SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 28.02.2002

Assinatura: _____

Enlaçamentos bordantes

Hildebrane Augusto dos Santos

Orientador: *Prof. Dr. José Eduardo Prado Pires de Campos*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Fevereiro/2002

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Eduardo Prado Pires de Campos

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

À Cormarie,
Alice e
Maria Antônia

Agradecimentos

A Deus, sem o qual, nada é possível.

À Cormarie, Jefferson e Haroldo pelo amor, compreensão e apoio em todas as horas.

Ao Prof. Dr. José Eduardo P. Pires de Campos pela oportunidade que me deu de “crescer”.

Aos meus amigos do IGCE-UNESP-Rio Claro e do ICMC-USP pelo incentivo e solidariedades constantes. Em especial à Elíris. Obrigada pelos conselhos, pela ajuda nas disciplinas em que tive dificuldades, pelas várias vezes que me emprestou seu “ombro amigo” e por fazer da sua casa o meu outro lar.

Ao meu melhor amigo Sérgio pela amizade iniciada e consolidada durante o mestrado e pelos bons e maus momentos compartilhados.

Ao Esdras pelas noites de estudo e pela ajuda quando o assunto era computador.

A todos os meus Professores, por tudo que aprendi, por todo conhecimento que me ensinaram, tanto em nível acadêmico como em nível pessoal. Em especial aos Professores Eduardo Alex Hernandez Morales (USP - São Carlos), Marcelo José Saia (USP - São Carlos) e Sérgio Roberto Nobre (UNESP - Rio Claro) pela preocupação e por acreditarem em mim.

À minha ex-orientadora Prof^ª Alice (UNESP - Rio Claro) por tudo o que fez por mim, sua exemplar orientação, pelo incentivo e acima de tudo por sua amizade.

Ao Júlio pela atenção, paciência, palavras de carinho e pela amizade sempre sincera.

À Maíra por ter agüentado o meu mal-humor nestes dois anos em que moramos juntas.

Ao Departamento de Matemática do ICMC-USP São Carlos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À todas as pessoas que contuíbuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Resumo

Todo nó (ou enlaçamento) em $\mathbb{R}^3$ (ou S^3) é bordo de uma superfície conexa, compacta e orientável chamada uma superfície de Seifert do nó (ou enlaçamento). Não é verdade, no entanto, que dado um enlaçamento em $\mathbb{R}^3$ (ou S^3) sempre se possa obter, para cada componente do enlaçamento, uma superfície de Seifert de modo que todas elas sejam disjuntas duas a duas. Os enlaçamentos que gozam dessa propriedade são chamados enlaçamentos bordantes e uma tal coleção de superfícies de Seifert é chamada uma BL-superfície de Seifert.

Às diferentes BL-superfícies de Seifert de um mesmo k -enlaçamento bordante correspondem diferentes cisões (splittings), (isto é, certos epimorfismos do grupo fundamental do k -enlaçamento no grupo livre em k geradores), a menos dos cobordismos apropriados.

O objetivo deste trabalho é apresentar um teorema que fornece um método geométrico para se obter todas as cisões (splittings) de qualquer enlaçamento bordante dado.

Abstract

Every knot (or link) in $\mathbb{R}^3$ or S^3 bounds a connected, oriented, compact surface called a Seifert surface for the knot (or link). A boundary link is a link whose components bound disjoint Seifert surfaces; we shall call the union of such collection of surfaces, a BL-Seifert surface for the boundary link.

Different BL-Seifert surfaces of the same boundary link of k -components correspond to different splitting (that is, certain epimorphism of the fundamental group of the k -link to the free group on k generators), up to the appropriate cobordisms.

The purpose of this work is to present a geometric method to obtain all possible splittings of any given boundary link.

Sumário

Introdução	i
1 Tranças	1
1.1 Tranças Geométricas.	1
1.2 Representação de Tranças como Automorfismos de Grupos Livres.	7
2 Enlaçamentos	12
2.1 A Apresentação de Wirtinger.	14
2.2 O grupo de cobordismo dos nós.	18
2.3 Superfícies de Seifert.	19
3 Enlaçamentos Bordantes	24
3.1 Enlaçamentos Bordantes.	24
3.2 Enlaçamentos $F(k)$	32
4 Enlaçamentos de Intervalos	36
4.1 O Grupo $C_{1,k}$	36
4.2 A Ação de Habegger-Lin e o Cobordismo d-baseado.	39
5 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes	43
5.1 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes.	43
5.2 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes e	
Enlaçamentos $F(k)$	49
5.3 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes e Tranças Puras.	51
Referências Bibliográficas	65

Introdução

Um k -enlaçamento é um mergulho de k cópias disjuntas de S^1 em $\mathbb{R}^3$. Existem várias relações de equivalência entre enlaçamentos tais como isotopia e cobordismo.

Geralmente é útil comparar, via nossas relações de equivalência, qualquer enlaçamento ao enlaçamento trivial padrão. Qualquer enlaçamento isotópico ao enlaçamento trivial padrão é chamado trivial; se o enlaçamento é cobordante ao trivial, dizemos que ele é slice.

Um conceito interessante, mais fraco do que trivialidade, é o de enlaçamento bordante: um k -enlaçamento é trivial se ele se estende a um mergulho de k cópias disjuntas de um disco D^2 em $\mathbb{R}^3$; um k -enlaçamento é bordante se ele se estende a um mergulho de k superfícies compactas, conexas, orientáveis e disjuntas duas a duas, cada uma delas com bordo S^1 . A união destas superfícies é chamada uma BL-superfície de Seifert do enlaçamento.

A condição de um enlaçamento ser bordante tem sua versão algébrica como segue: um k -enlaçamento é bordante se, e somente se, existe um epimorfismo de $\Pi_1(X)$, onde $\Pi_1(X)$ é o grupo (fundamental do complemento) do enlaçamento, sobre o grupo livre em k geradores, que leva certos elementos distinguidos, chamados meridianos, nos geradores. Chamaremos um tal epimorfismo de uma cisão (ou splitting) para o enlaçamento dado.

O resultado final deste trabalho (Teorema 5.3.3) fornece um método geométrico para se obter todas as cisões de um enlaçamento bordante. Tal método utiliza-se de uma ação do grupo das tranças puras no conjunto dos enlaçamentos de intervalos bordantes.

Este trabalho está organizado como segue:

No capítulo 1 são introduzidas noções de tranças, o teorema da Apresentação de grupo de tranças de Artin e o teorema da Representação deste grupo.

No capítulo 2, descrevemos um procedimento para escrevermos uma apresentação do grupo de um nó em $\mathbb{R}^3$: a Apresentação de Wirtinger. Definimos o grupo de cobordismo dos nós e superfícies de Seifert.

No capítulo 3 são dadas as definições e alguns resultados sobre enlaçamentos bordantes

e enlaçamentos $F(k)$, (isto é, um enlaçamento bordante munido de uma de suas cisões (splittings)).

O capítulo 4 é dedicado ao estudo da ação de Habegger-Lin e do cobordismo d-baseado, os quais serão utilizados no resultado final.

No capítulo 5 introduz-se a noção de enlaçamentos de intervalos bordantes, relacionando-se tais enlaçamentos com os enlaçamentos $F(k)$ e demonstra-se o Teorema 5.3.3.

Capítulo 1

Tranças

As tranças, como objeto matemático, foram introduzidas pelo matemático alemão Emil Artin em 1925. Artin propôs usar as tranças no estudo de nós e enlaçamentos. Existem agora aplicações de tranças na topologia, na geometria, na teoria de singularidades, em sistemas dinâmicos, etc.

Começaremos com a definição de uma trança geométrica com n cordas entre dois planos paralelos em $\mathbb{R}^3$.

Mostraremos o Teorema da Apresentação do grupo de tranças de Artin em termos de geradores e relações e o Teorema da Representação deste grupo, como um subgrupo do grupo de automorfismos do grupo livre com n geradores.

1.1 Tranças Geométricas.

Em $\mathbb{R}^3$ escolhemos um sistema de coordenadas (x, y, z) no qual o eixo z aponta verticalmente para baixo. Consideremos dois planos horizontais paralelos com coordenadas z constante igual a 0 e 1 respectivamente. Chamemos o plano $z = 0$ de plano superior e o plano $z = 1$ de plano inferior. Marquemos n pontos diferentes $P_1, \dots, P_n$ em uma reta do plano superior e os projetemos verticalmente sobre o plano inferior, obtendo assim os pontos $P'_1, \dots, P'_n$.

Definição 1.1.1. Um arco em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de um mergulho $\mathcal{A}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ do intervalo unitário $I = [0, 1]$ em $\mathbb{R}^3$. Usaremos a mesma notação para o arco e para o mergulho correspondente.

Definição 1.1.2. Uma **trança (geométrica)** com n cordas ou uma **n -trança** β é um sistema de n arcos $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ mergulhados em $\mathbb{R}^3$, onde o i -ésimo arco $\mathcal{A}_i$ está contido em $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ e liga o ponto P_i do plano superior ao ponto $P_{\tau(i)}$ do plano inferior, para alguma permutação τ de $\{1, \dots, n\}$ de modo que

- (1) Cada arco $\mathcal{A}_i$ intercepta cada plano paralelo intermediário aos planos superior e inferior exatamente uma vez.
- (2) Os arcos $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ interceptam cada plano intermediário aos planos superior e inferior em exatamente n pontos diferentes.

A permutação τ é chamada a **permutação da trança**. O arco $\mathcal{A}_i$ é chamado a i -ésima corda da trança.

Figura 1

Vamos definir agora equivalência de tranças.

Definição 1.1.3. Duas n -tranças $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{A}_1^0, \dots, \mathcal{A}_n^0\}$ e $\mathcal{A}^1 = \{\mathcal{A}_1^1, \dots, \mathcal{A}_n^1\}$, com a mesma permutação τ , são chamadas **equivalentes (ou homotópicas)** se existe uma homotopia, através de tranças, com permutação τ , de $\mathcal{A}^0$ à $\mathcal{A}^1$. Em outras palavras, se existem n aplicações contínuas $F_i^1 : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq n$ tal que

$$F_i(t, 0) = \mathcal{A}_i^0(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F_i(t, 1) = \mathcal{A}_i^1(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F_i(0, s) = P_i, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$F_i(1, s) = P'_{\tau(i)}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

e tal que se definirmos $\mathcal{A}_i^s : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $\mathcal{A}_i^s = F_i(t, s)$, então $\mathcal{A}^s = \{\mathcal{A}_1^s, \dots, \mathcal{A}_n^s\}$ é uma n -trança com permutação τ , para cada $0 \leq s \leq 1$.

A projeção (sombra) de uma trança β em um plano é dada como na figura 2. Notemos que (através de equivalências) os cruzamentos das cordas ocorrem em níveis diferentes e que nos cruzamentos, as cordas que passam por cima e por baixo são indicadas.

Figura 2

Para $1 \leq i \leq n-1$, denotemos por σ_i a n -**trança elementar**, na qual a i -ésima corda passa por cima da corda $i+1$ uma vez e todas as outras vão verticalmente em linha reta do início ao fim.

Figura 3

Seja $B(n)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de n -tranças. Vamos definir uma estrutura de grupo neste conjunto.

Sejam β_1 e β_2 tranças com n cordas. Definimos o **produto** (composição) de β_1 e β_2 , denotado por $\beta_1 \cdot \beta_2$, como segue: primeiro, coloquemos a trança β_2 em baixo da β_1 unindo o plano inferior de β_1 ao plano superior de β_2 . Então removamos o plano que une estas

duas tranças. Agora, vamos comprimí-las para que fiquem entre os planos $z = 0$ e $z = 1$, e obteremos a trança $\beta_1 \cdot \beta_2$.

Se β_1 e β_2 forem substituídas por tranças homotópicas β'_1 e β'_2 respectivamente, então podemos notar que o produto das tranças $\beta_1 \cdot \beta_2$ e $\beta'_1 \cdot \beta'_2$ são homotópicos. Logo, o produto de classes de equivalências de n -tranças está bem definido e determina um produto em $B(n)$.

Figura 4

Facilmente pode-se observar a associatividade em $B(n)$. Veja figura 5.

Figura 5

A trança trivial ε é aquela em que todas as cordas vão verticalmente em linha reta do plano superior ao plano inferior. Notemos que ε é o **elemento neutro** para o produto em $B(n)$.

Figura 6

Figura 7

A **trança inversa** β^{-1} da trança β é a imagem refletida de β com relação ao seu plano inferior.

Portanto, o conjunto $B(n)$ das classes de equivalência de n -tranças é um grupo. Este grupo é chamado **o grupo de tranças de Artin com n cordas**.

Para a n -trança elementar σ_i , $1 \leq i \leq n-1$, o elemento inverso σ_i^{-1} é obtido invertendo o cruzamento da corda i por cima da corda $i+1$ para o cruzamento da corda $i+1$ por cima da corda i .

Observação 1.1.4. Quando for claro no contexto, confundiremos uma trança com sua classe de equivalência, utilizando a mesma notação para ambas. Qualquer n -trança pode ser escrita como um produto de n -tranças elementares σ_i , $1 \leq i \leq n-1$, e de seus inversos. Logo, as n -tranças elementares $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e seus inversos geram o grupo $B(n)$. Por exemplo, a trança β com projeção na figura 2 pode ser escrita como o produto $\sigma_2^{-1}\sigma_1$.

Devemos olhar agora para as relações entre os elementos de $B(n)$. Primeiro notemos que

Figura 8

$$(1) \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \text{ para } |i - j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq n - 1$$

$$(2) \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq n - 2.$$

As figuras abaixo ilustram as relações (1) e (2).

Figura 9

No primeiro artigo de Artin sobre grupos de tranças (1925), foi dada uma demonstração de que as relações (1) e (2) geravam todas as relações entre os elementos de $B(n)$. Enunciaremos este resultado como o **Teorema 1.1.5** a seguir.

Teorema 1.1.5. Teorema da Apresentação de Artin.

O grupo $B(n)$ de tranças geométricas com n cordas admite uma apresentação com geradores: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ e

relações: (1) $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i$ para $|i - j| \geq 2$, $1 \leq i, j \leq n - 1$

(2) $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n - 2$.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [[8] pág 18].

1.2 Representação de Tranças como Automorfismos de Grupos Livres.

Nosso objetivo nesta seção é provar que o grupo de tranças $B(n)$ é isomorfo a um subgrupo do grupo de automorfismos $AutF(n)$ do grupo livre $F(n)$ com n geradores.

Teorema 1.2.1. Teorema da Representação de Artin.

Seja $F(n)$ o grupo livre em um conjunto de n geradores $x_1, \dots, x_n$ para um inteiro fixo $n \geq 1$ e seja $AutF(n)$ o grupo de automorfismos de $F(n)$. Então $B(n)$ é isomorfo ao subgrupo de $AutF(n)$ consistindo dos automorfismos $\bar{\beta}$ de $F(n)$ satisfazendo as seguintes condições

$$\beta(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}, 1 \leq i \leq n$$

$$e \quad \bar{\beta}(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n,$$

onde τ é uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ e todo A_i pertence a $F(n)$, isto é, cada A_i é uma palavra nos geradores $x_1, \dots, x_n$.

Sob este isomorfismo, a trança elementar σ_i , $1 \leq i \leq n - 1$, corresponde ao automorfismo $\bar{\sigma}_i \in AutF(n)$ definido por

$$\bar{\sigma}_i(x_i) = x_i x_{i+1} x_i^{-1}$$

$$\bar{\sigma}_i(x_{i+1}) = x_i$$

$$\bar{\sigma}_i(x_j) = x_j, \forall j \neq i, i + 1,$$

e a permutação τ para o automorfismo $\bar{\beta} \in \text{Aut}F(n)$ correspondendo à trança $\beta \in B(n)$ é exatamente a permutação da trança.

Daremos a seguir uma versão resumida da prova deste teorema. Uma versão mais detalhada pode ser encontrada em [[2] pág 30].

Sejam $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (2, 0, 0), \dots, P_n = (n, 0, 0)$ pontos no plano $z = 0$ e $P'_1 = (1, 0, 1)$, $P'_2 = (2, 0, 1), \dots, P'_n = (n, 0, 1)$ pontos no plano $z = 1$ os conjunto de pontos iniciais e finais, respectivamente, para as tranças.

Sejam $P_0 = (0, 0, 0)$, $P'_0 = (0, 0, 1)$, $\mathbb{R}_0^2$ o plano $z = 0$ e $\mathbb{R}_1^2$ o plano $z = 1$.

O grupo livre $F(n)$ com geradores $x_1, \dots, x_n$ pode ser identificado com os grupos fundamentais dos planos perfurados

$$\Pi_1(\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}, P_0) \cong \Pi_1(\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}, P'_0).$$

O gerador x_i é representado em $\Pi_1(\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}, P_0)$ pelo laço em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ com ponto base P_0 que circunda P_i uma vez no sentido anti-horário, como pode ser visto na figura 10. Analogamente, x_i tem um representante em $\Pi_1(\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}, P'_0)$.

Figura 10

Seja β uma trança em $\mathbb{R}^3$. Consideremos $\mathbb{R}^2 \times I$ com as cordas da trança β removidas. Correspondendo a β , podemos definir uma aplicação

$$\bar{\beta} : F(n) \cong \Pi_1(\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}, P_0) \rightarrow F(n) \cong \Pi_1(\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}, P'_0),$$

empurrando um laço l em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, com ponto base P_0 , para baixo ao longo dos espaços vazios deixados pelas n cordas de β em um laço $\bar{\beta}(l)$ em $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}$ com

ponto base P'_0 . A figura 11 ilustra o processo de obtenção de $\bar{\beta}$ a partir de β .

Figura 11

Este procedimento define uma aplicação $\bar{\beta}$ em classes de homotopia conforme a

Afirmção 1: Se l_1 e l_2 são laços em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, com ponto base P_0 , os quais são homotópicos relativamente a P_0 , então $\bar{\beta}(l_1)$ e $\bar{\beta}(l_2)$ são homotópicos em $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}$ relativamente a P'_0 .

Afirmção 2: Se l_1 e l_2 são laços em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, com ponto base P_0 , então o produto dos laços $l_1 \cdot l_2$ satisfaz $\bar{\beta}(l_1 \cdot l_2) = (\bar{\beta}(l_1)) \cdot (\bar{\beta}(l_2))$. Logo, β é um homomorfismo.

Afirmção 3: $\bar{\beta}$ é um automorfismo.

Para provar esta afirmação precisamos encontrar um homomorfismo inverso à $\bar{\beta}$.

O homomorfismo inverso $\bar{\beta}^{-1}$ é obtido empurrando um laço com ponto base P'_0 em $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}$ para cima, ao longo dos espaços vazios deixados pelas cordas de β , até obtermos um laço em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ com ponto base P_0 , ou seja, $\bar{\beta}^{-1} = \overline{\beta^{-1}}$.

Da definição de homotopia de tranças segue que

Afirmção 4: Se β' é uma trança com n cordas homotópica a β , então $\bar{\beta}' = \bar{\beta}$.

A afirmação 4 garante que se obtém uma aplicação bem definida de $B(n)$ em $AutF(n)$.

Afirmção 5: A aplicação $B(n) \rightarrow AutF(n)$, que associa uma trança $\beta \in B(n)$ ao automorfismo $\bar{\beta} \in AutF(n)$ é um homomorfismo. Em outras palavras, se β_1 e β_2 são n -tranças quaisquer, então $\overline{\beta_1 \cdot \beta_2} = \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2$.

Afirmção 6: O automorfismo $\bar{\beta} \in \text{Aut}F(n)$, correspondendo a n -trança $\beta \in B(n)$ satisfaz $\bar{\beta}(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

Como cada $x_i, 1 \leq i \leq n$, é representado por um caminho fechado em $\mathbb{R}_0^2 \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ com ponto base P_0 , que circunda P_i uma vez no sentido anti-horário, o produto $x_1 x_2 \dots x_n$ é dado pelo caminho

Figura 12

ou seja, os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$ são circundados uma vez. Mas este caminho é homotópico ao caminho

Figura 13

O mesmo procedimento é realizado para o caminho fechado $\bar{\beta}(x_1)\bar{\beta}(x_2)\dots\bar{\beta}(x_n) = \bar{\beta}(x_1 x_2 \dots x_n)$ em $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{P'_1, \dots, P'_n\}$, o qual circunda uma vez $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ no sentido anti-horário. Portanto, $\bar{\beta}(x_1 x_2 \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$.

Afirmção 7: Consideremos $\sigma_i, 1 \leq i \leq n-1$ a trança elementar com n cordas. Então

$$\bar{\sigma}_j(x_j) = x_j, j \neq i, i+1 \quad \text{e}$$

$$\bar{\sigma}_i(x_{i+1}) = x_i.$$

Além disso, quando empurramos um caminho que representa x_i para baixo ao longo da trança σ_i , ele passa na frente de P'_i , como na figura 14a, obtendo-se um caminho que é homotópico ao caminho ilustrado em 14b que representa $x_i x_{i+1} x_i^{-1}$. Logo,

$$\bar{\sigma}_i(x_i) = x_i x_{i+1} x_i^{-1}.$$

Figura 14

As flechas 1, 2 e 3 correspondem aos laços x_i , x_{i+1} e x_i^{-1} , respectivamente, percorridas nesta ordem.

Afirmção 8: $\bar{\beta}(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}$, $1 \leq i \leq n$.

Desde que $\overline{\sigma_i^{-1}} = (\bar{\sigma}_i)^{-1}$, então

$$\overline{\sigma_i^{-1}}(x_j) = x_j, j \neq i, i+1$$

$$\overline{\sigma_i^{-1}}(x_i) = x_{i+1}$$

$$\overline{\sigma_i^{-1}}(x_{i+1}) = x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1}.$$

Seja $\beta \in B(n)$ tal que $\beta = \sigma_{i_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\epsilon_k}$ com $\epsilon_j = \pm 1$, $1 \leq j < k$. Então, pela afirmação 5, $\bar{\beta} = \overline{\sigma_{i_1}^{\epsilon_1}} \cdot \dots \cdot \overline{\sigma_{i_k}^{\epsilon_k}}$. Segue que existem elementos $A_i \in F(n)$, $1 \leq i \leq n$ e uma permutação τ de $\{1, \dots, n\}$ onde

$$\bar{\beta}(x_i) = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}, 1 \leq i \leq n.$$

Considerando-se a atuação de cada $\overline{\sigma_i^{\pm 1}}$, vê-se que τ é a permutação da trança β .

Afirmção 9: Qualquer automorfismo em $Aut F(n)$, satisfazendo as condições do teorema é realizado por uma única trança em $B(n)$.

Não daremos aqui a demonstração desta afirmação.

Assim, concluímos a prova deste teorema, obtendo o isomorfismo desejado. ■

Capítulo 2

Enlaçamentos

Definição 2.0.2. Um **enlaçamento** é um mergulho (PL ou) diferenciável $K : S_1^1 \cup \dots \cup S_r^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ou S^3), onde cada S_i^1 , $1 \leq i \leq r$, é homeomorfa a S^1 . Se $r = 1$ o enlaçamento é chamado um **nó**.

Definição 2.0.3. Dois mergulhos $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são **isotópicos** se existe em mergulho

$$F : X \times I \rightarrow Y \times I$$

tal que $F(x, t) = (f(x, t), t)$, $x \in X$, $t \in I$ com $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$.

F é chamada uma **isotopia preservando nível** conectando f_0 e f_1 .

Definição 2.0.4. Dois mergulhos $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ são **ambiente isotópicos** se existe uma isotopia preservando nível

$$H : Y \times I \rightarrow Y \times I, \quad H(y, t) = (h(y, t), t),$$

com $f_1 = h_1 f_0$ e $h_0 = id_Y$, onde $h_t(y) = h(y, t)$. H é chamada uma **isotopia ambiente**.

Uma isotopia ambiente define uma isotopia F conectando f_0 e f_1 por $F(x, t) = (h_t f_0(x), t)$. A diferença entre as duas definições é a seguinte: uma isotopia move o conjunto $f_0(X)$ continuamente sobre $f_1(X)$ em Y , sem dar atenção aos pontos de Y que não pertencem a $f_t(X)$, $0 \leq t \leq 1$. Uma isotopia ambiente requer que Y mova-se continuamente com $f_t(X)$, $0 \leq t \leq 1$.

Definição 2.0.5. Dois nós ou enlaçamentos K e K' são **equivalentes** se eles são ambiente isotópicos.

Proposição 2.0.6. *Sejam K e K' nós em S^3 . As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (1) *Existe um homeomorfismo preservando orientação $f : S^3 \rightarrow S^3$ que leva K sobre K' , $f(K) = K'$.*
- (2) *K e K' são equivalentes (ambiente isotópicos).*

Uma prova desta proposição pode ser encontrada em [[2] pág 06].

Observação 2.0.7. Se os nós são orientados, isto é, se S^1 é orientada, a isotopia ambiente deve preservar a orientação.

No caso de enlaçamentos de duas ou mais componentes determinamos uma ordenação fixada para as componentes e exigimos que a isotopia ambiente respeite as ordenações. As classes de equivalência de um nó ou enlaçamento são chamadas de **tipo de nó** ou **tipo de enlaçamento**, respectivamente.

Se K é um nó ou enlaçamento em $\mathbb{R}^3$, o grupo fundamental $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ do complemento de K é chamado, simplesmente, o **grupo de K** . Notemos que o grupo é o mesmo, a menos de isomorfismo, se considerarmos o nó em S^3 ou em $\mathbb{R}^3$, conforme a proposição abaixo.

Proposição 2.0.8. *Se B é qualquer subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbb{R}^n \setminus B$ é conexo por caminhos e $n \geq 3$, então a inclusão induz um isomorfismo*

$$\Pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(S^n \setminus B).$$

Demonstração:

Escolhamos uma vizinhança qualquer U de ∞ em S^n , a qual não intercepta B e é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Logo, $U \cap \mathbb{R}^n = U \setminus \infty \cong S^{n-1}$. Então U e $\mathbb{R}^n \cap U$ são simplesmente conexos. Como $S^n = U \cup (\mathbb{R}^n \setminus B)$, aplicando o teorema de Seifert-Van Kampen, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1((\mathbb{R}^n \setminus B) \cap U) & \longrightarrow & \Pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U) & \longrightarrow & \Pi_1(\underbrace{(\mathbb{R}^n \cup U)}_{S^n} \setminus B) \end{array}$$

Como U e $(\mathbb{R}^n \setminus B) \cap U = \mathbb{R}^n \cap U$ são simplesmente conexos, segue que $\Pi_1(S^n \setminus B) \cong \Pi_1(\mathbb{R}^n \setminus B)$.

Definição 2.0.9. A inclusão natural $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ é o nó trivial.

Proposição 2.0.10. O nó trivial tem grupo fundamental cíclico infinito.

Demonstração:

Seja P o plano $y = 0$. Sejam S_1 e S_2 os semi-espacos fechados determinados por P .

O nó trivial K_0 intercepta S_1 e S_2 em arcos A_1 e A_2 respectivamente. Notemos que $X_i = S_i \setminus A_i$, $1 \leq i \leq 2$, $X_1 \cap X_2$ são abertos e conexos por caminhos e $\mathbb{R}^3 \setminus K_0 = X_1 \cup X_2$. Aplicando o teorema de Seifert e Van-Kampen temos que $\Pi_1(X_1 \cup X_2) = \Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_0) = \mathbb{Z}$, desde que $\Pi_1(X_i) = \Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $1 \leq i \leq 2$. ■

Definição 2.0.11. Um nó é **tame** se ele é equivalente a um polígono fechado simples.

No que segue consideraremos apenas nós tames.

2.1 A Apresentação de Wirtinger.

Esta seção descreve um procedimento para escrevermos uma apresentação do grupo de um nó K em $\mathbb{R}^3$. Na figura 15, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são arcos conexos cuja união é K . Consideremos os arcos α_i , $i = 1, \dots, n$ em um plano P , digamos o plano xy .

Figura 15

Assumimos uma orientação para o nó. Tracemos uma pequena seta, denotada por x_i , passando sob cada α_i na direção da direita para a esquerda. Então podemos representar um caminho fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus K$ como segue. O ponto $(0, 0, 1) = *$ é tomado como o

ponto base (melhor imaginado como o olho do observador). Denotemos também por x_i o caminho fechado que consiste no triângulo orientado de $*$ até o início de x_i , depois percorrendo x_i até o final na direção da seta, e então, retornando a $*$.

Em cada cruzamento existe uma relação entre os x_i , $i = 1, \dots, n$. As duas possibilidades são:

Figura 16

Seja r_i uma das relações acima. Ao todo existem exatamente n relações $r_1, \dots, r_n$, que podem ser encontradas deste modo. Veremos que estas relações formam um conjunto completo de relações.

Teorema 2.1.1. *O grupo $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ é gerado pela classe de homotopia de x_i e tem apresentação*

$$\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$$

Além disso, qualquer uma das relações r_i pode ser omitida e o resultado permanece válido.

Demonstração:

Lembremos que K está no plano $P = \{z = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$ exceto onde K mergulha para baixo a uma distância ϵ em cada cruzamento.

Para aplicarmos o teorema de Seifert - Van Kampen, dividiremos $X = \mathbb{R}^3 \setminus K$ em uma união de $n + 2$ partes $A, B_1, \dots, B_n$ e C . Seja $A = \{z \geq -\epsilon\} \setminus K$.

O bordo inferior de A é o plano $P' = \{z = -\epsilon\}$ com n segmentos de retas $\beta_1, \dots, \beta_n$ removidos. Seja B'_i um paralelepípedo sólido que contém β_i em seu interior e cuja face superior está em P' e juntando um arco que conecta o topo de B'_i à $*$, não interceptando K , obtemos B_i . Os B_i , $i = 1, \dots, n$, podem ser tomados disjuntos dois a dois.

Figura 17

Finalmente, seja $C =$ o fecho de tudo o que está abaixo de $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$, junto com um arco em X até $*$.

Desde que o grupo fundamental do nó trivial é $\mathbb{Z}$, segue, por indução, aplicando o teorema de Seifert - Van Kampen, que $\Pi_1(A)$ é o grupo livre gerado por $x_1, \dots, x_n$.

Vamos analisar a união de B_1 e A . B_1 é simplesmente conexo e $B_1 \cap A$ é um retângulo menos β_1 mais o arco até $*$, então $\Pi_1(B_1 \cap A)$ é cíclico infinito, com gerador y . Como podemos ver na figura 17, y como elemento de A , torna-se a palavra $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2$ assumindo um cruzamento do primeiro tipo, como na figura 16. Então, temos que

$$\Pi_1(A) = \langle x_1, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle, \Pi_1(B_1) = \langle \emptyset \mid \emptyset \rangle \text{ e } \Pi_1(A \cap B_1) = \langle y \mid \emptyset \rangle.$$

Pelo teorema de Seifert-Van Kampen, $\Pi_1(A \cup B_1)$ tem geradores $x_1, \dots, x_n$ e uma única relação $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2 = 1$. Esta relação é equivalente a $x_k x_1 = x_2 x_k$, a qual é r_1 . Então

$$\Pi_1(A \cup B_1) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1 \rangle.$$

De modo análogo, adicionando B_2 , obtemos

$$\Pi_1(A \cup B_1 \cup B_2) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, r_2 \rangle.$$

Continuando o processo teremos

$$\Pi_1(A \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle.$$

Finalmente, a adição de C à $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$ não tem efeito no grupo fundamental, desde que C e $C \cap (A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n)$ são simplesmente conexos.

Isto completa a prova, exceto pela observação de que um dos r_i , digamos r_n é redundante. Para vermos isto, trabalharemos em $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Seja $A' = A \cup \{\infty\}$ e $C' = B_n \cup C \cup \{\infty\}$. Logo, $A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1} \cup C' = S^3 \setminus K$, $\Pi_1(A') = \Pi_1(A)$, e adicionando $B_1, \dots, B_n$ temos o mesmo efeito de antes. Notemos que $C' \cap (A' \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$ é simplesmente conexo, sendo a 2-esfera menos um arco, e que C' também é simplesmente conexo. Então obtemos a mesma conclusão sem adicionar a relação r_n . ■

Exemplo 2.1.2. Vamos calcular o grupo do nó trevo usando o método de Wirtinger.

Figura 18

Os geradores são x, y, z e as relações $xz = zy$, $yx = xz$. A segunda pode ser usada para eliminar $z = x^{-1}yx$, que substituída na primeira relação fornece $yx = x^{-1}yxy$. Assim obtemos a seguinte apresentação para o grupo do nó trevo $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$, que é a mesma que $\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$. De fato, basta considerarmos as seguintes equações: $a = yx$, $b = y^2x$, $x = ab^{-1}a$ e $y = ba^{-1}$.

2.2 O grupo de cobordismo dos nós.

Definição 2.2.1. *Dois enlaçamentos K_0 e K_1 em S^3 são ditos **cobordantes** se existe um mergulho próprio PL (ou diferenciável) $\mathcal{H}$ de $S^1 \times [0, 1]$ em $S^3 \times [0, 1]$ de modo que os extremos $S^1 \times \{i\}$ são mergulhados em $S^3 \times \{i\}$ como $K_i \times \{i\}$, $i = 0, 1$ e a imagem de $\mathcal{H}$ intercepta $\partial(S^3 \times [0, 1])$ transversalmente. Este mergulho é um **cobordismo** entre K_0 e K_1 .*

Definição 2.2.2. *Um nó é dito ser **slice** se ele é cobordante ao nó trivial.*

Definição 2.2.3. *Para cada $i \in \{0, 1\}$, seja K_i um nó orientado em $S_i^3 \cong S^3$ e seja B_i^3 uma bola fechada de S_i^3 que intercepta K_i em B_i^1 , onde B_i^1 é um arco não enodado. Removendo B_i^3 de S_i^3 e unindo os pares $(S_0^3 \setminus B_0^3, K_0 \setminus B_0^1)$ e $(S_1^3 \setminus B_1^3, K_1 \setminus B_1^1)$ através de um homeomorfismo $h : (\partial B_0^3, \partial B_0^1) \rightarrow (\partial B_1^3, \partial B_1^1)$ que reverte orientação obtemos um novo nó orientado em S^3 , chamado a **soma conexa** dos nós K_0 e K_1 e denotado por $K_0 \# K_1$.*

Figura 19

Lema 2.2.4. *Se K é um nó orientado qualquer em S^3 e $r : S^3 \rightarrow S^3$ é um homeomorfismo revertendo orientação, então $K \# rK$ é um nó slice.*

Demonstração:

De fato, isto ocorre pois $K \# rK$ pode ser situado em $\mathbb{R}^3$ de maneira que K e rK sejam simétricos com relação a um plano, como mostra a figura 21. A “rotação” de K em torno deste eixo de simetria até rK fornece o disco procurado. ■

Figura 20

Teorema 2.2.5. *O conjunto $\mathcal{C}_1$ das classes de cobordismo de nós orientados de S^1 em S^3 é um grupo abeliano com a adição definida por*

$$[J] + [K] = [J \# K],$$

onde $[\]$ é uma classe em $\mathcal{C}_1$.

Demonstração:

Veja [[13] pág 228].

Observemos apenas que o elemento neutro é a classe de cobordismo do nó trivial e que o inverso da classe $[K]$ é a classe $[r\bar{K}]$, onde $r : S^3 \rightarrow S^3$ é uma reflexão e $\bar{}$ denota a orientação oposta. ■

2.3 Superfícies de Seifert.

Definição 2.3.1. *Uma superfície de Seifert para um nó ou enlaçamento $K \subset S^3$ é uma superfície conexa, compacta e orientável $M \subset S^3$ com $\partial M = K$.*

Teorema 2.3.2. *Todo nó ou enlaçamento em $\mathbb{R}^3$ ou S^3 é o bordo de uma superfície de Seifert.*

Demonstração:

Seja L um enlaçamento em $\mathbb{R}^3$. Designamos uma orientação para cada componente de L . Consideremos uma projeção regular de L em um plano, isto é, uma projeção cujos

únicos pontos múltiplos, se houver, são pontos duplos. Próximo de cada cruzamento, apagamos os arcos superior e inferior e os substituímos por pequenos “atalhos” no plano da projeção como na figura 21, levando em conta a orientação.

Figura 21

Assim, obtemos uma coleção disjunta de curvas fechadas simples e orientadas no plano. Cada curva é o bordo de um disco no plano, que podem ser feitos disjuntos, empurrando seus interiores ligeiramente para fora do plano, começando com os discos internos e passando para os externos. Além disso, estes discos possuem bicolares, aos quais podem ser associados sinais de $(+)$ e $(-)$ de acordo com a convenção, digamos que o bordo orientado no sentido anti-horário seja visto como o lado positivo. Agora conectemos estes discos nos velhos cruzamentos com retângulos torcidos para obtermos uma superfície M cujo bordo é o enlaçamento L .

Figura 22

Se L é um nó, M é conexa. Caso contrário, unimos as componentes por tubos, se necessário. ■

Exemplo 2.3.3. A figura 23 mostra um enlaçamento e sua superfície de Seifert.

Figura 23a: Eliminar todos os cruzamentos do enlaçamento dado.

vista lateral

Figura 23b: Os círculos bordam discos em diferentes alturas.

Figura 23c: Conectar os discos através de retângulos torcidos.

Observação 2.3.4. Dependendo da orientação escolhida para um dado enlaçamento, é possível obtermos para este mais de uma superfície de Seifert, como vemos nas figuras 24 e 25.

O enlaçamento dado na figura 25 é conhecido como **enlaçamento de Hopf**. Neste caso escolhemos a orientação de cada componente independentemente.

Figura 24

Figura 25

A figura 25 mostra duas escolhas diferentes de orientações para o enlaçamento de Hopf e duas correspondentes superfícies de Seifert.

Observação 2.3.5. Mesmo se a orientação for fixada, a superfície de Seifert de um nó ou enlaçamento não é única. Outras podem ser obtidas adicionando-se alças. Outro exemplo deste fenômeno pode ser visto a seguir. O nó trivial borda o disco padrão, mas pode também ser redesenhado como na figura 26a e visto como o bordo da superfície 26b, que consiste em um anel conectado a um pequeno disco por meio de dois retângulos torcidos.

Figura 26a

Figura 26b

Capítulo 3

Enlaçamentos Bordantes

3.1 Enlaçamentos Bordantes.

Definição 3.1.1. *Um enlaçamento bordante em S^3 ou em $\mathbb{R}^3$ é um enlaçamento cujas componentes bordam superfícies de Seifert disjuntas duas a duas; chamaremos a união de uma tal coleção de superfícies de Seifert, uma para cada componente do enlaçamento, de uma **BL-superfície de Seifert** para o enlaçamento bordante.*

Nesta seção discutiremos métodos para estabelecermos se um enlaçamento é ou não bordante. Primeiro, daremos três definições de número de enlaçamento (“linking number”), as quais são equivalentes (a menos de sinal) pelo **Teorema 3.1.3**.

Definição 3.1.2. *Sejam J e K nós disjuntos orientados em S^3 ou em $\mathbb{R}^3$.*

(1) *Seja M uma superfície de Seifert para K e seja $N : \text{int}M \times (-1, 1) \rightarrow S^3$ um bicular aberto do interior de M , $\text{int}M = M \setminus K$, de modo que $\text{int}M = N(\text{int}M \times 0)$. Denotemos $N = N(\text{int}M \times (-1, 1))$, $N^+ = (\text{int}M \times (0, 1))$ e $N^- = (\text{int}M \times (-1, 0))$. Assumimos (modificando J por uma homotopia em $S^3 \setminus K$, se necessário) que J intercepta M em um número finito de pontos e em cada um destes pontos J passa localmente*

- (a) *de N^- para N^+ ou*
- (b) *de N^+ para N^- , segundo as orientações dadas.*

*Para as interseções do tipo (a) contaremos 1 e para as do tipo (b), -1 . A soma destes valores será denotada por $lk_1(J, K)$ e chamada o **número de enlaçamento** entre J e K (observemos que, a princípio, esta definição parece depender de M).*

- (2) *Consideremos uma projeção regular de $J \cup K$. Em cada ponto onde J passa sob*

K conta-se -1 ou 1 para os respectivos cruzamentos

$$\begin{array}{ccc} - \uparrow \rightarrow \mathbf{J} & & - \downarrow \rightarrow \mathbf{J} \\ \mathbf{K} & & \mathbf{K} \end{array}$$

A soma destes valores, para todos os cruzamentos de J sob K , é denotada por $lk_2(J, K)$.

(3) Se J é um laço em $S^3 \setminus K$, então ele representa um elemento de $\Pi_1(S^3 \setminus K)$ com ponto base apropriado. Este grupo fundamental abelianizado é $\mathbb{Z}$ e o laço J é portanto levado em um número inteiro, denotado por $lk_3(J, K)$.

Teorema 3.1.3. $lk_i = lk_j$ ou $lk_i = -lk_j$; $i, j = 1, 2, 3$.

Demonstração:

Veja [[13] pág 134].

Proposição 3.1.4. Se um enlaçamento $L \subset S^3$ ou em $\mathbb{R}^3$ possui duas componentes cujo número de enlaçamento é não-nulo, então L não é um enlaçamento bordante.

Demonstração:

Utilizemos a definição (1) de número de enlaçamento.

Sejam J e K duas componentes do enlaçamento $L \subset S^3$ cujo número de enlaçamento seja não-nulo e M uma superfície de Seifert para K .

Podemos supor que J intercepta M em um número finito de pontos. Vimos que a cada interseção são dados os valores 1 ou -1 . Como, por hipótese, a soma destes valores deve ser diferente de zero, a superfície de Seifert cujo bordo é J intercepta M . Então L não é um enlaçamento bordante. ■

Exemplo 3.1.5. O enlaçamento dado pela figura 27 não é um enlaçamento bordante, pois $lk(J, K) = -3$.

Definição 3.1.6. Um enlaçamento $L = L_1 \cup \dots \cup L_m \subset \mathbb{R}^3$ (ou S^3) com m componentes é **splittable** se existem m bolas topológicas disjuntas $B_1, \dots, B_m$ em $\mathbb{R}^3$ (ou S^3) de modo que $L_i \subset \text{int}(B_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Figura 27

Proposição 3.1.7. *Se L é splittable então L é um enlaçamento bordante.*

Demonstração:

Assumimos que as componentes $L_1, \dots, L_m$ de L pertençam ao interior de bolas disjuntas $B_1, \dots, B_m$. Tomemos homeomorfismos $h_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{int}(B_i)$, que fixem os pontos de L_i , $1 \leq i \leq m$. Pelo **Teorema 2.3.2**, cada L_i é o bordo de uma superfície de Seifert M_i , $1 \leq i \leq m$, então as superfícies $h_i(M_i)$ são novamente superfícies de Seifert para as componentes L_i , e mais, $h_i(M_i)$ são disjuntas, para $1 \leq i \leq m$. ■

Exemplo 3.1.8. Mostraremos que o enlaçamento dado na figura 28a não é um enlaçamento bordante utilizando um argumento algébrico.

Suponhamos que J seja o bordo de uma superfície de Seifert M_J que não intercepta K , o que de fato ocorre. Veja um exemplo de M_J na figura 28b.

Figura 28a

Figura 28b

A figura 28c ilustra M_J em “abstrato”.

Figura 28c

Notemos que J é homotópico, em M_J , a um produto de comutadores de certos caminhos fechados em M_J ; a homotopia ocorre na região sombreada, a qual é um disco. A classe de homotopia de J satisfaz

$$[J] = (x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}) \cdots (x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1})$$

em $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, onde g é o genus de M_J . Vejamos, por meio das figuras abaixo, que $[J]$ satisfaz a equação acima.

$[J]$ é homotópico ao produto dos caminhos fechados a, b, c e d . Observemos que $a = x_1$ e $b = y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}$. Analogamente, $c = x_2$ e $d = y_2 x_2^{-1} y_2^{-1}$.

Suponhamos, além disso, que M_J é disjunta de uma superfície de Seifert M_K para K . Então podemos concluir que $lk(x_i, K) = lk(y_i, K) = 0$ para todo $i \leq g$ pela **Definição 3.1.2. (1)** de número de enlaçamento. Logo, x_i e y_i estão no subgrupo comutador $C = [\Pi, \Pi]$ de $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ pela **Definição 3.1.2. (3)**. Segue que $[J]$ está no segundo subgrupo comutador de $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, que denotaremos por $C' = [C, C]$. Veremos abaixo que isto não pode ocorrer e esta contradição estabelecerá que as superfícies M_J e M_K não podem ser disjuntas.

Um cálculo pelo método de Wirtinger fornece uma apresentação $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle a, b, c \mid aca = cac, bcb = cbc \rangle$, onde a, b e c são dados na figura 28a.

Seja S_3 o grupo das permutações de $\{1, 2, 3\}$. Levando a, b e c nos ciclos $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ e $(2\ 3)$, respectivamente, e desde que $(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3) = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 3)$ e $(1\ 3)(2\ 3)(1\ 3) = (1\ 2) = (2\ 3)(1\ 3)(2\ 3)$, obtem-se um homomorfismo $h : \Pi \rightarrow S_3$. Além disso, $h([J]) = h(ab^{-1}) = (1\ 2)(1\ 3) = (1\ 2\ 3)$. Como qualquer homomorfismo leva os segundos comutadores nos segundos comutadores, concluímos que $[J] \notin [C, C]$ pela seguinte observação.

Observação 3.1.9. O subgrupo comutador $C = [S_3, S_3] = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ é cíclico com gerador $(1\ 2\ 3)$; o segundo subgrupo comutador $[C, C]$ consiste apenas do elemento identidade.

A figura 29a é um exemplo de enlaçamento bordante e sua BL-superfície de Seifert é dada em 29b.

Figura 29a

Figura 29b

Definição 3.1.10. *Seja $T(K)$ uma vizinhança tubular de um nó $K \subset S^3$. Uma curva fechada simples $\mathbf{m}$ em $\partial T(K)$ a qual é homotópica a zero em $T(K)$ e não é homotópica a zero em $\partial T(K)$ é chamada um **meridiano** de K .*

Seja $L \subseteq S^3$ um enlaçamento, e T uma vizinhança tubular para L , $X(L)$ o fecho de $S^3 \setminus T$, o qual será chamado de **exterior** de L , e $m \subset \partial T \subset X(L)$ um meridiano da i -ésima componente de L .

Conectando-se $\mathbf{m}$ a um ponto base de $X = X(L)$ obtem-se um elemento de $\Pi_1(X)$, o qual fica bem definido a menos de conjugação, e que será também chamado um i -ésimo meridiano de L .

Seja $F(k)$ o grupo livre gerado por $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Proposição 3.1.11. *L é um k -enlaçamento bordante em S^3 se, e somente se, existe um epimorfismo $\eta : \Pi_1(X) \rightarrow F(k)$ o qual leva um i -ésimo meridiano para x_i para $i = 1, 2, \dots, k$.*

Demonstração:

Sejam M uma BL-superfície de Seifert para L , $\overline{M} = M \cap X$ e $S_1, \dots, S_k$ as componentes de $\overline{M}$. Desde que $\overline{M}$ é uma união disjunta de superfícies conexas limitadas, $X \setminus \overline{M}$ é conexo por caminhos.

Como as S_i , $1 \leq i \leq k$, possuem bicolares, existem abertos $N_i = \text{int} S_i \times (0, 1)$ disjuntos dois a dois.

X pode ser aplicado em uma rosácea de k folhas $\bigvee_{i=1}^k S^1$, enviando-se os pontos fora de $\bigcup_{i=1}^k N_i$ no vértice e um ponto de $S_i \times \{t\}$ no ponto t do i -ésimo círculo, o qual está parame-trizado pelo intervalo $[0, 1]$. A aplicação induzida no grupo fundamental é o epimorfismo requerido.

Reciprocamente, seja $\mu : F(k) \rightarrow \Pi_1(X)$ um homomorfismo que leva x_i ao i -ésimo meridiano, cuja imagem pela η é x_i , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.

Seja $\bigcup_{i=1}^k S^1$ o espaço consistindo de m cópias de S^1 disjuntas duas a duas. Especificando pontos $p_1, p_2, \dots, p_k$ um em cada cópia de S^1 em $\bigcup_{i=1}^k S^1$, obtemos uma aplicação de um conjunto de k pontos em $\bigcup_{i=1}^k S^1$.

Seja B o espaço cone desta aplicação. Realizamos μ por um mergulho $i : B \rightarrow X$. Seja $e : B \rightarrow \bigcup_{i=1}^k S^1$ a aplicação que leva os arcos de B que ligam o ponto cone às S^1 no ponto base de $\bigcup_{i=1}^k S^1$, de modo que $e_* = id_{F(k)}$.

Desde que $i_* = \mu$, $e_* = id_{F(k)} = \eta\mu$, existe uma extensão $f : X \rightarrow \bigcup_{i=1}^k S^1$ tal que $fi = e$ e $f_* = \eta$.

As imagens inversas por meio de f de k pontos distintos, um de cada círculo de $\bigcup_{i=1}^k S^1$, e distintos do vértice, fornece k superfícies de Seifert disjuntas $M_1, \dots, M_k$. Notemos que desde que a restrição $f \Big|_{\partial X}$ comporta-se como a aplicação que projeta a i -ésima cópia de $S^1 \times S^1$ de $\bigcup_{i=1}^k (S^1 \times S^1)$ na i -ésima S^1 de $\bigvee_{i=1}^k S^1$, então a i -ésima cópia de ∂X contém somente ∂M_i . Desprezando as componentes fechadas de $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, se houver, obtemos uma BL-superfície de Seifert para L adicionando colares a M . ■

Definição 3.1.12. Um epimorfismo $\eta : \Pi_1(X) \rightarrow F(k)$, como na proposição acima, que leva um i -ésimo meridiano no gerador x_i de $F(k)$, para $i = 1, 2, \dots, k$, será chamado de **aplicação splitting** (ou **cisão**) para L .

Exemplo 3.1.13. O enlaçamento trivial L_0 , o qual é bordante tem grupo fundamental livre em dois geradores (como se vê utilizando o teorema de Seifert Van-Kampen ou a apresentação de Wirtinger), gerado pelos seus meridianos, logo existe splitting $\eta : \Pi_1(L_0) \rightarrow F(x, y)$.

Já o enlaçamento L_1 da figura abaixo tem grupo fundamental $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e portanto não existe epimorfismo $\eta : \Pi_1(L_1) \rightarrow F(x, y)$, logo L_1 não é bordante.

3.2 Enlaçamentos $F(k)$.

Seja $S(k)$ o conjunto de todas as BL-superfícies de Seifert com k componentes em S^3 , ou seja, $M \in S(k)$ se, e somente se,

- (i) M é uma união ordenada disjunta de superfícies conexas e orientadas $M_1, M_2, \dots, M_k$ em S^3 .
- (ii) Para todo i , ∂M_i é homeomorfo a S^1 .

A orientação de M determina um campo de vetores normais de M em S^3 chamado de **direção normal positiva** de M , do fibrado normal trivial de M em S^3 , e vice-versa.

Definimos a seguinte relação no conjunto $S(k)$. Sejam M, N em $S(k)$. M e N são **cobordantes relativamente ao bordo** ("boundary cobordant") se existe uma subvariedade $\mathcal{IM}$ de $S^3 \times I$ de modo que

- (i) $\mathcal{IM} \cap (S^3 \times 0) = M$ e $\mathcal{IM} \cap (S^3 \times 1) = N$;
- (ii) $\partial \mathcal{IM} - \text{int}(M \cup N)$ é homeomorfo a k cópias de $S^1 \times I$;
- (iii) $\mathcal{IM}$ é uma união ordenada disjunta de subvariedades conexas orientadas $\mathcal{IM}_1, \mathcal{IM}_2, \dots, \mathcal{IM}_k$ de $S^3 \times I$ cuja direção normal positiva coincide com a direção normal positiva de M em $S^3 \times 0$ e de N em $S^3 \times 1$.

Uma subvariedade $\mathcal{IM}$ satisfazendo as condições acima será chamada uma **superfície de Seifert de um cobordismo de enlaçamentos bordantes**, ou simplesmente um **cobordismo bordante**. $\partial \mathcal{IM} - \text{int}(M \cup N)$ é chamado um **cobordismo de enlaçamentos bordantes** entre os enlaçamentos bordantes ∂M e ∂N .

Notemos que o cobordismo bordante é uma relação de equivalência em $S(k)$. O conjunto de classes de cobordismo bordante de superfícies de Seifert em $S(k)$ será denotado por $C(B_k)$.

Definição 3.2.1. Um $F(k)$ -**enlaçamento** é um par (L, η) , onde L é um k -enlaçamento bordante em S^3 e η é uma aplicação *splitting* para L .

Sejam L_i , $i = 0, 1$, enlaçamentos com exteriores $X_i = X(L_i)$, $i = 0, 1$ e $\mathcal{IL}$ a imagem de um cobordismo entre L_0 e L_1 . Consideremos $\mathcal{IA}$ um exterior de $\mathcal{IL}$ estendendo os exteriores X_0 e X_1 de L_0 e L_1 , respectivamente.

Definição 3.2.2. Os $F(k)$ -enlaçamentos (L_i, η_i) , $i = 0, 1$, são **F(k)-cobordantes** se existir um cobordismo de enlaçamentos $\mathcal{IL}$ em $S^3 \times I$ de L_0 para L_1 e um epimorfismo

$\Theta : \Pi_1(\mathcal{IX}) \rightarrow F(k)$ tal que $\eta_i = \Theta \cdot j_i$, a menos de automorfismos internos de $F(k)$, para $i = 0, 1$, onde $j_i : \Pi_1(X_i) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{IX})$ são induzidas das aplicações inclusões.

Observação 3.2.3. Suponhamos que $f, g : A \rightarrow B$ sejam epimorfismos de grupos. Então f e g diferem por um automorfismo interno de A se, e somente se, eles diferem por um automorfismo interno de B . Logo, na definição acima de $F(k)$ -cobordismo, a ambiguidade na escolha de pontos bases de X_0, X_1 e $\mathcal{IX}$ é absorvida pelos automorfismos internos de $F(k)$.

Um par $(\mathcal{IL}, \Theta)$, como na Definição 3.2.2 é chamado um **F(k)-cobordismo** de (L_0, η_0) para (L_1, η_1) . Denotaremos por $C_1(F(k))$ o conjunto das classes de $F(k)$ -cobordismo de $F(k)$ -enlaçamentos.

Lema 3.2.4. *Seja $\mathcal{IL}$ um cobordismo de enlaçamento entre os enlaçamentos bordantes L_i , $i = 0, 1$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{IL}$ é um cobordismo de enlaçamentos bordantes para alguma escolha de BL -superfícies de Seifert de L_0 e L_1 .
- (ii) Existe um epimorfismo $\Theta : \Pi_1(\mathcal{IX}) \rightarrow F(k)$ tal que $\eta_i = \Theta \cdot j_i$, a menos de automorfismos internos de $F(k)$, para alguma aplicação splitting η_i de L_i , $i = 0, 1$.

Demonstração:

A demonstração é análoga à da **Proposição 3.1.11**, utilizando a **Observação 3.2.3**. Veja [10], pág 663].

Seja CA_k o grupo dos automorfismos de $F(k)$, que levam x_i em um de seus conjugados, para cada $i = 1, \dots, k$.

Notemos que se η_1 e η_2 são aplicações splitting para um k -enlaçamento L em S^3 , então $\eta_2 = \alpha \cdot \eta_1$, para algum $\alpha \in CA_k$, ou seja, quaisquer duas aplicações splitting para um L diferem por um automorfismo de $F(k)$ que leva x_i em um de seus conjugados, $1 \leq i \leq k$.

Seja $\alpha \in CA_k$, então para $i = 1, \dots, k$, $\alpha(x_i) = w_i x_i w_i^{-1}$ para algum $w_i \in F(k)$. Escrevemos simplesmente $\alpha = (w_1, \dots, w_k)$. Se cada $w_i x_i w_i^{-1}$ é reduzido, isto é, w_i é reduzido e não termina com a letra x_i ou x_i^{-1} , então esta expressão é única.

Definimos elementos $\alpha_{ij} = (e, \dots, e, x_j, e, \dots, e)$ onde x_j está na i -ésima coordenada e e é a palavra vazia. Notemos que $\alpha_{ij}^{-1} = (e, \dots, e, x_j^{-1}, e, \dots, e)$ onde x_j^{-1} está na i -ésima coordenada.

Lema 3.2.5. CA_k é gerado por α_{ij} para $i, j = 1, \dots, k$ e $i \neq j$.

Demonstração:

CA_k é, de fato, um grupo pois se $\alpha = (w_1, \dots, w_k)$ então $\alpha^{-1} = (\alpha^{-1}(w_1^{-1}), \dots, \alpha^{-1}(w_k^{-1}))$. Para $\alpha \in CA_k$, definimos o comprimento de α por $l(\alpha) = l(w_1) + \dots + l(w_k)$, após escrevermos α de maneira única $\alpha = (w_1, \dots, w_k)$, onde $l(w_i)$ é o comprimento da palavra reduzida w_i , $i = 1, \dots, k$. Notemos que $l(\alpha) = 0$ se, e somente se, $\alpha = id$.

Seja α um elemento de CA_k , o qual não é a identidade. Escrevemos de maneira única $\alpha = (w_1, \dots, w_k)$. Afirmamos que existe pelo menos um par (j, h) , para algum $j, h = 1, \dots, k$ tal que $w_h = \tilde{w}_j x_j^\varepsilon w_h$, onde $\tilde{w}_h$ é uma palavra reduzida que não termina em x_h e nem em x_h^{-1} e $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Desde que w_h é reduzida, w_h não pode começar com $x_j^{-\varepsilon}$.

Mostremos a afirmação acima. Seja $\alpha^{-1} = (u_1, \dots, u_k)$ escrito de maneira única. Como supomos que $\alpha \neq id$, existe um $h = 1, \dots, k$ tal que w_h não é a palavra vazia e também não é nenhuma das palavras u_h . Se $u_h = x_{h_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{h_r}^{\varepsilon_r}$, então

$$\begin{aligned} x_h^{-1} &= \alpha \alpha^{-1}(x_h) = \alpha(u_h x_h u_h^{-1}) = \alpha(x_{h_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{h_r}^{\varepsilon_r} x_h x_{h_r}^{-\varepsilon_r} \dots x_{h_1}^{-\varepsilon_1}) = \\ &= \alpha(x_{h_1}^{\varepsilon_1}) \dots \alpha(x_{h_r}^{\varepsilon_r}) \alpha(x_h) \alpha(x_{h_r}^{-\varepsilon_r}) \dots \alpha(x_{h_1}^{-\varepsilon_1}) = \\ &= (w_{h_1} x_{h_1}^{\varepsilon_1} w_{h_1}^{-1}) (w_{h_2} x_{h_2}^{\varepsilon_2} w_{h_2}^{-1}) \dots (w_{h_r} x_{h_r}^{\varepsilon_r} w_{h_r}^{-1}) (w_h x_h w_h^{-1}) (w_{h_r} x_{h_r}^{-\varepsilon_r} w_{h_r}^{-1}) \dots \\ &= (w_{h_2} x_{h_2}^{\varepsilon_2} w_{h_2}^{-1}) (w_{h_1} x_{h_1}^{\varepsilon_1} w_{h_1}^{-1}) = \left(\prod_{s=1}^r (w_{h_s} x_{h_s}^{\varepsilon_s} w_{h_s}^{-1}) \right) w_h x_h w_h^{-1} \left(\prod_{s=1}^r (w_{h_s} x_{h_s}^{\varepsilon_s} w_{h_s}^{-1}) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Como $w_i x_i w_i^{-1}$ é uma palavra reduzida para cada $i = 1, \dots, k$ então $w_{h_s} x_{h_s}^{\varepsilon_s} w_{h_s}^{-1}$ também o é, para cada $s = 1, \dots, r$. Logo, no produto acima, qualquer cancelamento deve começar entre um dos pares $(w_{h_r}^{-1}, w_h)$ ou $(w_{h_s}^{-1}, w_{h_{s+1}})$ para $s = 1, \dots, r-1$. Assumimos que isto não ocorra. Então não há nenhum modo para que as letras x_h e $x_{h_1}^{\varepsilon_1}, \dots, x_{h_r}^{\varepsilon_r}$, do meio do produto acima, sejam canceladas. Desde que existe pelo menos uma letra, entre estas letras no produto, que é diferente de x_h ou de x_h^{-1} , por exemplo $x_{h_r}^{\varepsilon_r}$, isto é uma contradição.

Suponhamos que $x_{h_s}^{\varepsilon_s}$, $1 \leq s \leq r$, é cancelado, então $w_{h_{s+1}} = w_{h_s} x_{h_s}^{\varepsilon_s} \tilde{w}$, onde $\tilde{w}$ é uma palavra reduzida que não termina em $x_{h_{s+1}}^{\varepsilon_{s+1}}$ e nem em $x_{h_{s+1}}^{-\varepsilon_{s+1}}$ e $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Além disso, $\tilde{w}$ não começa com $x_{h_s}^{\varepsilon_s}$, pois $w_{h_{s+1}}$ é reduzida.

Desde que $\alpha_{h_j}^{\varepsilon} = (e, \dots, e, x_j^{\varepsilon}, e, \dots, e)$, com x_j^{ε} na h -ésima posição, temos que $\alpha \alpha_{h_j}^{-\varepsilon} = (w'_1, \dots, w'_m)$, onde $w'_i = w_i$ para $i \neq h$ e $w'_h = w_j \tilde{w}_h$. De fato, para $i \neq h$, $w'_i x_i w_i^{-1} = \alpha \alpha_{h_j}^{\varepsilon}(x_i) = \alpha(e x_i e^{-1}) = w_i x_i w_i^{-1}$, logo $w'_i = w_i$. Agora observemos que $w'_h x_h w_h^{-1} =$

$\alpha\alpha_{h,j}^{-1}(x_h) = \alpha(x_j^{-1}x_hx_j') = w_jx_j^{-1}w_j^{-1}w_hx_hw_h^{-1}w_jx_j'w_j^{-1}$ e utilizando nesta expressão a igualdade $w_h = w_jx_j'w_h$ obtemos $w_h' = w_jw_h$. Então, $l(\alpha\alpha_{h,j}^{-1})$ é estritamente menor do que $l(\alpha)$. Por indução no comprimento do automorfismo, compondo $\alpha_{h,j}^{-1}$ à direita de α , obtemos a identidade. ■

Capítulo 4

Enlaçamentos de Intervalos

4.1 O Grupo $C_{1,k}$.

Nesta seção introduziremos o conjunto $C_{1,k}$ das classes de cobordismo dos enlaçamentos de k intervalos e veremos que ele possui uma estrutura natural de grupo.

Notações: I denota o intervalo fechado $[0, 1]$ e D o disco unitário em $\mathbb{R}^3$. Para todo inteiro $k > 0$, o conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ será denotado por $\underline{k}$ e $a_1, a_2, \dots, a_k$ serão k pontos distintos e alinhados pertencentes ao interior do disco unitário D . Designaremos por $j_0 : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ a aplicação definida por $j_0(i, x) = (a_i, x) \in D \times I$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Definição 4.1.1. Um enlaçamento de k intervalos ou um k -enlaçamento de intervalos, $k \geq 1$, é um mergulho próprio PL (ou diferenciável) localmente plano e transversal

ao bordo $f : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ tal que $f \Big|_{\underline{k} \times \partial(I)} = j_0 \Big|_{\underline{k} \times \partial(I)}$.

O enlaçamento j_0 é chamado de **enlaçamento trivial**.

Na figura 30 pode ser visto um exemplo de um 3-enlaçamento de intervalos.

Figura 30

Definição 4.1.2. *Dois k -enlaçamento de intervalos $f, g : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ são **cobordantes** se existe um mergulho próprio PL (ou diferenciável) localmente plano e transversal ao bordo $F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow D \times I \times I$ tal que*

$$F \Big|_{\underline{k} \times I \times 0} = f, F \Big|_{\underline{k} \times I \times 1} = g \text{ e } F \Big|_{\underline{k} \times \partial(I) \times I} = \left(j_0 \Big|_{\underline{k} \times \partial(I)} \right) \times id_I.$$

Vamos definir o produto de dois k -enlaçamento de intervalos. Para isso, consideremos as aplicações $\alpha_1, \alpha_2 : D \times I \rightarrow D \times I$ definidas por $\alpha_1(y, t) = (y, t/2)$, $\alpha_2(y, t) = (y, (1 + t)/2)$, $(y, t) \in D \times I$.

Definição 4.1.3. *Se f_1 e f_2 são k -enlaçamentos de intervalos, seu **produto** $f_1 \cdot f_2 : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ é o k -enlaçamento de intervalos definido por*

$$f_1 \cdot f_2(i, t) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(i, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha_2 f_2(i, 2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que para todo k -enlaçamento de intervalos f , temos que $f \cdot j_0$, $j_0 \cdot f$ e f são cobordantes, na verdade, são isotópicos. Logo, no conjunto $C_{1,k}$, o enlaçamento j_0 é o elemento identidade.

O próximo resultado nos mostra que f^{-1} definida abaixo é o enlaçamento inverso de f .

Sejam $\alpha : D \times I \rightarrow D \times I$ uma aplicação definida por $\alpha(y, t) = (y, 1 - t)$ e f um k -enlaçamento de intervalos. Definimos $f^{-1} : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ como o seguinte k -enlaçamento de intervalos:

$$f^{-1}(i, t) = \alpha f(i, 1 - t).$$

Proposição 4.1.4. *Para todo k -enlaçamento de intervalos f , $f \cdot f^{-1}$ é cobordante a j_0 .*

Demonstração:

Seja $h : \partial(I \times I) \rightarrow \partial(I \times I)$ um homeomorfismo tal que $h(0 \times I) = 0 \times I \cup I \times 0 \cup 1 \times I$, $h(0, 1) = (0, 1)$, $h(0, 0) = (1, 1)$. A aplicação h prolonga-se radialmente a um homeomorfismo $h : I \times I \rightarrow I \times I$.

Seja $f : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ um k -enlaçamento de intervalos. Definimos $F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow D \times I \times I$ por

Figura 31

$$F = (id_D \times h^{-1}) \circ (f \times id_I) \circ (id_k \times h)$$

Figura 32

Então $F \Big|_{\underline{k} \times I \times 0} = j_0$ e $F \Big|_{\underline{k} \times I \times 1} = f \cdot j_0 \cdot f^{-1}$. Portanto, $f \cdot f^{-1}$ é cobordante a j_0 . ■

Teorema 4.1.5. *As classes de cobordismo dos k -enlaçamentos de intervalos formam um grupo, que será denotado por $C_{1,k}$.* ■

Um k -enlaçamento de intervalos estende-se de maneira única, a menos de isotopia, a um mergulho $\tilde{f} : \underline{k} \times I \times D \rightarrow D \times I$.

Seja $F : \underline{k} \times D \times I \rightarrow D \times I \times I$ um cobordismo entre k -enlaçamentos de intervalos f e g . F prolonga-se a $\bar{F} : \underline{k} \times D \times I \times D \rightarrow D \times I \times I$.

Definição 4.1.6. *O exterior de um k -enlaçamento de intervalos é o fecho de $D \times I \setminus \tilde{f}(\underline{k} \times I \times D)$ e será denotado por $X(f)$.*

Analogamente, o exterior de um cobordismo entre k -enlaçamentos de intervalos $X(F)$ é o fecho de $D \times I \times I \setminus \bar{F}(k \times D \times I \times D)$.

4.2 A Ação de Habegger-Lin e o Cobordismo d-baseado.

Vamos definir uma ação do grupo $C_{1,2k}$ no conjunto $C_{1,k}$. Para isso seja B o espaço identificação de $D \times I$, onde identificamos $(z, 0)$ com $(z, 1)$, para todo $z \in D$ e realizamos as identificações ao longo de $\partial(D) \times I$ como segue. Seja $z = (x, y)$ com $x \geq 0, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 = 1$, identificamos (z, t) com $(z, 1/4 - t \pmod{1})$ para $t \in [0, 1]$. Então B é uma bola de dimensão três que pode ser decomposta em três subbolas B_+, B_0 e B_- , as quais correspondem ao produto de D com os intervalos $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2] \cup [3/4, 1]$ e $[1/2, 3/4]$ respectivamente.

B_0 é o produto de um par de discos unitários D colados ao longo do seguinte arco do bordo $\{(x, y)/x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 = 1\}$, com um intervalo I , logo pode ser identificado com $D \times I$, com D tendo $2k$ pontos distinguidos. Os k pontos em $B_0 \subseteq B$ que correspondem a $(a_i, 0) \in D \times I$, serão denotados por p_i . Os pontos $(a_i, 3/4), (a_i, 1/4)$ e $(a_i, 1/2)$ serão denotados, respectivamente, por $p'_i, \tilde{p}_i$ e $\tilde{p}'_i$.

Figura 33

Podemos considerar um $2k$ -enlaçamento de intervalos como sendo um mergulho

$$\beta : 2k \times I \rightarrow B_0$$

tal que para todo $i \in \underline{k}$, $\beta(i, 0) = p_i \in D \times \{0\}$, $\beta(i, 1) = p'_i \in D \times \{3/4\}$, $\beta(k+i, 0) = \tilde{p}_{k-i+1} \in D \times \{1/4\}$ e $\beta(k+i, 1) = \tilde{p}'_{k-i+1} \in D \times \{1/2\}$.

Um k -**enlaçamento de intervalos** f pode ser considerado como um mergulho $f : \underline{k} \times I \rightarrow B_-$ de modo que para todo $i \in \underline{k}$, $f(i, 0) = p'_i \in D \times \{3/4\}$ e $f(i, 1) = \tilde{p}'_i \in D \times \{1/2\}$.

A “união” de f e β nos dá um mergulho $\underline{k} \times I \rightarrow B_0 \cup B_-$.

Figura 34

Empurrando B_0 em uma vizinhança colar de B_- , podemos identificar $B_0 \cup B_-$ com B_- . O mergulho resultante de $\underline{k} \times I$ em B_- é um k -**enlaçamento de intervalos**, que será denotado por $\beta \cdot f$. Como parte da i -ésima corda de $\beta \cdot f$, a orientação de $\beta(i \times I)$ para $i \in \{k+1, \dots, 2k\}$ foi invertida.

Denotemos por j'_0 o k -**enlaçamento de intervalos trivial** visto como um mergulho $j'_0 : \underline{k} \times I \rightarrow B_+$ tal que $j'_0(i, 0) = \tilde{p}_i \in D \times \{1/4\}$ e $j'_0(i, 1) = p_i \in D \times \{1\}$.

A “união” de j'_0 com $\beta \cdot f$, visto como o mergulho original de $\underline{k} \times I$ em $B_0 \cup B_-$, no caso particular em que β é o $2k$ -**enlaçamento de intervalos trivial**, é um enlaçamento de k componentes que é chamado o **fecho do k -enlaçamento de intervalos f** e será denotado por $\hat{f}$. Veja figura 35.

Figura 35

Se em $D \times I \times I$ identificarmos, $\forall z \in D$, $\forall s \in I$, $(z, 0, s)$ com $(z, 1, s)$ e, $\forall t \in I$, $\forall s \in I$, identificarmos (z, t, s) com $(z, 1/4 - t(\text{mod } 1), s)$ para todo $z = (x, y) \in \partial D$ com $x \geq 0$ e $y \leq 0$, obtemos um espaço identificação que é homeomorfo a $B \times I$.

Portanto, se f e g são k -enlaçamentos de intervalos considerados como os mergulhos $f, g : \underline{k} \times I \rightarrow B_-$, um cobordismo entre f e g pode ser considerado como um mergulho

$$F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow B_- \times I \text{ tal que } F \Big|_{\underline{k} \times I \times \{0\}} = f, F \Big|_{\underline{k} \times I \times \{1\}} = g$$

e $\forall i \in \underline{k}$, $\forall s \in I$, $F(i, 0, s) = (p'_i, s)$ e $F(i, 1, s) = (\tilde{p}'_i, s)$.

Analogamente, se β e γ são $2k$ -enlaçamentos de intervalos considerados como mergulhos $\beta, \gamma : 2\underline{k} \times I \rightarrow B_0$, então um cobordismo entre β e γ pode ser considerado como um mergulho

$$\Sigma : 2\underline{k} \times I \times I \rightarrow B_0 \times I \text{ tal que } \Sigma \Big|_{2\underline{k} \times I \times \{0\}} = \beta, \Sigma \Big|_{2\underline{k} \times I \times \{1\}} = \gamma$$

e, $\forall i \in \underline{k}$, $\forall s \in I$, $\Sigma(i, 0, s) = (p_i, s)$, $\Sigma(1, i, s) = (p'_i, s)$, $\Sigma(k + i, 0, s) = (\tilde{p}_{k-i+1}, s)$ e $\Sigma(k + i, 1, s) = (\tilde{p}'_{k-i+1}, s)$.

A “união” de F e Σ nos dá um mergulho de $\underline{k} \times I \times I$ em $(B_0 \cup B_-) \times I$, que também pode ser considerado como um mergulho $\Sigma \cdot F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow B_- \times I$, se nós identificarmos

$B_0 \times I \cup B_- \times I$ com $B_- \times I$ empurrando $B_0 \times I$ em uma vizinhança colar de $B_- \times I$. $\Sigma \cdot F$ é claramente um cobordismo entre $\beta \cdot f$ e $\gamma \cdot g$.

Isto define uma ação do grupo $C_{1,2k}$ no conjunto $C_{1,k}$ que será chamada **Ação de Habegger-Lin**.

No caso particular em que Σ é o cobordismo trivial $j_0 \times id_I : 2\underline{k} \times I \times I \rightarrow B_0 \times I$ entre o $2k$ -enlaçamento trivial j_0 e ele mesmo, a “união” de $\Sigma \cdot F$, como o mergulho original de $\underline{k} \times I \times I$ em $(B_0 \cup B_-) \times I$, com $j'_0 \times id_I$, onde $j'_0 : \underline{k} \times I \rightarrow B_+$ é o k -enlaçamento de intervalos trivial, fornece um cobordismo $\hat{F} : \underline{k} \times S^1 \times I \rightarrow B \times I \subseteq S^3 \times I$ entre $\hat{f}$ e $\hat{g}$, o qual será chamado de **fecho do cobordismo F de k -enlaçamentos de intervalos**.

Definição 4.2.1. *Seja D com sua orientação usual e seja $L \subseteq S^3$ um enlaçamento orientado e ordenado com k componentes. Se $j : D \rightarrow S^3$ é um mergulho tal que, para todo $i \in \underline{k}$, a interseção de $j(D)$ com a i -ésima componente de L é $j(a_i)$ e todos os número de interseções são 1, então dizemos que $j(D)$ é uma **d-base** para L e que $(L, j(D))$ é um **enlaçamento d-baseado**.*

Dado um k -enlaçamento de intervalos f devemos considerar que seu fecho possui uma **d-base padrão** $j_0(D) = D_{1-\epsilon} \times \{1/8\}$, onde $\epsilon > 0$ é pequeno suficiente tal que, $\forall i \in \underline{k}$, $p_i \in D_{1-\epsilon} \times \{0\}$, onde $D_{1-\epsilon}$ é o 2-disco com raio $1 - \epsilon$ e $j_0 : D \rightarrow D_{1-\epsilon} \times \{1/8\} \subseteq B \subseteq S^3$ é o mergulho definido por $j_0(z) = ((1 - \epsilon)z, 1/8)$.

Figura 36: d-base padrão para $\hat{f}$.

Assim obtemos uma aplicação φ das classes de isotopia de enlaçamentos de intervalos para as classes de isotopia de enlaçamentos d -baseados, a qual é uma bijeção [8]. φ será chamada a **bijeção de Habegger-Lin**.

Capítulo 5

Enlaçamentos de Intervalos Bordantes

5.1 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes.

Definição 5.1.1. *Sejam f um k -enlaçamento de intervalos e $X(f)$ seu exterior. O grupo $\Pi_1(X(f), p)$, onde $p = (0, -1, 0)$ é chamado o **grupo de f** e será denotado por $\Pi_1(f)$.*

Denotaremos por $x_i = x_i(f)$, $\forall i \in \underline{k}$, o elemento de $\Pi_1(f)$ representado pela composição dos caminhos $t_i m_i t_i^{-1} \in X(f)$, onde m_i é um círculo no sentido anti-horário de raio $r < \frac{1}{k+1}$ ao redor do ponto $(a_i, 0)$ e t_i é um segmento de reta de $p = (0, -1, 0)$ ao ponto $(-1 + \frac{2i}{k+1}, -r, 0)$. (Veja figura 37).

Denotaremos por $y_i = y_i(f)$, $\forall i \in \underline{k}$, o elemento de $\Pi_1(f)$ representado pela composição dos caminhos $u t'_i m'_i t'^{-1}_i u^{-1}$, onde m'_i é um círculo no sentido anti-horário de raio $r < \frac{1}{k+1}$ ao redor do ponto $(a_i, 1)$ e t'_i é um segmento de reta de $(0, -1, 1)$ ao ponto $(-1 + \frac{2i}{k+1}, -r, 1)$ e u é um segmento de reta de p à $(0, -1, 1)$. (Veja figura 37).

Definição 5.1.2. *Seja $F(k) = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ o grupo livre com k geradores $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ e seja f um k -enlaçamento de intervalos. O homomorfismo $\mu_0(f) : F(k) \rightarrow \Pi_1(f)$ definido por $\mu_0(f)(\alpha_i) = x_i$, $\forall i \in \underline{k}$, é chamado **aplicação meridiano canônica para f no nível 0** ou **aplicação meridiano do topo para f** e o homomorfismo $\mu_1(f) : F(k) \rightarrow \Pi_1(f)$ definido por $\mu_1(f)(\alpha_i) = y_i$, $\forall i \in \underline{k}$, é chamado **aplicação meridiano canônica para f no nível 1** ou **aplicação meridiano da base para f** . Os x_i , $i \in \underline{k}$, serão chamados de meridianos do topo e os y_i , $i \in \underline{k}$, de meridianos da base para f .*

Figura 37

Definição 5.1.3. Dado um k -enlaçamento de intervalos f , um epimorfismo $\eta(f) : \Pi_1(f) \rightarrow F(k)$ tal que $\eta(f)\mu_0(f) = id_{F(k)} = \eta(f)\mu_1(f)$ é chamado uma **aplicação splitting** (ou **cisão**) para f . Um enlaçamento de intervalos que possui uma aplicação splitting é dito ser um **enlaçamento de intervalos bordante**.

Pela **Proposição 1** de [5], pág 860, o splitting $\eta(f)$ do enlaçamento de intervalos bordantes f é único.

Para todo $i \in \underline{k}$, seja $A_i = \partial(D \times I) \cap S$, onde D é o disco unitário em $\mathbb{R}^2$ e $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é o semiplano consistindo dos pontos (x, y, z) com $y \geq 0$ contido no plano passando por $(a_i, 0)$ e perpendicular ao eixo $0x$. (Veja figura 38).

No próximo resultado denotaremos um k -enlaçamento de intervalos $f : \underline{k} \times I \rightarrow D \times I$ por $f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$, onde para todo $i \in \underline{k}$, $f_i = f \Big|_{\{i\} \times I}$ é a i -ésima corda de f .

Proposição 5.1.4. Um k -enlaçamento de intervalos $f = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$ é um enlaçamento de intervalos bordante se, e somente se, para todo $i \in \underline{k}$, existir uma superfície orientada e conexa com bordo $S_i \subseteq D \times I$ de modo que $\partial(S_i) = im f_i \cup A_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $S_i \setminus im f_i$ é uma subvariedade própria de $D \times I$.

Figura 38

Demonstração:

Suponhamos que existam as superfícies S_i como acima. Sejam $S_f = \bigcup_{i=1}^k S_i$ e $\bar{S}_f = S_f \cap X(f)$. A construção de Thom-Pontryagin para o par $(\bar{S}_f, \partial\bar{S}_f)$ em $(X(f), \partial X(f))$ fornece uma aplicação $P(f) : X(f) \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^1$ tal que $P(f)_* \mu_0(f) = id_{F(k)} = P(f)_* \mu_1(f)$. Portanto, f é um k -enlaçamento de intervalos bordante com splitting $P(f)_*$.

Reciprocamente, suponhamos que f é um k -enlaçamento de intervalos bordante. Seja $X(j_0) = D_k \times I$, onde D_k é um disco com k pequenos discos abertos removidos. Projetando $D_k \times I$ em $D_k \times \{0\}$ e retraindo $D_k \times \{0\}$ em $\bigvee_{i=1}^k S^1$, obtemos uma aplicação $P : \partial X(j_0) \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^1$.

Por outro lado, f induz um mergulho $h : \partial X(j_0) \xrightarrow{\cong} \partial X(f) \subset X(f)$.

Como $\Pi_1(\partial X(j_0), p)$ é gerado por $\{x_i, y_i / i \in k\}$ e $P_* : \Pi_1(\partial X(j_0)) \rightarrow F(k)$ leva x_i e y_i no mesmo gerador α_i de $F(k)$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_1(\partial X(j_0)) & \xrightarrow{h_*} & \Pi_1(f) \\
\downarrow \rho_* & \nearrow \eta(f) & \\
F(k) & &
\end{array}$$

Como $\bigvee_{i=1}^k S^1$ é um $K(F(k), 1)$, existe uma aplicação $P(f) : X(f) \rightarrow \bigvee_{i=1}^k S^1$ tal que $P(f)_* = \eta(f)$. Usando o teorema de extensão de homotopia, podemos supor que $P(f)$ comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\partial X(j_0) & \xrightarrow{h} & X(f) \\
\downarrow P & \nearrow P(f) & \\
\bigvee_{i=1}^k S^1 & &
\end{array}$$

e estendendo os espaços neste diagrama, podemos supor que $P(f)$ é uma aplicação diferenciável.

A transversalidade de $P(f)$ em k pontos distintos, um de cada círculo de $\bigvee_{i=1}^k S^1$, nos fornece k superfícies $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_k$ disjuntas duas a duas.

Desprezando as componentes fechadas de $\tilde{S}_f = \bigcup_{i=1}^k \tilde{S}_i$ se necessário, obtemos a superfície desejada $S_f = \bigcup_{i=1}^k S_i$ adicionando colares a $\tilde{S}_f$. ■

Definição 5.1.5. Uma superfície $S_f = \bigcup_{i=1}^k S_i$ nas condições da proposição anterior é chamada uma **BL-superfície de Seifert** para o k -enlaçamento de intervalos f .

Definição 5.1.6. Sejam f_1 e f_2 k -enlaçamentos de intervalos e F um cobordismo entre eles. F é chamado um **cobordismo bordante** se existe um epimorfismo $\eta(F) : \Pi_1(F) = \Pi_1(X(F)) \rightarrow F(k)$, onde $X(F)$ é o exterior de F , tal que, $\forall i \in \{1, 2\}$, $\eta(f_i) = \eta(F)j_i$, onde $j_i : \Pi_1(f_i) \rightarrow \Pi_1(F)$ são aplicações induzidas das inclusões. $\eta(F)$ é dito ser um **splitting** (ou **cisão**) para o cobordismo F .

Proposição 5.1.7. O conjunto $BSL(k)$ das classes de cobordismo bordante de k -enlaçamentos de intervalos bordantes, com o produto usual de enlaçamentos de intervalos, é um grupo.

Demonstração:

Sejam f_1, f_2, g_1 e g_2 k -enlaçamentos de intervalos bordantes. Então, para $i = 1, 2$ existem

$$\eta(f_i) : \Pi_1(f_i) \rightarrow F(k) \text{ e } \eta(g_i) : \Pi_1(g_i) \rightarrow F(k)$$

tal que $\eta(f_i)\mu_0(f_i) = id_{F(k)} = \eta(f_i)\mu_1(f_i)$ e $\eta(g_i)\mu_0(g_i) = id_{F(k)} = \eta(g_i)\mu_1(g_i)$. Pelo teorema de Seifert-Van Kampen, $\forall i \in \{1, 2\}$, obtemos o seguinte diagrama push-out

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} F(k) & \xrightarrow{\mu_0(g_i)} & \Pi_1(g_i) \\ \downarrow \mu_1(f_i) & & \downarrow \\ \Pi_1(f_i) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(f_i \cdot g_i) \\ & \searrow \eta(f_i) & \nearrow \eta(g_i) \\ & & F(k) \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a dashed arrow from $\Pi_1(f_i \cdot g_i)$ to $F(k)$ labeled $\eta(f_i \cdot g_i)$.)

Então a aplicação $\eta(f_i \cdot g_i)$ é um splitting para $f_i \cdot g_i$, logo $f_i \cdot g_i$ também é um k -enlaçamento de intervalos bordantes.

Se $F : \underline{k} \times I \times I \rightarrow D \times I \times I$ é um cobordismo entre f_1 e f_2 e G é um cobordismo entre g_1 e g_2 , então podemos definir um cobordismo entre $f_1 \cdot g_1$ e $f_2 \cdot g_2$. Para isso, consideremos as aplicações $\alpha_1, \alpha_2 : D \times I \rightarrow D \times I$ dadas por $\alpha_1(x, t) = (x, t/2)$ e $\alpha_2(x, t) = (x, (t+1)/2)$.

Definimos $F \cdot G : \underline{k} \times I \times I \rightarrow D \times I \times I$ por

$$F \cdot G(i, t, s) = \begin{cases} (\alpha_1 \times id_I)F(i, 2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\alpha_2 \times id_I)G(i, 2t-1, s) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então $F \cdot G$ é um cobordismo entre $f_1 \cdot g_1$ e $f_2 \cdot g_2$. Além disso, se F e G são cobordismos bordantes temos o seguinte diagrama push-out

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} F(k) & \xrightarrow{\mu_0(G)} & \Pi_1(G) \\ \mu_1(F) \downarrow & & \downarrow v_G \\ \Pi_1(F) & \xrightarrow{v_F} & \Pi_1(F \cdot G) \\ & \searrow \eta(F) & \nearrow \eta(G) \\ & & F(k) \end{array}$$

(Note: A dashed arrow labeled $\eta(F \cdot G)$ also points from $\Pi_1(F \cdot G)$ to $F(k)$.)

onde, para todo $i \in \underline{k}$, $v_F(x_i(F)) = x_i(F \cdot G)$ e $v_G(y_i(G)) = y_i(F \cdot G)$.

Portanto $\eta(F \cdot G)(x_i(F \cdot G)) = \eta(F \cdot G)v_F(x_i(F)) = \eta(F)(x_i(F)) = \alpha_i$ e analogamente, $\eta(F \cdot G)(y_i(F \cdot G)) = \alpha_i$. Além disso, o diagrama abaixo é comutativo, para todo $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(f_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F) \\ & \searrow \eta(f_i) & \downarrow \eta(F) \\ & & F(k) \end{array}$$

que junto com o diagrama (2) nos fornece o seguinte diagrama comutativo ($i \in \{1, 2\}$):

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_1(f_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F) & \longrightarrow & \Pi_1(F \cdot G) \\ & \searrow \eta(f_i) & \downarrow \text{---} & \nearrow \eta(F \cdot G) & \\ & & F(k) & & \end{array}$$

que ao junto com o diagrama (1) fornece o diagrama comutativo ($i \in \{1, 2\}$):

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \Pi_1(f_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F \cdot G) \\ \downarrow & \searrow \eta(f_i) & \downarrow \eta(F \cdot G) \\ \Pi_1(f_i \cdot g_i) & \xrightarrow{\eta(f_i \cdot g_i)} & F(k) \end{array}$$

Finalmente, o diagrama (3) junto com o diagrama comutativo abaixo ($i \in \{1, 2\}$):

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_1(f_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F \cdot G) \\
\downarrow & \nearrow & \\
\Pi_1(f_i \cdot g_i) & &
\end{array}$$

fornece o diagrama comutativo abaixo ($i \in \{1, 2\}$):

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_1(f_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F \cdot G) \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow \eta(F \cdot G) \\
\Pi_1(f_i \cdot g_i) & \xrightarrow{\eta(f_i \cdot g_i)} & F(k)
\end{array}$$

ou seja, para todo $i \in \{1, 2\}$ obtemos diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_1(f_i \cdot g_i) & \longrightarrow & \Pi_1(F \cdot G) \\
\downarrow \eta(f_i \cdot g_i) & \nwarrow \eta(F \cdot G) & \\
F(k) & &
\end{array}$$

Portanto, $F \cdot G$ é um cobordismo bordante entre os enlaçamentos de intervalos bordantes $f_1 \cdot g_1$ e $f_2 \cdot g_2$.

O inverso f^{-1} de um enlaçamento de intervalos bordante f também é um enlaçamento de intervalos bordante. Além disso, existe um cobordismo F , dado na **Proposição 4.1.4**, entre $f \cdot f^{-1}$ (ou $f^{-1} \cdot f$) e j_0 , cuja imagem tem complemento homeomorfo ao complemento da imagem de $f \times id_I$. Portanto, F é um cobordismo bordante entre $f \cdot f^{-1}$ e o enlaçamento de intervalos trivial j_0 . ■

5.2 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes e Enlaçamentos $F(k)$.

Seja f um k -enlaçamento de intervalos e seja $\hat{f}$ seu fecho. $\Pi_1(\hat{f})$ é o quociente de $\Pi_1(f)$ pelo subgrupo normal gerado por $\{y_i x_i^{-1} / i \in \underline{k}\}$. $\mu(f)$ denotará $\mu_0(f)$ ou $\mu_1(f)$. Se $q : \Pi_1(f) \rightarrow \Pi_1(\hat{f})$ é o epimorfismo canônico, então $\widehat{\mu(f)} = q\mu(f) : F(k) \rightarrow \Pi_1(\hat{f})$ é uma aplicação meridiano para o enlaçamento $\hat{f}$. Além disso, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 F(k) & \xrightarrow{\mu(f)} & \Pi_1(f) & \xrightarrow{\eta(f)} & F(k) \\
 & \searrow \widehat{\mu(f)} & \downarrow q & \nearrow \widehat{\eta(f)} & \\
 & & \Pi_1(\hat{f}) & &
 \end{array}$$

mostra que $\widehat{\mu(f)}$ tem um splitting $\widehat{\eta(f)}$ se, e somente se, $\mu(f)$ tem um splitting $\eta(f)$.

Proposição 5.2.1. *Existe uma aplicação sobrejetora ψ de $BSL(k)$ no conjunto $C_1(F(k))$ de classes de $F(k)$ -cobordismos de enlaçamentos $F(k)$.*

Demonstração:

Se f é um k -enlaçamento de intervalos bordante, pela nota prévia, $\widehat{\mu(f)}$ possui um splitting $\widehat{\eta(f)}$. Portanto, existe uma aplicação $f \mapsto (\hat{f}, \widehat{\eta(f)})$ de k -enlaçamentos de intervalos bordante em $F(k)$ -enlaçamentos.

Dado um $F(k)$ -enlaçamento (L, η) , seja $\eta : F(k) \rightarrow \Pi_1(L)$ uma aplicação meridiano com splitting η . Seja D_k um disco com k pequenos abertos removidos, cada um centrado em um dos pontos $a_i \in D$. Seja $X(L)$ o exterior de L . Então μ pode ser realizada por um mergulho $i : D_k \rightarrow X(L)$, o qual pode ser estendido ao mergulho $j : D \rightarrow S^3$ tal que $j(D)$ é uma d-base para L .

Seja f o enlaçamento de intervalos que corresponde ao enlaçamento d-baseado $(L, j(D))$ pela bijeção de Habegger-Lin. Em particular, $\hat{f} = L$. Nossa escolha da d-base é tal que $\eta = \widehat{\eta(f)}$, isto é, η é um splitting para $\widehat{\mu(f)}$. Portanto, f é um enlaçamento de intervalos bordante e nossa aplicação $f \mapsto (\hat{f}, \widehat{\eta(f)}) = (L, \eta)$ é sobrejetora.

Sejam f, g enlaçamentos de intervalos bordante e F um cobordismo bordante entre eles com splitting $\eta(F)$. Como vimos na seção 4.2, fechando F obtemos o cobordismo $\hat{F}$ entre $\hat{f}$ e $\hat{g}$. Além disso, como o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \Pi_1(F) & \\
 \nearrow & & \searrow \eta(F) \\
 \Pi_1(f) & \xrightarrow{\eta(f)} & F(k)
 \end{array}$$

é comutativo e, $\forall i \in \underline{k}$, $\eta(f)(x_i) = \eta(f)(y_i)$, segue que $\forall i \in \underline{k}$, $\eta(F)((x_i(F))) = \eta(F)((y_i(F)))$.

Como $\text{im}(\hat{F})$ é obtida de $\text{im}(F)$ identificando $D \times 0 \times I$ com $D \times 1 \times I$ (o resultado sendo mergulhado em $S^3 \times I$), segue que $\eta(F)$ induz $\widehat{\eta(F)} : \Pi_1(\hat{F}) \rightarrow F(k)$, o qual estende $\widehat{\eta(f)}$ e $\widehat{\eta(g)}$. Portanto $(\hat{f}, \widehat{\eta(f)})$ e $(\hat{g}, \widehat{\eta(g)})$ são $F(k)$ -cobordantes. Então obtemos uma aplicação $\psi : BSL(k) \rightarrow C_1(F(k))$ e ψ é sobrejetora. ■

5.3 Enlaçamentos de Intervalos Bordantes e Tranças Puras.

Usando o procedimento de Habbeger-Lin, descrito no Capítulo 4, mas deixando β variar somente entre as tranças puras, temos uma ação do grupo P_{2k} das tranças puras com $2k$ cordas no conjunto $SL(k)$ de (classes de isotopia de) k -enlaçamentos de intervalos. Seja $(P_{2k})_{j_0}$ o estabilizador do enlaçamento de intervalos trivial j_0 para esta ação, isto é, $(P_{2k})_{j_0} = \{\beta \in P_{2k} \mid \beta \cdot j_0 = j_0 \in SL(k)\}$.

Seja CA_k o grupo de todos os automorfismos de um grupo livre $F(k)$ com k geradores $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ que leva cada α_i em um de seus conjugados.

Proposição 5.3.1. *Existe um epimorfismo $\theta : (P_{2k})_{j_0} \rightarrow CA_k$.*

Demonstração:

Seja f uma trança pura com k cordas e realizemos as aplicações meridianos μ_0 do topo e μ_1 da base, através de mergulhos $\lambda_0, \lambda_1 : D_k \rightarrow X(f)$, respectivamente, onde D_k é um disco com k furos. Então $\lambda_1^{-1} : \text{im} \lambda_1 \rightarrow D_k$ estende-se a uma aplicação diferenciável $\lambda(f) : X(f) \rightarrow D_k$ e, pelo **Teorema 1.2.1 (Teorema da Representação de Artin)**, $\lambda(f)\lambda_0$ induz um automorfismo $\tilde{f} = (\lambda(f)\lambda_0)_* = \lambda(f)_*\mu_0(f) \in H_0(F(k))$, onde $H_0(F(k))$ é o subgrupo de CA_k consistindo daqueles automorfismos que fixam o produto $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Além disso, vimos também no **Teorema 1.2.1** que a aplicação de P_k em $H_0(F(k))$ que leva f em $\tilde{f}$ é um isomorfismo de grupos.

Seja $\beta \in (P_{2k})_{j_0}$ e denotemos por $x_1, \dots, x_k, \tilde{x}_k, \dots, \tilde{x}_1$ os meridianos do topo e por $y_1, \dots, y_k, \tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_1$ os meridianos da base de β . Denotemos ainda por $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \tilde{\alpha}_k, \dots, \tilde{\alpha}_1$ os geradores de $F(2k) = \Pi_1(D_{2k})$.

Figura 39

Desde que o isomorfismo $\lambda(\beta)_* : \Pi_1(\beta) \rightarrow F(2k)$ leva y_i em α_i e $\tilde{y}_i$ em $\tilde{\alpha}_i$, ele induz um isomorfismo

$$\lambda(\beta)_* : \frac{\Pi_1(\beta)}{\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N} \longrightarrow \frac{F(2k)}{\langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$$

onde $\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N$ é o subgrupo normal de $\Pi_1(\beta)$ gerado por $\{y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k}\}$ e $\langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N$ é o subgrupo normal de $F(2k)$ gerado por $\{\alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k}\}$.

Pelo teorema de Seifert-Van Kampen, temos o seguinte diagrama push-out

$$\begin{array}{ccc} F(2k) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(\beta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1(j_0) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(\beta \cdot j_0) \\ & \searrow & \searrow \\ & & \frac{\Pi_1(\beta)}{\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N} \end{array}$$

Segue que $\Pi_1(\beta \cdot j_0)$ é isomorfo a $\frac{\Pi_1(\beta)}{\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$ tendo meridianos $[x_i]$ no topo e $[\tilde{x}_i^{-1}]$ na base, onde $[\]$ denota a classe de equivalência no grupo quociente.

Pela definição de $\lambda(\beta \cdot j_0) : X(\beta \cdot j_0) \rightarrow D_k$, $\lambda(\beta \cdot j_0)_*([\tilde{x}_i^{-1}]) = \alpha_i$ e como $\beta \in (P_{2k})_{j_0}$,

$\lambda(\beta \cdot j_0)_*([x_i]) = \alpha_i$. Como $\lambda(\beta \cdot j_0)_*$ é um isomorfismo, $[\tilde{x}_i]^{-1} = [x_i]$.

A aplicação meridiano do topo de β , $\mu_0(\beta) : F(2k) \rightarrow \Pi_1(\beta)$ leva $\alpha_i \tilde{\alpha}_i$ em $x_i \tilde{x}_i$ e desde que $[x_i \tilde{x}_i] = 1$ em $\frac{\Pi_1(\beta)}{\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$, $\mu_0(\beta)$ induz um homomorfismo

$$\mu_0^\bullet(\beta) : \frac{F(2k)}{\langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N} \longrightarrow \frac{\Pi_1(\beta)}{\langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$$

Portanto, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} F(2k) & \xrightarrow{\mu_0(\beta)} & \Pi_1(\beta) & \xrightarrow{\lambda(\beta)_*} & F(2k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(2k) & \xrightarrow{\mu_0^\bullet(\beta)} & \Pi_1(\beta) & \xrightarrow{\lambda(\beta)_*} & F(2k) \\ \langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N & & \langle y_i \tilde{y}_i / i \in \underline{k} \rangle^N & & \langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N \end{array}$$

onde as aplicações verticais são homomorfismos quociente.

Lembremos que a aplicação $\lambda(\beta)_* \mu_0(\beta) = \bar{\beta}$ e denotemos $\lambda(\beta)_* \mu_0^\bullet(\beta)$ por $\bar{\bar{\beta}}$. Identificando $\frac{F(2k)}{\langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$ com $F(k)$ através do isomorfismo

$$F(k) \rightarrow \frac{F(2k)}{\langle \alpha_i \tilde{\alpha}_i / i \in \underline{k} \rangle^N}$$

que leva α_i em $[\alpha_i]$, podemos considerar $\bar{\bar{\beta}}$ como um homomorfismo de $F(k)$ em $F(k)$. Então $\beta \in (P_{2k})_{j_0}$ induz um homomorfismo $\theta(\beta) = \bar{\bar{\beta}} : F(k) \rightarrow F(k)$ que comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(2k) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & F(2k) \\ \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\ F(k) & \xrightarrow{\bar{\bar{\beta}}} & F(k) \end{array}$$

onde ξ é o homomorfismo definido por $\xi(\alpha_i) = \alpha_i$ e $\xi(\tilde{\alpha}_i) = \alpha_i^{-1}$. Observemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
F(2k) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & F(2k) & \xrightarrow{\bar{\beta}^{-1}} & F(2k) \\
\downarrow \xi & & \downarrow \xi & & \downarrow \xi \\
F(k) & \xrightarrow{\bar{\bar{\beta}}} & F(k) & \xrightarrow{\bar{\bar{\beta}}^{-1}} & F(k)
\end{array}$$

Então $\bar{\bar{\beta}}^{-1} \bar{\bar{\beta}} \xi = \xi \bar{\bar{\beta}}^{-1} \bar{\bar{\beta}} = \xi \bar{\beta}^{-1} \bar{\beta} = \xi$ e como ξ é sobrejetora, $\forall y \in F(k)$, $y = \xi(x)$ para algum $x \in F(2k)$, logo $\bar{\bar{\beta}}^{-1} \bar{\bar{\beta}}(y) = \bar{\bar{\beta}}^{-1} \bar{\bar{\beta}} \xi(x) = \xi(x) = y$. Portanto $\bar{\bar{\beta}}^{-1} \bar{\bar{\beta}} = id_{F(k)}$. Analogamente, $\bar{\bar{\beta}} \bar{\bar{\beta}}^{-1} = id_{F(k)}$. Assim $\bar{\bar{\beta}}^{-1} = \bar{\bar{\beta}}^{-1}$.

Segue também do diagrama que $\bar{\bar{\beta}}$ leva cada α_i em um de seus conjugados e que $\theta : (P_{2k})_{j_0} \rightarrow CA_k$ é um homomorfismo.

Pelo **Lema 3.2.4**, CA_k é gerado por α_{ij} para $i, j \in \underline{k}$ e $i \neq j$, onde $\alpha_{ij}(\alpha_i) = \alpha_j \alpha_i \alpha_j^{-1}$ e $\alpha_{ij}(\alpha_l) = \alpha_l$ se $l \neq i$.

Para provarmos que θ é sobrejetora, consideremos β_{ij} , para todo $i, j \in \underline{k}$ com $i > j$, a trança pura com $2k$ cordas representada na figura 40. E para todo $i, j \in \underline{k}$ com $i < j$, seja β_{ij} a trança pura com $2k$ cordas representada na figura 41.

Figura 40

Figura 41

Vejam os que $\forall i, j \in \underline{k}$ com $i \neq j$, $\beta_{ij} \in (P_{2k})_{j_0}$. Primeiro, o caso em que $i > j$. As setas, nas figuras abaixo, indicam o movimento a ser realizado.

Seja $z_{i+1} = x_{i+1}x_{i+2}\dots x_k\tilde{x}_k\dots\tilde{x}_{i+2}\tilde{x}_{i+1}$ e $z_i = x_i z_{i+1} \tilde{x}_i$.

Primeiro, suponhamos que $i > j$. Neste caso, em $\Pi_1(\beta_{ij})$ temos as relações:

$$x_l = y_l \quad \text{se } 1 \leq l < j,$$

$$x_j = z_i z_{i+1}^{-1} y_j z_{i+1} z_i^{-1},$$

$$x_l = x_j^{-1} y_j y_l y_j^{-1} x_j \quad \text{se } j < l < i,$$

$$x_i = y_j y_i y_j^{-1},$$

$$x_l = y_l \quad \text{se } i < l \leq k.$$

(Além disso, $\hat{x}_l = \hat{y}_l$ se $1 \leq l < i$,

$$\hat{x}_i = z_i^{-1} x_j z_i \hat{y}_i z_i^{-1} x_j^{-1} z_i,$$

$$\hat{x}_l = \hat{y}_l \quad \text{se } i < l \leq k.)$$

Lembremos que em $\frac{\Pi_1(\beta_{ij})}{\langle y_i \hat{y}_i \mid i \in \underline{k} \rangle^N}$ temos $[\hat{x}_i]^{-1} = [\hat{x}_i]$, então, neste grupo, obtemos as relações $[x_i] = [y_j][y_i][y_j]^{-1}$ e, $\forall l \neq i$, $[x_l] = [y_l]$. Portanto, se $i > j$ temos $\theta(\beta_{ij}) = \alpha_{ij}$.

De modo análogo, se $i < j$, obtemos as seguintes relações em $\Pi_1(\beta_{ij})$:

$$x_l = y_l \quad \text{se } l < i,$$

$$x_i = x_j y_i x_j^{-1},$$

$$x_l = x_j y_j^{-1} y_l y_j x_j^{-1} \quad \text{se } i < l < j,$$

$$x_j = z_i z_{i+1}^{-1} x_j y_j x_j^{-1} z_{i+1} z_i^{-1},$$

$$x_l = y_l \quad \text{se } j < l \leq k.$$

(Além disso, $\hat{x}_l = \hat{y}_l$ se $l < i$,

$$\hat{x}_i = z_i^{-1} x_j z_i \hat{y}_i z_i^{-1} x_j^{-1} z_i,$$

$$\hat{x}_l = \hat{y}_l \quad \text{se } i < l \leq k.)$$

Neste caso segue também que $\theta(\beta_{ij}) = \alpha_{ij}$. ■

Proposição 5.3.2. $(P_{2k})_{j_0}$ atua no conjunto das classes de cobordismo bordante de k -enlaçamentos de intervalos bordantes.

Demonstração:

Seja f um k -enlaçamento de intervalos bordante com meridianos $a_1, \dots, a_k$ no topo e $b_1, \dots, b_k$ na base e seja $\beta \in (P_{2k})_{j_0}$.

Usando a mesma notação da proposição anterior, o teorema de Seifert-Van Kampen nos fornece o seguinte diagrama push-out

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F(y_i, \tilde{y}_i) & & \\
 & \swarrow i_1 & & \searrow i_2 & \\
 \Pi_1(f) & \xrightarrow{j_1} & \Pi_1(\beta \cdot f) & \xleftarrow{j_2} & \Pi_1(\beta) \\
 & \searrow \eta(f) & \downarrow v & \swarrow \xi \lambda(\beta)_* & \\
 & & F(k) & &
 \end{array}$$

onde $F(y_i, \tilde{y}_i)$ é o grupo livre gerado por $y_1, \dots, y_k, \tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_1$, i_2 é o homomorfismo inclusão, j_1 e j_2 são induzidas pelas aplicações inclusão, i_1 é o homomorfismo definido por $i_1(y_i) = a_i$ e $i_1(\tilde{y}_i) = b_i^{-1}$, para todo $i \in \underline{k}$, e $v : \Pi_1(\beta \cdot f) \rightarrow F(k)$ é o homomorfismo que comuta o diagrama push-out.

Figura 43

Para todo $i \in \underline{k}$, $v j_2(x_i) = \xi \lambda(\beta)_*(x_i) = \xi \bar{\beta}(\alpha_i) = \bar{\bar{\beta}}(\alpha_i)$ e $v j_2(\tilde{x}_i) = \xi \lambda(\beta)_*(\tilde{x}_i) = \xi \bar{\beta}(\tilde{\alpha}_i) = \bar{\bar{\beta}}(\alpha_i)^{-1}$. Então $\bar{\bar{\beta}}^{-1} v$ é um splitting para $\beta \cdot f$, assim $\beta \cdot f$ é um enlaçamento de

intervalos bordante. Além disso, suponhamos que g é outro k -enlaçamento de intervalo bordante e C é um cobordismo entre f e g . Substituindo f por C e β por $\beta \times id_I$ no diagrama push-out anterior, obtemos um splitting para o cobordismo $(\beta \times id_I) \cdot C$ entre $\beta \cdot f$ e $\beta \cdot g$. ■

Seja $\langle \beta_{ij} \mid i, j \in k, i \neq j \rangle$ o subgrupo de $(P_{2k})_{10}$ gerado por β_{ij} definido na **Proposição 5.2.1**.

Teorema 5.3.3. *Qualquer splitting de um enlaçamento bordante L com k componentes pode ser obtido agindo-se em qualquer k -enlaçamento de intervalos bordante f , com $\hat{f} = L$, por um elemento de $\langle \beta_{ij} \mid i, j \in k, i \neq j \rangle$ e fechando-se o enlaçamento de intervalos bordante resultante.*

Demonstração:

Seja f um k -enlaçamento de intervalos bordante com $\hat{f} = L$. $\eta = \widehat{\eta(f)}$ é um splitting para L . Se um epimorfismo $z : \Pi_1(L) \rightarrow F(k)$ é um splitting para L então $z = \alpha\eta$, para algum $\alpha \in CA_k$. Agora, $\widehat{\beta_{ij} \cdot f} = \hat{f} = L$ e $\eta(\widehat{\beta_{ij} \cdot f})$ restrita aos geradores de $\Pi_1(\widehat{\beta_{ij} \cdot f})$, cujos representantes estão no complemento de f em B_- , coincide com $\bar{\beta}_{ij}^{-1} \widehat{\eta(f)}$, pela **Proposição 5.2.2** e os $\bar{\beta}_{ij} = \alpha_{ij}$ geram CA_k . ■

Exemplo 5.3.4. Seja L o seguinte enlaçamento bordante orientado:

Figura 44a

Consideremos uma d-base para L .

Figura 44b

Logo, pela bijeção de Habegger-Lin, ao enlaçamento d-baseado acima corresponde um enlaçamento de intervalos, dado na figura 44e.

Figura 44c

Figura 44d

Figura 44e

Como o enlaçamento acima tem 3 componentes, consideremos o grupo $\langle \beta_{ij}, i, j \in \underline{3}, i \neq j \rangle$. Estes elementos β_{ij} estão representados nas figuras abaixo.

Figura 44f: $\beta_{3,1}$ Figura 44g: $\beta_{3,2}$ Figura 44h: $\beta_{2,1}$ Figura 44i: $\beta_{1,2}$ Figura 44j: $\beta_{1,3}$ Figura 44l: $\beta_{2,3}$

Atuando-se com as tranças β_{ij} , $i \neq j$, $\forall i, j \in \underline{3}$, no enlaçamento de intervalos bordante 44e e fechando-se o enlaçamento resultante obtemos o enlaçamento inicial L , uma vez que os β_{ij} (e portanto os β_{ij}^{-1}) pertencem a $(P_{2k})_{j_0}$. Vejamos a ação de $\beta_{3,2}$ no enlaçamento de intervalos 44e.

Figura 44m

44e possui uma aplicação splitting que leva w_1 em x , y_1 em y e z_1 em z onde x, y, z são os geradores do grupo livre $F(3)$. Notemos que no enlaçamento de intervalos bordante obtido em 44m, o splitting leva x_1 em x , x_2 em y e x_3 em z , além disso, valem as seguintes relações:

$$w_1 = x_1, \quad y_1 = \tilde{x}_3^{-1} x_3^{-1} x_2 x_3 \tilde{x}_3 \quad \text{e} \quad z_1 = y_1^{-1} x_3 y_1.$$

Assim, por esta aplicação splitting, w_1 é levado em x , y_1 em $zz^{-1}yzz^{-1} = y$ e z_1 é levado em $y^{-1}zy$.

Referências Bibliográficas

- [1] BIRMAN, J.S., *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies 82, Princeton University Press, (1975).
- [2] BURDE, G., ZIESCHANG, H., *Knots*, Walter de Gruyter, Berlin - New York, (1985).
- [3] CAPPELL, S.E., SHANESON, J.L., *Link Cobordism*, Comment. Math. Helvetici 55 (1980), 20-49.
- [4] COHEN, D.E., *Combinatorial Group theory: a topological approach*, London Mathematical Society. Student Texts 14(1989).
- [5] DE CAMPOS, J.E.P.P., *Boundary String Links*, Journal of Knot Theory and its Ramifications, **vol 08**, n: 07, 855-878, (1999).
- [6] DE CAMPOS, J.E.P.P., *Boundary String Links*, Ph.D. Dissertation, Brandeis University (1998).
- [7] GUTIÉRREZ, M. A., *Boundary links and unlinking theorem*, Transactions of the American Mathematical Society, **vol 03**, 451-499, (September 1987).
- [8] HABBEGER, N.; LIN X.S., *The classification of links*, Journal of the American Mathematical Society, **vol 03**, n: 02 (April 1990).
- [9] HANSEN, V.L., *Braids and Coverings*, Cambridge University Press, (1989).
- [10] KO, K.H., *Seifert matrices and boundary link cobordism*, Transactions of the American Mathematical Society, **vol 299**, n: 02 (February 1987).
- [11] LE DIMET, J.Y., *Cobordism d'enlacements de disques*, Memoire de la Société Mathématique de France, **32**, Supplément au Bulletin de la S.M.F., Tome 116, fascicule 2 (1988).

-
- [12] MASSEY, W.S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc. (1967).
 - [13] ROFSEN, D., *Knots and Links*, Publish or Perish, Inc. (1990).
 - [14] SMYTHE, N., *Wisconsin Topology Seminar*, Ann. of Math. Studies, n: 60, Princeton University Press, Princeton, N.Y., (1995).