Campos de vetores em variedades singulares

Evandro Alves Nakajima

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

Campos de vetores em variedades singulares

Evandro Alves Nakajima

Orientadora: **Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Outubro de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Nakajima, Evandro
N163c Campos de Vetores em Variedades Singulares / Evandro Nakajima; orientadora Maria Aparecida Soares Ruas. -- São Carlos, 2013.
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Campos de Vetores. 2. Variedades Singulares. 3. Variedades Analíticas. 4. Número de Milnor. 5. Índice de Campos de Vetores. I. Aparecida Soares Ruas, Maria, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Julio e Edinea, pois sem o esforço, carinho e incentivo não teria nem começado este trabalho.

A minha irmã Ticiana, pelas palavras e gestos de incentivo.

Aos meus amigos do ICMC: Ariadna, Gabriel, Laís, Gil, Preta e Banana.

Aos meus amigos Ferdnando, Ginnara, Giovane, Thiago e Patrícia, que mesmo de longe, me deram um suporte indispensável para continuar. Também aos meus amigos Liliane, André, Didi, Diego e Priscila.

Gostaria de agradecer imensamente minha orientadora Professora Dra. Maria Aparecida Soares Ruas, pelo conhecimento transmitido, pela paciência e por ser uma grande amiga, me apoiando nos momentos mais difíceis.

Resumo

Neste trabalho estudamos índices de campos de vetores em variedades regulares e em variedades com singularidades isoladas. O principal resultado é o Teorema de Poincaré-Hopf que relaciona a característica de Euler de uma variedade com o índice de Poincaré-Hopf do campo. Para intersecções completas com singularidades isoladas, vemos também algumas variações deste teorema que relacionam a característica de Euler com o índice de Schwartz, o índice GSV e o número de Milnor da fibra genérica.

Abstract

In this work we study some indices of vector fields on regular manifolds, and on manifolds with isolated singularity. The main result is the Poincaré-Hopf Theorem, which connects the Euler characteristic with the Poincaré-Hopf index of the field. For complete intersections with isolated singularities, we also study some variations of this theorem, which connects the Euler characteristic with the Schwartz index, the GVS index and the Milnor number of the generic fiber.

Sumário

1 Preliminares **1**

1.1 Definições e Resultados Gerais 1

1.2 Orientação de Variedades 7

1.3 Homologia Simplicial 8

1.4 Introdução à Teoria de Singularidades 13

2 Índices de Campos de Vetores: Caso Suave **19**

2.1 Grau Módulo 2 de uma Aplicação 19

2.2 Índices de Campos de Vetores e o Teorema de Poincaré-Hopf 27

3 Variedades Singulares **39**

3.1 Conjuntos Algébricos 39

3.2 Conjuntos Analíticos 52

4 Índices de Campos de Vetores: Caso Singular **55**

4.1 Índice de Schwartz 56

4.2 Exemplos 61

4.3 O Índice GSV para Campos de Vetores em ICIS 65

5 Característica de Euler da fibra genérica de ICIS simples. **71**

Introdução

Há mais de um século, o estudo de campos vetoriais na vizinhança de um ponto singular isolado desempenha um papel importante em diversas áreas da matemática e em outras áreas da ciência, tais como física, biologia, meteorologia, entre outras. Um dos principais invariantes associados a um campo vetorial na vizinhança de um zero isolado é o índice de Poincaré-Hopf da singularidade, que tem sido estudado sob diferentes pontos de vista e sobre o qual existe uma vasta literatura. Ao mesmo tempo, a existência de espaços singulares como objetos centrais tanto na Matemática quanto em outras áreas propõe a questão natural de uma boa definição de índice de pontos singulares de campos vetoriais em variedades com singularidades. Nosso objetivo é obter, para variedades singulares, definições de índices de campos vetoriais, que reproduzam resultados locais e globais válidos no caso de variedades suaves.

Por exemplo, para variedades suaves, o Teorema de Poincaré-Hopf relaciona a soma dos índices de um campo vetorial com singularidades isoladas à característica de Euler da variedade, independentemente do campo vetorial escolhido. Encontrar novas noções de índices em variedades singulares que satisfaçam ao Teorema de Poincaré-Hopf é um problema importante no estudo de tais variedades.

O objetivo deste trabalho é estudar índices de campos de vetores em variedades, tanto suaves quanto com singularidades isoladas.

No primeiro capítulo veremos definições e resultados elementares, porém essenciais para o desenvolvimento do trabalho. As principais referências para este capítulo são [15], [14] e [6].

No segundo capítulo veremos o conceito de grau de uma aplicação e o utilizaremos para definir o índice de um campo de vetores em uma singularidade isolada. A partir

daí demonstraremos uma primeira versão do teorema de Poincaré-Hopf. A principal referência para este capítulo é [19]

No terceiro capítulo estudaremos resultados sobre variedades singulares, principalmente utilizando conceitos e resultados algébricos. Os principais resultados deste capítulo são o Teorema 3.23, que dá uma caracterização para vizinhança de um ponto singular, e o Teorema 3.24 da Fibração de Milnor. A principal referência para este capítulo é [20].

No quarto capítulo estudaremos índices de campos de vetores agora em variedades singulares. Estudaremos também o teorema de Poincaré-Hopf para estes índices. A principal referência para este capítulo é [3].

No quinto capítulo faremos exemplos com os cálculos do número de Milnor da fibra genérica de variedades. As principais referências são [17] e [7].

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo veremos alguns conceitos e resultados básicos para o desenvolvimento desta dissertação. Veremos resultados sobre variedades suaves, homologia simplicial e faremos uma introdução à teoria de singularidades.

1.1 Definições e Resultados Gerais

Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ subconjuntos abertos. Uma aplicação $f : U \to V$ é *suave* se todas as derivadas parciais

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}, \qquad i_j \in \{1, ..., k\}, \qquad i_1 + ... + i_k = n$$

existem e são contínuas. Mais geralmente, dizemos que $f : X \to Y$, com $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos quaisquer, é suave se, e somente se, para cada $x \in X$ existe aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ contendo x e uma função $F : U \to \mathbb{R}^l$, tal que $F|_{U \cap X} = f$. Dessa definição, segue que a aplicação identidade é suave e, da regra da cadeia, que a composição de aplicações suaves é suave.

Definição 1.1 *: Uma aplicação $f : X \to Y$ é um difeomorfismo se é um homeomorfismo suave cuja inversa f^{-1} é suave.*

Definição 1.2 *: Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^k$ é uma $m-$variedade suave em $\mathbb{R}^k$ (ou superfície $m-$dimensional em $\mathbb{R}^k$) se, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $W \cap M$,*

com W uma vizinhança de x em $\mathbb{R}^k$, que é difeomorfa a algum aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Neste caso, dizemos que o difeomorfismo $g : U \to W \cap M$ é uma parametrização e $g^{-1} : W \cap M \to U$ é um sistema de coordenadas.

Definição 1.3 *: Seja H^m o subespaço de $\mathbb{R}^m$ consistindo dos pontos*

$$H^m = \{(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m; x_m \geq 0\}.$$

Uma $m-$variedade com bordo é um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança W em $\mathbb{R}^n$ tal que $W \cap M$ é difeomorfa à uma vizinhança do $\mathbb{R}^m$ ou a H^m. O bordo de X (denotado por ∂X) consiste dos pontos que não têm vizinhança homeomorfa a um aberto do $\mathbb{R}^m$.

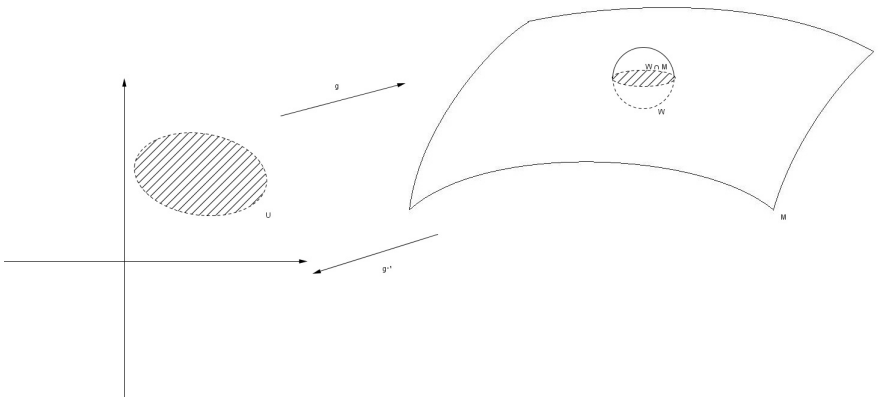

Figura 1.1: Difeomorfismo g

Exemplo 1.4 *:*

i. $X \subset \mathbb{R}^k$ é uma $0-$variedade conexa se, e somente se, X é ponto isolado.

ii. A esfera unitária $S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ é uma $2-$ variedade suave. Com efeito, basta considerarmos os seguintes difeomorfismos definidos no disco aberto unitário em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \\ \phi_2(x,y) = (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}) \\ \phi_3(x,z) = (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) \\ \phi_4(x,z) = (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z) \\ \phi_5(y,z) = (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) \\ \phi_6(y,z) = (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z). \end{cases}$$

Para definir a noção de derivada de uma aplicação suave $f : M^m \to N^n$ entre duas variedades M e N, dado $x \in M \subset \mathbb{R}^k$, vamos associar um espaço vetorial $T_xM \subset \mathbb{R}^k$ de dimensão m, chamado espaço tangente à M em x. A aplicação df_x será uma aplicação linear de T_xM em T_yN, onde $y = f(x)$. Intuitivamente, T_xM será o $m-$espaço linear que melhor aproxima M em x, quando transladado da origem para x.

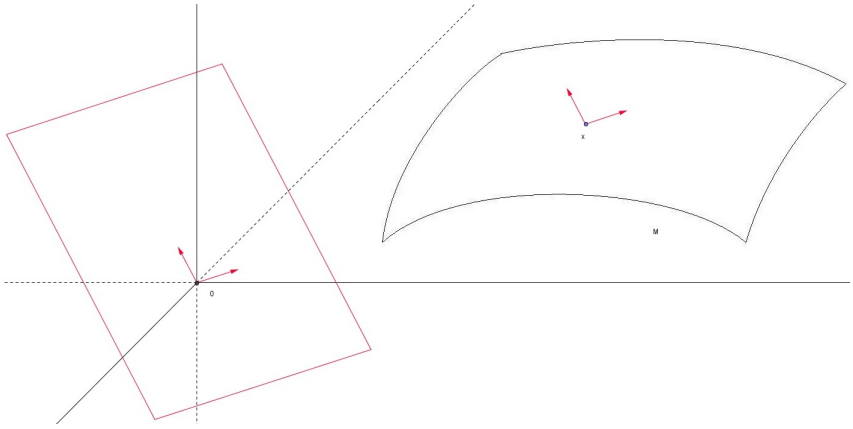

Figura 1.2: T_xM

Definição 1.5 *: O espaço vetorial tangente à superfície m-dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $p \in M$ é o conjunto T_pM formado por todos os vetores $\lambda'(0)$, onde $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ é um caminho diferenciável, com $\lambda(0) = p$. Temos que T_pM é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ com base $\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(x_0) \right\}$, onde ϕ é uma parametrização de uma vizinhança V de p, com $\phi(x_0) = p$.*

Observação 1.6 *: Seja $U \subset \mathbb{R}^k$ um aberto. Temos que $T_xU = \mathbb{R}^k$ e isto segue do fato do difeomorfismo em questão ser a aplicação identidade.*

Observação 1.7 *: Se $f : U \to V$ é uma aplicação entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$, então $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ é dada por*

$$df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \qquad x \in U,\ h \in \mathbb{R}^k.$$

Temos que $df_x(h)$ é a aplicação linear na variável h associada à matriz $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ das derivadas parciais calculadas em x.

A aplicação derivada possui as seguintes propriedades:

1. Regra da Cadeia: Se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ são suaves, com $y = f(x)$, então $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$. Isto é,

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ U & \longrightarrow & W \\ & g \circ f & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^l & \\ df_x \nearrow & & \searrow dg_y \\ \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & d(g \circ f)_x & \end{array}$$

2. Se $U \subset U' \subset \mathbb{R}^k$ são abertos, então a aplicação inclusão $i : U \to U'$ induz a aplicação identidade di_x do $\mathbb{R}^k$, $\forall x \in U$.

3. Teorema da Aplicação Inversa: Se $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é não singular, então f é um difeomorfismo de uma vizinhança aberta U de x em um aberto $f(U)$.

A condição acima não implica a injetividade global de f, como vemos no próximo exemplo:

Exemplo 1.8 *Seja $f(t) = (t^3 - t, t^2)$. Temos que $f'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$, assim,*

$$f'(t) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 = 1 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

Portanto, $f'(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Entretanto, $f(-1) = (0, 1) = f(1)$, logo f não é injetora.

Definição 1.9 *: Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ definida em uma superfície compacta M. Diz-se que $p \in M$ é um ponto crítico da função f quando para alguma (portanto, para qualquer) parametrização $\phi : V_0 \subset \mathbb{R}^m \to V \subset M$, com $\phi(x_0) = p$ e V_0 aberto em $\mathbb{R}^m$, a função $f \circ \phi : V_0 \to \mathbb{R}$ tem todas as derivadas parciais iguais a zero em $x_0 \in V_0$. Dizemos ainda que o ponto crítico p é não degenerado se a matriz Hessiana*

$$H(f) = \left(\frac{\partial^2 (f \circ \phi)}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_1 \partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_m \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_m \partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial^2 (f\circ\phi)}{\partial x_m^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

tem determinante não nulo.

Observação 1.10 *: A definição de ponto crítico não degenerado não depende da parametrização ϕ, isto é, o determinante de $H(f)$ ser diferente de zero não depende da parametrização ϕ escolhida.*

Observação 1.11 *: Como f e ϕ são aplicações C^∞, temos que $f \circ \phi$ também é C^∞. Assim, podemos aplicar o Teorema de Schwartz, que nos diz que a matriz $H(f)$ é simétrica, logo seus autovalores são reais.*

Definição 1.12 *: O número de autovalores negativos da matriz Hessiana $H(f)$ é chamado índice de Morse do ponto crítico $p \in M$.*

Os pontos críticos de índice zero são os pontos de mínimo relativo de f, enquanto os de índice m ($m = dimM$) são os pontos de máximo relativo de f. Os demais pontos são pontos de sela.

Definição 1.13 *: Seja M uma superfície compacta. Se $f : M \to \mathbb{R}$ tem apenas pontos críticos não degenerados, então f é uma função de Morse.*

Exemplo 1.14 *: Seja S^2 a esfera. Tomemos as parametrizações das calotas superior e inferior respectivamente*

$$\phi_1(x,y) = (x, y, (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}) \qquad \phi_2(x,y) = -(x, y, (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}).$$

Seja $f : S^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = z$ (função altura). Temos então que

$$f \circ \phi_1(x,y) = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f \circ \phi_2(x,y) = -(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Derivando com relação a x e a y obtemos

$$\frac{\partial(f\circ\phi_1)}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial(f\circ\phi_1)}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\frac{\partial(f\circ\phi_2)}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial(f\circ\phi_2)}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Logo, temos que os pontos críticos de f são $(x,y,z) = (0,0,1)$ para ϕ_1 e $(x,y,z) = (0,0,-1)$ para ϕ_2. Calculando as derivadas de segunda ordem de $f \circ \phi_1$, temos

$$\frac{\partial^2(f\circ\phi_1)}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{x^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial^2(f\circ\phi_1)}{\partial x\partial y}(x,y) = -\frac{yx}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2(f\circ\phi_1)}{\partial y\partial x}(x,y) = -\frac{yx}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial^2(f\circ\phi_1)}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{y^2}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Análogo para $f \circ \phi_2$, mudando apenas os sinais. Denotemos por $H_1(f)$ e $H_2(f)$ as matrizes Hessianas de f relativas às parametrizações ϕ_1 e ϕ_2 respectivamente. Assim,

$$H_1(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \qquad H_2(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Logo, o ponto crítico $(0,0,1)$ tem 2 autovalores negativos e o ponto crítico $(0,0,-1)$

não possui autovalor negativo, isto é, estes pontos têm índice de Morse 2 *e* 0 *respectivamente. Como* $dim(S^2) = 2$*, temos que* $(0, 0, 1)$ *é ponto de máximo local e* $(0, 0, -1)$ *é ponto de mínimo local.*

Teorema 1.15 *: (Função Implícita) Seja* $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *uma função suave. Suponha que* $f(x_0, y_0) = 0$ *e*

$$det \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \neq 0.$$

Então, existe um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ *e uma função suave* $F : W \to \mathbb{R}^k$ *tais que*

i. $x_0 \in W$ *e* $F(x_0) = y_0$*.*

ii. $f(x, F(x)) = 0$*,* $\forall x \in W$*.*

1.2 Orientação de Variedades

Definição 1.16 *: Uma orientação para um espaço vetorial real de dimensão* m *é uma classe de equivalência para as bases, da seguinte maneira: duas bases têm a mesma orientação se a matriz de mudança de bases tem determinante positivo, e orientação contrária se o determinante é negativo. Uma variedade suave orientada consiste de uma variedade suave* M *com a escolha de uma base para cada espaço tangente* T_xM*. Se* $m \geq 1$*, então, para cada ponto existe uma vizinhança* $U \subset M$ *que é difeomorfa a um aberto em* $\mathbb{R}^m$ *ou em* H^m *(semiespaço superior com o eixo das abscissas), vamos fixar a orientação positiva quando o difeomorfismo preserva a orientação da base canônica do* $\mathbb{R}^m$*, isto é, quando a matriz mudança de bases correspondente à transformação linear da derivada do difeomorfismo tiver determinante positivo.*

Se M é compacta e conexa, então M tem exatamente duas possíveis orientações. Caso M seja uma variedade com bordo, temos três tipos de vetores no espaço tangente em cada ponto do bordo, da seguinte forma:

- vetores tangentes ao bordo, formando um subespaço $(m-1)-$dimensional $T_x(\partial M) \subset T_xM$,
- vetores que apontam para fora, formando metade de um espaço aberto limitado por $T_x(\partial M)$,
- vetores que apontam para dentro, formando a metade complementar desse espaço.

Quando a variedade tem dimensão um, escolhemos a orientação $+1$ ou -1, dependendo se o vetor aponta para fora ou para dentro da variedade, respectivamente.

1.3 Homologia Simplicial

Definição 1.17 *: Um simplexo s de dimensão m em $\mathbb{R}^n$ $(n \geq m)$ é determinado por $m+1$ vértices $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$, tais que os vetores $a_1 - a_0,\ a_2 - a_0,\ \ldots\ , a_m - a_0$ são linearmente independentes. O simplexo $s = [a_0, ..., a_m]$ é o conjunto de todas as combinações lineares convexas $\sum_{i=1}^{m} t_i \cdot a_i$, com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$. Equivalentemente, s é o menor convexo que contém $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$.*

Exemplo 1.18 *: Em $\mathbb{R}^3$, considere os vértices $a_0 = (0,0,0)$, $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$ e $a_3 = (0,0,1)$. O simplexo $s = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ será o tetraedro, como na figura 1.3.*

Definição 1.19 *: Uma face de dimensão k de um simplexo $s = [a_0, ..., a_m]$ é um simplexo $t = [a_{i_0}, ..., a_{i_k}]$, com $a_{i_0}, ..., a_{i_k} \in \{a_0, ..., a_m\}$.*

Exemplo 1.20 *: Se tomarmos o simplexo s do Exemplo 1.18, s possui 4 faces de dimensão 0, 6 faces de dimensão 1, 4 faces de dimensão 2 e 1 face de dimensão 3.*

Definição 1.21 *: Um poliedro P em $\mathbb{R}^n$, de dimensão m $(m \leq n)$, é uma coleção finita de simplexos em $\mathbb{R}^n$, tais que*

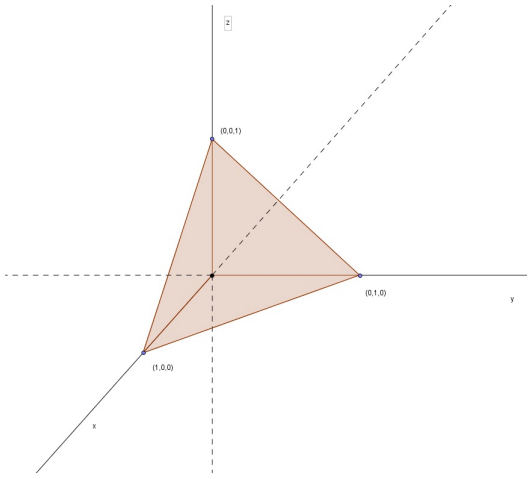

Figura 1.3: Simplexo s

i. Se s é um simplexo de P, então toda face de s é um simplexo de P

ii. Se s' e s'' são simplexos de P então ou $s' \cap s''$ é uma face em comum ou $s' \cap s''$ é vazio.

iii. A maior dimensão entre os simplexos é m.

Indicaremos por $|P|$ a reunião dos simplexos de P. Note que conhecer $|P|$ não significa conhecer os simplexos de P.

Exemplo 1.22 *: Seja s o simplexo do Exemplo* **??**. *Considere o poliedro P das faces do simplexo s. Sejam*

$$\begin{array}{rcl} s' & = & \left[(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\right] \\ s'' & = & \left[(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\right] \end{array}, \qquad \textit{simplexos em } \mathbb{R}^3$$

Defina P' como o poliedro formado pelas faces dos simplexos s' e s''. Assim, temos que $|P| = |P'|$, porém seus simplexos são diferentes.

Definição 1.23 *: Dado um poliedro P de dimensão m, para cada $i = 0, 1, ..., m$, defina*

α_i o número de simplexos de dimensão i em P. O número

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \alpha_i$$

é chamado característica de Euler-Poincaré do poliedro P.

Exemplo 1.24 *: Note que se P é um poliedro formado pelas faces de um simplexo $m-$dimensional s, então*

$$\alpha_i = \binom{m+1}{i+1}. \qquad (1)$$

Isto se deve ao fato de que, para se obter uma face de dimensão i, basta escolher $i+1$ vértices dentre os $m+1$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned} (1+(-1))^{m+1} &= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \cdot 1^{m+1-i} \cdot (-1)^i \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} = 1 - \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i+1} (-1)^i = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Portanto, de (1) e de (2), segue que $\chi(P) = 1$. Assim, se Q é o poliedro formado pelas faces de dimensão $\leq m$ de um simplexo de dimensão $m+1$, temos que $\chi(Q) = 1+(-1)^m$. De fato, se P é o poliedro formado pelas faces de dimensão $\leq m+1$ de um simplexo de dimensão $m+1$, temos que

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+2}{i+1} (-1)^i = (-1)^{m+1} + \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \binom{m+2}{i+1} (-1)^i}_{=\chi(Q)} = 1$$

$$\Rightarrow \chi(Q) = 1 - (-1)^{m+1} = 1 + (-1)^m.$$

Além disso, temos que Q é homeomorfo a esfera S^m (ver [14]) e que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico, logo $\chi(S^m) = 1+(-1)^m$. Assim, temos que $\chi(S^m) = 2$ se m é par e $\chi(S^m) = 0$ se m é ímpar.

Definição 1.25 *: Para cada $i = 0, 1, ..., m$ uma cadeia de dimensão i no poliedro*

P é um conjunto $C = \{s_1, ..., s_k\}$ cujos elementos são simplexos de dimensão i em P. Estamos considerando também a cadeia vazia, que denotaremos por 0. Para cada simplexo s de dimensão i em P, a cadeia $\{s\}$ será denotada simplesmente por s.

Definição 1.26 *: Seja $C_i = C_i(P)$ o conjunto das cadeias de dimensão i em P. Dadas duas cadeias $c_1, c_2 \in C_i$, definimos a soma $c_1 + c_2 = (c_1 \cup c_2) - (c_1 \cap c_2)$.*

Observação 1.27 *: O conjunto C_i com esta operação é um grupo abeliano. Segue daí, que C_i é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$. Deste modo, uma cadeia $C = \{s_1, ..., s_k\}$ pode ser escrita como $C = s_1 + ... + s_k$ e, assim, os simplexos de dimensão i em P formam uma base para C_i. Em particular, $dim C_i = \alpha_i$.*

Definição 1.28 *: Para cada $i = 0, 1, ..., m$ definimos o homomorfismo de bordo como a transformação linear*

$$\partial_i : \ C_i \ \rightarrow \ C_{i-1}$$

tal que, para cada simplexo $s \in C_i$, $\partial_i s$ é igual ao conjunto das faces de dimensão $i-1$ do simplexo s. Por conveniência, adotaremos que $C_{-1} = 0$, assim, $\partial_0 = 0$.

Note que se $s \in C_i$ então cada face de dimensão $i-2$ está contida exatamente em duas faces de dimensão $i-1$, o que nos dá

$$\partial_{i-1} \circ \partial_i(s) = 0, \qquad (1)$$

visto que o inverso de cada elemento é ele próprio.

Sejam $Z_i \subset C_i$ o núcleo de ∂_i e $B_i \subset C_i$ a imagem de ∂_{i+1}. Os elementos em Z_i são chamados *ciclos* de dimensão i e os elementos em B_i são chamados *bordos* de dimensão i. A relação fundamental $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ nos diz que $B_i \subset Z_i$, isto é, todo bordo é um ciclo. Sejam $z_i = dim Z_i$ e $b_i = dim B_i$. O Teorema do Núcleo e Imagem nos diz que a dimensão do domínio de uma transformação linear é igual a dimensão do núcleo mais a dimensão da imagem, logo, $\alpha_i = z_i + b_{i-1}$ (note que $b_m = b_{-1} = 0$).

Definição 1.29 *O espaço vetorial quociente*

$$H_i(P) = \frac{Z_i}{B_i}$$

chama-se i-ésimo grupo de homologia do poliedro P e a dimensão desse espaço, $\beta_i = z_i - b_i$*, é chamado i-ésimo número de Betti módulo* 2 *do poliedro P.*

Teorema 1.30 *: (Poincaré) Sejam* $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ *os números de Betti do poliedro P, então vale a igualdade:*

$$\chi(P) = \beta_0 - \beta_1 + ... + (-1)^m \cdot \beta_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \beta_i.$$

Demonstração:

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \alpha_i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^m \cdot (z_i + b_{i-1}) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot (z_i - b_i) = \sum_{m}^{i=0} (-1)^i \cdot \beta_i,$$

donde a terceira igualdade ocorre do fato de que $b_m = b_{-1} = 0$*.* ■

Desigualdades de Morse

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse. Para cada $i = 1, ..., m$ $(m = dim(M))$ sejam M_i os números de pontos críticos de f com índice i e β_i o número de Betti de dimensão i de M. Então, as desigualdades de Morse são as seguintes

$$\beta_i - \beta_{i-1} + ... \pm \beta_0 \leq M_i - M_{i-1} + ... \pm M_0$$

$$\beta_m - \beta_{m-1} + ... \pm \beta_0 = M_m - M_{m-1} + ... \pm M_0 \qquad (*)$$

Assim, da igualdade acima, obtemos que

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i M_i = \chi(M).$$

Note que, se somarmos as duas primeiras desigualdades, obtemos

$$+\begin{cases} \beta_1 - \beta_0 \leq M_1 - M_0 \\ \beta_2 - \beta_1 + \beta_0 \leq M_2 - M_1 + M_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta_2 \leq M_2.$$

Procedendo deste modo, somando a i−ésima desigualdade de Morse com a anterior, obtemos

$$+\begin{cases} \beta_i - \beta_{i-1} + ... \pm \beta_0 \leq M_i - M_{i-1} + ... \pm M_0 \\ \beta_{i+1} - \beta_i + ... \mp \beta_0 \leq M_{i+1} - M_i + ... \mp M_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \beta_{i+1} \leq M_{i+1}.$$

Temos que a igualdade $(*)$ decorre do Teorema de Poincaré-Hopf 2.22. De fato, se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse, pode-se provar que ∇f é um campo de vetores tangentes à M cujas singularidades são os pontos críticos de f. Em cada ponto crítico, o índice da singularidade é igual a $(-1)^i$, onde i é o índice de Morse do ponto crítico p.

1.4 Introdução à Teoria de Singularidades

Nosso objetivo é estudar aplicações $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, na vizinhança de um ponto singular.

Definição 1.31 *: Sejam $f_1 : U_1 \to \mathbb{K}^p$, $f_2 : U_2 \to \mathbb{K}^p$ e $x \in U_1 \cap U_2 \subset \mathbb{K}^n$, com U_1 e U_2 abertos. Dizemos que $f_1 \backsim f_2$ (f_1 está relacionada com f_2), se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{K}^n$ com $x \in U$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$.*

Observação 1.32 *A relação $\backsim$ é uma relação de equivalência pois*

i. $f_1 \backsim f_1$;

ii. $f_1 \backsim f_2 \Rightarrow f_2 \backsim f_1$;

iii. $f_1 \backsim f_2$ *e* $f_2 \backsim f_3 \Rightarrow f_1 \backsim f_3$.

Denominamos germe suave (analítico) de uma aplicação de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^p$ no ponto x à classe de equivalência definida acima. É usual adotarmos a notação $f : (\mathbb{K}^n, x) \to (\mathbb{K}^p, y)$ para o germe definido acima, além disso, geralmente chamamos $(\mathbb{K}^n, x)$ de "fonte"e $(\mathbb{K}^p, y)$ de "meta".

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, indicaremos por $\varepsilon_{n,p}$ o conjunto de todos os germes $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$. Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, indicaremos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o mesmo conjunto. No caso $p = 1$ é comum denotarmos tais conjuntos apenas por ε_n e $\mathcal{O}_n$.

Definição 1.33 *: Vamos denotar por $\mathfrak{M}_n$ o subconjunto de ε_n de todos os germes que tem meta* 0*.*

Definição 1.34 *: Um ideal I de um anel $(A, +, \cdot)$ comutativo com identidade é dito maximal se $\forall B \subset A$ ideal, com $I \subset B \subset A$, têm-se que $B = I$ ou $B = A$, e além disso, $I \neq A$.*

Proposição 1.35 *: O ideal $\mathfrak{M}_n$ é o único ideal maximal de ε_n.*

Demonstração: Suponha que exista $I \subset \varepsilon_n$ tal que $\mathfrak{M}_n \subsetneq I \subset \varepsilon_n$. Logo, existe algum $f \in I$ tal que f é invertível. Portanto, I não é maximal pois $I = \varepsilon_n$. ■

Definição 1.36 *: Um anel local é um anel com um único ideal maximal.*

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [6]

Proposição 1.37 *: O ideal $\mathfrak{M}_n^k$ é gerado por todos os monômios nas variáveis $x_1, ..., x_n$ de grau igual a k.*

Proposição 1.38 *(Lema de Nakayama): Seja ε um anel comutativo com identidade, e seja $\mathfrak{M}$ um ideal em ε com a propriedade de que $1 + x$ é invertível em ε para todo $x \in \mathfrak{M}$. Além disso, seja M um ε-módulo e $A, B \subset M$ ε-submódulos com A finitamente gerado. Se $A \subset B + \mathfrak{M}A$, então $A \subset B$.*

Demonstração: Sejam $a_1, ..., a_t$ geradores de A. Pela hipótese podemos encontrar $b_1, ..., b_t \in B$ e $\lambda_{ij} \in \mathfrak{M}$ com $1 \leq i \leq t$ tais que

$$a_i = b_i + \lambda_{i1} \cdot a_1 + ... + \lambda_{it} a_t. \qquad (1)$$

Sendo $\Lambda = (\lambda_{ij})$ uma matriz $t \times t$ e denotando $a = (a_1, ..., a_t)$ e $b = (b_1, ..., b_t)$, podemos reescrever (1) como

$$(I - \Lambda)a = b,$$

onde I é a matriz identidade $t \times t$ sobre o anel ε. Afim de que possamos escrever a_i em termos de b_j com $1 \leq j \leq t$ é suficiente mostrar que $(I - \Lambda)$ é uma matriz invertível. Para isto basta notar que o determinante de $(I - \Lambda)$ é $1 - \lambda$ onde λ é uma soma de elementos em $\mathfrak{M}$. Segue da hipótese que $1 - \lambda \neq 0$, de onde concluímos o resultado. ■

Definição 1.39 *: Sejam $f \in \mathcal{O}_n$ um germe de função analítica com singularidade isolada em 0 e $J(f)$ o ideal Jacobiano de f. Definimos o número de Milnor μ do germe f por*

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}.$$

As vezes chamaremos o número de Milnor μ de codimensão de f e denotaremos $cod(f)$. Dizemos ainda que a codimensão de f é finita se $cod(f)$ é finito, do contrário, dizemos que a codimensão de f é infinita.

Mais geralmente, seja M um $\mathcal{O}$- módulo e $I \subset M$ um $\mathcal{O}$-submódulo. Dizemos que I tem codimensão finita se o espaço quociente $\frac{M}{I}$ tem dimensão finita.

Proposição 1.40 *: Sejam M um $\mathcal{O}$-módulo com base finita e $I \subset M$ um $\mathcal{O}$-submódulo. Uma condição necessária e suficiente para que I tenha codimensão finita em M é que exista $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{M}^k M \subset I$.*

Definição 1.41 *Suponha o espaço quociente $\frac{I+\mathfrak{M}^k M}{I+\mathfrak{M}^{k+1} M}$ de codimensão finita, definimos então*

$$cod_k I = dim \frac{I + \mathfrak{M}^k M}{I + \mathfrak{M}^{k+1} M}, \quad para\ k = 1, 2, ...$$

Proposição 1.42 *: Sejam M um $\mathcal{O}$-módulo com base finita e $I \subset M$ um $\mathcal{O}$-submódulo. Uma condição necessária e suficiente para que $I \subset M$ tenha codimensão finita é que para todo $k \geq 1$ tenha-se $cod_k I$ finita e, neste caso,*

$$codI = cod_0 I + cod_1 I + ...$$

Podemos então calcular alguns exemplos de números de Milnor utilizando os resultados enunciados acima.

Exemplo 1.43 *: Considere o germe $f(x) = x^{s+1}$ com $s \geq 1$. Temos que $Jf = \langle x^s \rangle$. Para cada $0 \leq k \leq s-1$, temos apenas o monômio x^k. Então*

$$\begin{aligned} cod_0 f &= 1 \\ cod_1 f &= dim \tfrac{Jf+\mathfrak{M}_n^1}{Jf+\mathfrak{M}_n^2} = 1 \\ cod_2 f &= dim \tfrac{Jf+\mathfrak{M}_n^2}{Jf+\mathfrak{M}_n^3} = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto $cod(f) = s$.

Exemplo 1.44 *: Seja $f(x,y) = x^2y + y^4$. Temos que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 4y^3,$$

que se anulam apenas na origem. Vamos computar a codimensão de f. Como $\mathfrak{M}_2^4 \subset Jf + \mathfrak{M}_2^5$ temos que $cod_j f = 0$, $\forall j \geq 4$. Logo, nos resta calcular apenas $cod_0 f$, $cod_1 f$, $cod_2 f$ e $cod_3 f$. Temos

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & x & y & \\ & & x^2 & xy & y^2 \\ & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 \\ x^4 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & y^4 \\ x^5 & x^4y & x^3y^2 & x^2y^3 & xy^4 \quad y^5 \end{array}$$

Assim, $cod_0 f = 1$ *pois a constante não pode ser escrita como combinação linear de elementos em df com elementos de* $\mathfrak{M}_2^1$. *Temos* $cod_1 f = 2$ *pois* x *e* y *não podem ser escritos como combinação linear de elementos em df com elementos de* $\mathfrak{M}_2^2$. *Temos* $cod_2 f = 1$ *pois* $x^2 = \frac{\partial f}{\partial y} - 4y^3$, *onde* $-4y^3 \in \mathfrak{M}_2^3$ *e* $xy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$ *mas* y^2 *não pode ser escrito como combinação linear dos elementos em* Jf *com os elementos em* $\mathfrak{M}_2^3$. *Por fim, temos* $x^3 = x\frac{\partial f}{\partial y} - 4y^3 x$, $x^2 y = \frac{x}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $xy^2 = \frac{y}{2}\frac{\partial f}{\partial x}$ *mas* y^3 *não pode ser escrito como combinação linear dos elementos em* Jf *com os elementos em* $\mathfrak{M}_2^4$. *Portanto, pela Proposição 1.40 temos*

$$cod(f) = cod_0(f) + cod_1(f) + cod_2(f) + cod_3(f) + 0 + 0 + ... = 5.$$

Exemplo 1.45 *: Da mesma forma podemos computar a codimensão de* $f(x, y) = x^3 + xy^3$ *que é* 7. *Neste caso* $cod_j(f) = 0$, $\forall j \geq 5$.

Capítulo

2

Índices de Campos de Vetores: Caso Suave

Neste capítulo veremos a relação do índice de Poincaré-Hopf com a característica de Euler de uma variedade suave. Tal relação é dada pelo teorema de Poincaré-Hopf. Para isto será necessário vermos alguns resultados e definições sobre o grau de uma aplicação.

2.1 Grau Módulo 2 de uma Aplicação

Dado $X \subset \mathbb{R}^k$, seja $X \times [0,1]$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{k+1}$ de todos os pontos (x,t), com $x \in X$ e $t \in [0,1]$. Duas aplicações

$$f, g : X \to Y$$

são suavemente homotópicas (e denotaremos por $f \sim g$) se existe uma aplicação suave $F : X \times [0,1] \to Y$ com

$$F(x,0) = f(x) \quad e \quad F(x,1) = g(x)$$

para todo $x \in X$. Esta aplicação F é chamada de homotopia suave entre f e g.

Note que a relação de homotopia é uma relação de equivalência. De fato, a única

propriedade não trivial a ser demonstrada é a transitividade, e esta se procede da seguinte maneira:

Considere a função

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0, & se \quad \tau \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{\tau}}, & se \quad \tau > 0 \end{cases}$$

Defina

$$\phi(t) = \frac{\lambda\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\lambda\left(t - \frac{1}{3}\right) + \lambda\left(\frac{2}{3} - t\right)}.$$

Deste modo, se F é uma homotopia suave entre f e g, temos que $G(x,t) = F(x, \phi(t))$ é uma homotopia suave dada por

$$G(x,t) = \begin{cases} f(x), & se \quad t \leq \frac{1}{3} \\ g(x), & se \quad t \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Deste modo, sejam G e H homotopias suaves entre f e g e entre g e h, definidas como acima, respectivamente. Defina $I(x,t) = G(x,2t)$ se $t \leq \frac{1}{2}$ e $I(x,t) = H(x,2t-1)$ se $t > \frac{1}{2}$. A aplicação I será a homotopia suave entre as aplicações f e h.

Definição 2.1 *: Um difeomorfismo f é dito suavemente isotópico a g se existe uma homotopia suave F entre f e g e, além disso, a aplicação $x \mapsto F(x,t)$ é um difeomorfismo para cada $t \in [0,1]$.*

Proposição 2.2 *: (Lema da Homotopia) Sejam $f, g : M \to N$ aplicações suavemente homotópicas entre variedades de mesma dimensão, com M compacta e sem bordo. Se $y \in N$ é um valor regular de f e g, então*

$$\sharp f^{-1}(y) = \sharp g^{-1}(y) (mod 2).$$

Demonstração: Seja $F : M \times [0,1] \to N$ uma homotopia suave entre as aplicações f e g. Primeiramente, suponha que y seja um valor regular de F. Então $F^{-1}(y)$ é uma

1−variedade compacta, suave e com bordo, dada por

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1).$$

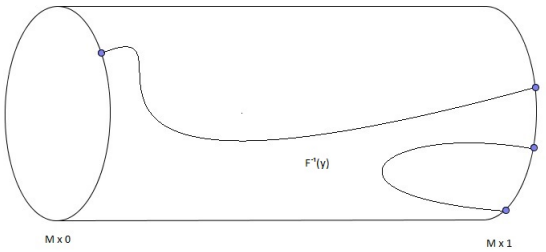

Figura 2.1: $F^{-1}(y)$

Então o número total de pontos de $F^{-1}(y)$ é igual a

$$\sharp f^{-1}(y) + \sharp g^{-1}(y).$$

Uma 1−variedade compacta tem sempre um número par de pontos de bordo (Ver [20]). Então $\sharp f^{-1}(y) + \sharp g^{-1}(y)$ é par, logo

$$\sharp f^{-1}(y) = \sharp g^{-1}(y)(mod 2).$$

Agora suponha que y não seja um valor regular de F. Localmente, temos que $\sharp f^{-1}(y)$ e $\sharp g^{-1}(y)$ são funções localmente constantes (em uma vizinhança sem pontos críticos). Assim, existe uma vizinhança $V_1 \subset N$ de y, de valores regulares de f, tal que

$$\sharp f^{-1}(y')mod(2) = \sharp f^{-1}(y)mod(2), \quad \forall y' \in V_1.$$

Da mesma forma, seja $V_2 \subset N$ uma vizinhança de y de valores regulares de g, tal que

$$\sharp g^{-1}(y')mod(2) = \sharp g^{-1}(y)mod(2), \quad \forall y' \in V_2.$$

Seja $V = V_1 \cap V_2$ e tome $z \in V$ um valor regular de F. Então

$$\sharp f^{-1}(y) mod(2) = \sharp f^{-1}(z) mod(2) = \sharp g^{-1}(z) mod(2) = \sharp g^{-1}(y) mod(2).$$

■

Teorema 2.3 *: (Lema da Homogeneidade) Sejam y e z pontos interiores arbitrários de uma variedade N suave e conexa. Então existe um difeomorfismo $h : N \to N$ que é isotópico a identidade e leva y em z.*

Demonstração: Suponha primeiramente $N = S^n$. Neste caso basta escolher h rotação que leva y em z. Para o caso geral, vamos construir uma isotopia de $\mathbb{R}^n$ nele próprio que deixa todos os pontos fora da bola unitária fixos e desliza a origem para um ponto dentro da bola unitária.

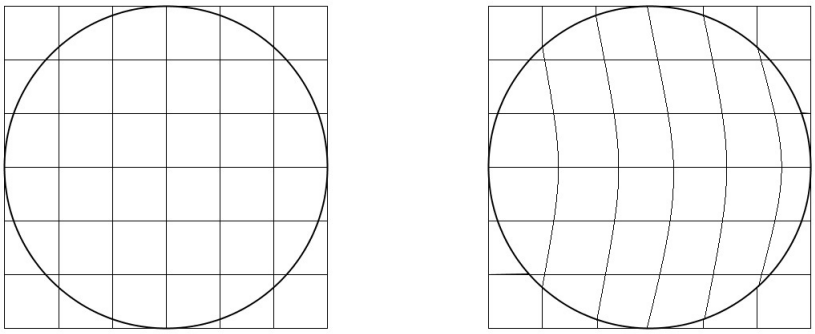

Figura 2.2: Homotopia de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$

Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave que satisfaz

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, & se \quad ||x|| < 1 \\ \phi(x) = 0, & se \quad ||x|| \geq 1. \end{cases}$$

Por exemplo a função $\phi(x) = \lambda(1 - ||x||^2)$, onde $\lambda(t) = 0$, para $t \leq 0$ e $\lambda(t) = e^{-t^{-1}}$, para $t > 0$. Dado um vetor fixado $c \in S^{n-1}$, considere o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx_i}{dt} = c_i \phi(x_1, ..., x_n), \qquad i = 1, ..., n.$$

Para qualquer $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ estas equações tem uma solução única $x = x(t)$, definida em $\mathbb{R}$, satisfazendo a condição inicial $x(0) = \overline{x}$. Vamos usar a notação $x(t) = F_t(\overline{x})$ para tal solução. Então, temos

i. $F_t(\overline{x})$ está definida para todo t e F depende suavemente de t e $\overline{x}$,

ii. $F_0(\overline{x}) = \overline{x}$,

iii. $F_{s+t}(\overline{x}) = F_s \circ F_t(\overline{x})$.

Assim, cada F_t é um difeomorfismo do $\mathbb{R}^n$ nele próprio. Deixando t variar, temos que cada F_t é isotópico à identidade por uma isotopia que deixa os pontos fora da bola unitária fixos. Com uma escolha apropriada de c, temos que F_t deve levar a origem em um ponto interior da bola unitária. Como a isotopia é uma relação de equivalência e, localmente, um ponto sobre N possui uma vizinhança que é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, temos que o resultado está provado. ■

Teorema 2.4 *: Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave, com N conexa e M compacta e sem bordo. Se y e z são valores regulares de f, então*

$$\sharp f^{-1}(y) \equiv \sharp f^{-1}(z)(mod 2).$$

Demonstração: Dados dois valores regulares y e z de f, considere o difeomorfismo h de N em N que leva y em z. Temos que z é um valor regular de $h \circ f$ e, além disso, $h \circ f$ é homotópico à f. Assim, pelo Lema da Isotopia, temos

$$\sharp (h \circ f)^{-1}(z) = \sharp f^{-1}(z)(mod 2).$$

Além disso,

$$(h \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(h^{-1}(z)) = f^{-1}(y).$$

Portanto,

$$\sharp f^{-1}(y) \equiv \sharp f^{-1}(z)(mod 2).$$

■

Sejam M e N variedades $n-$dimensionais orientadas sem bordo, e seja $f : M \to N$ uma aplicação suave. Se M é compacta e N é conexa, então o grau de f é definido como a seguir:

Seja $x \in M$ um ponto regular de f, assim, $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo linear entre dois espaço vetoriais. Defina o sinal de df_x (denotaremos por $sign(df_x)$) como $+1$ ou -1 de acordo com df_x preservar ou não a orientação. Para qualquer valor regular $y \in N$, defina

$$deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sign(df_x).$$

Para os resultados abaixo, vamos considerar M o bordo de uma variedade compacta e orientada X, com a orientação induzida por X, isto é, escolhemos uma base para os espaço tangente ao bordo e um vetor que aponta para fora, como feito seção 1.2.

Lema 2.5 *: Se $f : M \to N$ pode ser estendida a uma aplicação $F : X \to N$, então $deg(f; y) = 0$ para todo valor regular $y \in N$.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que y seja um valor regular de F. A variedade compacta $1-$dimensional $F^{-1}(y)$ é a união finita de círculos e arcos, sendo os pontos do bordo em M e nos arcos. Seja $A \subset F^{-1}(y)$ um destes arcos, com $\partial A = \{a\} \cup \{b\}$. Vamos mostrar que a soma dos sinais de f em A é zero.

As orientações de X e N determinam uma orientação para A da seguinte maneira: Dado $x \in A$, seja $(v_1, ..., v_{n+1})$ uma base positivamente orientada para T_xX, com v_1 tangente a A. Então v_1 determina a orientação que queremos para T_xA se, e somente se, dF_x leva $(v_2, ..., v_{n+1})$ em um base positivamente orientada de T_yN. Seja $v_1(x)$ o vetor unitário positivamente orientado em x, tangente a A. Temos que v_1 é uma função suave e aponta para fora em um dos pontos do bordo de A, digamos b, e aponta para dentro no outro ponto do bordo de A, digamos a. Disto segue que

$$sign(df_a) = -1 \qquad sign(df_b) = +1.$$

Portanto, fazendo a soma em todos os arcos, temos que $deg(f;y) = 0$. Pelo mesmo argumento que usamos anteriormente, se y não é um valor regular de F, tomamos uma vizinhança de y de valores regulares de f, basta escolher um valor regular de F e teremos o resultado.

■

Lema 2.6 *: Se y é um valor regular de $f, g : M \to N$, com $f \sim g$ e $M = \partial X$, então $deg(g;y) = deg(f;y)$.*

Demonstração: A variedade $[0,1] \times M$ pode ser orientada como um produto, e terá como bordo $1 \times M$, orientado positivamente, e $0 \times M$, orientado negativamente. Assim, o grau de $F|_{\partial([0,1]\times M)}$ em um valor regular y é igual a diferença

$$deg(g;y) - deg(f;y),$$

a qual deve ser zero, pelo lema anterior.

■

Teorema 2.7 *: O inteiro $deg(f;y)$ não depende da escolha do valor regular y.*

Demonstração: Sejam y e z dois valores regulares de f. Seja $h : N \to N$ um difeomorfismo levando y em z, isotópico a identidade. Então h preserva orientação e

$$deg(f;y) = deg(h \circ f; h(y)) = deg(f;z).$$

De fato,

$$\begin{aligned} deg(h \circ f; h(y)) &= \sum_{x \in ((h\circ f)^{-1}(y))} sign(d(h \circ f)_{h(y)}) = \sum_{x \in f^{-1}(z)} sign(dh_{f(z)} \cdot df_z) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(z)} sign(df_z) \end{aligned}$$

pois $sign(dh_{f(z)}) = 1$. Portanto, pelo Lema 2.6, segue o resultado desejado.

■

Teorema 2.8 *: Se f é suavemente homotópica a g, então $deg(f) = deg(g)$.*

Demonstração: *Basta aplicar o Lema 2.6, juntamente com o Teorema anterior, e o resultado estará provado.* ■

Exemplo 2.9 *: Considere sobre a esfera a reflexão*

$$r_i(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, ..., x_{n+1}),$$

que inverte a orientação. A aplicação antípoda é a composição de $n+1$ reflexões, $r_1 \circ r_2 \circ ... \circ r_{n+1}$, tendo assim grau $(-1)^{n+1}$.

Note que sobre a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{k+1}$, $v(x)$ ser um campo tangente é equivalente a condição $v(x) \cdot x = 0$, para todo $x \in S^n$, usando o produto interno canônico. Se $v(x)$ é não nulo para todo x, então podemos supor $v(x) \cdot v(x) = 1$, $\forall x \in S^n$, bastando tomar $\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$. Sendo assim, podemos ver v como uma aplicação suave de S^n nela própria.

Agora, defina a homotopia suave

$$\begin{aligned} F : S^n \times [0, \pi] &\to S^n \\ (x, \theta) &\mapsto x \cdot cos(\theta) + v(x) \cdot sen(\theta). \end{aligned}$$

Após cálculos elementares, obtemos

$$F(x, \theta) \cdot F(x, \theta) = 1, \qquad F(x, 0) = x \quad e \quad F(x, \pi) = -x.$$

Logo, caso n seja ímpar, a aplicação antípoda é homotópica a identidade. Por outro lado, se n é par isto não acontece, visto que a aplicação antípoda inverte a orientação.

2.2 Índices de Campos de Vetores e o Teorema de Poincaré-Hopf

Definição 2.10 *: Um campo de vetores tangentes à superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $v : M \to \mathbb{R}^n$ tal que $v(p) \in T_pM$, $\forall p \in M$. Uma singularidade do campo v é um ponto $p \in M$ tal que $v(p) = 0 \in T_pM$. Uma singularidade é isolada se existe vizinhança em M tal que esta é a única singularidade nesta vizinhança.*

Consideremos agora um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e campo de vetores $v : U \to \mathbb{R}^m$, com um zero isolado em $z \in U$. A função

$$\overline{v}(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$$

leva uma pequena esfera centrada em z na esfera unitária. O grau de Brouwer desta aplicação é chamado de índice ι do campo v no zero z.

Exemplo 2.11 *: Em $\mathbb{R}^2$, ao fazermos um pequeno círculo em torno de z, podemos contar o "número de voltas"(no sentido anti-horário contamos positivamente e no sentido horário negativamente) que o campo tangente a este círculo faz. Este número de voltas será o índice ι do zero z, por exemplo, veja as figuras 2.3, 2.4, 2.5 e 2.6.*

Vamos provar que esta definição de índice é invariante por difeomorfismos de U.

Definição 2.12 *: Os campos de vetores v em M e v' em N são equivalentes se existe aplicação f se a derivada df_x leva $v(x)$ em $v'(x)$, para cada $x \in M$. Se f é um difeomorfismo, então v' é unicamente determinado por v. Em particular,*

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

Lema 2.13 *: Suponha que o campo de vetores v em U seja correspondente ao campo $v' = df \circ v \circ f^{-1}$ em U', via $f : U \to U'$. Então o índice de v em um zero isolado z é*

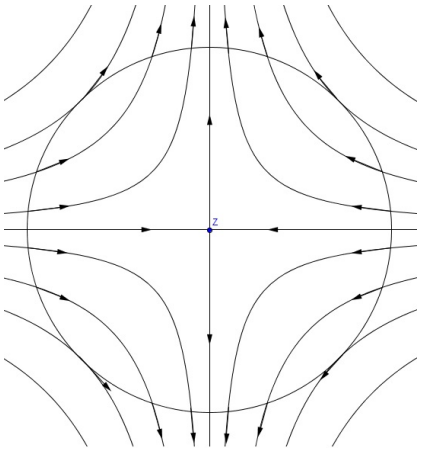

Figura 2.3: Índice -1

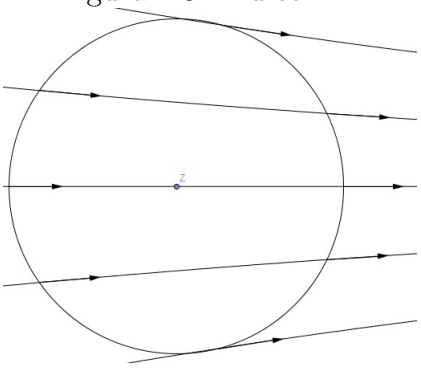

Figura 2.4: Índice 0

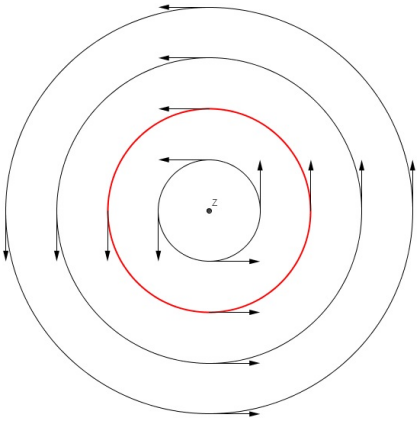

Figura 2.5: Índice 1

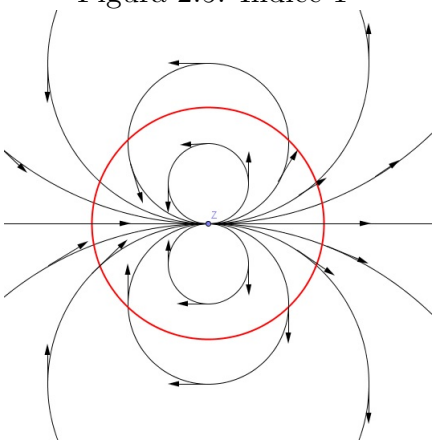

Figura 2.6: Índice 2

igual ao índice de v' em $f(z)$.

Demonstração: Podemos assumir que $z = f(z) = 0$, pois basta tomarmos translações, que são difeomorfismos. Podemos também tomar U convexo, pois na vizinhança do ponto basta tomar uma pequena bola. Se f preserva orientação, vamos construir uma família a $1-$parâmetro de mergulhos $f_t : U \to \mathbb{R}^m$, com $f_0 = id$, $f_1 = f$ e $f_t(0) = 0$, para todo $t \in [0, 1]$. Vamos considerar v_t o campo de vetores $df_t \circ v \circ {f_t}^{-1}$ em $f_t(U)$, correspondente a v em U. Este campo de vetores está bem definido (visto que df_t está definida no espaço tangente a U) e é não nulo em uma pequena esfera centrada em 0 (pois $z = 0$ é um zero isolado de f). Assim, o índice de $v = v_0$ em 0 deve ser igual ao índice de $v' = v_1$ em 0, e o lema está provado no caso em que o difeomorfismo preserva

a orientação.

No caso do difeomorfismo reverter a orientação, basta considerar o caso da reflexão ρ. Então

$$v' = \rho \circ v \circ \rho^{-1},$$

assim, a função associada $\overline{v}'(x) = \frac{v'(x)}{||v'(x)||}$, definida da $\varepsilon-$esfera, satisfaz

$$\overline{v}' = \rho \circ \overline{v} \circ \rho^{-1},$$

voltando ao caso anterior. Deste modo, temos que o grau de $\overline{v}'$ é igual o grau de $\overline{v}$. ■

Lema 2.14 *: Qualquer difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ que preserva orientação é suavemente isotópico à identidade.*

Demonstração: Podemos novamente assumir que $f(0) = 0$. Defina

$$F : \mathbb{R}^m \times [0,1] \to \mathbb{R}^m, \quad \text{por} \quad F(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(tx)}{t}, & se \quad 0 < t \leq 1, \\ df_0(x), & se \quad t = 0 \end{cases}$$

Lema 2.15 *: (Lema de Hadamard) Toda função f suave em torno de um ponto z pode ser representada da forma*

$$f(x) = f(z) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i) g_i(x),$$

com as aplicações g_i suaves, $\forall i = 1, ..., n$.

Note que, pelo Lema de Hadamard (a demonstração pode ser encontrada em [21]), podemos escrever

$$f(x) = x_1 g_1(x) + ... + x_m g_m(x).$$

Deste modo, temos

$$F(x,t) = x_1 g_1(tx) + ... + x_m g_m(tx).$$

Então, f é isotópica à aplicação linear df_0, que é isotópica à identidade.

■

Definição 2.16 *: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ uma $m-$variedade compacta com bordo. A aplicação de Gauss*

$$g : \partial X \to S^{m-1}$$

associa a cada ponto $x \in \partial X$, um vetor unitário normal que aponta para fora da variedade em x.

Lema 2.17 *: (Hopf) Se $v : X \to \mathbb{R}^m$ é um campo de vetores suaves com zeros isolados, e se v aponta para fora de X ao longo do bordo, então a soma dos índices sobre as singularidades do campo $\sum \iota$ é igual ao grau da aplicação de Gauss de ∂X em S^{m-1}. Em particular, ι não depende da escolha de v.*

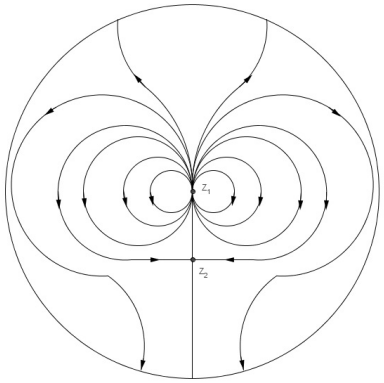

Figura 2.7: Índices 2 em z_1 e -1 em z_2, soma dos índices igual a 1

Demonstração: Removendo uma $\varepsilon-$bola de cada zero, obtemos uma nova variedade com bordo (note que o número de singularidades é finito, visto que a variedade é compacta). A aplicação $\overline{v} = \frac{v(x)}{||v(x)||}$ leva esta variedade na esfera S^{m-1}. Então, a soma dos graus de $\overline{v}$ é igual a zero. Temos que $\overline{v}|_{\partial X}$ é homotópico a g, ver [15], pg. 507. Além disso, temos que os graus nas outras componentes do bordo contribuem com valor negativo, pois têm a orientação oposta, no sentido que um vetor que chega na

singularidade, está saindo naquele bordo e vice-versa. Deste modo, temos

$$deg(g) - \sum \iota = 0.$$

■

Definição 2.18 *: O campo de vetores v é não degenerado em um zero z se a transformação linear $dv_z : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é não singular.*

Neste caso, usando o teorema da função inversa, concluímos que z é um zero isolado.

Lema 2.19 *: O índice de v em um zero não degenerado é igual a $+1$, se $det(dv_z) > 0$ e -1, se $det(dv_z) < 0$.*

Demonstração: Podemos ver o campo v como um difeomorfismo de alguma vizinhança convexa U_0 de z em $\mathbb{R}^m$. Podemos também assumir, sem perda de generalidade, que $z = 0$. Se v preserva a orientação, podemos deformar $v|_{U_0}$ na identidade sem novos zeros, utilizando os Lemas 2.13 e 2.14. Então o índice certamente é igual a 1. Por outro lado, se v inverte a orientação, temos que $v|_{U_0}$ pode ser deformado em uma reflexão, donde $\iota = -1$. ■

Mais geralmente, considere um zero z de um campo vetorial w em uma variedade $M \subset \mathbb{R}^k$. Considerando w como uma aplicação de M em $\mathbb{R}^k$, a derivada $dw_z : TM_z \to \mathbb{R}^k$ está bem definida.

Lema 2.20 *: A derivada dw_z leva TM_z no subespaço $TM_z \subset \mathbb{R}^k$, e pode ser considerada como transformação linear de TM_z nele próprio. Se esta transformação linear tem determinante $D \neq 0$ então z é um zero isolado de w com índice $+1$ ou -1 respectivamente quando D é positivo ou negativo.*

Demonstração: Seja $h : U \to M$ uma parametrização de alguma vizinhança de z. Seja e^i o $i-$ésimo vetor da base de zR^m, e seja

$$t^i = dh_u(e^i) = \frac{\partial h}{\partial u_i},$$

então os vetores $t^1, ..., t^m$ formam uma base para o espaço tangente $TM_{h(u)}$. Devemos calcular a imagem de $t^i = t^i(u)$, sobre a transformação linear $dw_{h(u)}$. Primeiramente, note que

$$dw_{h(u)}(t^i) = d(w \circ h)_u(e^i) = \frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i}. \qquad (1)$$

Seja $v = \sum v_i e^i$ o vetor em U que corresponde ao campo w em M. Por definição, $v = dh^{-1} \circ w \circ h$, tal que

$$w(h(u)) = dh_u(v) \sum v_i t^i.$$

Assim,

$$\frac{\partial w(h(u))}{\partial u_i} = \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_i} \right) t^i + \sum_i v_i (\frac{\partial t^i}{\partial u_i}). \qquad (2)$$

Por (1), (2) e calculando no zero $h^{-1}(z)$ de v, nós obtemos a fórmula

$$dw_z(t^i) = \sum_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_i} \right) t^i. \qquad (3)$$

Então dw_z leva TM_z nele mesmo e o determinante D desta transformação linear $TM_z \to TM_z$ é igual ao determinante da matriz $\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_i} \right)$. Aplicando o lema anterior, a prova está completa.

■

Considere $M \subset \mathbb{R}^k$ uma variedade suave, compacta sem bordo. Seja N_ε a $\varepsilon-$vizinhança fechada de M, isto é

$$N_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^k; ||x - y|| \leq \varepsilon, \text{ para algum } y \in M \right\}$$

Teorema 2.21 *: Para qualquer campo de vetores v em M com apenas zeros não degenerados. A soma dos índices $\sum \iota$ é igual ao grau da aplicação de Gauss*

$$g : \partial N_\varepsilon \to S^{k-1}.$$

Em particular, esta soma não depende da escolha do campo v.

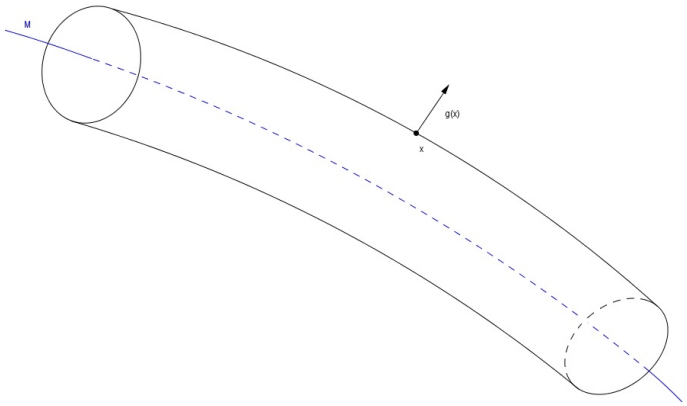

Figura 2.8: ε vizinhança tubular

Demonstração: Para $x \in N_\varepsilon$, seja $r(x) \in M$ o ponto mais próximo de x. Note que o vetor $x - r(x)$ é perpendicular ao espaço tangente de M em $r(x)$, pois do contrário $r(x)$ não será o ponto mais próximo em M. Se ε é suficientemente pequeno, a função $r(x)$ está bem definida e é suave. Considere a função distância ao quadrado

$$\phi(x) = ||x - r(x)||^2.$$

Agora, note que

$$\nabla\phi(x) = 2(x - r(x)) + 2r'(x) \cdot (x - r(x)).$$

Logo, como $r'(x)$ é perpendicular a $x - r(x)$, temos que $\nabla\phi(x) = 2(x - r(x))$. Assim, para cada ponto x da superfície de nível $\partial N_\varepsilon = \phi^{-1}(\varepsilon^2)$, o vetor unitário que aponta para fora é dado por

$$g(x) = \frac{\nabla\phi}{||\nabla\phi||} = \frac{x - r(x)}{\varepsilon}.$$

Estenda v a um campo w na vizinhança de N_ε fazendo

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

Temos que w aponta para fora nos pontos do bordo, visto que o produto interno

$w(x) \cdot g(x)$ é igual a $\varepsilon > 0$. Note que w pode se anular apenas nos zeros de v em M, e isto decorre do fato que $x - r(x)$ e $v(r(x))$ são ortogonais entre si. Computando a derivada de w em um zero $z \in M$, temos que

$$\begin{cases} dw_z(h) &= dv_z(h) \quad se \quad h \in TM_z \\ dw_z(h) &= h \qquad\quad se \quad h \in TM_z^{\perp} \end{cases}$$

Então, o determinante de dw_z é igual ao determinante de dv_z. Assim, o índice de w em um zero z é igual ao índice ι de v em z. Portanto, pelo Lema 2.17, temos que o somatório dos índices $\sum \iota$ é igual ao grau de g, o que prova o teorema.

■

Teorema 2.22 *: (Poincaré-Hopf) A soma $\sum \iota$ de índices nos zeros de um campo de vetores é igual ao número de Euler*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i rank\ H_i(M).$$

Onde $H_i(M)$ é o $i-$ésimo grupo de homologia de M. Em particular esta soma é um invariante topológico de M.

Note que o Lema 2.17 e o teorema anterior são versões particulares do teorema de Poincaré-Hopf. Não faremos a demonstração precisa do teorema, mas daremos uma ideia da demonstração a seguir.

Passo 1: Identificar o invariante $\sum \iota$ com o número de Euler $\chi(M)$. Para isto é suficiente construir um exemplo de um campo de vetores não degenerado em M com $\sum \iota$ igual a $\chi(M)$. Marston Morse mostrou que é possível construir uma função a valores reais em M cujo gradiente é um campo de vetores não degenerado. Além disso, Morse também mostrou que a soma dos índices deste campo é igual ao número de Euler de M.

Passo 2: Provar o teorema para um campo de vetores com zeros degenerados. Considere um campo de vetores v em um aberto U com um zero isolado em $z \in U$.

Se a função $\lambda : U \to [0,1]$ vale 1 em uma vizinhança N de z e vale 0 fora de uma vizinhança um pouco maior N de z, e se y é um valor regular de v suficientemente pequeno, então o campo

$$v'(x) = v(x) - \lambda(x) \cdot y$$

é não degenerado em N. Note que λ existe pelo Lema de Urysohn. A soma dos índices nos zeros dentro de N podem ser calculados como o grau da aplicação

$$\overline{v} : \partial N \to S^{m-1},$$

logo não muda fazendo esta alteração. Mais geralmente, o argumento em uma variedade compacta M é trocar um campo de vetores degenerado por um que não seja degenerado, sem trocar o inteiro $\sum \iota$.

Passo 3: Variedades com bordo. Se $M \subset \mathbb{R}^k$ tem um bordo,, então qualquer campo v que aponta para fora nos pontos do bordo ∂M pode ser estendido, como anteriormente, a um campo sobre N_ε que também aponta para fora em ∂N_ε. Entretanto, dessa forma não é possível manter a suavidade no bordo de M. Além disso, temos que N_ε como na figura do Teorema 2.21, não pode ser uma variedade suave (C^∞), somente C^1. Deste modo, a extensão w definida por $w(x) = v(r(x)) + x - r(x)$ será apenas um campo contínuo próximo de ∂M. Para continuar a demonstração seria necessário mostrar que nossas suposições sobre a diferenciabilidade podem ser removidas.

Teorema 2.23 *: (Poincaré-Hopf) Se um campo contínuo de vetores tangentes a uma superfície compacta M tem apenas um número finito de singularidades, então a soma dos índices dessas singularidades é igual à característica de Euler-Poincaré de M.*

O Teorema 2.23 nos diz que se v é um campo contínuo de vetores tangentes a uma superfície compacta M e o conjunto de singularidades S é finito, então

$$\sum_{p \in S} i(v,p) = \chi(M).$$

Temos o seguinte corolário do Teorema de Poincaré-Hopf

Corolário 2.24 *: Se $\chi(M) \neq 0$ então todo campo contínuo de vetores tangentes se anula em algum ponto.*

A esfera S^2, por exemplo, não possui campo de vetores tangentes contínuo sem pontos críticos.

No toro T^2 temos que $\chi(T^2) = 0$. Podemos definir o campo de vetores tangentes aos paralelos do toro.

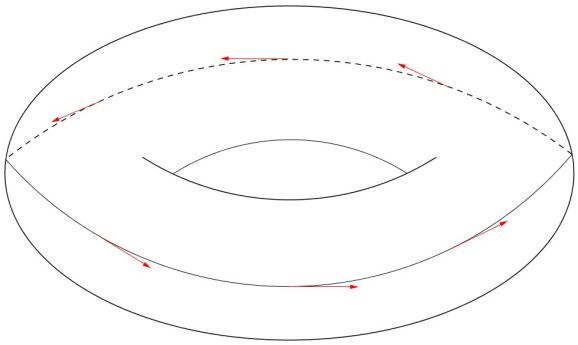

Figura 2.9: Campo sobre T^2

Seja n ímpar (suponha $n = 2k - 1$), então a esfera unitária S^n é o conjunto

$$S^n = \left\{ p = (x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_k, y_k) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \sum_{i=1}^{k} (x_i^2 + y_i^2) = 1 \right\}.$$

Um vetor v é tangente à S^n no ponto p se $\langle v, p \rangle = 0$. Defina em S^n o campo $v(p) = (y_1, -x_1, y_2, -x_2, ..., y_k, -x_k)$, que é contínuo e não nulo, uma vez que $v(p) = 0 \leftrightarrow p = 0$.

O Teorema de Dualidade de Poincaré nos diz que, em uma superfície compacta, os números de Betti módulo 2 equidistantes dos extremos são iguais, isto é, $\beta_i = \beta_{m-i}$, onde $dim M = m$. Assim, temos que

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \cdot \beta_i = 0.$$

A igualdade acima sugere que toda superfície compacta de dimensão ímpar possui campo contínuo de vetores tangentes não nulo. Para superfícies compactas de dimensão 2 contidas em $\mathbb{R}^3$ existe um teorema de classificação completo.

Teorema 2.25 *: Uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ compacta é homeomorfa a uma esfera ou a um n-toro, onde n é o gênero (número de buracos) de M^2. Além disso, se o gênero de M^2 é g, temos que*

$$\chi(M^2) = 2 - 2g.$$

O teorema acima nos diz que apenas o toro possui campo contínuo de vetores tangentes não nulo.

Capítulo

3

Variedades Singulares

Veremos neste capítulo definições e resultados básicos de conjuntos algébricos e conjuntos analíticos. A principal referência é o livro [20].

3.1 Conjuntos Algébricos

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo infinito e $\mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$ o anel de polinômios nas variáveis $z_1, ..., z_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Definição 3.1 *: Um subconjunto $V \subset \mathbb{K}^n$ é um conjunto algébrico se V é o conjunto de zeros de alguma coleção de funções polinomiais em $\mathbb{K}^n$.*

Denotaremos o conjunto de zeros do ideal J por $Z(J)$. Seja

$$I(V) \subset \mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$$

o ideal dos polinômios que se anulam em V. O teorema da base de Hilbert garante que todo ideal é gerado (como $\mathbb{K}[z_1, ..., z_n]-$módulo) por alguma coleção finita de polinômios. Disto segue que todo conjunto algébrico V pode ser definido por alguma coleção finita de equações polinomiais. Seja S um conjunto finito de polinômios. O conjunto $V(S)$ é o conjunto dos pontos $z \in K^n$ tais que $f(z) = 0,\ \forall f \in S$.

Definição 3.2 *: Um ideal P de um anel R é um ideal primo se $P \neq R$ e se dados $a, b \in R$ tais que $a \cdot b \in P$, então $a \in P$ ou $b \in P$.*

Definição 3.3 *: O radical de um ideal I em um anel R é o ideal das intersecções de todos os ideais primos que contém I. Denotaremos o radical de I por $\sqrt{I}$.*

Proposição 3.4 *Sejam V_1 e V_2 conjuntos algébricos e $I_1 = I(V_1)$ e $I_2 = I(V_2)$. Então valem as seguintes propriedades:*

i. Se $I(V_1) \subset I(V_2)$, então $V_2 \subset V_1$.

ii. $V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$.

iii. $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2)$.

O item i. decorre diretamente da definição, de fato, se $z = (z_1, ..., z_n) \in V_2$ e $I(V_1) \subset I(V_2)$ então $f(z) = 0,\ \forall f \in I(V_2)$. Logo, por hipótese, temos $f(z) = 0,\ \forall f \in I(V_1)$, portanto $z \in V_1$. A recíproca também é verdadeira e a demonstração é análoga. As demonstrações para ii. e iii. podem ser encontradas em [11], pg. 113.

Teorema 3.5 *: (Hilbert-Nullstellensatz) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado, I um ideal de $R = \mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$ e $f \in R$ um polinômio que se anula em $Z(I)$. Então $f^r \in I$ para algum inteiro $r > 0$.*

Uma formulação equivalente deste teorema é a seguinte:

Teorema 3.6 *: (Hilbert-Nullstellensatz) Seja $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Então, para todo ideal I de $\mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$, temos que $I(Z(I)) = \sqrt{I}$.*

Uma referência para os teoremas acima é [12].

Proposição 3.7 *: Toda sequência decrescente $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset ...$ de conjuntos algébricos termina ou estabiliza ($V_i = V_{i+1} = V_{i+2}...$) após um número finito de passos.*

Demonstração: Segue da Proposição 3.4 olhando para a sequência ascendente $I(V_1) \subset I(V_2) \subset ...$ de ideais em $\mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$. Como $\mathbb{K}[z_1, ..., z_n]$ é Noetheriano (ver [12], pg. 186), segue que esta última sequência deve estabilizar. Portanto, pela Proposição 3.4 (i), segue que $V_1 \supset V_2 \supset ...$ deve estabilizar. ■

Definição 3.8 *: Um conjunto algébrico não vazio V é uma variedade ou um conjunto algébrico irredutível se não pode ser expresso como união de dois subconjuntos algébricos próprios.*

Proposição 3.9 *: Um conjunto algébrico V é irredutível se, e somente se, $I(V)$ é um ideal primo.*

Demonstração: Ver [20].

Se V é irredutível, então o corpo dos quocientes f/g com f e g no domínio de integridade $\dfrac{\mathbb{K}[z_1, ..., z_m]}{I(V)}$ é chamado corpo de funções racionais em V. O grau de transcendência sobre $\mathbb{K}$ é a dimensão algébrica de V sobre $\mathbb{K}$ (ver [13], pg. 28).

Observação 3.10 *: Se W é uma subvariedade própria de V, então a dimensão de W é menor que a dimensão de V (ver [13], pg. 29).*

Seja $V \subset \mathbb{K}^m$ um conjunto algébrico não vazio. Escolha $\{f_1, ..., f_k\}$ polinômios que geram o ideal $I(V)$ e, para cada $z \in V$, considere a matriz $(\partial f/\partial z_j)$ calculada em z. Seja ρ o maior posto que esta matriz atinge em qualquer ponto de V.

Definição 3.11 *: Um ponto $z \in V$ é não singular ou simples se $(\partial f/\partial z_j)$ atinge o posto máximo ρ em z, e é singular se*

$$rank(\partial f_i(z)/\partial z_j) < \rho.$$

Note que esta definição não depende da escolha dos polinômios f_i, pois se adicionarmos um novo polinômio f_{k+1}, temos que este pode ser escrito como combinação linear dos demais, adicionando uma coluna que não interfere no posto da matriz.

Lema 3.12 *: O conjunto $\Sigma(V)$ de todos os pontos singulares de V forma um subconjunto algébrico próprio (possivelmente vazio) de V.*

Demonstração: Basta notar que $z \in \Sigma(V)$ se, e somente se, todo determinante das submatrizes $\rho \times \rho$ se anulam, logo $\Sigma(V)$ é um conjunto de zeros de polinômios. ■

Teorema 3.13 *(Whitney): Se $\mathbb{K}$ é o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, então o conjunto $V - \Sigma(V)$ de pontos não singulares de V forma uma variedade suave e não vazia. Além disso, esta variedade é analítica real (ou complexa, dependendo do corpo), e tem dimensão $n - \rho$ sobre $\mathbb{K}$.*

Uma referência para a demonstração do resultado acima é [23].

Teorema 3.14 *(Whitney): Para qualquer par $V \supset W$ de conjuntos algébricos em um espaço de coordenadas reais ou complexas, a diferença $V - W$ tem no máximo um numero finito de componentes topológicas conexas.*

Uma referência para a demonstração do resultado acima é [19], Appendix A.

Note que o teorema anterior nos diz que, se V é uma variedade analítica com um número finito de componentes irredutíveis, então $V - \Sigma(V)$ é uma variedade suave que tem um número finito de componentes conexas.

Exemplo 3.15 *: Considere a seguinte variedade em $\mathbb{R}^2$*

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2(1 - x^2) = 0\right\}.$$

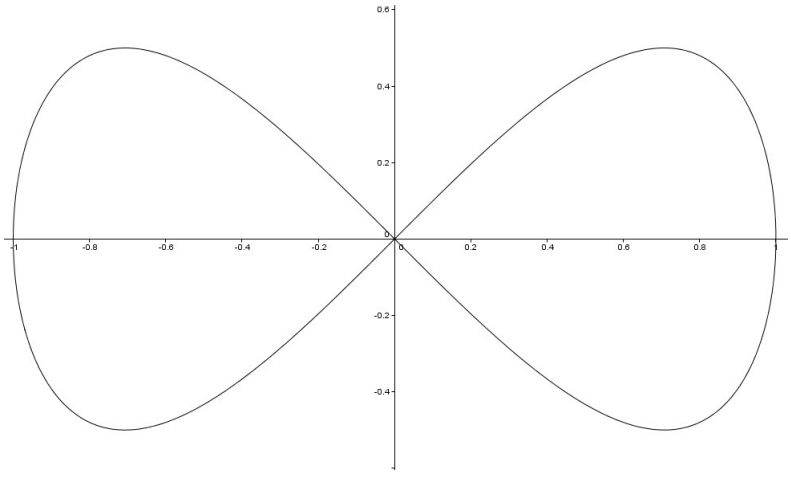

Figura 3.1: Curva $y^2 - x^2(1 - x^2) = 0$

Esta variedade ilustra um tipo de singularidade chamado ponto duplo e $V - \{0\}$ tem duas componentes reais analíticas.

Exemplo 3.16 *: A curva cúbica*

$$V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - x^2(x-1) = 0\right\}$$

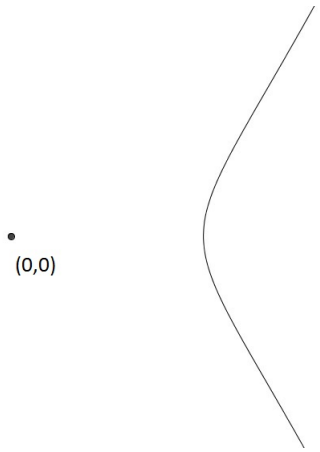

Figura 3.2: Curva $y^2 - x^2(x-1) = 0$

tem um zero isolado na origem, esta curva é também irredutível sobre $\mathbb{C}$.

Proposição 3.17 *: Uma variedade algébrica complexa nunca pode ser uma variedade suave em toda uma vizinhança de um ponto singular.*

Demonstração: Suponha que a variedade complexa V seja uma variedade diferenciável de classe C^1 em toda uma vizinhança U da origem em $\mathbb{C}^n$. O espaço tangente à variedade suave $U \cap V$ em qualquer ponto simples é claramente um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Do fato de que os pontos simples formam um conjunto denso (ver [19]) temos que, por continuidade, o espaço tangente (real) $T_z \subset \mathbb{C}^n$ de $U \cap V$ em um ponto arbitrário z é, na verdade, um espaço vetorial complexo, isto é, $T_z = i \cdot T_z$. Substituindo U por um aberto menor U' e re-enumerando as coordenadas se necessário, o Teorema 1.15 nos garante que $U' \cap V$ em um ponto arbitrário z pode ser considerado como gráfico de uma aplicação C^1-suave F de um aberto do espaço de coordenadas $(z_1, ..., z_m)$ no espaço de $(z_{m+1}, ..., z_n)$ coordenadas. A derivada de F em cada ponto é uma aplicação

linear complexa, então as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, e F é complexa analítica. Isto prova que $U' \cap V$ é uma variedade complexa suave. Agora, seja $h(z)$ qualquer função complexa analítica, definida em uma vizinhança do 0, que se anula em V, e sejam $f_1, ..., f_k$ polinômios que geram o ideal primo $I(V) \subset \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$. O Teorema 3.5 (ne verdade a versão local analítica deste teorema, que pode ser encontrada em [8], pg.97) garante que existe $s_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $s \geq s_0$ potências h^s podem ser expressas como uma combinação linear da forma $a_1 f_1 + ... + a_k f_k$, onde $a_1, ..., a_k$ são germes de funções analíticas. Passando para o maior anel $\mathbb{C}[[z]]$ que consiste de todas as séries formais de potências na origem, segue que $h^s \in \mathbb{C}[[z]]I(V)$. Mas este ideal pode ser expresso como a intersecção de ideais primos. Logo o próprio h deve pertencer ao ideal $\mathbb{C}[[z]]I(V)$, que é gerado por $f_1, ..., f_k$ em $\mathbb{C}[[z]]$. Olhando para as derivadas, temos que o vetor $dh(0)$ pode ser escrito como combinação linear complexa de $df_1(0), ..., df_k(0)$. Disto segue que a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)$ tem posto $n - m$ em 0, portanto a origem não pode ser um ponto singular de V. ■

Teorema 3.18 *: Qualquer conjunto algébrico V, real ou complexo, pode ser escrito como uma união finita e disjunta*

$$V = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_p,$$

onde cada M_j é uma variedade suave com um número finito de componentes.

Demonstração: Pelo Lema 3.12 e pelo Teorema de Whitney 3.13, sabemos que $\Sigma(V)$ é um conjunto algébrico e que $V - \Sigma(V)$ é uma variedade suave. Sejam $M_1 = V - \Sigma(V)$, $M_2 = \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V))$, e assim por diante. Temos em V a condição da cadeia descendente, isto é, sequência

$$V \supset V - \Sigma(V) \supset \Sigma(V) - \Sigma(\Sigma(V)) \supset ...$$

deve terminar. Portanto,

$$V = M_1 \cup ... \cup M_p, \quad \text{para algum } p.$$

Além disso, se $W \subset V$, podemos expressar $V - W = M_1' \cup ... \cup M_p'$ onde cada

$$M_i' = M_i - (W \cap M_i)$$

é uma variedade suave com número finito de componentes topológicas de acordo com o Teorema de Whitney 3.14. ■

Lema 3.19 *: Sejam $\mathbb{K}$ o corpo dos reais ou complexos, $V \subset \mathbb{K}^m$ um conjunto algébrico, $M_1 = V - \Sigma(V)$ a variedade dos pontos simples de V e g uma função polinomial em $\mathbb{K}^m$. Então, o conjunto de pontos críticos de $g|_{M_1} : M_1 \to \mathbb{K}$ é igual a intersecção de M_1 com o conjunto algébrico W que consiste de todos os pontos $z \in V$ nos quais a matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

tem posto menor ou igual a $\rho = min\{k, n\}$, onde $f_1, ..., f_k$ denotam os polinômios que geram $I(V)$.

Demonstração: Nas proximidades de qualquer ponto de M_1 podemos escolher um sistema analítico (real ou complexo) de vizinhanças coordenadas $u_1, ..., u_n$ para $\mathbb{K}^n$ tal que M_1 corresponde localmente a $u_1 = ... = u_\rho = 0$. Então $u_{\rho+1}, ..., u_n$ podem ser tomadas como coordenadas locais de M_1. Note que $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, calculado em um ponto de M_1, é zero para $j > \rho + 1$ (Teorema de Whitney 3.13). Como a matriz $N = (\frac{\partial f_i}{\partial u_j})$ é equivalente por colunas a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_l}\right)$, temos que W tem posto ρ. Isto mostra que as primeiras ρ colunas são linearmente independentes. Assim, aumentando a matriz N

com as derivadas parciais da função g, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

deve ter posto ρ se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}} = ... = \frac{\partial g}{\partial u_n} = 0$$

ou, em outras palavras, se o ponto dado é um ponto crítico de $g|_{M_1}$. Como esta matriz aumentada é equivalente a matriz $(*)$, temos o desejado. ■

Corolário 3.20 *: Uma função polinomial g em $M_1 = V - \Sigma(V)$ pode ter no máximo um número finito de valores críticos.*

Demonstração: O conjunto de pontos críticos de $g|_{M_1}$ pode ser expresso como a diferença $W - \Sigma(V)$ de conjuntos algébricos, que por sua vez pode ser expressa como união finita de variedades suaves da forma

$$W - \Sigma(V) = M_1' \cup ... \cup M_p',$$

onde cada M_i' tem apenas um número finito de componentes. Cada ponto $x \in M_i'$ é um ponto crítico da função suave $g|_{M_1}$, consequentemente, é um ponto crítico da função restrição $g|_{M_i'}$. Como todos os pontos de M_i' são críticos, temos que g é constante em cada componente de M_i', isso decorre de uma função contínua levar conexo em conexo. Logo, obtemos que a imagem $g(M_i')$ é um conjunto finito. Mas a união $g(M_1') \cup ... \cup g(M_p')$ é exatamente o conjunto de todos os valores críticos de $g|_{M_1}$. ■

Consideremos V um conjunto algébrico real ou complexo. Seja x_0 um ponto simples de V ou um ponto singular isolado do conjunto $\Sigma(V)$.

Corolário 3.21 *: Toda esfera suficientemente pequena S_ε centrada em x_0 intersecta V em uma variedade suave, possivelmente vazia.*

Demonstração: No caso real, vamos aplicar o corolário anterior à função polinomial

$$r(x) = ||x - x_0||^2.$$

Se ε^2 for menor que qualquer valor crítico de $r|_{(V-\Sigma(V))}$, então ε^2 será um valor regular. Portanto sua imagem inversa

$$r^{-1}(\varepsilon^2) \cap (V - \Sigma(V)) = S_\varepsilon \cap (V - \Sigma(V)),$$

será uma variedade suave K. Se ε é suficientemente pequeno, então S_ε não intersecta $\Sigma(V)$, portanto K será igual a $S_\varepsilon \cap V$. O caso complexo é análogo pensando uma variedade complexa em $\mathbb{C}^m$ como uma variedade real em $\mathbb{R}^{2m}$. ■

Definição 3.22 *: Uma partição da unidade suave de um conjunto K é uma família de funções $\{\lambda_\alpha\}$ suaves em K, tal que*

$$\lambda_\alpha(x) \geq 0, \qquad \sum_\alpha \lambda_\alpha(x) = 1, \qquad \forall x \in K$$

e, para cada ponto $x \in K$, existe uma vizinhança de x onde apenas um número finito dos λ_α são não nulas.

Denotaremos por $cone(K)$ o cone sobre K de vértice x_0, isto é

$$cone(K) = tk + (1-t)x_0, \qquad \forall k \in K.$$

Seja D_ε o disco fechado dos pontos x satisfazendo $||x - x_0|| \leq \varepsilon$, e seja x_0 um ponto regular ou um ponto singular isolado de V.

Teorema 3.23 *: Para ε pequeno, a interseção de V com D_ε é homeomorfa ao cone*

sobre $K = V \cap S_\varepsilon$. Na verdade, o par $(D_\varepsilon, V \cap D_\varepsilon)$ é homeomorfo ao par do cone sobre S_ε e o cone sobre K.

Demonstração: É suficiente mostrar o caso real. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que o disco D_ε não contenha pontos singulares de V e pontos críticos de $r|_{V-\Sigma(V)}$, além de x_0. Vamos construir um campo suave v (a princípio localmente) no disco perfurado $D_\varepsilon - x_0$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i. $v(x)$ está sempre "saindo"de x_0,

ii. $v(x)$ é tangente à variedade $M_1 = V - \Sigma(V)$, sempre que $x \in M_1$.

Dado $x_\alpha \in D_\varepsilon - x_0$, vamos construir um campo $V_\alpha(x)$ em uma vizinhança U_α de x_α que satisfaz as propriedades acima.

Se x_α não pertence à V, tome $v_\alpha(x) = x - x_0$, para todo $x \in U_\alpha \subset \mathbb{R}^n - V$.

Se $x_\alpha \in V$, então $x_\alpha \in M_1$. Assim, como antes, podemos escolher coordenadas $u_1, ..., u_n$ para uma vizinhança U_α de x_α, tal que M_1 corresponde localmente a $u_1 = ... = u_\rho = 0$. Assim, como x_α não é ponto crítico de $r|_{M_1}$, onde $r(x) = ||x - x_0||^2$, temos que as últimas derivadas

$$\frac{\partial r}{\partial u_{\rho+1}}, ..., \frac{\partial r}{\partial u_n}$$

devem ser não nulas em x_α.

Suponha $\dfrac{\partial r}{\partial u_h}(x_\alpha) \neq 0$, seja U_α uma vizinhança conexa tal que $\dfrac{\partial r}{\partial u_h}(x) \neq 0, \forall x \in U_\alpha$. Seja $v_\alpha(x)$ o vetor

$$\pm \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_h}, ..., \frac{\partial x_m}{\partial u_h} \right),$$

que é tangente à u_h-curva coordenada em x. O sinal $\pm$ é escolhido de acordo com $\dfrac{\partial r}{\partial u_h}$ ser positivo ou negativo. Este vetor $v_\alpha(x)$ é tangente à M_1, sempre que $x \in M_1$, visto que a u_h-curva coordenada está contida em M_1. Além disso, como $r'(x) = 2(x - x_0)$,

temos

$$\begin{aligned} 2\langle v_\alpha(x), x - x_0\rangle &= \sum v_{\alpha,i}(x) \cdot 2(x_i - x_{0,i}) \\ &= \sum \left(\pm \frac{\partial x_i}{\partial u_h}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \\ &= \pm \frac{\partial r}{\partial u_h}, \quad \forall x \in U_\alpha. \end{aligned}$$

Escolha uma partição da unidade suave $\{\lambda_\alpha\}$ em $D_\varepsilon - x_0$, com $supp(\lambda^\alpha) \subset U^\alpha$. Assim, o campo de vetores

$$v(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha(x) v_{\alpha(x)}$$

satisfaz as propriedades $i.$ e $ii.$ em $D_\varepsilon - x_0$.

Normalize o campo, fazendo

$$w(x) = \frac{v(x)}{||v(x)||}$$

e considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = w(x).$$

Isto é, olhe para as curvas suaves $x(t) = \rho(t)$ definidas em $\alpha < t < \beta$, que satisfazem

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = w(\rho(t)).$$

Dada uma solução $\rho(t)$, a derivada da função composta $r(\rho(t))$ nos dá

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \cdot w_i(x) \\ &= \langle 2(x - x_0), w(x)\rangle \quad = \quad 1, \end{aligned}$$

onde $x = \rho(t)$. Assim, a função $r(\rho(t))$ deve ser igual a t mais uma constante. Fazendo uma mudança de parâmetros, podemos assumir que

$$r(\rho(t)) = ||\rho(t) - x_0||^2 = t.$$

Esta solução pode ser estendida ao intervalo $0 < t \leq \varepsilon^2$. De fato, podemos supor que w foi construído em um aberto um pouco maior que $D_\varepsilon - x_0$, deste modo, os pontos de fronteira não serão problema. Pelo Lema de Zorn, uma solução $\rho(t)$ pode ser extendida a um intervalo maximal $\alpha' < t < \beta'$. Suponha $\beta \leq \varepsilon^2$. Vamos mostrar que é possível extender ρ a um intervalo um pouco maior, contradizendo a definição de β'. Como $\rho(t) \in D_\varepsilon,\ \forall t \in (\alpha', \beta')$ e D_ε é compacto, temos que existe $x' \in D_\varepsilon$ tal que x' é o limite da sequência $\{\rho(t)\}$ quando t tende à β'. Pela continuidade de ρ, temos $\rho(x') = \beta' \neq 0$ e, portanto, $x' \in D_\varepsilon - x_0$. Pelo teorema de existência e unicidade (e suavidade) da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = w(x)$ na vizinhança de x' temos que, para cada x'' em uma vizinhança U de x' e cada t'' em um intervalo arbitrariamente pequeno I contendo β', existe uma única solução $x = q(t)$, com $t \in I$, satisfazendo a condição inicial $q(t'') = x''$. Além disso, o teorema garante que $q(t)$ é uma função suave de x'', t'' e t. Pela unicidade, temos que $p(t) = q(t)$ em $I'(\alpha', \beta') \cap I$. Escolha $t'' \in I'$ e seja $x'' = p(t'')$. Assim, podemos definir a solução $p(t)$ ao intervalo I', tomando a solução $q(t)$. O que contradiz o fato de β' ser maximal. Analogamente podemos provar que $\alpha' = 0$. Note que a solução $\rho(t)$ é únicamente determinada pelo valor inicial $\rho(\varepsilon^2) \in S_\varepsilon$. Assim, para cada $a \in S_\varepsilon$, seja

$$p(t) = P(a, t), \quad 0 < t \leq \varepsilon^2$$

a única solução satisfazendo a condição inicial

$$p(\varepsilon^2) = P(a, \varepsilon) = a.$$

Temos então que P leva difeomorficamente o disco perfurado $D - x_0$ no cilindro $S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2]$. Além disso, como $w(x)$ é tangente a M_1 sempre que $x \in M_1$, temos que toda curva solução que intersecta M_1 deve estar contida em M_1. Logo, P leva $K \times (0, \varepsilon^2]$ difeomorficamente em $V \cap (D_\varepsilon - x_0)$.

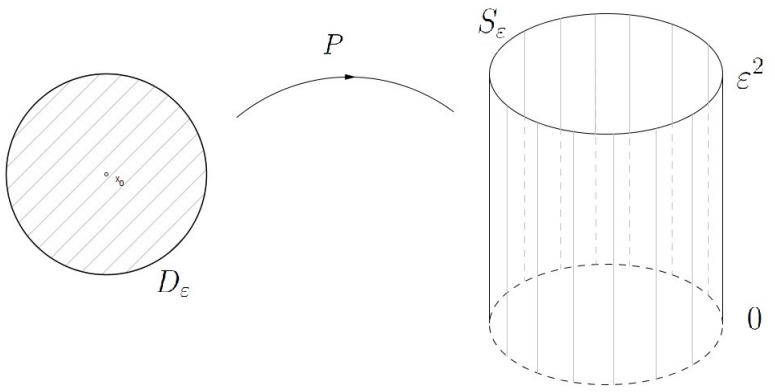

Figura 3.3: Aplicação P

Note que $P(a,t)$ tende uniformemente a x_0 quando $t \to 0$. Portanto a correspondência

$$ta + (1-t)x_0 \mapsto P(a, t\varepsilon^2),$$

definida para $0 < t \leq 1$, se estende unicamente a um difeomorfismo do $Cone(S_\varepsilon)$ em D_ε. Além disso, este difeomorfismo leva o $Cone(K)$ em $V \cap D_\varepsilon$.

■

O teorema a seguir é o principal resultado de [20] e estabelece uma relação entre a topologia do link K e V.

Teorema 3.24 *(Fibração de Milnor): Se z_0 é um ponto qualquer de V e se S_ε é uma esfera suficientemente pequena centrada em z_0, então $S_\varepsilon - K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1, com projeção $\phi(z) = \frac{f(x)}{|f(z)|}$ e fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$.*

Os resultados de Milnor sobre a topologia da fibra de Milnor F_θ são descritos a seguir, e a referência também é [20]

Para o caso particular em que f tem uma singularidade isolada em 0, o teorema abaixo caracteriza o tipo de homotopia da fibra F_θ.

Teorema 3.25 *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet $S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ de esferas de dimensão $n-1$ em $\mathbb{K}^n$. O número de Milnor é o número de esferas neste bouquet.*

3.2 Conjuntos Analíticos

Definição 3.26 *: Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Dizemos que f é holomorfa em $a \in \mathbb{C}^{n+1}$ se existe aberto $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tal que f é diferenciável (no sentido complexo, isto é, diferenciável com derivada $\mathbb{C}$-linear) em todo ponto $u \in U$.*

Assim como no capítulo anterior, vamos estudar o conjunto de zeros de funções, agora não mais polinomiais, mas analíticas. Estes conjuntos são chamados de espaços analíticos

Definição 3.27 *Considere o conjunto dos pares (V_α, U_α), onde U_α é uma vizinhança aberta da origem e V_α é subconjunto de U_α. Dois pares (V_1, U_1) e (V_2, U_2) são equivalentes se existe uma vizinhança $W \subset U_1 \cap U_2$ tal que $V_1 \cap W = V_2 \cap W$. A classe de equivalência de um par é chamada de germe na origem em $\mathbb{C}^n$.*

Se $f \in \mathcal{O}_n$, a classe de equivalência do conjunto $\{x; f(x) = 0\}$, com f um representante do germe f, é denotada por $V(f)$. Assim como anteriormente, se f_1 e f_2 são representantes de um mesmo germe, então $V(f_1) = V(f_2)$.

Definição 3.28 *Um germe de espaço analítico $(\mathcal{V}, 0)$ em torno da origem é o germe do subconjunto*

$$\mathcal{V} = V(f_1, f_2, ..., f_r) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap ... \cap V(f_r), \qquad f_1, f_2, ..., f_r \in \mathcal{O}_n.$$

O ideal de um germe de espaço analítico $\mathcal{V}$ é definido por

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}) = \left\{ f \in \mathcal{O}_n; \mathcal{V} \subset f^{-1}(0) \right\}.$$

Definição 3.29 *: Um germe de espaço analítico é irredutível se para V_1 e V_2 germes quaisquer, com $\mathcal{V} = V_1 \cup V_2$, tem-se que $\mathcal{V} = V_1$ ou $\mathcal{V} = V_2$. Neste caso, $\mathcal{V}$ é uma variedade analítica.*

Proposição 3.30 *: Seja $\mathcal{V}$ um germe de espaço analítico. Então existem p um número inteiro positivo e $V_1, ..., V_p$ variedades irredutíveis, com $V_i \nsubseteq V_j$, sempre que $i \neq j$, tais que $\mathcal{V} = V_1 \cup ... \cup V_p$. Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de $\mathcal{V}$.*

Definição 3.31 *: Um germe de espaço analítico $\mathcal{V}$ é equidimensional se todas as suas componentes irredutíveis tem a mesma dimensão.*

Um germe de espaço analítico em x é um germe de conjunto $\mathcal{V}$ em x tal que, para alguma vizinhança U de x, o germe $\mathcal{V} \cap U$ pode ser descrito por $V(f_1, ..., f_r)$, para alguns $f_1, ..., f_r \in \mathcal{O}_n$.

Definição 3.32 *: Seja I um anel. Um elemento $a \in I$ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$.*

Definição 3.33 *Dizemos que um germe $\mathcal{V} = V(f_1, ..., f_r)$ é reduzido a $\mathbb{C}-$álgebra $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, ..., f_r \rangle}$ não possui elementos nilpotentes.*

Um ponto z de um germe de espaço analítico $\mathcal{V}$ é um ponto regular ou suave se para alguma vizinhança U de z o germe $U \cap \mathcal{V}$ pode ser descrito como o conjunto dos zeros de um número finito de funções analíticas que possuem z como ponto regular. Um ponto de $\mathcal{V}$ não regular é chamado ponto singular de $\mathcal{V}$.

Capítulo

4

Índices de Campos de Vetores: Caso Singular

Neste capítulo estudaremos o índice de Schwartz e o índice GSV de campos de vetores em variedades singulares. As principais referências são o livro [3] e a dissertação de mestrado [4].

Definição 4.1 *: Seja V um espaço topológico. Dizemos que V é uma variedade singular n-dimensional se existe um subconjunto $S \subset V$, tal que, $V - S$ é uma variedade topológica n-dimensional, e tal que, $\forall a \in S$, não existe vizinhança V_α de a em V homeomorfa à um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$.*

Definição 4.2 *: Seja V uma variedade singular n-dimensional. Chamamos de conjunto singular de V o subconjunto S da definição acima, e denotamos por ΣV tal conjunto. Cada ponto em S é dito uma singularidade de V e a singularidade $a \in S$ é dita isolada se existe aberto $W_a \subset V$ tal que $W_a \cap S = a$.*

Exemplo 4.3 *: O toro pinçado e a figura oito são exemplos de variedades singulares, 2-dimensional e 1-dimensional, respectivamente.*

Observação 4.4 *: Vamos tratar apenas das variedades analíticas. Assim, o conjunto $V_{reg} = V - \Sigma V$ é uma variedade diferenciável.*

Definição 4.5 *: Seja V uma variedade mergulhada em $\mathbb{R}^n$ com uma singularidade isolada $a \in V$. Um campo contínuo v em V é uma aplicação contínua $v : V \to \mathbb{R}^n$, tal que $v(x) \in T_x V_{reg}$, $\forall\ x\ \in V_{reg}$ e $v(a) = 0$.*

Definição 4.6 *: Considere em V um campo contínuo v, tal que v possa ser definido sobre uma bola fechada no espaço ambiente $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset \mathbb{R}^n$, com singularidade isolada no ponto a de V em $\overline{B_\varepsilon(a)}$. Definimos o índice de Poincaré-Hopf de v em a como sendo o índice de Poincaré-Hopf de $\widetilde{v}$, onde $\widetilde{v} = v|_{\overline{B_\varepsilon(a)}}$.*

Exemplo 4.7 *: Considere os seguintes campos sobre o toro pinçado V (figuras 4.1 e 4.2)*

Através de uma triangulação, pode-se provar que $\chi(V) = 1$. Logo, o teorema de Poincaré-Hopf não se verifica para o campo w, entretanto se verifica para o campo v.

Exemplo 4.8 *: Considere o campo v sobre a figura oito, como na figura 4.3*

Então, sobre os pontos a, b_1, b_2, b_3 e b_4, teremos os campos

Assim, somando os índices, temos -1, que é a característica de Euler da figura 8.

4.1 Índice de Schwartz

Seja $V \subset \mathbb{C}^m$ um espaço analítico equidimensional de dimensão maior ou igual a 1, com singularidade isolada em $0 \in \mathbb{C}^m$. Seja $\overline{B_\varepsilon(0)}$ a bola fechada de centro em 0 e raio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que toda esfera centrada em 0, contida em $\overline{B_\varepsilon(0)}$, encontre V transversalmente (o que é possível pelo capítulo anterior).

Definição 4.9 *Seja v_{rad} um campo de vetores em $V - \{0\}$ que seja transversal a todas as esferas $S_{\varepsilon'}$, para $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ suficientemente pequeno, que aponta para fora em 0 e que se estenda continuamente em $\mathbb{C}^m$ com singularidade isolada em 0. Chamamos de v_{rad} o campo radial em V.*

Exemplo 4.10 *: O campo v do Exemplo 4.7 sobre o toro pinçado é um exemplo de campo radial.*

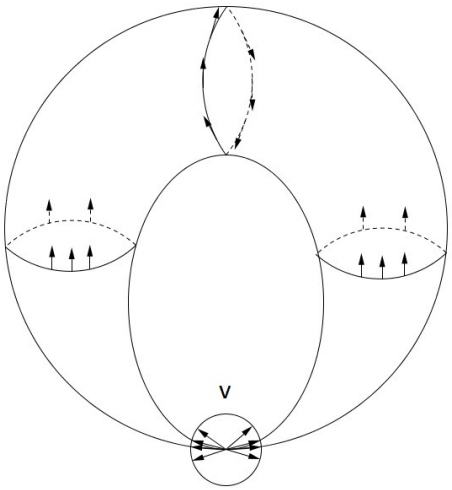

Figura 4.1: Campo v

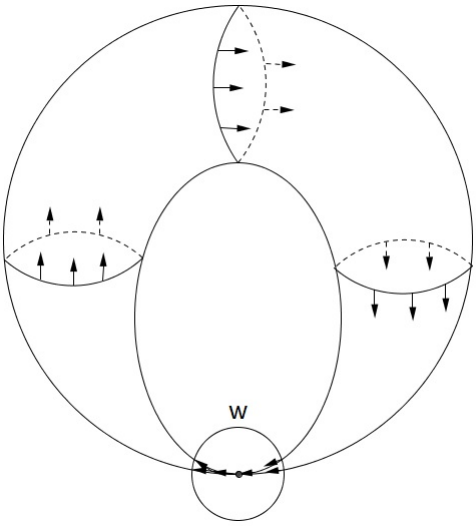

Figura 4.2: Campo w

Observação 4.11 *: O campo v_{rad} pode ser estendido a um campo tangente à V em $\overline{B_\varepsilon(0)}$, o qual denotaremos por $v^{\#}_{rad}$, sendo transversal à todas as esferas $S_{\varepsilon'}$, com $\varepsilon \geq \varepsilon' > 0$, obtendo assim um campo radial para $\overline{B_\varepsilon(0)}$. Este campo $v^{\#}_{rad}$ é chamado extensão radial do campo v.*

Definição 4.12 *: O índice de Schwartz de v_{rad} é o índice de Poincaré-Hopf da extensão radial $v^{\#}_{rad}$, o qual é $+1$.*

Queremos agora definir o índice de Schwartz para um campo contínuo v em V, com singularidade isolada em 0, qualquer. Para isso, precisamos definir a diferença entre o

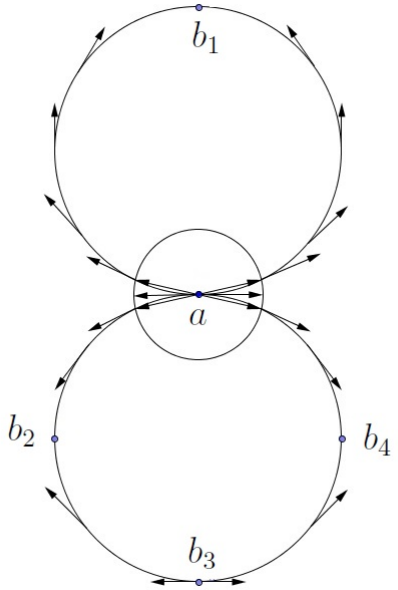

Figura 4.3: figura 8

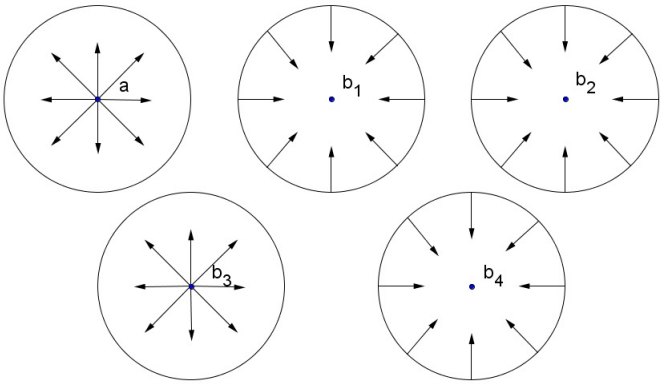

Figura 4.4: Campos sobre a figura 8

campo v e o campo v_{rad}. A extensão de campos é garantida pelo teorema de Tietze.

Considere duas pequenas esferas S_ε e $S_{\varepsilon'}$, com $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, centradas em 0. Seja X o cilindro em V limitado pelos links

$$K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V \qquad e \qquad K_{\varepsilon'} = S_{\varepsilon'} \cap V.$$

Sobre X, considere um campo w que possui uma quantidade finita de singularidades no interior de X e que satisfaz

$$w|_{K_\varepsilon} = v \qquad e \qquad w|_{K_{\varepsilon'}} = v_{rad}.$$

Definição 4.13 *: A diferença entre v e v_{rad} é definida como*

$$d(v, v_{rad}) = Ind_{PH}(w, X).$$

Definição 4.14 *: Sejam $V \subset \mathbb{C}^m$ um espaço analítico, equidimensional, com singularidade isolada em 0 e v um campo de vetores contínuo em V, com singularidade isolada em 0. Definimos o índice de Schwartz do campo v em 0 por*

$$Ind_{Sch}(0, v; V) = 1 + d(v, v_{rad}).$$

O teorema a seguir é a versão do Teorema de Poincaré-Hopf para variedades com singularidades isoladas.

Teorema 4.15 *: Seja V um espaço analítico, equidimensional e compacto, contido em $\mathbb{C}^m$, com singularidades isoladas $q_1, \ldots, q_r$. Seja v um campo de vetores contínuo em V, com singularidades em $q_1, \ldots, q_r$ e, possivelmente também nos pontos $p_1, \ldots, p_s$. Seja*

$$Ind_{Sch}(v, V) = \sum_{i=1}^{r} Ind_{Sch}(v, q_i; V) + \sum_{j=1}^{s} Ind_{PH}(v, p_i).$$

Então, $\chi(V) = Ind_{Sch}(v, V)$.

Demonstração: Suponha v radial em $q_1, \ldots, q_r$. Então

$$Ind_{Sch}(v, q_i; V) = 1, \qquad \forall i = 1, \ldots, r.$$

Em cada ponto q_i, considere a bola fechada $\overline{B_{\varepsilon_i}(q_i)} \subset \mathbb{C}^m$, com ε_i suficientemente pequeno para que q_i seja a única singularidade de v em $\overline{B_{\varepsilon_i}(q_i)} \cap V$. Defina $D_i =$

$V \cap \overline{B_{\varepsilon_i}(q_i)}$. Assim, temos que

$$V^* = V - \bigcup_{i=1}^{r} int(D_i)$$

é uma variedade diferenciável com bordo (basta notar que a aplicação $\rho(x) = ||x||^2$ é uma submersão fora da origem, restrita a V^*).

Como o campo v é transversal ao bordo de V^*, temos

$$\chi(V^*) = \sum_{j=1}^{s} Ind_{PH}(v, p_j) \qquad (1).$$

Sabendo que $\chi(V) = \chi\left(\bigcup_{i=1}^{r} D_i\right) + \chi(V^*)$, temos que

$$\chi(V) = \sum_{i=1}^{r} Ind_{Sch}(v, q_i) + \sum_{j=1}^{s} Ind_{PH}(v, p_j).$$

Note que a primeira somatória se deve ao fato do campo v ser radial em cada q_i.

Por outro lado, suponha que v não seja radial em algum q_i fixado. Seja $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Considere $\overline{B_{i,\varepsilon}(q_i)}$ a bola fechada de centro em q_i e raio ε, em $\mathbb{C}^m$. Seja $S_{i,\varepsilon}$ a esfera de mesmo raio e centro que $\overline{B_{i,\varepsilon}(q_i)}$. Sejam

$$K_{i,\varepsilon} = V \cap S_{i,\varepsilon} \qquad e \qquad V^* = V - \left(V \cap \overline{B_{i,\varepsilon}(q_i)}\right).$$

Pelo teorema 3.23, temos que cada $K_{i,\varepsilon}$ possui uma vizinhança difeomorfa ao cilindro $K_{i,\varepsilon} \times [0,1]$. Tomemos $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ e sejam X_{ε_1}, X_{ε_2} os cilindros limitados por $\{K_{i,\varepsilon}, K_{i,\varepsilon_1}\}$ e $\{K_{i,\varepsilon}, K_{i,\varepsilon_2}\}$, respectivamente.

Coloque o campo v sobre K_{i,ε_1} e o campo radial sobre K_{i,ε_2} e $K_{i,\varepsilon}$, chamemos este campo de w. Temos que

$$Ind_{Sch}(v, q_i) = 1 + d(v, v_{rad}) \qquad (2).$$

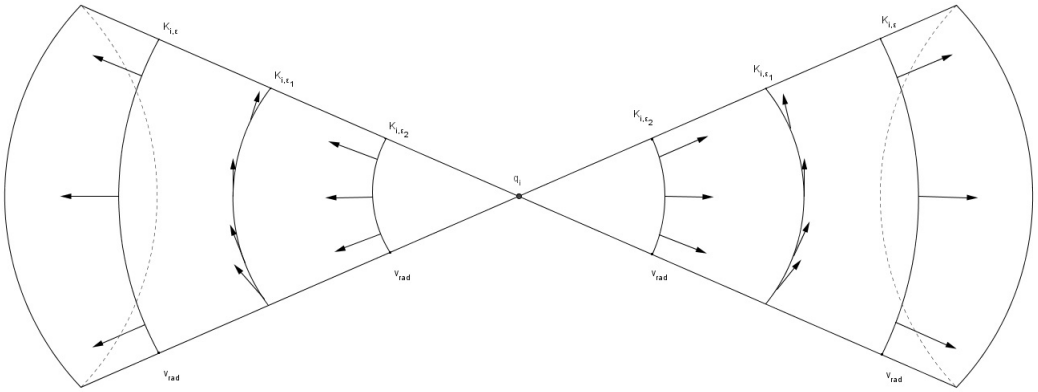

Figura 4.5: Campo radial e o campo v sobre a variedade V

Considere a extensão contínua de w sobre os cilindros X_{ε_1} e X_{ε_2}, chamemos este campo de $\widetilde{w}$. Como X_{ε_1} e X_{ε_2} são cilindros, é possível estender w à $\widetilde{w}$ sem singularidades, pelo Teorema de Tietze. Assim, por (1) e (2), temos que

$$d(v_{rad}, v) + d(v, v_{rad}) = 0.$$

Logo, voltamos ao caso anterior. ■

4.2 Exemplos

Denotaremos por $(V, 0)$ o germe de uma hipersuperfície analítica complexa, dada por uma função holomorfa

$$f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0),$$

a qual é definida em uma pequena bola B_ε e que tem um único ponto crítico em 0. Seja $V^* = V - \{0\}$. O espaço tangente a um ponto $x \in V^*$ será o conjunto

$$T_x V^* = \left\{\xi \in T_x\mathbb{C}^{n+1}; df_x(\xi) = 0\right\} = ker(df_x).$$

Exemplo 4.16 *: Seja $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por $f(u, v) = u^2 + v^3$. Temos que f é*

polinomial, logo é holomorfa. Além disso, $\nabla f = (2u, 3v^2)$*, portanto,* $0 \in \mathbb{C}^2$ *é a única singularidade de f.*

Afirmação: Se $z = (u, v) \in V^*$, então a reta tangente em z é gerada por $\xi(u, v) = (3v^2, -2u)$.

De fato, temos

$$df(\xi) = 2u\xi_1 + 3v^2\xi_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2u\xi_1 = -3v^2\xi_2.$$

Como $(u, v) \neq 0$, podemos supor $v \neq 0$. Assim, $\xi_2 = \dfrac{-2u\xi_1}{3v^2}$. Tomando $\xi_1 = 3v^2$, temos $\xi_2 = -2u$.

Vamos interpretar agora um campo contínuo de vetores $v : (V, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ como uma aplicação contínua cuja imagem está contida no tangente a V em cada ponto, isto é, $v(x) \in T_xV^*$, para $x \in V^*$. Ou ainda, $v(x) \in Ker(df_x)$. Como $V \subset B_\varepsilon(0)$ é fechado, novamente pelo teorema de Tietze, v se estende a uma vizinhança de V em $\mathbb{C}^{n+1}$. Em outras palavras, um campo sempre pode ser estendido ao espaço ambiente, bem como ser considerado como restrição de um.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [1].

Teorema 4.17 *: Seja* V *uma variedade analítica complexa em* $\mathbb{C}^m$ *com singularidade isolada em* 0*. Então:*

i. O espaço de campos holomorfos em V *com singularidade isolada em* 0 *têm dimensão infinita.*

ii. Se v *é um campo holomorfo com singularidade isolada em* 0*, então existem infinitas extensões de* v *a uma vizinhança de* 0 *em* $\mathbb{C}^m$*.*

Exemplo 4.18 *: Seja* $(V, 0)$ *o germe de* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$*, onde* f *possui uma singularidade isolada em* 0*. Dados* $\overline{\xi} = \left(-\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$ *e* $w \in V^*$*, temos*

$$df(\overline{\xi}(w)) = df\left(-\frac{\partial f}{\partial z_2}(w), \frac{\partial f}{\partial z_1}(w)\right) = -\frac{\partial f}{\partial z_1}(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2}(w) + \frac{\partial f}{\partial z_2}(w) \cdot \frac{\partial f}{\partial z_1}(w) = 0. \qquad (*)$$

Logo, $\overline{\xi}$ é um campo tangente à V com uma única singularidade isolada em 0. Além disso, dado $t \in \mathbb{C}$, temos que $\overline{\xi}$ é tangente à fibra $f^{-1}(t)$, pois $(*)$ não depende da escolha de w. Considere ξ a restrição de $\overline{\xi}$ à V. Seja g uma função holomorfa em $\mathbb{C}^2$ tal que $V = g^{-1}(0)$ e que representa um elemento não nulo no anel local O_2, então

$$\beta = \left(g - \frac{\partial f}{\partial z_2}, g + \frac{\partial f}{\partial z_1} \right),$$

coincide com ξ em V, mas não é tangente à todas as fibras de f pois, dado $w \in f^{-1}(t)$, com $t \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} df_w(\beta(w)) &= df_w\left(g(w) - \tfrac{\partial f}{\partial z_2}, g(w) + \tfrac{\partial f}{\partial z_1}(w) \right) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial z_1} \cdot g(w) - \tfrac{\partial f}{\partial z_1}(w)\tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w) + \tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w) g(w) + \tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w)\tfrac{\partial f}{\partial z_1}(w) \\ &= g(w)\left(\tfrac{\partial f}{\partial z_1}(w) + \tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w) \right) \end{aligned}$$

Como $t \neq 0$, temos $g(w) \neq 0$. Além disso, como $\frac{\partial f}{\partial z_1}(w)$ e $\frac{\partial f}{\partial z_2}(w)$ são L.I., temos que a soma é diferente de zero, portanto $df_w(\beta(w)) \neq 0$.

Exemplo 4.19 *: Sejam $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ uma função holomorfa com ponto crítico isolado $0 \in \mathbb{C}$ e $V = f^{-1}(0)$. Podemos fazer mudanças de coordenadas de tal forma que V intersecta o conjunto onde as derivadas parciais de f com relação às variáveis z_2 e z_3 são nulas somente em zero, isto é*

$$V \cap \left\{ \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3} \right\} = \{0\}. \qquad (1)$$

Defina um campo holomorfo em $\mathbb{C}^3$, dado por

$$\overline{\xi} = \left(f, \frac{\partial f}{\partial z_3}, -\frac{\partial f}{\partial z_2} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} df_w\left(\overline{\xi}(w)\right) &= df_w\left(f(w), \tfrac{\partial f}{\partial z_3}(w), -\tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w)\right) \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial z_1}(w)\cdot f(w) + \tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w)\cdot\tfrac{\partial f}{\partial z_3}(w) - \tfrac{\partial f}{\partial z_2}(w)\cdot\tfrac{\partial f}{\partial z_3}(w) = \tfrac{\partial f}{\partial z_1}\cdot f(w) \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) *e* (2) *temos que* $\overline{\xi}$ *tem singularidade isolada em* 0. *Ainda de* (2), *temos que* $df_w(\overline{\xi})$ *se anula onde* f *se anula, logo* $\overline{\xi}$ *é tangente à* V. *Tomando* $\xi = \overline{\xi}|_V$, *temos um campo sobre* V *que é holomorfo, com singularidade isolada na origem e uma extensão em* $\mathbb{C}^3$ *que também possui uma singularidade isolada em* 0. *Entretanto,* $\overline{\xi}$ *não é tangente à todas as fibras de* f. *Dado* $w \in f^{-1}(t)$, *com* $t \neq 0$, *temos*

$$df_w(\overline{\xi}(w)) = f(w)\cdot\frac{\partial f}{\partial z_1}(w) \quad \Rightarrow \quad \left(df_w(\overline{\xi}(w)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}(w) = 0\right).$$

Deste modo, temos que $\overline{\xi}$ *é tangente as fibras de* f *se, e somente se,* $\frac{\partial f}{\partial z_1} \equiv 0$. *Assim, teríamos* $V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) = \mathbb{C}^3$ *e consequentemente*

$$dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\right) = 1 \text{ ou } 2.$$

O que é absurdo, pois f *tem singularidade isolada em* 0. *Agora, esquecendo que nos foi dado* $\overline{\xi}$, *considere apenas o campo* ξ. *Temos que, como* f *se anula em* V, ξ *é da forma* $\xi = \left(0, \frac{\partial f}{\partial z_3}, -\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$. *Além disso, podemos estender* ξ *a um campo holomorfo* $\overline{\beta}$ *em* $\mathbb{C}^3$, *dado por* $\overline{\beta} = \left(0, \frac{\partial f}{\partial z_3}, -\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)$. *Este campo* $\overline{\beta}$ *é tangente à todas as superfícies não singulares* $f^{-1}(t)$. *O conjunto singular de* $\overline{\beta}$ *é a curva* $V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right)$, *definida pelo ideal* $I = \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right)$. *De fato, suponha que exista* $g \in O_3$ *tal que* $\frac{\partial f}{\partial z_2} = g\cdot\frac{\partial f}{\partial z_3}$, *assim,*

$$J(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, g\frac{\partial f}{\partial z_3}, \frac{\partial f}{\partial z_3} \right\rangle,$$

com $dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\right) = 1$ *ou* 2. *Absurdo pois* f *possui singularidade isolada na origem.*

Suponha que $dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\right)=2$. *Novamente teremos* $dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\right)=1$ *ou* 2, *o que é absurdo. Portanto* $dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\right)=1$. *Observe que* $V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)$ *intersecta cada fibra não singular* f^t *em um número finito de pontos, ou equivalentemente,*

$$dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\cap f^{-1}(t)\right)=0.$$

De fato, suponha que esta dimensão seja 1 *e considere para* $t\in\mathbb{C}^*$ *a função a* 1*-parâmetro*

$$\begin{aligned} g_t:\ (\mathbb{C}^3,0) &\to (\mathbb{C},0)\\ x &\mapsto f(x)-t \end{aligned}$$

Temos que $g_t^{-1}(0)=f^{-1}(t)$, *logo*

$$dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\cap f^{-1}(t)\right)=dim\left(V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\frac{\partial f}{\partial z_2},\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)\cap g_t^{-1}(0)\right)=0\ ou\ 1.$$

Absurdo, pois $t\in\mathbb{C}^*$ *é valor regular de* f. *Portanto, temos o desejado.*

4.3 O Índice GSV para Campos de Vetores em ICIS

Definição 4.20 *: Sejam* X *uma subvariedade analítica complexa em* $\mathbb{C}^n$ *de dimensão* m *e* I *um ideal que define* X. *Dizemos que* I *define uma interseção completa em* 0 *se* I *admite* $n-m$ *geradores* $\phi_1,...,\phi_{n-m}$ *em* $\mathcal{O}_n$. *Uma intersecção completa com singularidade isolada é denotada por ICIS.*

Definição 4.21 *: A Variedade de Stiefel* $W_{k+1}(n+k)$ *é o conjunto dos* $k+1$ *referenciais ortonormais em* $\mathbb{R}^{n+k}$.

Seja $(V,0)$ o germe de uma ICIS n-dimensional reduzida, com singularidade isolada em 0, definida pela aplicação holomorfa

$$f=(f_1,\ldots,f_k):(\mathbb{C}^{n+k},0)\to(\mathbb{C}^k,0).$$

Sejam $V^* = V - \{0\}$ e v um campo contínuo sobre V com singularidade isolada em 0. Indiquemos por $\overline{\nabla f_i(x)}$ o conjugado do vetor gradiente $\nabla f_i(x)$ de f_i, $i = 1, ..., k$. Então $\left\{v(x), \overline{\nabla f_1}(x), \ldots, \overline{\nabla f_k}(x)\right\}$ é um $k+1$ referencial, o qual podemos assumir, através de homotopia, ser um conjunto ortonormal. Deste modo, v define uma aplicação de V^* na variedade de Stiefel $W_{k+1}(n+k)$. Seja $K = S_\varepsilon \cap V$ o link de V em 0. Temos que K é uma variedade orientada real de dimensão $2n-1$ (ver [16], pg 81). Podemos definir então a seguinte aplicação contínua

$$\Phi_v = (v, \overline{\nabla f_1}, \ldots, \overline{\nabla f_k}) : K \to W_{k+1}(n+k).$$

Sobre as variedades de Stiefel, temos as seguintes propriedades (ver [10])

i. $W_{k+1}(n+k)$ é difeomorfa à $\frac{U(n+k)}{U(n-1)}$, onde $U(n)$ é o grupo das matrizes unitárias de dimensão $n \times n$.

ii. $W_{k+1}(n+k)$ é $(2n-2)$-conexa, isto é, é conexa por caminhos e $\Pi_i(W_{k+1}(n+k)) \equiv 0$, $1 \leq i \leq 2n-2$, onde Π_i é o grupo de homotopia de grau i.

iii. $\Pi_{2n-1}(W_{k+1}(n+k)) \cong \mathbb{Z}$ (ver também [22]).

Deste modo, podemos concluir que $\Pi_{2n-1}(W_{k+1}(n+k)) = H_{2n-1}(W_{k+1}(n+k))$ (ver Teorema de Hurewicz, em [9], pg. 366), ou seja, a homologia de $W_{k+1}(n+k)$ na dimensão $2n-1$ é $\mathbb{Z}$. Vamos considerar agora o caso em que K é conexa, caso contrário, considere apenas as componentes conexas. Então o grau de Φ_v está bem definido através do homeomorfismo induzido

$$(\Phi_v)_* : H_{2n-1}(K) \to H_{2n-1}(W_{k+1}(n+k)),$$

e denotaremos tal grau por $gr(\Phi_v)$.

Definição 4.22 *: O índice GSV de v em $0 \in V$, denotado por $Ind_{GSV}(v, 0)$, é o grau da aplicação Φ_v.*

Dada uma aplicação holomorfa $f : \mathbb{C}^{n+k} \to \mathbb{C}^k$, podemos considerar a fibração de Milnor associada à f (referências [19] e [17]). A fibra de Milnor F pode ser considerada uma variedade diferenciável, compacta, $2n$ dimensional e com bordo $\partial F = K$. O campo v pode ser considerado um campo não singular sobre ∂F

Teorema 4.23 *: Nas condições acima, cada fibra F_f tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de esferas S^{n-1}, e o número de esferas no buquê é igual ao número de Milnor μ.*

Uma referência para o teorema acima é [17].

Teorema 4.24 *: Seja $(V, 0)$ o germe de uma ICIS n-dimensional reduzida, com uma singularidade isolada em 0. Seja também v um campo em V com singularidade isolada em $0 \in V$. O índice GSV possui as seguintes propriedades*

(1) $Ind_{GSV}(v, 0) = Ind_{PH}(\widetilde{v}, F)$, onde $\widetilde{v}$ é a extensão de v para o interior da fibra F

(2) Se v é transversal à K, então

$$Ind_{GSV}(v, 0) = 1 + (-1)^n \mu,$$

onde $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ e μ o número de Milnor de f em 0.

(3) $\mu = (-1)^n \cdot (Ind_{GSV}(v, 0) - Ind_{Sch}(v, 0))$, independentemente da escolha de v.

Demonstração: (1) Sabemos que o conjunto $\left\{\overline{\nabla f_1}, \ldots, \overline{\nabla f_k}\right\}$ é LI em F e normal à V. Então o grau de Φ_v pode ser identificado como a obstrução de estender v à um campo tangente em F.

(2) Sabemos que se $\widetilde{v}$ é uma extensão de v, como K é o bordo de F, temos $\widetilde{v}$ transversal ao bordo. Assim, temos $Ind_{PH}(\widetilde{v}, F) = \chi(F)$, que por sua vez, $\chi(F) = \beta_0(F) - \beta_1(F) + ... + (-1)^n \beta_n(F)$, onde β_i é o i-ésimo número de Betti. Como F tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão n, temos que $b_i = 0$, $\forall i =$

$1, ..., n-1$, $b_0(F) = 1$ e $b_n = \mu$. Portanto, de (1), temos $ind_{GSV}(v, 0) = Ind_{PH}(\tilde{v}, F) = 1 + (-1)^n\mu$.

(3) Suponha v radial, então $Ind_{Sch}(v, 0) = 1$. De (2), temos que

$$\begin{aligned} \mu &= (-1)^n \cdot (Ind_{GSV}(v, 0) - 1) \\ &= (-1)^n \cdot (Ind_{GSV}(v, 0) - Ind_{Sch}(v, 0)). \end{aligned}$$

Suponha agora v um campo qualquer. Considere pequenas esferas $S_\varepsilon, S_{\varepsilon'}$, com $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, e seja w um campo no cilindro X contido em V, limitado pelos links $K_\varepsilon = S_\varepsilon \cap V$ e $K_{\varepsilon'} = S_{\varepsilon'} \cap V$, tal que w tem apenas um número finito p de singularidades a_i no interior de X e sua restrição a K_ε e $K_{\varepsilon'}$ são v e v_{rad}, respectivamente.

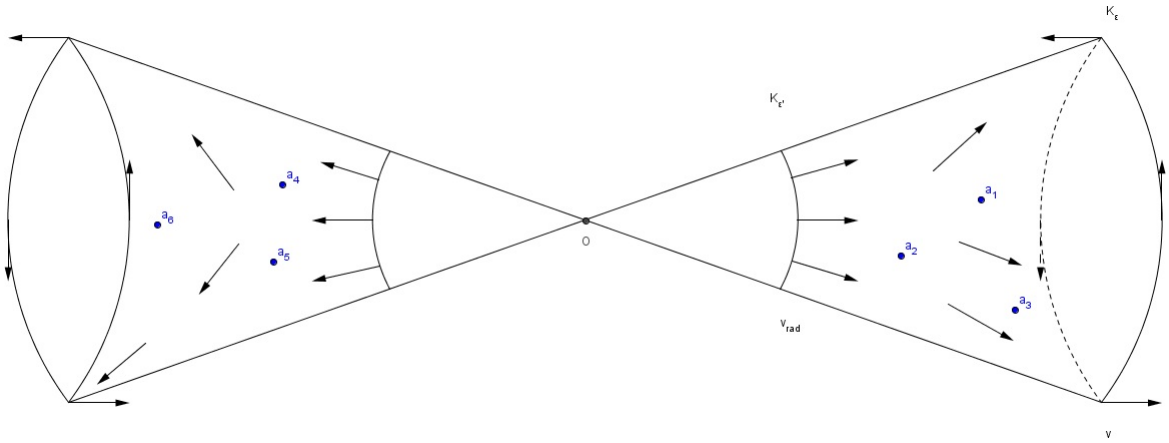

Figura 4.6: Extensão do campo radial

Assim, temos imediatamente que

$$Ind_{Sch}(v, 0) = 1 + d(v, v_{rad}) = Ind_{Sch}(v_{rad}) + \sum_{i=1}^{p} Ind_{PH}(w, a_i). \qquad (a)$$

Além disso, é possível provar que

$$Ind_{GSV}(v, 0) = Ind_{GSV}(v_{rad}, 0) + \sum_{i=1}^{p} Ind_{PH}(w, a_i). \qquad (b)$$

De fato, considere F como variedade diferenciável de dimensão $2n$ e bordo $\partial F = K$. Utilizando-se do item (1) e do Teorema de Poincaré-Hopf para variedades diferenciáveis com bordo (ver [19], capítulo 6), basta encontrar um campo conveniente.

Considere sobre V o campo $\widetilde{w}$ da seguinte forma: da origem à $K_{\varepsilon'}$ colocamos $\widetilde{w} = v_{rad}$. Em X colocamos $\widetilde{w} = w$. Como no bordo ∂F o campo $\widetilde{w}$ coincide com v, podemos tomar $\widetilde{w}$ como uma extensão de v à fibra F. Assim, temos que vale (b). Portanto, de (a) e (b), temos

$$Ind_{GSV}(v,0) - Ind_{GSV}(v_{rad},0) = Ind_{Sch}(v,0) - Ind_{Sch}(v_{rad},0)$$

$$\Rightarrow\ Ind_{GSV}(v,0) - Ind_{Sch}(v,0) = 1 + (-1)^n\mu - 1 = (-1)^n\mu.$$

■

Exemplo 4.25 *: Considere $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada na origem e considere também o campo*

$$v(w) = \left(-\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_1}\right).$$

Como vimos anteriormente, v é tangente à $V = f^{-1}(0)$ e a todas as fibras de f. Logo, pelo item (1) *do teorema anterior,*

$$Ind_{GSV}(v,0) = Ind_{PH}(\widetilde{v}, F) = 0,$$

onde $\widetilde{v} = v|_F$.

Mais geralmente, seja $f : (\mathbb{C}^{2n}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ holomorfa, com singularidade isolada em 0. Temos

$$df_z = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{2n}}\right).$$

Seja

$$\overline{\xi} = \left(-\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, -\frac{\partial f}{\partial z_4}, \frac{\partial f}{\partial z_3}, -\frac{\partial f}{\partial z_6}, \frac{\partial f}{\partial z_5}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial z_{2n}}, \frac{\partial f}{\partial z_{2n-1}}\right).$$

Claramente temos $df_z(\overline{\xi}(w)) = 0$, $\forall\ w \in C^{2n}$, isto é, $\overline{\xi}$ é tangente à todas as fibras de f. Assim, temos $Ind_{GSV}(\xi, 0) = 0$, onde $\xi = \overline{\xi}|_V$. Observe que também poderíamos ter tomado o campo

$$\overline{\xi} = \left(-\frac{\partial f}{\partial z_3}, -\frac{\partial f}{\partial z_4}, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial z_{2n-1}}, -\frac{\partial f}{\partial z_{2n}}, \frac{\partial f}{\partial z_{2n-3}}, \frac{\partial f}{\partial z_{2n-2}}\right)$$

e o resultado seria o mesmo.

Teorema 4.26 *: Sejam V uma variedade analítica complexa, compacta, com singularidades isoladas $x_1, \ldots, x_r$, as quais são todas germes de ICIS (nas equações reduzidas). Seja v um campo contínuo em V, singular em $x_1, \ldots, x_r$ e também possivelmente em $y_1, \ldots, y_s$. Seja*

$$Ind_{GSV}(v, V) = \sum_{i=1}^{r} Ind_{GSV}(v, x_i; V) + \sum_{j=1}^{s} Ind_{PH}(v, y_j). \qquad (*)$$

Então,

$$Ind_{GSV}(v, V) = \chi(V) + (-1)^n \cdot \sum_{i=1}^{r} \mu(x_i),$$

onde $\mu(x_i)$ é o número de Milnor de V em x_i.

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 4.24, que

$$(-1)^n \cdot \mu(x_i) + Ind_{Sch}(v, x_i) = Ind_{GSV}(v, x_i). \qquad (**)$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$, obtemos a expressão

$$Ind_{GSV}(v, V) = \sum_{i=1}^{r} Ind_{Sch}(v, x_i) + \sum_{j=1}^{s} Ind_{PH}(v, y_j) + (-1)^n \cdot \sum_{i=1}^{r} \mu(x_i).$$

Donde, pelo Teorema 4.15, temos o desejado.

■

Capítulo

5

Característica de Euler da fibra genérica de ICIS simples.

Seja $\mathcal{O}_{m,k} = \{f : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0); f \text{ é holomorfa}\}$. Seja $f \in \mathcal{O}_{m,k}$ tal que $V = f^{-1}(0)$ define uma ICIS.

A classificação de germes em $\mathcal{O}_{m,k}$ com relação ao grupo de contato $\mathcal{K}$ definido por Mather (em [18]), é útil para estudar variedades analíticas que são ICIS.

Por esta razão, definimos aqui o grupo $\mathcal{K}$ e a $\mathcal{K}-$equivalência.

Definição 5.1 *O grupo de contato é o conjunto*

$$\mathcal{K} = \{H : (\mathbb{C}^{m+k}, 0) \to (\mathbb{C}^{m+k}, 0); H \text{ é germe de difeomorfismo holomorfo,}$$

com H satisfazendo as seguintes condições:

i. $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$,

ii. $\theta(x, 0) = 0$ }

Segue das condições acima que $h : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ é também um germe de difeomorfismo.

Dizemos que $f, g \in \mathcal{O}_{m,k}$ são $\mathcal{K}-$equivalentes, e denotamos por $f \sim_{\mathcal{K}} g$, se existe $H \in \mathcal{K}$ tal que

$$H(x, f(x)) = (h(x), g(h(x))).$$

Observação 5.2 *Se f, g, h e H são como acima, temos que $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$.*

Definição 5.3 *: O espaço vetorial de todas as aplicações $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$ cujas componentes são polinômios de grau menor ou igual a r, com $f(0) = 0$, é chamado espaço de $r-$jatos, e a notação para tal espaço é $J^r(m, k)$. Os elementos de $J^r(m, k)$ são chamados de r-jatos.*

Suponha que $f : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^k$ seja uma aplicação suave e que $a \in \mathbb{C}^m$. Considere a série de Taylor de $f(x) - f(a)$, desta série, considere a expressão sem todos os termos maiores que r, para construir o r-jato do germe f no ponto a, o qual será denotado por $j^r f(a)$.

Definição 5.4 *Um germe $f \in \mathcal{O}_{m,k}$ é $\mathcal{K}-$simples se existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $r \geq r_0$, existe uma vizinhança U de $j^r f$ em $J^r(m, k)$ que intersecta apenas um número finito de $\mathcal{K}-$órbitas em $J^r(m, k)$.*

Se f é $\mathcal{K}-$simples e $V = f^{-1}(0)$ é ICIS, então dizemos que V é uma ICIS simples.

Primeira Tabela

O primeiro grupo de singularidades $\mathcal{K}$-simples, $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, é formado pelas singularidades simples de Arnol'd.

Notação	Forma normal	Restrições
A_μ	$z_1^{\mu+1} + Q_{n-1}$	$\mu \geq 1$
D_μ	$z_1^2 z_2 + z_2^{\mu-1} + Q_{n-2}$	$\mu \geq 4$
E_6	$z_1^3 + z_2^4 + Q_{n-2}$	-
E_7	$z_1^3 + z_1 z_2^3 + Q_{n-2}$	-
E_8	$z_1^3 + z_2^5 + Q_{n-2}$	-

Tabela 5.1: Germes $\mathcal{K}$-simples $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. $Q_{n-i} = z_{i+1}^2 + \cdots + z_n^2$.

Em todos os casos da Tabela 5.1 a variedade, dada pela imagem inversa do 0 pela forma normal, é uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^n$. A fibra genérica

$$F = \{z \in \mathbb{C}^n; f(z) = \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno}\}$$

é uma variedade suave. Pelos resultados de Milnor, $\chi(F) = 1 + (-1)^{n-1} \cdot \mu$. O número de Milnor neste caso é dado pela codimensão do ideal gerado pelo Jacobiano da forma normal, isto é, se f é a forma normal, então

$$\mu(f) = dim \frac{\mathcal{O}_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle}.$$

Primeiramente, observe que fazer o cálculo acima para funções de n variáveis é o mesmo que fazer para duas, visto que Q_{n-i} tem apenas termos quadráticos, donde ao calcularmos o Jacobiano, temos as últimas $n - i$ variáveis no ideal $\langle J \rangle$.

Exemplo 5.5 *: Seja* $f(z_1, ..., z_n) = z_1^{\mu+1} + Q_{n-1}$, *com* $\mu \geq 1$. *Temos assim que* $Jf = ((\mu + 1)z_1^{\mu}, z_2, z_3, ..., z_n)$. *Portanto, a conta se resume a*

$$\mu(f) = dim \frac{\mathcal{O}_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle} = dim \frac{\mathcal{O}_1}{\langle z_1 \rangle} = dim \left\{1, z_1, z_1^2, ..., z_1^{\mu-1}\right\}_{\mathbb{C}},$$

onde $\left\{1, z_1, z_1^2, ..., z_1^{\mu-1}\right\}_{\mathbb{C}}$ *o espaço complexo gerado por estes polinômios. Assim, temos que o número de Milnor de* f *é* μ, *portanto,* $\chi(F) = 1 + (-1)^{n-1}\mu$.

Exemplo 5.6 *: Seja* $f(z_1, ..., z_n) = z_1^3 + z_2^4 + Q_{n-2}$. *Como observamos, podemos considerar* f *como* $f(z_1, z_2) = z_1^3 + z_2^4$ *e o número de Milnor será o mesmo. Temos* $Jf = (3z_1^2, 4z_2^3)$, *o qual nos dá* $\langle Jf \rangle = \langle z_1^2, z_2^3 \rangle$. *Procedendo como no Capítulo* 1, *temos*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & z_1 & z_2 & & \\ & & z_1^2 & z_1z_2 & z_2^2 & & \\ & z_1^3 & z_1^2z_2 & z_1z_2^2 & z_2^3 & & \\ & z_1^4 & z_1^3z_2 & z_1^2z_2^2 & z_1z_2^3 & z_2^4 & \\ z_1^5 & z_1^4z_2 & z_1^3z_2^2 & z_1^2z_2^3 & z_1z_2^4 & z_2^5 & \end{array}$$

donde $cod_0 f = 1$, $cod_1 f = 2$, $cod_2 f = 2$ *pois* $z_1^2 \in Jf$, $cod_3 f = 1$ *pois* $z_2^3 \in Jf$, $cod_4 f = 0$ *e portanto, o número de Milnor de* f *é* 6.

Exemplo 5.7 *Seja* $f(z_1, z_2) = z_1^2 z_2 + z_2^{\mu-1}$. *Temos* $Jf = \langle z_1 z_2, z_1^2 + (\mu-1)z_2^{\mu-2}\rangle$. *Olhando para lista de monômios do exemplo anterior, temos que todos os termos mistos estão em* Jf. *Além disso, temos que* $z_1^3 = z_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial z_2} - (\mu-1)z_1 \cdot z_2^{\mu-2}$, *onde* $(\mu-1)z_1 \cdot z_2^{\mu-2}$ *é um termo misto. Como* $z_1^2 + (\mu-1)z_2^{\mu-2}$ *está em* Jf, *temos que* z_1^2 *ou* $(\mu-1)z_2^{\mu-2}$ *não pode ser contado no cálculo de* μ. *Portanto, retirando* z_1^2, *temos*

$$\mu(f) = dim\frac{\mathcal{O}_n}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial z_n} \right\rangle} = dim\frac{\mathcal{O}_2}{\langle z_1 z_2, z_1^2 + (\mu-1)z_2^{\mu-2}\rangle} = dim\left\{1, z_1, z_2, z_2^2, ..., z_2^{\mu-2}\right\}_{\mathbb{C}} = \mu.$$

Utilizando o programa Maple, calculamos os demais números de Milnor da Tabela 5.1, obtendo assim uma nova tabela

Notação	Forma normal	Restrições	$\mu(f)$	$\chi(F)$
A_μ	$z_1^{\mu+1} + Q_{n-1}$	$\mu \geq 1$	μ	$1+(-1)^{n-1}\mu$
D_μ	$z_1^2 z_2 + z_2^{\mu-1} + Q_{n-2}$	$\mu \geq 4$	μ	$1+(-1)^{n-1}\mu$
E_6	$z_1^3 + z_2^4 + Q_{n-2}$	-	6	$1+(-1)^{n-1}6$
E_7	$z_1^3 + z_1 z_2^3 + Q_{n-2}$	-	7	$1+(-1)^{n-1}7$
E_8	$z_1^3 + z_2^5 + Q_{n-2}$	-	8	$1+(-1)^{n-1}8$

Segunda Tabela

A Tabela 5.3 contém as interseções completas 0-dimensionais que são $\mathcal{K}$-simples.

Notação	Forma normal	Restrições
$C_{k,l}^{\pm}$	$(z_1 z_2, z_1^k + z_2^l)$	$l \geq k \geq 2$
$\widetilde{C}_{2k}$	$(z_1^2 + z_2^2, z_2^k)$	$k \geq 3$
F_{2m+1}	$(z_1^2 + z_2^3, z_2^m)$	$m \geq 3$
F_{2m+4}	$(z_1^2 + z_2^3, z_1 z_2^m)$	$m \geq 2$
G_{10}^*	(z_1^2, z_2^4)	-
$H_{m+5}^{\pm}$	$(z_1^2 + z_2^m, z_1 z_2^2)$	$m \geq 4$

Tabela 5.2: Germes $\mathcal{K}-$simples $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Para ICIS 0-dimensionais, definidas por $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, temos $f^{-1}(0) = 0$. A fibra $F = f^{-1}(\varepsilon)$, com $\varepsilon \neq 0$, é um número finito de pontos. Para ε e ε' genéricos, temos que

$\sharp f^{-1}(\varepsilon) = \sharp f^{-1}(\varepsilon')$ e é chamado a multiplicidade de V (ou de f). Esta multiplicidade, que denotaremos por $m_0(f)$, é dada por

$$m_0(f) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, ..., f_n \rangle}, \quad onde\ f = (f_1, ..., f_n).$$

Neste caso, como a dimensão da variedade é 0, temos o seguinte resultado

Proposição 5.8 *Se $V = f^{-1}(0)$ é uma ICIS 0-dimensional, então $\chi(F) = m_0(f) = 1 + \mu(f)$.*

Deste modo, pela proposição acima, para calcular $\chi(F)$, basta calcular $m_0(f)$. Vamos calcular esta multiplicidade para $C^{\pm}_{k,l}$ e F_{2m+1}, as demais contas foram feitas utilizando o Maple.

Singularidades simples de ICIS tem formas normais especiais, representadas por funções polinomiais quase homogêneas. Assim, para fazer o calculo do número de Milnor nestes casos, podemos utilizar a fórmula de Milnor Orlik.

Definição 5.9 *Uma aplicação $f = (f_1, ..., f_k) \in \mathcal{O}_{n,k}$ é quase-homogênea de tipo $(w_1, w_2, ..., w_n; d_1, d_2, ..., d_k)$ se*

$$f_i(\lambda^{w_1} z_1, \lambda^{w_2} z_2, ..., \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^{d_i} f_i(z_1, z_2, ..., z_n), \quad \forall i = 1, ..., k.$$

Teorema 5.10 *: (Milnor-Orlik) Seja $f = (f_1, ..., f_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ quase-homogênea de tipo $(w_1, w_2, ..., w_n; d_1, d_2, ..., d_n)$. Suponha $m_0(f)$ finito. Então*

$$m_0(f) = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n}{w_1 \cdot w_2 \cdot ... \cdot w_n}.$$

Exemplo 5.11 *: Consideremos a primeira função da segunda tabela $f(z_1, z_2) = (z_1 z_2, z_1^k + z_2^l)$. Note que todos os termos mistos $z_1^i z_2^j$, com $i, j > 0$, pertencem à $\langle z_1 z_2, z_1^k + z_2^l \rangle$. Note que $z_1^{k+1} = z_1(z_1^k + z_2^l) - z_1 z_2^l$, onde $z_1 z_2^l \in \langle z_1 z_2, z_1^k + z_2^l \rangle$, portanto $z_1^{k+1} \in \frac{\mathcal{O}_2}{\langle z_1 z_2, z_1^k + z_2^l \rangle}$. O mesmo vale para z_2^{k+1}. Novamente, como $z_1^k + z_2^l$ está em $\langle z_1 z_2, z_1^k + z_2^l \rangle$,*

temos que retirar um no cálculo de m_0. *Deste modo, retirando* z_2^l, *temos*

$$\frac{\mathcal{O}_2}{\langle z_1 z_2, z_1^k + z_2^l \rangle} = \left\{1, z_1, z_1^2, ..., z_1^k, z_2, z_2^2, ..., z_2^{l-1}\right\}_{\mathbb{C}}.$$

Portanto, $\chi(F) = k + l$ *e* $\mu(f) = k + l - 1$.

Exemplo 5.12 *Seja* $f(z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^2, z_2^k)$. *Note que* f *é quase-homogênea (na verdade homogênea) de tipo* $(1, 1; 2, k)$. *Assim, pelo Teorema 5.10, temos que* $m_0(f) = 2k$. *Portanto,* $\chi(F) = 2k$ *e* $\mu(f) = 2k - 1$.

Exemplo 5.13 *Seja* $f(z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^3, z_2^m)$, *com* $m \geq 3$. *Queremos computar então*

$$\frac{\mathcal{O}_2}{\langle z_1^2 + z_2^3, z_2^m \rangle}.$$

Olhando para a mesma lista de monômios do Exemplo 5.6, temos que $cod_0 f = 1$, $cod_1 f = 2$. *Note que* $z_1^2 = f_1(z_1, z_2) - z_2^3$, *onde* $z_2^3 \in \mathfrak{M}_2^3$. *Procedendo deste modo, vamos encontrar exatamente* 2 *elementos em cada linha, sendo eles* $z_1 z_2^j$ *e* z_2^{j+1}, *com* $1 \leq j \leq m - 1$. *Por fim, na* $m-$*ésima linha, temos* $z_2^m \in \langle J \rangle$, *donde* $cod_{m+1} f = 1$. *Assim,* $m_0 = 1 + \underbrace{2 + 2 + ... + 2}_{m-1 \ vezes} + 1 = 2m$ *e* $\mu(f) = 2m - 1$.

Exemplo 5.14 *Seja* $f(z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^3, z_1 z_2^m)$. *Temos que* f *é quase homogênea de tipo* $(3, 2; 6, 3 + 2m)$. *Assim,*

$$m_0 = \frac{6(3 + 2m)}{6} = 3 + 2m.$$

Portanto $\chi(F) = 2m + 3$ *e* $\mu(f) = 2m + 2$.

Utilizando novamente o Maple, obtemos a seguinte tabela

Terceira Tabela

Para $f = (f_1, f_2)$ na Tabela 5.4, temos que $V = f^{-1}(0)$ é uma curva complexa em $\mathbb{C}^3$, que é uma $ICIS$. Sejam $\Sigma(f)$ o conjunto singular de f e $\Delta(f) = f(\Sigma(f))$ a imagem

Notação	Forma normal	Restrições	$\chi(F)$	$\mu(f)$
$C^{\pm}_{k,l}$	$(z_1z_2, z_1^k + z_2^l)$	$l \geq k \geq 2$	$k+l$	$k+l-1$
$\widetilde{C}_{2k}$	$(z_1^2 + z_2^2, z_2^k)$	$k \geq 3$	$2k$	$2k-1$
F_{2m+1}	$(z_1^2 + z_2^3, z_2^m)$	$m \geq 3$	$2m$	$2m-1$
F_{2m+4}	$(z_1^2 + z_2^3, z_1z_2^m)$	$m \geq 2$	$2m+3$	$2m+2$
G^*_{10}	(z_1^2, z_2^4)	-	8	7
$H^{\pm}_{m+5}$	$(z_1^2 + z_2^m, z_1z_2^2)$	$m \geq 4$	$m+2$	$m+1$

Tabela 5.3: Germes $\mathcal{K}-$simples $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Notação	Forma normal	Restrições
S_μ	$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^{\mu-3}, z_2z_3)$	$\mu \geq 5$
T_7	$(z_1^2 + z_2^3 + z_3^3, z_2z_3)$	-
$\widetilde{T}_7$	$(z_1^2 + z_2^2, z_2^2 + z_3^2)$	-
T_8	$(z_1^2 + z_2^3 + z_3^4, z_2z_3)$	-
T_9	$(z_1^2 + z_2^3 + z_3^5, z_2z_3)$	-
U_7	$(z_1^2 + z_2z_3, z_1z_2 + z_3^3)$	-
U_8	$(z_1^2 + z_2z_3 + z_3^3, z_1z_2)$	-
U_9	$(z_1^2 + z_2z_3, z_1z_2 + z_3^4)$	-
W_8	$(z_1^2 + z_2^3, z_2^2 + z_1z_3)$	-
W_9	$(z_1^2 + z_2z_3^2, z_2^2 + z_1z_3)$	-
Z_9	$(z_1^2 + z_3^3, z_2^2 + z_3^3)$	-
Z_{10}	$(z_1^2 + z_2z_3^2, z_2^2 + z_3^3)$	-

Tabela 5.4: Germes $\mathcal{K}$-simples $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$.

deste conjunto singular pela f. Se $\varepsilon \notin \Delta(f)$, então $F = f^{-1}(\varepsilon)$ é a fibra genérica de f. Assim, novamente vale o Teorema 4.24, isto é,

$$\chi(F) = 1 + (-1)^n \mu(f) = 1 - \mu(f).$$

O problema é determinar o número de Milnor de f. Para isto, vamos usar a fórmula indutiva de Lê-Greuel (ver [17]).

Teorema 5.15 *: (Lê-Greuel) Seja $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $\pi(z_1, z_2, z_3) = az_1 + bz_2 + cz_3$, uma projeção linear genérica, com a, b, c genéricos. Então*

$$\mu(f) + \mu(f, \pi) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f, J(f, \pi)\rangle},$$

onde $(f,\pi):\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ *é dada por* $(f,\pi)(z_1,z_2,z_3)=(f_1(z_1,z_2,z_3),f_2(z_1,z_2,z_3),\pi(z_1,z_2,z_3))$.

Note que $\mu(f,\pi)=m_0(f,\pi)-1$, pois $(f,\pi)^{-1}(0)$ é uma $ICIS$ 0-dimensional.

Exemplo 5.16 *Seja* $f(z_1,z_2,z_3)=(z_1^2+z_2^2+z_3^{\mu-3},z_2\cdot z_3)$, *com* $\mu\geq 5$. *É possível mostrar que o resultado não depende dos termos* a,b,c *escolhidos para* π, *desde que os mesmos sejam escolhidos de forma correta (pelo Teorema de Sard, o conjunto ruim para escolha destas constantes tem medida nula). Neste exemplo, podemos tomar* $b=c=0$ *e* $a=1$, *o que nos dá* $\pi(z_1,z_2,z_3)=z_1$. *Assim,*

$$\frac{\mathcal{O}_3}{\left\langle z_1^2+z_2^2+z_3^{\mu-3},z_1z_2,z_1\right\rangle}\simeq\frac{\mathcal{O}_2}{\left\langle z_2^2+z_3^{\mu-3},z_2z_3\right\rangle}.$$

Pelo Exemplo 5.11 temos que $m_0(f,\pi)=4$ *se* $\mu=5$ *e* $m_0(f,\pi)=\mu-3+2=\mu-1$, *se* $\mu>5$. *Agora temos que calcular* $\dfrac{\mathcal{O}_3}{\langle f,J(f,\pi)\rangle}$, *onde*

$$J(f,\pi)=det\left(\begin{bmatrix}2z_1 & 2z_2 & (\mu-3)z_3^{\mu-4}\\ 0 & z_3 & z_2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)=2z_2^2-(\mu-3)z_3^{\mu-3}.$$

Aplicando o Teorema de Milnor-Orlik 5.10 para o germe

$$(z_1^2+z_2^2+z_3^{\mu-3},z_2z_3,2z_2^2-(\mu-3)z_3^{\mu-3}),$$

que é quase-homogêneo de tipo $(\mu-3,\mu-3,2;2(\mu-3),\mu-1,2(\mu-3))$, *temos que*

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathcal{O}_3}{\left\langle z_1^2+z_2^2+z_3^{\mu-3},z_2z_3,2z_2^2-(\mu-3)z_3^{\mu-3}\right\rangle}=\frac{2\cdot(\mu-3)\cdot(\mu-1)\cdot 2\cdot(\mu-3)}{(\mu-3)\cdot(\mu-3)\cdot 2}=2(\mu-1).$$

Portanto, se $\mu=5$, *temos que* $\mu(f)+4=8$, *logo* $\mu(f)=4$. *Se* $\mu>5$, *então temos* $\mu(f)+\mu-2=2\mu-2$, *logo* $\mu(f)=\mu$.

Exemplo 5.17 *Seja* $f(z_1,z_2,z_3)=(z_1^2+z_2^3+z_3^4,z_2z_3)$. *Vamos escolher* $\pi(z_1,z_2,z_3)=$

$z_1 - z_2 - z_3$. *Deste modo, aplicando o Teorema 5.10, temos*

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle z_1^2 + z_2^3 + z_3^4, z_2 z_3, z_1 - z_2 - z_3 \rangle} \simeq dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle z_2^2 + z_3^2 + z_2^3 + z_3^4, z_2 z_3 \rangle} = \frac{12 \cdot 7}{4 \cdot 3} = 4.$$

Calculando $J(f, \pi)$, *temos*

$$J(f,\pi) = det\left(\begin{bmatrix} 2z_1 & 3z_2^2 & 4z_3^3 \\ 0 & z_3 & z_2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 2z_1(z_2 - z_3) + 3z_2^3 - 4z_3^4.$$

Seja $J = (f, J(f,\pi)) = (z_1^2 + z_2^3 + z_3^4, z_2 z_3, 2z_1(z_2 - z_3) + 3z_2^3 - 4z_3^4)$. Assim,

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{J} &= dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle z_1^2+z_2^3+z_3^4, z_2, 2z_1(z_2-z_3)+3z_2^3-4z_3^4 \rangle} + dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle z_1^2+z_2^3+z_3^4, z_3, 2z_1(z_2-z_3)+3z_2^3-4z_3^4 \rangle} \\ &= dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle z_1^2+z_3^4, -2z_1 z_3 - 4z_3^4 \rangle} + dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle z_1^2+z_2^3, 2z_1 z_2 + 3z_2^3 \rangle} \\ &= 6 + 5 = 11 \end{aligned}$$

Então $\mu(f) = 11 - 4 = 7$.

Referências Bibliográficas

[1] Bonatti, Ch.; Gómez-Mont, X. *The Index of a Holomorphic Vector Field on a Singular Variety*, 222, Astérisque, 9 – 35, 1994.

[2] Brasselet, J. P. *Classes Características de Variedades Singulares*, Notas didáticas, 56, ICMC-USP, 2002.

[3] Brasselet, J. P.; Seade, J.; Suwa, T. *Vector Fields on Singular Varieties*, Springer, 2009.

[4] Dalbelo, T. M. *O Índice de Poincaré-Hopf e Generalizações no caso Singular*. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

[5] Gibson, C. G.; Wirthmuller, K.; Plessis, A.du; Looijenga, E.J. *Topological stability of smooth mappins*, LNM 552, Springer-Verlag. 1976.

[6] Gibson, C. G. *Singular Points of Smooth Mappings*, Research Notes in Mathematics, 25, 1979.

[7] Goryunov, V. V. *Singularities of Projections of Full Intersections*, 27, J. Sov. Math , 2785 – 2811, 1984.

[8] Gunning, R.; Rossi, H. *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[9] Hatcher, A. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[10] James, I.M. *The Topology of Stiefel Manifolds*, Cambridge University Press, 1976.

[11] Kendig, K. *Elementary Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 44, Springer, 1938.

[12] Lang, S. *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, Springer, 1993.

[13] Lang, S. *Introduction to Algebraic Geometry*, Interscience Publishers, 1958.

[14] Lima, E. L. *A característica de Euler-Poincaré*, Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, v.1, 47-62. 1985.

[15] Lima, E. L. *Curso de Análise*, vol. 2, Coleção Projeto Euclides, IMPA, 1981.

[16] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2007.

[17] Looijenga, E. J. N. *Isolated Singular Points of Complete Intersections*, London Mathematical Society, Lectures Notes Series 77, 1984.

[18] Mather, J. N. *Stability of C^∞ mappings, III: Finitely determined map-germs*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S., book 35, $127-156$, 1968.

[19] Milnor, J. W. *Topology from the Differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.

[20] Milnor, J. W. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton University Press and University of Tokio Press, 1968.

[21] Nestruev, J. *Smooth Manifolds and Observables*, Graduate Texts in Mathematics, 220, Berlin, Springer, 2002.

[22] Steenrod, N. *The Topology of Fibre Bundles*, Princenton University Press, 1951.

[23] Whitney, H. *Elementary Structure of Real Varieties*, Ann. of Math, 66, $545-556$, 1957.