontramos uma seqüência $\{\tilde{x}_i\}_{i=0}^n$ com $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_n = \tilde{x}$ e $d(f(\tilde{x}_i), \tilde{x}_{i+1}) < \delta$ para $0 \leq i < n$. De (2.2) segue que

$$d(f(f(\tilde{x}_i)), f(\tilde{x}_{i+1})) < \varepsilon, \quad \forall 0 \leq i < n.$$

Definindo $\tilde{y}_i = f(\tilde{x}_i)$ para $0 \leq i \leq n$ temos que, $\tilde{y}_0 = \tilde{y}_n = \tilde{y}$ e $d(f(\tilde{y}_i), \tilde{y}_{i+1}) < \varepsilon$ para qualquer $0 \leq i < n$, ou seja, $\tilde{y}$ é recorrente por cadeia por f .

$$\therefore f(R(f)) \subset R(f).$$

(iii) $R(f) \subset f(R(f))$: Dado $x \in R(f)$ e um $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\{x_i\}_{i=0}^n$ com $x_0 = x_n = x$ e $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ para $0 \leq i < n$.

Definimos $y_i := f(x_{n-i})$, deste modo $y_0 = f(x_n) = y = f(x_0) = y_n$. Para $0 \leq i < n$

$$d(f^{-1}(y_i), y_{i+1}) = d(f^{-1}(f(x_{n-i})), f(x_{n-i-1})) = d(x_{n-i}, f(x_{n-i-1})) < \varepsilon$$

isto implica que $y = f(x)$ é recorrente por cadeia por f^{-1} , ou seja

$$f(R(f)) \subset R(f^{-1}).$$

Equivalentemente,

$$R(f) \subset f^{-1}(R(f^{-1})). \quad (2.3)$$

Já sabemos de (ii) que $f(R(f)) \subset R(f)$ e utilizando este resultado para f^{-1} obtemos

$$f^{-1}(R(f^{-1})) \subset R(f^{-1}). \quad (2.4)$$

Usando o fato de $f(R(f)) \subset R(f^{-1})$, para f^{-1} também temos $f^{-1}(R(f^{-1})) \subset R(f)$ e aplicando f chegamos a

$$R(f^{-1}) \subset f(R(f)). \quad (2.5)$$

De (2.3), (2.4) e (2.5) concluímos que

$$R(f) \subset f(R(f)).$$

O que completa a prova. ■

Vamos definir uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto $R(f)$. Dizemos que $x \sim y$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma ε -cadeia em $R(f)$ de x a y e também existe uma ε -cadeia em $R(f)$ de y a x . As classes de equivalência em $R(f)$ determinadas pela relação de equivalência $\sim$ são chamadas de *componentes transitivas por cadeia* de $R(f)$.

Definição 2.3 Seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto. Uma *função de Lyapounov completa* para f é uma função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo:

- (1) se $x \notin R(f)$, então $g(f(x)) < g(x)$;
- (2) para $x, y \in R(f)$, $g(x) = g(y)$ se, e somente se, x e y estão na mesma componente transitiva por cadeia;
- (3) $g(R(f))$ é um subconjunto compacto nunca-denso de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2 (Conley) *Seja f um homeomorfismo de um espaço métrico compacto, então existe uma função de Lyapounov completa para f .*

A Proposição 2.3 será fundamental na prova do Teorema Principal, e para fazer a demonstração dessa proposição utilizaremos o Lema 2.1, que é um corolário dos Teoremas 2.4 e 3.10 do trabalho de Misiurewicz e Ziemian em [16], e algumas definições e resultados encontrados em [7], em particular o Teorema 2.3, que apresentaremos a partir de agora.

Lema 2.1 *Seja F um levantamento do homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Se $v \in \rho(F)$ é um ponto extremo, então existe um $x \in \mathbb{T}^2$ com $\rho(F, x) = v$. Se, além disso, v é um ponto racional, digamos $v = (p_1/n, p_2/n)$ onde $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então x pode ser escolhido de maneira que ele seja um ponto periódico com período n .*

Em geral o número de componentes transitivas por cadeia pode ser infinito. Entretanto, se nós escolhemos um $\delta > 0$ fixo e trabalhamos com as δ -cadeias, podemos decompor $R(f)$ em um número finito de partes.

Definição 2.4 Dado $\delta > 0$ fixo, dizemos que $x, y \in R(f)$ são δ -equivalentes se existe uma δ -cadeia de x a y e outra de y a x . Esta é uma relação de equivalência e as classes de equivalência são chamadas de *componentes δ -transitivas* de $R(f)$.

Lema 2.2 *Dado $\delta > 0$ e um homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ de um espaço métrico compacto X , o número de componentes δ -transitivas é finito.*

Teorema 2.3 (Franks, [7]) *Dado $\delta > 0$ e um homeomorfismo de um espaço métrico compacto $f : X \rightarrow X$, existe uma função de Lyapounov completa $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ para f , e $c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ com $c_i \notin g(R(f))$ tal que, se $\Lambda_i = R(f) \cap g^{-1}([c_{i-1}, c_i])$, então $\{\Lambda_i\}$ com $1 \leq i \leq n$, são as componentes δ -transitivas de f .*

Observação 2.2 (1) Pela construção da função de Lyapounov completa feita por Franks em [8] e [7], temos que

$$g(f(x)) \leq g(x), \forall x \in X.$$

(2) Se $r \subset \mathbb{R}^2$ é uma reta com inclinação (coeficiente angular) irracional, então $\pi(r)$ é um subconjunto denso de $\mathbb{T}^2$.

De fato, seja $r \subset \mathbb{R}^2$ uma reta com equação $y = \alpha x$, sendo α irracional. Utilizando $[0, 1) \times [0, 1)$ para representar o toro, e $\pi(x, y) = (x \pmod{1}, y \pmod{1})$, considere o círculo $C = \{(x \pmod{1}, 0); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{T}^2$. $\alpha x \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $x \in \frac{1}{\alpha}\mathbb{Z}$, assim podemos observar que $\pi(r) \cap C$ é exatamente a órbita de um ponto no círculo C por uma rotação $R_{1/\alpha}(\theta) = \theta + 1/\alpha \pmod{1}$ (Figura 2.1), e como $1/\alpha$ é irracional, essa órbita é densa em C , o que nos permite concluir que a imagem da reta r pela aplicação π é um subconjunto denso de $\mathbb{T}^2$.

Figura 2.1: Imagem da reta r pela aplicação π .

Lema 2.3 Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Lyapounov completa descrita no Teorema 2.3. Se definimos $N_i = g^{-1}((-\infty, c_i])$, então $f(N_i) \subset \text{int}N_i$ e $\Lambda_i \subset N_i - N_{i-1}$.

Prova: Primeiro vamos verificar que $f(N_i) \subset \text{int}N_i$. Se $x \in f(N_i)$, existe um $y \in N_i$ com $x = f(y)$. Temos duas possibilidades:

- $y \in X \setminus R(f) \Rightarrow g(x) = g(f(y)) < g(y) \in (-\infty, c_i]$
 $\Rightarrow g(x) \in (-\infty, c_i)$
 $\Rightarrow x \in g^{-1}((-\infty, c_i)) \subset N_i$
 $\Rightarrow x \in \text{int}N_i$.

$$\begin{aligned} \bullet y \in R(f) &\Rightarrow x = f(y) \in R(f) \\ &\Rightarrow g(x) = g(f(y)) \neq c_i, \end{aligned}$$

utilizando o primeiro item da Observação 2.2,

$$g(x) = g(f(y)) \leq g(y) \in (-\infty, c_i] \Rightarrow g(x) \in (-\infty, c_i),$$

ou seja, $x \in \text{int}N_i$.

Finalmente provamos que $\Lambda_i \subset N_i - N_{i-1}$. Temos:

$$\begin{aligned} N_i - N_{i-1} &= g^{-1}((-\infty, c_i]) \cap g^{-1}((-\infty, c_{i-1}])^c \\ &= g^{-1}((-\infty, c_i]) \cap g^{-1}((c_{i-1}, +\infty)) \\ &= g^{-1}((-\infty, c_i] \cap (c_{i-1}, +\infty)) \\ &= g^{-1}((c_{i-1}, c_i]) \supset \Lambda_i. \end{aligned}$$

■

Quando assumirmos que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta e falarmos que ele tem inclinação irracional, estaremos nos referindo ao coeficiente angular da reta que contém $\rho(F)$.

Proposição 2.3 *Sejam $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo homotópico à identidade, e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um levantamento. Se f não tem ponto periódico e $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional, então $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia por f .*

Prova: Por contradição suponhamos que $\mathbb{T}^2$ não é transitivo por cadeia por f . Afirmamos que:

(a) $R(f)$ tem pelo menos duas componentes transitivas por cadeia: Seja $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Lyapounov completa para f , e consideremos $r = \sup_{x \in \mathbb{T}^2} h(x)$ e $s = \inf_{x \in \mathbb{T}^2} h(x)$. É claro que $r \neq s$, caso contrário $\mathbb{T}^2$ seria transitivo por cadeia.

Vejamos que $h^{-1}(r)$ e $h^{-1}(s)$ são duas componentes transitivas por cadeia distintas.

• Dado $x \in h^{-1}(r)$ se $x \notin R(f)$, segue que

$$f^{-1}(x) \notin R(f) \Rightarrow r = h(x) = h(f(f^{-1}(x))) < h(f^{-1}(x))$$

o que contradiz o fato de $r = \sup_{x \in \mathbb{T}^2} h(x)$. Logo, se $x \in h^{-1}(r)$, então $x \in R(f)$.

• Seja $x \in h^{-1}(s)$, se $x \notin R(f)$, temos que

$$f(x) \notin R(f) \Rightarrow s = h(x) > h(f(x))$$

o que não pode acontecer, já que $s = \inf_{x \in \mathbb{T}^2} h(x)$. Deste modo, se $x \in h^{-1}(s)$, então $x \in R(f)$.

Portanto, $h^{-1}(r)$ e $h^{-1}(s)$ são duas componentes transitivas por cadeia, provando (a).

Como $R(f)$ tem mais de uma componente transitiva por cadeia, existe um $\delta > 0$ para o qual $R(f)$ tem mais de uma componente δ -transitiva. Sejam $R(f) = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \dots \cup \Lambda_n$ a decomposição do conjunto de pontos recorrentes por cadeia em componentes δ -transitivas e $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função de Lyapounov completa como no Teorema 2.3. Escolhemos $g_0 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aproximação de g de classe C^∞ com valores regulares $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ tal que, a variedade com bordo $M_i = g_0^{-1}((-\infty, c_i])$ satisfaz

$$(1) f(M_i) \subset \text{int} M_i$$

$$(2) \Lambda_i \subset M_i - M_{i-1}$$

Cada bordo ∂M_i consiste de uma união disjunta e finita de círculos que são componentes de $g_0^{-1}(c_i)$.

(b) Cada componente conexa de $g_0^{-1}(\{c_1, c_2, \dots, c_n\})$ é bordo de um único disco em $\mathbb{T}^2$:

De fato, se um desses círculos é essencial, isto é, não é homotópico a um ponto, então M_j é um anel essencial em $\mathbb{T}^2$ (possivelmente com buracos), para algum $1 \leq j \leq n$ (Figura 2.2).

Figura 2.2: Anel essencial no toro $\mathbb{T}^2$.

Sejam $\widetilde{M}_j$ uma componente conexa de $\pi^{-1}(M_j)$ e F_0 um levantamento de f de modo que $F_0(\widetilde{M}_j) \subset \widetilde{M}_j$. Existe $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ tal que, dado $\tilde{x} \in \widetilde{M}_j$ existe um único $\tilde{y} \in \widetilde{M}_j$ para o qual $\tilde{x} = \tilde{y} + p$. O valor p_2/p_1 nós chamamos de inclinação da faixa $\widetilde{M}_j$. Sejam $k, l \subset \mathbb{R}^2$ duas retas com inclinação igual a p_2/p_1 tais que $\widetilde{M}_j$ esteja contido na região delimitada por estas retas (Figura 2.3).

Seja v um extremo de $\rho(F_0)$, pelo Lema 2.1, existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_0^n(x) - x}{n}.$$

Podemos supor que $v \neq 0$, caso contrário pelo Lema 2.1 f tem ponto fixo. Sendo $v \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|F_0^n(x) - x\| = +\infty.$$

Temos duas possibilidades:

(i) Se $x \in \widetilde{M}_j$, então $F_0^n(x) \in \widetilde{M}_j$ para cada $n > 0$, afirmamos que v é paralelo a p , isto é, v tem a mesma inclinação de $\widetilde{M}_j$. De fato, se v não é paralelo p , então

$$v.p^\perp \neq 0.$$

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$,

$$(F_0^n(x) - x).p^\perp \neq 0,$$

isto significa que $F_0^n(x) - x$ não é paralelo a p para $n \geq n_0$. Portanto, como $\|F_0^n(x) - x\| \rightarrow +\infty$, $F_0^n(x)$ não pertence à faixa delimitada pelas retas k e l . Isto contradiz o fato de $F_0(\widetilde{M}_j) \subset \widetilde{M}_j$ e demonstra que v e p são vetores paralelos (veja a Figura 2.3).

(ii) Se $x \notin \widetilde{M}_j$, então x está localizado entre translações de $\widetilde{M}_j$ por vetores de $\mathbb{Z}^2$, e as iterações $F_0^n(x)$ se comportam de maneira parecida ao caso em que $x \in \widetilde{M}_j$, lembrando que $F_0(\widetilde{M}_j + h) \subset \widetilde{M}_j + h$ para qualquer $h \in \mathbb{Z}^2$.

Figura 2.3: $\pi^{-1}(M_j)$ e as retas paralelas com a mesma inclinação de $\widetilde{M}_j$.

Se ω é o outro extremo de $\rho(F_0)$, então, do mesmo modo, temos que ω é paralelo a p . Portanto, como $[v, \omega] = \rho(F_0)$, concluímos que $\rho(F_0)$ tem inclinação $p_2/p_1 \in \mathbb{Q}$, contradizendo a hipótese. Isto prova a afirmação (b).

De (b), as componentes de bordo de cada ∂M_i são não-essenciais, isto é, cada círculo é bordo de um único disco em $\mathbb{T}^2$. Como $f(M_i) \subset \text{int}M_i$ e o número de discos é finito, pelo menos um disco D satisfaz $f^q(D) \subset D$ para algum $q \in \mathbb{N}$, e o Teorema do ponto fixo de Brouwer garante que f^q tem um ponto fixo, ou seja, f tem um ponto periódico. ■

Capítulo 3

Conjunto de rotação e pontos periódicos

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema Principal desta dissertação, o qual foi obtido por Jonker e Zhang em [12] e estabelece o seguinte:

Teorema Principal *Suponha que f é um homeomorfismo do toro $\mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Seja F um levantamento de f e suponha que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional. Se $(p_1/n, p_2/n) \in \rho(F)$, com $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então f tem um ponto periódico de período n .*

A seguir damos uma breve descrição dos passos fundamentais da prova deste teorema. A prova divide-se em três casos:

Caso 1: *O ponto racional $(p_1/n, p_2/n)$ é um extremo de $\rho(F)$* : Neste caso a conclusão segue imediatamente do Lema 2.1 (corolário dos Teoremas 2.4 e 3.10 do trabalho de Misiurewicz e Ziemian em [16]).

Caso 2: *O ponto racional é a origem e não é um extremo de $\rho(F)$* : Neste caso, primeiro definimos um *grafo orientado* $G_n(\varepsilon)$ (Definição 3.2) onde os *vértices orientados* são elementos de uma partição do toro $\mathbb{T}^2$, e os *caminhos orientados* representam ε -cadeias. Após estabelecer propriedades de caminhos e laços em $G_n(\varepsilon)$ obtemos a Proposição 3.1. Através desta proposição, para qualquer $\varepsilon > 0$ nós podemos garantir a existência de uma ε -cadeia periódica da origem. Conseqüentemente, pelo Lema 3.8 (Franks em [7]) a existência do ponto periódico para f é garantida.

Caso 3: *O ponto racional não é nulo e não é extremo de $\rho(F)$* : Neste caso, pela Proposição 2.1 nós voltamos ao caso anterior, e a conclusão segue imediatamente.

No final da Seção 3.2 nós damos um exemplo de um homeomorfismo do toro homotópico à identidade cujo conjunto de rotação é um segmento de reta com inclinação racional que contem infinitos pontos racionais mas que não possui nenhum ponto periódico. Este exemplo é devido a Jonker e Zhang [12].

3.1 O grafo orientado $G_n(\varepsilon)$ de uma ε -partição

Todos os conceitos e resultados estudados nesta seção são considerando um homeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homotópico à identidade e F um de seus levantamentos.

O resultado fundamental desta seção é a Proposição 3.1. Para enunciar e mostrar esta proposição precisamos definir alguns objetos e estabelecer algumas propriedades.

Primeiro definimos o grafo orientado. Identificamos $\mathbb{T}^2$ com $I^2 = [0, 1) \times [0, 1)$. Seja N um inteiro positivo tal que $\varepsilon = 1/N$ seja suficientemente menor que $1/8$, e $\|F(x) - F(y)\| < 1/4$ se $\|x - y\| < \sqrt{2}\varepsilon$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Figura 3.1: ε -partição de I^2 .

Definição 3.1 (ε -partição de I^2) Particionamos I^2 em quadrados S_i de lado ε , ou seja,

$$S_i = [r/N, (r+1)/N) \times [j/N, (j+1)/N) \text{ para } 0 \leq i < N^2,$$

com $i = jN + r$ e $r = i \bmod N$. Os S_i são disjuntos e $\bigcup_{i=0}^{N^2-1} S_i = I^2$ (Figura 3.1). $\{S_i ; i = 0, \dots, N^2 - 1\}$ é chamada de ε -partição de I^2 .

Observação 3.1 Note que $(S_i + h) \cap (S_{i^*} + h^*) \neq \emptyset$ com $0 \leq i, i^* < N^2$ e $h, h^* \in \mathbb{Z}^2$ se, e somente se, $S_i = S_{i^*}$ e $h = h^*$.

Definição 3.2 (Grafo de uma ε -partição) Para cada inteiro positivo n tal que $(n + \sqrt{2})\varepsilon < 1/8$, nós construímos um *grafo orientado* $G_n(\varepsilon)$, cujos *vértices* são $\{S_i\}$ e cada *aresta orientada* é denotada por e_{ij} . Onde $e_{ij} = (S_i, S_j)$ se, e somente se, existe um ponto $x \in S_i$ tal que $d(F(x), S_j + p_{ij}) < n\varepsilon$ para algum $p_{ij} \in \mathbb{Z}^2$.

Observação 3.2 O $p_{ij} \in \mathbb{Z}^2$ associado à aresta e_{ij} na definição anterior é único.

De fato, se $x, y \in S_i$ e $p_{ij}, p_{ij}^* \in \mathbb{Z}^2$ satisfazem $d(F(x), S_j + p_{ij}) < n\varepsilon$ e $d(F(y), S_j + p_{ij}^*) < n\varepsilon$, mostraremos que $p_{ij} = p_{ij}^*$. Dado $z \in S_j$ temos que

$$\begin{aligned} d(p_{ij}, p_{ij}^*) &= d(p_{ij} + z, p_{ij}^* + z) \\ &\leq d(p_{ij} + z, F(x)) + d(F(x), F(y)) + d(F(y), p_{ij}^* + z). \end{aligned}$$

Como $p_{ij} + z \in S_j + p_{ij}$,

$$\begin{aligned} d(p_{ij} + z, F(x)) &\leq d(p_{ij} + S_j, F(x)) + \text{diam}(S_j + p_{ij}) \\ &< (n + \sqrt{2})\varepsilon. \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$d(F(y), p_{ij}^* + z) < (n + \sqrt{2})\varepsilon.$$

Além disto, se $x, y \in S_j$ então $d(x, y) < \sqrt{2}\varepsilon$, mais ainda, pela escolha de ε , segue que

$$d(F(x), F(y)) < 1/4.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(p_{ij}, p_{ij}^*) &< 2(n + \sqrt{2})\varepsilon + 1/4 \\ &< 1/2. \end{aligned}$$

Como $p_{ij}, p_{ij}^* \in \mathbb{Z}^2$, concluímos que $p_{ij} = p_{ij}^*$.

Esta observação nos permite definir uma aplicação $\wp$ do conjunto de arestas orientadas de $G_n(\varepsilon)$ em $\mathbb{Z}^2$ da seguinte maneira:

$$\wp(e_{ij}) = p_{ij}.$$

3.1.1 Caminhos e laços orientados em $G_n(\varepsilon)$

Definição 3.3 (Caminho e laço orientado) Um *caminho orientado* em $G_n(\varepsilon)$ é uma seqüência ordenada finita de arestas orientadas em $G_n(\varepsilon)$, tal que o ponto final de cada aresta na seqüência é igual ao ponto inicial da aresta seguinte, exceto na última aresta (Figura 3.2). Um *laço* em $G_n(\varepsilon)$ é um caminho orientado que começa e termina no mesmo vértice. Um *laço minimal* é um laço em que os únicos vértices comuns são o inicial e o final.

Podemos estender a aplicação $\wp$, definida anteriormente, para o conjunto dos caminhos orientados: Se $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ é um caminho orientado em $G_n(\varepsilon)$, definimos

$$\wp(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} \wp(e_{i_j i_{j+1}}).$$

Figura 3.2: Caminho orientado $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ em $G_n(\varepsilon)$.

Para um ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, denotamos o ponto $(x_1 \bmod \mathbb{Z}, x_2 \bmod \mathbb{Z})$ por $x \bmod \mathbb{Z}^2$. O resultado seguinte estabelece a relação entre caminhos em $G_n(\varepsilon)$ e δ -cadeias de F .

Lema 3.1 *Seja $n \geq 1$ inteiro, com $(n + \sqrt{2})\varepsilon < 1/8$.*

- (1) *Todo caminho orientado $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ em $G_n(\varepsilon)$ representa uma δ -cadeia $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ de F com $\delta = (n + \sqrt{2})\varepsilon$ e $x_k = y_k + \wp(\gamma)$, onde $y_k \in S_{i_k}$ pode ser escolhido arbitrariamente.*
- (2) *Dada uma $n\varepsilon$ -cadeia de F de x_0 a x_k , existe um caminho orientado γ em $G_n(\varepsilon)$ que corresponde a esta $n\varepsilon$ -cadeia e satisfaz $\wp(\gamma) = p_k - p_0$, onde $p_k = x_k - (x_k \bmod \mathbb{Z}^2)$*

e $p_0 = x_0 - (x_0 \bmod \mathbb{Z}^2)$. Mais ainda, se $x_0 = x_k \bmod \mathbb{Z}^2$, então podemos escolher γ sendo um laço.

Prova: (1) Seja $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ um caminho orientado em $G_n(\varepsilon)$. Para cada $e_{i_{\alpha-1} i_\alpha}$ com $\alpha = 1, 2, \dots, k$, existem $y_{\alpha-1} \in S_{i_{\alpha-1}}$ e $p_{i_{\alpha-1} i_\alpha} \in \mathbb{Z}^2$ tais que

$$d(F(y_{\alpha-1}), S_{i_\alpha} + p_{i_{\alpha-1} i_\alpha}) < n\varepsilon,$$

conseqüentemente

$$d(F(y_{\alpha-1}), z_{i_\alpha} + p_{i_{\alpha-1} i_\alpha}) < (n + \sqrt{2})\varepsilon,$$

para qualquer $z_{i_\alpha} \in S_{i_\alpha}$.

Definimos $x_0 = y_0$ e $x_\alpha = y_\alpha + \sum_{j=1}^\alpha p_{i_{j-1} i_j}$ para $\alpha = 1, 2, \dots, k$ com $y_k \in S_{i_k}$ qualquer. Assim,

$$\begin{aligned} d(F(x_0), x_1) &= d(F(y_0), y_1 + p_{i_0 i_1}) \\ &< (n + \sqrt{2})\varepsilon, \end{aligned}$$

e para $\alpha = 1, 2, \dots, k-1$,

$$\begin{aligned} d(F(x_\alpha), x_{\alpha+1}) &= d(F(y_\alpha + \sum_{j=1}^\alpha p_{i_{j-1} i_j}, y_{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{\alpha+1} p_{i_{j-1} i_j}) \\ &= d(F(y_\alpha) + \sum_{j=1}^\alpha p_{i_{j-1} i_j}, y_{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{\alpha+1} p_{i_{j-1} i_j}) \\ &= d(F(y_\alpha), y_{\alpha+1} + p_{i_\alpha i_{\alpha+1}}) \\ &< (n + \sqrt{2})\varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(F(x_\alpha), x_{\alpha+1}) < (n + \sqrt{2})\varepsilon,$$

para $\alpha = 0, \dots, k-1$. Portanto $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ é uma δ -cadeia de F com $x_0 = y_0$, $x_k = y_k + \wp(\gamma)$ e $\delta = (n + \sqrt{2})\varepsilon$. Isto prova (1).

(2) Seja $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ uma $n\varepsilon$ -cadeia de x_0 a x_k . Para cada x_α existe $p_\alpha \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x_\alpha \in S_{i_\alpha} + p_\alpha$ para algum S_{i_α} , com isto $x_\alpha - p_\alpha \in S_{i_\alpha}$.

Definimos o caminho orientado $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ com a aresta orientada $e_{i_\alpha i_{\alpha+1}}$ de S_{i_α} a $S_{i_{\alpha+1}}$ com $\alpha = 0, \dots, k-1$, dada por:

$$\begin{aligned} d(F(x_\alpha - p_\alpha), S_{i_{\alpha+1}} + (p_{\alpha+1} - p_\alpha)) &= d(F(x_\alpha) - p_\alpha, S_{i_{\alpha+1}} + p_{\alpha+1} - p_\alpha) \\ &= d(F(x_\alpha), S_{i_{\alpha+1}} + p_{\alpha+1}) \\ &\leq d(F(x_\alpha), x_{\alpha+1}) \\ &< n\varepsilon, \end{aligned}$$

para $x_\alpha - p_\alpha \in S_{i_\alpha}$.

Pela definição da aplicação $\wp$, $\wp(e_{i_\alpha i_{\alpha+1}}) = p_{\alpha+1} - p_\alpha$, e

$$\begin{aligned} \wp(\gamma) &= \sum_{\alpha=0}^{k-1} \wp(e_{i_\alpha i_{\alpha+1}}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{k-1} (p_{\alpha+1} - p_\alpha) \\ &= p_k - p_0. \end{aligned}$$

Se $x_0 = x_k \bmod \mathbb{Z}^2$, então existe $p \in \mathbb{Z}^2$ tal que $x_k = x_0 + p$, isto significa que

$$x_k \in (S_{i_0} + (p_0 + p)) \cap (S_{i_k} + p_k),$$

e pela Observação 3.1, $S_{i_0} = S_{i_k}$ e $p_k = p_0 + p$. Neste caso, o caminho orientado γ é um laço e $\wp(\gamma) = p_k - p_0 = p$. ■

Dados um caminho orientado γ em $G_n(\varepsilon)$ e uma $n\varepsilon$ -cadeia $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ de F , fixemos o seguinte:

- (1) A δ -cadeia que γ representa é a encontrada no Lema 3.1(1);
- (2) O caminho orientado que corresponde a $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ é aquele que foi encontrado no Lema 3.1(2).

Observação 3.3 Se um caminho orientado $\gamma = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ contém um sub-caminho orientado $\gamma_1 = (e_{i_s i_{s+1}}, \dots, e_{i_r i_{r+1}})$ que é um laço, isto é, $i_{r+1} = i_s$, então as arestas restantes também constituem um caminho $\gamma_2 = (e_{i_0 i_1}, \dots, e_{i_{s-1} i_s}, e_{i_{r+1} i_{r+2}}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$ em $G_n(\varepsilon)$. Neste caso, escrevemos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

É fácil notar que, na observação anterior, $\wp(\gamma) = \wp(\gamma_1) + \wp(\gamma_2)$, pois o valor de $\wp$ em um caminho depende apenas das arestas $e_{i_j i_{j+1}}$. Conseqüentemente, temos o lema seguinte.

Lema 3.2 Se γ é um laço em $G_n(\varepsilon)$, então existem laços minimais $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tais que

$$\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_m.$$

Observação 3.4 A expressão para γ no Lema 3.2 pode não ser única, entretanto o valor de $\sum_{j=1}^m \wp(\gamma_j)$ é sempre o mesmo para toda decomposição em laços minimais.

Definimos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}^2$ associados aos laços e laços minimais em $G_n(\varepsilon)$,

$$L_n(\varepsilon) = \{\wp(\gamma) : \gamma \text{ é um laço em } G_n(\varepsilon) \}$$

$$M_n(\varepsilon) = \{\wp(\gamma) : \gamma \text{ é um laço minimal em } G_n(\varepsilon) \}$$

$$C_n(\varepsilon) = \{\sum_i m_i p_i : m_i \in \mathbb{Z}_+, p_i \in M_n(\varepsilon)\}$$

Pelo Lema 3.2, $M_n(\varepsilon) \subset L_n(\varepsilon) \subset C_n(\varepsilon)$, e $M_n(\varepsilon)$ é um conjunto finito, pois o número de laços minimais em $G_n(\varepsilon)$ é necessariamente finito.

Definição 3.4 *Seja $\{\gamma_i\}_{i=1}^r$ uma coleção de laços em $G_n(\varepsilon)$. Dizemos que $\cup_{i=1}^r \gamma_i$ é conexa se dados S_i, S_j dois vértices em $\cup_{i=1}^r \gamma_i$, existe um caminho com extremos S_i, S_j contido em $\cup_{i=1}^r \gamma_i$.*

Lema 3.3 *Seja $\{\gamma_i\}_{i=1}^r$ uma coleção de laços em $G_n(\varepsilon)$. Se $\cup_{i=1}^r \gamma_i$ é conexa, então para todo $m_i \in \mathbb{Z}_+$, com $m_i > 0$,*

$$\sum_{i=1}^r m_i \wp(\gamma_i) \in L_n(\varepsilon).$$

Prova: A prova será feita por indução.

Para $r = 1$, basta definir o caminho γ que percorre γ_1 , m_1 vezes, e assim $m_1 \wp(\gamma_1) = \wp(\gamma) \in L_n(\varepsilon)$.

Suponhamos que vale para $r = k$. Dada $\cup_{i=1}^{k+1} \gamma_i$ conexa, ao menos um dos subconjuntos $\cup\{\gamma_i : 1 \leq i \leq k+1, i \neq j\}$ para $1 \leq j \leq k+1$ também é conexo. Supomos que $\cup_{i=2}^{k+1} \gamma_i$ é conexo e S_j é um vértice de γ_1 comum com γ_2 .

Pela hipótese de indução $\sum_{i=2}^{k+1} m_i \wp(\gamma_i) \in L_n(\varepsilon)$, existe um caminho γ passando por todas as arestas orientadas de $\cup_{i=2}^{k+1} \gamma_i$ um número apropriado de vezes, tal que

$$\wp(\gamma) = \sum_{i=2}^{k+1} m_i \wp(\gamma_i).$$

Agora construímos um laço γ^* em $G_n(\varepsilon)$ que começa em S_j percorre o caminho γ retornando a S_j , e depois percorre o caminho γ_1 , m_1 vezes, terminando em S_j . Deste modo

$$\wp(\gamma^*) = m_1 \wp(\gamma_1) + \wp(\gamma) = \sum_{i=1}^{k+1} m_i \wp(\gamma_i) \in L_n(\varepsilon).$$

■

3.1.2 A componente de 0 em $\mathbb{Z}^2$ por ε -cadeias

Nesta parte do trabalho vamos enunciar e provar a Proposição 3.1. Para isso, analisaremos os pontos de $\mathbb{Z}^2$ para os quais a origem pode ser “ligada” por meio de ε -cadeias. Com este intuito, definimos o subconjunto $U(\varepsilon)$ de $\mathbb{Z}^2$:

$$U(\varepsilon) = \{p \in \mathbb{Z}^2 : \text{existe uma } \varepsilon\text{-cadeia de } F \text{ da origem a } p\}.$$

Que chamamos de *componente de 0 em $\mathbb{Z}^2$ por ε -cadeias*. Pelo Lema 3.1, dado $p \in U(n\varepsilon)$ a $n\varepsilon$ -cadeia de 0 a p pode ser representada por um laço γ em $G_n(\varepsilon)$. O seguinte resultado também é consequência deste lema.

Corolário 3.1 $U(n\varepsilon) \subset L_n(\varepsilon)$ para $n \geq 1$.

Prova: Pela prova do Lema 3.1(2), dado $p \in U(n\varepsilon)$ temos que $x_k = p$ e $x_0 = 0$, $p = 0 + p$ e com isto $\varphi(\gamma) = p$, ou seja, $p \in L_n(\varepsilon)$. Portanto $U(n\varepsilon) \subset L_n(\varepsilon)$. ■

Nas provas de alguns lemas seguintes será necessário concatenar ε -cadeias de F , por isso é importante vermos a próxima observação.

Observação 3.5 *Se existem duas ε -cadeias de F , $\{x_i\}_{i=0}^k$ e $\{y_i\}_{i=0}^r$ com $x_k = y_0 + p$ para algum $p \in \mathbb{Z}^2$, então podemos construir uma ε -cadeia $\{z_i\}_{i=0}^{k+r}$ de x_0 a $y_k + p$ sendo $z_i = x_i$ para $i = 0, \dots, k$ e $z_i = y_{i-k} + p$ para $i = k, \dots, k + r$.*

De fato, para $k \leq i \leq k + r - 1$,

$$\begin{aligned} d(F(z_i), z_{i+1}) &= d(F(y_{i-k} + p), y_{i-k+1} + p) \\ &= d(F(y_{i-k}) + p, y_{i-k+1} + p) \\ &= d(F(y_{i-k}), y_{i-k+1}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Lema 3.4 *Seja $\mathbb{T}^2$ transitivo por cadeia por f . Então existe um vetor $\sigma_1 \in L_1(\varepsilon)$ tal que, para toda coleção $p_j \in M_n(\varepsilon)$ e $m_j \in \mathbb{Z}_+$, com $n \geq 1$, e $j = 1, \dots, r$,*

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sum_{j=1}^r m_j p_j &\in U((n + \sqrt{2})\varepsilon), \text{ ou seja} \\ \sigma_1 + C_n(\varepsilon) &\subset U((n + \sqrt{2})\varepsilon). \end{aligned}$$

Prova: $\mathbb{T}^2$ transitivo por cadeia implica que: Para cada $0 \leq i < N^2$ podemos escolher um $x_i \in S_i$ tal que existe uma ε -cadeia de f , $\omega_i = \{x_0 = 0, \dots, x_i, \dots, x_k = 0\}$. Equivalentemente, existe uma ε -cadeia de F , $\tilde{\omega}_i = \{\tilde{x}_0 = 0, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_k = h_i\}$, para algum $h_i \in \mathbb{Z}^2$ e com $\tilde{x}_i \in S_i + \mathbb{Z}^2$. Transladando $\tilde{\omega}_1$ por h_0 , obtemos uma ε -cadeia que liga h_0 ao ponto $h_0 + h_1$. Pela Observação 3.5, concatenando esta última com a $\tilde{\omega}_0$, temos uma outra ε -cadeia de 0 a $h_0 + h_1$. Prosseguindo de maneira indutiva, obtemos uma ε -cadeia ω de 0 a $\sigma_1 = \sum_{i=0}^{N^2-1} h_i$. Pelo Lema 3.1(2) existe um laço γ em $G_1(\varepsilon)$ que corresponde a ω , e $\sigma_1 = \wp(\gamma_1^*) \in U(\varepsilon)$. Observemos que, por construção, γ contém todos os vértices $\{S_i\}_{i=0}^{N^2-1}$.

Se $p_j \in M_n(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, r$, então existe laço minimal γ_j em $G_n(\varepsilon)$ tal que

$$\wp(\gamma_j) = p_j.$$

Como cada γ_j tem vértice em comum com γ , então $\gamma \cup (\cup_{j=1}^r \gamma_j)$ é conexa. Logo, pelo Lema 3.3, para $m_j \in \mathbb{Z}_+$, existe um laço γ^* em $G_n(\varepsilon)$ tal que

$$\wp(\gamma^*) = \sigma_1 + \sum_{j=1}^r m_j p_j \in L_n(\varepsilon).$$

Se $\gamma^* = (e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{k-1} i_k})$, podemos supor que $i_0 = 0 = i_k$ ($S_{i_0} = S_{i_k} = S_0$). Deste modo, pelo Lema 3.1(1), temos a $(n + \sqrt{2})\varepsilon$ -cadeia $\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^k$ com $x_0 = 0$, $x_k = y_k + \wp(\gamma^*)$ e podemos escolher $y_k = 0 \in S_0$, ou seja, $x_k = \wp(\gamma^*)$. Isto mostra que $\wp(\gamma^*) \in U((n + \sqrt{2})\varepsilon)$. ■

Lema 3.5 *Seja $\mathbb{T}^2$ transitivo por cadeia e τ um dos vetores $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. Então existem $p \in C_1(\varepsilon)$ e uma 2ε -cadeia de 0 a $p + \tau$ cujo laço correspondente γ satisfaz $\wp(\gamma) = p + \tau$.*

Prova: Vamos provar para $\tau = (1, 0)$, sendo que nos outros casos a prova é similar. Considerando $S_0, S_1, \dots, S_{N-1}$, definimos $y_i = i\varepsilon\tau = (i\varepsilon, 0)$, para $0 \leq i \leq N-1$. Note que $y_i \in S_i$, pois $S_i = [i/N, (i+1)/N) \times [0, 1/N)$ para $0 \leq i \leq N-1$ (lembre-se que $\varepsilon = 1/N$).

Pela transitividade por cadeia, para cada $i = 0, \dots, N-1$ existe $\omega_i = \{y_i, x_1^i, \dots, x_{m_i}^i, y_i + p_i\}$, $\varepsilon/2$ -cadeia de F de y_i a $y_i + p_i$, para algum $p_i \in \mathbb{Z}^2$. Pelo Lema 3.1(2) podemos encontrar um laço γ_i em $G_1(\varepsilon)$ que corresponde a ω_i tal que $\wp(\gamma_i) = p_i$.

Observe que, para $i = 0, \dots, N-1$, definindo $y_N = (1, 0)$, $y_{i+1} = y_i + (\varepsilon, 0)$ e $\tilde{\omega}_i = \{y_i, x_1^i, \dots, x_{m_i}^i, y_{i+1} + p_i\}$ é uma 2ε -cadeia de y_i a $y_{i+1} + p_i$, pois

$$\begin{aligned} d(F(x_{m_i}^i), y_{i+1} + p_i) &= d(F(x_{m_i}^i), y_i + p_i + (\varepsilon, 0)) \\ &\leq d(F(x_{m_i}^i), y_i + p_i) + d(y_i + p_i, y_i + p_i + (\varepsilon, 0)) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Concatenando as 2ε -cadeias $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=0}^{N-1}$, como na Observação 3.5, encontramos uma 2ε -cadeia $\omega = \{y_0 = 0, \dots, p + (1, 0)\}$, onde $p = p_0 + \dots + p_{N-1}$. Pelo Lema 3.1(2) existe um laço γ em $G_2(\varepsilon)$ correspondendo a ω tal que

$$\wp(\gamma) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i + (1, 0) = p + (1, 0).$$

Além disto, $p = \sum_{i=0}^{N-1} \wp(\gamma_i) \in C_1(\varepsilon)$, pois cada γ_i é um laço em $G_1(\varepsilon)$. Isto conclui a prova. ■

Corolário 3.2 *Seja $\mathbb{T}^2$ transitivo por cadeia. Então $C_2(\varepsilon) - C_2(\varepsilon) = \mathbb{Z}^2$.*

Prova: Como $\mathbb{Z}^2$ pode ser gerado por $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ sobre $\mathbb{Z}_+$, então será suficiente mostrar que $m\tau_1 + k\tau_2 \in C_2(\varepsilon) - C_2(\varepsilon)$, para quaisquer $m, k \in \mathbb{Z}_+$ e $\tau_1, \tau_2 \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$. De fato, pelo Lema 3.5, dados $\tau_1, \tau_2 \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ existem $p_1, p_2 \in C_1(\varepsilon)$ e laços γ_1, γ_2 em $G_2(\varepsilon)$ com

$$\wp(\gamma_1) = p_1 + \tau_1 \quad \text{e} \quad \wp(\gamma_2) = p_2 + \tau_2.$$

Como $\wp(\gamma_1), \wp(\gamma_2) \in L_2(\varepsilon) \subset C_2(\varepsilon)$, pela definição de $C_2(\varepsilon)$ e $C_1(\varepsilon)$, para quaisquer $m, k \in \mathbb{Z}_+$,

$$m(p_1 + \tau_1) + k(p_2 + \tau_2) \in C_2(\varepsilon) \quad \text{e} \quad mp_1 + kp_2 \in C_1(\varepsilon),$$

isto implica que

$$m(p_1 + \tau_1) + k(p_2 + \tau_2) - (mp_1 + kp_2) = m\tau_1 + k\tau_2 \in C_2(\varepsilon) - C_1(\varepsilon)$$

e como $C_1(\varepsilon) \subset C_2(\varepsilon)$ segue que $m\tau_1 + k\tau_2 \in C_2(\varepsilon) - C_2(\varepsilon)$. Portanto,

$$C_2(\varepsilon) - C_2(\varepsilon) = \mathbb{Z}^2.$$

■

No lema seguinte, $\cdot$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Lema 3.6 *Suponhamos que $[0, v] \subseteq \rho(F)$ tem inclinação irracional e que v é um extremo de $\rho(F)$. Se ξ é um funcional linear não-trivial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ com $\xi(v) = 0$, então existem $p, q \in C_1(\varepsilon)$ tais que $\xi(p) > 0$, $\xi(q) < 0$ e $p \cdot v > 0$, $q \cdot v < 0$.*

Prova: Seja $\tilde{C}_n(\varepsilon)$ o conjunto gerado por $M_n(\varepsilon)$ sobre $\mathbb{R}_+$. Então $\tilde{C}_n(\varepsilon)$ é um cone convexo e fechado (possivelmente todo o plano).

Primeiramente vamos mostrar que $v \in \tilde{C}_1(\varepsilon)$. De fato, como v é um ponto extremo de $\rho(F)$, segue do Lema 2.1 que existe um ponto $x \in \mathbb{T}^2$ tal que $v = \rho(F, x)$, ou seja, tomando $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$,

$$v = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^m(\tilde{x}) - \tilde{x}}{m}.$$

Para cada $m \geq 0$, $F^m(\tilde{x}) \in S_m^* + p_m$, onde $\{S_m^*\} \subset \{S_i\}$ e $p_m \in \mathbb{Z}^2$.

$$F^m(\tilde{x}) - \tilde{x} \in (S_m^* + p_m) - (S_0^* + p_0),$$

isto é,

$$F^m(\tilde{x}) - \tilde{x} = (s_m^* + p_m) - (s_0^* + p_0),$$

com $s_m^* \in S_m^*$ e $s_0^* \in S_0^*$. Fazendo $s_m^* - s_0^* = t_m$ temos que

$$F^m(\tilde{x}) - \tilde{x} = p_m - p_0 + t_m, \text{ com } \|t_m\| < \sqrt{2}.$$

Utilizando a ε -cadeia $\{F^i(\tilde{x})\}_{i=0}^m$, pelo Lema 3.1(2) existe um caminho orientado γ_m em $G_1(\varepsilon)$ que corresponde a esta ε -cadeia e $\wp(\gamma_m) = p_m - p_0$. Se nós “removemos” todos os laços contidos em γ_m , como na Observação 3.3, os vértices restantes constituem um caminho orientado γ^* em $G_1(\varepsilon)$. Deste modo,

$$\frac{F^m(\tilde{x}) - \tilde{x}}{m} = \frac{1}{m}L_m + \frac{1}{m}\wp(\gamma^*) + \frac{1}{m}t_m,$$

onde $L_m \in C_1(\varepsilon) \subset \tilde{C}_1(\varepsilon)$. Como γ^* consiste de vértices distintos, $\wp(\gamma^*)$ é limitado e o valor que o limita não depende de m . Fazendo $m \rightarrow \infty$, segue que

$$\frac{1}{m}\wp(\gamma^*) \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{m}t_m \rightarrow 0, \text{ pois } \|t_m\| < \sqrt{2},$$

conseqüentemente $\frac{1}{m}L_m \rightarrow v$. Sabemos que $\frac{1}{m}L_m \in \tilde{C}_1(\varepsilon)$, $\tilde{C}_1(\varepsilon)$ é fechado e $\frac{1}{m}L_m \rightarrow v$, portanto $v \in \tilde{C}_1(\varepsilon)$.

Afirmamos que $v \in \text{int}\tilde{C}_1(\varepsilon)$. De fato, se $\tilde{C}_1(\varepsilon) \neq \mathbb{R}^2$ e $v \notin \text{int}\tilde{C}_1(\varepsilon)$ então v está na fronteira de $\tilde{C}_1(\varepsilon)$, ou seja, v pertence a uma reta que passa pela origem e por um ponto

$h \in M_1(\varepsilon) \subset \mathbb{Z}^2$. Seja $h = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, deste modo o segmento de reta entre a origem e v teria inclinação racional (Figura 3.3), o que contradiz a hipótese e mostra que $v \in \text{int}\tilde{C}_1(\varepsilon)$.

Figura 3.3: Segmento com inclinação racional.

Como $v \in \text{int}\tilde{C}_1(\varepsilon)$, existe uma bola aberta de centro em v contida em $\tilde{C}_1(\varepsilon)$. Com isto, sabendo que ξ é não-trivial e $\xi(v) = 0$, podemos escolher $p, q \in \tilde{C}_1(\varepsilon)$ satisfazendo

$$\xi(p) > 0, \xi(q) < 0, p \cdot q > 0, p \cdot v > 0, q \cdot v < 0 \quad (3.1)$$

onde $p = \sum_i r_i p_i$ e $q = \sum_i r_i^* q_i$ com $p_i, q_i \in M_1(\varepsilon)$ e $r_i, r_i^* \in \mathbb{Q}_+$.

Finalmente afirmamos que $p, q \in C_1(\varepsilon)$. Multiplicando por um inteiro positivo suficientemente grande para eliminar os denominadores de todos os r_i 's, r_i^* 's, obtemos os vetores que renomeamos como p, q pertencentes a $C_1(\varepsilon)$ satisfazendo (3.1). Isto conclui a prova. ■

Dado $y \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\angle(y, v)$ o ângulo entre y e v , com isto, para $0 \leq \theta < \pi/2$ e $r > 0$, definimos o conjunto $E(v, \theta, r)$ associado com o vetor rotação v do Lema 3.6 como (veja a Figura 3.4)

$$E(v, \theta, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| \geq r \text{ e } \angle(y, v) < \theta\}.$$

Se p, q são os dois pontos encontrados no Lema 3.6, então eles são linearmente independentes, e como $M_2(\varepsilon)$ é finito, temos a seguinte observação.

Observação 3.6 (1) *Existe $H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\} \subset \mathbb{Z}^2$ um conjunto de representantes das classes laterais de $\mathbb{Z}^2$ em $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ tal que para cada $i = 1, \dots, m$, $h_i = m_i p + n_i q$, para alguns $m_i, n_i \in \mathbb{Z}_+$.*

(2) Seja $M_2(\varepsilon) = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$. Se $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia, então pelo Corolário 3.2 podemos escrever $h_i = \sum_{j=1}^s \lambda_{ij} p_j$, para $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$ e $p_j \in M_2(\varepsilon) \subset C_2(\varepsilon)$. Considere $\lambda_j = \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_{ij}|$, e $\sigma_2 = \sum_{j=1}^s \lambda_j p_j$, isto será utilizado na demonstração do próximo lema.

Figura 3.4: O conjunto $E(v, \theta, r)$.

Lema 3.7 Se $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia, então existem $\theta > 0$ e $r > 0$ tais que

$$E(v, \theta, r) \cap \mathbb{Z}^2 \subset C_2(\varepsilon).$$

Prova: Seja $K = \sigma_2 + p\mathbb{R}_+ + q\mathbb{R}_+$, com σ_2 sendo o vetor que foi definido anteriormente. Podemos encontrar um $\theta > 0$ tão pequeno quanto o necessário e um r grande tais que $E(v, \theta, r) \subset K$. Para concluirmos a demonstração basta mostrar que $K \cap \mathbb{Z}^2 \subset C_2(\varepsilon)$. Se $u \in K \cap \mathbb{Z}^2$, então $u = \sigma_2 + h_i + r_1 p + r_2 q$ para algum $h_i \in H$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+$. Pela maneira como σ_2 foi construído, $\lambda_j + \lambda_{ij} \geq 0$ para $1 \leq j \leq s$. Isto implica que $\sigma_2 + h_i = \sum_{j=1}^s (\lambda_j + \lambda_{ij}) p_j \in C_2(\varepsilon)$, e como $p, q \in C_1(\varepsilon) \subset C_2(\varepsilon)$, concluimos que $u \in C_2(\varepsilon)$. ■

Proposição 3.1 Se $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia, então existem $\theta > 0$ e $r > 0$ tais que

$$E(v, \theta, r) \cap \mathbb{Z}^2 \subset U(4\varepsilon).$$

Prova: Sejam θ_0 e r_0 os valores encontrados no Lema 3.7. Evidentemente, podemos encontrar $\theta < \theta_0$ e $r > r_0$ de maneira que $E(v, \theta, r) \subset \sigma_1 + E(v, \theta_0, r_0)$, sendo σ_1 o vetor definido no Lema 3.4. Então pelos Lemas 3.7 e 3.4,

$$E(v, \theta, r) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \sigma_1 + E(v, \theta_0, r_0) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \sigma_1 + C_2(\varepsilon) \subset U((2 + \sqrt{2})\varepsilon) \subset U(4\varepsilon). \quad \blacksquare$$

3.2 Prova do Teorema Principal

O lema seguinte será utilizado na demonstração do Teorema Principal, e pode ser encontrado no trabalho de Franks em [7].

Lema 3.8 *Seja F um levantamento de um homeomorfismo do toro $\mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma ε -cadeia periódica para F , então F tem um ponto fixo.*

Agora, com os resultados que obtivemos até aqui já podemos fazer a prova do Teorema Principal.

Teorema Principal *Suponha que f é um homeomorfismo do toro $\mathbb{T}^2$ homotópico à identidade. Seja F um levantamento de f e suponha que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação irracional. Se $(p_1/n, p_2/n) \in \rho(F)$, com $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$, então f tem um ponto periódico de período n .*

Prova: Denotamos por $[v, \omega]$ o segmento $\rho(F)$, onde v e ω são os dois pontos extremos do conjunto de rotação, e seja $u = (p_1/n, p_2/n) \in \rho(F)$ o ponto racional. Dividiremos a prova em três casos.

CASO 1: Se $u = v$ ou $u = \omega$, então u é um ponto extremo do conjunto de rotação $\rho(F)$ e o resultado segue do Lema 2.1.

Nos casos em que u não é um extremo de $\rho(F)$ a prova será feita por contradição, assumindo que f não tem ponto periódico.

CASO 2: $u = 0$ não é um extremo de $\rho(F)$. Pela Proposição 2.3, como f não tem ponto periódico, $\mathbb{T}^2$ é transitivo por cadeia. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomamos um $\delta = 1/N < \varepsilon/4$ para um inteiro positivo N suficientemente grande. Pela Proposição 3.1, existem $\theta_i, r_i > 0$, $i = 1, 2$, tais que

$$E(v, \theta_1, r_1) \cap \mathbb{Z}^2 \subset U(4\delta) \subset U(\varepsilon)$$

e

$$E(\omega, \theta_2, r_2) \cap \mathbb{Z}^2 \subset U(4\delta) \subset U(\varepsilon).$$

Sejam $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ e $r = \max\{r_1, r_2\}$, deste modo $E(v, \theta, r) \subset E(v, \theta_1, r_1)$ e $E(\omega, \theta, r) \subset E(\omega, \theta_2, r_2)$. Conseqüentemente,

$$[E(v, \theta, r) \cup E(\omega, \theta, r)] \cap \mathbb{Z}^2 \subset U(\varepsilon).$$

Além disto, como $0 \in [v, \omega]$, dado $p \in E(v, \theta, r) \cap \mathbb{Z}^2$ segue que $-p \in E(\omega, \theta, r) \cap \mathbb{Z}^2$ (veja a Figura 3.5), existem ε -cadeias α_1 de 0 a p e α_2 de 0 a $-p$. Mais ainda, transladando α_2 por p obtemos uma ε -cadeia α_3 de p a 0, pois $F(x + p) = F(x) + p$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$. Concatenando α_1 e α_3 (ver Observação 3.5) obtemos uma ε -cadeia periódica de 0. Logo, pelo Lema 3.8, F tem um ponto fixo. Isto contradiz a nossa suposição.

Figura 3.5: O conjunto $E(\omega, \theta, r) \cup E(v, \theta, r)$.

CASO 3: $u \neq 0$ não é um extremo de $\rho(F)$. Escrevemos $u = \frac{1}{n}p$ onde $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $\text{mdc}(p_1, p_2, n) = 1$. Como f não tem ponto periódico, f^n também não tem. É claro que $G = F^n - p$ é um levantamento de f^n , e pela Proposição 2.1, $\rho(G) = n\rho(F) - p$, ou seja, $\rho(G)$ é um segmento de reta que tem a mesma inclinação de $\rho(F)$. Além disto, $0 = nu - p \in \rho(G)$. Deste modo, utilizando o argumento do **caso 2** para f^n e seu levantamento G , concluímos que G tem um ponto fixo. E novamente chegamos a uma contradição.

Finalmente, sabendo que f tem um ponto periódico x , vamos mostrar que o período é n . Seja $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^k(x) = x$, e escolhamos um $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $\pi(\tilde{x}) = x$. Afirmamos que $\rho(F, x) = u$. De fato, como $f^k(\pi(\tilde{x})) = \pi(\tilde{x})$ e $f^k \circ \pi = \pi \circ F^k$, logo $\pi(\tilde{x}) = \pi(F^k(\tilde{x}))$, isto é,

$$F^k(\tilde{x}) = \tilde{x} + h,$$

para algum $h \in \mathbb{Z}^2$. Conseqüentemente,

$$F^{rk}(\tilde{x}) = \tilde{x} + rh, \quad \forall r \in \mathbb{Z}_+.$$

Dado $0 \leq i < k$, lembrando que qualquer inteiro positivo pode ser escrito como $rk + i$ para algum $r \in \mathbb{Z}_+$,

$$F^{rk+i}(\tilde{x}) = F^i(F^{rk}(\tilde{x})) = F^i(\tilde{x} + rh) = F^i(\tilde{x}) + rh$$

e deste modo,

$$\frac{F^{rk+i}(\tilde{x}) - \tilde{x}}{rk + i} = \frac{F^i(\tilde{x}) + rh - \tilde{x}}{rk + i} = \frac{F^i(\tilde{x}) - \tilde{x}}{rk + i} + \frac{rh}{rk + i}.$$

Portanto,

$$\rho(F, x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F^s(\tilde{x}) - \tilde{x}}{s} = \frac{1}{k}h \in \rho(F) \cap \mathbb{Q}^2.$$

Como o segmento de reta $\rho(F)$ tem inclinação irracional, segue que $\rho(F, x) = u$. Conseqüentemente, como $h = \frac{k}{n}p \in \mathbb{Z}^2$, pelo Lema 1.1, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que $k = mn$.

Já vimos que $F^k(\tilde{x}) - h = \tilde{x}$, com isto

$$F^{mn}(\tilde{x}) - mp = \tilde{x}.$$

Dado $y \in \mathbb{R}^2$,

$$(F^n - p)^r(y) = F^{rn}(y) - rp, \quad \forall r \in \mathbb{Z}_+.$$

Temos que $(F^n - p)^m(\tilde{x}) = F^{mn}(\tilde{x}) - mp = \tilde{x}$, isto é, $F^n - p$ tem um ponto periódico, e pelo Teorema 1.2 (Brouwer) $F^n - p$ tem um ponto fixo, portanto f^n possui um ponto fixo, ou seja, f tem um ponto periódico de período n . Isto conclui a prova o Teorema Principal. ■

A seguir veremos um exemplo de um homeomorfismos f homotópico à identidade com levantamento F tal que o conjunto de rotação $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação

racional, contém infinitos pontos racionais e não possui nenhum ponto periódico.

Exemplo: Seja X um campo de vetores C^∞ em $\mathbb{T}^2$ com as seguintes propriedades:

- (a) X não tem singularidades;
- (b) X tem exatamente duas órbitas periódicas α e β , as quais têm períodos irracionais. Além disto, α é atratora e β repulsora;
- (c) Sejam $A = \{(x, 1/2) : x \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Existe $\tilde{X}$ um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ que é um levantamento de X tal que $\pi(A) = \alpha$, $\pi(B) = \beta$, $\tilde{X}|_A = a$ e $\tilde{X}|_B = b$.

Figura 3.6: Campo de vetores $\tilde{X}$.

Se $\tilde{X}^t$ é o fluxo de $\tilde{X}$, então, pelo item (c), $\tilde{X}^t(p) = p + ta$ e $\tilde{X}^t(q) = q + tb$ para cada $t \in \mathbb{R}$, $p \in A$ e $q \in B$. Em particular, se $F = \tilde{X}^1$ (tempo 1 do fluxo $\tilde{X}^t$), então

$$F(p) = p + a \text{ para cada } p \in A \text{ e } F(q) = q + b \text{ para cada } q \in B.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{F^n(p) - p}{n} = \frac{p + na - p}{n} = a \quad \text{e} \quad \frac{F^n(q) - q}{n} = \frac{q + nb - q}{n} = b.$$

pois $F(A) \subset A$ e $F(B) \subset B$. Isto mostra que $a, b \in \rho(F)$, portanto, como o conjunto de rotação é convexo, $[a, b] \subset \rho(F)$.

Vamos verificar que $\rho(F) = [a, b]$. Por contradição, suponhamos que $\rho(F) \not\subset [a, b]$, isto significa que existe $\omega \in \mathbb{R}^2 \setminus [a, b]$ que é um extremo de $\rho(F)$. Conseqüentemente, pelo

Lema 2.1, existe $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x_0) - x_0}{n},$$

como $\frac{1}{n}x_0 \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos que

$$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x_0)}{n}.$$

Por outro lado, seja $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\|\omega - a\| > \varepsilon_0$. Então para cada $p \in A$ fixo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|F^n(x_0) - F^n(p)\| \geq n\varepsilon_0. \quad (3.2)$$

Como F é um levantamento de um homeomorfismo do toro, F^n é uniformemente contínua, ou seja, dado $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe $\delta = \delta(n) > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|F^n(x) - F^n(y)\| < \varepsilon \quad (3.3)$$

Transladando x_0 , se necessário, podemos assumir que x_0 esteja na faixa definida entre as retas B e $B + (0, 1)$. Seja $n > n_0$, como A é atrator, podemos supor que $\|x_0 - p\| < \delta$, conseqüentemente, de (3.3) segue que

$$\|F^n(x_0) - F^n(p)\| < \varepsilon.$$

Isto contradiz (3.2), mostrando que $\rho(F) = [a, b] \subset \mathbb{R} \times \{0\}$.

Em conclusão, por construção $f = X^1$ (tempo um do fluxo X^t de X) não tem pontos periódicos, porém, seu levantamento F é tal que $\rho(F)$ é um segmento de reta com inclinação racional e contém infinitos pontos racionais.

Referências Bibliográficas

- [1] BAI-LIN, H. Elementary Symbolic Dynamics and chaos in dissipative systems. Singapura: World Scientific, 1989.
- [2] BERGE, M. M.; WALKER, R. B. Periodic point free maps of tori which have rotation sets with interior. *Nonlinearity*, v. 6, n. 3, pp. 481-489, 1993.
- [3] BROWN, M. A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *Houston Journal of Mathematics*, v. 10, n. 1, pp. 35-41, 1984.
- [4] CONLEY, C. Isolated Invariant Sets and the Morse Index. CBMS Regional Conf. in Math., 38. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1978.
- [5] DEVANEY, R. L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2.ed. Eddison-Wesley, 1995.
- [6] FATHI, A. An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs. *L'Enseignement Mathématique*, v. 33, n. 3-4, pp. 315-322, 1987.
- [7] FRANKS, J. Realizing rotation vectors for torus homeomorphisms. *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), pp. 107-116.
- [8] FRANKS, J. A variation on the Poincaré-Birkhoff Theorem. Hamiltonian dynamical systems. *Contemporary Mathematics*, v. 81, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., pp. 111-117, 1988.
- [9] FRANKS, J. The rotation sets and periodics points for torus homeomorphisms. *Dynamical Systems and Chaos*, World Scientific, River Edge, NJ, pp. 41-48, 1995.
- [10] HANDEL, M. Periodic point free homeomorphism of $\mathbb{T}^2$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 107, n. 2, pp. 511-515, 1989.

- [11] HANDEL, M. The rotation set of a homeomorphism of the annulus is closed. *Comm. Math. Phys.*, v. 127, n. 2, pp. 339-349, 1990.
- [12] JONKER, L. B.; ZHANG, L. Torus homeomorphisms whose rotation sets have empty interior. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, v. 18, n. 5, pp. 1173-1185, 1998.
- [13] KATOK, A.; HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University press, 1995.
- [14] LIMA, ELON L. *Curso de análise*. 8 ed. Rio de Janeiro: Impa, v. 2, 2005.
- [15] LLIBRE, J.; MACKAY, R.S. Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus isotopic to the identity. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, v. 11, n.1, pp. 115-128, 1991.
- [16] MISIUREWICZ, M.; ZIEMIAN, K. Rotation sets for maps of tori. *J. London Math. Soc.* 40 (1989), pp. 490-506.
- [17] MISIUREWICZ, M.; ZIEMIAN, K. Rotation sets and ergodic measures for torus homeomorphisms. *Fundamenta Mathematicae*, v. 137, n. 1, pp. 45-52, 1991.
- [18] POINCARÉ, H. *Oeuvres complètes*, tome 1. Gauthier-Villars, Paris, pp. 137-158, 1952.
- [19] WILSON, R. J. *Introduction to graph theory*. Edimburgo: Oliver & Boyd, 1972.

Índice Remissivo

ε -cadeia, 18

ε -partição, 28

Caminho orientado, 30

Componente

δ -transitiva, 21

transitiva por cadeia, 20

Conjunto

de rotação, 15

transitivo por cadeia, 19

Função de Lyapounov completa, 20

Grafo, 6

de uma ε -partição, 29

orientado, 6

Grau, 8

Laço, 30

minimal, 30

Levantamento, 7, 15

Número

de rotação, 12

de translação, 12

Recorrente por cadeia, 18

Teorema

de Brouwer, 6

de Conley, 21

de Poincaré, 12

do ponto fixo de Brouwer, 5

Principal, 40

Vetor rotação, 16