Uma ordenação para o grupo de tranças puras

Letícia Melocro

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

Letícia Melocro

Uma ordenação para o grupo de tranças puras

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Ciências – Matemática. VERSÃO REVISADA

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
Dezembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Melocro, Letícia
M648o Uma ordenação para o grupo de tranças puras / Letícia Melocro; orientador Denise de Mattos. -- São Carlos, 2016.
177 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Grupos livres. 2. Grupo de tranças Artin. 3. Grupo de tranças puras. 4. Ordenação. I. de Mattos, Denise, orient. II. Título.

Letícia Melocro

An ordering for groups of pure braids

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Denise de Mattos

USP – São Carlos
December 2016

"É muito melhor lançar-se em busca de conquistas grandiosas, mesmo expondo-se ao fracasso, do que alinhar-se com os pobres de espírito, que nem gozam muito nem sofrem muito, porque vivem numa penumbra cinzenta, onde não conhecem nem vitória, nem derrota".

Theodore Roosevelt

Agradecimentos

Eis que é chegada a hora de finalizar um grande trabalho e agradecer a todos que fizeram parte desse percurso comigo.

À Deus e aos meus Anjinhos da Guarda, que sempre me deram sabedoria e pessoas maravilhosas para me aconselhar e me manter firme para acreditar nos meus sonhos e persistir até alcançá-los, este trabalho é um deles.

À minha orientadora Denise de Mattos, por ter acreditado na minha capacidade e ter me proposto esse tema encantador do qual tenho tanto orgulho. Agradeço pelas longas e dedicadas correções, conversas, amizade e sobretudo, às suas aulas. Eu lembro a primeira vez que tivemos contato, na disciplina de Introdução a Matemática, e a sua paixão por ensinar e transmitir conhecimento me encantou e me fez admirar ainda mais a matemática. Não existem palavras para expressar a importância que tudo isso representou na minha vida. Não poderia esquecer e deixar de agradecer, com muito carinho, os seminários com a participação do professor Edivaldo Lopes Santos. Em todas as nossas reuniões eu sentia fazer parte da família. Muito obrigada por esses momentos.

À minha alma gêmea e melhor amigo Luis Fernando Galbine Bottaro, por todos os momentos que vivemos e por ter caminhado ao meu lado, desde os vestibulares, me incentivando e me dando todo o apoio possível nos momentos em que mais precisei. Te amo!

À toda minha família, em especial aos meus pais Diomar e Élide, e ao meu irmão Gabriel por serem o meu alicerce e por fazerem da nossa família a melhor. À minha tia Alexandra, por me acolher como filha durante a graduação e por sempre me esperar chegar da faculdade para dormir. Ao meu primo Raul, por dividir seu quarto comigo e ao meu tio Tadeu por me fazer sorrir com suas brincadeiras. Aos meus avós, por todo o amor e lição de vida. Espero poder lhes agradecer dando orgulho com a conquista desse trabalho.

Aos meus irmãos acadêmicos, em especial, Juliana, pelas monitorias, amizade e conexão com o grupo das tranças, ao César pela disponibilidade em ajudar nas correções, e ao Tato Nelson, pela amizade verdadeira, conversas de gente grande e transparência de personalidade.

Aos meus amigos da escola, Linic, Eduardo e Rafael, pela amizade verdadeira, pela adolescência alegre que tivemos e por histórias divertidas que me fazem sorrir a qualquer hora. Aos amigos da faculdade, Geisiane, Joice, Thiago, Alex e Roberto, pelos estudos, pela paciência e convivência durante todos esses anos.

Aos professores que fizeram parte de todas as etapas escolares da minha vida e que foram muito além do conteúdo do currículo.

À todos os funcionários do ICMC, pela disponibilidade e atenção em resolver nossos problemas. Aos funcionários da universidade, por cuidarem dos nossos espaços todos os dias.

Aos Professores da banca examinadora pela leitura e correções.

Por fim, agradeço à Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro que foi essencial para dedicar-me exclusivamente aos estudos.

À todos um grande abraço,
Letícia Melocro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma descrição geométrica do grupo de tranças no disco $B(n)$ e sua apresentação em termos de geradores e relatores no famoso teorema da apresentação de Artin. Mostraremos também que o grupo de tranças puras $PB(n)$, grupo que possui a permutação trivial das cordas, é bi-ordenável, ou seja, exibiremos uma ordenação para $PB(n)$ que será invariante pela multiplicação em ambos os lados. Esse processo é dado a partir da combinação da técnica de pentear Artin e a expansão Magnus para grupos livres.

Palavras-chave: grupos livres, grupo de tranças Artin, grupo de tranças puras, ordenação bi-invariante, expansão Magnus.

Abstract

In this work, we present a geometric description of the braids groups of the disk $B(n)$ and its presentation in terms of generators and relations in the famous theorem of Artin's presentation. We also show that groups of pure braids, denoted by $PB(n)$, groups that have the trivial permutation of the strings, are bi-orderable, that is, we will present the explicit construction of a strict total ordering of pure braids $PB(n)$ which is invariant under multiplying on both sides. This process is given from the combination of the techniques of combing Artin and Magnus expansion to free groups.

Keywords: free groups, braids of Artin group, group of pure braids, ordering bi-invariant, expansion Magnus.

Sumário

Introdução

Poucas áreas de pesquisa em matemática podem traçar suas origens tão precisamente quanto a teoria de tranças, que teve seu marco em 1925, quando Emil Artin publicou seu artigo "Theorie der Zöpfe" [1]. O termo *grupo de tranças* foi usado pela primeira vez por Artin, embora provavelmente estes grupos tenham sido considerados por Adolf Hurwitz em 1891 [24], como na terminologia moderna seriam chamados *grupos fundamentais de espaços de configurações de* n *pontos no plano complexo*. Magnus, em 1934 [31], considerou o mesmo grupo do ponto de vista das chamadas *mapping classes*. Markoff [33] apresentou uma abordagem completamente algébrica. Todos estes pontos de vista já eram conhecidos para definir o mesmo grupo naqueles tempos (veja [42]).

A noção explícita de tranças foi introduzida por Emil Artin na década de 1920 com o intuito de formalizar objetos topológicos que modelam o entrelaçamento de várias cordas no 3-espaço Euclidiano. Artin mostrou que tranças com um número n fixo de cordas formam um grupo, chamado *Grupo de Tranças Artin*, denotado por $B(n)$. Desde então, vários resultados importantes têm sido provados, como por exemplo, o Teorema da Apresentação de Artin, que diz respeito à apresentação de $B(n)$ em termos de geradores e relatores e o Teorema da Representação deste grupo como um subgrupo do grupo dos automorfismos de grupos livres em n geradores.

Uma das descobertas recentes mais fundamentais sobre os grupos de tranças Artin $B(n)$, é que eles são ordenáveis à esquerda (vide [10] e [18]). Um grupo é ordenável à esquerda (respectivamente, à direita), se existe uma ordem total estrita de seus elementos que é invariante pela multiplicação à esquerda (respectivamente à direita). Um grupo que possui uma ordenação total estrita de seus elementos, que é invariante pela multiplicação à direita e à esquerda, é chamado bi-ordenado. O principal objetivo deste trabalho é mostrar que o subgrupo das tranças puras, $PB(n)$, tranças com permutação trivial das cordas, é bi-ordenável, ou seja, exibiremos uma ordenação total estrita para $PB(n)$, que será invariante pela multiplicação de ambos os lados. A chave para provar este resultado é que grupos livres são bi-ordenáveis e $PB(n)$ é um produto semidireto de grupos livres. A ordenação será definida usando uma combinação da técnica de pentear tranças de Artin e a expansão Magnus para grupos livres.

Este trabalho está organizado como segue.

Grupos livres desempenham um papel fundamental na teoria combinatória de grupos. É suficiente dizer que qualquer grupo é um grupo fator de um grupo livre apropriado (vide Corolário 1.2.43). No Capítulo 1, estabelecemos a existência de grupos livres com uma base arbitrária. Abordamos também o conceito de produto livre de grupos, que é fundamental no estudo da decomposição de grupos. Os resultados principais deste capítulo, assim como suas demonstrações, estão contidos na referência [6].

O principal objetivo do Capítulo 2 é fornecer uma base teórica para os dois capítulos posteriores. Neste capítulo, estudamos as apresentações para produtos diretos, semidiretos e extensões de grupos. Os resultados principais deste capítulo estão contidos na referência [25].

O Capítulo 3 contém resultados básicos sobre grupos de tranças e espaços relacionados. O nosso principal objetivo é dar uma descrição geométrica do grupo de tranças no disco e identificá-lo com o grupo fundamental do espaço de configurações de $\mathbb{R}^2$, $C_n(\mathbb{R}^2)$. Apresentamos a definição de uma trança geométrica como sendo um sistema de n cordas entre dois planos paralelos no 3-espaço Euclidiano, sendo esta a definição original dada por Artin em [2]. Também consideramos a definição equivalente de uma trança, sugerida por Fox em 1962 [19], como sendo um laço no espaço de configurações de um conjunto de n pontos no plano Euclidiano. Mostraremos que o conjunto das classes de equivalência de todas as tranças geométricas sobre n cordas determina um grupo, que denotaremos por $B(n)$, chamado o *grupo de tranças de Artin sobre n cordas* ou *grupo de tranças no disco*. Além disso, introduziremos uma apresentação deste grupo em termos de geradores e relatores no famoso Teorema da Apresentação de Artin. As principais referências utilizadas neste capítulo são [3], [20], [26], e [37].

No Capítulo 4, definimos uma ordem total para $PB(n)$, o grupo das tranças puras sobre n cordas, a qual será invariante sob a multiplicação de ambos os lados. A ordenação para $PB(n)$ será definida usando-se uma combinação da técnica de pentear tranças devida a Artin e a expansão Magnus para Grupos Livres. Veremos que grupos livres são bi-ordenáveis e que $PB(n)$ é um produto semidireto de grupos livres. As principais referências deste capítulo são [12] e [28].

Para finalizar, aproveitando essa introdução, as referências das figuras dos Capítulos 3 e 4 foram baseadas em [12] e [20], respectivamente. Todas as imagens foram construídas pela autora deste trabalho, no LaTeX usando simultaneamente o pacote "Braids" e o pacote "TikZ".

Capítulo

1

Teoria Combinatória de Grupos

Grupos livres desempenham um papel fundamental na teoria combinatória de grupos. É suficiente dizer que qualquer grupo é um grupo fator de um grupo livre apropriado (vide Corolário 1.2.43). Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de grupos livres com uma base arbitrária. Abordaremos também o conceito de produto livre de grupos, que é fundamental no estudo da decomposição de grupos. Os resultados principais deste capítulo, assim como suas demonstrações, estão contidos na referência [6].

1.1 Grupos Livres

Definição 1.1.1. [6, Definition 1] *Sejam X um conjunto, G um grupo e $i : X \to G$ uma função. O par (G, i) é chamado **livre** sobre X se, para qualquer grupo H e para qualquer função $f : X \to H$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H$ tal que $f = \varphi \circ i$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists!\,\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

Observação 1.1.2. *Essa propriedade também é conhecida como* **Propriedade Universal para Grupos Livres***.*

Exemplo 1.1.3. *O grupo trivial $G = \{1\}$ é livre sobre o conjunto $X = \varnothing$.*

Exemplo 1.1.4. *O grupo aditivo dos inteiros $\mathbb{Z}$ é livre sobre o conjunto contendo um único elemento $X = \{x\}$, onde a aplicação $i : \{x\} \to \mathbb{Z}$ é definida por $i(x) = 1$. De fato,* *dados um grupo H e uma função $f : \{x\} \to H$, seja $f(x) = a$, para algum $a \in H$. Defina $\varphi : \mathbb{Z} \to H$ por $\varphi(n) = [f(x)]^n = a^n$. Então, φ é um homomorfismo de grupos, pois dados $m, n \in \mathbb{Z}$, temos:*

$$\begin{aligned} \varphi(m+n) = [f(x)]^{m+n} = a^{m+n} &= a^m \cdot a^n \\ &= [f(x)]^m \cdot [f(x)]^n = \varphi(m) \cdot \varphi(n). \end{aligned}$$

Observemos ainda que

$$(\varphi \circ i)(x) = \varphi(i(x)) = \varphi(1) = a = f(x). \tag{1.1.2}$$

Assim, se existir um outro homomorfismo $\varphi' : \mathbb{Z} \to H$ satisfazendo (1.1.2), então:

$$\varphi'(1) = (\varphi' \circ i)(x) = f(x) = a = (\varphi \circ i)(x) = \varphi(1).$$

Portanto, $\varphi(1) = \varphi'(1) = a$ e desde que 1 é o gerador de $\mathbb{Z}$, concluímos que $\varphi = \varphi'$ sobre $\mathbb{Z}$ e segue a unicidade de φ.

Observação 1.1.5. *Se (G, i) for livre sobre X e se $\psi : G \to H$ for um isomorfismo, então $(H, \psi \circ i)$ também será livre sobre X. De fato, dados um grupo H' qualquer e uma função $f' : X \to H'$, devemos mostrar que existe um único homomorfismo $\varphi' : H \to H'$ tal que $\varphi' \circ (\psi \circ i) = f'$. Como (G, i) é livre sobre X, para a função $f' : X \to H'$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \to H'$ tal que $\varphi \circ i = f'$. Defina $\varphi' : H \to H'$ por $\varphi' = \varphi \circ \psi^{-1}$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & H' \\ G \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & \\ H \arrow[uur, "\exists!\,\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

(i) *A função φ' é um homomorfismo de grupos, pois é composição de homomorfismos.*

(ii) *$\varphi' = \varphi \circ \psi^{-1}$ satisfaz $\varphi' \circ (\psi \circ i) = f'$.*

De fato,

$$\begin{aligned}\varphi' \circ (\psi \circ i) &= (\varphi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ i)\\ &= \varphi \circ (\underbrace{\psi^{-1} \circ \psi}_{Id_G}) \circ i = \varphi \circ i = f'.\end{aligned}$$

(iii) *Suponhamos que exista um homomorfismo* $\varphi'' : H \to H'$ *tal que* $\varphi'' \circ (\psi \circ i) = f'$. *Mostraremos que* $\varphi'' = \varphi'$. *Seja* $\theta : G \to H'$ *dada pela composição* $\theta = \varphi'' \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & H' \\ G \arrow[ur, "\theta"] \arrow[d, "\psi"'] & \\ H \arrow[uur, "\varphi''"'] & \end{tikzcd}$$

Assim,

$$\theta \circ i = (\varphi'' \circ \psi) \circ i = \varphi'' \circ (\psi \circ i) = f'.$$

Como $\varphi : G \to H'$ *é o único homomorfismo que satisfaz* $\varphi \circ i = f'$, *temos que* $\theta = \varphi$. *Mas então,* $\varphi'' \circ \psi = \theta = \varphi$, *o que implica* $\varphi'' = \varphi \circ \psi^{-1} = \varphi'$ *e segue a unicidade de* φ'.

A Proposição 1.1.6 é a recíproca da Observação 1.1.5 e mostra que os grupos livres sobre um determinado conjunto são únicos, a menos de isomorfismo.

Proposição 1.1.6. [6, Proposition 1] *Sejam* (G_1, i_1) *e* (G_2, i_2) *livres sobre* X. *Então, existe um isomorfismo* $\varphi : G_1 \to G_2$ *tal que* $\varphi \circ i_1 = i_2$.

Demonstração:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & G_2 \\ G_1 \arrow[ur, "\exists!\, \varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \\ G_2 \arrow[ur, "\exists!\, \psi"'] & \end{tikzcd}$$

Desde que (G_1, i_1) e (G_2, i_2) são livres sobre X existem únicos homomorfismos:

$$\varphi : G_1 \to G_2 \ \text{ e } \ \psi : G_2 \to G_1 \ \text{ tais que } \ \varphi \circ i_1 = i_2 \ \text{ e } \ \psi \circ i_2 = i_1. \tag{1.1.3}$$

Assim, usando (1.1.3), podemos escrever:

$$\psi \circ i_2 = (\psi \circ \varphi) \circ i_1 = i_1 \quad \text{e} \quad \varphi \circ i_1 = (\varphi \circ \psi) \circ i_2 = i_2. \tag{1.1.4}$$

Por outro lado, as aplicações identidade $Id_{G_1} : G_1 \to G_1$ e $Id_{G_2} : G_2 \to G_2$ também satisfazem

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_1"'] & G_1 \\ G_1 \arrow[ur, "\exists!\, Id_{G_1}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_2"'] & G_2 \\ G_2 \arrow[ur, "\exists!\, Id_{G_2}"'] & \end{tikzcd}$$

$$Id_{G_1} \circ i_1 = i_1 \quad \text{e} \quad Id_{G_2} \circ i_2 = i_2. \tag{1.1.5}$$

Logo, comparando (1.1.4) e (1.1.5), concluímos da propriedade da unicidade na definição de grupos livres que:

$$\psi \circ \varphi = Id_{G_1} \quad \text{e} \quad \varphi \circ \psi = Id_{G_2}.$$

Portanto, φ é um isomorfismo.

❑

O resultado a seguir dá condições para que a aplicação $i : X \to F$ seja injetora, quando o par (F, i) for livre sobre X.

Proposição 1.1.7. [6, Proposition 2] *Seja (F, i) livre sobre X.*

(i) *Se existem um grupo G e uma função injetiva de $f : X \to G$, então $i : X \to F$ é injetiva.*

(ii) *$(\mathbb{Z}^X, +)$ é um grupo, no qual*

$$\mathbb{Z}^X := \{\alpha : X \to \mathbb{Z};\ \alpha \text{ é função}\} \text{ e } (\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x), \forall x \in X.$$

e existe uma função injetiva $f : X \to \mathbb{Z}^X$.

(iii) *$i : X \to F$ é injetiva.*

Demonstração:
(i) Suponhamos que existam um grupo G e uma função injetiva $f : X \to G$. Como (F, i) é livre sobre X, para este grupo G e para a função $f : X \to G$, existe um único

homomorfismo $\varphi : F \to G$ tal que $\varphi \circ i = f$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F \arrow[ur, "\exists!\,\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Desde que f é injetiva, dados $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, temos

$$(\varphi \circ i)(x) := f(x) \neq f(y) := (\varphi \circ i)(y). \tag{1.1.6}$$

Assim, $i(x) \neq i(y)$, pois se existissem $x, y \in X$ tais que $x \neq y$ e $i(x) = i(y)$, teríamos que $(\varphi \circ i)(x) = (\varphi \circ i)(y)$, contradizendo 1.1.6. Segue que $i : X \to F$ é injetiva.

(ii) $(\mathbb{Z}^X, +)$ é um grupo: a associatividade da operação $+$ segue da associatividade da adição em $\mathbb{Z}$; o elemento neutro da operação $+$ é a função nula $\alpha_0 \in \mathbb{Z}^X$, $\alpha_0 : X \to \mathbb{Z}$, $\alpha_0(x) = 0$, para todo $x \in X$ e, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}^X$, existe a função $-\alpha \in \mathbb{Z}^X$, $-\alpha : X \to \mathbb{Z}$ definida por $(-\alpha)(x) = -\alpha(x)$, para todo $x \in X$, a qual é o elemento oposto de $\alpha : X \to \mathbb{Z}$. Considere a função

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{Z}^X \\ x &\mapsto f(x) := \alpha_x : X \to \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

onde α_x é definida, para cada $x \in X$, como segue:

$$\alpha_x(y) = \begin{cases} 1, \text{ se } x = y \\ 0, \text{ se } x \neq y \end{cases}$$

Note que dados $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, então

$$\alpha_x(x) = 1 \neq 0 = \alpha_y(x), \quad \text{assim,} \quad f(x) = \alpha_x \neq \alpha_y = f(y)$$

e, portanto, a função f dada em (1.1.7) que envia $x \in X$ para $\alpha_x \in \mathbb{Z}^X$ é injetiva.

(iii) Segue imediatamente de (i) e (ii), tomando $G = \mathbb{Z}^X$ e $f : X \to \mathbb{Z}^X$, $x \mapsto \alpha_x$, dada em (1.1.7).

❏

1.2 Construção de Grupos Livres e suas Propriedades

Com base na Definição 1.1.1, uma questão natural que surge é: se dado um conjunto X arbitrário, existe um grupo F e uma aplicação $i : X \to F$ tal que (F, i) é livre sobre X. Iremos produzir tal grupo livre sobre X começando com a seguinte construção auxiliar.

Seja X um conjunto arbitrário e denotemos por $M(X)$ o conjunto de todas as sequências finitas $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ de elementos de X, com $n \geqslant 0$, ou seja,

$$M(X) = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n});\, x_{i_r} \in X,\ r = 1, 2, \ldots, n\}.$$

O caso $n = 0$ corresponde à **sequência vazia**, a qual será denotada por $(\,)$. Observemos que os elementos $x_{i_r} \in M(X)$ não são necessariamente distintos entre si.

Definimos uma multiplicação $\cdot : M(X) \times M(X) \to M(X)$ pela concatenação:

$$((x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \cdot (x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n},\, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$$

Essa multiplicação assim definida é associativa e possui como elemento identidade a sequência vazia $(\,)$, que chamaremos de 1. Assim, $(M(X), \cdot)$ tem estrutura de *monóide*[1] e será chamado o **monóide livre gerado por** X.

Observemos que a função $X \to M(X)$ dada por $x \mapsto (x)$ é, naturalmente, uma função injetiva e, identificando x com (x), cada elemento de $M(X)$ pode ser escrito de maneira única como um produto da forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n}, \ \text{ para algum } \ n, \tag{1.2.1}$$

ou seja, considerando uma sequência $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in M(X)$, segue da definição da aplicação $X \to M(X)$, que cada $x_{i_r} \in X$ é levado injetivamente na sequência contendo um único elemento $(x_{i_r}) \in M(X)$, $r = 1, \ldots, n$, e, da definição da multiplicação em $M(X)$, temos que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) := (x_{i_1}) \cdot (x_{i_2}) \cdots (x_{i_n})$. Fazendo a identificação x com (x), obtemos o elemento $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in M(X)$. A unicidade deste elemento como sendo um produto de elementos de X segue da injetividade da função $X \to M(X)$. De agora em diante, fixaremos a notação (1.2.1) para representar um elemento de $M(X)$.

[1] **([14], págs. 40 - 41)** Um monóide é um conjunto G, juntamente com uma operação $G \times G \to G$ que é associativa e possui elemento neutro. A diferença entre um monóide e um grupo é que no monóide não se exige que todo elemento possua inverso.

Um detalhe técnico foi omitido nessa construção. Desde que X é um conjunto arbitrário, é possível que algum elemento de X seja ele mesmo uma sequência finita de elementos de X. Neste caso, queremos distinguir essa sequência como sendo um elemento de X ou como sendo um elemento de $M(X)$. O caminho natural para sanar este problema é substituir X por $X' = \{\{x\}, x \in X\}$ e definir o monóide livre sobre X como sendo $M(X')$. Esse detalhe será omitido de agora em diante.

1.2.1 Construindo o grupo livre gerado por X

Dado um conjunto arbitrário X, escolhemos um conjunto disjunto de X com a mesma cardinalidade de X e denotemos um tal conjunto por $X^{-1} = \{x^{-1};\ x \in X\}$, onde, é claro que, x^{-1} é meramente um símbolo. Assim, existe uma bijeção $X \to X^{-1}$, $x \mapsto x^{-1}$, com $X \cap X^{-1} = \emptyset$. O símbolo x^1 será usado para denotar um elemento qualquer $x \in X$. Podemos considerar $M(X \cup X^{-1})$ o monóide livre gerado por $X \cup X^{-1}$ e seus elementos serão chamados **palavras** sobre X, ou seja,

$$M(X \cup X^{-1}) := \{x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n};\ x_{i_r}^{\epsilon_r} \in X \cup X^{-1},\ \epsilon_r = \pm 1,\ r = 1, \ldots, n\}. \qquad (1.2.2)$$

Se w for uma palavra da forma $x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, então n será chamado o **comprimento** de w e será denotado por $|w|$ ou por $l(w)$. Cada elemento $x_{i_r}^{\epsilon_r}$ será chamado uma **letra** de w.

Uma palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, $\epsilon_r = \pm 1$ será chamada uma palavra **reduzida** se, para cada $1 \leqslant r \leqslant n-1$, ou $i_{r+1} \neq i_r$ ou $i_{r+1} = i_r$, mas $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$. Por convenção, a palavra vazia será também uma palavra reduzida.

Observação 1.2.1. *Observemos que duas palavras reduzidas $u = x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_r}^{\lambda_r} \ldots x_{i_n}^{\lambda_n}$ e $v = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_k}^{\delta_k} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$ com $x_{i_r}, x_{j_k} \in X$ e $\lambda_r, \delta_k = \pm 1$, são iguais se, e somente se, ambas são a palavra vazia ou $m = n$ e $x_{i_r} = x_{j_r}$, $\lambda_r = \delta_r$, para todo $r = 1, \ldots n$.*

Suponhamos que $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ não seja uma palavra reduzida e escolha r tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$. Seja w' a palavra obtida de w deletando os pares de letras adjacentes $x_{i_r}^{\epsilon_r}$ e $x_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}$ na escrita de w, ou seja, eliminamos da palavra w o produto da forma $x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdot x_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}} = x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdot x_{i_r}^{-\epsilon_r}$, obtendo a palavra:

$$w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_r-1}^{\epsilon_{r-1}} \cdot x_{i_r+2}^{\epsilon_{r+2}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}. \qquad (1.2.3)$$

Neste caso, dizemos que w' foi obtida de w por uma **redução elementar**. Se w''

é uma outra palavra sobre X, obtida de w por uma sequência de reduções elementares, dizemos que w'' é obtida de w por **redução**.

Exemplo 1.2.2. *Seja* $w = zxx^{-1}zy^{-1}y$*. As palavras* $zzy^{-1}y$ *e* $zxx^{-1}z$ *são obtidas de* w *por redução elementar, e a palavra* zz *é obtida de* w *por redução.*

Exemplo 1.2.3. *Seja* $w = zxx^{-1}xy$*, então,* zxy *é obtida de* w *por redução elementar. Neste caso, duas reduções elementares podem ser aplicadas para* w*, ambas dando o mesmo resultado: a primeira deleta o par de letras adjacentes* xx^{-1} *e a segunda deleta o par de letras adjacentes* $x^{-1}x$*.*

Dizemos que duas palavras $w, w' \in X$ são **equivalentes**, e escrevemos $w \approx w'$, quando w é igual a w' ou, se existe uma sequência finita de palavras $w_1, \ldots, w_k$, para algum inteiro k, tal que $w_1 = w$, $w_k = w'$ e, para cada $j < k$, w_{j+1} é obtido de w_j por redução elementar ou vice-versa (neste caso, dizemos que os termos consecutivos w_j e w_{j+1} diferem por redução elementar). Mostremos que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o monóide livre $M(X \cup X^{-1})$.

(i) Reflexividade: Para qualquer palavra $w \in M(X \cup X^{-1})$, $w = w$, logo $w \approx w$.

(ii) Simetria: Dadas duas palavras $w, w' \in M(X \cup X^{-1})$ tais que $w \approx w'$. Se $w' = w$, então $w' \approx w$. Caso contrário, existe uma sequência finita de palavras $w_1, \ldots, w_k$ tais que $w_1 = w$, $w_k = w'$ e para cada $j < k$, w_{j+1} é obtido de w_j por uma redução elementar ou vice-versa. Para cada $j = 1, \ldots, k$ considerando a palavra

$$v_j = w_{k-(j-1)}, \tag{1.2.4}$$

obtemos uma nova sequência de palavras $v_1, v_2, \ldots, v_k$, as quais satisfazem:

$$v_1 = w_k = w', \quad v_2 = w_{k-1}, \quad v_3 = w_{k-2}, \ldots, v_{k-1} = w_2, \quad v_k = w_1 = w, \tag{1.2.5}$$

e cujos termos consecutivos v_i e v_{i+1} diferem por redução elementar, para cada $i = 1, \ldots k - 1$. Portanto, $w' \approx w$.

(iii) Transitividade: Dadas palavras $w, w', w'' \in M(X \cup X^{-1})$ tais que $w \approx w'$ e $w' \approx w''$.

Caso 1: Se $w = w'$ e $w' = w''$, então $w = w''$ e isso implica que $w \approx w''$.

Caso 2: Se existem sequências finitas de palavras, $w_1, \dots, w_k$ e $v_1, \dots, v_n$ tais que $w_1 = w$, $w_k = w'$ e $v_1 = w'$, $v_n = w''$ e cujos termos consecutivos diferem por redução elementar, então $w' = v_1 = w_k$ e, portanto, $w_1, \dots, w_k, v_2, \dots, v_n$ é uma sequência finita de palavras tais que $w_1 = w$, $v_n = w''$, cujos termos consecutivos diferem por redução elementar. Assim, $w \approx w''$.

Caso 3: Se $w = w'$ e se existe uma sequência finita de palavras $w_1, \dots, w_k$ tais que $w_1 = w'$ e $w_k = w''$ e cujos termos consecutivos w_j e w_{j+1} diferem por redução elementar, para cada $j = 1, \dots, k-1$, então $w = w' = w_1$ e $w_k = w''$, o que implica $w \approx w''$.

Caso 4: Se $w' = w''$ e se existe uma sequência finita de palavras $w_1, \dots, w_k$ tais que $w_1 = w$, $w_k = w'$ e cujos termos consecutivos w_j e w_{j+1} diferem por redução elementar, para cada $j = 1, \dots, k-1$, então $w_1 = w$ e $w_k = w' = w''$, o que implica $w \approx w''$.

O **conjunto das classes de equivalência** do monóide livre $M(X \cup X^{-1})$ pela relação $\approx$ será denotado por $F(X)$ e a classe de equivalência de uma palavra $w \in M(X \cup X^{-1})$ será denotada por $[w]$, ou seja:

$$F(X) = \{[w];\ w \in M(X \cup X^{-1})\}, \text{ no qual } [w] := \{\ w' \in M(X \cup X^{-1});\ \ w' \approx w\}.$$

A seguir, mostraremos que $F(X)$ será um grupo munido do produto entre classes de equivalência de palavras, herdado do produto de palavras no monóide livre $M(X \cup X^{-1})$.

Proposição 1.2.4. **[6]** *Dadas duas classes de equivalências de palavras* $[u], [v] \in F(X)$, *definimos o produto:*

$$\begin{aligned} \cdot : F(X) \times F(X) &\to F(X) \\ ([u],[v]) &\mapsto [u] \cdot [v] := [u \cdot v]. \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Então, $(F(X), \ \cdot \ )$ *é um grupo.*

Demonstração:
Mostraremos primeiramente que o produto em (1.2.6) é bem definido. Sejam u, v, w e w' palavras em X.

(1) Se $w \approx w'$, então $uwv \approx uw'v$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $w_1, \ldots, w_k$ seja uma sequência de palavras sobre X tais que $w = w_1$, $w' = w_k$ e cujos termos consecutivos w_j e w_{j+1} diferem por redução elementar, para todo $1 \leqslant j < k$. Logo, considerando a sequência finita de palavras $uw_1v, \ldots, uw_nv$, temos que $uwv = uw_1v$, $uw'v = uw_kv$ e os termos consecutivos uw_jv e $uw_{j+1}v$ diferem por redução elementar, para todo $1 \leqslant j < k$, o que mostra que $uwv \approx uw'v$.

(2) Se $u \approx u'$ e $w \approx w'$, então $uw \approx u'w'$.
De fato, segue do item (1) que

$$w \approx w' \Rightarrow uw \approx uw' \tag{1.2.7}$$

$$u \approx u' \Rightarrow uw' \approx u'w'. \tag{1.2.8}$$

Assim, de (1.2.7), (1.2.8) e da transitividade da relação $\approx$, concluímos que $uw \approx u'w'$.

Segue que o produto (1.2.6) em $F(X)$ está bem definido.

Agora vejamos que $(F(X), \cdot\ )$ satisfaz os axiomas de grupo.

(i) **Associatividade**: Para quaisquer a, b e $c \in F(X)$, com $a = [w]$, $b = [v]$ e $c = [u]$:

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= ([w] \cdot [v]) \cdot [u] = [wv] \cdot [u] = [(wv)u] \\ &= [w(vu)] = [w] \cdot [vu] = [w] \cdot ([v] \cdot [u]) = a \cdot (b \cdot c),\end{aligned}$$

pois a propriedade de concatenação é associativa.

(ii) **Existência do elemento identidade**: Existe $1 = [(\,)] \in F(X)$, tal que para qualquer $a = [w] \in F(X)$:

$$a \cdot 1 = [w] \cdot [(\,)] = [w(\,)] = [w] = a,$$

pois a palavra $(\,)$ é o elemento identidade da concatenação. Analogamente, $1 \cdot a = a$.

(iii) **Existência do elemento inverso**: Para qualquer $a \in F(X)$, devemos mostrar que existe $a' \in F(X)$ tal que $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$. De fato, dada a classe da palavra

$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ em $F(X)$, consideremos a classe da palavra $w^{-1} = x_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$. Então:

$$\begin{aligned} a \cdot a' &= [w] \cdot [w^{-1}] = [x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}] \cdot [x_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1}] = [(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n})(x_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1})] \\ &= [(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}) \cdot (x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_n}^{-\epsilon_n}) \cdot (x_{i_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1})] \\ &= [(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}) \cdot (\,) \cdot (x_{i_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1})] \\ &= [(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}) \cdot (x_{i_{n-1}}^{-\epsilon_{n-1}} \cdots x_{i_1}^{-\epsilon_1})] = \ldots = [(\,)] = 1. \end{aligned}$$

Analogamente, $a' \cdot a = 1$.

Portanto, $(F(X), \cdot)$ é grupo.

❏

Observação 1.2.5. *Consideremos agora a seguinte função $i : X \to F(X)$, definida por $i(x) = [x]$, $\forall\, x \in X$. Afirmamos que $F(X)$ é gerado pela imagem $i(X)$. De fato, se $a \in F(X)$ então $a = [w]$, para alguma palavra $w \in M(X \cup X^{-1})$, com $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, onde cada $x_{i_r} \in X$ e $\epsilon_r = \pm 1$. Assim:*

$$a = [w] = [x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}] = [x_{i_1}^{\epsilon_1}] \cdots [x_{i_n}^{\epsilon_n}] = i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}. \tag{1.2.9}$$

Assim, cada elemento em $F(X)$ é escrito como um produto de elementos de $i(X)$.

Teorema 1.2.6. [6, Theorem 3] *O par $(F(X), i)$ é livre sobre X.*

Demonstração:
Sejam $(H, *)$ um grupo e $f : X \to H$ uma função, $x \mapsto f(x)$. Dada uma palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in M(X \cup X^{-1})$, podemos definir a função

$$\begin{aligned} \bar{f} : M(X \cup X^{-1}) &\to H \\ w &\mapsto \bar{f}(w) = \bar{f}(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} * \cdots * f(x_{i_n})^{\epsilon_n}, \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

a qual preserva produtos. Primeiramente, observemos que:

1. Se w' é obtida de w por redução elementar, então w e w' possuem a mesma imagem. De fato, se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdot x_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, como w' é obtida de w, temos a redução de um

produto da forma $x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdot x_{i_{r+1}}^{\epsilon_{r+1}}$, onde $i_{r+1} = i_r$ e $\epsilon_{r+1} = -\epsilon_r$, para algum $1 \leqslant r \leqslant n-1$, ou seja, $w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}} \cdot x_{i_{r+2}}^{\epsilon_{r+2}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$. Logo:

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(w) := f(x_{i_1})^{\epsilon_1} * \cdots * f(x_{i_r})^{\epsilon_r} * \underbrace{f(x_{i_{r+1}})^{\epsilon_{r+1}}}_{= f(x_{i_r})^{-\epsilon_r}} * \cdots * f(x_{i_n})^{\epsilon_{i_n}} \\
= f(x_{i_1})^{\epsilon_{i_1}} * \cdots * \underbrace{f(x_{i_r})^{\epsilon_r} * f(x_{i_r})^{-\epsilon_r}}_{= 1_H} * \cdots * f(x_{i_n})^{\epsilon_{i_n}} \\
= f(x_{i_1})^{\epsilon_{i_1}} * \cdots * f(x_{i_{r-1}})^{\epsilon_{r-1}} * f(x_{i_{r+2}})^{\epsilon_{r+2}} * \cdots * f(x_{i_n})^{\epsilon_{i_n}} = \bar{f}(w').
\end{aligned}
$$

2. Se $w \approx w''$, então $w = w''$ (e, neste caso, $\bar{f}(w) = \bar{f}(w'')$) ou existe uma sequência finita de palavras $w_1, \ldots, w_n$ tais que $w_1 = w$, $w_n = w''$ e cujos termos consecutivos w_j e w_{j+1} diferem por redução elementar, para todo $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Assim, segue do item (1) que $\bar{f}(w_j) = \bar{f}(w_{j+1})$, para todo $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Logo,

$$\bar{f}(w) = \bar{f}(w_1) = \bar{f}(w_2) = \ldots = \bar{f}(w_j) = \bar{f}(w_{j+1}) = \ldots = \bar{f}(w_{n-1}) = \bar{f}(w_n) = \bar{f}(w'')$$

e, portanto, w e w'' possuem a mesma imagem.

Considere a função $\varphi : F(X) \to H$ definida por $\varphi([w]) = \bar{f}(w)$. Mostraremos que φ é bem definida e que é o único homomorfismo de grupos satisfazendo $\varphi \circ i = f$, o que implicará que o par (F, i) é livre sobre X.

(i) Sejam duas classes de equivalência de palavras $[w], [w'] \in F(X)$ tais que $[w] = [w']$. Então, $w \approx w'$ e pelo item (2) anterior, temos que $\varphi([w]) := \bar{f}(w) = \bar{f}(w') := \varphi([w'])$. Segue que φ é bem definida.

(ii) φ é homomorfismo de grupos. Dadas $[w_1]$ e $[w_2] \in F(X)$, com $w_1 = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $w_2 = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$, devemos que mostrar que $\varphi([w_1] \cdot [w_2]) = \varphi([w_1]) * \varphi([w_2])$. Mas:

$$
\begin{aligned}
\varphi([w_1] \cdot [w_2]) &= \varphi([w_1 \cdot w_2]) = \bar{f}(w_1 \cdot w_2) \\
&= \bar{f}(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}) \\
&= \underbrace{f(x_{i_1})^{\epsilon_1} * \cdots * f(x_{i_n})^{\epsilon_n}}_{\bar{f}(w_1)} * \underbrace{f(x_{j_1})^{\delta_1} * \cdots * f(x_{j_m})^{\delta_m}}_{\bar{f}(w_2)} \\
&= \bar{f}(w_1) * \bar{f}(w_2) = \varphi([w_1]) * \varphi([w_2]).
\end{aligned}
$$

(iii) Mostremos que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & H \\ F(X) \arrow[ur, "\exists!\,\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.2.11}$$

ou seja, $\varphi \circ i = f$. De fato, para todo $x \in X$, temos:

$$(\varphi \circ i)(x) = \varphi(i(x)) = \varphi([x]) := \bar{f}(x) = f(x),$$

desde que $\bar{f}|_X = f$.

(iv) Suponhamos agora que exista um homomorfismo $\psi : F(X) \to H$ que também torna o diagrama 1.2.11 comutativo, ou seja, $\psi \circ i = f = \varphi \circ i$. Desde que pela Observação 1.2.5, $i(X)$ gera $F(X)$, então φ e ψ coincidem nos geradores de $F(X)$. De fato, dada uma classe $[w] \in F(X) = \langle i(X) \rangle$, segue de (1.2.9) que $[w] = i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}$ e como ψ é um homomorfismo de grupos, temos:

$$\begin{aligned} \psi([w]) &= \psi\left(i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}\right) \\ &= \psi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1}) * \cdots * \psi(i(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= (\psi \circ i)(x_{i_1}^{\epsilon_1}) * \cdots * (\psi \circ i)(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= f(x_{i_1}^{\epsilon_1}) * \cdots * f(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= (\varphi \circ i)(x_{i_1}^{\epsilon_1}) * \cdots * (\varphi \circ i)(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= \varphi(i(x_{i_1}^{\epsilon_1})) * \cdots * \varphi(i(x_{i_n}^{\epsilon_n})) \\ &= \varphi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1}) * \cdots * \varphi(i(x_{i_n})^{\epsilon_n})) \\ &= \varphi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= \varphi([w]). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Portanto, $\psi = \varphi$ e segue a unicidade de φ.

❑

Desde que reduções elementares diminuem o comprimento de uma palavra, é natural pensar que, quando começamos com qualquer palavra e aplicamos reduções elementares, uma após a outra, de uma forma arbitrária, até que nenhuma redução elementar possa mais ser aplicada, obteremos uma palavra reduzida. A questão é se essa palavra é única. O resultado conhecido como a *Forma normal para grupos livres* mostra que existe uma única palavra reduzida que pode ser obtida por reduções elementares de uma palavra dada. Para provar tal resultado, usaremos o seguinte lema que afirma que a classe da palavra vazia $(\,) = 1$ só contém a própria palavra vazia como palavra reduzida.

Lema 1.2.7. *Se w é uma palavra reduzida distinta da palavra vazia $(\,) = 1$, então $w \not\approx 1$, ou seja, $[w] \neq [1]$.*

Teorema 1.2.8 (Forma Normal para Grupos Livres)**. [6, Theorem 4]** *Existe exatamente uma única palavra reduzida em cada classe de equivalência $[u] \in F(X)$.*

Demonstração:
A prova será feita por contradição. Suponha que existam u e v palavras reduzidas tais que $u \approx v$, ou seja, $[u] = [v]$. Então, $uv^{-1} \approx 1$. Note que a palavra uv^{-1} não precisa ser reduzida, mas desde que u e v são palavras reduzidas distintas, a única possibilidade para haver redução em uv^{-1} é que a última letra de u seja a inversa da última letra de v. Por exemplo, seja $u = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} \cdot x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $v = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_{m-1}}^{\delta_{m-1}} \cdot x_{j_m}^{\delta_m}$. Então uv^{-1} só poderá ser reduzida se $i_n = j_m$ e $\epsilon_n = -\delta_m$. A próxima redução ocorre se $i_{n-1} = j_{m-1}$ e $\epsilon_{n-1} = -\delta_{m-1}$ e assim sucessivamente. A redução termina em uma palavra reduzida w distinta de 1. Note que, pela Observação 1.2.1, como u e v são palavras reduzidas distintas, elas possuem comprimentos diferentes. Dessa forma, existe uma palavra reduzida $w \neq 1$ tal que

$$w \approx uv^{-1} \approx 1,$$

o que contradiz o Lema 1.2.7.

❏

<u>**Demonstração do Lema 1.2.7**</u>. Seja w uma palavra reduzida distinta da palavra vazia e consideremos S_{n+1} o grupo das permutações do conjunto $S = \{1, \ldots, r, \ldots n+1\}$ contendo $n+1$ elementos.

Afirmação $\bigstar$ *Existe um homomorfismo $\varphi : F(X) \to S_{n+1}$, tal que $\varphi([w])$ não é a permutação identidade Id_S.*

Assim, desde que φ é um homomorfismo, $\varphi([\,1\,]) = Id_S$ e concluímos que $w \not\approx 1$. Caso contrário, se $[w] = [1]$, teríamos $\varphi([w]) = \varphi([1]) = Id_S$, o que contraria a Afirmação $\star$.

Para mostrar a validade da Afirmação $\star$, definiremos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : F(X) &\to S_{n+1} \\ [w] &\mapsto \varphi([w]) : S \to S, \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

de tal forma que se $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ for uma palavra reduzida distinta da palavra vazia 1, então a permutação $\varphi([w])$ levará $s = 1$ em $s' = n + 1$ e, portanto, $\varphi([w])$ não será a permutação identidade, o que mostra a Afirmação $\star$.

Para obtermos um tal homomorfismo $\varphi : F(X) \to S_{n+1}$ tal que $\varphi([w])(1) = n+1$ devemos definir uma função $f : X \to S_{n+1}$, $x \mapsto f(x) : S \to S$, de tal forma que $f(x_{i_r}^{\epsilon_r})$ leve r em $r+1$, para todo $r \leqslant n$. Então, precisamos exigir que $f(x)$ satisfaça as seguintes condições:

$$f(x)(s) = \begin{cases} r + 1, \text{ se } s = r,\ x = x_{i_r} \text{ e } \epsilon_r = 1 & \text{(i)} \\ r, \text{ se } s = r + 1,\ x = x_{i_r} \text{ e } \epsilon_r = -1 & \text{(ii)} \\ s = Id_S(s), \text{ se } x \neq x_{i_r},\ \forall\ r \leqslant n & \text{(iii)} \end{cases} \tag{1.2.14}$$

Observemos então que para a palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \neq 1$, temos que:

$$f(x_{i_1})(1) = 2, f(x_{i_2})(2) = 3, \ldots, f(x_{i_r})(r) = r + 1, \ldots, f(x_{i_n})(n) = n + 1$$
$$f(x_{i_1}^{-1})(2) = 1, f(x_{i_2}^{-1})(3) = 2, \ldots, f(x_{i_r}^{-1})(r + 1) = r, \ldots, f(x_{i_n}^{-1})(n + 1) = n.$$

Assim, se as condições (i) a (iii) em (1.2.14) definem uma função injetora de algum subconjunto de $S = \{1, \ldots, r, \ldots n+1\}$ em um outro subconjunto de $S = \{1, \ldots, r, \ldots n+1\}$, podemos estender essa função para uma permutação de S em S e então definimos, para cada $x \in X$, $f(x)$ como sendo esta permutação.

Note que $f(x)$ está bem definida, pois $f(x)$ só poderia levar r para dois números diferentes, se x_{i_r} fosse x, com $\epsilon_r = 1$ (condição (i)) e $x_{i_{r-1}}$ também fosse x, com $\epsilon_{r-1} = -1$ (condição (ii)). Neste caso, teríamos:

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \underbrace{x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}}}_{x^{-1}} \cdot \underbrace{x_{i_r}^{\epsilon_r}}_{x} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}.$$

Mas isso não pode ocorrer, pois sendo w uma palavra reduzida, ela não contém termos consecutivos da forma $x^{-1}x$.

Logo, temos que $f(x)$ é uma função injetora, pois $f(x)$ só poderia levar dois números diferentes para s se $x_{i_{s-1}}$ fosse x, com $\epsilon_{s-1} = 1$ e x_{i_s} também fosse x, com $\epsilon_s = -1$. Neste caso, teríamos

$$w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots \underbrace{x_{i_{s-1}}^{\epsilon_{s-1}}}_{x} \cdot \underbrace{x_{i_s}^{\epsilon_s}}_{x^{-1}} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n},$$

o que também é impossível, desde que uma palavra reduzida também não contém termos consecutivos da forma xx^{-1}.

Agora, desde que o par $(F(X), i)$ é livre sobre X, segue da propriedade universal aplicada para a função $f : X \to S_{n+1}$ e para o grupo $H = S_{n+1}$, que existe um único homomorfismo $\varphi : F(X) \to S_{n+1}$ tal que $\varphi \circ i = f$, ou seja, o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & S_{n+1} \\ F(X) \arrow[ur, "\exists!\,\varphi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.2.15}$$

Assim, para palavra $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} = i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n} \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi([w]) &= \varphi\left(i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}\right) \\ &= \varphi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ \varphi(i(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= (\underbrace{\varphi \circ i}_{=f})(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ (\underbrace{\varphi \circ i}_{=f})(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= f(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ f(x_{i_n}^{\epsilon_n}). \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Finalmente, verificaremos que o homomorfismo φ satisfaz a condição: a permutação $\varphi([w])$ leva 1 em $n+1$. A prova seguirá por indução sobre número de letras de w.

- Seja $w = x_{i_1}^{\epsilon_1}$.

Assim, como $\varphi \circ i = f$, temos que $\varphi([w]) = f(x_{i_1}^{\epsilon_1})$, onde, por definição:

$$\begin{cases} f(x_{i_1})(1) = 2, \\ f(x_{i_1}^{-1})(2) = 1. \end{cases}$$

- Seja $w' = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$

Suponhamos como hipótese de indução, (HI), que $\varphi([w']) = f(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ f(x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}})$ seja uma permutação que leva 1 em n. Assim:

$$\begin{aligned}
\varphi([w]) &= \varphi([x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}]) = \varphi([x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}][x_{i_n}^{\epsilon_n}]) \\
&= \underbrace{\varphi([x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}])}_{\varphi([w'])} \circ \varphi([x_{i_n}^{\epsilon_n}]) = \varphi([w']) \circ \varphi([x_{i_n}^{\epsilon_n}]) \\
&= f(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \circ \cdots \circ f(x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}) \circ f(x_{i_n}^{\epsilon_n})
\end{aligned}$$

Pela (HI), $\varphi([w'])$ leva 1 em n. Além disso, por definição temos

$$\begin{cases} f(x_{i_n})(n) = n+1, & (1) \\ f(x_{i_n}^{-1})(n+1) = n. & (2) \end{cases}$$

Assim, pelo caso (1), desde que $\varphi([w'])$ leva 1 em n e $\varphi([w]) = \varphi([w']) \circ \varphi([x_{i_n}^{\epsilon_n}])$, então $\varphi([w])$ leva 1 em $n+1$. De maneira análoga conclui-se o mesmo resultado, pelo caso (2). ❑

Observação 1.2.9. *Em geral, consideramos X como sendo um subconjunto de $F(X)$ e $i : X \hookrightarrow F(X)$ a inclusão. Por essa razão, omitiremos a aplicação i de agora em diante. Frequentemente, identificamos os elementos de $F(X)$ com as palavras reduzidas correspondentes. Algumas vezes, precisaremos considerar palavras como elementos de $M(X \cup X^{-1})$ e outras vezes vamos considerá-las como elementos de $F(X)$. Nestes casos, diferenciaremos explicitamente tais elementos, ou seja, escreveremos $w \equiv w'$ quando w e w' forem a mesma palavra em $M(X \cup X^{-1})$ e escreveremos $w = w'$ se elas definirem o mesmo elemento em $F(X)$ (ou seja, se elas são palavras equivalentes. Não usaremos mais a notação $\approx$).*

1.2.2 Propriedades básicas de teoria de grupos

A seguir, recordaremos alguns fatos básicos da teoria de grupos.

Definição 1.2.10. [13, pág. 9] *Dados um grupo G e X subconjunto não vazio de G, seja $\{H_i; i \in I\}$ a família de todos os subgrupos de G contendo X. Então $\cap_{i \in I} H_i$ é um* *subgrupo de G, chamado o subgrupo gerado por X e será denotado por*

$$\langle X \rangle = \bigcap_{i \in I} H_i; \quad X \subset H_i, \ \ \forall i \in I. \tag{1.2.17}$$

Os elementos de X são os geradores do subgrupo $\langle X \rangle$. Se X é finito: $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, escrevemos $\langle X \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Se $G = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, com $a_i \in G$, dizemos que o grupo G é **finitamente gerado.** *Se $a \in G$, o subgrupo $\langle a \rangle$ é chamado o subgrupo cíclico gerado por a.*

Teorema 1.2.11. [13, Theorem 1.3.3] *Sejam G um grupo e X um subconjunto não vazio de G. Então, $\langle X \rangle = \{x_1^{\epsilon_1} \ldots x_k^{\epsilon_k}; \ \ x_i \in X, \ \ \epsilon_i = \pm 1, \ \ k \geqslant 0\}$. Quando $k = 0$, o produto é interpretado como 1_G.*

Definição 1.2.12. [23, Definition 3.3] *A ordem de um grupo G é o número cardinal $|G|$. O grupo G é chamado finito, (respectivamente infinito), se $|G|$ for finito (respectivamente infinito). A* ***ordem de um elemento*** *$a \in G$ é a ordem do subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ gerado por a e será denotada por $|a|$.*

Teorema 1.2.13. [13, Theorem 1.3.8] *Seja a um elemento de um grupo G.*

(i) *a tem ordem infinita se, e somente se, todas as potências a^k, $k \in \mathbb{Z}$ de a são distintas. $a^k = 1_G$ se, e somente se, $k = 0$.*

(ii) *Se a tem ordem finita $n > 0$, então n é o menor inteiro positivo tal que $a^n = 1_G$ e $a^k = 1_G$ se, e somente se, n divide k. Mais ainda, o subgrupo cíclico $\langle a \rangle$ gerado por a consiste dos elementos distintos $a, a^2, a^3, \ldots, a^{n-1}, a^n = 1_G$.*

Definição 1.2.14. [13, pág. 12] *Um* **grupo de torção, ou grupo periódico**, *é um grupo G no qual todos os seus elementos possuem ordem finita, ou seja, para todo $a \in G$, $|a| = |\langle a \rangle|$ é finita. Um grupo G é* **livre de torção** *se, exceto 1_G, todos os seus elementos possuem ordem infinita.*

Teorema 1.2.15. [23, Theorem 5.1] *Se N é um subgrupo de um grupo G, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *As congruências módulo N à esquerda e à direita coincidem (isto é, definem a mesma relação em G);*

(ii) *Todo grupo quociente à esquerda de N em G é um grupo quociente à direita de N em G;*

(iii) $aN = Na$*, para todo* $a \in G$*;*

(iv) *Para todo* $a \in G$, $aNa^{-1} \subset N$*, onde* $aNa^{-1} = \{ana^{-1}\,;\, n \in N\}$*;*

(v) *Para todo* $a \in G$, $aNa^{-1} = N$.

Definição 1.2.16. [23, Definition 5.2] *Um subgrupo N de um grupo G o qual satisfaz as condições equivalentes do Teorema 1.2.15 é chamado **subgrupo normal** em G. Escrevemos $N \lhd G$, se N é normal em G.*

Definição 1.2.17. [13, pág. 16] *Para qualquer subconjunto não vazio X de um grupo G, o **fecho normal** de X em G é a intersecção de todos os subgrupos normais de G que contêm X e será denotado por*

$$\langle X\rangle^G = \bigcap_{i\in I} H_i, \quad X \subset H_i \ \ com \ \ H_i \lhd G, \quad \forall i \in I. \tag{1.2.18}$$

Este é o menor subgrupo normal de G contendo X e pode ser caracterizado como segue:

$$\langle X\rangle^G = \left\langle \{g^{-1}xg; \ \ g \in G \ \ e \ \ x \in X\} \right\rangle. \tag{1.2.19}$$

1.2.3 Grupos residualmente finitos

Para nossa próxima aplicação, consideramos propriedades residuais de grupos. Dada uma classe $\mathscr{C}$ de grupos (por exemplo, grupos finitos, grupos livres, grupos abelianos), é usual nos referirmos à classe $\mathscr{C}$ como uma propriedade de grupos. Consideramos que esta propriedade de grupos é um invariante algébrico, ou seja, se G é isomorfo a H e se H satisfaz a propriedade $\mathscr{C}$, então G também satisfaz a propriedade $\mathscr{C}$.

Definição 1.2.18. [25, pág. 37] *Um grupo G possui a propriedade $\mathscr{C}$, se e somente se, G pertence à classe de grupos $\mathscr{C}$.*

Dada uma propriedade $\mathscr{C}$ de grupos, podemos passar a uma propriedade derivada de $\mathscr{C}$ da seguinte maneira.

Definição 1.2.19. [25, Definition 3.5] *Seja $\mathscr{C}$ uma classe de grupos.*

(ii) *Dizemos que um grupo G é **residualmente-$\mathscr{C}$** se, para cada $g \in G$, com $g \neq 1$, existe um grupo $H \in \mathscr{C}$ e um epimorfismo $\phi : G \to H$ tal que $\phi(g) \neq 1$.*

(ii) *Equivalentemente,*

$$G \text{ é residualmente-}\mathscr{C} \text{ se } \forall g \in G, \text{ com } g \neq 1, \exists N \lhd G \text{ tal que } g \notin N \text{ e } G/N \in \mathscr{C}.$$

A classe dos grupos residualmente-$\mathscr{C}$ é frequentemente denotada por $\mathscr{C}_R$.

Observação 1.2.20. *As afirmações* (i) e (ii) da Definição 1.2.19 são, de fato, equivalentes. Seja G residualmente-$\mathscr{C}$. Dados $g \in G$, com $g \neq 1$, e $\phi : G \to H$ um epimorfismo tal que $\phi(g) \neq 1$, onde $H \in \mathscr{C}$, segue do Teorema do Isomorfismo[2], que $G/Ker(\phi) \cong H$. Assim, existe $N = Ker(\phi)$ com $g \notin N$ (pois $\phi(g) \neq 1$) e $G/N \cong H \in \mathscr{C}$.
Reciprocamente, dados um elemento $g \in G$, com $g \neq 1$ e N um subgrupo normal de G, com $g \notin N$ e tal que $H = G/N \in \mathscr{C}$, temos que a projeção natural $\phi : G \to G/N = H$ é um epimorfismo e como $g \notin N$, segue $\phi(g) \neq 1$.

Proposição 1.2.21. [6, Proposition 5] *Grupos livres são residualmente finitos.*

Demonstração:
Dado um grupo livre F, seja $w \in F$ uma palavra reduzida não trivial. Pela Afirmação $\star$ (pág. 18), existe um homomorfismo $\phi : F \to S_{n+1}$, onde S_{n+1} é um grupo finito, para algum n, tal que $\phi(w)$ não é a permutação identidade. Assim, $\phi : F \to \phi(F)$ é um epimorfismo, com $\phi(F) \subset S_{n+1}$ um subgrupo finito. Portanto, F é residualmente finito.

❑

Definição 1.2.22. [25, Definition 3.3] *Seja G um grupo.*

(i) *G é chamado **hopfiano** se ele não é isomorfo a um grupo quociente próprio dele mesmo, ou seja, dado um quociente de G por um subgrupo normal N:*

$$G/N \cong G \Rightarrow N \text{ é o grupo trivial.}$$

[2]Teorema do isomorfismo: Seja $\phi : G \to H$ um epimorfismo com núcleo N. Então, $G/N \cong H$.

(ii) *Equivalentemente, G é hopfiano se todo epimorfismo $\phi : G \to G$ é um automorfismo.*

Observação 1.2.23. *As afirmações* (i) e (ii) da Definição 1.2.22 são, de fato, equivalentes. Seja $\phi : G \to G$ um epimorfismo. Pelo Teorema do Isomorfismo, temos $G/Ker(\phi) \cong G$. Então, $N = Ker(\phi)$ é um subgrupo normal de G. Por hipótese, $Ker(\phi)$ é trivial e segue que ϕ é injetora, portanto um isomorfismo.
Reciprocamente, dado $\phi : G/N \to G$ um isomorfismo, onde N é um subgrupo normal de G, considere a projeção canônica $\pi : G \to G/N$, a qual é um epimorfismo. Assim,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\phi\circ\pi"'] & G/N \arrow[r, "\phi"] & G \end{tikzcd}$$

é um epimorfismo. Logo, por hipótese, $\phi \circ \pi$ é um isomorfismo. Além disso,

$$Ker(\pi) = \{g \in G; \;\; \pi(g) = gN = N\} = \{g \in G; \;\; g \in N\} = N.$$

Desde que $\phi \circ \pi$ é um isomorfismo, segue que π é injetora e, portanto, $Ker(\pi) = N$ é trivial, como queríamos demonstrar.

A demonstração do resultado a seguir pode ser encontrada em [**6, pág. 12**].

Corolário 1.2.24. *Grupos livres finitamente gerados são hopfianos.*

1.2.4 Base de um grupo livre

Proposição 1.2.25. [**6, Proposition 6**] *$F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$.*

Demonstração:
Suponhamos que $|X| = |Y|$, então existe uma bijeção $f : X \to Y$. Consideremos a composição

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "j\circ f = \varphi|_X"'] & Y \arrow[r, "j"] & F(Y) \end{tikzcd}.$$

Desde que $F(X)$ é um grupo livre sobre X, então $j \circ f$ se estende a um único homomorfismo $\varphi : F(X) \to F(Y)$, ou seja, $j \circ f = \varphi|_X$. Analogamente, considerando a composição

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "i \circ f^{-1} = \psi|_Y"'] & X \arrow[r, "i"] & F(X) \end{tikzcd},$$

sendo $F(Y)$ grupo livre sobre Y, temos que $i \circ f^{-1}$ se estende a um único homomorfismo $\psi : F(Y) \to F(X)$, ou seja, $i \circ f^{-1} = \psi|_Y$
Observemos ainda que

$$Id_{F(X)}(x) = x = i(x), \forall x \in X.$$

E, além disso,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(x) &= \psi(\varphi(x)) \overset{\varphi|_X = j \circ f}{=} \psi(j \circ f(x)) \\ &= \psi(\underbrace{f(x)}_{\in Y}) \overset{\psi|_Y = i \circ f^{-1}}{=} i \circ f^{-1}(f(x)) = i(x), \; \forall\, x \in X. \end{aligned}$$

Assim, ambos $\psi \circ \varphi : F(X) \to F(X)$ e $Id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$ estendem a aplicação inclusão $i : X \hookrightarrow F(X)$ e como essa extensão é única, concluímos que $\psi \circ \varphi = Id_{F(X)}$. Analogamente, mostra-se que $\varphi \circ \psi = Id_{F(Y)}$ e, portanto, φ é um isomorfismo.

Reciprocamente, observemos que o número de homomorfismos $F(X) \to \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ denota o grupo cíclico de ordem 2, é o mesmo que o número de funções $X \to \mathbb{Z}_2$, que é igual a $2^{|X|}$. Se, digamos, X for finito, desde que $F(X) \cong F(Y)$, teremos $2^{|X|} = 2^{|Y|}$ e, portanto, $|X| = |Y|$. Se X e Y são infinitos, assumiremos sem demonstração a seguinte igualdade:

$$|M(X \cup X^{-1})| = |X \cup X^{-1}| = |X|. \tag{1.2.20}$$

Desde que $F(X)$ é o conjunto das classes de equivalência de $M(X \cup X^{-1})$, segue que existe uma função sobrejetora $M(X \cup X^{-1}) \to F(X)$ e temos da Proposição B.0.26 e de (1.2.20) que $|F(X)| \leqslant |X|$. Além disso, como $i : X \to F(X)$ é injetora, segue da Definição B.0.25 que $|X| \leqslant |F(X)|$ e, assim, $|F(X)| = |X|$. Portanto, sendo $F(X)$ isomorfo a $F(Y)$, concluímos que

$$|X| = |F(X)| = |F(Y)| = |Y|.$$

❏

Definição 1.2.26. [6] *Um grupo G é chamado um **grupo livre**, se G é isomorfo a $F(X)$, o grupo livre gerado por X, para algum X. Dado um isomorfismo $h : F(X) \to G$, a imagem $h(X)$ será chamado uma **base** do grupo G e diremos que G é **livre** sobre $h(X)$.*

Observação 1.2.27. *Seja G um grupo livre. Se A é uma base de G e se $\alpha : G \to G$ é um automorfismo, então $\alpha(A)$ também é uma base de G. Segue da Definição 1.2.26 que $A = h(X)$, onde $h : F(X) \to G$ é um isomorfismo, para algum X. Assim, a composição*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "\alpha\circ h"'] & G \arrow[r, "\alpha"] & G \end{tikzcd},$$

é um isomorfismo e $(\alpha \circ h)(X) = \alpha(h(X)) = \alpha(A)$. Portanto, $\alpha(A)$ é uma base de G. Além disso, se A e B são bases do grupo livre G, então $|A| = |B|$. De fato, segue da Definição 1.2.26 que $A = h(X)$ e $B = \bar{h}(Y)$ são bases de G, onde $h : F(X) \to G$ e $\bar{h} : F(Y) \to G$ são isomorfismos, para algum X e para algum Y. Assim, temos que $\bar{h}^{-1} \circ h : F(X) \to F(Y)$ é um isomorfismo e pela Proposição 1.2.25, $|X| = |Y|$. Portanto,

$$|A| = |h(X)| = |X| = |Y| = |\bar{h}(Y)| = |B|.$$

Mais ainda, qualquer bijeção $f : A \to B$ se estende a um automorfismo $\alpha : G \to G$. De fato, considerando a bijeção $\beta : X \to Y$ definida pela composição

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h|_X"] \arrow[rrr, bend right, "\beta = (\bar{h}|_Y{}^{-1} \circ f \circ (h|_X)"'] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "(\bar{h}|Y)^{-1}"] & Y \end{tikzcd}$$

obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(h|_X)^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[d, "(\bar{h}|_Y)^{-1}"] \\ X \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.2.21}$$

ou seja, $(\bar{h}|_Y)^{-1} \circ f = \beta \circ (h|_X)^{-1}$. Assim, desde que $F(X)$ é livre sobre X, a função $j \circ \beta : X \to F(Y)$ se estende a um único homomorfismo $g : F(X) \to F(Y)$, ou seja,

$g|_X = g \circ i = j \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, hook, "j"] & F(Y) \\ F(X) \arrow[urr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Assim, para todo $x \in X$, temos

$$(g|_X)(x) = (g \circ i)(x) = g(x) = (j \circ \beta)(x) = \beta(x). \tag{1.2.22}$$

Considerando a composição:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "\bar{h}\circ g\circ h^{-1}"'] & F(X) \arrow[r, "g"] & F(Y) \arrow[r, "\bar{h}"] & G \end{tikzcd}$$

temos para cada $a \in A = h(X)$, usando 1.2.21 e 1.2.22,

$$\begin{aligned} (\bar{h} \circ g \circ h^{-1})(a) &= \bar{h} \circ g(\underbrace{(h|_X)^{-1}(a)}_{\in X}) \overset{g|_X = \beta}{=} \bar{h} \circ \beta((h|_X)^{-1}(a)) \\ &\overset{1.2.21}{=} \bar{h} \circ (\bar{h}|_Y)^{-1} \circ f(a) = f(a). \end{aligned}$$

ou seja, $\bar{h} \circ g \circ h^{-1} : G \to G$ é um automorfismo que estende $f : A \to B$.

Definição 1.2.28. [6] *Seja G um grupo livre com base A. A cardinalidade de A será chamada o* ***posto*** *de G.*

Observação 1.2.29. *Sejam X um conjunto finito e $\alpha : F(X) \to F(X)$ um epimorfismo. Então α é um isomorfismo. Isso segue do Corolário 1.2.24, que afirma que todo grupo livre finitamente gerado é hopfiano, o que é equivalente a dizer que todo homomorfismo sobrejetor $\alpha : F(X) \to F(X)$ é um isomorfismo.*

Exemplo 1.2.30. [6] *Seja $X = \{x, y\}$. Então $\{x^{-1}, x^2y\}$ é uma base de $F(X)$. De fato, considerando a função*

$$\begin{aligned} f : X &\to F(X) \\ x &\mapsto x^{-1} \\ y &\mapsto x^2 y \end{aligned}$$

segue da Propriedade Universal, que existe um único homomorfismo $\varphi : F(X) \to F(X)$ *que é uma extensão de* f*, ou seja,* $\varphi \circ i = \varphi|_X = f$*, onde* $i : X \to F(X)$ *é a inclusão. Observemos que* φ *é um epimorfismo. De fato, tomando* $w_x = x^{-1}$ *e* $w_y = x^2 y$*, temos:*

$$\begin{aligned} \varphi(w_x) = \varphi(x^{-1}) &\overset{homo}{=} (\varphi(x))^{-1} \\ &\overset{\varphi|_X = f}{=} (f(x))^{-1} = (x^{-1})^{-1} = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(w_y) = \varphi(x^2 y) &\overset{homo}{=} \varphi(x^2)\varphi(y) = (\varphi(x))^2 \varphi(y) \\ &\overset{\varphi|_X = f}{=} (f(x))^2 f(y) = x^{-2} x^2 y = y. \end{aligned}$$

Como $F(X)$ *é um grupo livre finitamente gerado, segue do Corolário 1.2.24, que* $F(X)$ *é hopfiano, assim* $\varphi : F(X) \to F(X)$ *é automorfismo. Portanto, segue da Definição 1.2.26 que* $\varphi(X) = \{x^{-1}, x^2 y\}$ *é uma base para* $F(X)$*.*

Proposição 1.2.31. [6, Proposition 8] *Seja* X *um subconjunto de um grupo* G*. São equivalentes:*

(i) G *é um grupo livre com base* X*.*

(ii) *Todo elemento de* G *pode ser escrito de maneira única como um produto da forma* $x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$*, para algum* $n \geqslant 0$*, com* $x_{i_r} \in X$*,* $\epsilon_r = \pm 1$*, onde* $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ *se* $i_{r+1} = i_r$*. O caso* $n = 0$ *corresponde ao elemento identidade* $1_G \in G$*.*

(iii) X *gera* G*, e* 1_G *não é igual a qualquer produto da forma* $x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$*, com* $n > 0$*,* $x_{i_r} \in X$*,* $\epsilon_r = \pm 1$ *e* $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ *se* $i_{r+1} = i_r$*.*

Demonstração:

A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) é imediata. Para mostrar que (iii) $\Rightarrow$ (ii), observemos que, como X gera G, para cada $g \in G$, podemos escrever $g = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, para algum $n \geqslant 0$, $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$, onde $\epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$. Assim, se existissem duas maneiras distintas de escrever $g \in G$, digamos $g = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$, teríamos que

$$x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{j_m}^{-\delta_m} \cdots x_{j_1}^{-\delta_1} = 1,$$

executando todos os possíveis cancelamentos, e conseguiríamos escrever 1 como um produto não trivial de letras em X, o que contraria a hipótese.
Vejamos que (i) $\Rightarrow$ (ii). Se G é um grupo livre com base X, então G é isomorfo a $F(X)$, logo G possui as propriedades do item (ii), uma vez que toda classe $[w] \in F(X)$ possui um único representante w, que é a palavra reduzida.
Agora, suponhamos que (iii) seja válida e mostremos a condição (i). Se G possui a propriedade (iii), podemos considerar o homomorfismo $h : F(X) \to G$ induzido pela aplicação inclusão $j : X \to G$, com $h \circ i = h|_X = j$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & G \\ F(X) \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, desde que G é gerado por X, segue que h é sobrejetor. Além disso, h é injetiva, pois por hipótese, uma palavra reduzida não trivial sobre X não é mapeada em $1_G \in G$. Com efeito, se $g \in Ker(h)$ é tal que $g = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \neq 1_{F(X)}$, então,

$$h(g) = h(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) \overset{homo}{=} h(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots h(x_{i_n})^{\epsilon_n} \overset{h|_X = j}{=} \underbrace{x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}}_{=g} = 1_G,$$

o qual contradiz (iii). Portanto, h é um isomorfismo e, assim, G é livre em X.

❑

Corolário 1.2.32. **[6, Corollary 1]** *Sejam G um grupo gerado por um subconjunto X e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos que é injetivo sobre X e tal que $\varphi(G)$ é livre com base $\varphi(X)$, onde H é um grupo arbitrário. Então, G é livre com base X.*

Demonstração:
Por hipótese $\varphi(G)$ é livre com base $\varphi(X)$ e segue da Proposição 1.2.31 que (iii) é válido,

logo $\varphi(X)$ gera $\varphi(G)$ e $1_{\varphi(G)}$ não pode ser escrito como um produto

$$\varphi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \varphi(x_{i_n})^{\epsilon_n},\ n > 0,\ \varphi(x_{i_r}) \in \varphi(X), \epsilon_r = \pm 1;\ \epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r,\ \text{se } i_{r+1} = i_r. \quad (1.2.23)$$

Desde que X gera G, se tivéssemos

$$1_G = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n},\ n > 0,\ x_{i_r} \in X,\ \epsilon_r = \pm\ 1;\ \epsilon_{r+1} \neq -\epsilon_r,\ \text{ se } i_{r+1} = i_r, \quad (1.2.24)$$

então usando a injetividade de φ sobre X, teríamos

$$1_{\varphi(G)} = \varphi(1_G) = \varphi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \varphi(x_{i_n})^{\epsilon_n},\ \text{com } \varphi(x_{i_j}) \neq \varphi(x_{i_k}), \forall\ j \neq k,$$

o que contradiz (1.2.23). Portanto, 1_G não se escreve como um produto da forma (1.2.24) e segue da Proposição 1.2.31 que G é livre com base X.

❏

1.2.5 Palavras ciclicamente reduzidas

Seja g um elemento de $F(X)$. Estamos considerando g como uma palavra reduzida que tem comprimento $|g|$. Se h é um outro elemento de $F(X)$, que também estamos considerando como uma palavra reduzida, pode ser que a palavra gh não seja uma palavra reduzida (mas o produto gh em $F(X)$ é a classe de equivalência desta palavra). Quando o produto gh for ainda uma palavra reduzida, dizemos que o produto gh é **reduzido como escrito**. Mais geralmente, se $g_1, \ldots, g_k$ são palavras reduzidas e a palavra $g_1 \cdots g_k$ for uma palavra reduzida, dizemos que este produto é reduzido como escrito. As propriedades listadas na proposição a seguir serão assumidas sem demonstração.

Proposição 1.2.33. [6, pág. 15] *Sejam g, h palavras reduzidas em $F(X)$ com comprimentos $|g|$ e $|h|$, respectivamente. Então;*

(i) $|gh| \leqslant |g| + |h|$. *A igualdade é válida se, e somente se, gh for reduzida como escrito.*

(ii) *Ou a primeira letra de gh é a primeira de g, ou g é cancelada completamente no produto gh. Essa última afirmação ocorre se, e somente se, $h \equiv g^{-1}k$, para alguma palavra reduzida k. Analogamente, ou gh termina com a última letra de h, ou h é* *cancelada completamente no produto gh. Essa última afirmação ocorre se, e somente se, $g \equiv kh^{-1}$, para alguma palavra reduzida k.*

Definição 1.2.34. [6, pág. 15] *Seja $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida. Então g é **ciclicamente reduzida** se, ou $i_n \neq i_1$ ou $i_n = i_1$, mas $\epsilon_n \neq -\epsilon_1$.*

Exemplo 1.2.35. *Claramente, 1 é ciclicamente reduzida. A palavra $x_1^2 x_2^5 x_3^{-1}$ é ciclicamente reduzida, mas $x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1}$ não é ciclicamente reduzida.*

Assumiremos sem demonstração a seguinte

Proposição 1.2.36. [6, págs. 15, 16] *Seja g uma palavra reduzida em $F(X)$ com comprimento $|g|$. Então:*

1. *g é ciclicamente reduzida se, e somente se, gg é reduzida como escrito.*

2. *Se g for ciclicamente reduzida, então, indutivamente, g^n será ciclicamente reduzida como escrito e $|g^n| = n|g|$.*

3. *Se $g \equiv u^{-1}vu$ for reduzida como escrito e se v for ciclicamente reduzida, então $g^n = u^{-1}v^n u$ será reduzida como escrito.*

Definição 1.2.37. [6] *Dada uma palavra $w \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, as permutações cíclicas de w são as palavras*

$$x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}, \quad x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{n-2}}^{\epsilon_{n-2}}, \quad \ldots, \quad x_{i_2}^{\epsilon_2} x_{i_3}^{\epsilon_3} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} x_{i_1}^{\epsilon_1}. \tag{1.2.25}$$

*Ou seja, uma **permutação cíclica** da palavra $x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}} \cdot x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ é qualquer palavra da forma*

$$x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}}, \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

Exemplo 1.2.38. *Seja $w = xyx^{-1}zy^{-1}xz^{-1}$. Então, $zy^{-1}xz^{-1}xyx^{-1}$ é uma permutação cíclica de w.*

Definição 1.2.39. [13, pág. 26] *Dado um grupo G, dizemos que dois elementos $g, h \in G$ são conjugados se existe algum $u \in G$ tal que $g = uhu^{-1}$. A relação é dita simétrica se $h = vgv^{-1}$, com $v = u^{-1}$.*

Proposição 1.2.40. [6, Proposition 9] *Seja $F(X)$ um grupo livre. Então:*

(i) *Toda palavra $g \in F(X)$ é conjugado de uma palavra ciclicamente reduzida.*

(ii) *Qualquer permutação cíclica de uma palavra ciclicamente reduzida é ciclicamente reduzida.*

(iii) *Sejam $g, h \in F(X)$ duas palavras ciclicamente reduzidas. Então, g e h são conjugadas se, e somente se, elas são permutações cíclicas uma da outra.*

Demonstração:
(i) Seja $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra reduzida, mas não ciclicamente reduzida, ou seja, $i_n = i_1$ com $\epsilon_n = -\epsilon_1$. Então $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot g' \cdot x_{i_1}^{-\epsilon_1}$, onde g' é a palavra $x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$. O resultado segue por indução.
(ii) Seja $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}} \cdot x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra ciclicamente reduzida. Uma permutação cíclica de g é a palavra $x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdot x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_{n-1}}^{\epsilon_{n-1}}$, a qual é uma palavra reduzida, pois como por hipótese, g é ciclicamente reduzida, então ou $i_n \neq i_1$ ou, se $i_n = i_1$, então $\epsilon_n \neq -\epsilon_1$. Além disso, essa permutação de g também é ciclicamente reduzida, desde que, sendo g uma palavra reduzida temos que $i_n \neq i_{n-1}$ ou, se $i_n = i_{n-1}$, então $\epsilon_n \neq -\epsilon_{n-1}$. O resultado segue indutivamente.
(iii) ($\Leftarrow$) Sejam $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}} \cdot x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdot x_{i_n}^{\epsilon_n}$ uma palavra ciclicamente reduzida e h uma permutação cíclica de g, ou seja,

$$h = x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}}, \quad r = 1, 2, \cdots, n.$$

Então, podemos escrever:

$$g = \underbrace{(x_{i_n}^{-\epsilon_n} \cdots x_{i_r}^{-\epsilon_r})}_{=u^{-1}} \cdot \underbrace{(x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_{r-1}}^{\epsilon_{r-1}})}_{=h} \underbrace{(x_{i_r}^{\epsilon_r} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n})}_{=u} = u^{-1}hu \tag{1.2.26}$$

e, portanto, g e h são conjugados.
($\Rightarrow$) Reciprocamente, dada uma palavra $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, tome $h = u^{-1}gu$ um conjugado qualquer de g, ambas palavras ciclicamente reduzidas. Se $u^{-1}gu$ fosse reduzida como escrito, com $u \neq 1$, então $h = u^{-1}gu$ não seria ciclicamente reduzida, desde que ela termina com a última letra de u e começa com sua inversa, a primeira letra de u^{-1}, ou

seja, se $u = y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_k}^{\delta_k}$, então,

$$h = u^{-1} g u = y_{j_k}^{-\delta_k} \cdots y_{j_1}^{-\delta_1} \cdot g \cdot y_{j_1}^{\delta_1} \cdots y_{j_k}^{\delta_k}.$$

Mas como por hipótese h é ciclicamente reduzida, teríamos uma contradição. Assim, $h = u^{-1}gu$ não é reduzida como escrito, então ou a primeira letra de u é $x_{i_1}^{\epsilon_1}$ ou $x_{i_n}^{-\epsilon_n}$. Em ambos os casos, $h = u^{-1}gu = v^{-1}g'v$, onde $|v| < |u|$ e g' é uma permutação cíclica de g. De fato, sendo $g \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$, então se a primeira letra de u é $x_{i_1}^{\epsilon_1}$, temos:

$$\begin{aligned} h = u^{-1}gu &= y_{j_k}^{-\delta_k} \cdots \underbrace{y_{j_1}^{-\delta_1}}_{=x_{i_1}^{-\epsilon_1}} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot \underbrace{y_{j_1}^{\delta_1}}_{=x_{i_1}^{\epsilon_1}} \cdots y_{j_k}^{\delta_k} \\ &= \underbrace{y_{j_k}^{-\delta_k} \cdots y_{j_2}^{-\delta_2}}_{=v^{-1}} \cdot \underbrace{x_{i_2}^{\epsilon_2} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \cdot x_{i_1}^{\epsilon_1}}_{=g'} \cdot \underbrace{y_{j_2}^{\delta_2} \cdots y_{j_k}^{\delta_k}}_{=v} \end{aligned}$$

onde, $|v| < |u|$. Analogamente, se a primeira letra de u é $x_{i_n}^{-\epsilon_n}$. Assim, o resultado segue por indução sobre o comprimento.

❏

Proposição 1.2.41. [6, Proposition 10] *Grupos livres são livres de torção.*

Demonstração:

Sejam F um grupo livre. Devemos mostrar que todo elemento $g \in F$, com $g \neq 1$, tem ordem infinita. Pela Proposição 1.2.40 (i), tomando o conjugado de g, se necessário, podemos assumir que g é uma palavra ciclicamente reduzida. Assim, segue da Proposição 1.2.36 (2) que $|g^n| = n|g| \neq 0$, para todo $n > 0$. Portanto, $g^n \neq 1, \forall\, n > 0$, ou seja, não existe $n > 0$ tal que $g^n = 1$, com $g \neq 1$.

❏

A enorme importância dos grupos livres em teoria de grupos é ressaltada pelos seguintes resultados.

Teorema 1.2.42. [13, Theorem 2.1.5] *Sejam G um grupo gerado por um conjunto Y e $F(X)$ um grupo livre gerado por um conjunto X. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação sobrejetora, então f se estende a um único epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$.*

Demonstração:

Dados G um grupo gerado por Y e $F(X)$ um grupo livre gerado por X, seja $f : X \to Y$ uma aplicação sobrejetora e consideremos a inclusão natural $j : Y \hookrightarrow G$. Segue da propriedade universal de grupos livres, que $j \circ f : X \to G$ se estende a um único homomorfismo $\varphi : F(X) \to G$ tal que o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \arrow[r, hook, "j"] & G \\ F(X) \arrow[urr, bend right, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

ou seja, $\varphi \circ i = j \circ f$. Mostremos que φ é um epimorfismo. Com efeito, dado $g \in G$, desde que Y é um conjunto de geradores de G, podemos escrever:

$$g = y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n}, \quad \text{com} \quad y_{i_r}^{\epsilon_r} \in Y, \quad \forall r = 1, \ldots, n.$$

Assim, como $f : X \to Y$ é sobrejetora, para os geradores $y_{i_1}, \ldots, y_{i_n} \in Y$, existem $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in X$ tais que:

$$f(x_{i_1}) = y_{i_1}, \ldots, f(x_{i_n}) = y_{i_n}.$$

Seja $[w] = i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n} \in F(X)$[3]. Então,

$$\begin{aligned} \varphi([w]) &= \varphi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots i(x_{i_n})^{\epsilon_n}) && (1.2.27) \\ &= \varphi(i(x_{i_1})^{\epsilon_1}) \cdots \varphi(i(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= ((\underbrace{\varphi \circ i}_{j \circ f})(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots ((\underbrace{\varphi \circ i}_{j \circ f})(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\ &= ((j \circ f)(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots ((j \circ f)(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\ &= j(\underbrace{f(x_{i_1})}_{y_{i_1}})^{\epsilon_1} \cdots j(\underbrace{f(x_{i_n})}_{y_{i_n}})^{\epsilon_n} \\ &= j(y_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots j(y_{i_n})^{\epsilon_n} = y_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots y_{i_n}^{\epsilon_n} = g. \end{aligned}$$

(1.2.28)

Portanto, φ é um epimorfismo, como queríamos demonstrar e, portanto, $\varphi(F(X)) = G$.

❏

[3]Vide fórmula (1.2.9), pág. 15.

Corolário 1.2.43. [**6, Proposition 13**] *Todo grupo G é a imagem homomórfica de um grupo livre. Em particular, todo grupo G é quociente de algum grupo livre.*

Demonstração:
Note que para qualquer grupo G, existe $X \subset G$ tal que $G = \langle X \rangle$. Basta considerar $X = G$. Agora, pelo Teorema 1.2.42, considerando $Y = X$ e $f = Id_X : X \to X$, temos um epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$, onde $F(X)$ é o grupo livre gerado por $X = G$. Em particular, segue do Teorema do Isomorfismo, que $\frac{F(X)}{ker(\varphi)} \cong G$.

❑

1.3 Apresentação de um Grupo por meio de Geradores e Relatores

A Propriedade Universal de Grupos Livres nos permite descrever grupos arbitrários em termos de geradores e relatores. Vimos no Corolário 1.2.43 que todo grupo G é isomorfo a um grupo quociente $\frac{F(X)}{N}$, onde $G = \langle X \rangle$, para algum subconjunto $X \subset G$, $F(X)$ é o grupo livre sobre X e N é o núcleo do epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$ do Teorema 1.2.42.

Dessa forma, $Ker(\varphi)$ poderá ser visto como um conjunto de relatores de G e uma palavra $w \in Ker(\varphi)$ será chamada um **relator** de G no conjunto de geradores X. Portanto, a fim de descrevermos um grupo G, a menos de isomorfismo, precisamos apenas especificar X, $F(X)$ e $N = Ker(\varphi)$. Mas, pela Proposição 1.2.25, $F(X)$ é determinado, a menos de isomorfismo, por X. E N é determinado por qualquer subconjunto que o gera como um subgrupo de $F(X)$. Agora, se $w \equiv x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in F(X)$ é um gerador de N, então via o epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$, temos que

$$w \mapsto \varphi(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = 1_G \in G. \tag{1.3.1}$$

A equação em (1.3.1) é chamada uma **relação** sobre os **geradores** x_{i_r}. Assim, dado um grupo G, ele pode ser descrito completamente especificando-se um conjunto X de geradores de G e um conjunto adequado de relações sobre estes geradores. Uma tal descrição efetiva de um grupo G será chamada uma apresentação (ou apresentação livre) de G. Mais precisamente, temos as seguintes definições.

Definição 1.3.1. [6] *Dados G um grupo, X um conjunto e $F(X)$ o grupo livre gerado por X, consideremos o epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$ do Teorema 1.2.42.*

(1) *X é chamado um **conjunto de símbolos geradores** para G, via o epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$.*

(2) *A família $\varphi(X) = \{\varphi(x); x \in X\}$ é chamada uma **família de geradores** de G. Note que $G = \langle \varphi(X) \rangle$.*

(3) *$Ker(\varphi)$ é chamado o **conjunto de relatores** de G, via o epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$. Dadas duas palavras quaisquer $u = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ e $v = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_m}^{\delta_m}$ (não necessariamente reduzidas) com uv^{-1} representando um elemento do $Ker(\varphi)$, tal que $\varphi(x_{i_r}) = a_{i_r}$ e $\varphi(x_{j_s}) = a_{j_s}$, para $r = 1, \ldots, n$ e $s = 1, \ldots, m$, então:*

$$
\begin{aligned}
1_G = \varphi(uv^{-1}) &\overset{homo}{=} \varphi(u) \cdot (\varphi(v))^{-1} \\
&\Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(v) \\
&\Leftrightarrow a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n} = a_{j_1}^{\delta_1} \cdots a_{j_m}^{\delta_m}.
\end{aligned}
\tag{1.3.2}
$$

*A equação (1.3.2) será chamada uma **relação** em G. Em particular, se $u = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ representa um elemento em $Ker(\varphi)$, então a relação correspondente em G será:*

$$
\varphi(u) = \varphi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \varphi(x_{i_n})^{\epsilon_n} = a_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{i_n}^{\epsilon_n} = 1. \tag{1.3.3}
$$

Definição 1.3.2. **[6]** *Para qualquer subconjunto não vazio S de um grupo H, o **fecho normal**[4] $\langle S \rangle^H$ de S em H é chamado o **conjunto das consequências de** S **em** H.*

Exemplo 1.3.3. *Se H é um grupo e $S = \{1_H\}$, então $\langle S \rangle^H = \{1_H\}$ é o grupo trivial.*

Definição 1.3.4. **[6]** *Sejam um grupo G, $F(X)$ o grupo livre gerado por um conjunto X e $\varphi : F(X) \to G$ um epimorfismo. Se $Ker(\varphi)$ é o conjunto das consequências de algum subconjunto R de $F(X)$, ou seja, R consiste de palavras nos elementos de X e $Ker(\varphi)$ é o fecho normal de R em $F(X)$:*

$$
Ker(\varphi) = \langle R \rangle^{F(X)} = \left\langle \{g^{-1}rg; \;\; r \in R, \;\; g \in F(X)\} \right\rangle, \tag{1.3.4}
$$

[4] Vide Definição 1.2.17

então dizemos que R é um **conjunto de relatores definidores de** G*, via o epimorfismo* $\varphi : F(X) \to G$. *Também podemos dizer que a relação* $u = v$ *é uma consequência de um conjunto de relatores definidores, se o correspondente relator* $uv^{-1} \in Ker(\varphi)$ *é uma consequência dos relatores definidores.*

Exemplo 1.3.5. *Se H é um grupo e se $S = \varnothing$, então $\langle \varnothing \rangle^H$ é o grupo trivial.*

Definição 1.3.6. [6] *Uma* **apresentação** *de um grupo G, denotada por $\langle X|R\rangle^{\varphi}$, consiste de um conjunto X, um epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$, onde $F(X)$ é o grupo livre sobre X, e um conjunto $R \subset F(X)$ de relatores definidores de G via o epimorfismo φ. Escrevemos $G = \langle X|R\rangle^{\varphi}$, quando $\langle X|R\rangle^{\varphi}$ for uma apresentação do grupo G. Se ambos, X e R, forem finitos, diremos que $\langle X|R\rangle^{\varphi}$ é uma apresentação finita de G e que G é um grupo finitamente apresentado.*

Observação 1.3.7. *Todo grupo G admite uma apresentação $\langle X|R\rangle^{\varphi}$. De fato, seja $F(X)$ o grupo livre gerado por X. Como na demonstração do Corolário 1.2.43, existe um epimorfismo $\varphi : F(X) \to G$, com X um conjunto gerador para o grupo G. Além disso, $Ker(\varphi) = \langle R\rangle^{F(X)}$, para algum $R \subset F(X)$. Basta considerar $R = Ker(\varphi) \lhd F(X)$ e $\langle Ker(\varphi)\rangle^{F(X)} = Ker(\varphi)$. Assim, $G = \langle X \mid R\rangle^{\varphi}$.*

Observação 1.3.8. *Desde que $\varphi : F(X) \to G$ é um epimorfismo, segue do Teorema do Isomorfismo que*

$$\frac{F(X)}{Ker(\varphi)} = \frac{F(X)}{\langle R\rangle^{F(X)}} \cong G = \langle X|R\rangle^{\varphi}. \tag{1.3.5}$$

Frequentemente omitiremos φ na notação $\langle X|R\rangle^{\varphi}$, especialmente quando φ for a aplicação natural $F(X) \to \frac{F(X)}{\langle R\rangle^{F(X)}} \cong G$, ou quando φ for injetora sobre X (neste caso, consideramos X como um subconjunto de G).

Observação 1.3.9. *Às vezes é mais conveniente substituir cada relator r pela correspondente relação $r = 1$, ou mais geralmente, por uma relação $u = v$ onde r é uv^{-1} ou $v^{-1}u$. Sempre que for conveniente podemos misturar relatores e relações. Por exemplo, se soubermos que um grupo G gerado por um conjunto X é abeliano, é mais fácil escrever relações $xy = yx$, onde x e y pertencem a X, em vez do correspondente relator $x^{-1}y^{-1}xy$.*

Exemplo 1.3.10. *O grupo livre $F(X)$ sobre X possui uma apresentação $\langle X|R\rangle$, com $R = \emptyset$. De fato, consideremos $\varphi = Id_{F(X)} : F(X) \to F(X)$, a qual é um epimorfismo. Desde que φ é injetora, segue que $Ker(\varphi) = \{1\} = \langle\emptyset\rangle^{F(X)}$, assim, $R = \emptyset$ e, portanto, pela Definição 1.3.6 concluímos que $F(X) = \langle X; \emptyset\rangle^{\varphi}$.*

Exemplo 1.3.11. *O grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{Z}, +)$ é finitamente apresentado.*

De fato, seja $G = \mathbb{Z}$. Vimos no Exemplo 1.1.4 que G é um grupo livre sobre um gerador $Y = \{1\}$. Assim, consideremos $X = \{a\}$, com a representando qualquer objeto, ou seja, X é um conjunto unitário. Logo, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ a &\mapsto 1 \end{aligned}$$

a qual é naturalmente sobrejetora. Portanto, pelo Teorema 1.2.42, f se estende a um epimorfismo $\varphi : F(X) \to G = \mathbb{Z}$. Note que $F(X) = \{a^n;\, n \in \mathbb{Z}\}$ e

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{a^n;\, \varphi(a^n) = 0\} = \{a^n;\, n\varphi(a) = 0\} \\ &= \{a^n;\, n = 0\} = \{1\} \end{aligned}$$

Finalmente, pela Definição 1.3.6, segue que $(\mathbb{Z}, +) = \langle a\,|\emptyset\rangle^{\varphi}$.

Exemplo 1.3.12. [6] *Seja $X = \{x\}$ e considere o grupo com a seguinte apresentação $\langle\, x; x^n \,\rangle$, onde n é um inteiro fixado. Este grupo consiste das palavras $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Para $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, o grupo aditivo cíclico de ordem n, seja $\varphi : F(X) \to \mathbb{Z}_n$, definida por $\varphi(x) = \bar{1}$. Note que φ é um epimorfismo e se $w = x^k \in Ker(\varphi)$, então $\varphi(w) = \varphi(x^k) = \bar{k} = \bar{0}$, então, $k \equiv 0\,(mod\ n)$, o que implica que $k = ln$, para algum inteiro l, ou seja, $Ker(\varphi) = \langle x^n\rangle$ e $\mathbb{Z}_n$ tem apresentação $\langle x \mid x^n\rangle$.*

Teorema 1.3.13 (Von Dyck)**.** **[6, Theorem 14]** *Sejam $G = \langle X; R\rangle^{\varphi}$, $f : X \to H$ uma função de X em algum grupo H e $\theta : F(X) \to H$ o único homomorfismo que estende f. Se $\theta(r) = 1, \forall\, r \in R$, então existe um homomorfismo $\psi : G \to H$ tal que*

$f(x) = (\psi \circ \varphi)(x)$, $\forall\, x \in X$. *Mais ainda, se* $f(X)$ *gera* H, *então* ψ *é um epimorfismo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & H \\ F(X) \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "\varphi"'] & G \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração:

Como $G = \langle X; R \rangle^{\varphi}$, temos que $\varphi : F(X) \to G$ é um epimorfismo e $R \subset F(X)$ é um conjunto de relatores definidores de G via o epimorfismo φ, ou seja, $Ker(\varphi)$ é o fecho normal de R em $F(X)$. Desde que $Ker(\theta)$ também é um subgrupo normal de $F(X)$, com $R \subseteq Ker(\theta)$ (pois por hipótese, $\theta(r) = 1$, $\forall r \in R$), segue que $Ker(\varphi) \subseteq ker(\theta)$.

Por outro lado, como $\varphi : F(X) \to G$ é um epimorfismo, para cada $g \in G$, existe $w \in F(X)$ tal que $\varphi(w) = g$. Definimos

$$\begin{aligned} \psi : G &\to H \\ g &\mapsto \psi(g) = \theta(w), \ \forall\, w \in F(X) \ \text{ tal que } \varphi(w) = g. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Note que:

(i) ψ é bem definida, pois dados $w, w' \in F(X)$ tais que $\varphi(w) = \varphi(w')$, então $\varphi(w - w') = 1_G$ e temos $w - w' \in Ker(\varphi) \subseteq Ker(\theta)$, assim $\theta(w - w') = 1_H$ e, portanto, $\theta(w) = \theta(w')$, ou seja, ψ não depende da escolha de $w \in F(X)$.

(ii) ψ é um homomorfismo, pois dados $g, g' \in G$, então $\psi(g \cdot g') = \theta(w)$, $\forall w \in F(X)$ tal que $\varphi(w) = g \cdot g'$. Por outro lado, $\psi(g) \cdot \psi(g') = \theta(u) \cdot \theta(v)$, $\forall u, v \in F(X)$ tais que $\varphi(u) = g$ e $\varphi(v) = g'$. Assim,

$$\varphi(w) = g \cdot g' = \varphi(u)\varphi(v) = \varphi(u \cdot v). \tag{1.3.7}$$

Dessa forma, escolhendo $w' = u \cdot v \in F(X)$, desde que vale (1.3.7) segue do item (i) que:

$$\psi(g \cdot g') = \theta(w) = \theta(w') = \theta(u \cdot v) = \theta(u) \cdot \theta(v) = \psi(g) \cdot \psi(g'). \tag{1.3.8}$$

(iii) ψ satisfaz, para todo $x \in X$:

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(g) = \theta(x) = f(x), \tag{1.3.9}$$

desde que $\theta|_X = f$ (aqui estamos usando a Observação 1.2.9).
Agora, suponhamos que $H = \langle f(X)\rangle$, então dado $h \in H$, temos $h = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$, onde $x_{i_r} \in X$, $\epsilon_r = \pm 1$ e $n \geqslant 0$. Seja $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in F(X)$. Assim,

$$\varphi(w) = \varphi(x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = \varphi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots \varphi(x_{i_n})^{\epsilon_n} = g \in G. \tag{1.3.10}$$

Portanto, dado $h \in H$, existe $g \in G$, como em (1.3.10), tal que:

$$\begin{aligned} \psi(g) &= \psi(\varphi(w)) \qquad (1.3.11) \\ &= \psi(\varphi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots \varphi(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= ((\psi \circ \varphi)(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \dots ((\psi \circ \varphi)(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\ &= f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n} \\ &= h \end{aligned}$$

Segue que ψ é um epimorfismo.

❑

Observação 1.3.14. *Nas mesmas hipóteses do Teorema 1.3.13 de Von Dyck segue do Teorema do Isomorfismo que*

$$\frac{G}{Ker(\psi)} \cong H = \langle f(X)\rangle, \quad onde \ \ G = \langle X|R\rangle^{\varphi}. \tag{1.3.12}$$

Observação 1.3.15. *Como um caso particular do Teorema 1.3.13, temos que a inclusão* $\bar{i} : X \hookrightarrow X \cup Y$ *induz um homomorfismo de* $G = \langle X|R\rangle^{\varphi}$ *em* $H = \langle X \cup Y|R \cup S\rangle^{\phi}$*, para qualquer subconjunto* S *de* $F(X \cup Y)$*, o grupo livre gerado por* $X \cup Y$*. De fato, denotemos por* f *a seguinte composição:*

$$X \overset{\bar{i}}{\hookrightarrow} X \cup Y \overset{j}{\hookrightarrow} F(X \cup Y) \xrightarrow{\phi} \langle X \cup Y|R \cup S\rangle^{\phi} = H, \tag{1.3.13}$$

ou seja, $f = \phi \circ j \circ \bar{i} : X \to H = \langle X \cup Y|R \cup S\rangle^{\phi}$*. Seja* $F(X)$ *o grupo livre gerado por* X*, então existe um único homomorfismo* $\theta : F(X) \to H$ *que estende* f*, ou seja,* $\theta \circ i = f = \phi \circ j \circ \bar{i}$*.*
Consideremos $R \subset F(X)$ *um conjunto de relatores definidores de* G *via o epimorfismo* $\varphi :$

$F(X) \to G$, determinados pela apresentação $\langle X|R\rangle^{\varphi}$ do grupo G, conforme a Definição 1.3.6. Note que dado $r \in R \subset F(X)$, temos

$$r \quad = \quad x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in R \subset R \cup S \subset \langle R \cup S\rangle^{F(X \cup Y)} = Ker(\phi).$$

Dessa forma, usando o fato que $\theta|_X = f = \phi \circ j \circ \bar{i} = \phi|_X$, concluímos que

$$\begin{aligned} \theta(r) &= \theta(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= \theta(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \theta(x_{i_n})^{\epsilon_n} \overset{\theta|_X = \phi|_X}{=} \phi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \phi(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= \phi(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n}) \\ &= \phi(r) = 1, \quad \forall r \in R. \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Assim, pelo Teorema (Von Dyck), *existe um homomorfismo $\psi : G \to H$ que torna o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \cup Y \arrow[r, hook, "j"] & F(X \cup Y) \arrow[r, "\phi"] & H \\ F(X) \arrow[urrr, "\theta"] \arrow[rrr, "\varphi"'] & & & G \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd} \tag{1.3.15}$$

ou seja, $f(x) = (\psi \circ \varphi)(x), \forall\, x \in X$. Este homomorfismo será usado mais adiante, sem indicarmos explicitamente como ele é construído.

O próximo resultado é um caso de um dos Teoremas de homomorfismos [**23, Theorem 5.6**].

Teorema 1.3.16. ([6], pág. 19) *Sejam R um subconjunto de um grupo A e $\theta : A \to H$ um homomorfismo tal que $\theta(R) = 1$. Então, existe um homomorfismo $\psi : \frac{A}{\langle R\rangle^A} \to H$ tal que $\psi \circ \pi = \theta$, onde $\pi : A \to \frac{A}{\langle R\rangle^A}$ é o epimorfismo canônico.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ \frac{A}{\langle R\rangle^A} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração:

Como na prova do Corolário 1.2.43, existem um subconjunto $X \subset A$ tal que $A = \langle X \rangle$ e um epimorfismo $\varphi : F(X) \to A$, onde $F(X)$ é o grupo livre gerado por X. Definimos

$$\begin{aligned} \psi: \ \frac{A}{\langle R \rangle^A} &\to H \\ [a] &\mapsto \psi([a]) = \theta(a), \quad \forall a \in A. \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Note que se $a \in [b] = b \cdot \langle R \rangle^A$, então, $ab^{-1} \in \langle R \rangle^A = \langle \{a^{-1}ra; a \in A \text{ e } r \in R\} \rangle$. Assim,

$$ab^{-1} = a_{i_1}^{-1} r_{i_1} a_{i_1} \ldots a_{i_n}^{-1} r_{i_n} a_{i_n}, \quad \text{com} \ \ a_{i_k} \in A, r_{i_k} \in R, \quad k = 1 \ldots, n. \tag{1.3.17}$$

Por outro lado, como $\varphi : F(X) \to A$ é um epimorfismo e $\langle R \rangle^A \subset A$, existe $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in F(X)$ tal que $\varphi(w) = ab^{-1}$. Assim,

$$ab^{-1} = \varphi(w) = \varphi(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \cdots \varphi(x_{i_n}^{\epsilon_n}) \tag{1.3.18}$$

com $\varphi(x_{i_k}^{\epsilon_k}) = a_{i_k}^{-1} r_{i_k} a_{i_k}$, $a_{i_k} \in A$, $r_{i_k} \in R$, para todo $k = 1, \ldots, n$. Logo:

$$\begin{aligned} \theta(a)\theta(b)^{-1} = \theta(ab^{-1}) &= \theta \ \underbrace{(\varphi(x_{i_1}^{\epsilon_1}))}_{= a_{i_1}^{-1} r_{i_1} a_{i_1}} \cdots \theta \ \underbrace{(\varphi(x_{i_n}^{\epsilon_n}))}_{= a_{i_n}^{-1} r_{i_n} a_{i_n}} \\ &= \theta(a_{i_1}^{-1}) \underbrace{\theta(r_{i_1})}_{=1} \theta(a_{i_1}) \ldots \theta(a_{i_n}^{-1}) \underbrace{\theta(r_{i_n})}_{=1} \theta(a_{i_n}) \\ &= \theta(a_{i_1})^{-1}\theta(a_{i_1}) \ldots \theta(a_{i_n})^{-1}\theta(a_{i_n}) = 1_H \quad \Rightarrow \quad \theta(a) = \theta(b). \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Dessa forma, ψ é bem definido e para todo $[a], [b] \in \frac{A}{\langle R \rangle^A}$,

$$\psi([a][b]) = \psi([a \cdot b]) = \theta(a \cdot b) = \theta(a)\theta(b) = \psi([a])\psi([b]). \tag{1.3.20}$$

Portanto, ψ é um bem definido homomorfismo e satisfaz $(\psi \circ \pi)(a) = \psi([a]) = \theta(a)$, para todo $a \in A$.

❏

Observação 1.3.17. [38, pág. 187]. *Se dois grupos G e H possuem mesma apresentação $\langle X|R \rangle$, então eles são isomorfos. De fato, suponhamos que $\langle X \mid R \rangle^{\varphi}$ seja uma* *apresentação para G e $\langle X \mid R \rangle^{\phi}$ seja uma apresentação para H. Assim, os respectivos epimorfismos são:*

$$\begin{aligned} \varphi &: F(X) \to G, \quad \textit{com } ker(\varphi) = \langle R \rangle^{F(X)}, \\ \phi &: F(X) \to H, \quad \textit{com } ker(\phi) = \langle R \rangle^{F(X)}. \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Desde que $ker(\varphi) = \langle R \rangle^{F(X)} = ker(\phi)$, segue do Teorema do Isomorfismo que:

$$G \cong \frac{F(X)}{Ker(\varphi)} = \frac{F(X)}{Ker(\phi)} \cong H.$$

1.4 Produtos Livres

Nesta seção, estudaremos um conceito que desempenha um papel fundamental na teoria de grupos arbitrários, similar ao papel que o conceito de soma direta desempenha na teoria de grupos abelianos. Este conceito é chamado o **produto livre de grupos**.

Em teoria dos grupos, o produto livre de uma família de grupos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ será um novo grupo, denotado por $\underset{\alpha\in A}{*} G_\alpha$, o qual contém cada G_α como subgrupo e será gerado pelos elementos destes subgrupos. A construção de um produto livre é similar, em essência, à construção de um grupo livre (o grupo mais geral que pode ser construído a partir de um conjunto de geradores).

Definição 1.4.1. [6, pág. 24] *Sejam $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família de grupos, G um grupo e, para cada $\alpha \in \Lambda$, um homomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \to G$. Dizemos que o par $(G, \{i_\alpha\})$ é um **produto livre** dos grupos G_α se, para cada grupo H e para cada homomorfismo $f_\alpha : G_\alpha \to H$, existir um único homomorfismo $f : G \to H$ tal que $f_\alpha = f \circ i_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.*

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists! f"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.1}$$

Observação 1.4.2. *Essa propriedade é conhecida como* **Propriedade Universal para Produtos Livres**.

Observação 1.4.3. *Assim como no caso dos grupos livres, podemos perguntar se dada* *uma família qualquer de grupos* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$*, sempre existe o produto livre, se ele é único e, além disso, se as aplicações* $i_\alpha : G_\alpha \to G$ *são monomorfismos. Por causa da unicidade, diremos* o produto livre dos grupos G_α *ao invés de* um produto livre.

Proposição 1.4.4. [6, Proposition 18] *Se* $(G, \{i_\alpha\})$ *e* $(H, \{j_\alpha\})$ *são produtos livres de uma família* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *de grupos, então existe um único isomorfismo* $f : G \to H$ *tal que* $f \circ i_\alpha = j_\alpha$*, para todo* $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração:
Por hipótese, como $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são ambos produtos livres da família $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, então existem únicos homomorfismo $f : G \to H$ e $f' : H \to G$, respectivamente,

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "j_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists!\, f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "j_\alpha"'] & G \\ H \arrow[ur, "\exists!\, f'"'] & \end{tikzcd}$$

tais que $\forall\, \alpha \in \Lambda : \quad f \circ i_\alpha = j_\alpha, \;$ e $\; f' \circ j_\alpha = i_\alpha, \;\; \Rightarrow \;\; f' \circ j_\alpha = (f' \circ f) \circ i_\alpha = i_\alpha, \forall\, \alpha \in \Lambda.$

Observemos ainda que a aplicação identidade $Id_G : G \to G$ também satisfaz a condição: $Id_G \circ i_\alpha = i_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & G \\ G \arrow[ur, "Id_G"'] & \end{tikzcd}$$

Segue da unicidade na definição de produto livre, que $f' \circ f = Id_G$. Analogamente mostra-se que $f \circ f' = Id_H$. Portanto, $f : G \to H$ é um isomorfismo.

❏

O próximo resultado mostra que cada $i_\alpha : G_\alpha \to G$ é um monomorfismo.

Proposição 1.4.5. [6, Proposition 19] *Sejam* $(G, \{i_\alpha\})$ *o produto livre da família* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$*. Então:*

(i) *se existem um grupo* H *e homomorfismos* $f_\beta : G_\beta \to H, \forall\, \beta$ *tais que* f_α *é um monomorfismo, então* $i_\alpha : G_\alpha \to G$ *é um monomorfismo*

(ii) $i_\alpha : G_\alpha \to G$ *é um monomorfismo.*

Demonstração:

(i) Suponhamos que existam um grupo H e homomorfismos $f_\beta : G_\beta \to H$ tais que f_α seja um monomorfismo. Desde que G é o produto livre da família $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, segue da definição de produto livre, que existe um único homomorfismo $f : G \to H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} G_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "i_\beta"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists!\, f"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja, $f \circ i_\beta = f_\beta, \forall\, \beta \in \Lambda$. Em particular, para $\alpha = \beta$ temos que $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, e segue que i_α é um monomorfismo.

(ii) Para cada $\alpha \in \Lambda$ fixado, seja $H = G_\alpha$ e defina $f_\beta : G_\beta \to H$ por

$$f_\beta = \begin{cases} Id_{G_\alpha}, \text{ se } \beta = \alpha & \text{(monomorfismo.)} \\ 0, \text{ se } \ \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

onde 0 denota o homomorfismo trivial. O resultado segue do item (i).

❏

O resultado a seguir garante a existência do produto livre para qualquer família $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de grupos. A ideia para a construção do produto livre de uma família de grupos $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\lambda}$ é considerar a reunião de geradores e relações para cada grupo G_α, sem relações adicionais. O produto livre contém cópias de cada G_α como subgrupos disjuntos e, de fato, veremos que ele satisfaz a Propriedade Universal, o que mostra que ele não depende da escolha das apresentações para cada G_α.

Teorema 1.4.6. **[6, Theorem 20]** *Dada uma família $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de grupos, existe um grupo G e uma família de monomorfismos $i_\alpha : G_\alpha \to G$ tal que $(G, \{i_\alpha\})_{\alpha\in\Lambda}$ é o produto livre da família $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demonstração:

Para cada grupo G_α, escolhemos apresentações $\langle X_\alpha; R_\alpha\rangle^{\varphi_\alpha}$ e consideremos a união disjunta $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ (sem perda de generalidade, podemos assumir que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, para todo $\alpha \neq \beta$, substituindo, se necessário, cada X_α por um conjunto em bijeção com ele). Seja $F(X) = F(\cup X_\alpha)$ o grupo livre gerado por $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. Para cada α, temos um homomorfismo $F(X_\alpha) \to F(\cup X_\alpha)$, induzido pelas inclusões $X_\alpha \to \cup X_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} X_\alpha \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cup X_\alpha \arrow[r, hook] & F(\cup X_\alpha) \\ F(X_\alpha) \arrow[urr, bend right] & \circlearrowleft & \end{tikzcd}$$

Denotemos por $R = \cup R_\alpha$ a união das imagens em $F(\cup X_\alpha)$ dos conjuntos $R_\alpha \subset F(X_\alpha)$ e seja $\langle \cup R_\alpha \rangle^{F(\cup X_\alpha)}$ o fecho normal de R em $F(\cup X_\alpha)$. Definimos G como sendo o grupo quociente:

$$G = \frac{F(\cup X_\alpha)}{\langle \cup R_\alpha \rangle^{F(\cup X_\alpha)}}$$

o qual tem apresentação $\langle \cup X_\alpha ; \cup R_\alpha \rangle^\varphi$, onde $\varphi : F(\cup X_\alpha) \to G$ é a aplicação natural.

Pelo Teorema de Von Dyck 1.3.16, cada inclusão $X_\alpha \mapsto \cup X_\alpha$ induz um homomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \to G$, conforme o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} A = F(X_\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_\alpha"'] \arrow[rr, bend left, "\theta"] & F(\cup X_\alpha) \arrow[r, "\varphi"] & \frac{F(\cup X_\alpha)}{\langle \cup R_\alpha \rangle^{F(\cup X_\alpha)}} = G \\ G_\alpha = \frac{F(X_\alpha)}{\langle R_\alpha \rangle^{F(X_\alpha)}} \arrow[urr, bend right, "i_\alpha"'] & \circlearrowleft & \end{tikzcd} \tag{1.4.2}$$

desde que $\theta(R_\alpha) = 1$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Mostraremos que $(G, \{i_\alpha\})_{\alpha \in \Lambda}$ é o produto livre da família $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Sejam H um grupo e, para cada α, consideremos homomorfismos $f_\alpha : G_\alpha \to H$. Queremos encontrar um homomorfismo $f : G \to H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists!\, f"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.3}$$

ou seja, $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$. De fato, cada $f_\alpha : G_\alpha \to H$ induz um homomorfismo

$$\begin{tikzcd} F(X_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\psi_\alpha = f_\alpha \circ \varphi_\alpha"'] & G_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & H \end{tikzcd}$$

$\psi_\alpha = f_\alpha \circ \varphi_\alpha : F(X_\alpha) \to H$ tal que $\psi_\alpha(R_\alpha) = \{1_H\}, \forall\, \alpha \in \Lambda$. Defina a seguinte função

$$h : \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to H \tag{1.4.4}$$
$$x \mapsto h(x) = \psi_\alpha(x), \quad \text{se } x \in X_\alpha.$$

Segue da Propriedade Universal para grupos livres que existe um único homomorfismo $\psi : F(\cup X_\alpha) \to H$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \cup X_\alpha \arrow[r, "h"] \arrow[d] & H \\ F(\cup X_\alpha) \arrow[ur, "\exists!\,\psi"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.5}$$

ou seja, $\psi(x) = h(x) = \psi_\alpha(x), \forall\, x \in X_\alpha$. Desde que $\psi(\cup R_\alpha) = \{1_H\}$, segue do Teorema de Von Dyck 1.3.16, que existe um homomorfismo $f : G \to H$ tal que $\psi = f \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} F(\cup X_\alpha) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \\ G \arrow[ur, "\exists\, f"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.6}$$

Observemos ainda que $(i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, para cada $x_\alpha \in X_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} F(X_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d] & G_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "i_\alpha"'] & H \\ F(\cup X_\alpha) \arrow[r, "\varphi"'] & G \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4.7}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(i_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha))) &= f(\varphi(x_\alpha)) \overset{(1.4.6)}{=} \psi(x_\alpha) := \psi_\alpha(x_\alpha) \\ &= f_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha)), \forall\, x_\alpha \in X_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\varphi_\alpha(X_\alpha)$ gera G_α, temos que $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Além disso, f é única pois $\cup(i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(X_\alpha)$ gera G.

❑

Assumiremos sem demonstração os resultados a seguir. O primeiro deles é o Teorema da Forma Normal para Produtos Livres. O segundo resultado é o análogo da Proposição 1.2.31, para produtos livres.

Teorema 1.4.7 (Forma Normal para Produtos Livres)**.** **[6, Theorem 21]** *Considere* $(G, \{i_\alpha\})_{\alpha\in\Lambda}$ *o produto livre da família de grupos* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$*. Então:*

(i) *Cada* i_α *é um monomorfismo.*

(ii) *Considerando* $i_\alpha : G_\alpha \to G$ *como sendo a inclusão, qualquer elemento de* G *pode ser escrito de maneira única como* $g_1 \cdots g_n$*, onde* $n \geqslant 0$*, com* $g_i \in G_{\alpha_i}$*, para algum* α_i*, tal que* $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$ *e* $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$*, para* $r < n$*. Ou seja, nenhum* g_i *é o elemento identidade de seu grupo e dois elementos consecutivos* g_i, g_{i+1} *pertencem a* $G_{\alpha' s}$ *distintos.*

Observação 1.4.8. *O produto livre de uma família de grupos* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *será denotado por* $\underset{\alpha\in A}{\ast} G_\alpha$*. Quando* $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$*, usaremos a notação* $G_1 \ast \ldots \ast G_n$*.*

Proposição 1.4.9. **[6, Proposition 23]** *Seja* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *uma família de subgrupos de um grupo* G*. São equivalentes:*

(i) G *é o produto livre dos subgrupos* G_α*, com* $\alpha \in \Lambda$*.*

(ii) *Cada elemento de* G *pode ser escrito de maneira única como um produto* $g_1 \ldots g_n$*, com* $n \geqslant 0$*,* $g_i \in G_{\alpha_i}$*, para algum* α_i*, tal que* $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$ *e* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$*.*

(iii) G *é gerado pelos subgrupos* G_α *e* 1_G *não pode ser escrito como um produto* $g_1 \ldots g_n$*, com* $n > 0$*,* $g_i \in G_{\alpha_i}$*,* $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$ *e* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$*.*

Definição 1.4.10. **[6]** *Seja* $g = g_1 \cdots g_n \in \underset{\alpha\in A}{\ast} G_\alpha$*, com* $g_i \in G_{\alpha_i}$*, para algum* α_i*, tal que* $g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}}$ *e* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$*. Dizemos que* g *tem comprimento* n *e que o produto* $g_1 \cdots g_n$ *é reduzido.*

Exemplo 1.4.11. **[6]** *O grupo livre* $F(X)$*, gerado por um conjunto* X*, é o produto livre de todos os grupos cíclicos infinitos gerados pelos elementos* $x \in X$*, ou seja,*

$$F(X) = \underset{x\in X}{\ast} \langle\, x \,\rangle. \tag{1.4.8}$$

Observação 1.4.12. *Consideremos coleções de grupos* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *e* $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *e homomorfismos* $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H_\alpha$. *Sejam* $G = \underset{\alpha\in A}{\ast} G_\alpha$ *e* $H = \underset{\alpha\in A}{\ast} H_\alpha$. *Considerando cada* H_α *como um subgrupo de* H, *temos inclusões* $j_\alpha : H_\alpha \to H$, *para cada* $\alpha \in \Lambda$, *e segue da definição de produto livre que os homomorfismos* $f_\alpha = j_\alpha \circ \varphi_\alpha : G_\alpha \to H$ *dão origem a um único homomorfismo de* $\ast\varphi_\alpha : \underset{\alpha\in A}{\ast} G_\alpha \to \underset{\alpha\in A}{\ast} H_\alpha$, *conforme o seguinte diagrama comutativo.*

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, hook, "i_\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_\alpha \arrow[r, hook, "j_\alpha"] & \underset{\alpha\in A}{\ast} H_\alpha \\
\underset{\alpha\in A}{\ast} G_\alpha \arrow[urr, bend right, "\ast\varphi_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Capítulo

2

Apresentação de Produtos Diretos, Semidiretos e Extensões de Grupos

O principal objetivo deste capítulo é fornecer uma base teórica para os dois capítulos seguintes. No Capítulo 3 veremos a apresentação de $B(n)$, o grupo das tranças Artin e, no Capítulo 4, mostraremos um dos principais resultados sobre a ordenação de $PB(n)$, o grupo de tranças puras, a saber, $PB(n)$ se escreve como um produto semidireto de grupos livres. Assim, neste capítulo, estudaremos as apresentações para produtos diretos, semidiretos e extensões de grupos. Os resultados principais deste capítulo estão contidos na referência [25].

2.1 Apresentação de Produtos Diretos

Nesta seção, descrevemos uma apresentação para o produto direto de dois grupos G e H, a partir das apresentações de G e H, respectivamente. O produto direto de dois grupos é um exemplo de um grupo que pode ser obtido a partir de grupos dados.

Definição 2.1.1. *Sejam G e H grupos, com elementos identidades 1_G e 1_H, respectivamente. Definimos o* ***produto direto*** *de G por H como sendo o grupo cujo conjunto subjacente é produto cartesiano $G \times H$ e, cuja operação binária, que determina a estrutura de grupo, é dada pela seguinte lei de multiplicação:*

$$\begin{aligned} \cdot : (G \times H) \times (G \times H) &\to G \times H \\ ((g,h),(g',h')) &\mapsto (gg',hh'),\ \forall g,g' \in G,\ \forall h,h' \in H. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

O elemento identidade de $(G \times H, \cdot\ )$ *é* $(1_G, 1_H)$ *e o elemento inverso de* $(g,h) \in G \times H$ *é* (g^{-1}, h^{-1}).

Proposição 2.1.2. **[25, Proposition 4]** *Se* G, H *são grupos apresentados por* $\langle X|R\rangle^{\varphi_X}$ *e* $\langle Y|S\rangle^{\varphi_Y}$, *respectivamente, com* $X \cap Y = \varnothing$, *então seu produto direto* $G \times H$ *possui a seguinte apresentação:*

$$\langle X, Y|R, S, [X,Y]\rangle, \quad onde\ \ [X,Y] = \{x^{-1}y^{-1}xy;\ \ x \in X,\ \ y \in Y\}, \tag{2.1.2}$$

denota o conjunto dos comutadores.

Demonstração:
Sejam $\langle X|R\rangle^{\varphi_X}$ e $\langle Y|S\rangle^{\varphi_Y}$ apresentações de G e H, respectivamente. Assim, temos os epimorfismos:

$$\varphi_X : F(X) \to G, \quad \text{com } ker(\varphi_X) = \langle R\rangle^{F(X)},$$
$$\varphi_Y : F(Y) \to H, \quad \text{com } ker(\varphi_Y) = \langle S\rangle^{F(Y)}.$$

Denotemos por D o grupo que possui a apresentação (2.1.2), ou seja,

$$D = \frac{F(X \cup Y)}{\langle R \cup S \cup [X,Y]\rangle^{F(X \cup Y)}}. \tag{2.1.3}$$

Mostraremos que D é isomorfo a $G \times H$. Consideremos as aplicações nos seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drr, "i_X"'] & F(X) \arrow[r, "j"] & F(X \cup Y) \arrow[d, "\pi"] \\ & & D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[drr, "i_Y"'] & F(Y) \arrow[r, "j'"] & F(X \cup Y) \arrow[d, "\pi"] \\ & & D \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\pi \circ j \circ i = i_X \quad \text{e} \quad \pi \circ j' \circ i' = i_Y. \tag{2.1.4}$$

Pelo Teorema de Von Dyck 1.3.13, estas aplicações induzem homomorfismos

$\bar{i}_X : G \to D$ e $\bar{i}_Y : H \to D$, respectivamente, conforme os diagramas comutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "i"'] & D \\ F(X) \arrow[ur, "\theta_X"] \arrow[r, "\varphi_X"'] & G \arrow[u, "\bar{i}_X"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "i'"'] & D \\ F(Y) \arrow[ur, "\theta_Y"] \arrow[r, "\varphi_Y"'] & H \arrow[u, "\bar{i}_Y"'] \end{tikzcd}$$

onde $\theta_X : F(X) \to D$ e $\theta_Y : F(Y) \to D$ são os únicos homomorfismos que estendem i_X e i_Y, respectivamente (desde que $F(X)$ e $F(Y)$ são grupos livres), os quais satisfazem

$$\begin{aligned} \theta_X(r) &= i_X(r) = (\pi \circ j \circ i)(r) = \pi(r) = 1_D \in D, \forall\, r \in R, \\ \theta_Y(s) &= i_Y(s) = (\pi \circ j' \circ i')(s) = \pi(s) = 1_D \in D, \forall s \in S, \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

pois $\pi(w) = 1_D \in D, \forall w \in R \cup S$. Definimos, para quaisquer $g \in G$ e $h \in H$:

$$\begin{aligned} \alpha : G \times H \ &\to D \\ (g,h) \ &\mapsto \alpha((g,h)) := \bar{i}_X(g) \cdot \bar{i}_Y(h), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

α é bem definido e, além disso, é um homomorfismo de grupos. De fato, para todo (g_1, h_1), $(g_2, h_2) \in G \times H$, temos

$$\begin{aligned} \alpha((g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)) &= \alpha((g_1g_2, h_1h_2)) \\ &:= \bar{i}_X(g_1g_2) \cdot \bar{i}_Y(h_1h_2) \\ &= \bar{i}_X(g_1)\,\bar{i}_X(g_2) \cdot \bar{i}_Y(h_1)\,\bar{i}_Y(h_2). \\ &= \bar{i}_X(g_1)\,\bar{i}_Y(h_1) \cdot \bar{i}_X(g_2)\,\bar{i}_Y(h_2) \\ &= \alpha((g_1,h_1)) \cdot \alpha((g_2,h_2)), \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

desde que

$$\bar{i}_X(g)\bar{i}_Y(h) = \bar{i}_Y(h)\bar{i}_X(g), \forall\, g \in G, \forall\, h \in H. \tag{2.1.8}$$

De fato, como $\varphi_X : F(X) \to G$ é um epimorfismo, dado $g \in G$, existe, $w \in F(X)$ tal que

$\varphi_X(w) = g$. Além disso, $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}$ com $x_{i_r} \in X, \epsilon_r = \pm 1$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\bar{i}_X(g) &= \bar{i}_X(\varphi_X(w)) = \bar{i}_X(\varphi_X(x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_n}^{\epsilon_n})) \\
&= \bar{i}_X((\varphi_X(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots (\varphi_X(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\
&= ((\bar{i}_X \circ \varphi_X) \underbrace{(x_{i_1}))^{\epsilon_1}}_{= i(x_{i_1})^{\epsilon_1}} \cdots ((\bar{i}_X \circ \varphi_X) \underbrace{(x_{i_n}))^{\epsilon_n}}_{= i(x_{i_n})^{\epsilon_n}} \\
&= (\underbrace{(\bar{i}_X \circ \varphi_X \circ i)}_{= i_X}(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots (\underbrace{(\bar{i}_X \circ \varphi_X \circ i)}_{= i_X}(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\
&= (\underbrace{\ i_X\ }_{= \pi \circ j \circ i}(x_{i_1}))^{\epsilon_1} \cdots (\underbrace{\ i_X\ }_{= \pi \circ j \circ i}(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\
&= \pi(x_{i_1})^{\epsilon_1} \cdots \pi(x_{i_n})^{\epsilon_n}.
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

Analogamente, $\bar{i}_Y(h) = \pi(y_{j_1})^{\delta_1} \cdots \pi(y_{j_m})^{\delta_m}$. Note ainda que $\forall\ x \in X, y \in Y$:

$$\pi(x^{-1}y^{-1}xy) = \pi(x)^{-1}\pi(y)^{-1}\pi(x)\pi(y) = 1_D \in D \Rightarrow \pi(x)\pi(y) = \pi(y)\pi(x).$$

Isso completa a prova da igualdade em (2.1.8). Portanto, segue de (2.1.7), que α é um homomorfismo de grupos.

Consideremos agora a aplicação $\gamma : X \dot{\cup} Y \to G \times H$ tal que

$$\gamma|_X = (\varphi_X \circ i,\ 1_H) \ \text{ e } \ \gamma|_Y = (1_G,\ \varphi_Y \circ i'). \tag{2.1.10}$$

Pelo Teorema de Von Dyck, existe um homomorfismo $\beta : D \to G \times H$ que estende γ.

$$
\begin{tikzcd}
X \cup Y \arrow[r, hook, "\gamma"] \arrow[d, "i_{X \cup Y}"'] & G \times H \\
F(X \cup Y) \arrow[ur, "\theta_{X \cup Y}"] \arrow[r, "\pi"'] & D \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}
\tag{2.1.11}
$$

onde $\theta_{X \cup Y} : F(X \cup Y) \to G \times H$ é o único homomorfismo que estende γ, o qual satisfaz

$$\theta_{X \cup Y}(z) = 1_{G \times H} = (1_G, 1_H), \forall\, z \in R \cup S \cup [X \cup Y].$$

Note que $G \times H = \langle \gamma(X \cup Y) \rangle$. Vejamos que $(\beta \circ \alpha)(\gamma(z)) = \gamma(z)$, para todo $z \in X \cup Y$.

De fato, se $z \in X$:

$$\begin{aligned}
(\beta \circ \alpha)(\gamma(z)) &= (\beta \circ \alpha)(\varphi_X \circ i(z), 1_H) \\
&= \beta(\bar{i}_X(\varphi_X \circ i(z)) \cdot \bar{i}_Y(1_H)) \\
&= \beta(\bar{i}_X \circ \varphi_X \circ i(z)) \\
&= \beta(i_X(z)) \\
&= (\beta \circ \pi \circ j)(i(z)) \\
&= (\beta \circ \pi)(j(z)) \\
&= (\beta \circ \pi)(z) \\
&= (\beta \circ \pi)(i_{X \cup Y}(z)) \\
&= (\beta \circ \pi \circ i_{X \cup Y})(z) \\
&= \gamma(z).
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Para $z \in Y$ a prova segue de maneira inteiramente análoga. Temos que $D = \langle \pi(X \cup Y) \rangle$ e, além disso, $(\alpha \circ \beta)(\pi(z)) = \pi(z), \forall\, z \in X \cup Y$. Dado $z \in X$:

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta)(\pi(z)) &= (\alpha \circ \beta \circ \pi \circ i_{X \cup Y})(z) \\
&= (\alpha \circ \gamma)(z) \\
&= \alpha(\varphi_X \circ i(z), 1_H) \\
&= \bar{i}_X(\varphi_X \circ i(z)) \cdot \bar{i}_Y(1_H) \\
&= \bar{i}_X(\varphi_X \circ i(z)) \\
&= i_X(z) \\
&= (\pi \circ j \circ i)(z) \\
&= \pi(z).
\end{aligned}$$

Para $z \in Y$ a prova segue de maneira inteiramente análoga. Assim, $\beta \circ \alpha$ e $\alpha \circ \beta$ fixam os geradores em $G \times H$ e em D, respectivamente. Dessa forma, α e β são inversos um do outro e, portanto, α é um isomorfismo.

❏

2.2 Produtos Semidiretos

Nesta seção descreveremos uma construção extremamente útil, a qual é uma generalização do produto direto de dois grupos.

Recordemos que se A é um grupo, então o conjunto

$$Aut(A) = \{\alpha : A \to A;\ \alpha \text{ é um automorfismo}\} \tag{2.2.1}$$

de todos os automorfismos[5] de A é um grupo, munido da composição de funções como operação binária, ou seja,

$$\bullet : Aut(A) \times Aut(A) \to Aut(A) \tag{2.2.2}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \bullet \beta = \beta \circ \alpha : A \to A$$

onde $(\beta \circ \alpha)(a) = \beta(\alpha(a))$, para todo $a \in A$. O elemento identidade de $(Aut(A), \bullet)$ é o automorfismo $Id_A : A \to A$ e, para cada automorfismo $\alpha : A \to A$, o seu inverso será $\alpha^{-1} : A \to A$, onde α^{-1} denota o inverso do isomorfismo α.

Definição 2.2.1. *Dado um grupo K, dizemos que dois subgrupos G e A de K são **complementos** um do outro* (ou que G e A são subgrupos complementares) *em K se:*

(i) $K = GA = \{ga;\ \ g \in G \ \ e \ \ a \in A\}$.

(ii) $G \cap A = \{1_K\}$.

Definição 2.2.2. *Dado um grupo K, suponha que $A \lhd K$ e que exista um subgrupo $G \subset K$ tal que $K = GA = \{ga, g \in G, a \in A\}$, com $G \cap A = \{1_K\}$. Neste caso, dizemos que K é o* **produto semidireto interno** *de G por A e usaremos a notação:*

$$K = G \ltimes A \quad ou \quad K = A \rtimes G. \tag{2.2.3}$$

Observação 2.2.3. *Seja $K = G \ltimes A$. Desde que $K = GA$, $A \lhd K$ e $G \cap A = \{1_K\}$, são válidas as seguintes propriedades:*

[5]Um isomorfismo $\alpha : A \to A$ é chamado um automorfismo de A.

(1) *G e A são subgrupos complementares de K.*

(2) *Segue do Segundo Teorema do Isomorfismo*[6]

$$G \cong \frac{G}{G \cap A} \cong \frac{GA}{A} \cong \frac{K}{A}. \tag{2.2.4}$$

(3) *Cada elemento $k \in K$ pode ser escrito de maneira única como um produto $k = ga$, com $g \in G$ e $a \in A$. De fato, suponhamos que $k = ga = hb$, com $g, h \in G$ e $a, b \in A$.*

$$\begin{aligned} ga = hb \ &\Rightarrow h^{-1}g = ba^{-1} \ \text{ e, desde que } \ h^{-1}g \in G, \ ab^{-1} \in A \ \text{ e } \ G \cap A = \{1_K\}, \\ &\Rightarrow h^{-1}g = ba^{-1} = 1_K \Rightarrow h = g \ \text{ e } \ b = a. \end{aligned}$$

(4) *Ao contrário do que ocorre com o produto direto, os grupos G e A podem não fornecer informações suficientes para descrevermos a estrutura do grupo $K = G \ltimes A$.*

A informação extra que precisaremos consiste de um homomorfismo de K para o grupo dos automorfismos de A, como segue. Para cada $g \in G$, definimos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \alpha : G &\longrightarrow Aut(A) \\ g &\longmapsto \quad \alpha_g : \ A \longrightarrow A \\ &\qquad\qquad a \longmapsto \alpha_g(a) := g^{-1}ag, \ \forall a \in A, \ \forall g \in G, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

satisfazendo, $\forall g, h \in G$ e $\forall a \in A$:

$$(\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}})(a) = \alpha_{g^{-1}g}(a) = (g^{-1}g)^{-1}a(g^{-1}g) = a = (\alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g)(a). \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_h \circ \alpha_g)(a) &= \alpha_h(\alpha_g(a)) = \alpha_h(g^{-1}ag) = h^{-1}(g^{-1}ag)h. \\ \alpha_{gh}(a) &= (gh)^{-1}a(gh) = (h^{-1}g^{-1})a(gh) = h^{-1}(g^{-1}ag)h. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Assim, da Equação (2.2.6), temos que α_g é um automorfismo de A. Além disso,

[6]**([23], Corollary 5.9)** Se G e A são subgrupos de um grupo K, com $A \lhd K$, então $\frac{G}{G \cap A} \cong \frac{GA}{A}$.

segue da Equação 2.2.7*, que α é um homomorfismo de grupos, chamado o* ***homomorfismo por conjugação*** *de A.*

(5) *Dados $ga, hb \in K = G \ltimes A$, queremos saber como escrever seu produto $(ga)(hb) \in K$ e o elemento inverso $(ga)^{-1}$ de (ga). Observemos que dados $g, h \in G$ e $a, b \in A$, então*

$$(ga)(hb) = g'a', \quad com \;\; g' = gh \in G \;\; e \;\; a' = \alpha_h(a)b \in A. \tag{2.2.8}$$
$$(ga)^{-1} = g^{-1}\alpha_{g^{-1}}(a^{-1}).$$

De fato:

$$(ga)(hb) = g(ah)b = g(hh^{-1}ah)b = (gh)(h^{-1}ah)b = (gh)(\alpha_h(a)b). \tag{2.2.9}$$
$$(ga)^{-1} = (a^{-1}g^{-1}) = (g^{-1}g)(a^{-1}g^{-1}) = g^{-1}[(g^{-1})^{-1}a^{-1}g^{-1}] = g^{-1}\alpha_{g^{-1}}(a^{-1}).$$

Dessa forma, para determinar a estrutura de grupo de um produto semidireto $K = G \ltimes A$, são necessárias informações sobre as estruturas dos grupos G, A, juntamente com um homomorfismo $\alpha : G \to Aut(A)$, como na Equação (2.2.9)*.*

(6) *Se $\alpha_g = Id_A$, para todo $g \in G$, então $\alpha_g(a) = a$, para todo $a \in A$. Assim, a operação no produto semidireto $K = G \ltimes A$, dada em* (2.2.9) *satisfaz:*

$$(ga)(hb) = (gh)(\alpha_h(a)b) = (gh)(ab). \tag{2.2.10}$$

Observação 2.2.4. *Note que o símbolo $\rtimes$ é uma combinação dos símbolos de subgrupo normal, $\lhd$, com o símbolo do produto cartesiano, $\times$, e a notação nos diz qual dentre os grupos G e A é subgrupo normal de $K = G \ltimes A$. Esta notação não é totalmente satisfatória, desde que a estrutura do produto semidireto depende, não apenas dos grupos G e A, mas também do homomorfismo $\alpha : G \to Aut(A)$. Assim, escreveremos $K = G \ltimes_\alpha A$ ou $K = A \rtimes_\alpha G$ para incluir todas as informações necessárias nesta notação.*

Consideremos agora G e A dois grupos e um homomorfismo arbitrário

$$\begin{aligned} \alpha : G &\longrightarrow Aut(A) \\ g &\longmapsto \quad \alpha_g : \; A \longrightarrow A \\ & \qquad\qquad\quad a \longmapsto \alpha_g(a), \forall a \in A, \forall g \in G. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Note que, dados $g, h \in G$, então $gh \in G$ e o automorfismo $\alpha_{gh} : A \to A$ é definido por $\alpha_{gh}(a) = (\alpha_h \circ \alpha_g)(a)$, para todo $a \in A$. Além disso, para $1_G \in G$, temos que o automorfismo $\alpha_{1_G} : A \to A$ é dado por $\alpha_{1_G}(a) = Id_A(a) = a$, para todo $a \in A$. Assim, $\alpha_{gg^{-1}} = \alpha_{g^{-1}g} = \alpha_{1G} = Id_A$, para todo $g \in G$. O homomorfismo $\alpha : G \to Aut(A)$ determina uma ação à direita de G sobre A, definida por:

$$\begin{aligned} A \times G &\longrightarrow A \\ (a, g) &\longmapsto a^g = a \cdot g = \alpha_g(a), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

onde o lado direito da igualdade em (2.2.12) é a imagem de $a \in A$ pelo automorfismo α_g de A. Assim, desde que α_g é um isomorfismo temos, para todo $a \in A$ e para quaisquer $g, h \in G$:

$$\begin{aligned} \text{(i) } (a, 1_G) \mapsto a^{1_G} &= a \cdot 1_G = \alpha_{1_G}(a) = Id_A(a) = a \\ \text{(ii) } (a, gh) \mapsto a^{gh} &= a \cdot (gh) = \alpha_{gh}(a) = (\alpha_h \circ \alpha_g)(a) = \alpha_h(\alpha_g(a)) = \alpha_h(a \cdot g) \\ &= (a \cdot g) \cdot h = (a^g) \cdot h = (a^g)^h. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão em (2.2.12) é uma ação à direita de G sobre A. Note ainda que para quaisquer $a, b \in A$ e $g \in G$, como α é homomorfismo, temos:

$$(ab, g) \mapsto (ab)^g = (ab) \cdot g = \alpha_g(ab) = \alpha_g(a)\alpha_g(b) = (a \cdot g)(b \cdot g) = a^g b^g.$$

Consideremos o produto cartesiano $G \times A$, com a seguinte operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : (G \times A) \times (G \times A) &\to G \times A \\ ((g, a), (h, b)) &\mapsto (gh, a^h b) = (gh, (a \cdot h)b) = (gh, \alpha_h(a)b). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Proposição 2.2.5. *$(G \times A, \cdot)$ é um grupo com elemento identidade $(1_G, 1_A)$ e o elemento* *inverso de cada* $(g, a) \in G \times A$ *é* $(g, a)^{-1} = (g^{-1}, (a^{-1})^{g^{-1}})$.

Demonstração:
Para todo $(g, a), (h, b), (k, c) \in G \times A$ são válidas as seguintes propriedades:

(i) **Associatividade:**

$$\begin{aligned}[(g, a) \cdot (h, b)] \cdot (k, c) &= (gh, a^h b) \cdot (k, c) = (gh, \alpha_h(a)b) \cdot (k, c) \\ &= ((gh)k, (\alpha_h(a)b)^k c) = (g(hk), \alpha_k(\alpha_h(a)b)c) \\ &= (g(hk), \alpha_k \circ \alpha_h(a)\alpha_k(b)c).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(g, a) \cdot [(h, b) \cdot (k, c)] &= (g, a)(hk, b^k c) = (g, a) \cdot (hk, \alpha_k(b)c) \\ &= (g(hk), a^{hk}\alpha_k(b)c) = (g(hk), (a^h)^k \alpha_k(b)c) \\ &= (g(hk), (\alpha_h(a))^k \alpha_k(b)c) = (g(hk), \alpha_k \circ \alpha_h(a)\alpha_k(b)c).\end{aligned}$$

(ii) **Elemento identidade:**

$$(g, a) \cdot (1_G, 1_A) = (g1_G, a^{1_G}1_A) = (g, a \cdot 1_G) = (g, \alpha_{1_G}(a)) = (g, Id_A(a)) = (g, a),$$

$$(1_G, 1_A)(g, a) = (1_G g, 1_A^g a) = (g, (1_A \cdot g)a) = (g, \alpha_g(1_A)a) = (g, 1_A a) = (g, a).$$

(iii) **Elemento inverso:**

$$\begin{aligned}(g, a) \cdot (g^{-1}, (a^{-1})^{g^{-1}}) &= (gg^{-1}, a^{g^{-1}}(a^{-1})^{g^{-1}}) = (1_G, (a \cdot g^{-1})(a^{-1} \cdot g^{-1})) \\ &= (1_G, \alpha_{g^{-1}}(a)\alpha_{g^{-1}}(a^{-1})) = (1_G, \alpha_{g^{-1}}(aa^{-1})) \\ &= (1_G, \alpha_{g^{-1}}(1_A)) = (1_G, 1_A), \ \forall\, g \in G, \ \forall\, a \in A.\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(g^{-1}, (a^{-1})^{g^{-1}}) \cdot (g, a) = (1_G, 1_A), \forall g \in G, \forall a \in A$

Portanto, $(G \times A, \cdot)$ é um grupo, conforme queríamos demonstrar.

❏

Definição 2.2.6. [25, Definition 1] *O grupo* $(G \times A, \cdot)$ *é chamado o* ***produto semidireto externo*** *de* G *por* A*, com respeito ao homomorfismo* $\alpha : G \to Aut(A)$*. Usaremos* *as notações* $K = G \ltimes_\alpha A$ *ou* $K = A \rtimes_\alpha G$.

Observação 2.2.7. *Consideremos as aplicações inclusões* $i_G : G \hookrightarrow G \ltimes_\alpha A$, $g \mapsto (g, 1_A)$ *e* $i_A : A \hookrightarrow G \ltimes_\alpha A$, $a \mapsto (1_G, a)$, *as quais são monomorfismos, desde que dados* $g, h \in G$*:*

$$i_G(gh) = (gh, 1_A) = (g, 1_A) \cdot (h, 1_A) = i_G(g) \cdot i_G(h).$$

$$i_G(g) = i_G(h) \Rightarrow (g, 1_A) = (h, 1_A) \Rightarrow g = h.$$

Denotemos as imagens de G *e* A *via estes homomorfismos por:*

$$\mathcal{G} = i_G(G) = \{(g, 1_A);\ g \in G\} \quad e \quad \mathcal{A} = i_A(A) = \{(1_G, a);\ a \in A\} \tag{2.2.14}$$

Então, $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{A}$ *são subgrupos de* $G \ltimes_\alpha A$, *tais que* $\mathcal{G} \cong G$ *e* $\mathcal{A} \cong A$. *Observemos que, para todo* $g \in G$ *e para todo* $a \in A$*:*

$$\begin{aligned}
(g, 1_A) \cdot (1_G, a) &:= (g1_G, (1_A^{1_G})a) && (2.2.15)\\
&= (g, (1_A.1_G)a) && (2.2.16)\\
&= (g, \alpha_{1_G}(1_A)a) = (g, a).
\end{aligned}$$

Assim, $G \ltimes_\alpha A = \mathcal{G}\mathcal{A}$, *com* $\mathcal{G} \cap \mathcal{A} = \{(1_G, 1_A)\}$. *Note ainda que* $\mathcal{A}$ *é um subgrupo normal de* $G \ltimes_\alpha A$. *De fato,* $\forall g \in G$ *e* $\forall a, b \in A$*:*

$$\begin{aligned}
(g, a)^{-1} \cdot [(1_G, b) \cdot (g, a)] &:= (g^{-1}, (a^{-1})^{g^{-1}}) \cdot [(1_G, g) \cdot (g, a)] && (2.2.17)\\
&= (g^{-1}, \alpha_{g^{-1}}(a^{-1})) \cdot (1_G g, b^g \cdot a)\\
&= (g^{-1}, \alpha_{g^{-1}}(a^{-1})) \cdot (g, \alpha_g(b)a)\\
&= (g^{-1}g, (\alpha_{g^{-1}}(a^{-1}))^g \cdot \alpha_g(b)a)\\
&= (1_G, \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a^{-1})) \cdot \alpha_g(b)a)\\
&= (1_G, \alpha_{gg^{-1}}(a^{-1}) \cdot \alpha_g(b)a)\\
&= (1_G, Id_A(a^{-1}) \cdot \alpha_g(b)a)\\
&= (1_G, a^{-1}\alpha_g(b)a) \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Mais ainda, a ação de $\mathcal{G}$ por conjugação de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{G} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ ((1_G, a), (g, 1_A)) &\longmapsto (g, 1_A)^{-1} \cdot (1_G, a) \cdot (g, 1_A) \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

induz o automorfismo α_g. Isso segue fazendo $a = 1_A$ em (2.2.17):

$$(g, 1_A)^{-1} \cdot (1_G, b) \cdot (g, 1_A) = (1_G, 1_A^{-1}\alpha_g(b)1_A) = (1_G, \alpha_g(b)), \forall\, g \in G, \forall\, b \in A.$$

Assim temos $G \ltimes_\alpha A = \mathcal{G}\mathcal{A}$, com $\mathcal{A} \lhd G \ltimes_\alpha A$, onde $\mathcal{G}$ é um subgrupo de $G \ltimes_\alpha A$ tal que $\mathcal{G} \cap \mathcal{A} = \{(1_G, 1_A)\}$ ($\mathcal{A}$ tem complemento $\mathcal{G}$ em $G \ltimes_\alpha A$), com $G \cong \mathcal{G}$ e $A \cong \mathcal{A}$. Portanto, $G \ltimes_\alpha A$ é o **produto semidireto interno** *de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{A}$.*
Usualmente é conveniente não fazer distinção entre os grupos G e $\mathcal{G}$, assim como entre os grupos A e $\mathcal{A}$, ou seja, estamos identificando os grupos isomorfos $G \cong \mathcal{G}$ e $A \cong \mathcal{A}$, respectivamente. No que segue, simplesmente faremos referência ao produto semidireto $G \ltimes_\alpha A$.

Observação 2.2.8. *No caso particular em que $\alpha_g = Id_A$, para todo $g \in G$, então $\alpha_g(a) = a$, para todo $a \in A$. Assim, a ação definida em (2.2.12) é trivial e a operação de multiplicação definida em (2.2.13) coincide com a operação de multiplicação definida no produto direto $G \times A$, pois:*

$$(g, a)(h, b) = (gh, \alpha_h(a)b) = (gh, ab). \tag{2.2.19}$$

Neste caso, $G \ltimes_\alpha A = G \times A$.

2.3 Apresentação de Extensões de Grupos

2.3.1 Conceitos básicos

Nesta seção apresentamos resultados sobre extensões de grupos com o objetivo de obter uma apresentação para o produto semidireto.

Definição 2.3.1. [25, Definition 1] *Uma* ***extensão de um grupo*** G ***por um grupo*** A *é um grupo* $\widetilde{G}$ *que possui um subgrupo normal* $N \lhd \widetilde{G}$ *satisfazendo as condições:*

(i) $A \overset{\alpha}{\simeq} N$, *ou seja, existe um isomorfismo* $\alpha : A \to N$.

(ii) $\frac{\widetilde{G}}{N} \overset{\beta}{\simeq} G$, *ou seja, existe um isomorfismo* $\beta : \frac{\widetilde{G}}{N} \to G$.

O grupo $\widetilde{G}$ *também é chamado uma extensão de* A *por* G.

A seguir apresentamos dois exemplos onde surgem extensões de grupos.

Exemplo 2.3.2. *Seja* $l : A \to \widetilde{G}$ *um mergulho normal.*[7] *Então, tomando* $N = Im(l) \lhd \widetilde{G}$ *e* $G = \frac{\widetilde{G}}{N}$, *temos, pelo Teorema do Homomorfismo:*

$$\frac{A}{Ker(l)} = A \simeq N = Im(l) \ \ e \ \ G \cong \frac{\widetilde{G}}{N}.$$

Portanto, $\widetilde{G}$ *é uma extensão de* G *por* A.

Exemplo 2.3.3. *Seja* $\vartheta : \widetilde{G} \to G$ *um epimorfismo. Então,* $A = N = Ker(\vartheta) \lhd \widetilde{G}$ *e pelo Teorema do Homomorfismo:*

$$\frac{\widetilde{G}}{Ker(\vartheta)} = \frac{\widetilde{G}}{N} \simeq G.$$

Portanto, $\widetilde{G}$ *é uma extensão de* G *por* A.

Uma maneira conveniente de retratar uma extensão de grupos é dada a seguir.

Observação 2.3.4. *Seja* $\widetilde{G}$ *uma extensão de um grupo* G *por um grupo* A. *Então, existem um subgrupo normal* $N \lhd \widetilde{G}$ *e isomorfismos:*

$$\alpha : A \to N \ \ e \ \ \beta : \frac{\widetilde{G}}{N} \to G. \tag{2.3.1}$$

Consideremos as seguintes composições:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "l=i\circ\alpha"'] & N \arrow[r, "i"] & \tilde{G} \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "\vartheta=\beta\circ p"'] & \frac{\tilde{G}}{N} \arrow[r, "\beta"] & G \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

[7]**[4, pág. 07]** Sejam G e N grupos. Um monomorfismo $\gamma : N \to G$ é também chamado um mergulho e dizemos que N é mergulhado em G. **[8, pág. 55]** Um mergulho normal de N é um par (G, γ), onde G é um grupo e $\gamma : N \to G$ é um monomorfismo de N sobre um subgrupo normal de G, ou seja, $Im(\gamma) \lhd G$.

onde i é a aplicação inclusão e p é a projeção natural no grupo quociente. Assim, na seguinte sequência de grupos e homomorfismos de grupos temos:

$$A \xrightarrow{l} \widetilde{G} \xrightarrow{\vartheta} G \tag{2.3.3}$$

1. *l é um monomorfismo. De fato, dados $a, a' \in A$ tais que $l(a) = l(a')$, então $(i \circ \alpha)(a) = (i \circ \alpha)(a')$ e, como i é uma inclusão, temos $\alpha(a) = \alpha(a')$, o que implica $a = a'$, pois α é injetora. Portanto, $Ker(l) = \{1_A\}$.*

2. *ϑ é um epimorfismo, pois dado $g \in G$, como β é epimorfismo, existe $y \in \frac{\widetilde{G}}{N}$ tal que $\beta(y) = g$ e, sendo p sobrejetora, para este $y \in \frac{\widetilde{G}}{N}$, existe $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ tal que $p(\widetilde{g}) = y$. Assim, $\vartheta(\widetilde{g}) = \beta(p(\widetilde{g})) = \beta(y) = g$ e, portanto, $Im(\vartheta) = G$.*

3. *$Im(l) = Ker(\vartheta)$. Mostraremos que $Im(l) = N = Ker(\vartheta)$. De fato, se $y \in Im(l)$, então, existe $a \in A$ tal que $y = l(a) = (i \circ \alpha)(a) = \alpha(a) \in N$. Portanto, $Im(l) \subseteq N$. Reciprocamente, se $y \in N$, então, desde que α é isomorfismo, existe $a \in A$ tal que $y = \alpha(a) = (i \circ \alpha)(a) = l(a)$. Logo, existe $a \in A$ tal que $y = l(a)$, ou seja, $y \in Im(l)$. Assim, $N \subseteq Im(l)$ e, portanto, $Im(l) = N$.*

   Por outro lado, se $w \in Ker(\vartheta)$, então $w \in \widetilde{G}$ e $\vartheta(w) = 1_G$. Logo, $(\beta \circ p)(w) = 1_G$. Desde que β é isomorfismo, temos $p(w) := wN = 1_{\frac{\widetilde{G}}{N}} := 1_{\widetilde{G}}N$, logo, $w \in N$. Assim, $Ker(\vartheta) \subseteq N$. De maneira análoga, concluímos que $N \subseteq Ker(\vartheta)$. Assim, $N = Ker(\vartheta)$ e, portanto, $Im(l) = Ker(\vartheta)$.

A Observação 2.3.4 nos leva à seguinte definição, relacionada com a linguagem das sequências exatas, que são ferramentas especialmente importantes em Álgebra Homológica e em Topologia Algébrica.

Definição 2.3.5. [25, Definition 2] *Consideremos uma sequência:*

$$A_0 \xrightarrow{\alpha_0} A_1 \xrightarrow{\alpha_1} \ldots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} A_n \tag{2.3.4}$$

*onde cada A_i é um grupo e cada α_i é um homomorfismo de grupos, para $i = 0, \ldots, n-1$. Dizemos que a sequência em (2.3.4) é uma **sequência exata** se $Im(\alpha_{i-1}) = Ker(\alpha_i)$, $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Em particular, quando A_0 e A_n são grupos triviais, com $n = 4$, obtemos uma sequência

$$1 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \longrightarrow 1 \qquad (2.3.5)$$

chamada sequência ***exata curta****, na qual estamos suprimindo as notações dos homomorfismos triviais α_0 e α_3 e, pela definição de sequência exata, temos:*

(i) $Im(\alpha_0) = \{1\} = Ker(\alpha_1)$, *logo α_1 é um monomorfismo.*

(ii) $Im(\alpha_1) = Ker(\alpha_2)$.

(iii) $Im(\alpha_2) = Ker(\alpha_3) = A_3$, *pois α_3 é trivial. Assim, α_2 é um epimorfismo.*

Observação 2.3.6. *Consideremos $\widetilde{G}$ uma extensão de um grupo G por um grupo A, ou seja, existem um subgrupo normal $N \lhd \widetilde{G}$ e isomorfismos α, β como segue:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "l=i\circ\alpha"'] & N \arrow[r, "i"] & \widetilde{G} \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "\vartheta=\beta\circ p"'] & \frac{\widetilde{G}}{N} \arrow[r, "\beta"] & G \end{tikzcd} \qquad (2.3.6)$$

onde i é a aplicação inclusão e p é a projeção natural no grupo quociente.
De acordo com a Observação 2.3.4 e a Definição 2.3.5, uma tal extensão pode ser dada por uma sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{l} \widetilde{G} \xrightarrow{\vartheta} G \longrightarrow 1. \qquad (2.3.7)$$

na qual $l = i \circ \alpha$ é um monomorfismo, $\vartheta = \beta \circ p$ é um epimorfismo e $Im(l) = Ker(\vartheta)$.

2.3.2 O teorema principal

Nesta seção, apresentamos um método para encontrar apresentações de grupos.

Suponhamos que sejam dadas uma extensão de grupos

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{l} \widetilde{G} \xrightarrow{\vartheta} G \longrightarrow 1 \qquad (2.3.8)$$

e apresentações $G = \langle X|R\rangle^{\varphi_X}$ e $A = \langle Y|S\rangle^{\varphi_Y}$ para G e A, respectivamente, ou seja:

(i) $\varphi_X : F(X) \to G$ e $\varphi_Y : F(Y) \to A$ são epimorfismos, com $F(X)$ e $F(Y)$ os grupos livres gerados por X e Y, respectivamente.

(ii) $G \cong \frac{F(X)}{\langle R \rangle^{F(X)}}$, onde $\langle R \rangle^{F(X)} = Ker(\varphi_X)$.

(iii) $A \cong \frac{F(Y)}{\langle S \rangle^{F(Y)}}$, onde $\langle S \rangle^{F(Y)} = Ker(\varphi_Y)$.

Usaremos estas apresentações para obter uma apresentação para o grupo $\widetilde{G}$.

Observação 2.3.7. *A fim de obtermos a apresentação desejada para o grupo $\widetilde{G}$, fixaremos a seguir algumas notações.*

I. Geradores de $\widetilde{G}$:

(1) *Denotemos por $\widetilde{Y} = \{\widetilde{y} = l(y);\ \ y \in Y\} = l(Y)$ o conjunto das imagens dos geradores $y \in Y$ do grupo A, sob o homomorfismo l.*

(2) *$\vartheta : \widetilde{G} \to G$ é um epimorfismo, assim para cada $g \in G$, existe $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ tal que $\vartheta(\widetilde{g}) = g$, ou seja, $\widetilde{g} \in \vartheta^{-1}(g)$. Dessa forma, podemos escolher uma aplicação (não necessariamente um homomorfismo) definida por:*

$$\begin{aligned} \mu :\ \ & G \ \ \to \widetilde{G} \\ & g \ \ \mapsto \mu(g) = \widetilde{g}, \quad onde\ \ \vartheta(\widetilde{g}) = g, \quad ou\ seja\ ,\ \widetilde{g} \in \vartheta^{-1}(g). \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Assim, dado um gerador $x \in X \subset G$, seja $\widetilde{x} = \mu(x)$ uma escolha na pré-imagem $\vartheta^{-1}(x)$, isto é, $\vartheta(\widetilde{x}) = x$. Denotemos por:

$$\widetilde{X} = \mu(X) = \{\widetilde{x} = \mu(x);\ x \in X\} \tag{2.3.10}$$

o conjunto de todas as tais pré-imagens. Mostraremos que $\widetilde{X} \cup \widetilde{Y} = \mu(X) \cup l(Y)$ é um conjunto de geradores de $\widetilde{G}$.

II. Relatores: *Existem três tipos de relatores de $\widetilde{G}$, os quais descreveremos a seguir.*

(1) *Denotemos por $\widetilde{S} = \{\widetilde{s};\ \ s \in S\}$ o conjunto das palavras $\widetilde{s}$ em $\widetilde{Y}$ obtidas de S substituindo-se cada y por $\widetilde{y}$, sempre que y aparecer em uma palavra $s \in S$, ou seja,*

se

$$\begin{array}{rcl} s &=& y_{i_1}^{\delta_1}\ldots y_{i_n}^{\delta_n} \in S, \quad onde \;\; y_{i_r} \in Y,\, \delta_i = \pm 1, \; \forall\, i = 1,\ldots,n, \quad então \\ \widetilde{s} &=& \widetilde{y}_{i_1}^{\delta_1}\ldots \widetilde{y}_{i_n}^{\delta_n} \in \widetilde{S}, \quad onde \;\; \widetilde{y}_{i_r} = l(y_{i_r}) \in \widetilde{Y}, \; \forall\, i = 1,\ldots,n. \end{array}$$

Assim, cada $\widetilde{s} \in \widetilde{S} \subset \widetilde{G}$ *é imagem, pelo monomorfismo* l*, de um relator* $s \in S \subset A$.

(2) *Denotemos por* $\widetilde{r} \in \widetilde{G}$ *a palavra obtida de um relator* $r = x_{i_1}^{\epsilon_1}\ldots x_{i_n}^{\epsilon_n} \in R$*, substituindo-se cada* x_{i_r} *por sua escolha* $\widetilde{x_{i_r}} = \mu(x_{i_r})$ *na pré-imagem* $\vartheta^{-1}(x_{ir})$*, como anteriormente. Portanto,*

$$\widetilde{r} = \widetilde{x_{i_1}}^{\epsilon_1}\cdots \widetilde{x_{i_n}}^{\epsilon_n}, \quad onde \;\; \widetilde{x_{i_r}} = \mu(x_{i_r}), \; com \;\; \widetilde{x_{i_r}} \in \vartheta^{-1}(x_{ir}). \tag{2.3.11}$$

Note que, para qualquer $g \in G$*,*

$$(\vartheta\circ\mu)(g) = \vartheta(\mu(g)) = \vartheta(\widetilde{g}) = g = Id_G(g). \tag{2.3.12}$$

Assim, ϑ *leva cada* $\widetilde{r} \in \widetilde{G}$ *no relator correspondente* $r \in R$*, o qual pode ser considerado com sendo a relação* $r = 1_G$[8]*. De fato:*

$$\begin{aligned} \vartheta(\widetilde{r}) &= \vartheta(\underbrace{\widetilde{x_{i_1}}^{\epsilon_1}}_{\mu(x_{i_1})^{\epsilon_1}}\cdots \underbrace{\widetilde{x_{i_n}}^{\epsilon_n}}_{\mu(x_{in})^{\epsilon_n}}) \\ &= \vartheta(\mu(x_{i_1})^{\epsilon_1}\cdots\mu(x_{i_n})^{\epsilon_n}) \\ &= ((\underbrace{\vartheta\circ\mu}_{Id_G})(x_{i_1}))^{\epsilon_1}\cdots((\underbrace{\vartheta\circ\mu}_{Id_G})(x_{i_n}))^{\epsilon_n} \\ &= x_{i_1}^{\epsilon_1}\cdots x_{i_n}^{\epsilon_n} \\ &= r = 1_G. \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Assim, $\widetilde{r} \in Ker(\vartheta) = Im(l)$*, pela exatidão da sequência (2.3.8) e, desde que* $Im(l)$ *é gerada pelo conjunto* $\widetilde{Y}$*, cada* $\widetilde{r}$ *pode ser escrito como uma palavra em* $\widetilde{Y}$*, digamos*

[8] Aqui, por conveniência, estamos substituindo cada relator r pela correspondente relação $r = 1$, conforme Observação (1.3.9).

$\widetilde{r} = \nu_r$ e temos a relação $\widetilde{r}\ \nu_r^{-1} = 1_{\widetilde{G}}$. Obtemos assim um segundo conjunto de relatores:

$$\widetilde{R} = \{\widetilde{r}\ {\nu_r}^{-1};\ r \in R\}. \tag{2.3.14}$$

(3) *Temos que $Im(l)$ é um subgrupo normal de $\widetilde{G}$*[9]*, ou seja, $\widetilde{g}^{-1}\ \widetilde{y}\ \widetilde{g} \in Im(l)$, $\forall\, \widetilde{g} \in \widetilde{G}$ e $\forall\, \widetilde{y} \in Im(l)$. Em particular:*

$$\widetilde{x}^{-1}\ \widetilde{y}\ \widetilde{x} \in Im(l),\ \forall\ \widetilde{x} \in \widetilde{X},\ \forall\ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}. \tag{2.3.15}$$

Assim, cada conjugado em (2.3.15) *é uma palavra em $\widetilde{Y}$, digamos,*

$$\widetilde{x}^{-1}\ \widetilde{y}\ \widetilde{x} = \omega_{x,y},\ \forall\ \widetilde{x} \in \widetilde{X},\ \forall\ \widetilde{y} \in \widetilde{Y}. \tag{2.3.16}$$

E temos a relação $\widetilde{x}^{-1}\ \widetilde{y}\ \widetilde{x}\ \omega_{x,y}^{-1} = 1_{\widetilde{G}}$. Dessa forma, obtemos nosso terceiro conjunto de relatores:

$$\widetilde{T} = \{\widetilde{x}^{-1}\ \widetilde{y}\ \widetilde{x}\ \omega_{x,y}^{-1};\ x \in X,\ y \in Y\}. \tag{2.3.17}$$

Assumiremos sem demonstração o seguinte resultado, que mostra que os conjuntos de geradores e relatores definidos na Observação 2.3.7, determinam uma apresentação para o grupo $\widetilde{G}$.

Teorema 2.3.8. [25, Proposition 1] *Com as mesmas notações da Observação 2.3.7, o grupo $\widetilde{G}$ possui apresentação*

$$\left\langle \widetilde{X},\ \widetilde{Y} \mid \widetilde{R},\ \widetilde{S},\ \widetilde{T} \right\rangle. \tag{2.3.18}$$

Corolário 2.3.9. [25, Corollary 1] *Dados dois grupos $G = \langle X; R\rangle$ e $A = \langle Y; S\rangle$ e um homomorfismo $\alpha : G \to Aut(A)$ tal que $\alpha(x)(y) = \omega_{x,y}$ é uma palavra em $\widetilde{Y}$, com $x \in X, y \in Y$. Então, o produto semidireto possui a seguinte apresentação:*

$$A \rtimes_\alpha G = \left\langle X, Y; R, S,\ \{x^{-1}yx\omega_{x,y}^{-1}; x \in X, y \in Y\} \right\rangle. \tag{2.3.19}$$

[9]Pois $Im(l) = Ker(\vartheta) \lhd \widetilde{G}$.

Corolário 2.3.10. [**25, Corollary 2**] *Seja $\widetilde{G}$ uma extensão de G por A. Se G e A são finitamente apresentados, então $\widetilde{G}$ também será finitamente apresentado.*

2.4 Uma Sequência Exata Curta Especial

Nesta seção, apresentamos uma sequência exata curta especial, a qual será fundamental no Capítulo 4, para mostrar que o grupo das tranças puras é um produto semidireto de grupos livres. Para fixarmos as notações apropriadas para os resultados apresentados nesta seção, consideremos a seguinte

Observação 2.4.1. *Dados dois grupos N, H e um homomorfismo $\varphi : H \to Aut(N)$, o qual denotaremos por $h \mapsto \varphi(h) = \varphi_h : N \to N$, consideremos o produto semidireto $N \rtimes_\varphi H$. A operação de multiplicação sobre o grupo $N \rtimes_\varphi H$, dada em 2.2.13, também pode ser definida como segue:*

$$\begin{aligned} \cdot : \quad (N \times H) \times (N \times H) &\to (N \times H) \\ ((n_1, h_1), (n_2, h_2)) &\mapsto (n_1 \varphi_{h_1}(n_2), h_1 h_2)). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Por conveniência, nesta seção, estaremos adotando as notações e a definição da multiplicação no produto semidireto dadas na Observação 2.4.1.

Definição 2.4.2. *Dizemos que uma sequência exata curta de grupos e homomorfismos de grupos*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1 \tag{2.4.2}$$

cinde, se existe um homomorfismo de grupos $\gamma : H \to G$ tal que $\alpha \circ \gamma = Id_H$, isto é, α possui inversa à direita.

Exemplo 2.4.3. *O grupo $G = N \rtimes_\varphi H$, produto semidireto de H por N, se encaixa em uma sequência exata curta que cinde,*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] & G \arrow[r, "\pi"] & H \arrow[r] \arrow[l, bend left, "i_2"] & 1 \end{tikzcd}$$

na qual $i_1(n) = (n, 1_H)$; $\pi(n, h) = h$ *e* $i_2 : H \to G$ *é definida por* $i_2(h) = (1_N, h)$ *e satisfaz:*

$$(\pi \circ i_2)(h) = \pi(i_2(h)) = \pi(1_N, h) = h = Id_H(h), \ \forall h \in H. \tag{2.4.3}$$

Lema 2.4.4. *Dada uma sequência exata curta de grupos e homomorfismos de grupos:*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 1, \tag{2.4.4}$$

as seguintes condições são equivalentes:

(i) *A sequência cinde.*

(ii) *Existe um homomorfismo* $\varphi : H \to Aut(N)$ *e um isomorfismo* $\Omega : N \rtimes_\varphi H \to G$ *que torna o seguinte diagrama comutativo,*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft (I)"] & N \rtimes_\varphi H \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Omega"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft (II)"] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"'] & G \arrow[r, "\alpha"'] & H \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{2.4.5}$$

no qual a sequência $1 \to N \xrightarrow{i_1} N \rtimes_\varphi H \xrightarrow{\pi} H \to 1$ *é a sequência exata curta dada no Exemplo 2.4.3.*

Demonstração:

Vejamos que (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $\gamma : H \to G$ tal que $\alpha \circ \gamma = Id_H$. Definamos:

$$\begin{aligned} \varphi : H &\longrightarrow Aut(N) \\ h &\longmapsto \varphi(h) := \varphi_h, \end{aligned}$$

onde $\varphi_h : N \longrightarrow N$ é definido por

$$\varphi_h(n) = \beta^{-1}(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})). \tag{2.4.6}$$

Note que, $\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1}) \in Ker(\alpha) = Im(\beta)$, pois

$$\begin{aligned}\alpha(\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})) &= \underbrace{\alpha(\gamma(h))}_{h}\underbrace{\alpha(\beta(n))}_{1_H}\underbrace{\alpha(\gamma(h^{-1}))}_{h^{-1}}\\ &= h\cdot 1_H\cdot h^{-1}\\ &= 1_H\end{aligned}$$

e $\beta^{-1}\mid_{Im(\beta)}$ é um isomorfismo. Assim, φ_h é um automorfismo com inversa $\varphi_{h^{-1}}$. Além disso, φ é um homomorfismo de grupos.

Vejamos que existe um isomorfismo $\Omega : N \rtimes_\varphi H \longrightarrow G$. Definimos $\Omega : N \rtimes_\varphi H \longrightarrow G$ pela expressão:

$$\Omega(n,h) = \beta(n)\gamma(h).$$

Ω é um homomorfismo de grupos, desde que:

$$\begin{aligned}\Omega((n_1,h_1)\cdot(n_2,h_2)) &= \Omega(n_1\varphi_{h_1}(n_2), h_1h_2)\\ &= \beta(n_1\varphi(h_1)(n_2))\gamma(h_1h_2)\\ &= \beta(n_1)\underbrace{\beta(\varphi(h_1)(n_2))}_{\text{por (2.4.6)}}\gamma(h_1)\gamma(h_2)\\ &= \beta(n_1)\gamma(h_1)\beta(n_2)\underbrace{\gamma(h_1^{-1})\gamma(h_1)}_{1}\gamma(h_2)\\ &= \beta(n_1)\gamma(h_1)\beta(n_2)\gamma(h_2)\\ &= \Omega(n_1,h_1)\Omega(n_2,h_2).\end{aligned}$$

Vejamos que Ω é injetivo. De fato, se $\Omega(n,h) = 1_G$, então $\beta(n)\gamma(h) = 1_G$. Aplicando α a ambos lados, desta igualdade obtemos,

$$\underbrace{\alpha(\beta(n))}_{1_H}\underbrace{\alpha(\gamma(h))}_{h} = \alpha(1_G) = 1_H,$$

assim, $h = 1_H$. Então, $\beta(n)\cdot 1_G = 1_G$, assim $n = 1_N$ pois β é injetor.

Agora, mostremos que Ω é sobrejetor. Seja $g \in G$ e considere $h := \alpha(g) \in H$. Note que

$g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1})) \in Ker(\alpha) = Im(\beta)$, pois

$$\begin{aligned} \alpha(g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1}))) &= \alpha(g)\alpha(\gamma(\alpha(g^{-1}))) \\ &= \alpha(g)\alpha(g^{-1}) \\ &= 1_H. \end{aligned}$$

Assim, defina $n := \beta^{-1}(g \cdot \gamma(\alpha(g^{-1}))) \in N$. Então,

$$\begin{aligned} \Omega(n,h) &= \beta(n)\gamma(h) \\ &= g \cdot \underbrace{\gamma(\alpha(g^{-1}))\gamma(\alpha(g))}_{1_G} \\ &= g. \end{aligned}$$

Portanto $\Omega : N \rtimes_{\varphi} H \longrightarrow G$ é um isomorfismo.

Mostremos que o diagrama (2.4.5) é comutativo.

- Comutatividade do quadrado (I): Para qualquer $n \in N$

$$\begin{aligned} \Omega \circ i_1(n) &= \Omega(n, 1_H) \\ &= \beta(n)\gamma(1_H) \\ &= \beta(n), \end{aligned}$$

  assim $\Omega \circ i_1 = \beta$.

- Comutatividade do quadrado (II): Para quaisquer $(n,h) \in N \rtimes_{\varphi} H$

$$\begin{aligned} \alpha \circ \Omega(n,h) &= \alpha(\beta(n)\gamma(h)) \\ &= \underbrace{\alpha(\beta(n))}_{1_H}\alpha(\gamma(h)) \\ &= \alpha(\gamma(h)) \\ &= h \\ &= \pi(n,h), \end{aligned}$$

  assim $\alpha \circ \Omega = \pi$. Portanto, segue a comutatividade do diagrama (2.4.5).

Finalmente, $(ii) \Longrightarrow (i)$. Definimos $\gamma := \Omega \circ i_2 : H \longrightarrow G$ homomorfismo, satisfazendo

$$\alpha \circ \gamma = \underbrace{\alpha \circ \Omega}_{(II)} \circ i_2 = \pi \circ i_2 = Id_H.$$

Assim, a sequência (2.4.4) cinde.

❑

Observação 2.4.5. *Note que se no Lema 2.4.4 consideramos a categoria de grupos abelianos, então o homomorfismo $\varphi : H \to Aut(N)$ é trivial, desde que:*

$$\varphi_h(n) = \beta^{-1}(\underbrace{\gamma(h)\beta(n)\gamma(h^{-1})}_{em\ G\ que\ é\ abeliano}) = n, \quad \forall h \in H.$$

Assim, pela Observação 2.2.8.

$$N \rtimes_\varphi H = N \oplus H = N \times H,$$

e obtemos o conhecido "Lema da cisão".

Lema 2.4.6 (Lema da cisão)**.** *Dada uma sequência exata curta de grupos abelianos e homomorfismos de grupos*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\beta} G \xrightarrow{\alpha} H \longrightarrow 0, \tag{2.4.7}$$

as seguintes condições são equivalentes:

(i) *A sequência cinde.*

(ii) *Existe um isomorfismo $\theta : N \oplus H \longrightarrow G$.*

Capítulo

3

Grupos de Tranças e Espaços de Configurações

Este capítulo contém resultados básicos sobre grupos de tranças e espaços relacionados. O nosso principal objetivo é dar uma descrição geométrica do grupo de tranças no disco e identificá-lo com o grupo fundamental do espaço de configurações de $\mathbb{R}^2$, $C_n(\mathbb{R}^2)$.

Primeiramente, apresentamos a definição de uma trança geométrica como sendo um sistema de n cordas entre dois planos paralelos no 3-espaço Euclidiano, sendo esta a definição original dada por Artin em 1952. Também consideramos a definição equivalente de uma trança, sugerida por Fox em 1962 [19], como sendo um laço no espaço de configurações de um conjunto de n pontos no plano Euclidiano. Mostraremos que o conjunto das classes de equivalência de todas as tranças geométricas sobre n cordas determina um grupo, que denotaremos por $B(n)$, chamado o *grupo de tranças de Artin sobre n cordas* ou *grupo de tranças no disco.* Além disso, introduziremos uma apresentação deste grupo em termos de geradores e relatores no famoso Teorema da Apresentação de Artin.

As principais referências utilizadas neste capítulo são [3], [20], [26], e [37].

3.1 Tranças Geométricas

Denotemos por $\mathbb{E}^3$ o espaço Euclidiano 3-dimensional, o qual será identificado com $\mathbb{R}^3$, o espaço vetorial real de dimensão 3, através da escolha de um sistema de coordenadas (x, y, z), no qual o eixo Oz positivo aponta verticalmente para baixo, conforme a Figura 3.1. Consideremos dois planos horizontais paralelos em $\mathbb{E}^3$, com z-coordenadas constantes $z = z_0$ e $z = z_1$, respectivamente, onde $z_0 < z_1$. O plano $z = z_0$ será chamado ***plano***

superior e o plano $z = z_1$ será chamdo ***plano inferior***. Fixemos n pontos distintos $P_1, \ldots, P_n$ sobre uma reta no plano superior e sejam $P_1', \ldots, P_n'$, as suas projeções ortogonais no plano inferior, como ilustrado na Figura 3.1.

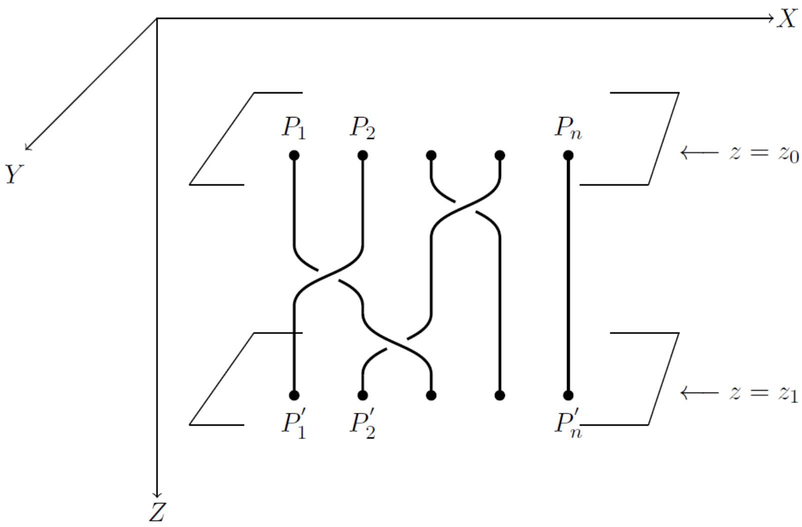

Figura 3.1: Representação geométrica de uma trança.

Definição 3.1.1. [20, Definition 1.1] *Uma **trança geométrica** sobre n-cordas (ou uma n-trança) β é um sistema de n arcos $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\}$ mergulhados em $\mathbb{E}^3$, no qual o i-ésimo arco $\mathscr{A}_i$ conecta o ponto P_i do plano superior com o ponto $P'_{\tau(i)}$ no plano inferior para alguma permutação τ de $\{1, \ldots, n\}$, satisfazendo:*

(i) *Cada arco $\mathscr{A}_i$ intersecta cada plano paralelo intermediário entre os planos superior e inferior exatamente uma vez.*

(ii) *Os arcos $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ intersectam cada plano paralelo intermediário entre os planos superior e inferior em exatamente n pontos distintos.*

*A permutação τ será chamada a **permutação da trança**. O arco $\mathscr{A}_i$ será chamado a i-**ésima corda, ou o** i-**ésimo fio, na trança** β. Também usaremos a notação $(\mathscr{A}, \tau)$ para uma trança β, sempre que for conveniente destacar o seu sistema de arcos $\mathscr{A}$ e a sua permutação τ.*

Observação 3.1.2. *Um arco em $\mathbb{E}^3$ pode ser visto como sendo a imagem de um mergulho $\mathscr{A}_i : [0,1] \to \mathbb{E}^3$, ou seja, como sendo a imagem de um caminho injetor do intervalo* *unitário* $[0,1]$ *em* $\mathbb{E}^3$. *Usaremos a mesma notação para um arco* $\mathscr{A}_i$ *e seu mergulho correspondente.*

Duas tranças serão consideradas iguais se elas forem homotópicas, isto é, se uma puder ser transformada na outra por uma deformação de suas cordas, com as extremidades fixadas, de tal forma que cada um dos passos intermediários desta deformação produz ainda uma trança geométrica, ou seja, desde que as cordas sejam duas a duas disjuntas, cada corda intersecte cada plano horizontal em um único ponto e as extremidades permaneçam fixadas, durante todos os estágios da deformação. Formalmente, temos a seguinte:

Definição 3.1.3. [20, Definition 1.2] *Duas* n*-tranças com sistemas de arcos* $\mathscr{A}^0 = \{\mathscr{A}_1^0, \ldots, \mathscr{A}_n^0\}$ *e* $\mathscr{A}^1 = \{\mathscr{A}_1^1, \ldots, \mathscr{A}_n^1\}$, *ambas com mesma permutação* τ, *são chamadas* ***tranças equivalentes*** *ou* ***homotópicas***, *se existe uma homotopia por meio de tranças geométricas, com permutação* τ, *de* $\mathscr{A}^0$ *para* $\mathscr{A}^1$. *Isso significa que existem* n *funções contínuas*

$$F_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \textit{satisfazendo:}$$

$$\begin{cases} F_i(t,0) = \mathscr{A}_i^0(t), \\ F_i(t,1) = \mathscr{A}_i^1(t), \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{3.1.1}$$

$$\begin{cases} F_i(0,s) = P_i, \\ F_i(1,s) = P'_{\tau(i)}, \end{cases} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{3.1.2}$$

e de tal forma que se definirmos $\mathscr{A}_i^s : [0,1] \to \mathbb{E}^3$ *por* $\mathscr{A}_i^s(t) = F_i(t,s)$, *então* $\mathscr{A}^s = \{\mathscr{A}_1^s, \ldots, \mathscr{A}_n^s\}$ *será uma* n*-trança geométrica, com permutação* τ, $\forall\ 0 \leqslant s \leqslant 1$. *Neste caso, usaremos a notação:* $(\mathscr{A}^0, \tau) \sim (\mathscr{A}^1, \tau)$.

Observação 3.1.4. *A relação de tranças equivalentes dada na Definição 3.1.3 determina uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as tranças geométricas, como segue.*

Propriedade Reflexiva: *Mostremos que* $(\mathscr{A}, \tau) \sim (\mathscr{A}, \tau)$, *para qualquer trança* $(\mathscr{A}, \tau)$. *Para cada* $i = 1, \ldots, n$, *seja* $F_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3$ *definida por* $F_i(t,s) = \mathscr{A}_i(t), \forall\, t, s \in$

$[0,1]$. *Desde que cada caminho* $\mathscr{A}_i : [0,1] \to \mathbb{E}^3$ *é uma função contínua, então cada* F_i *é contínua e satisfaz, para todo* $t, s \in [0,1]$*:*

$$\begin{cases} F_i(t,0) = \mathscr{A}_i(t). \\ F_i(t,1) = \mathscr{A}_i(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} F_i(0,s) = \mathscr{A}_i(0) = P_i. \\ F_i(1,s) = \mathscr{A}_i(1) = P'_{\tau(i)}. \end{cases}$$

Propriedade Simétrica: *Suponhamos que* $(\mathscr{A}^0, \tau) \sim (\mathscr{A}^1, \tau)$. *Então, existem* n *funções contínuas* $F_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3$, *com* $1 \leqslant i \leqslant n$, *tais que para todo* $0 \leqslant t, s \leqslant 1$*:*

$$\begin{cases} F_i(t,0) = \mathscr{A}_i^0(t). \\ F_i(t,1) = \mathscr{A}_i^1(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} F_i(0,s) = P_i. \\ F_i(1,s) = P'_{\tau(i)}. \end{cases}$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, *definimos* $G_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3$ *por* $G_i(t,s) = F_i(t, 1-s)$. *Então, para todo* $0 \leqslant t, s \leqslant 1$, *temos:*

$$\begin{cases} G_i(t,0) = F_i(t,1) = \mathscr{A}_i^1(t), \\ G_i(t,1) = F_i(t,0) = \mathscr{A}_i^0(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} G_i(0,s) = F_i(0,1-s) = P_i, \\ G_i(1,s) = F_i(1,1-s) = P'_{\tau(i)}. \end{cases}$$

Portanto, $(\mathscr{A}^1, \tau) \sim (\mathscr{A}^0, \tau)$.

Propriedade Transitiva: *Suponhamos que* $(\mathscr{A}^0, \tau) \sim (\mathscr{A}^1, \tau)$ *e que* $(\mathscr{A}^1, \tau) \sim (\mathscr{A}^2, \tau)$. *Então, existe uma homotopia* F *de* $\mathscr{A}^0$ *para* $\mathscr{A}^1$ *e uma homotopia* G *de* $\mathscr{A}^1$ *para* $\mathscr{A}^2$, *ou seja, existem funções contínuas:*

$$F_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3 \ \ e \ \ G_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3, \ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

satisfazendo as condições em (3.1.1) e (3.1.2). Para cada $i = 1, \ldots, n$, *definimos a função* $H_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{E}^3$ *por:*

$$H_i(t,s) = \begin{cases} F_i(t, 2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ G_i(t, 2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Então, pelo Lema da Colagem, cada H_i é contínua e, além disso, para todo $i = 1\dots,n$:

$$\begin{cases} H_i(t,0) = F_i(t,0) = \mathscr{A}_i^0(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ H_i(t,1) = G_i(t,1) = \mathscr{A}_i^2(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

$$H_i(0,s) = \begin{cases} F_i(0,2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ G_i(0,2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} P_i, & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ P_i, & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

$$H_i(1,s) = \begin{cases} F_i(1,2s), & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}, \\ G_i(1,2s-1), & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} P'_{\tau(i)}, & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{2} \\ P'_{\tau(i)}, & \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Portanto, $(\mathscr{A}^0,\tau) \sim (\mathscr{A}^2,\tau)$.

Observação 3.1.5. *Por conveniência, em termos de notação, não faremos distinção entre uma trança β e sua classe de equivalência segundo a relação de homotopia de tranças geométricas. Desde que cada arco em uma trança geométrica pode ser visto como a imagem de um caminho injetor de $[0,1]$ em $\mathbb{E}^3$, sempre que for conveniente, usaremos a notação $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ para representar uma n trança* (ou sua classe de homotopia)*, onde β_i representa a i-ésima corda da trança β* (ou, equivalentemente, a imagem de um caminho injetor de $[0,1]$ em $\mathbb{E}^3$).

Observação 3.1.6. *Podemos assumir, a menos de equivalência, que uma trança β consiste apenas de arcos "poligonais" e que os cruzamentos entre os arcos são transversais, se projetarmos a trança ortogonalmente sobre o plano em $\mathbb{E}^3$ contendo os pontos $P_1,\dots,P_n$, $P_1',\dots,P_n'$. Uma tal projeção fornece uma figura padrão da trança β, chamada projeção padrão da trança . Também, podemos assumir que os cruzamentos dos arcos ocorrem em diferentes níveis e em tais cruzamentos serão indicadas quais cordas estão passando por cima e por baixo, como na Figura 3.2.*

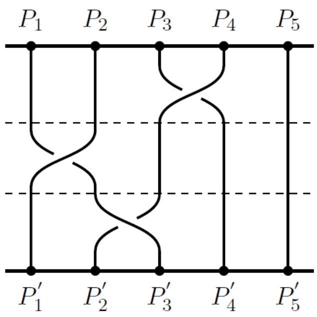

Figura 3.2: Projeção padrão de uma n-trança β.

3.1.1 Geradores Artin

Denotemos por $B(n)$ o conjunto de todas as classes de equivalência de tranças geométricas com n-cordas. Este conjunto será equipado com uma estrutura natural de grupo, a qual definiremos nesta seção. Primeiramente, observando a trança β dada na Figura 3.2, podemos notar que ela possui uma "decomposição" em termos de certas tranças especiais, chamadas tranças elementares, as quais serão os geradores do grupo $B(n)$, de acordo com a definição a seguir.

Definição 3.1.7. [20] *Para cada $1 \leqslant i \leqslant n-1$, denotaremos por σ_i a **n-trança geométrica elementar**, na qual a* **i-ésima corda cruza por cima a $(i+1)$-ésima corda** *uma única vez e todas as outras cordas são percorridas do ponto inicial P_i ao ponto final P_i', sem se cruzarem, ou seja, todas as cordas, exceto em algum par vizinho de cordas, são arcos verticais ligando P_i a P_i' e o par vizinho de arcos $\mathscr{A}_j, \mathscr{A}_{j+1}$ permuta os pontos iniciais e finais, i.e., $\mathscr{A}_j$ é o arco que liga P_j a P_{j+1}' e $\mathscr{A}_{j+1}$ é o arco que liga P_{j+1} a P_j'* [10].

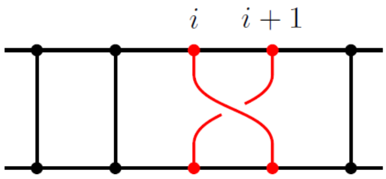

Figura 3.3: Representação de uma n-trança geométrica elementar σ_i.

[10] Uma trança geométrica elementar também pode ser definida como segue: para cada $1 \leqslant i \leqslant n-1$, denotaremos por σ_i a **n-trança geométrica elementar**, na qual a **i-ésima corda cruza por baixo a $(i+1)$-ésima corda**, uma única vez, e todas as outras cordas são percorridas do ponto inicial P_i ao ponto final P_i', sem se cruzarem, conforme representado na Figura 4.5. No Capítulo 4, por conveniência, adotaremos esta última definição para as tranças elementares, seguindo a nomenclatura fixada em [12] e [28].

Definição 3.1.8. [20] *Sejam β_1 e β_2 duas n-tranças geométricas. Definimos o* ***produto*** *(ou a composição) de β_1 e β_2 como segue. Primeiramente "identificamos" o plano inferior $z = z_1$ da trança β_1 com o plano superior da trança β_2, de tal forma que os pontos finais da trança β_1 sejam identificados com os pontos iniciais da trança β_2. Em seguida, removemos o plano ao longo do qual as duas tranças foram identificadas. Finalmente, comprimimos o sistema de arcos resultantes (via uma deformação contínua) até que tais arcos situem-se entre os planos superior $z = z_0$ e inferior $z = z_1$, conforme a Figura 3.4.*

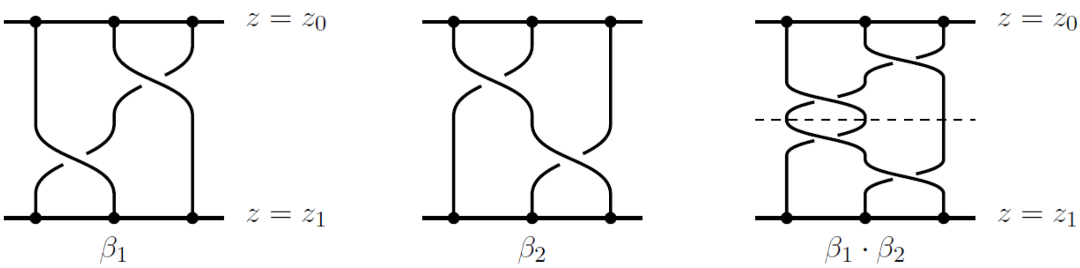

Figura 3.4: O produto entre duas tranças.

Usaremos a notação $\beta_1 \cdot \beta_2$ para representar o produto das n-tranças β_1 e β_2.

Definição 3.1.9. [20] *A* ***n-trança trivial****, ϵ, é uma trança na qual cada arco $\mathscr{A}_i$ conecta o ponto inicial P_i do plano superior com o ponto final P_i' no plano inferior, $\forall i = 1, \ldots, n$, sem cruzamentos. A projeção padrão de ϵ é representada na Figura 3.5.*

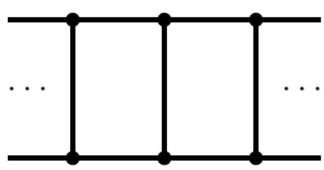

Figura 3.5: Trança trivial.

Definição 3.1.10. [20] *A* ***trança inversa*** *de uma n-trança β, é definida como sendo a imagem refletida em um espelho da trança β com respeito a um plano horizontal entre os planos superior e inferior. Usaremos a notação β^{-1} para representar a trança inversa de uma trança β. A projeção padrão de β^{-1} é representada na Figura 3.6.*

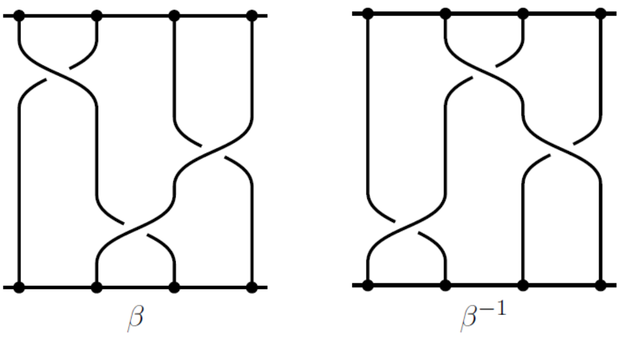

Figura 3.6: Trança inversa.

Observação 3.1.11. *Assumiremos, sem demonstração, que o produto de n-tranças geométricas dado na Definição 3.1.8 induz uma operação bem definida no conjunto de todas as classes de equivalência de n-tranças geométricas $B(n)$ e que tal operação satisfaz os axiomas de grupo. O elemento neutro para o produto em $B(n)$ é a classe de equivalência da trança trivial ϵ e, para a classe de equivalência de uma trança β, o seu elemento inverso em $B(n)$ será a classe de equivalência de β^{-1}. Para uma prova, vide* [**11, Proposition 1.7**].

Proposição 3.1.12. [**20**] *$(B(n), \cdot\,)$ é um grupo, chamado o* ***Grupo de Tranças Artin sobre n-cordas****.*

Observação 3.1.13. *Podemos imaginar uma trança contida no interior de um cubo, conforme Figura 3.7, cujas faces superior e inferior são homeomorfas a um disco $\mathbb{D}^2$ e, por esta razão, o grupo $B(n)$ é também chamado o* ***Grupo de Tranças no Disco****.*

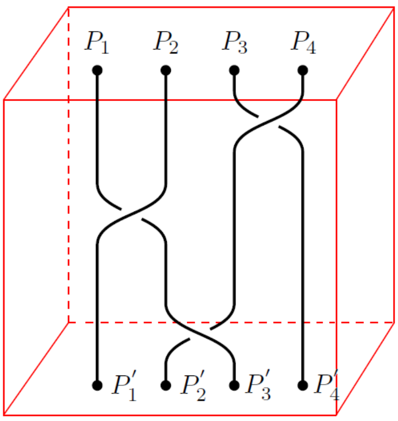

Figura 3.7: Representação de uma trança no cubo.

Observação 3.1.14. *Para a trança elementar* σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, *a trança inversa* σ_i^{-1} *é obtida fazendo-se (na projeção padrão) com que a* i*-ésima corda passe por baixo da* $(i+1)$*-ésima corda, em vez de passar por cima, e todas as outras cordas são percorridas, do ponto inicial* P_i *ao ponto final* P_i', *sem se cruzarem.*

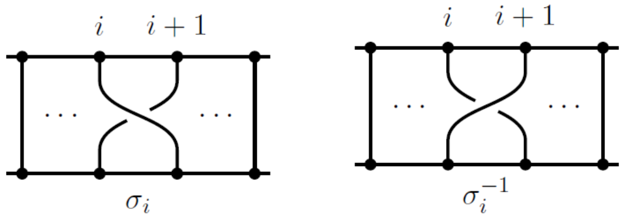

Figura 3.8: Inversa da trança elementar.

Exemplo 3.1.15. *A* 5*-trança* β, *cuja projeção é dada na Figura 3.9 ou, mais precisamente, sua classe de equivalência, pode ser escrita como um produto de tranças elementares* σ_i *e suas inversas.*

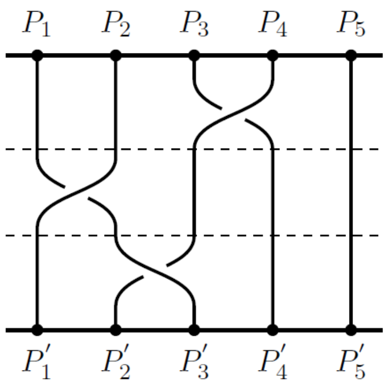

Figura 3.9: Uma 5-trança β decomposta como um produto $\beta = \sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2$.

Observação 3.1.16. [20] *É intuitivo que a classe de equivalência de qualquer* n*-trança pode ser escrita como um produto das* n*-tranças elementares* σ_i, *para* $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *Isso significa que as* n*-tranças elementares* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ *geram o grupo* $B(n)$, *ou seja,* $B(n) = \langle \sigma_i \; ; \; i = 1, \ldots, n-1 \rangle$. *Uma ideia da prova deste fato, pode ser dada como segue. Denotemos por* m *o número de cruzamentos entre as cordas de uma* n*-trança* β. *Vejamos, por indução sobre* m, *que* β *se escreve como um produto de tranças elementares, para* *todo $m \geqslant 0$. Se $m = 0$, então a trança β é formada por arcos que conectam os pontos P_i no plano superior aos pontos P_i' no plano inferior, sem cruzamentos. Assim, podemos escrever $\beta = \sigma_i\sigma_i^{-1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Se $m = 1$, existe um único cruzamento entre as cordas de β, assim, $\beta = \sigma_i$ ou $\beta = \sigma_i^{-1}$, para algum $i = 1, \ldots, n-1$. Suponhamos que o resultado seja válido para $m = k-1$, ou seja, uma n-trança β com $m = k-1$ cruzamentos entre suas cordas pode ser escrita como um produto de tranças elementares. Agora, dada uma n-trança β com $m = k = 1 + (k-1)$ cruzamentos, podemos escrever*

$$\beta = \beta' \cdot \beta'', \tag{3.1.3}$$

onde β' é uma n-trança com um único cruzamento e β'' é uma n-trança com $(k-1)$ cruzamentos, conforme a Figura 3.10.

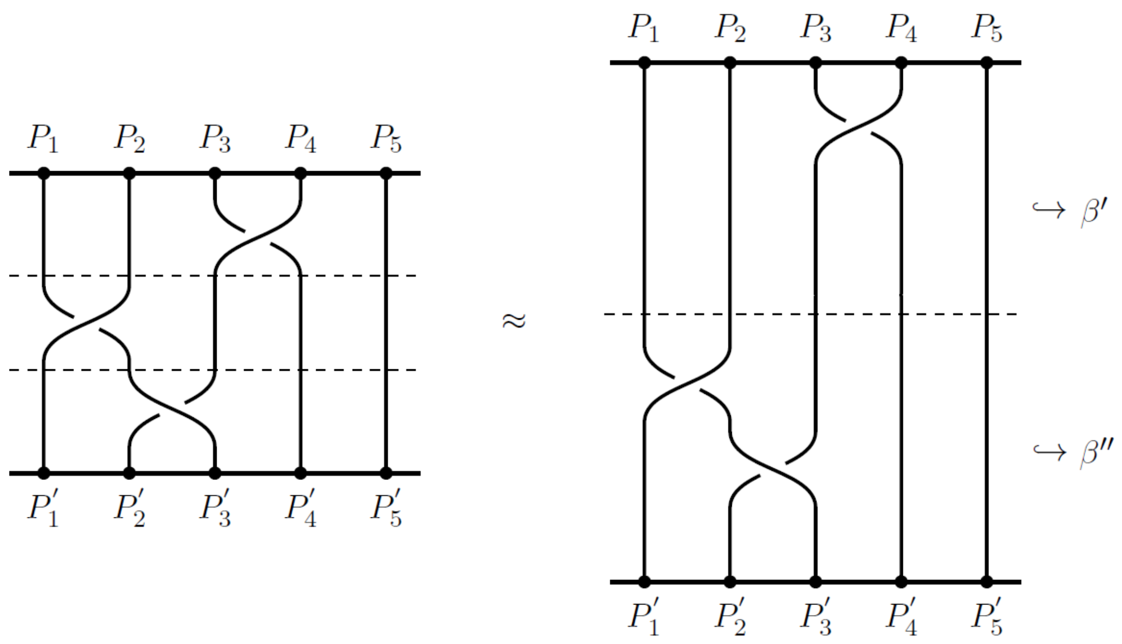

Figura 3.10: Decomposição de uma trança.

Segue da hipótese de indução e do primeiro passo indutivo, correspondente a $m = 1$, que β pode escrita como um produto de tranças elementares.

Observação 3.1.17. *As tranças elementares σ_i, para $1 \leqslant i \leqslant n-1$ também são chamadas geradores Artin do grupo $B(n)$.*

3.1.2 Algumas relações em B(n)

Já vimos no Capítulo 1, Seção 1.3, que é conveniente descrever um grupo em termos de um conjunto de geradores, listando algumas relações que ocorrem entre estes geradores, através de uma apresentação para um tal grupo. Olharemos agora para algumas relações entre os geradores Artin do grupo $B(n)$, definidos na seção anterior.

Observação 3.1.18. *São válidas as seguintes relações entre os geradores $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.*

(1) *Se $|i-j| \geqslant 2$ e $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, desde que o par consistindo das cordas i e $i+1$ não interfere no par consistindo das cordas j e $j+1$, temos a relação a seguir, ilustrada na Figura 3.11.*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \ \ se\ |i-j| \geqslant 2, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1 \tag{3.1.4}$$

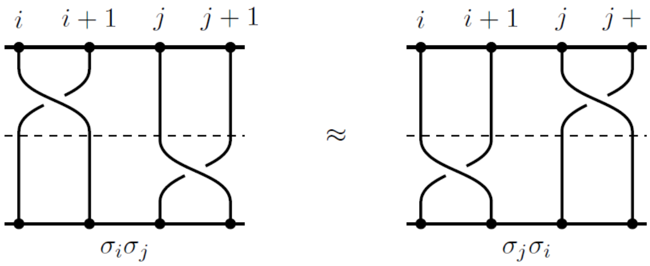

Figura 3.11: Relação em $B(n)$.

(2) *Outra relação em $B(n)$, ilustrada na Figura 3.12 é dada por:*

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \qquad se\ 1 \leqslant i \leqslant n-2. \tag{3.1.5}$$

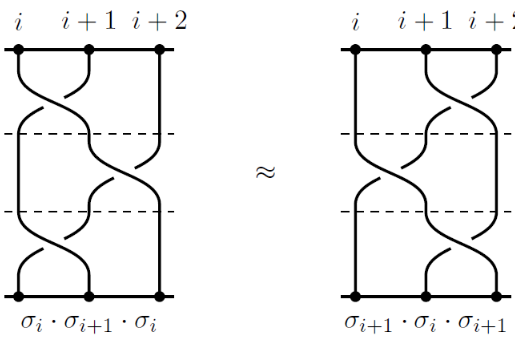

Figura 3.12: Outra relação em $B(n)$.

Artin, em seu primeiro trabalho sobre tranças publicado em 1925, *Theorie der Zöpfe* [1], demonstrou que as duas relações descritas na Observação 3.1.18, geram todas as relações entre os elementos de $B(n)$. Isto não é trivial. A seguir, enunciaremos o **Teorema da Apresentação de Artin para o grupo de tranças** $B(n)$, o qual será provado posteriormente.

Teorema 3.1.19. [**20, Theorem 1.5**] *O grupo $B(n)$ das tranças geométricas sobre n cordas admite uma apresentação com geradores $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ e relações:*

(1) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n-1;$

(2) $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2.$

3.2 Grupos de Tranças e Espaços de Configurações

Veremos que os grupos de tranças estão intimamente relacionados com os espaços de configurações. Nesta seção, definiremos os espaços de configurações de uma variedade topológica conexa e apresentaremos alguns resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho. Alguns resultados relacionados aos espaços de configurações serão assumidos sem demonstração, desde que dependem de tópicos que fogem ao escopo deste trabalho. Quando for este o caso, apresentaremos as referências adequadas para uma compreensão mais aprofundada de tais tópicos.

A seguinte definição preliminar, captura de forma precisa a ideia intuitiva de que uma variedade topológica deve se comportar "localmente" como um espaço Euclidiano.

Definição 3.2.1. [**30, pág. 38**] *Um espaço topológico M é chamado um **espaço localmente Euclidiano de dimensão** n, se cada ponto de M possui uma vizinhança* (um conjunto aberto) *em M que é homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.*

Definição 3.2.2. [**30, pág. 39**] *Uma variedade topológica n-dimensional M é um espaço de Hausdorff segundo enumerável*[11] *que é localmente Euclidiano de dimensão n.*

[11] Um espaço topológico é chamado um espaço segundo enumerável se ele admite uma base enumerável para a sua topologia.

3.2.1 Espaços de configurações

Definição 3.2.3. [20] *Seja M uma variedade topológica conexa de dimensão maior ou igual a 2. Para algum inteiro $n \geqslant 1$, considere o subconjunto $F_n(M)$ do produto cartesiano $M^n = M \times \ldots \times M$, de n cópias da variedade M, consistindo de todas as n-uplas com coordenadas distintas duas a duas, isto é,*

$$F_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in M^n;\ x_i \neq x_j,\ \ \text{para quaisquer}\ \ i, j = 1, \ldots, n,\ \text{com}\ i \neq j\}.$$

$F_n(M)$ é chamado ***n-ésimo Espaço de Configurações*** *para um conjunto de n pontos (ordenados) em M.*

Observação 3.2.4. *Podemos munir $F_n(M)$ com a topologia induzida da topologia produto sobre $M^n = M \times \ldots \times M$ e, dessa forma, $F_n(M)$ é um sub-espaço topológico de M^n. É possível mostrar que $F_n(M)$ é aberto em M^n e, portanto, $F_n(M)$ é uma variedade topológica.*

O resultado a seguir garante que o espaço de configurações de uma variedade topológica conexa de dimensão pelo menos 2 é conexo por caminhos. Deste modo, não precisaremos nos preocupar com a dependência do ponto base quando tratarmos do seu grupo fundamental. Para demonstração, vide [7], *Configuration Spaces and Braid Groups.*

Proposição 3.2.5. [**7, Lema 2.8**] *Seja M uma variedade conexa (sem bordo) tal que M permanece conexa quando perfurada em $k - 1 \geqslant 0$ pontos. Então, $F_k(M)$ é conexo por caminhos. Se M for uma variedade conexa de dimensão pelo menos 2, todos os seus espaços de configurações são conexos por caminhos. Em particular, os grupos de homotopia de $F_n(M)$ são independentes do ponto base.*

Definição 3.2.6. [20] *Dado um inteiro $m \geqslant 0$, denotemos por $Q_m = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ um subconjunto arbitrário fixado de M, consistindo de m pontos $q_i \in M$, dois a dois distintos. No caso $m = 0$, consideramos Q_0 como sendo o conjunto vazio. Definimos:*

$$F_{m,n}(M) = F_n(M \backslash Q_m). \tag{3.2.1}$$

Observação 3.2.7. *O espaço de configurações $F_{m,n}(M)$ independe da escolha do subconjunto Q_m* (vide [**16, pág. 111**])*. Note que:*

$$F_{0,n}(M) = F_n(M \backslash Q_0) = F_n(M) \quad e \quad F_{m,1}(M) = F_1(M \backslash Q_m) = M \backslash Q_m. \tag{3.2.2}$$

A seguir, consideramos o conceito de fibrados localmente triviais. Informalmente, um fibrado localmente trivial é um espaço que, localmente, se comporta como um espaço produto (no mesmo sentido em que uma variedade é localmente Euclidiana), mas que globalmente pode possuir uma estrutura topológica diferente. Especificamente, a similaridade entre um espaço E e um espaço produto $B \times F$ é definida usando-se uma aplicação contínua e sobrejetora $p : E \to B$, a qual, localmente, se comporta exatamente como uma projeção, como segue.

Definição 3.2.8. [39, Definition 1.1] *Um* ***fibrado localmente trivial*** *é uma quádrupla (E, B, p, F) constituída dos seguintes ingredientes:*

(i) *um espaço topológico E, chamado espaço total;*

(ii) *um espaço topológico B, chamado espaço base;*

(iii) *uma função contínua e sobrejetora $p : E \to B$, chamada projeção;*

(iv) *Um espaço topológico F, tal que para cada $b \in B$, o espaço $p^{-1}(b)$ é homeomorfo a F, o qual é chamado a fibra sobre b.*

Tais espaços e a aplicação p devem satisfazer a seguinte condição:

• *para cada $b \in B$, existe um conjunto aberto $U \subset B$, com $b \in U$, e um homeomorfismo $\phi : U \times F \to p^{-1}(U)$ tal que que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

no qual p_1 é a projeção na primeira coordenada, ou seja, $(p \circ \phi)(x, y) = p_1(x, y) = x$, para todo $(x, y) \in U \times F$.

Em topologia, uma fibração é uma generalização da noção de um fibrado localmente trivial. No caso de uma fibração, as fibras não precisam ser o mesmo espaço, mas elas serão homotopicamente equivalentes. Fibrações não possuem necessariamente a estrutura local de um espaço produto que define um fibrado, mas uma fibração deve satisfazer uma condição adicional (a Propriedade do Levantamento de Homotopia), a qual garante que ela se comporta como um fibrado, do ponto de vista da teoria de homotopia.

Definição 3.2.9. [9, Definition 6.7] *Sejam E, B, X espaços topológicos, $p : E \to B$ uma aplicação contínua e $I = [0, 1]$. Dizemos que p possui a* ***Propriedade do Levantamento de Homotopia*** *(P.L.H) com respeito ao espaço X:*

(i) *se para qualquer homotopia $F : X \times I \to B$*

(ii) *e se para toda função contínua $\tilde{f}_0 : X \to E$, tal que $\tilde{f}_0$ é um levantamento de $f_0 = F|_{X\times\{0\}}$, ou seja, $f_0 = p \circ \tilde{f}_0$, com X homeomorfo a $X \times \{0\}$,*

existe uma homotopia $\tilde{F} : X \times I \to E$ que é um levantamento de F, ou seja, $F = p \circ \tilde{F}$, satisfazendo $\tilde{f}_0 = \tilde{F}|_{X\times\{0\}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, "\tilde{F}"] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & B
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{f}_0"] \arrow[dr, "f_0"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "p"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Uma função contínua $p : E \to B$ satisfazendo a Propriedade do Levantamento de Homotopia (P.L.H) com respeito a qualquer espaço topológico X é chamada uma ***fibração de Hurewicz*** *ou simplesmente uma* ***fibração*** .

Observação 3.2.10. *Seja $p : E \to B$ uma fibração. Então, B será chamado espaço base, E será chamado espaço total da fibração e, para cada $b \in B$, $F_b = p^{-1}(b)$ será chamado a fibra de p sobre b. Embora F_b possa variar para diferentes escolhas de $b \in B$, se B for conexo por caminhos, a Propriedade do Levantamento de Homotopia restringe o tipo de homotopia de F_b, ou seja, se B for conexo por caminhos, então todas as fibras $F_b = p^{-1}(b)$ são homotopicamente equivalentes* (vide [**9, Theorem 6.12**]).

Definição 3.2.11. [21, pág. 376] *Uma função contínua $p : E \to B$ satisfazendo* *a Propriedade do Levantamento de Homotopia com respeito a k-discos D^k, para todo $k \geqslant 0$[12], também é chamada uma **fibração de Serre**[13].*

Proposição 3.2.12. [21, Proposition 4.48] *Um fibrado localmente trivial $p : E \to B$ possui a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a discos, logo é uma fibração de Serre.*

A seguir, enunciamos um importante resultado que garante a existência de uma sequência exata longa associada a uma fibração, a qual envolve os grupos de homotopia de ordem superior [14].

Teorema 3.2.13. [9, Corolário 6.44] *Seja $p : E \to B$ uma fibração, com fibra $F := p^{-1}(b_0) \subseteq E$ e $x \in F$. Então, a sequência:*

$$\cdots \to \pi_n(F,x) \to \pi_n(E,x) \to \pi_n(B,b_0) \to \pi_{n-1}(F,x) \to \pi_{n-1}(E,x) \to \cdots$$
$$\to \pi_1(F,x) \to \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,b_0) \to \pi_0(F,x) \to \pi_0(E,x) \to \pi_0(B,b_0)$$

é exata.

Observação 3.2.14. *No Teorema 3.2.13 devemos ter cuidado com a exatidão na extremidade à direita da sequência, desde que $\pi_1(F,x)$, $\pi_1(E,x)$ e $\pi_1(B,b_0)$ nem sempre são abelianos e $\pi_0(F,x)$, $\pi_0(E,x)$ e $\pi_0(B,b_0)$ são meramente conjuntos.*

O resultado a seguir foi provado por Fadell e Neuwirth [**16, Theorem 1**] em 1962. Para outras demonstrações, vide também [**20, Teorema 2.1**] e [**26, Lemma 1.26**].

Teorema 3.2.15. [16, Theorem 1] *Seja M uma variedade conexa por caminhos, com dimensão $\dim(M) \geqslant 2$. Suponhamos que $1 \leqslant r < n$, com $n \geqslant 2$. Então, a aplicação*

$$p : F_{m,n}(M) \to F_{m,r}(M) \qquad (3.2.3)$$
$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_r)$$

[12] Ou equivalentemente, com respeito a n cubos $I^n = I \times \ldots \times I$, ou equivalentemente, CW complexos.

[13] Em homenagem ao importante papel desempenhado por este conceito na tese de Jean-Pierre Serre. Este trabalho estabeleceu em Topologia Algébrica o uso das chamadas sequências espectrais e claramente separou as noções de fibrados e fibrações da noção de feixes (ambos estes conceitos tratados implicitamente no trabalho pioneiro de Jean Leray).

[14] Para definição dos grupos de homotopia de ordem superior, vide Apêndice A.

é uma fibração de Serre, com fibra $F_{m+r,n-r}(M)$.

Observação 3.2.16. *Conforme* **[35, Exemplo 2 - pág. 362]**, *o complementar de dois pontos em* $\mathbb{R}^2$ *tem o mesmo tipo de homotopia que a figura oito, ou seja, é a união de duas circunferências com um ponto em comum. Mais geralmente, o complementar de* m *pontos em* $\mathbb{R}^2$ *tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de* m *circunferências, ou seja, é a união de* m *cópias da esfera* S^1 *com um único ponto em comum, conforme Figura 3.13. Este espaço possui grupos de homotopia triviais, em dimensões* $i \geqslant 2$ (vide [41, Corollary - pág. 86]). *Portanto, os grupos de homotopia* $\pi_i(\mathbb{R}^2 \backslash Q_m)$ *são triviais, para* $i \geqslant 2$.

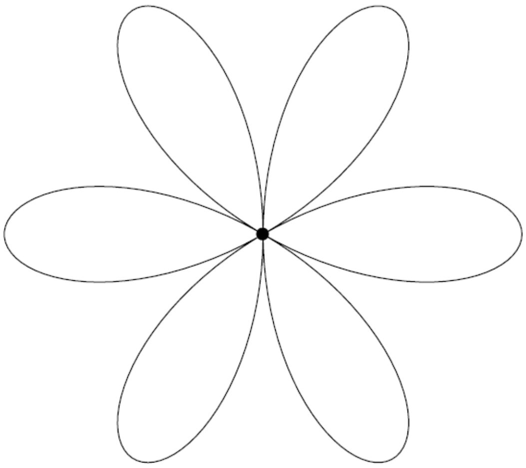

Figura 3.13: Buquê de m círculos.

O próximo resultado segue do Teorema 3.2.15, e foi provado por Fadell e Neuwirth em **[16, Corolário 2.1]**.

Corolário 3.2.17 (Fadell e Neuwirth). **[20, Corollary 2.3]** *Para o espaço de configurações* $F_n(\mathbb{R}^2)$, *de* n *pontos ordenados no plano* $\mathbb{R}^2$, *temos* $\pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = 0$, *se* $i \geqslant 2$. *Mais geralmente, para todo* $n \geqslant 1$ *e* $m \geqslant 0$, *segue que* $\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) = 0$, *se* $i \geqslant 2$.

Demonstração:
Consideremos a seguinte representação dos espaços de configurações no diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) \arrow[r] & F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2) \arrow[r] \arrow[d] & \ldots \arrow[r] & F_{2,n-2}(\mathbb{R}^2) \arrow[r] \arrow[d] & F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2) \arrow[r] \arrow[d] & F_{0,n}(\mathbb{R}^2) = F_n(\mathbb{R}^2) \arrow[d] \\
& F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2) & & F_{2,1}(\mathbb{R}^2) & F_{1,1}(\mathbb{R}^2) & F_{0,1}(\mathbb{R}^2)
\end{tikzcd}$$

no qual as setas verticais representam as fibrações do Teorema (3.2.15), e as setas horizontais representam as inclusões das fibras nos correspondentes espaços totais das fibrações.

Para os espaços $F_{m,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash Q_m$, todos os grupos de homotopia em dimensões $i \geqslant 2$ são triviais, conforme Observação 3.2.16. Considerando as sequências de homotopia para as fibrações, a partir da esquerda para a direita no diagrama anterior, mostraremos que no estágio final:

$$\pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = \pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) = 0, \text{ se } i \geqslant 2.$$

Com efeito, para a fibração $p : F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2) \to F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2)$, com fibra $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$ temos a seguinte sequência exata:

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{\pi_i(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \underbrace{\pi_i(F_{n-2,1}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \longrightarrow \ldots$$

e, para $i \geqslant 2$, $\pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)) = 0$.

Agora, para a fibração $p : F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2) \to F_{n-3,1}(\mathbb{R}^2)$, com fibra $F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2)$, temos:

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{\pi_i(F_{n-2,2}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \underbrace{\pi_i(F_{n-3,1}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \longrightarrow \ldots$$

e, para $i \geqslant 2$, $\pi_i(F_{n-3,3}(\mathbb{R}^2)) = 0$.

Finalmente, para a fibração $p : F_{0,n}(\mathbb{R}^2) \to F_{0,1}(\mathbb{R}^2)$, com fibra $F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2)$, temos a seguinte sequência exata:

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{\pi_i(F_{1,n-1}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \xrightarrow{i_*} \pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \underbrace{\pi_i(F_{0,1}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \longrightarrow \ldots$$

e, para $i \geqslant 2$, $\pi_i(F_{0,n}(\mathbb{R}^2)) = \pi_i(F_n(\mathbb{R}^2)) = 0$.

Mais geralmente, para a fibração $p : F_{0,n+m}(\mathbb{R}^2) \to F_{0,m}(\mathbb{R}^2)$, com fibra $F_{m,n}(\mathbb{R}^2)$, temos a seguinte sequência exata:

$$\ldots \longrightarrow \underbrace{\pi_{i+1}(F_{0,m}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \longrightarrow \pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \underbrace{\pi_i(F_{0,n+m}(\mathbb{R}^2))}_{=0} \xrightarrow{p_*} \pi_i(F_{0,m}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow \ldots$$

e, para $i \geqslant 2$, $\pi_i(F_{m,n}(\mathbb{R}^2)) = 0$.

❏

3.3 O Grupo de Tranças como Grupo Fundamental de um Espaço de Configurações

Seja M uma variedade conexa de dimensão $\dim(M) \geqslant 2$. Denotemos por Σ_n o grupo simétrico sobre n elementos, isto é, o grupo de todas as permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Existe uma ação natural à direita de Σ_n sobre o espaço de configurações $F_n(M)$, definida pela permutação das coordenadas, como segue:

$$\mu : F_n(M) \times \Sigma_n \to F_n(M)$$
$$((x_1, \ldots, x_n), \sigma) \mapsto \mu((x_1, \ldots, x_n), \sigma) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Observação 3.3.1. *Mostremos que μ é uma ação à direita de Σ_n sobre $F_n(M)$. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in F_n(M)$ e $Id., \gamma, \sigma \in \Sigma_n$, onde $Id.$ denota a permutação identidade, então:*

(i) $\mu(x, Id) = x \cdot Id. = (x_{Id(1)}, \ldots, x_{Id(n)}) = (x_1, \ldots, x_n) = x.$

(ii)
$$\begin{aligned}
\mu(\mu(x,\sigma),\gamma) &= (x \cdot \sigma) \cdot \gamma \\
&= (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \cdot \gamma \\
&= (y_1, \ldots, y_n) \cdot \gamma \\
&= (y_{\gamma(1)}, \ldots, y_{\gamma(n)}) \\
&= (x_{\sigma(\gamma(1))}, \ldots, x_{\sigma(\gamma(n))}) \\
&= (x_{(\sigma\circ\gamma)(1)}, \ldots, x_{(\sigma\circ\gamma)(n)}) \\
&= x \cdot (\sigma \circ \gamma) = \mu(x, \sigma \circ \gamma)
\end{aligned}$$

onde, $y_i = x_{\sigma_{(i)}}$. Além disso, desde que todas as coordenadas para pontos em $F_n(M)$ são duas a duas distintas, temos que μ é uma ação livre. De fato, para qualquer $(x_1, \ldots, x_n) \in F_n(M)$, temos que $x_i \neq x_j$, sempre que $i \neq j$. Assim, $\forall\ \sigma \in \Sigma_n$

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \sigma(i) = i = Id(i),\ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Observação 3.3.2. *A permutação de coordenadas também define uma ação à esquerda do grupo simétrico* Σ_n *sobre o espaço de configurações* $F_n(M)$.

Denotemos o espaço de órbitas de $F_n(M)$ pela ação livre μ por $C_n(M)$. Assim:

$$C_n(M) = \frac{F_n(M)}{\Sigma_n}.$$

As órbitas dos elementos em $F_n(M)$, sob a ação livre μ, consistem das n-uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ de pontos $x_i \in M$, dois a dois distintos, onde duas n-uplas estão na mesma órbita se elas diferem apenas por uma permutação de suas coordenadas. Assim, podemos pensar em $C_n(M)$ como o espaço de todas as configurações de um conjunto não ordenado de n pontos em M, dois a dois distintos. O espaço $C_n(M)$ é chamado o ***Espaço de Configurações*** para um conjunto de n pontos não ordenados em M.

Consideremos a projeção natural de $F_n(M)$ sobre o espaço de órbitas $C_n(M)$:

$$p_n : F_n(M) \to \frac{F_n(M)}{\Sigma_n} = C_n(M).$$

a qual define uma aplicação de recobrimento, pelo Teorema B.0.33, desde que Σ_n é um grupo finito agindo livremente sobre $F_n(M)$, que é Hausdorff. Além disso, pela Proposição 3.2.5, $F_n(M)$ é conexo por caminhos, logo é conexo e segue de [21, Example 4.42, pág. 377], que p_n é uma fibração com fibra Σ_n. Temos ainda da Observação 3.2.4 que $F_n(M)$ é uma variedade topológica e que o espaço de órbitas $C_n(M)$ é Hausdorff, pelo Teorema B.0.34, pois Σ_n é um grupo compacto. Assim segue da Observação B.0.35, que $C_n(M)$ é uma variedade topológica.

O nosso próximo objetivo será averiguar como os espaços de configurações podem ser usados para definir uma noção de tranças em M.

Escolhemos um ponto base $\tilde{c_0} \in F_n(M)$ e fixemos $c_0 = p_n(\tilde{c_0})$ como ponto base em $C_n(M)$. Consideremos um elemento arbitrário $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$, o grupo fundamental de $C_n(M)$, representado pelo laço fechado:

$$f : [0,1] \to C_n(M)$$

com $f(0) = f(1) = c_0$.

Como $p_n : F_n(M) \to C_n(M)$ é um aplicação de recobrimento, segue da propriedade do levantamento de caminhos [15] que existe um único levantamento $\widetilde{f} : [0,1] \to F_n(M)$ de f tal que $\widetilde{f}(0) = \tilde{c_0}$, com $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n)$.

$$\begin{tikzcd} & (F_n(M), \widetilde{c}_0) \arrow[d, "p_n"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (C_n(M), c_0) \end{tikzcd}$$

Assim, podemos pensar em $\tilde{f}$ como n caminhos $\widetilde{f}_i : [0,1] \to M$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ tais que $\widetilde{f}_i(t) \neq \widetilde{f}_j(t)$, $\forall i \neq j$ e para todo $t \in [0,1]$. Observemos que a n-upla ordenada $(\widetilde{f}_1(1), \ldots, \widetilde{f}_n(1))$ em M é apenas uma permutação σ da n-upla ordenada $(\widetilde{f}_1(0), \ldots, \widetilde{f}_n(0))$ em M, pois como $p_n \circ \tilde{f} = f$, temos

$$p_n(\widetilde{f}(0)) = f(0) = c_0 = f(1) = p_n(\widetilde{f}(1)).$$

Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos mergulhos $\mathscr{A}_i : [0,1] \to M \times [0,1]$, onde

$$\mathscr{A}_i(t) = (\widetilde{f}_i(t), t), \ \forall t \in [0,1].$$

O sistema de arcos $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n\}$ é um sistema de n-cordas no espaço produto $M \times [0,1]$ satisfazendo os requisitos previstos na Definição 3.1.1 para tranças geométricas, ou seja,

(i) Cada arco $\mathscr{A}_i$ intersecta $M \times \{t\}$ exatamente uma vez, pois $\mathscr{A}_i(t) = (\widetilde{f}_i(t), t)$ e para cada t, $\mathscr{A}_i(t)$ está em um plano diferente.

(ii) Os arcos $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ intersectam $M \times \{t\}$ em exatamente n pontos diferentes, pois $\mathscr{A}_i(t) \neq \mathscr{A}_j(t)$, se $i \neq j$.

Em particular, o sistema de cordas $(\mathscr{A}, \sigma)$ em $M \times [0,1]$ conecta os pontos $P_1, \ldots, P_n$ em $M \times \{0\}$, os quais são as coordenadas de $\tilde{c_0} \in F_n(M)$, ao correspondente conjunto de

[15] **[34, Lema 54.1]** Seja $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ uma aplicação de recobrimento, com $p(e_0) = b_0$. Então, qualquer caminho $f : [0,1] \to B$, começando em b_0, possui um único levantamento $\tilde{f} : [0,1] \to E$, começando em e_0.

pontos $P_1', \ldots, P_n'$ em $M \times \{1\}$, de acordo com a permutação σ que leva $\widetilde{f}(0)$ em $\widetilde{f}(1)$, i.e.,

$$\begin{cases} \mathscr{A}_i(0) = (\widetilde{f}_i(0), 0) = P_i \in M \times \{0\}; \\ \mathscr{A}_i(1) = (\widetilde{f}_i(1), 1) = (\widetilde{f}_{\sigma(i)}(0), 1) = P'_{\sigma(i)} \in M \times \{1\}. \end{cases}$$

A classe de homotopia de $\mathscr{A}$, definida em analogia com a Definição (3.1.3), está bem definida, pois depende somente de β e não do representante particular $f : [0,1] \to C_n(M)$, originalmente escolhido.

Seguindo a nomenclatura introduzida por Fox [19], chamaremos $\mathscr{A}$ (ou, por uma questão de simplicidade, a própria classe de homotopia original $\beta \in \pi_1(C_n(M), c_0)$), uma *trança com permutação σ em M sobre n cordas* e o grupo $\pi_1(C_n(M), c_0)$ será chamado *o grupo de tranças sobre n cordas em M*. O grupo $\pi_1(F_n(M), \tilde{c_0})$ será chamado o *grupo Fox de tranças coloridas* (ou tranças puras) *sobre n cordas em M*. Tranças Coloridas ou tranças puras são exatamente as tranças com permutação trivial das cordas.

Agora, vamos considerar a variedade M como sendo o plano Euclidiano $\mathbb{E}^2$, mergulhado no espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$, de forma que depois da identificação de $\mathbb{E}^3$ com $\mathbb{R}^3$, o plano $\mathbb{E}^2$ corresponde a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Escolha pontos

$$P_1 = (1,0,0),\ P_2 = (2,0,0), \ldots, P_n = (n,0,0), \text{ no plano } \ z = 0$$
$$P_1' = (1,0,1),\ P_2' = (2,0,1), \ldots, P_n' = (n,0,1), \text{ no plano } \ z = 1.$$

Consideremos a projeção ao quociente

$$p_n : F_n(\mathbb{E}^2) \to \frac{F_n(\mathbb{E}^2)}{\Sigma_n} = C_n(\mathbb{E}^2)$$

e sejam $\tilde{c_0} = (P_1, \ldots, P_n) \in F_n(\mathbb{E}^2)$ o ponto base em $F_n(\mathbb{E}^2)$ e $c_0 = p_n(\tilde{c_0}) \in C_n(\mathbb{E}^2)$ o ponto base correspondente em $C_n(\mathbb{E}^2)$. Então, a trança $\mathscr{A}$ em $\mathbb{E}^2$, no sentido de Fox, correspondendo à classe de homotopia $\beta \in \pi_1(C_n(\mathbb{E}^2), c_0)$, como definida anteriormente, é uma trança geométrica sobre n cordas, no sentido de Artin, como na Definição (3.1.1). Reciprocamente, é possível definir uma trança Fox a partir de uma trança Artin.

Teorema 3.3.3. [20, Theorem 3.1] *O grupo de tranças Artin, $B(n)$ pode ser canonicamente identificado com o grupo fundamental $\pi_1(C_n(\mathbb{E}^2), c_0)$.*

3.4 Apresentação do Grupo de Tranças Artin

De acordo com a Seção 3.1.1, o grupo $B(n)$ de tranças sobre n cordas é gerado pelas tranças elementares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, onde σ_i apenas permuta as cordas i e $i+1$. Além disso, foram obtidas as relações (3.1.4) e (3.1.5) entre esses elementos. A seguir, apresentaremos as ideias envolvendo a demonstração do Teorema 3.1.19, conforme [**20, Chapter 1, Section 4**].

Usaremos a identificação $B(n) = \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ descrita anteriormente. Fixemos

$$P_1 = (1,0), P_2 = (2,0), \ldots, P_n = (n,0) \tag{3.4.1}$$

como o conjunto de pontos iniciais para as cordas nas n-tranças. Então, a n-trança elementar σ_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, pode ser descrita pelo caminho

$$\bar{f} : [0,1] \to F_n(\mathbb{R}^2)$$

definido por $\bar{f}(t) = (P_1, \ldots, P_{i-1}, \bar{f}_i(t), \bar{f}_{i+1}(t), P_{i+2}, \ldots, P_n)$, onde

$$\bar{f}_i(t) = (i + \sin\frac{\pi}{2}t, \sin\pi t) \quad \text{ e } \quad \bar{f}_{i+1}(t) = (i + \cos\frac{\pi}{2}t, -\sin\pi t).$$

Desde que:

$$\bar{f}(0) = (P_1, \ldots, P_{i-1}, \bar{f}_i(0), \bar{f}_{i+1}(0), P_{i+2}, \ldots, P_n),$$

onde,

$$\begin{cases} \bar{f}_i(0) = (i + \sin\frac{\pi}{2}\cdot 0, \sin\pi\cdot 0) = (i,0) = P_i \\ \bar{f}_{i+1}(0) = (i + \cos\frac{\pi}{2}\cdot 0, -\sin\pi\cdot 0) = (i+1,0) = P_{i+1}, \end{cases}$$

temos:

$$\bar{f}(0) = (P_1, \ldots, P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n).$$

Além disso, desde que

$$\bar{f}(1) = (P_1, \ldots, P_{i-1}, \bar{f}_i(1), \bar{f}_{i+1}(1), P_{i+2}, \ldots, P_n),$$

onde

$$\begin{cases} \bar{f}_i(1) = (i + \sin\frac{\pi}{2}\cdot 1, \sin\pi\cdot 1) = (i+1,0) = P_{i+1} \\ \bar{f}_{i+1}(1) = (i + \cos\frac{\pi}{2}\cdot 1, -\sin\pi\cdot 1) = (i,0) = P_i. \end{cases}$$

temos:

$$\bar{f}(1) = (P_1, \ldots, P_{i+1}, P_i, P_{i+2}, \ldots, P_n).$$

O caminho $\bar{f} : [0,1] \to F_n(\mathbb{R}^2)$ é projetado por p_n no laço $f : [0,1] \to C_n(\mathbb{R}^2)$, com $f(0) = f(1) = c_0$ e este laço representa $\sigma_i \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$.

O resultado a seguir foi enunciado anteriormente como Teorema 3.1.19 e foi provado por Artin em 1925 em *Teorie der Zöpfe* [1]. A ideia da demonstração apresentada aqui está contida em detalhes em **[20, págs. 18-24]** e é devida a Fadell e van Buskirk (*The Braid Groups of* $\mathbb{E}^2$ *and* S^2 [17]).

Teorema 3.4.1 (Fadell e Buskirk)**.** *O grupo $B(n)$ das tranças geométricas sob n cordas admite uma apresentação com os seguintes geradores $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ e as seguintes relações:*

(1) $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n-1.$

(2) $\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-2.$

Ideia da demonstração: Apresentamos a seguir um esquema da demonstração.

Passo 1: Existe um bem definido homomorfismo:

$$\iota_n : B_n \to B(n) \tag{3.4.2}$$

onde B_n é um grupo abstrato com apresentação dada por geradores $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1}$ e relações:

(1) $\tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \cdot \tilde{\sigma}_i$, se $|i-j| \geqslant 2,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n-1$

(2) $\tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_{i+1}$, se $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

O homomorfismo dado em (3.4.2) leva $\tilde{\sigma}_i$ em σ_i.

Passo 2: ι_n é um isomorfismo.

Note que a sequência de homotopia para a fibração $p_n : F_n(\mathbb{R}^2) \to C_n(\mathbb{R}^2)$ se reduz, pelo Corolário 3.2.17, à seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), \tilde{c}_0) \xrightarrow{\rho_n} \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \longrightarrow 1. \tag{3.4.3}$$

Se usarmos a identificação $B(n) = \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$ e denotarmos $H(n)$ por $\pi_1(F_n(\mathbb{R}^2), \tilde{c}_0)$, então os elementos em $H(n)$ podem ser identificados com as classes de equivalência de tranças geométricas sobre n cordas com permutação trivial das cordas (as chamadas *tranças puras* ou *coloridas*[16]). O homomorfismo τ_n na sequência exata curta (3.4.3) é definido como sendo a permutação de uma trança $\beta \in \pi_1(C_n(\mathbb{R}^2), c_0)$. O homomorfismo ρ_n é induzido pela aplicação p_n. Com estas identificações, a sequência exata curta em (3.4.3), torna-se:

$$1 \longrightarrow H(n) \xrightarrow{\rho_n} B(n) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \longrightarrow 1. \tag{3.4.4}$$

a qual é chamada a *sequência do grupo de tranças* e o homomorfismo τ_n é chamado o *homomorfismo permutação.*

Observação 3.4.2. *Observemos que $Ker(\tau_n)$ é um subgrupo normal de $B(n)$, o qual será denotado por $PB(n)$, chamado o grupo de tranças puras sobre n cordas. Segue da exatidão da sequência (3.4.4) que $\rho_n : H(n) \to B(n)$ é injetora, logo, $Ker(\rho_n)$ é trivial e, pelo Teorema do Isomorfismo,*

$$H(n) = \frac{H(n)}{Ker(\rho_n)} \overset{iso.}{\cong} Im(\rho_n). \tag{3.4.5}$$

Portanto, de (3.4.5) e da exatidão da sequência (3.4.4):

$$H(n) \cong Im(\rho_n) = Ker(\tau_n) = PB(n). \tag{3.4.6}$$

Para o grupo abstrato B_n, mostra-se que existe um bem definido epimorfismo natural,

$$\tilde{\tau}_n : B_n \to \Sigma_n$$

dado por $\tilde{\tau}_n(\tilde{\sigma}_i) = (i, i+1)$, a transposição em Σ_n, ou seja, a permutação que apenas troca

[16] Ou seja, se β é uma trança pura, então a permutação associada a β é a permutação identidade.

i com $i+1$.

Denotemos por $H_n = Ker(\tilde{\tau}_n)$ e seja $\tilde{\rho}_n : H_n \to B_n$ o homomorfismo inclusão. Assim, para o grupo abstrato B_n temos a sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow H_n \xrightarrow{\tilde{\rho}_n} B_n \xrightarrow{\tilde{\tau}_n} \Sigma_n \longrightarrow 1.$$

Desde que também $\tau_n(\sigma_i) = (i, i+1)$ é a transposição $(i, i+1) \in \Sigma_n$, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H_n \arrow[r, "\tilde{\rho}_n"] \arrow[d, "\iota'_n"'] & B_n \arrow[r, "\tilde{\tau}_n"] \arrow[d, "\iota_n"'] & \Sigma_n \arrow[r] \arrow[d, "Id."'] & 1 \\
1 \arrow[r] & H(n) \arrow[r, "\rho_n"'] & B(n) \arrow[r, "\tau_n"'] & \Sigma_n \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

no qual as linhas horizontais são sequências exatas curtas e onde ι'_n é a restrição de ι_n ao subgrupo H_n em B_n. Usando o Lema dos Cinco (vide Lema B.0.27), obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.4.3. [**20, Lemma 4.1**] *O homomorfismo $\iota_n : B_n \to B(n)$ é um isomorfismo se, e somente se, $\iota'_n : H_n \to H(n)$ é um isomorfismo.*

A ideia é provar que $\iota'_n : H_n \to H(n)$ é um isomorfismo e usando o Lema 3.4.3, obtemos o isomorfismo desejado. Para mostrar que $\iota'_n : H_n \to H(n)$ é um isomorfismo, precisamos conhecer uma apresentação de H_n, a qual será dada no lema a seguir, o qual assumiremos sem demonstração (para detalhes de uma prova, vide [**20, Appendix 1**]).

Lema 3.4.4. [**20, Lemma 4.2**] *O grupo H_n admite uma apresentação com geradores:*

$$a_{i,j} = \widetilde{\sigma}_{j-1}\widetilde{\sigma}_{j-2}\ldots\widetilde{\sigma}_{i+1}\widetilde{\sigma}_i^2\widetilde{\sigma}_{i+1}^{-1}\ldots\widetilde{\sigma}_{j-2}^{-1}\widetilde{\sigma}_{j-1}^{-1},\ \textit{para}\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\ \textit{e relações}:$$

$$a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s} = \begin{cases} a_{i,j}, & \textit{se}\ \ i<r<s<j\ \ \textit{ou}\ \ r<s<i<j \\ a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ \ r<i=s<j \\ a_{r,j}a_{s,j}a_{i,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ \ i=r<s<j \\ a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}a_{i,j}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ \ r<i<s<j. \end{cases}$$

A n-trança geométrica que corresponde a a_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, isto é, a trança

$$\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\cdots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}, \tag{3.4.7}$$

apenas passa a corda j uma vez em torno da corda i, primeiro por baixo e depois por cima, e passa por baixo de cada corda intermediária duas vezes, conforme a Figura 3.14.

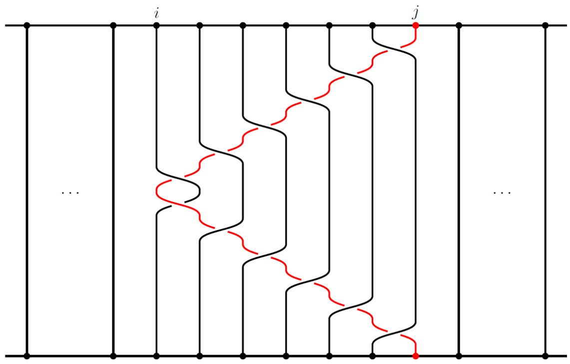

Figura 3.14: $\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$

A trança inversa correspondente a a_{ij}^{-1} faz o mesmo que a trança a_{ij}, exceto que agora a corda j passa em sentido oposto pela corda i, primeiro por cima e depois por baixo.

As tranças puras podem ser escritas como um produto das tranças correspondentes a a_{ij} e suas inversas. Esse processo é conhecido como **técnica de pentear tranças** (vide Figura 3.15). Em outras palavras, o sistema de tranças correspondente ao sistema $\{a_{ij}; 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ é um sistema de geradores para $H(n)$.

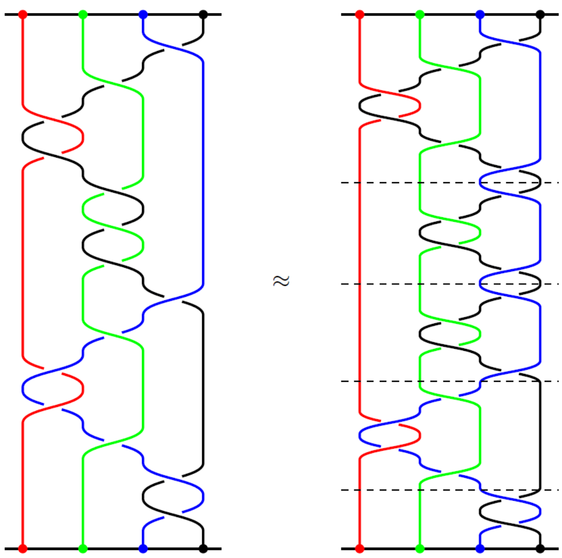

Figura 3.15: 4-trança correspondente a $a_{14}a_{24}a_{24}a_{13}^{-1}a_{34}$.

O grupo H_{n-1} pode ser considerado como o subgrupo de H_n que é gerado por

$$a_{ij}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n-1.$$

Pode-se mostrar que:

(i) existe um homomorfismo natural $\eta : H_n \to H_{n-1}$ definido por

$$\eta(a_{ij}) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{se } 1 \leqslant i < j \leqslant n-1 \\ 1, & \text{se } 1 \leqslant i < n \text{ e } j = n. \end{cases} \tag{3.4.8}$$

(ii) $Ker(\eta)$ é o fecho normal em H_n dos elementos $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{(n-1)n}$.

(iii) $Ker(\eta) = U_n$, onde U_n é o subgrupo em H_n gerado pelos elementos da forma: $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{(n-1)n}$.

Com essas informações, é possível obter a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow U_n \xrightarrow{i} H_n \xrightarrow{\eta} H_{n-1} \longrightarrow 1$$

Considerando a fibração:

$$p : F_n(\mathbb{R}^2) \to F_{n-1}(\mathbb{R}^2),$$

com fibra $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1}$ definida no Teorema 3.2.15, podemos obter a correspondente sequência exata curta para o grupo de tranças $B(n)$, como segue.

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow 1 \tag{3.4.9}$$

Para o grupo das tranças puras, temos as identificações

$$H(n) = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2)) \text{ e } H(n-1) = \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{R}^2)), \tag{3.4.10}$$

e, deste modo, a sequência (3.4.9) torna-se

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \xrightarrow{i_*} H(n) \xrightarrow{p_*} H(n-1) \longrightarrow 1 \tag{3.4.11}$$

O homomorfismo p_* opera sobre tranças removendo a corda de número n de uma n-trança. Observemos também que

$$Ker(p_*) = \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1}) \qquad (3.4.12)$$

é um grupo livre sobre $n-1$ geradores, pois $\mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1}$ tem o mesmo tipo de homotopia da união por um ponto de $n-1$ cópias de S^1 (vide Observação 3.2.16).

A trança geométrica correspondente a a_{ij} comporta-se, sob o homomorfismo p_*, do mesmo modo que a_{ij} comporta-se sob o homomorfismo η. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & U_n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\iota''_n"'] & H_n \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\iota'_n"'] & H_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\iota'_{n-1}"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)) \arrow[r, "i_*"'] & H(n) \arrow[r, "p_*"'] & H(n-1) \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \qquad (3.4.13)$$

onde ι''_n é a restrição de ι'_n ao subgrupo U_n de H_n.

Recordemos que $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (2,0)$, $\ldots$, $P_n = (n,0)$ é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ fixado como sendo o conjunto dos pontos iniciais das n-tranças geométricas. As n-tranças puras consideradas como laços em $F_n(\mathbb{R}^2)$ são então baseadas no ponto $\tilde{c}_0 = (P_1, \ldots, P_n) \in F_n(\mathbb{R}^2)$. Em correspondência, as $(n-1)$ tranças puras em $H(n-1)$ são descritas por laços em $F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$ baseadas no ponto $(P_1, \ldots, P_{n-1}) \in F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$. O ponto base na fibra $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$ para a fibração $p : F_n(\mathbb{R}^2) \to F_{n-1}(\mathbb{R}^2)$, é então o ponto $P_n \in F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{P_1, \ldots, P_{n-1}\}$.

Analisando a trança geométrica $\iota'_n(a_{ij})$, correspondendo a $a_{ij} \in H_n$, percebemos que ela enlaça a corda j uma vez em torno da corda i. Portanto, temos que o elemento $\iota''_n(a_{jn}) \in \pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$, para $1 \leqslant j < n$, é representado pelo laço no espaço $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{P_1, \ldots, P_{n-1}\}$, baseado no ponto P_n, que enlaça o ponto P_j uma vez e o separa dos pontos $P_1, \ldots, P_{j-1}$, $P_{j+1}, \ldots, P_{n-1}$, conforme Figura 3.16.

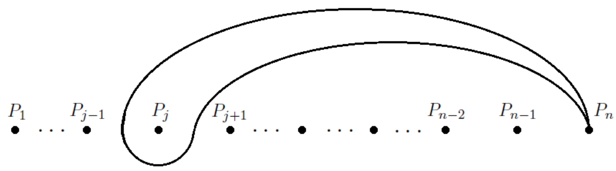

Figura 3.16: Representação de um laço em $F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2)$.

Então, o conjunto dos elementos $\{\iota''_n(a_{jn}); 1 \leqslant j < n\}$ é uma base para o grupo livre $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ de posto $(n-1)$.
O grupo $U_n = Ker(\eta)$ é gerado pelos elementos $\{a_{jn}; 1 \leqslant j < n\}$ e, como observado acima, este conjunto de geradores é levado sobre uma base para o grupo livre $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$, sob o homomorfismo ι''_n. Consequentemente, não podem existir relações entre esses geradores, desde que um grupo livre de posto finito não pode ser isomorfo a um dos seus grupos de fatores próprios[17]. Em outras palavras, o grupo U_n é, ele mesmo, um grupo livre de posto $(n-1)$, que é levado isomorficamente sobre $\pi_1(F_{n-1,1}(\mathbb{R}^2))$ pelo homomorfismo ι''_n.
Finalmente, observemos que $H_1 = 1$ e $\pi_1(F_{0,1}(\mathbb{R}^2)) = 1$. Assim, ι'_1 é um isomorfismo. Assumimos indutivamente que ι'_{n-1} é um isomorfismo. Então, desde que ι''_n é um isomorfismo, para todo n, aplicando o Lema dos Cinco (Lema B.0.27) ao diagrama 3.4.13, concluímos que ι'_n é um isomorfismo, como queríamos demonstrar.

❑

[17]**[32, Theorem 2.13]** Um grupo livre de posto finito não pode ser isomorfo a um dos seus grupos de fatores próprios.

Capítulo 4

Uma Ordenação para o Grupo de Tranças Puras

Recordemos do Capítulo 3, que uma trança β é chamada uma trança pura (ou uma trança colorida) se a permutação associada à trança β é a permutação identidade. Vimos que $PB(n)$, o conjunto de todas as classes de equivalências de tranças puras sobre n cordas, é o núcleo do homomorfismo permutação $\tau_n : B(n) \to \Sigma_n$. Portanto, $PB(n)$ é um subgrupo normal de índice $|\Sigma_n| = n!$ em $B(n)$. Segue da Observação 3.4.2, que existe uma sequência exata curta

$$1 \longrightarrow PB(n) \longrightarrow B(n) \xrightarrow{\tau_n} \Sigma_n \longrightarrow 1 \qquad (4.0.1)$$

associada aos grupos de tranças $PB(n)$ e $B(n)$ e ao grupo simétrico Σ_n.

Neste capítulo, definiremos uma ordem total para $PB(n)$; o grupo das tranças puras sobre n cordas, a qual será invariante sob a multiplicação de ambos os lados. A ordenação para $PB(n)$ será definida usando-se uma combinação da técnica de pentear tranças devida a Artin e a expansão Magnus para Grupos Livres. Veremos que grupos livres são bi-ordenáveis e que $PB(n)$ é um produto semidireto de grupos livres. As principais referências deste capítulo são [12] e [28].

4.1 Grupos Ordenados

Relembremos que uma **ordenação estrita** de um conjunto Ω é uma relação binária, denotada por $<$, que satisfaz as seguintes propriedades:

1. **Anti-reflexiva:** $x \prec x$ não ocorre;

2. **Transitiva:** se $x \prec y$ e $y \prec z$, implica $x \prec z$.

Uma ordenação estrita de Ω é chamada **total ou linear** se, para todos $x, x' \in \Omega$, exatamente uma das seguintes condições é válida: $x = x'$, ou $x \prec x'$ ou $x' \prec x$.

Definição 4.1.1. [12, Definition 1.1] *Dizemos que:*

(i) *Uma **ordenação invariante à esquerda**, ou **ordenação à esquerda**, de um grupo G é uma ordenação total estrita $\prec$ de G satisfazendo a condição de que dados $g, h \in G$ tais que*

$$g \prec h \;\Rightarrow\; fg \prec fh, \forall\, f \in G. \tag{4.1.1}$$

*Um grupo G é chamado **ordenável à esquerda**, se existe pelo menos uma ordenação invariante à esquerda de G.*

(ii) *Uma **ordenação bi-invariante**, ou uma **bi-ordenação**, de um grupo G é uma ordenação à esquerda de G que também é invariante à direita, ou seja, dados $g, h \in G$ tais que*

$$g \prec h \;\Rightarrow\; gf \prec hf, \forall\, f \in G. \tag{4.1.2}$$

*Um grupo G é chamado **bi-ordenável**, se existe pelo menos uma ordenação bi-invariante de G. Neste caso, usaremos a notação $(G, \prec)$.*

Um exemplo importante é dado no resultado a seguir, o qual será assumido sem demonstração, desde que as ferramentas necessárias para uma prova fogem do escopo deste trabalho.

Teorema 4.1.2. [12, Proposition 1.2] *Para $n \geqslant 3$, o grupo de tranças no disco $B(n)$ não é bi-ordenável.*

Por causa do teorema anterior, estaremos interessados em ordens que são invariantes sob a multiplicação de um dos lados. O resultado a seguir mostra que ordenações à esquerda de um grupo G determinam ordenações à direita de G, através de regras simétricas.

Lema 4.1.3. **[28, Lemma 1.3]** *Suponhamos que $\prec$ seja uma ordenação invariante à esquerda de um grupo G. Então, definindo*

$$g \tilde{\prec} h \Leftrightarrow g^{-1} \prec h^{-1}, \tag{4.1.3}$$

obtemos que $\tilde{\prec}$ é uma ordenação invariante à direita de G.

Demonstração:

(i) *$\tilde{\prec}$ é uma ordem estrita.*

Propriedade anti-reflexiva: Por definição, $g \tilde{\prec} g \Leftrightarrow g^{-1} \prec g^{-1}$. Mas como $\prec$ é uma ordem estrita, $g^{-1} \prec g^{-1}$ não ocorre e, consequentemente, $g \tilde{\prec} g$ também não ocorre.

Propriedade Transitiva: Suponhamos que sejam dados $g, h, k \in G$ tais que $g \tilde{\prec} h$ e $h \tilde{\prec} k$. Queremos mostrar que $g \tilde{\prec} k$. De fato, como

$$g \tilde{\prec} h \Leftrightarrow g^{-1} \prec h^{-1} \quad e \quad h \tilde{\prec} k \Leftrightarrow h^{-1} \prec k^{-1},$$

sendo $\prec$ uma ordem estrita, temos pela transitividade de $\prec$ que $g^{-1} \prec k^{-1}$. Portanto, $g \tilde{\prec} k$.

(ii) *$\tilde{\prec}$ é uma ordem total.*

De fato, precisamos mostrar que para todos $g, h \in G$, ou $g = h$ ou $g \tilde{\prec} h$ ou $h \tilde{\prec} g$. Para isso, suponhamos que $g = h$ e $h \tilde{\prec} g$ não ocorrem e mostremos que $g \tilde{\prec} h$. Faremos a prova por contradição. Se $g \tilde{\prec} h$ não ocorresse, como por definição,

$$g \tilde{\prec} h \Leftrightarrow g^{-1} \prec h^{-1}$$

teríamos que $g^{-1} \prec h^{-1}$ não ocorre, mas como $\prec$ é uma ordem total, deveríamos ter $g^{-1} = h^{-1}$ ou $h^{-1} \prec g^{-1}$. Mas, se $g^{-1} = h^{-1}$, isso implicaria $g = h$, o que não ocorre por hipótese. Agora, se $h^{-1} \prec g^{-1}$, teríamos por definição

$$h^{-1} \prec g^{-1} \Leftrightarrow h \tilde{\prec} g, \tag{4.1.4}$$

o que também não ocorre, por hipótese. Portanto, $g \tilde{\prec} h$ *ocorre e* $\tilde{\prec}$ *é ordem total.*

(iii) $\tilde{\prec}$ *é uma ordenação invariante à direita de* G.

Dados $g, h \in G$ *tais que* $g \tilde{\prec} h$, *devemos mostrar que* $gk \tilde{\prec} hk$, $\forall k \in G$. *De fato, como* $\prec$ *é uma ordem invariante à esquerda de* G, *temos:*

$$\begin{aligned} g \tilde{\prec} h \;\Leftrightarrow\; g^{-1} \prec h^{-1} &\Rightarrow k^{-1}g^{-1} \prec k^{-1}h^{-1} \\ &\Rightarrow (gk)^{-1} \prec (hk)^{-1} \\ &\overset{def.}{\Leftrightarrow} gk \tilde{\prec} hk. \end{aligned}$$

❏

Uma ordenação à direita de um grupo G pode ser caracterizada pela existência de um subconjunto $\mathcal{P} \subset G$ chamado "cone positivo", como segue.

Definição 4.1.4. [12, Definition 1.4] *Um subconjunto* $\mathcal{P}$ *de um grupo* G *é chamado um* ***cone positivo*** *sobre* G *se satisfaz as seguintes condições:*

1. $\mathcal{P}$ *é fechado sob a multiplicação de* G, *ou seja,* $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

2. $G \backslash \{1_G\} = \mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1}$ (união disjunta), *onde* $\mathcal{P}^{-1} = \{p^{-1}; p \in \mathcal{P}\}$, *isto é,* $\mathcal{P}$ *particiona* $G \backslash \{1_G\}$, *onde* 1_G *denota o elemento identidade de* G.

Lema 4.1.5. [28, pág. 825] *Um grupo* G *é ordenável a direita se, e somente se, existe* $\mathcal{P} \subset G$ *cone positivo sobre* G.

Demonstração:
Suponhamos que $\prec$ seja uma ordenação invariante à direita do grupo G. Definimos o conjunto $\mathcal{P} = \{g \in G; 1_G \prec g\}$. Mostraremos que $\mathcal{P} \subset G$ é um cone positivo sobre G.

1. Dados $g, h \in \mathcal{P}$, então $1_G \prec g$ e $1_G \prec h$. Assim, podemos escrever $1_G = hh^{-1} \prec g$ e como G é ordenável à direita, temos $h = (hh^{-1})h \prec gh$. Portanto,

$$1_G \prec h \prec gh \Rightarrow 1_G \prec gh, \tag{4.1.5}$$

pela propriedade transitiva. Logo, $gh \in \mathcal{P}$, ou seja, $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

2. Primeiramente, vejamos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{-1} = \varnothing$. Suponhamos que isso não ocorra, então existe um elemento $g \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{-1}$. Assim:

(i) $g \in \mathcal{P}$, implica $1_G \prec g$.

(ii) $g \in \mathcal{P}^{-1}$ implica $g^{-1} \in \mathcal{P}$, logo $1_G \prec g^{-1}$. E como $\prec$ é uma ordenação invariante à direita, temos $g \prec 1_G$.

Dessa forma, $1_G \prec g$ e $g \prec 1_G$ e, pela propriedade transitiva, teríamos $1_G \prec 1_G$, o que contradiz a propriedade anti-reflexiva. Portanto, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{-1} = \varnothing$.

Mostraremos que $G \backslash \{1_G\} \subset \mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1}$. De fato, seja $g \in G \backslash \{1_G\}$. Sabemos que $1_G \prec g$ ou $g \prec 1_G$.

(i) Se $1_G \prec g$, então $g \in \mathcal{P}$.

(ii) Caso contrário, se $g \prec 1_G$, desde que $\prec$ é uma ordenação à direita do grupo G, temos $1_G \prec g^{-1}$ e, assim, $g \in \mathcal{P}^{-1}$.

Portanto, $G \backslash \{1_G\} \subset \mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1}$ e como $\mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1} \subset G \backslash \{1_G\}$, segue a igualdade.

Reciprocamente, suponhamos agora que exista $\mathcal{P} \subset G$, cone positivo sobre G e mostremos que G é ordenável a direita. Definimos $\prec$ pela relação

$$g \prec h \Leftrightarrow hg^{-1} \in \mathcal{P}. \tag{4.1.6}$$

Mostraremos que $\prec$ é uma ordenação invariante à direita do grupo G:

(i) $\prec$ é uma ordenação total estrita.

<u>Propriedade anti-reflexiva:</u> $g \prec g \overset{def.}{\Leftrightarrow} g \cdot g^{-1} = 1_G \in \mathcal{P}$, o que é uma contradição, pois $1_G \notin \mathcal{P}$. Portanto, $g \prec g$ não ocorre.

<u>Propriedade transitiva:</u> dados $g, h, k \in G$ tais que

$$\begin{aligned} g \prec h \quad &\overset{def.}{\Leftrightarrow} \quad hg^{-1} \in \mathcal{P} \ \text{ e} \\ h \prec k \quad &\overset{def.}{\Leftrightarrow} \quad kh^{-1} \in \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Como $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$, temos que $(kh^{-1}) \cdot (hg^{-1}) \in \mathcal{P}$, ou seja, $kg^{-1} \in \mathcal{P} \Leftrightarrow g \prec k$.

(ii) $\prec$ é uma ordem total.

De fato, precisamos mostrar que para todos $g, h \in G$, ou $g = h$ ou $g \prec h$ ou $h \prec g$. Para isso, suponhamos que $g = h$ e $h \prec g$ não ocorrem e mostremos que $g \prec h$. Faremos a prova por contradição, ou seja, se $g \prec h$ não ocorre, desde que por definição,

$$g \prec h \Leftrightarrow h^{-1}g \in \mathcal{P}$$

teríamos que $h^{-1}g \notin \mathcal{P}$, o que implica que $(h^{-1}g)^{-1} \notin \mathcal{P}^{-1} := \{p^{-1}; p \in \mathcal{P}\}$. Mas G é grupo e $h^{-1}, g \in G$, logo $h^{-1}g \in G$. Assim, como $G \backslash \{1\} = \mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1}$, a única possibilidade é que $h^{-1}g = 1_G$, ou seja, $h = g$, o que é uma contradição. Portanto, $g \prec h$ ocorre. Os outros casos ocorrem de maneira similar.

(iii) $\prec$ é uma ordem a direita.

Dados $g, h \in G$ tais que $g \prec h$, devemos mostrar que $gk \prec hk$, $\forall\ k \in G$. Mas

$$g \prec h \ \Leftrightarrow hg^{-1} \in P. \tag{4.1.8}$$

Assim, temos:

$$hg^{-1} \in \mathcal{P} \ \Leftrightarrow \ (hk)(k^{-1}g^{-1}) \in \mathcal{P} \ \Leftrightarrow (hk)(gk)^{-1} \in \mathcal{P} \ \overset{def.}{\Leftrightarrow} \ gk \prec hk.$$

❏

De maneira análoga, mostra-se o seguinte resultado

Lema 4.1.6. [12, Lemma 1.5]

(i) *Assuma que $\prec$ seja uma ordenação invariante à esquerda de um grupo G. Então, o conjunto $\mathcal{P} = \{g \in G; 1_G \prec g\}$ é um cone positivo sobre G e $g \prec h \Leftrightarrow g^{-1}h \in \mathcal{P}$.*

(ii) *Assuma que $\mathcal{P}$ seja um cone positivo sobre um grupo G. Então, a relação $g \prec h \Leftrightarrow g^{-1}h \in \mathcal{P}$ é uma ordenação invariante à esquerda de G e $\mathcal{P} = \{g \in G; 1_G \prec g\}$.*

Como uma consequência imediata dos Lemas 4.1.5 e 4.1.6, obtemos o seguinte

Corolário 4.1.7. [28, pág. 825] *Um grupo G é ordenável à direita se, e somente se, G é ordenável à esquerda, mas as ordenações podem diferir.*

Proposição 4.1.8. [28, pág. 825] *Um grupo G é bi-ordenável se, e somente se, as propriedades* (1) *e* (2) *da Definição 4.1.4 são válidas para algum subconjunto $\mathcal{P} \subset G$ e, em adição:*

$$(3) \quad \forall\, g \in G, \quad g \cdot \mathcal{P} \cdot g^{-1} \subset \mathcal{P} \qquad \text{(normalidade).} \tag{4.1.9}$$

Demonstração:
Suponhamos que um grupo $(G, \prec)$ seja bi-ordenável, então $(G, \prec)$ é ordenável à direita e segue do Lema 4.1.5, que existe $\mathcal{P} = \{g \in G; 1_G \prec g\} \subset G$, cone positivo sobre G, satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 4.1.4. Assim, basta mostrarmos que $\mathcal{P}$ satisfaz a condição (3) dada em (4.1.9). Dado $g \in G$ arbitrário, vejamos que $g \cdot \mathcal{P} \cdot g^{-1} \subset \mathcal{P}$. Seja $x \in G$ um elemento qualquer tal que $x \in g\mathcal{P}g^{-1}$, então $x = gpg^{-1}$, para algum $p \in \mathcal{P}$. Nesse caso, $1_G \prec p$ e desde que $\prec$ é uma ordenação invariante à direita, segue que $1_G g^{-1} \prec pg^{-1}$. Além disso, sendo $\prec$ também uma ordenação invariante à esquerda, concluímos que, $1_G = gg^{-1} \prec gpg^{-1} = x$, o que implica $x \in \mathcal{P}$.

Reciprocamente, se para algum subconjunto $\mathcal{P} \subset G$, são válidas as condições (1) e (2) da Definição 4.1.4 e, além disso, $\mathcal{P}$ satisfaz também a condição (3) dada em (4.1.9), segue do Lema 4.1.5, que $(G, \prec)$ é ordenável à direita, onde $\prec$ é dada por

$$g \prec h \Leftrightarrow hg^{-1} \in \mathcal{P}. \tag{4.1.10}$$

Mostraremos que $\prec$ é uma ordem a esquerda, ou seja, dados $g, h \in G$ tais que $g \prec h$, então $kg \prec kh$, para todo $k \in G$. Mas note que

$$kg \prec kh \quad \Leftrightarrow \quad kh(kg)^{-1} \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad k(hg^{-1})k^{-1} \in \mathcal{P}, \ \text{ onde } \ p = hg^{-1} \in \mathcal{P}, \tag{4.1.11}$$

e a última equivalência é válida pela propriedade (3). Portanto, $\prec$ é uma ordenação invariante à esquerda e, consequentemente, $(G, \prec)$ é bi-ordenável.

❏

Observação 4.1.9. *Se $(G, \prec)$ é um grupo ordenável à direita* (respectivamente, bi-ordenável) *e se $H \subset G$ é subgrupo de G, então considerando a restrição de $\prec$ aos elementos de H, temos que $(H, \prec)$ é ordenável à direita* (respectivamente, bi-ordenável).

A seguir, listamos algumas propriedades válidas para grupos ordenáveis.

Observação 4.1.10. *Propriedades dos grupos ordenáveis.*

1. *Um teorema clássico devido a Hölder* [22]*, afirma que se um grupo ordenável* $(G, \prec)$ *é Arquimediano*[18]*, então* G *é isomorfo (algebricamente e no sentido da ordem) a um subgrupo do grupo aditivo dos números reais, e portanto, será abeliano* (vide [36, Theorem 1.3.4]).

2. *Se um grupo* G *é ordenável à direita, então* G *não possui elementos de ordem finita. Em outras palavras,* G *é livre de torção.* (vide [27, pág. 12]).

3. *Mostraremos na Proposição 4.3.19, que grupos livres são bi-ordenáveis.*

4. *Mais geralmente, Vinogradov em* [40]*, mostrou que bi-ordenabilidade é preservada por produtos livres.*

A bi-ordenabilidade é preservada por produtos diretos, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.1.11. [28, pág. 826] (Ordem Lexicográfica) *Mostraremos que se* $(G, \prec_G)$ *e* $(H, \prec_H)$ *são grupos bi-ordenáveis, então o produto direto* $(G \times H, \prec)$ *é bi-ordenável, onde* $\prec$ *denota a ordem lexicográfica definida como segue:*

$$(g, h) \prec (g', h') \Leftrightarrow (g \prec_G g') \text{ ou } (g = g' \text{ e } h \prec_H h'). \tag{4.1.12}$$

Sejam $(g, h), (g', h') \in G \times H$ *tais que* $(g, h) \prec (g', h')$ *e mostremos que*

$$(g, h) \cdot (g_1, h_1) \prec (g', h') \cdot (g_1, h_1), \quad \forall \ (g_1, h_1) \in G \times H. \tag{4.1.13}$$

Mas, por definição da ordem lexicográfica, temos $(g, h) \prec (g', h')$ *se, e somente se,*

(i) $g \prec_G g'$ *ou*

(ii) $g = g'$ *e* $h \prec_H h'$.

[18] **[12, Definition 3.1]** Uma ordenação em um grupo G possui a propriedade Arquimediana se, sempre que $1 < x < y$, no grupo G, então existe um inteiro p tal que $y < x^p$.

Assim, se $g \prec_G g'$, como G é bi-ordenável, segue que:

$$gg_1 \prec_G g'g_1, \forall\, g_1 \in G. \tag{4.1.14}$$

Ou, se $g = g'$ e $h \prec_H h'$, neste caso, como H é bi-ordenável segue que:

$$gg_1 = g'g_1 \;\; e \;\; hh_1 \prec_H h'h_1, \forall \;\; h_1 \in H. \tag{4.1.15}$$

Note que as equações (4.1.14) *e* (4.1.15), *equivalem a dizer que:*

$$(gg_1, hh_1) \prec (g'g_1, h'h_1). \tag{4.1.16}$$

Mas, (4.1.13) *e* (4.1.16) *são equivalentes, o que mostra que $(G \times H, \prec)$ é ordenável à direita. Analogamente, mostra-se a ordenabilidade à esquerda.*

Os seguintes exemplos mostram que o produto semidireto de grupos bi-ordenáveis não são necessariamente bi-ordenáveis.

Exemplo 4.1.12. [27, Example 2.5] *O grupo fundamental da garrafa de Klein possui uma apresentação, como segue.*

$$K = \langle\, x, y \;;\; yxy^{-1} = x^{-1} \rangle \tag{4.1.17}$$

Este grupo não é bi-ordenável. De fato, suponhamos que K seja bi-ordenável. Então, pela Proposição 4.1.8, *existe $\mathcal{P} \subset K$, cone positivo sobre K, satisfazendo a condição de normalidade, ou seja,*

$$\forall k \in K, \;\; k\mathcal{P}k^{-1} \subset \mathcal{P}. \tag{4.1.18}$$

Desde que $K \backslash \{1_K\} = \mathcal{P} \bigsqcup \mathcal{P}^{-1}$, para o gerador $x \in K$, $x \neq 1_K$, se $x \in \mathcal{P}$, então:

$$yxy^{-1} = x^{-1} \in \mathcal{P}, \tag{4.1.19}$$

o que contraria $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{-1} = \varnothing$*. Analogamente, se* $x \in \mathcal{P}^{-1}$*. No entanto,* K *é o produto semidireto de dois grupos cíclicos infinitos, os quais são bi-ordenáveis.*

Uma ideia intuitiva de como obtemos $K = \pi_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ *é dada a seguir, com o caso do toro incluso. Considere o Toro* $S^1 \times S^1$ *e a garrafa de Klein* $\mathcal{K}$*. Em ambos os casos existem dois caminhos fechados, indicados por* a *e* b*, como nas Figuras 4.1 e 4.2:*

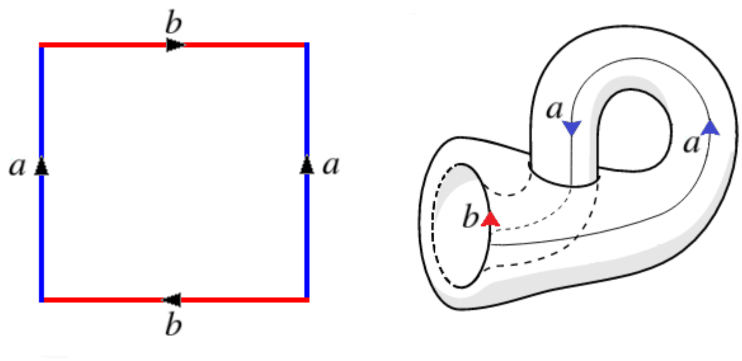

Figura 4.1: Identificações na Garrafa de Klein.

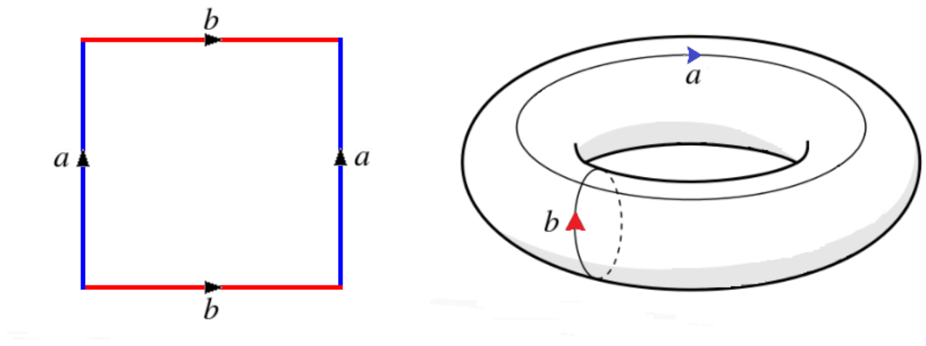

Figura 4.2: Identificações no Toro.

Em ambos os casos, existe uma retração[19] r *de* X *para a imagem* $A \subset X$ *do caminho* a*, com* X *sendo o toro ou a garrafa de Klein. A Figura 4.3 traz uma representação desta retração no caso da garrafa de Klein. O grupo fundamental de* A *é* $\mathbb{Z}$ *e o grupo fundamental de* X *se encaixa em uma sequência exata curta:*

$$0 \to H \to \pi_1(X) \to \mathbb{Z} \to 0, \tag{4.1.20}$$

[19]Dados um espaço topológico X e $A \subset X$, uma aplicação contínua $r : X \to A$ é chamada uma retração se $r|_A = Id_A$, ou seja, $r(a) = a$, para todo $a \in A$.

onde $H = Ker(\pi_1(X) \xrightarrow{r_*} \pi(A))$.

Desde que $r(b)$ *é um único ponto, a imagem de* b *certamente está neste núcleo. Pode-se mostrar que este núcleo é exatamente* $\mathbb{Z}$ *com gerador* b.

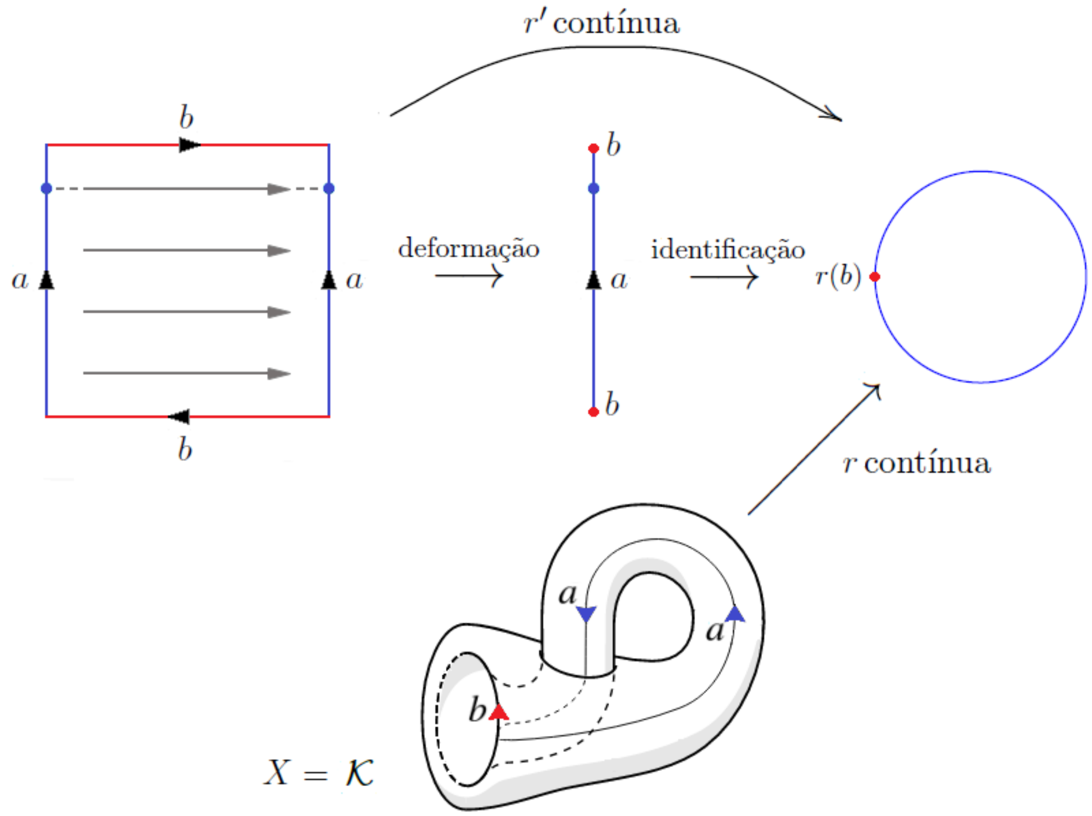

Figura 4.3: Retração da garrafa de Klein.

Segue que $\pi_1(X)$ *é um dos dois grupos,* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *ou* $\mathbb{Z}\rtimes_\varphi\mathbb{Z}$. *Para determinarmos qual destes grupos ocorre, precisamos encontrar o homomorfismo* $\varphi : H \to Aut(N)$. *O grupo* $H = \mathbb{Z}$ *é gerado por* a *e o grupo* $N = \mathbb{Z}$ *é gerado por* b, *por isso, precisamos calcular* $\varphi_a(b) = aba^{-1}$.

A Figura 4.4 mostra que este elemento é b *para o Toro, ou seja,* $\varphi_a(b) = aba^{-1} = b \Leftrightarrow ab = ba$ (relação entre os geradores na apresentação do grupo fundamental do toro) *e, respectivamente,* b^{-1} *para a garrafa de Klein, ou seja,* $\varphi_a(b) = aba^{-1} = b^{-1}$ (relação entre os geradores na apresentação do grupo fundamental da garrafa de Klein). *Portanto, segue que* $\pi_1(S^1\times S^1) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *e* $\pi_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\rtimes_\varphi\mathbb{Z}$.

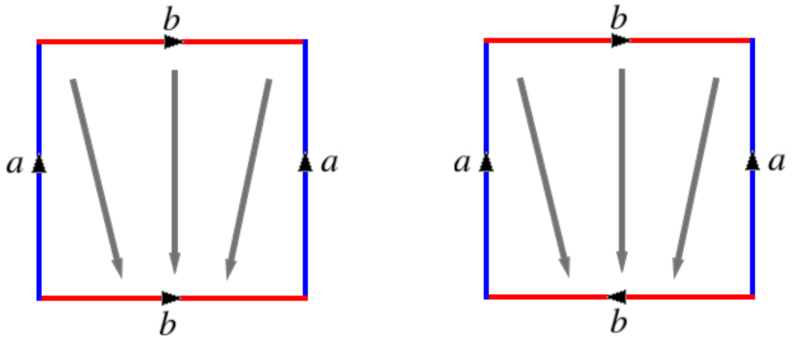

Figura 4.4: Relações entre os geradores do grupo fundamental do Toro e da Garrafa de Klein, respectivamente.

Observação 4.1.13. *Recordemos a notação fixada para uma ação à direita de um grupo G sobre um grupo H, como segue.*

$$\begin{aligned} H \times G &\to H \\ (h, g) &\mapsto h \cdot g = h^g. \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Também, a multiplicação em um produto semidireto $G \ltimes H$ é dada pela fórmula:

$$(g, h) \cdot (g', h') = (gg', h^{g'}h'), \quad onde \;\; h^{g'} = g'h(g')^{-1}, \tag{4.1.22}$$

ou seja, a ação de G sobre H é por conjugação.

O resultado a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para que a ordem lexicográfica sobre um produto semidireto seja uma bi-ordem.

Lema 4.1.14. [27, Lemma 2.6] *Sejam G e H grupos bi-ordenáveis. Então, a ordem lexicográfica sobre o produto semidireto $G \ltimes H$ é uma bi-ordenação se, e somente se, a ação de G sobre H preserva a ordem sobre H* (equivalentemente, se $g\mathcal{P}_H g^{-1} \subset \mathcal{P}_H$, para todo $g \in G$).

Demonstração:
Sejam $(G, \prec_G)$ e $(H, \prec_H)$ grupos bi-ordenáveis. Segue do Lema 4.1.5, que existem $\mathcal{P}_G \subset G$ e $\mathcal{P}_H \subset H$ cones positivos sobre G e H, respectivamente.

Suponhamos que G age sobre H de tal forma que $g\mathcal{P}_H g^{-1} \subset \mathcal{P}_H$, $\forall\ g \in G$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(g,h); g \in \mathcal{P}_G \text{ ou } (g = 1_G \text{ e } h \in \mathcal{P}_H)\} \\ &= \{(g,h); 1_G \prec_G g \text{ ou } (g = 1_G \text{ e } 1_H \prec_H h)\}, \end{aligned}$$

(1) Mostremos que $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

Sejam $(g,h),(g',h') \in \mathcal{P}$, vamos analisar o produto semidireto $(g,h)\cdot(g',h') = (gg', h^{g'}h')$, onde $h^{g'} = g'h(g')^{-1}$.

• Se $g \neq 1_G$ ou $g' \neq 1_G$, então $1_G \prec_G gg'$, ou seja, $gg' \in \mathcal{P}_G$.

• Se ambos g e g' são iguais a 1_G, então como $h \in \mathcal{P}_H$ e $g\mathcal{P}_H g^{-1} \subset \mathcal{P}_H$, para todo $g \in G$, devemos ter $h^{g'} = g'h(g')^{-1} \in \mathcal{P}_H$, então $1_H \prec_H h^{g'}$ e sendo $\prec_H$ uma bi-ordem, segue que $1_H \prec_H h^{g'}h' = g'h(g')^{-1}h' = hh'$, ou seja, $h^{g'}h' \in \mathcal{P}_H$.

Em qualquer dos casos, temos $(1_G, 1_H) \prec (g,h)\cdot(g',h') = (gg', h^{g'}h') \in \mathcal{P}$.

(2) Agora, mostraremos que $(G \ltimes H)\backslash\{(1_G,1_H)\} = \mathcal{P}\bigsqcup\mathcal{P}^{-1}$.

Suponhamos que $(g,h) \neq (1_G,1_H)$ e que $(g,h) \notin \mathcal{P}$. Então ou $g \neq 1_G$ e $g \notin \mathcal{P}_G$ ou $g = 1_G$, $h \notin \mathcal{P}_H$ e $h \neq 1_H$. No primeiro caso, $g \notin \mathcal{P}_G$ e $g \neq 1_G$ implica que $g^{-1} \in \mathcal{P}_G$, desde que G é um grupo ordenável. Assim,

$$(g,h)^{-1} = (g^{-1}, (h^{-1})^{g^{-1}}) = (g^{-1}, g^{-1}h^{-1}g) \in \mathcal{P},$$

pois $g^{-1}h^{-1}g \in \mathcal{P}_H$. Caso contrário, se $g = 1_G$, $h \notin \mathcal{P}_H$ e $h \neq 1_H$, então $h^{-1} \in \mathcal{P}_H$, o que significa que:

$$(1_G, h)^{-1} = (1_G, h^{-1}) \in \mathcal{P}.$$

(3) Finalmente, mostraremos a normalidade: $(g,h)\mathcal{P}(g,h)^{-1} \subset \mathcal{P}$.

Seja $(g',h') \in \mathcal{P}$. Considere o conjugado:

$$\begin{aligned} (g,h)\cdot(g',h')\cdot(g,h)^{-1} &= (gg', h^{g'}h')\cdot(g^{-1}, (h^{-1})^{g^{-1}}) \\ &= (gg'g^{-1}, (h^{g'}h')^{g^{-1}}\cdot(h^{-1})^{g^{-1}}) \\ &= (gg'g^{-1}, (h^{g'}h'h^{-1})^{g^{-1}}). \qquad (4.1.23) \end{aligned}$$

Se $g' \succ 1_G$, ou seja, $g' \in \mathcal{P}_G$, então desde que G é ordenável, a condição de normalidade válida para $\mathcal{P}_G$, implica que $gg'g^{-1} \in \mathcal{P}_G$, assim, o conjugado em (4.1.23) está em $\mathcal{P}$.

Caso contrário, se $g' = 1_G$ e $h' \in \mathcal{P}_H$, então $gg'g^{-1} = 1_G$ e $(h^{g'}h'h^{-1})^{g^{-1}} = (hh'h^{-1})^{g^{-1}}$. Desde que $(hh'h^{-1}) \in \mathcal{P}_H$, pois H é bi-ordenável, $(hh'h^{-1})^{g^{-1}} \in \mathcal{P}_H$, da condição de normalidade válida para $\mathcal{P}_H$. Neste caso, o conjugado em (4.1.23) também está em $\mathcal{P}$.

Portanto, a ordem lexicográfica sobre o produto semidireto $G \ltimes H$ é uma bi-ordenação.

Reciprocamente, suponhamos que $G \ltimes H$ seja bi-ordenável e seja $h \in \mathcal{P}_H$. Então, $(1_G, h) \in \mathcal{P}$. A ação sobre h por qualquer elemento $g \in G$ é equivalente à conjugação no produto semidireto $G \ltimes H$ (Observação 4.1.13). Para qualquer $g \in G$, temos

$$\begin{aligned} (g, 1_H) \cdot (1_G, h) \cdot (g, 1_H)^{-1} &= (g, h) \cdot (g^{-1}, 1_H) \\ &= (gg^{-1}, h^{g^{-1}}) = (1_G, h^{g^{-1}}). \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Desde que $G \ltimes H$ é bi-ordenado, sabemos da normalidade válida para $\mathcal{P}$, que o conjugado em (4.1.24), $(1_G, h^{g^{-1}}) \in \mathcal{P}$, ou seja, $(1_G, 1_H) \prec (1_G, h^{g^{-1}})$ e, portanto, $h^{g^{-1}} = g^{-1}hg \in \mathcal{P}_H$. ❏

4.2 Penteado Artin

A partir de agora, seguindo a nomenclatura fixada em [12] e [28], $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n-1$, denotaremos por σ_i a n-**trança geométrica elementar**, na qual a i-**ésima corda cruza por baixo a** $(i+1)$-**ésima corda**, uma única vez, e todas as outras cordas são percorridas do ponto inicial P_i ao ponto final $P_i^{'}$, sem se cruzarem, conforme Figura 4.5. Também, conforme Observação 3.1.5, usaremos a notação $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ para representar uma trança geométrica sobre n cordas, onde β_i denota a i-ésima corda da trança β.

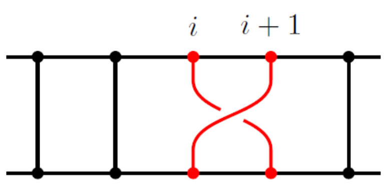

Figura 4.5: Representação de uma n-trança geométrica elementar σ_i.

Existe uma inclusão natural $B(n-1) \hookrightarrow B(n)$, a qual acrescenta uma n-ésima corda com permutação trivial a uma $(n-1)$ trança $\beta \in B(n-1)$, como ilustrado na Figura 4.6.

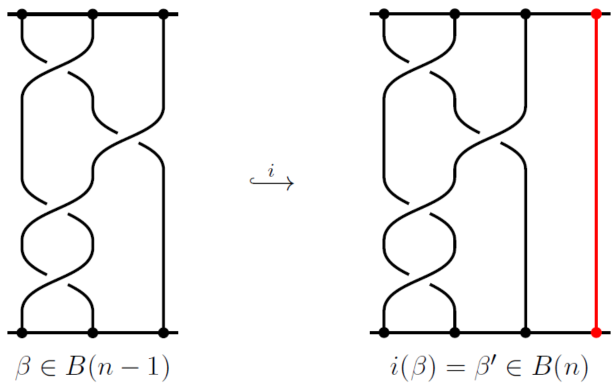

Figura 4.6: A inclusão natural $i : B(n-1) \hookrightarrow B(n)$.

Restringindo esta aplicação ao grupo das tranças puras, obtemos também uma inclusão $PB(n-1) \hookrightarrow PB(n)$. Neste caso, existe uma retração $PB(n) \to PB(n-1)$, definida como segue.

Definição 4.2.1. **[12, Definition 2.1]** *Para $n \geqslant 3$, denotamos por $r_n : PB(n) \to PB(n-1)$ a aplicação que consiste em apagar a n-ésima corda de uma n-trança pura $\beta \in PB(n)$, conforme ilustrado na Figura 4.7:*

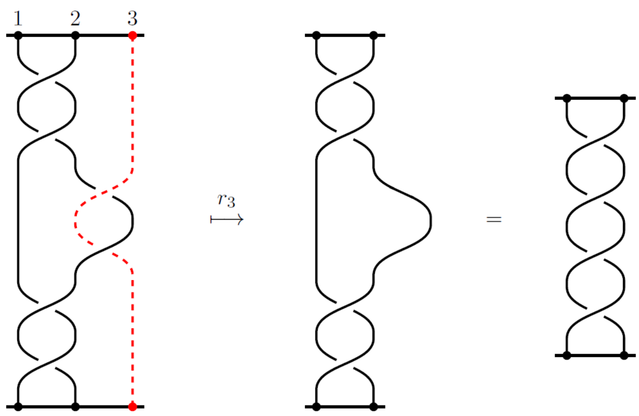

Figura 4.7: A retração r_3 apaga a última corda em $\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$, obtendo σ_1^4.

Observação 4.2.2. *Note que r_n é uma retração, desde que $r_n \circ i = Id_{PB(n-1)}$.*

Lema 4.2.3. **[12, Lemma 2.2]** *A aplicação* $r_n : PB(n) \to PB(n-1)$ *é um homomorfismo. O núcleo de* r_n*, denotado por* F_{n-1}*, é o conjunto de todas as tranças puras com* n*-cordas que podem ser representadas por um diagrama no qual as* $(n-1)$ *primeiras cordas possuem permutação trivial e a* n*-ésima corda enlaça entre as demais* (vide Figura 4.8). $Ker(r_n) = F_{n-1}$ *é um grupo livre de posto* $n-1$*.*

Ideia da Demonstração:
r_n é um homomorfismo:
Dadas duas tranças $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ em $PB(n)$, devemos mostrar que $r_n(\alpha \cdot \beta) = r_n(\alpha) \cdot r_n(\beta)$.

$$\begin{aligned} r_n(\alpha \cdot \beta) &= r_n(\alpha_1 \cdot \beta_1, \dots, \alpha_n \cdot \beta_n) \\ &= (\alpha_1 \cdot \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} \cdot \beta_{n-1}) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \cdot (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \\ &= r_n(\alpha) \cdot r_n(\beta). \end{aligned}$$

O núcleo de r_n, por definição, é o conjunto de todas as n tranças $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in PB(n)$ tais que $r_n(\beta) = r_n(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ é a $(n-1)$-trança trivial, ou seja, é o conjunto das n tranças puras que podem ser representadas por um diagrama no qual as $(n-1)$ primeiras cordas vão do plano superior ao plano inferior sem se cruzarem e a n-ésima corda enlaça entre as demais (vide Figura 4.8).

Conforme Observação 3.1.13, quando imaginamos uma trança contida no interior de um cubo, cujas faces superior e inferior são homeomorfas a um disco $\mathbb{D}^2 \sim \mathbb{R}^2$, olhando o cubo por cima temos que cada corda β_i de uma trança pura β pode ser identificada com um laço em $\mathbb{D}^2 \sim \mathbb{R}^2$, com ponto base P_i. Assim, a n-ésima corda de uma trança pura $\beta \in Ker(r_n)$ pode ser vista como um laço em $\mathbb{D}^2 \sim \mathbb{R}^2$, com ponto base P_n, como representado à direita da Figura 4.8. Dessa forma, $Ker(r_n)$ pode ser identificado com o grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1})$, onde $\mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1}$ denota o plano com $(n-1)$ pontos removidos. Sabemos, da Observação 3.2.16, que o complementar de $(n-1)$ pontos em $\mathbb{R}^2$ tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de $(n-1)$ circunferências, ou seja, é a união de $(n-1)$ cópias da esfera S^1 com um único ponto em comum e, pelo Teorema de Seifert-van Kampen, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \backslash Q_{n-1})$ é um grupo livre com $(n-1)$ geradores (vide [35, Theorem 71.1]).

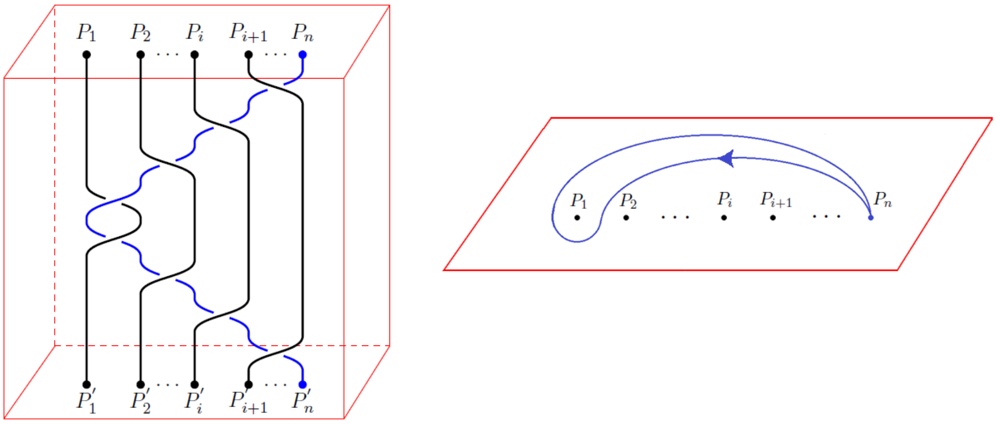

Figura 4.8: Representação de uma n trança pura no núcleo de r_n.

❏

O resultado a seguir conecta o grupo das tranças puras com grupos livres. Em nosso contexto, isso fornecerá um passo indutivo para deduzirmos uma ordenação para o grupo das tranças puras a partir da ordenação de grupos livres.

Proposição 4.2.4. [**12, Proposition 2.3**] *Para cada $n \geqslant 2$, o grupo das tranças puras $PB(n)$ é um produto semidireto de F_{n-1} e $PB(n-1)$.*

Demonstração:

Pelo Lema 4.2.3, temos a seguinte sequência exata curta

$$1 \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\subset} PB(n) \xrightarrow{r_n} PB(n-1) \longrightarrow 1. \tag{4.2.1}$$

Sabemos da Observação 4.2.2, que a inclusão de $PB(n-1)$ em $PB(n)$ é uma inversa à direita para o homomorfismo r_n. Então, segue da Definição 2.4.2, que a sequência 4.2.1 cinde. Portanto, pelo Lema 2.4.4, o grupo das tranças puras $PB(n)$ é isomorfo ao **produto semidireto** de $PB(n-1)$ com o grupo livre F_{n-1}, ou seja,

$$PB(n) \cong PB(n-1) \ltimes F_{n-1}.$$

❏

Observação 4.2.5. *O processo apresentado na Proposição 4.2.4, pode ser iterado para obter $PB(n)$ como um produto semidireto dos subgrupos livres $F_1, \ldots, F_{n-1}$, ou seja,*

$$PB(n) \cong (((F_1 \ltimes F_2) \ltimes F_3) \ltimes \ldots \ltimes F_{n-1}). \tag{4.2.2}$$

Corolário 4.2.6. [12, **Corollary 2.4**] *Cada trança pura $\beta \in PB(n)$ possui uma única fatorização como um produto da forma:*

$$\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}, \tag{4.2.3}$$

na qual cada trança pura $\beta_i \in F_i$ é uma trança que admite uma representação tal que todas as cordas possuem permutação trivial, exceto a $(i+1)$-corda, que pode interagir apenas com cordas de índice menor.

Definição 4.2.7. [12, **Definition 2.5**] *Para cada trança $\beta \in PB(n)$, as tranças $\beta_1, \ldots,$ β_{n-1} da expressão (4.2.3) são chamadas* ***coordenadas Artin*** *de β.*

Observação 4.2.8. *O procedimento de isolar todas as interações entre uma certa corda de uma trança pura com as cordas anteriores, foi chamado por Artin*[20] *"pentear a trança". A Figura 4.9 mostra um exemplo do penteado Artin em uma trança pura.*

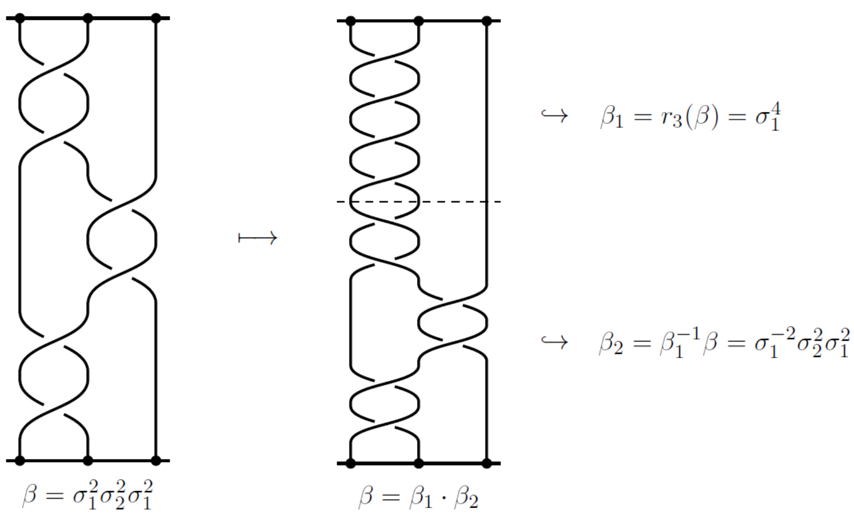

Figura 4.9: Coordenadas Artin da trança pura $\beta = \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$. A trança pura β antes e depois do penteado Artin.

Agora, fixaremos uma base para o subgrupo livre F_{n-1} de $PB(n)$, como segue.

[20]Em sua tese de doutorado, Kim [27] relata que Artin observou que qualquer tentativa de realizar este procedimento experimentalmente em uma pessoa só levaria a protestos violentos e discriminação contra a matemática.

Lema 4.2.9. **[12, Lemma 2.6]** *Para cada $1 \leqslant i < j \leqslant n$, definimos:*

$$x_{i,j} = \sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-2}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}. \tag{4.2.4}$$

Para cada j, as tranças $x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \ldots, x_{j-1,j}$ formam uma base para o subgrupo livre F_{j-1} de $PB(n)$.

Observação 4.2.10. *Como F_{j-1} é um grupo livre, cada coordenada Artin de uma trança pura β admite uma única expressão reduzida em termos dos geradores $x_{i,j}$, ou seja, introduzindo coordenadas no produto semidireto $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$, cada β_{j-1} é expressa em termos dos geradores livres $x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{j-1,j}$ do grupo livre F_{j-1}. Na verdade, essa expressão é o que devemos chamar coordenadas Artin da trança β.*

Observação 4.2.11. *Fazendo referência às notações usadas no Teorema da Apresentação de Artin* (Teorema 3.4.1)*, recordamos que o subgrupo U_n de H_n é gerado pelos elementos: $a_{1,n}, \ldots, a_{n-1,n}$. Nota-se também que a Equação 4.2.4 é, a menos de sinal, a mesma Equação 3.4.7. Isto ocorre, pois os cruzamentos das tranças elementares σ_i adotados neste capítulo, são conforme mostrado na Figura 4.5, e não como na Figura 3.3, o que justifica essa diferença de sinal. Geometricamente, as duas equações são representadas pela Figura a seguir.*

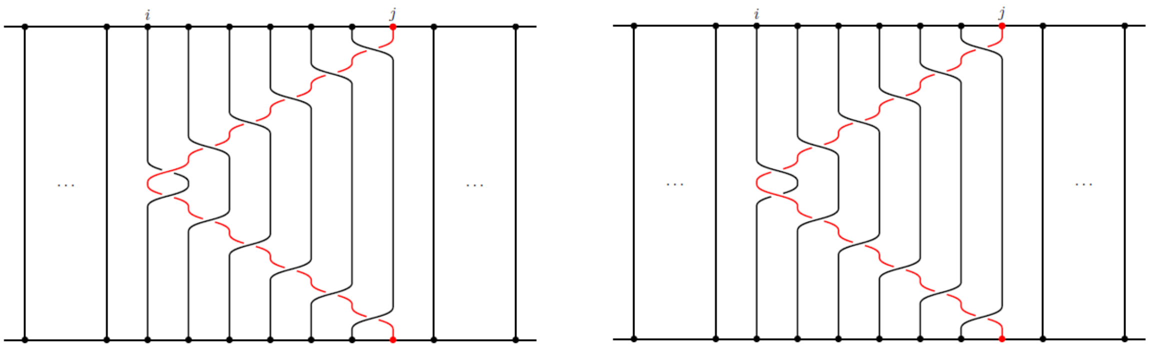

Figura 4.10: Trança geométrica $x_{ij} = \sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-2}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}$ e sua inversa $(x_{ij})^{-1} = \sigma_{j-1}^{-1}\sigma_{j-2}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-2}\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-2}\sigma_{j-1}$.

Observação 4.2.12. *Como vimos na Observação 4.2.8, a operação de encontrar as coordenadas Artin de uma trança pura $\beta \in PB(n)$ e expressá-la na base fixada de cada grupo* *livre é conhecida como a* ***técnica de pentear*** *a trança β. Na Figura 4.11, apresentamos um exemplo dessa técnica aplicada à trança pura $\beta = \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$ da Figura 4.9. Note que a trança $\beta \in PB(3) \cong PB(2) \ltimes F_2 \cong F_1 \ltimes F_2$, assim, $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2$, onde $\beta_i \in F_i$, $i = 1, 2$. Pelo Corolário 4.2.6, temos que F_i é o conjunto das tranças puras que admitem uma representação no qual todas as cordas possuem permutação trivial, exceto a $(i+1)$-corda, que pode interagir com as cordas de índice menor.*

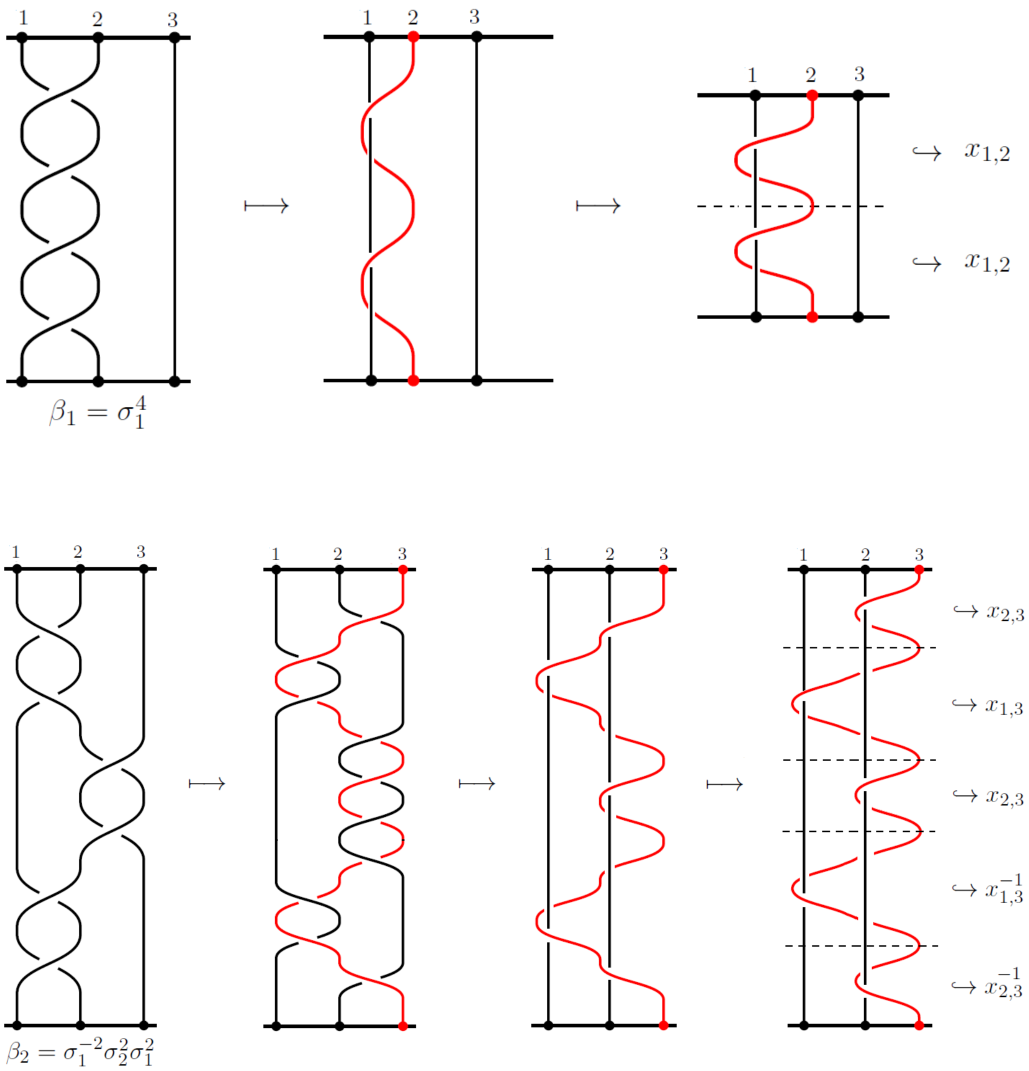

Figura 4.11: Penteado Artin.

Uma descrição formal do penteado Artin para uma trança pura pode ser encontrada em [37, pág. 32].

4.3 A expansão Magnus

Nesta seção, apresentamos uma descrição de uma bi-ordenação para grupos livres, devida a W. Magnus. Seja $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ o grupo livre de posto n. Seguindo Magnus [32], produziremos uma representação de F_n em um anel de séries de potências, através do qual definiremos uma bi-ordenação para o grupo livre F_n.

Definição 4.3.1. *Sejam $(X_1, \ldots, X_n)$ um conjunto ordenado e $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ o anel de série de potências formais em n indeterminadas não-comutativas X_i. Tais séries são somas infinitas de monômios, cada um dos quais é uma palavra nas letras X_i. Assim, cada série tem a forma genérica*

$$f = \sum_{W \in \{X_1, \ldots, X_n\}^*} f_W W, \tag{4.3.1}$$

onde $\{X_1, \ldots, X_n\}^*$ denota o conjunto de todas as palavras de comprimento finito no alfabeto $\{X_1, \ldots, X_n\}$. O comprimento da palavra W é chamado o ***grau*** *do monômio $f_W W$. Como estamos considerando n variáveis não comutativas, existem n^d monômios de grau d.*

Observação 4.3.2. *Um elemento no anel $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ pode ser escrito na forma:*

$$c_0 + c_1 W_1(X_1, \ldots, X_n) + c_2 W_2(X_1, \ldots, X_n) + \cdots, \tag{4.3.2}$$

onde cada coeficiente c_i é um inteiro e os monômios $W_i(X_1, \ldots, X_n)$ são produtos de potências dos geradores $X_1, \ldots, X_n$. Cada termo $c_i W_i(X_1, \ldots, X_n)$ de uma tal série formal, possui um grau total, que é a soma dos expoentes do monômio W_i.

Definição 4.3.3. *A adição sobre $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ é definida somando-se os coeficientes que possuem a mesma palavra, enquanto que a multiplicação é dada por:*

$$\left(\sum f_W W\right) \cdot \left(\sum g_W W\right) = \sum_W \left(\sum_{UV=W} f_U g_V\right) W \tag{4.3.3}$$

Observação 4.3.4. *Denotaremos por $\mathcal{O}(X^k)$ o ideal de $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ formado pelas* *séries envolvendo somente monômios de grau* $\geqslant k$.

Definição 4.3.5. [12, Definition 2.7] *Seja* $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *um grupo livre com base* $(x_1, \ldots, x_n)$. *A* ***expansão Magnus*** *de* F *relativa à base* $(x_1, \ldots, x_n)$ *é a aplicação:* $\mu : F \longrightarrow \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, *definida nos geradores de* F *como segue:*

$$\mu(x_i) = 1 + X_i, \qquad \mu(x_i^{-1}) = 1 - X_i + X_i^2 - X_i^3 + \ldots. \tag{4.3.4}$$

Exemplo 4.3.6. [12, Example 2.8] *Para* $w = x_1^{-1}x_2x_1$, *temos:*

$$\begin{aligned}\mu(w) &= (1 - X_1 + X_1^2 - X_1^3 + \ldots) \cdot (1 + X_2) \cdot (1 + X_1)\\ &= 1 + X_2 - X_1X_2 + X_2X_1 + X_1^2X_2 - X_1X_2X_1 \bmod \mathcal{O}(X^4).\end{aligned}$$

Proposição 4.3.7. [32, Lemma 5.3] *Considere* $\mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$ *o subconjunto de* $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ *formado pelas séries de potências com termo constante igual a* 1, *onde* $\mathcal{O}(X)$ *denota o ideal de* $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ *formado pelas séries envolvendo somente monômios de grau maior ou igual a* 1. *Então,* $\mathcal{G}$ *é um subgrupo de* $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, *munido da operação de multiplicação.*

Demonstração:
Desde que o termo constante de um produto é o produto dos termos individuais constantes, segue que $\mathcal{G}$ é fechado sob a operação de multiplicação. Além disso, desde que a multiplicação é associativa em $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ e $1 = 1 + 0 \cdot X \in \mathcal{G}$, a associatividade e a existência de um elemento identidade são válidas para $\mathcal{G}$.
Para mostrarmos que $\mathcal{G}$ é um grupo com a multiplicação, é suficiente mostrar a existência do inverso multiplicativo para um elemento $g = 1 + h \in \mathcal{G}$, ou seja $h \in \mathcal{O}(X)$ é uma série envolvendo apenas monômios de grau maior ou igual a 1. É natural pensarmos que $g^{-1} = 1 - h + h^2 - h^3 + \ldots$ existe e é o inverso procurado. De fato, desde que h tem termo constante igual a zero e

$$\begin{aligned}&(1 + x_1) \cdot (1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \ \ldots + (-1)^n x_1^n + \ldots) =\\ &\qquad = (1 - x_1 + x_1^2 - x_1^3 + \ldots + (-1)^n x_1^n + \ldots)\\ &\qquad + (x_1 - x_1^2 + x_1^3 - x_1^4 + \ldots + (-1)^{n+1} x_1^n + \ldots) = 1.\end{aligned}$$

Segue de [32, Lemma 5.2] que

$$g \cdot g^{-1} = (1+h)(1-h+h^2-h^3+\ldots+(-1)^n h^n+\ldots) = 1.$$

Assim, desde que $g^{-1} \in \mathcal{G}$, segue o resultado.

❏

Definição 4.3.8. [12, pág. 263] *A série central inferior associada a um grupo F é uma sequência de subgrupos de F*

$$F = F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \tag{4.3.5}$$

definidos indutivamente por $F_{n+1} = [F_n, F]$, isto é, o subgrupo gerado pelos comutadores $hgh^{-1}g^{-1}$, com $h \in F_n$ e $g \in F$. Estes são subgrupos normais de F e os grupos quocientes F_n/F_{n+1} são abelianos.

Observação 4.3.9. *Se F é o grupo livre cuja base é (x, y), considerando a palavra $w = x^2y^2 \neq 1 \in F$, pela expansão Magnus, teríamos:*

$$\begin{aligned} \mu(w) &= \mu(x^2y^2) = \mu(x^2)\mu(y^2) = \mu(x\cdot x)\mu(y\cdot y) \\ &= (1+X)(1+X)(1+Y)(1+Y) = (1+2X+X^2)(1+2Y+Y^2) \\ &= 1+2X+Y^2+2Y+\underline{4XY}+2XY^2+X^2+2YX^2+X^2Y^2. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Note que na expansão 4.3.6, aparece um único monômio da forma XY e o seu coeficiente não nulo $4 = 2.2$ é dado pelo produto dos expoentes dos geradores x e y na palavra $w = x^2y^2$. Neste caso, não podemos ter $\mu(w) = 1$ em $\{1 + \mathcal{O}(X)\}$.

Proposição 4.3.10. [12, Proposition 2.9] *Suponhamos que F seja um grupo livre e consideremos a expansão Magnus $\mu : F \longrightarrow \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$.*

(i) *A aplicação $\mu : F \to \mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$ é injetiva.*

(ii) *Para cada k não negativo, a imagem Magnus do k-ésimo termo na série central* *inferior de F esta incluída em $1+\mathcal{O}(X^{k+1})$, ou seja*

$$\mu(F_k) = \mu([F_{k-1}, F]) \subset 1+\mathcal{O}(X^{k+1}).$$

Demonstração:

(i) Mostraremos que $Ker(\mu)$ é trivial. De fato:

Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ a base de F envolvida na definição de μ. Seja w um elemento não trivial de F. Então podemos escrever $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots x_{i_l}^{\epsilon_l}$, com $l \geqslant 1, i_r \neq i_{r+1}$ para $r \in \{1, \ldots, l-1\}$ e cada $\epsilon_r \neq 0$.

Quando expandimos a série $\mu(w)$, percebemos que esta envolve um único monômio da forma $X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_l}$ e seu coeficiente é o produto $\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_l$, dos expoentes dos geradores $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ na palavra w, o qual é não é nulo (vide exemplo dado na Observação 4.3.9). Segue que $\mu(w) \neq 1$. Portanto $Ker(\mu)$ é trivial e assim, μ é uma aplicação injetiva.

(ii) A demonstração seguirá por indução sobre k. Para $k = 0$, o 0-ésimo termo na série central inferior de F é o próprio $F = F_0$ e, pelo item (i), a imagem Magnus de F_0 está contida em $1+\mathcal{O}(X^{0+1})$. Suponhamos por hipótese de indução (H.I.), que o resultado seja válido para $k-1$, isto é, a imagem Magnus do $(k-1)$-ésimo termo $F_{k-1} = [F_{k-2}, F]$ na série central inferior de F está contida em $1+\mathcal{O}(X^k)$.

Considere o k-ésimo termo $F_k = [F_{k-1}, F]$ na série central inferior de F.

Seja $hgh^{-1}g^{-1} \in F_k$ um gerador de F_k, com $h \in F_{k-1}$ e $g \in F$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu(hgh^{-1}g^{-1}) &\overset{homo.}{=} \underbrace{\mu(h)}_{\in 1+\mathcal{O}(X^k)(H.I.)} \overbrace{\mu(g)}^{\in 1+\mathcal{O}(X)} \mu(h)^{-1}\mu(g)^{-1} \\ \Rightarrow &\quad \mu(hgh^{-1}g^{-1}) \in 1+\mathcal{O}(X^{k+1}), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

❏

Observação 4.3.11. *A Proposição* (4.3.10) (ii) *será a propriedade técnica a ser utilizada na construção de uma ordenação para $PB(n)$.*

4.3.1 Ordenando Grupos Livres

Usaremos a expansão Magnus para ordenar grupos livres. Primeiramente, ordenaremos o anel $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ como segue. Para cada d, a ordenação natural

$$X_1 \prec X_2 \prec \ldots \prec X_n$$

induz uma ordenação lexicográfica sobre os monômios de grau total d. Portanto, temos uma enumeração crescente natural destes monômios. Por exemplo, para $n = d = 2$, a enumeração crescente dos monômios de grau 2 é a sequência:

$$(X_1^2, X_1X_2, X_2X_1, X_2^2). \tag{4.3.7}$$

Mais precisamente:

Definição 4.3.12. [12, Definition 2.11]

(i) *Para $d \geqslant 0$ e $f \in \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, digamos $f = \sum f_W W$, denotamos por $C_d(f)$ a sequência $(f_{W_1}, \ldots, f_{W_N})$, onde $W_1, \ldots, W_N$ é a enumeração crescente de todos os monômios de grau d. Denotemos por $c_d(f)$ a soma de todos os coeficientes f_{W_i} em $C_d(f)$.*

(ii) *Para $f, g \in \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, declaramos que $f \prec^{SUMLEX} g$ é verdade, se existe d tal que as sequências $C_{d'}(f)$ e $C_{d'}(g)$ coincidem, para $d' < d$, e,*

- *Temos $c_d(f) < c_d(g)$ ou,*
- *Temos $c_d(f) = c_d(g)$ e a sequência $C_d(f)$ é lexicograficamente menor que a sequência $C_d(g)$, isto é, existe um índice k tal que as primeiras $(k-1)$ entradas são as mesmas, e a k-ésima entrada de $C_d(f)$ é menor que a k-ésima entrada de $C_d(g)$.*

Exemplo 4.3.13. [12, Example 2.12] *Vamos comparar a série dada no Exemplo 4.3.6, $f = 1 + X_2 - X_1X_2 + X_2X_1 + X_1^2X_2 - X_1X_2X_1 \ mod \mathcal{O}(X^4)$ com o polinômio $g = 1 + X_2$. Observamos que:*

- *No grau 0, existe somente a constante monomial, e assim: $C_0(f) = C_0(g) = (1)$.*

- *No grau* 1*, a enumeração crescente para os dois monômios é* X_1, X_2 *e assim,* $C_1(f) = C_1(g) = (0, 1)$.

- *No grau* 2*, a enumeração crescente dos quatro monômios é dada como na Equação (4.3.7):* $X_1^2, X_1X_2, X_2X_1, X_2^2$ *e, neste caso,*

$$C_2(f) = (0, -1, 1, 0) \quad e \quad C_2(g) = (0, 0, 0, 0).$$

  Assim, $c_2(f) = c_2(g) = 0$*. Então, vamos comparar as sequências* $C_2(f)$ *e* $C_2(g)$*, começando da esquerda para a direita, onde temos que a segunda entrada de* f *é menor que a segunda entrada de* g*.*

Portanto, $f \prec^{SUMLEX} g$.

Observação 4.3.14. *Considere a série* $f = x^2 + 4xy + 8x^3$ *e* $h = 1 + x \in \mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$*. Note que* f *possui coeficiente* $f_W = 0$*, para o grau* $d = 1$*. O próximo grau, no qual os coeficientes de* f *são não nulos, será* $d = 2$*, e então* $C_2(f) = (1, 4)$*. Na série produto:*

$$f \cdot h = (x^2 + 4xy + 8x^3) \cdot (1 + x) = x^2 + 4xy + 8x^3 + x^3 + 4x^2y + 8x^4,$$

para $d = 2$*, teremos* $C_2(f \cdot h) = C_2(f) = (1, 4)$*. Note que, denotando por* f_W *os coeficientes da série* $f \in \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$*, na série produto* $f \cdot h$*, temos que os seus coeficientes satisfazem* $(f \cdot h)_W = f_W$*.*

Lema 4.3.15. [12, Lemma 2.13] *A relação* $\prec^{SUMLEX}$ *é uma ordem linear de* $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$*, que é invariante sob a adição e sob a multiplicação em ambos os lados por um elemento do subgrupo multiplicativo* $\mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$*.*

Demonstração:

Invariância sob Adição:

Primeiro afirmamos que $f \prec^{SUMLEX} g \Leftrightarrow g - f \succ^{SUMLEX} 0$.

Observamos que $0 \prec^{SUMLEX} g - f \Leftrightarrow \exists\, d$ tal que as sequências $C_{d'}(0)$ e $C_{d'}(g - f)$ coincidem para $d' < d$ e $0 = c_d(0) < c_d(g - f)$ ou se $0 = c_d(0) = c_d(g - f)$, então a sequência $C_d(0)$ é lexicograficamente menor que a sequência $C_d(g - f)$.

De fato, sejam $f = \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} f_W W$ e $g = \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} g_W W$ séries em $\mathbb{Z}[[X_1,\ldots,X_n]]$ e consideremos

$$\begin{aligned} g - f &= \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} g_W W - \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} f_W W \\ &= \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} (g_W - f_W) W \\ &= \sum_{W \in \{X_1,\ldots,X_n\}^*} (g - f)_W W. \end{aligned}$$

Assim, temos que $c_d(g-f) = c_d(g) - c_d(f)$, para cada grau d.
Seja d o menor grau para o qual existe um grau monomial d que não tem o mesmo coeficiente em f e g. Então, d é também o menor grau para o qual existe um grau monomial d com um coeficiente não nulo em $g - f$.
Suponhamos que $f \prec^{SUMLEX} g$. Então:

(i) ou $c_d(f) < c_d(g)$ e, assim, $0 < c_d(g-f)$, o que implica que $0 \prec^{SUMLEX} g - f$.

(ii) ou $c_d(f) = c_d(g)$, o que implica $0 = c_d(0) = c_d(g-f)$ e $C_d(f)$ é lexicograficamente menor que $C_d(g)$ e, neste caso, $C_d(g-f)$ é lexicograficamente maior que a sequência constante $(0,\ldots,0)$ e, neste caso, também segue que $0 \prec^{SUMLEX} g - f$.

Portanto, em ambos os casos temos $f \prec^{SUMLEX} g \Leftrightarrow g - f \succ^{SUMLEX} 0$.
Note que as implicações da demonstração são na verdade bi-implicações e, assim, a recíproca da afirmação é imediata.
Desde que podemos escrever $(g+h) - (f+h) = g - f$, temos

$$f \prec^{SUMLEX} g \overset{af.}{\Longleftrightarrow} 0 \prec^{SUMLEX} g - f = (g+h) - (f+h) \overset{af.}{\Longleftrightarrow} f + h \prec^{SUMLEX} g + h.$$

A prova da invariância à esquerda é totalmente análoga. Portanto, $\prec^{SUMLEX}$ é invariante em ambos os lados sob a adição.

Invariância sob a Multiplicação:
Para o produto, precisamos mostrar que $f \prec^{SUMLEX} g$ implica $fh \prec^{SUMLEX} gh$, para $h \in \mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$. É suficiente provar que $f \succ^{SUMLEX} 0 \Rightarrow fh \succ^{SUMLEX} 0$.
Seja d o primeiro grau para o qual $C_d(f)$ contém pelo menos um coeficiente diferente de zero. Para cada grau d do monômio W, temos: $(fh)_W = f_W$. Assim, $C_d(fh) = C_d(f)$ e,

desde que por hipótese $0 \prec^{SUMLEX} f$, devemos ter que:

(i) ou $c_d(0) \prec c_d(f) = c_d(fh)$ e, neste caso, $0 \prec c_d(f-0) = c_d(f) = c_d(fh)$ o que implica $0 \prec^{SUMLEX} fh$;

(ii) ou $0 = c_d(0) = c_d(f) = c_d(fh)$ e a sequência $C_d(0)$ é lexicograficamente menor que a sequência $C_d(f) = C_d(fh)$. Então, $0 \prec^{SUMLEX} fh$.

Assim, em qualquer dos casos $f \succ^{SUMLEX} 0 \Rightarrow fh \succ^{SUMLEX} 0$. Portanto,

$$f \prec^{SUMLEX} g \overset{af.}{\Leftrightarrow} (g-f) \succ^{SUMLEX} 0 \Rightarrow (g-f)h \succ^{SUMLEX} 0$$
$$\Leftrightarrow gh - fh \succ^{SUMLEX} 0 \overset{af.}{\Leftrightarrow} fh \prec^{SUMLEX} gh.$$

Para a invariância à esquerda, o procedimento é similar e concluímos que, $\prec^{SUMLEX}$ é invariante sob a multiplicação em ambos os lados por um elemento do subgrupo multiplicativo $\mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$.

❏

Observação 4.3.16. *Notemos que a ordenação $\prec^{SUMLEX}$ em $\mathbb{Z}[[X_1, \dots, X_n]]$ não é invariante sob a multiplicação arbitrária, por exemplo, por -1.*

Exemplo 4.3.17. *Sejam $f = 1 + x^2$, $g = x^2 + 4xy + 8x^3$ séries em $\mathbb{Z}[[X, Y]]$. Note que:*

- *$C_1(f) = (0)$ e $C_1(g) = (0)$, assim, $c_1(f) = c_1(g) = 0$*
- *$C_2(f) = (1, 0)$ e $C_2(g) = (1, 4)$, assim, $c_2(f) = 1$ e $c_2(g) = 5$. Portanto, pela Definição 4.3.12, temos que $f \prec^{SUMLEX} g$.*

Agora consideremos $h = -1$ e mostremos que $\prec^{SUMLEX}$ não é invariante pela multiplicação arbitrária, ou seja, $f \prec^{SUMLEX} g$ não implica $f \cdot h \prec^{SUMLEX} g \cdot h$. De fato,

- *$(f \cdot h) = (1 + x^2) \cdot (-1) = -1 - x^2$;*
- *$(g \cdot h) = (x^2 + 4xy + 8x^3) \cdot (-1) = -x^2 - 4xy - 8x^3$.*

Assim, temos que:

- *$C_1(f \cdot h) = (0)$ e $C_1(g \cdot h) = (0)$, assim, $c_1(f \cdot h) = c_1(g \cdot h) = 0$*

- *$C_2(f \cdot h) = (-1, 0)$ e $C_2(g \cdot h) = (-1, -4)$, assim, $c_2(f \cdot h) = -1$ e $c_2(g \cdot h) = -5$. Portanto, pela Definição 4.3.12, temos que $g \cdot h \prec^{SUMLEX} f \cdot h$.*

Usando a expansão Magnus, definiremos uma ordenação para todo grupo livre finitamente gerado com uma base fixada, naturalmente chamada **Ordenação Magnus**.

Definição 4.3.18. **[12, Definition 2.14]** *Assuma que F seja um grupo livre com base $(x_1, \ldots, x_n)$. Para $w, w' \in F$, declaramos que*

$$w \prec_\mu w' \text{ é válido, se tivermos } \mu(w) \prec^{SUMLEX} \mu(w'), \tag{4.3.8}$$

onde μ é a expansão Magnus relativa à base $(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposição 4.3.19. **[12, Proposition 2.15]** *Para cada grupo livre de posto finito F e para cada base $(x_1, \ldots, x_n)$ de F, a ordenação Magnus de F relativa à $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma ordenação linear que é invariante sob a multiplicação de ambos os lados.*

Demonstração:
Primeiro notemos que $\prec_\mu$ é uma ordenação estrita, ou seja, $\prec_\mu$ não é reflexiva e vale a propriedade transitiva.

<u>Não reflexividade:</u>
Dado $w \in F$, se $w \prec_\mu w$, teríamos $\mu(w) \prec^{SUMLEX} \mu(w)$, o que é uma contradição, pois $\prec^{SUMLEX}$ é uma ordenação estrita de $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, pelo Lema 4.3.15.

<u>Propriedade transitiva:</u>
Dados $w_1, w_2, w_3 \in F$ tais que $w_1 \prec_\mu w_2$ e $w_2 \prec_\mu w_3$, então $\mu(w_1) \prec^{SUMLEX} \mu(w_2)$ e $\mu(w_2) \prec^{SUMLEX} \mu(w_3)$, mas como $\prec^{SUMLEX}$ é uma ordenação estrita, segue que $\mu(w_1) \prec^{SUMLEX} \mu(w_3)$, o que implica $w_1 \prec_\mu w_3$.

Agora, afirmamos que a ordenação estrita $\prec_\mu$ é uma ordenação linear (ou total) sobre F, ou seja, dados quaisquer dois elementos em F, eles podem ser comparados. Sejam $w_1, w_2 \in F$ tais que $w_1 \neq w_2$. Desde que, pela Proposição 4.3.10(i), a expansão Magnus $\mu : F \to \mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\} \subset \mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$ é injetiva, segue que $\mu(w_1) \neq \mu(w_2)$. Mas então, como $\prec^{SUMLEX}$ é uma ordem linear sobre $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, devemos ter

$$\mu(w_1) \prec^{SUMLEX} \mu(w_2) \text{ ou } \mu(w_2) \prec^{SUMLEX} \mu(w_1), \tag{4.3.9}$$

o que implica $w_1 \prec_\mu w_2$ ou $w_2 \prec_\mu w_1$.

Para a invariância sob a multiplicação em ambos os lados, precisamos mostrar que dados $w, w', h \in F$ tais que $w \prec_\mu w'$, então $wh \prec_\mu w'h$ e $hw \prec_\mu hw'$. Mas, se $w \prec_\mu w'$ é válido, temos da definição que $\mu(w) \prec^{SUMLEX} \mu(w')$ e, desde que, pelo Lema 4.3.15, $\prec^{SUMLEX}$ é invariante sob a multiplicação em ambos os lados por um elemento do subgrupo $\mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$, para $\mu(h) \in \mathcal{G} = \{1 + \mathcal{O}(X)\}$, devemos ter

$$\mu(w)\mu(h) \prec^{SUMLEX} \mu(w')\mu(h) \overset{\mu\text{ é homo}}{\Rightarrow} \mu(wh) \prec^{SUMLEX} \mu(w'h) \overset{def.}{\Rightarrow} wh \prec_\mu w'h.$$

Analogamente, mostra-se que $hw \prec_\mu hw'$.

❏

Exemplo 4.3.20. *Vamos comparar $w = x_2$ e $w' = x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$. As expansões Magnus são dadas como segue.*

- $\mu(x_2) = 1 + X_2$.

- $$\begin{aligned}\mu(x_2x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}) &= (1 + X_2)(1 + X_1)(1 + X_2) \\ &\quad (1 - X_1 + X_1^2 - X_1^3 + \ldots)(1 - X_2 + X_2^2 - X_2^3 + \ldots) \\ &= (1 + X_1 + 2X_2 + X_1X_2 + X_2X_1 + X_2^2 + X_2^2X_1) \\ &\quad (1 - X_1 - X_2 + X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 - X_1^2X_2 - X_1X_2^2 + \ldots) \\ &= 1 + X_2 - 2X_1^2 + X_1X_2 - X_2X_1 + 2X_2^2 \operatorname{mod}\mathcal{O}(X).\end{aligned}$$

As sequências são, respectivamente, para o grau $d = 1$: $(0, 1)$ e $(0, 1)$. Então, verificaremos para o próximo grau $d = 2$ e, assim, $C_2(\mu(w)) = (0, 0, 0, 0)$ e $C_2(\mu(w')) = (-2, 1, -1, 2)$ e isso implica que $c_2(\mu(w)) = c_2(\mu(w')) = 0$. Assim, analisamos as respectivas sequências e notamos que $C_2(\mu(w'))$ é lexicograficamente menor que $C_2(\mu(w))$, se observarmos as primeiras entradas. Portanto, $\mu(w') \prec^{SUMLEX} \mu(w)$ e, assim, $w' \prec_\mu w$.

4.4 A ordenação Magnus do Grupo de Tranças Puras

Agora vamos ao nosso principal objetivo: como vimos na Observação 4.2.5, o grupo das tranças puras é um produto semidireto de grupos livres. Tendo ordenado grupos livres, via a expansão Magnus, podemos deduzir naturalmente uma ordenação para $PB(n)$.

4.4.1 Extensões bi-ordenáveis

Ordenabilidade à esquerda é preservada sob extensões, mas isso não é necessariamente verdade para bi-ordenações, como veremos. No entanto, temos o seguinte critério útil.

Lema 4.4.1. [12, Lemma 3.1] *Consideremos a seguinte sequência exata de grupos:*

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

e, além disso, suponhamos que $\prec_N$ seja uma ordenação invariante à esquerda de N e que $\prec_H$ seja uma ordenação invariante à esquerda de H. Para $g, g' \in G$, declaramos que $g \prec_G g'$ é válido, se $p(g) \prec_H p(g')$ ou, se $p(g) = p(g')$ e $1 \prec_N g^{-1}g'$.

(1) *A relação $\prec_G$ é uma ordenação invariante à esquerda de G.*

(2) *Se $\prec_N$ e $\prec_H$ são ordenações bi-invariantes, então $\prec_G$ é uma ordenação bi-invariante de G se, e somente se, a conjugação de N por G preserva a ordem, isto é, $f \prec_N f'$ implica que $g^{-1}fg \prec_N g^{-1}f'g$, $\forall f, f' \in N$ e $g \in G$,.*

Exemplo 4.4.2. *O grupo fundamental da Garrafa de Klein $K = \langle x, y \ ; \ x^{-1}yx = y^{-1} \rangle$ se encaixa na seguinte sequência exata curta*

$$1 \to \mathbb{Z} \to K \to \mathbb{Z} \to 1, \tag{4.4.1}$$

na qual $\mathbb{Z}$ é o subgrupo cíclico infinito gerado por y, o qual é bi-ordenado, com a ordem usual. Em particular, $\mathbb{Z}$ é ordenável à esquerda e dessa forma, pelo Lema 4.4.1 - (i), *segue que K é ordenável à esquerda, mas não é bi-ordenado, como mostramos no Exemplo 4.1.12. Portanto, a bi-ordenabilidade não é preservada sob extensões.*

4.4.2 Resultados Preparatórios

Recordamos que, para o grupo de tranças puras, existe a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{i} PB(n) \xrightarrow{r_n} PB(n-1) \longrightarrow 1.$$

Em vista do Lema 4.4.1, a fim de utilizarmos a ordenação Magnus de F_{n-1} para definir uma ordenação bi-invariante sobre $PB(n)$, precisamos mostrar que esta ordenação é invariante sob a conjugação por elementos de $PB(n)$. Para isto, precisaremos dos resultados que enunciamos a seguir.

Lema 4.4.3. **[12, Lemma 3.3]** *Assumimos que $\varphi : F \to F$ seja um automorfismo de um grupo livre F, e seja φ_{ab} o automorfismo induzido sobre a abelianização $F/[F,F]$ de F*[21]*. Se φ_{ab} é o automorfismo identidade, então a ordenação Magnus sobre F* (com respeito a qualquer base fixada) *é invariante sob φ, ou seja, se $w_1 \prec_\mu w_2$, então $\varphi(w_1) \prec_\mu \varphi(w_2)$, para quaisquer $w_1, w_2 \in F$.*

Demonstração:
Para provarmos que a ordenação Magnus sobre F é invariante sob φ, é suficiente provar que $1 \prec_\mu w$ implica que $1 \prec_\mu \varphi(w)$, para qualquer $w \in F$. Primeiramente, observamos que pela Proposição 4.3.10 - (ii), $\mu([F,F])$ está incluída no subgrupo $1 + \mathcal{O}(X^2)$ de $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$.
Desde que φ_{ab} é o automorfismo identidade, então temos por definição que

$$\begin{aligned} \varphi_{ab} : F/[F,F] &\longrightarrow F/[F,F] \\ x_i^{-1} + [F,F] &\longmapsto \varphi_{ab}(x_i^{-1} + [F,F]) = \varphi(x_i^{-1}) + [F,F] = x_i^{-1} + [F,F], \end{aligned}$$

Mas $x_i^{-1} + [F,F] = \varphi(x_i^{-1}) + [F,F]$ se, e somente se, $x_i^{-1} \cdot \varphi(x_i) \in [F,F]$ para cada i. Assim, como $\mu([F,F]) \subset 1 + \mathcal{O}(X^2)$, segue que $\mu(x_i^{-1} \cdot \varphi(x_i)) \in 1 + \mathcal{O}(X^2)$, ou seja,

$$\mu(x_i^{-1} \cdot \varphi(x_i)) = \underbrace{\mu(x_i^{-1})}_{=\mu(x_i)^{-1}} \cdot \mu(\varphi(x_i)) = 1 + \theta, \quad \theta \in \mathcal{O}(X^2) \tag{4.4.2}$$

$$\Rightarrow \mu(\varphi(x_i)) = \mu(x_i) \cdot (1 + \theta) = \mu(x_i) + \underbrace{\mu(x_i)\theta}_{\in \mathcal{O}(X^2)} = \mu(x_i) \bmod \mathcal{O}(X^2).$$

Agora, suponhamos que $w \neq 1$. Seja d o menor grau positivo para o qual existe um grau monomial d com coeficiente não nulo em $\mu(w)$. A série $\mu(\varphi(w))$ é obtida de $\mu(w)$,

[21] Dado um automorfismo $\varphi : G \to G$, então φ induz um bem definido automorfismo na abelianização

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : G/[G,G] &\to G/[G,G] \\ g + [G,G] &\mapsto \bar{\varphi}(g + [G,G]) := \varphi(g) + [G,G]. \end{aligned}$$

substituindo-se cada ocorrência de X_i por algum elemento de $X_i + \mathcal{O}(X^2)$.

Observação 4.4.4 (Ilustração da afirmação acima). *Consideremos por exemplo a palavra $w = x_i$. Pela expansão Magnus, sabemos que $\mu(x_i) = 1 + X_i$. Por outro lado, como $\mu(\varphi(x_i)) = \mu(x_i) + \mu(x_i) \cdot \theta$, com $\theta \in \mathcal{O}(X^2)$, temos que $\mu(\varphi(x_i)) = 1 + X_i + \underbrace{(1 + X_i) \cdot \theta}_{\in \mathcal{O}(X^2)}$, com $X_i + (1 + X_i) \cdot \theta \in X_i + \mathcal{O}(X^2)$.*

Então, para cada grau d do monômio W, temos a igualdade dos coeficientes, ou seja,

$$\mu(\varphi(w))_W = \mu(w)_W$$

e, portanto, $C_d(\mu(\varphi(w))) = C_d(\mu(w))$ e $c_d(\mu(\varphi(w))) = c_d(\mu(w))$. Assim, comparando o polinômio $f = 1$ com o polinômio obtido da expansão $\mu(w)$, teremos $1 \prec^{SUMLEX} \mu(w)$, já que se compararmos as séries para $d = 0$ as mesmas coincidem, ou seja, $C_0(f) = (1)$ e $C_0(\mu(w)) = (1)$ e, assim, $c_0(f) = 1$ e $c_0(\mu(w)) = 1$. Como $w \neq 1$, temos que existirá um grau positivo d para o qual as séries de f e $\mu(w)$ diferem, pois $C_d(f) = (0)$, para $d \geqslant 1$. Portanto,

$$1 \prec^{SUMLEX} \mu(w) \text{ é equivalente a } 1 \prec^{SUMLEX} \mu(\varphi(w)),$$

isto é, na ordenação Magnus $1 \prec_\mu w$ é equivalente a $1 \prec_\mu \varphi(w)$.

❏

Assim, falta mostrar que a Abelianização da ação conjugação de $PB(n)$ sobre F_{n-1} é a identidade. Isso será mostrado no resultado a seguir.

Lema 4.4.5. [12, Lemma 3.4] *Sejam $\beta \in PB(n)$ e $\varphi : F_{n-1} \to F_{n-1}$ o automorfismo definido por $\varphi(x) = \beta x \beta^{-1}$. Então, a aplicação abelianização φ_{ab} é o automorfismo identidade.*

Demonstração:

Para o automorfismo $\varphi : F_{n-1} \to F_{n-1}$, definido por: $x \mapsto \beta x \beta^{-1}$, devemos mostrar que:

$$\begin{aligned} \varphi_{ab} : F_{n-1}/[F_{n-1}, F_{n-1}] &\to F_{n-1}/[F_{n-1}, F_{n-1}] \\ x + [F_{n-1}, F_{n-1}] &\to \varphi_{ab}(x + [F_{n-1}, F_{n-1}]) = x + [F_{n-1}, F_{n-1}]. \end{aligned}$$

Pela definição dos automorfismos φ_{ab} e φ, temos:

$$\varphi_{ab}(x + [F_{n-1}, F_{n-1}]) := \varphi(x) + [F_{n-1}, F_{n-1}] = \beta x \beta^{-1} + [F_{n-1}, F_{n-1}] \tag{4.4.3}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} x + [F_{n-1}, F_{n-1}] = \beta x \beta^{-1} + [F_{n-1}, F_{n-1}] &\Leftrightarrow \beta x \beta^{-1} x^{-1} \in [F_{n-1}, F_{n-1}] \\ &\Leftrightarrow \beta x \beta^{-1} x^{-1} = g h g^{-1} h^{-1}, \text{ com } g, h \in F_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Afirmação $\bigstar$**:** *Para cada* $i \in \{1, \ldots, n-2\}$*, existe um elemento* $w_i \in F_{n-1}$ *(dependendo de* β*) satisfazendo:*

$$\varphi(x_{i,n}) = w_i x_{i,n} w_i^{-1} \tag{4.4.5}$$

o que implicará que φ_{ab} *é a identidade.*
De fato, temos que $w_i x_{i,n} w_i^{-1} x_{i,n}^{-1} \in [F_{n-1}, F_{n-1}]$, pois $w_i, x_{i,n} \in F_{n-1}$. Então:

$$\begin{aligned} x_{i,n} + [F_{n-1}, F_{n-1}] &= w_i x_{i,n} w_i^{-1} + [F_{n-1}, F_{n-1}] \overset{4.4.5}{=} \varphi(x_{i,n}) + [F_{n-1}, F_{n-1}] \\ &= \varphi_{ab}(x_{i,n} + [F_{n-1}, F_{n-1}]), \end{aligned}$$

ou seja, φ_{ab} é a identidade.
Agora, pela Proposição 4.2.4 como $PB(n) = F_{n-1} \rtimes PB(n-1)$, é suficiente provar a *Afirmação* $\bigstar$, quando $\beta \in F_{n-1}$ ou $\beta \in PB(n-1)$.

▸ No primeiro caso, podemos tomar $\beta = w_i$, para cada i.

▸ Para o segundo caso, mostraremos que, para qualquer $\beta \in B(n-1)$ e, não somente para $\beta \in PB(n-1)$, existe um elemento w_i em F_{n-1} que satisfaz:

$$\varphi(x_{i,n}) = w_i x_{\pi(i),n} w_i^{-1}, \tag{4.4.6}$$

onde π é a permutação associada a β. Para $\beta = \sigma_i$, com $i \leqslant n-2$, a Figura 4.12 fornece as relações:

$$\begin{cases} \varphi(x_{i,n}) = x_{i,n}^{-1} x_{i+1,n} x_{i,n} \\ \varphi(x_{i+1,n}) = x_{i,n} \\ \varphi(x_{j,n}) = x_{j,n}, \text{ para } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

o qual tem a forma esperada para $w_i = x_{i,n}^{-1}$.

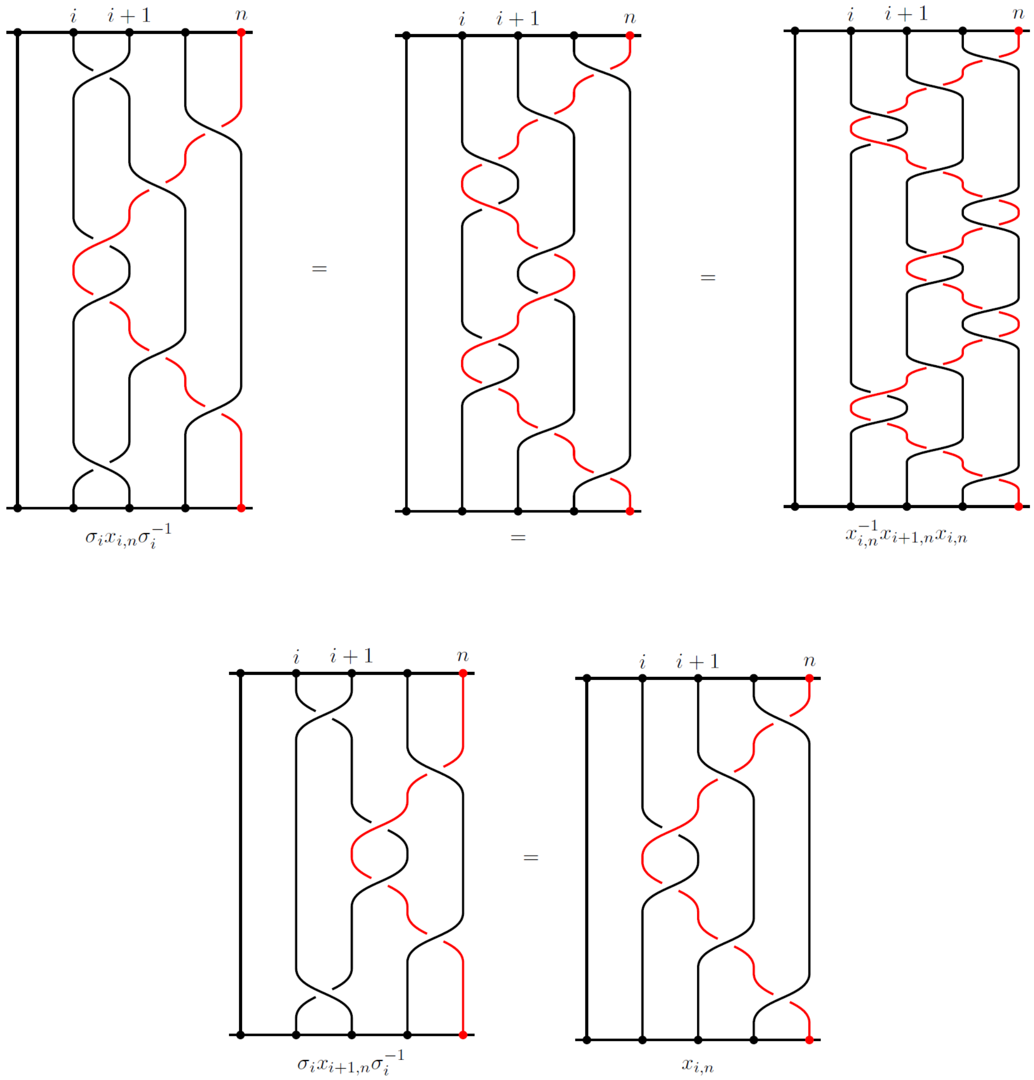

Figura 4.12: Ação da conjugação de σ_i nos geradores $x_{i,n}$ e $x_{i+1,n}$ do subgrupo F_{n-1}.

Para $\beta = \sigma_i^{-1}$, temos:

$$\begin{cases} \varphi(x_{i+1,n}) = x_{i+1,n} x_{i,n} x_{i+1,n}^{-1} \\ \varphi(x_{i,n}) = x_{i+1,n} \\ \varphi(x_{j,n}) = x_{j,n}, \ \text{para } j \neq i, i+1. \end{cases}$$

o qual também tem a forma esperada para $w_i = x_{i+1,n}$. O caso em que β é arbitrário segue por indução sobre o comprimento de uma expressão de β em termos dos geradores $\sigma_i^{\pm 1}$. Então, a Equação 4.4.6 está provada. Em particular, para $\beta \in PB(n-1)$, a permutação π é a identidade e, então, a Equação 4.4.5 é satisfeita. Isso conclui a prova do lema.

❑

Considerando juntamente os resultados dos Lemas 4.4.3 e 4.4.5, obtemos a seguinte

Proposição 4.4.6. **[12, Proposition 3.6]** *Para cada n, a ordenação Magnus de F_{n-1} é invariante sob a conjugação por $PB(n)$.*

Observação 4.4.7. *De agora em diante, quando fizermos referência à expansão Magnus do subgrupo livre F_{j-1} de $PB(n)$ e da ordenação Magnus, sempre vamos considerar a base fixada $(x_{1,j}, \ldots, x_{j-1,j})$, para $j \geqslant 2$.*

4.4.3 Ordenação do Grupo de Tranças Puras

Agora, temos todos os ingredientes para construir uma ordenação bi-invariante de $PB(n)$, indutivamente.

Definição 4.4.8. **[12, Definition 3.8]** *Para cada $\beta, \beta' \in PB(2)$, declaramos que $\beta \prec_{M,2} \beta'$ se tivermos $\beta = \sigma_1^{2e}$ e $\beta' = \sigma_1^{2e'}$, com $e < e'$. Para $n \geqslant 3$ e $\beta, \beta' \in PB(n)$, declaramos que $\beta \prec_{M,n} \beta'$ se tivermos:*

- *ou $r_n(\beta) \prec_{M,n-1} r_n(\beta')$,*
- *ou $r_n(\beta) = r_n(\beta')$ e $r_n(\beta)^{-1}\beta \prec_{\mu} r_n(\beta)^{-1}\beta'$.*

*A relação $\prec_{M,n}$ é chamada a **Relação Magnus** sobre $PB(n)$.*

Observação 4.4.9. *Observemos que as ordenações da Definição 4.4.8 estão diretamente relacionadas com as ordens do Lema 4.4.1, uma vez que temos a seguinte sequência exata curta:*

$$1 \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\subset} PB(n) \xrightarrow{r_n} PB(n-1) \longrightarrow 1.$$

- *A ordem $\prec_{M,n-1}$ refere-se à ordenação de $PB(n-1)$, indutivamente.*
- *A ordem $\prec_{\mu}$ é a ordenação referente ao grupo livre F_{n-1}, pois dados $\beta, \beta' \in PB(n)$, temos que $r_n(\beta)^{-1}\beta, r_n(\beta')^{-1}\beta' \in F_{n-1}$, onde*

$$\beta = (\underbrace{\beta_1}_{\in F_1}, \ldots, \underbrace{\beta_{n-1}}_{\in F_{n-1}}) \Rightarrow r_n(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$$
$$\Rightarrow r_n(\beta)^{-1}\beta = \beta_{n-1} \in F_{n-1}.$$

Analogamente, $r_n(\beta')^{-1}\beta' = \beta'_{n-1} \in F_{n-1}$.

Teorema 4.4.10. [12, Proposition 3.9] *Para cada* $n \geqslant 2$*, a relação Magnus sobre* $PB(n)$ *é uma ordenação bi-invariante.*

Demonstração:
Usaremos indução sobre $n \geqslant 2$.
Para $n = 2$, o resultado é claro, pois $PB(2) = F_1 \rtimes PB(1)$, onde $PB(1)$ é trivial e F_1 é um grupo livre, o qual é bi-ordenado, pela Proposição 4.3.19. Logo, $PB(2)$ é bi-ordenado.
Para $n \geqslant 3$, suponhamos, por hipótese de indução, que $PB(n-1)$ seja bi-ordenado. Temos a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\subset} PB(n) \xrightarrow{r_n} PB(n-1) \longrightarrow 1.$$

Pela Proposição 4.3.19, a ordenação Magnus sobre F_{n-1} é uma ordenação bi-invariante, a qual é também invariante sob a conjugação por $PB(n)$, pela Proposição 4.4.6.
Por outro lado temos, por hipótese de indução, que a relação $\prec_{M,n-1}$ é uma ordenação bi-invariante de $PB(n-1)$. Então, o Lema 4.4.1 implica que a relação $\prec_{M,n}$ é uma ordenação bi-invariante de $PB(n)$.

❏

Observação 4.4.11. *De agora em diante, a relação Magnus sobre* $PB(n)$ *será chamada* ***ordenação Magnus*** *de* $PB(n)$.

Observação 4.4.12. *Se* β, β' *são tranças pertencentes a* $PB(n-1)$*, então elas também pertencem a* $PB(n)$*, pela aplicação inclusão. Como temos* $r_n(\beta) = \beta$ *e* $r_n(\beta') = \beta'$*, segue imediatamente da Definição 4.4.8 que* $\beta \prec_{M,n} \beta'$ *vale se, e somente se,* $\beta \prec_{M,n-1} \beta'$*. Assim, podemos eliminar o índice* n *e simplesmente escrever* $\prec_M$ *para a ordenação Magnus do grupo de tranças puras.*

4.4.4 Ordenação Magnus versus Coordenadas Artin

Ao invés de recorrermos à construção recursiva da Definição 4.4.8, podemos comparar tranças puras diretamente usando suas coordenadas Artin, como segue.

Exemplo 4.4.13. *Consideremos o caso particular em que as tranças $\beta, \beta' \in PB(2)$. Neste caso, sabemos que $\beta \prec_M \beta'$ se, e somente se, temos $\beta = \sigma_1^{2e}$ e $\beta' = \sigma_1^{2e'}$, com $e \prec e'$. Os possíveis casos para e, e' são dados como segue.*

Caso 1: $e, e' > 0$ e $e < e'$.

Vamos tomar como exemplo $e = 1$ e $e' = 2$. Logo, $\beta = \sigma_1^{2\cdot 1} = \sigma_1^2$ e $\beta' = \sigma_1^{2\cdot 2} = \sigma_1^4$. Desde que $PB(2) = PB(1) \ltimes F_1$ e $PB(1)$ é trivial, devemos ter $\beta, \beta' \in F_1$. Assim, $\beta_1 \in F_1$ é a única coordenada Artin de β e $\beta_1' \in F_1$ é a única coordenada Artin de β'. Pelo Lema 4.2.9, β_1, β_1' admitem uma única expressão em termos dos geradores $x_{i,j}$ de F_1, ou seja, $\beta_1 = x_{1,2}$ e $\beta_1' = x_{1,2}^2$. Por outro lado, pela Corolário 4.2.6, $\beta = \beta_1$ e $\beta' = \beta_1'$. Portanto, $\beta = \beta_1 = x_{1,2}$ e $\beta' = \beta_1' = x_{1,2}^2$ e as expansões Magnus são:

- $\mu(\beta_1) = \mu(x_{1,2}) = 1 + X_{1,2}$.
- $\mu(\beta_1') = \mu(x_{1,2}^2) = \mu(x_{1,2}) \cdot \mu(x_{1,2}) = 1 + 2X_{1,2} + X_{1,2}^2$.

Assim, comparando as sequências de coeficientes dos polinômios, para o grau $d = 1$, obtemos:

- $C_1(\mu(\beta_1)) = (1) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1)) = 1 = e$.
- $C_1(\mu(\beta_1')) = (2) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1')) = 2 = e'$.

Portanto, $c_1(\mu(\beta_1)) < c_1(\mu(\beta_1')) \overset{Def.4.3.12}{\Longrightarrow} \mu(\beta_1) \prec^{SUMLEX} \mu(\beta_1') \overset{Def.4.3.18}{\Longrightarrow} \beta_1 \prec_\mu \beta_1'$, ou seja, a sequência de coordenadas Artin de β é menor que a sequência de coordenadas Artin de β'.

Caso 2: $e < 0, e' > 0$.

Vamos tomar $e = -1$ e $e' = 2$. Assim, $\beta = \sigma_1^{2\cdot(-1)} = \sigma_1^{-2}$ e $\beta' = \sigma_1^{2\cdot 2} = \sigma_1^4$. Como anteriormente, $\beta, \beta' \in F_1$ e, então, $\beta = \beta_1 = x_{1,2}^{-1}$ e $\beta' = \beta_1' = x_{1,2}^2$, com expansões Magnus dadas, respectivamente, por:

- $\mu(\beta_1) = \mu(x_{1,2}^{-1}) = 1 - X_{1,2} + X_{1,2}^2 - X_{1,2}^3 + \ldots$.
- $\mu(\beta_1') = \mu(x_{1,2}^2) = \mu(x_{1,2}) \cdot \mu(x_{1,2}) = 1 + 2X_{1,2} + X_{1,2}^2$.

Assim, comparando as sequências de coeficientes dos polinômios, para o grau $d = 1$, *obtemos:*

- $C_1(\mu(\beta_1)) = (-1) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1)) = -1 = e.$
- $C_1(\mu(\beta_1')) = (2) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1')) = 2 = e'.$

Portanto, $c_1(\mu(\beta_1)) \prec c_1(\mu(\beta_1')) \overset{Def.4.3.12}{\Longrightarrow} \mu(\beta_1) \prec^{SUMLEX} \mu(\beta_1') \overset{Def.4.3.18}{\Longrightarrow} \beta_1 \prec_\mu \beta_1'$, *ou seja, a sequência de coordenadas Artin de* β *é menor que a sequência de coordenadas Artin de* β'.

<u>Caso 3:</u> $e, e' < 0$ *e* $e < e'$.
Vamos tomar $e = -2$ *e* $e' = -1$. *Assim,* $\beta = \sigma_1^{2\cdot(-2)} = \sigma_1^{-4}$ *e* $\beta' = \sigma_1^{2\cdot(-1)} = \sigma_1^{-2}$. *Em termos dos geradores* $x_{i,j}$, *temos* $\beta = \beta_1 = x_{1,2}^{-2}$ *e* $\beta' = \beta_1' = x_{1,2}^{-1}$, *onde as expansões Magnus são dadas, respectivamente, por:*

- $\mu(\beta_1) = \mu(x_{1,2}^{-2}) = \mu(x_{1,2}^{-1}) \cdot \mu(x_{1,2}^{-1}) = 1 - 2X_{1,2} + 3X_{1,2}^2 - 4X_{1,2}^3 + \ldots.$
- $\mu(\beta_1') = \mu(x_{1,2}^{-1}) = 1 - X_{1,2} + X_{1,2}^2 - X_{1,2}^3 + \ldots.$

Assim, comparando as sequências de coeficientes dos polinômios, para o grau $d = 1$, *obtemos:*

- $C_1(\mu(\beta_1)) = (-2) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1)) = -2 = e.$
- $C_1(\mu(\beta_1')) = (-1) \Rightarrow c_1(\mu(\beta_1')) = -1 = e'.$

Portanto, $c_1(\mu(\beta_1)) \prec c_1(\mu(\beta_1')) \overset{Def.4.3.12}{\Longrightarrow} \mu(\beta_1) \prec^{SUMLEX} \mu(\beta_1') \overset{Def.4.3.18}{\Longrightarrow} \beta_1 \prec_\mu \beta_1'$, *ou seja, a sequência de coordenadas Artin de* β *é menor que a sequência de coordenadas Artin de* β'.

Observação 4.4.14. *Com base no Exemplo 4.4.13, temos que o expoente* e (respectivamente e') *de* β (respectivamente β') *é exatamente a soma dos coeficientes da sequência* $C_d(\mu(\beta))$ (respectivamente $C_d(\mu(\beta'))$), *para o grau* $d = 1$, *ou seja,* $c_1(\mu(\beta)) = e$ (respectivamente $c_1(\mu(\beta')) = e'$). *Notemos também, que essa sequência sempre terá uma entrada, para cada grau* d, *pois* β, β' *são expressos apenas em termos do gerador* $x_{1,2}$ *de* F_1.

Exemplo 4.4.15. *Consideremos a trança* $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in PB(3)$*, dada por* $\beta = (x_{1,2}, x_{1,3})$*, com* $\beta_i \in F_i$*, conforme Figura 4.13:*

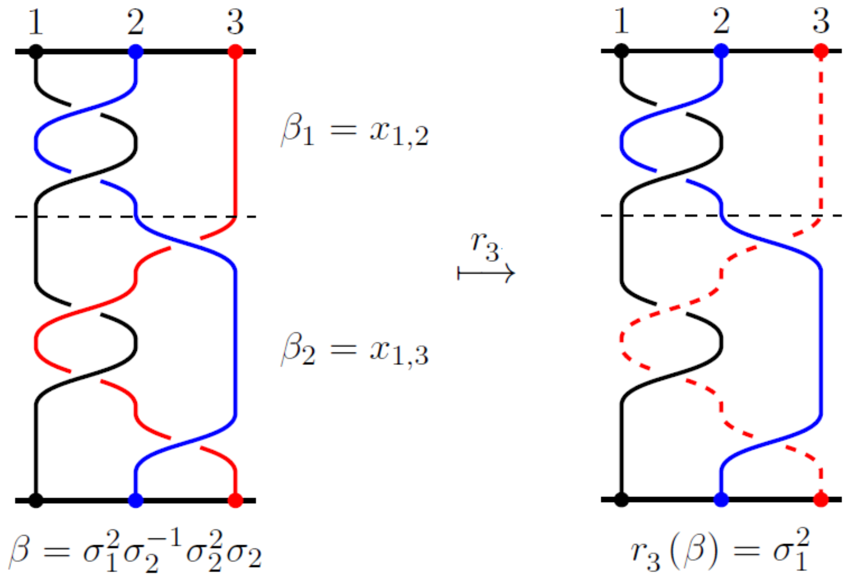

Figura 4.13: Representação geométrica da trança β em $PB(3)$.

Note que aplicando $r_3(\beta)$*, a qual consiste em apagar a última corda, obtemos* $\beta_1 = x_{1,2}$*. Logo, o produto* $r_3(\beta)^{-1} \cdot \beta$ *resulta em* $\beta_2 = x_{1,3}$*, conforme Figura 4.14.*

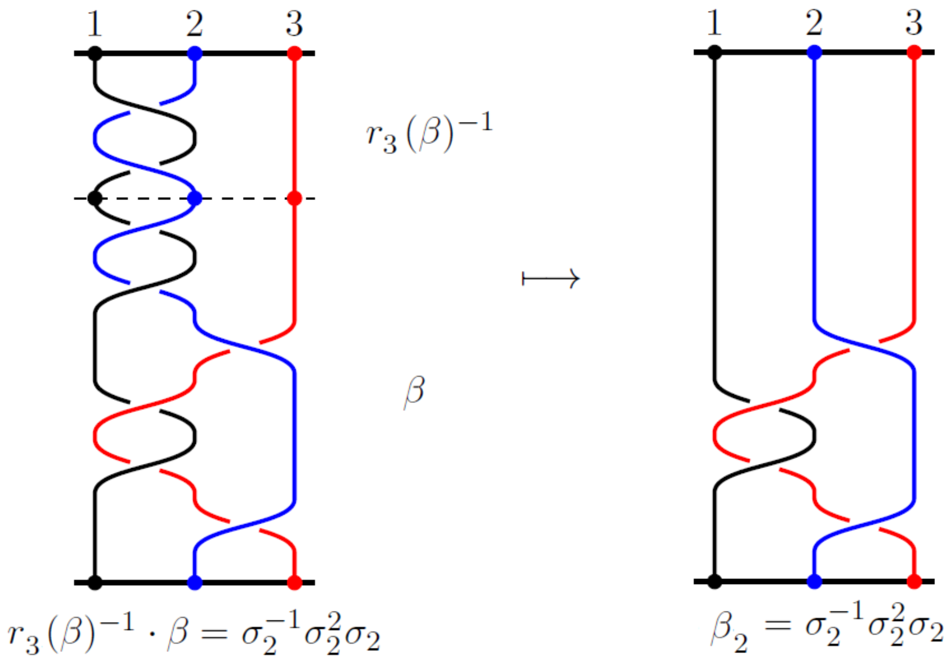

Figura 4.14: Produto $r_3(\beta)^{-1} \cdot \beta = \beta_2 = x_{1,3}$.

Proposição 4.4.16. [12, Proposition 3.10] *Para $\beta, \beta' \in PB(n)$, a relação $\beta \prec_M \beta'$ é verdade se, e somente se, a sequência de coordenadas Artin de β é menor que a sequência de coordenadas Artin de β', com respeito à extensão lexicográfica das ordenações Magnus de cada subgrupo F_j.*

Demonstração:
Usaremos indução sobre $n \geqslant 2$. Para $n = 2$, dizemos que $\beta \prec_M \beta'$ se temos $\beta = \sigma_1^{2e}$ e $\beta' = \sigma_1^{2e'}$, com $e < e'$. Notemos que potências pares da trança elementar σ_1 são tranças puras. Dados $\beta, \beta' \in PB(2)$, temos que $\beta, \beta' \in F_1$, pois $PB(2) = F_1 \rtimes PB(1)$, onde $PB(1)$ é trivial.
Os geradores de F_1 são da forma $x_{1,2}$, conforme Observação 4.4.7 e, assim, $\beta, \beta' \in F_1$ são produtos de $x_{1,2}$, apenas. Mais ainda, $\beta = x_{1,2}^e$ e $\beta' = x_{1,2}^{e'}$ e como $e < e'$, basta compararmos as sequências para o grau $d = 1$ na expansão Magnus, o que implica que a sequência de coordenadas Artin de β será menor que a sequência de coordenadas Artin de β', pois:

$$\underbrace{c_1(\mu(\beta)) = e < e' = c_1(\mu(\beta'))}_{Obs.4.4.14} \overset{Def.4.3.12}{\Longleftrightarrow} \mu(\beta) \prec^{SUMLEX} \mu(\beta') \overset{Def.4.3.18}{\Longleftrightarrow} \beta_1 = \beta \prec_\mu \beta' = \beta_1',$$

conforme ilustrado no Exemplo 4.4.13.

Seja $n \geqslant 3$ e suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para $n-1$. Sejam $\beta, \beta' \in PB(n)$ tais que $\beta \prec_M \beta'$, isto é:

- $r_n(\beta) \prec_M r_n(\beta')$,
- ou $r_n(\beta) = r_n(\beta')$ e $r_n(\beta)^{-1}\beta \prec_\mu r_n(\beta')^{-1}\beta'$.

Sejam $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ e $(\beta_1', \ldots, \beta_{n-1}')$ as coordenadas Artin de β e β', respectivamente. Observamos que as coordenadas Artin de $r_n(\beta)$ são $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, e que $r_n(\beta)^{-1}\beta = \beta_{n-1}$ (Vide Exemplo 4.4.15).
Suponhamos que $r_n(\beta) \prec_M r_n(\beta')$. Neste caso, teremos da hipótese de indução que

$$r_n(\beta) \prec_M r_n(\beta') \;\; \Leftrightarrow \;\; (\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \prec^{LEX} (\beta_1', \ldots, \beta_{n-2}'). \qquad (4.4.7)$$

Assim, $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \prec^{LEX} (\beta_1', \ldots, \beta_{n-1}')$, i.e., a sequência de coordenadas Artin de β é menor que a sequência de coordenadas Artin de β'.

Por outro lado, se tivermos $r_n(\beta) = r_n(\beta')$ e $r_n(\beta)^{-1}\beta \prec_\mu r_n(\beta')^{-1}\beta'$, obtemos:

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = (\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-2}) \text{ e } \beta_{n-1} \prec_\mu \beta'_{n-1},$$

implicando $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \prec^{LEX} (\beta'_1, \ldots, \beta'_{n-1})$, como queríamos demonstrar.

❏

Observação 4.4.17. *Como a ordenação Magnus $\prec_\mu$ é definida em termos da ordenação sobre $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$, podemos caracterizar equivalentemente a ordenação de tranças puras em termos de séries de potências.*

Corolário 4.4.18. [12, Corollary 3.11] *Para $\beta \in PB(n)$, definimos as $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$-coordenadas de β como sendo a expansão Magnus de suas coordenadas Artin. Então, para $\beta, \beta' \in PB(n)$, a relação $\beta \prec_M \beta'$ vale se, e somente se, as $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$-coordenadas de β são menores que as $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$-coordenadas de β' com respeito à extensão lexicográfica da ordenação SUMLEX de $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$.*

Exemplo 4.4.19. [12, Example 3.12] *Vamos comparar $\beta = \sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_1^2$ e $\beta' = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2$. Primeiramente determinamos $\beta_1 = r_3(\beta) = \sigma_1^4$ e $\beta'_1 = r_3(\beta') = \sigma_1^2$. Em termos dos geradores de F_1, temos que $\beta_1 = x_{1,2}^2$ e $\beta'_1 = x_{1,2}$. As Figuras 4.15 e 4.16 ilustram cada um dos casos. Assim, $x_{1,2}^2 \succ_\mu x_{1,2}$ na ordenação Magnus de F_1, equivalentemente, $1 + 2X_1 + X_1^2 \succ^{SUMLEX} 1 + X_1$ na ordenação de $\mathbb{Z}[[X_1, \ldots, X_n]]$. Portanto, $\beta \succ_M \beta'$.*

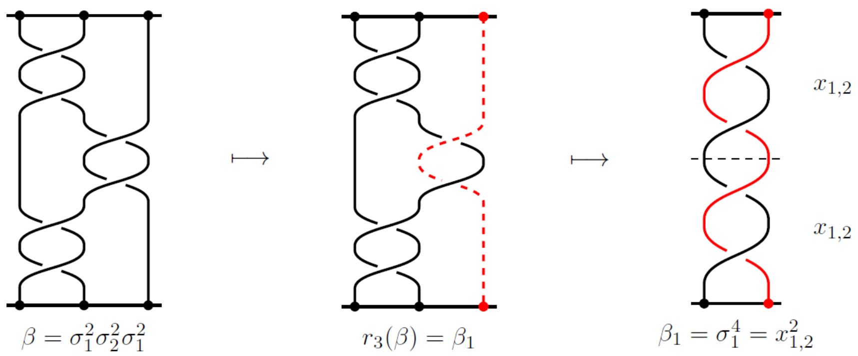

Figura 4.15: Trança β, coordenada Artin, β_1 nos geradores $x_{i,2}$, respectivamente.

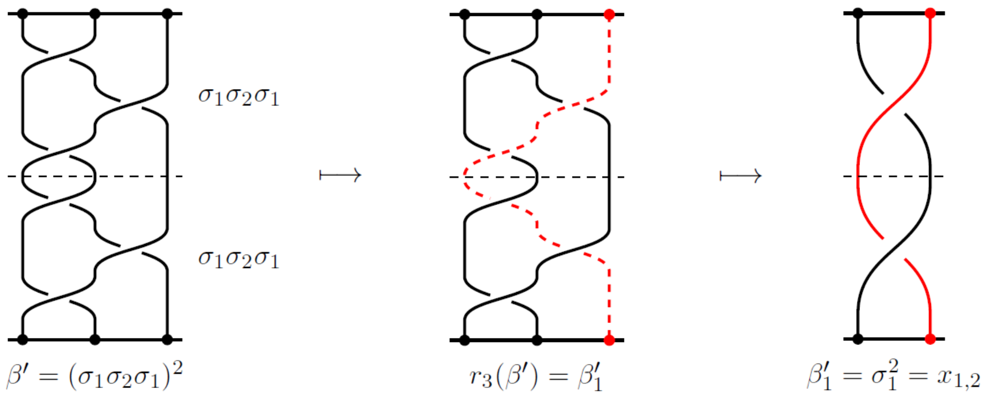

Figura 4.16: Trança β', coordenada Artin, β'_1 nos geradores $x_{i,2}$, respectivamente.

Para um segundo exemplo, manteremos β e consideremos $\beta'' = \sigma_1^4\sigma_2^2$.

A primeira coordenada de β'' é $\beta''_1 = \sigma_1^4$. Assim, as primeiras coordenadas Artin de β e β'' coincidem (vide Figuras 4.15 e 4.17).

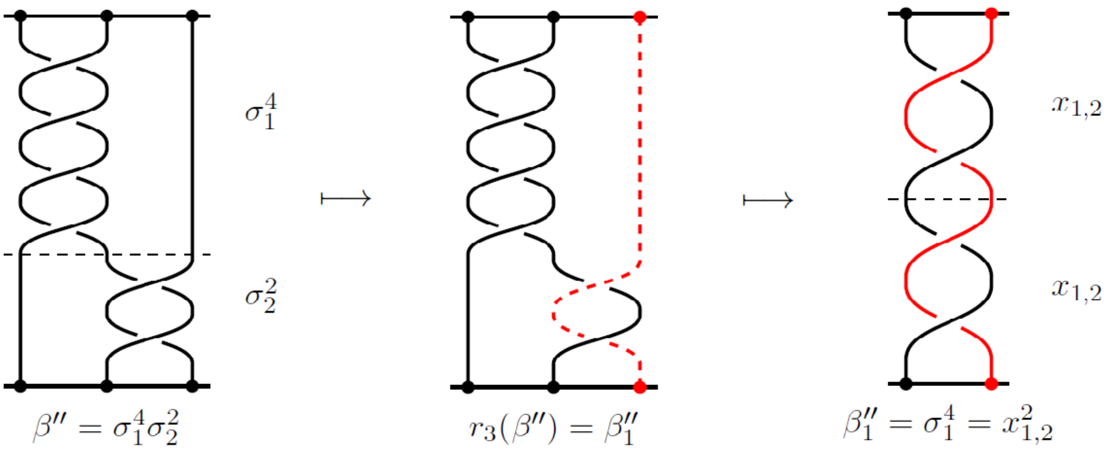

Figura 4.17: Trança β'', coordenada Artin β''_1, β''_1 nos geradores $x_{i,2}$, respectivamente.

Consideremos as segundas coordenadas, observando que: $\beta_2 = \sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2$ e $\beta''_2 = \sigma_2^2$.
Temos que $\beta_2 = x_{2,3}\,x_{1,3}\,x_{2,3}\,x_{1,3}^{-1}x_{2,3}^{-1}$ e $\beta''_2 = x_{2,3}$, em termos dos geradores $x_{i,3}$. Como vimos no Exemplo 4.3.20, $x_{2,3}\,x_{1,3}\,x_{2,3}\,x_{1,3}^{-1}x_{2,3}^{-1} \prec_\mu x_{2,3}$, em F_2, equivalentemente,

$$(1+X_2)(1+X_1)(1+X_2)(1-X_1+X_1^2-X_1^3+\ldots)(1-X_2+X_2^2-X_2^3+\ldots) \prec^{SUMLEX} 1+X_2.$$

Portanto, $\beta \prec_M \beta''$.

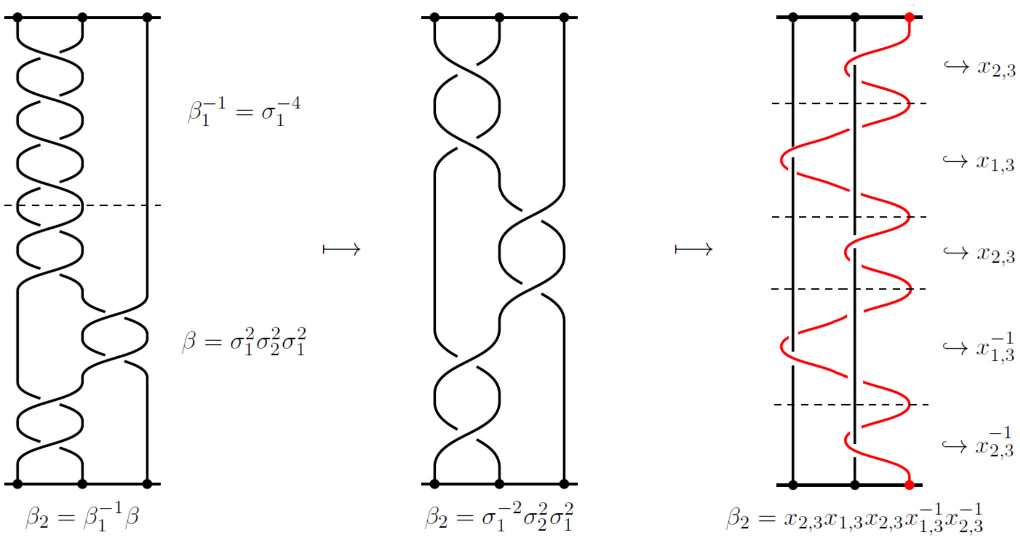

Figura 4.18: Coordenadas Artin β_2.

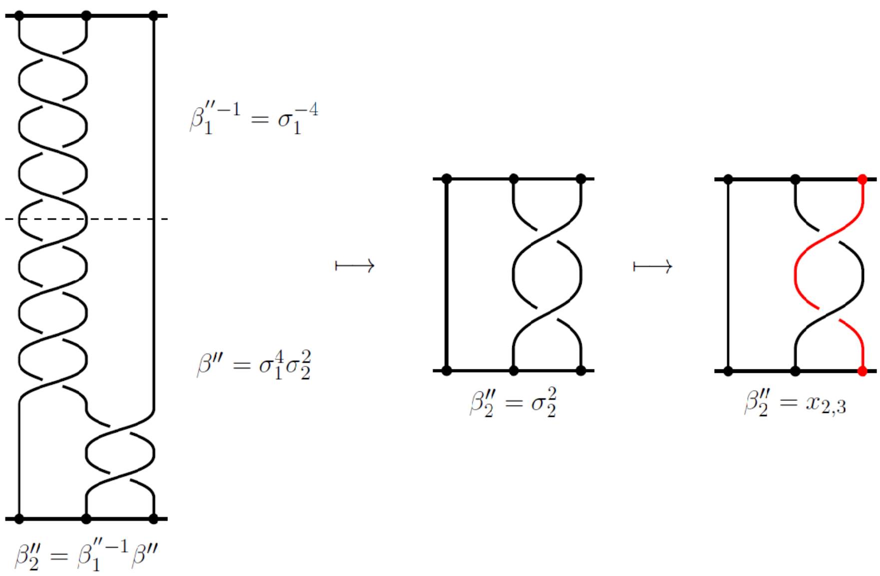

Figura 4.19: Coordenadas Artin β_2''.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apresentação do Grupo de Tranças Puras

O objetivo deste apêndice é mostrar geometricamente as relações da apresentação do grupo das tranças puras indicado no Lema 3.4.4 do Capítulo 3. Lembremos que este grupo é denotado por H_n e gerado pelas tranças $a_{i,j}$, onde $a_{i,j}$ é a trança que apenas passa a corda j uma vez em torno da corda i, primeiro por baixo e depois por cima, e passa por baixo de cada corda intermediária duas vezes, conforme Figura A.1[22].

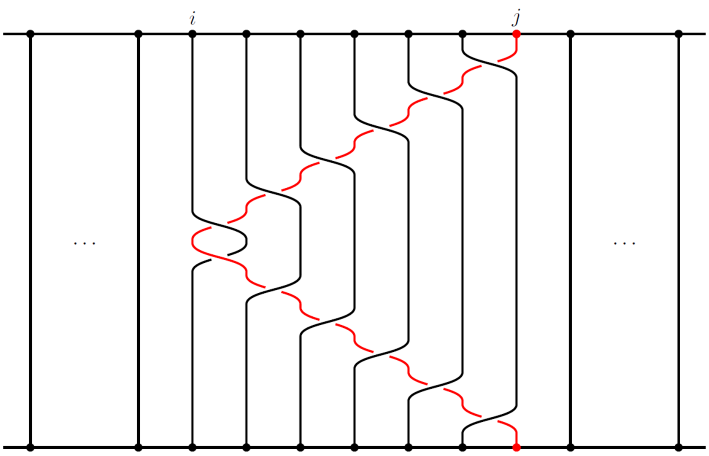

Figura A.1: $a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$

As figuras A.2, A.3, A.4, A.5 e A.6 nos mostram que valem as seguintes relações em

[22]Para a demonstração completa e mais informações, consulte Hansen [20, págs. 153 - 170] e Murasugi [37, pág. 50]

H_n, respectivamente:

(a) $a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,s}a_{i,j}$, se $r < s < i < j$;

(b) $a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,s}a_{i,j}$, se $i < r < s < j$;

(c) $a_{r,s}^{-1}a_{s,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}$, se $r < s < j$;

(d) $a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}$, se $r < s < j$;

(e) $a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1} = a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{r,s}^{-1}$, se $r < i < s < j$.

Estas relações definem um sistema completo de relações para H_n, isto é, todas as outras relações são provenientes destas. Mostremos que a relação (e) é equivalente a (e') $a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}a_{i,j}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}$. De fato,

$$(e) \Leftrightarrow a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1} = a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{r,s}^{-1} \Leftrightarrow a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{r,s} = a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{r,s})a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s}(a_{r,s}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{r,s}) = a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s} = (a_{r,s}^{-1}a_{r,j}^{-1}a_{r,s})a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}(a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{r,s}) \overset{(d)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}\underbrace{a_{r,j}^{-1}a_{r,j}}_{Id.}a_{i,j}\underbrace{a_{r,j}^{-1}a_{r,j}}_{Id.}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1} \Leftrightarrow (e').$$

Podemos mostrar, geometricamente, que as relações acima são de fato válidas, apenas realizando métodos "suaves" nas cordas, ou seja, usando o método de pentear tranças.

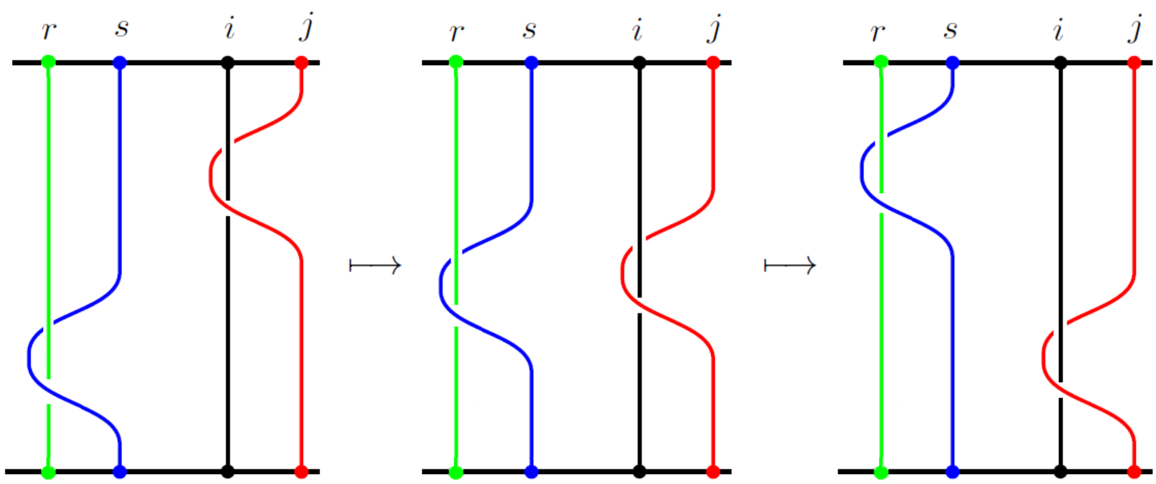

Figura A.2: Relação (a): $a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,s}a_{i,j}$, se $r < s < i < j$.

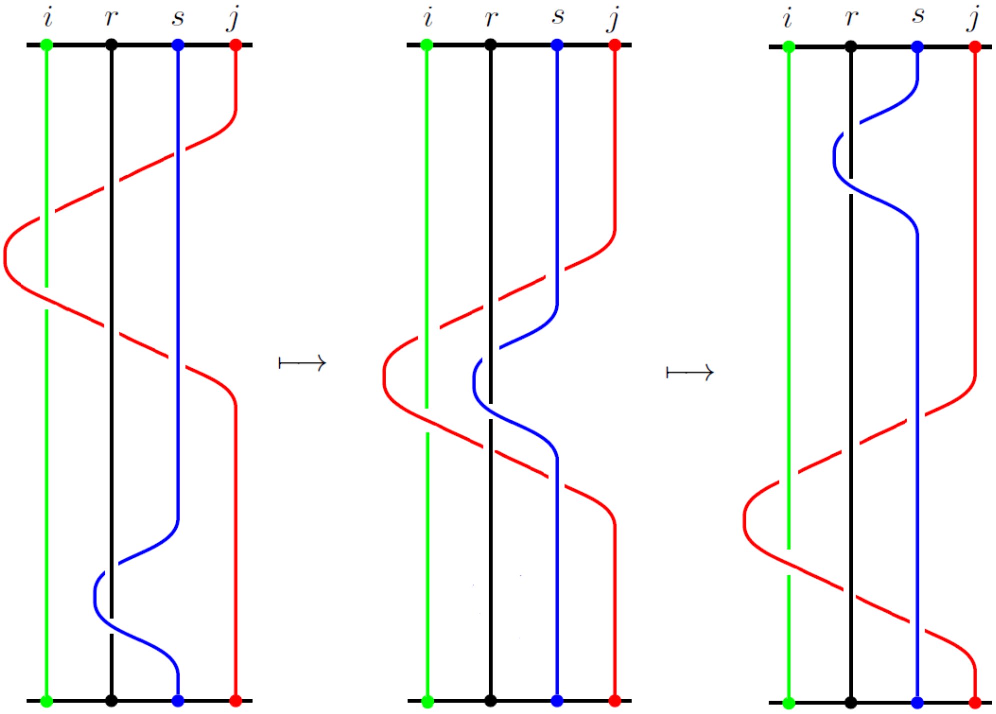

Figura A.3: Relação (b): $a_{i,j}a_{r,s} = a_{r,s}a_{i,j}$, se $i < r < s < j$.

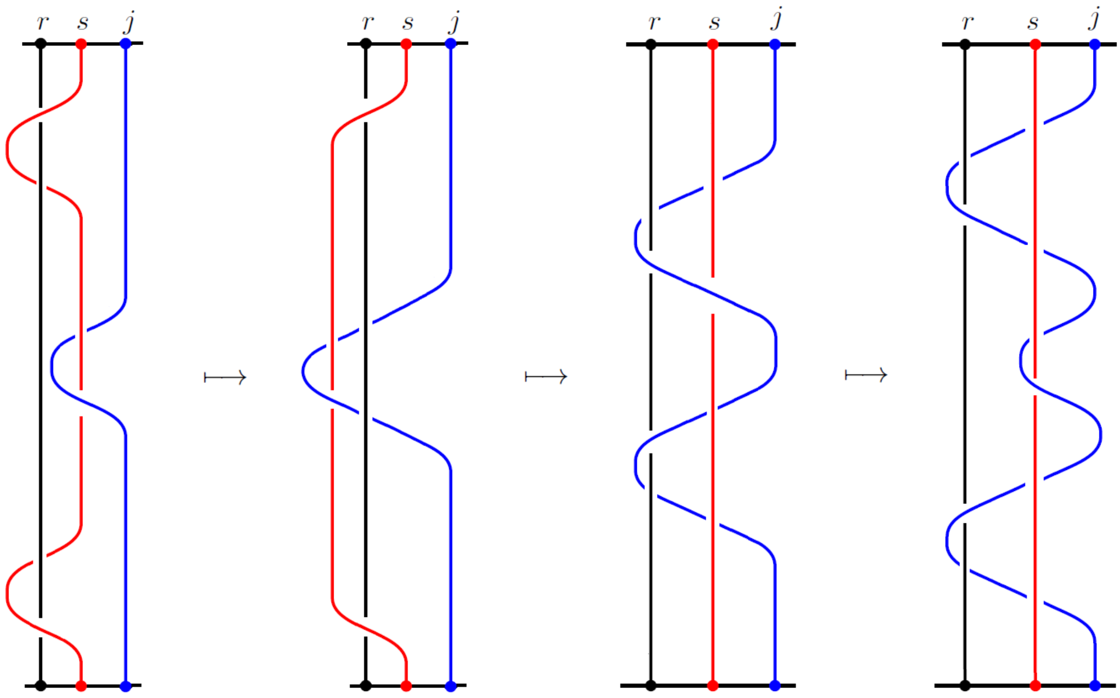

Figura A.4: Relação (c): $a_{r,s}^{-1}a_{s,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}$, se $r < s < j$.

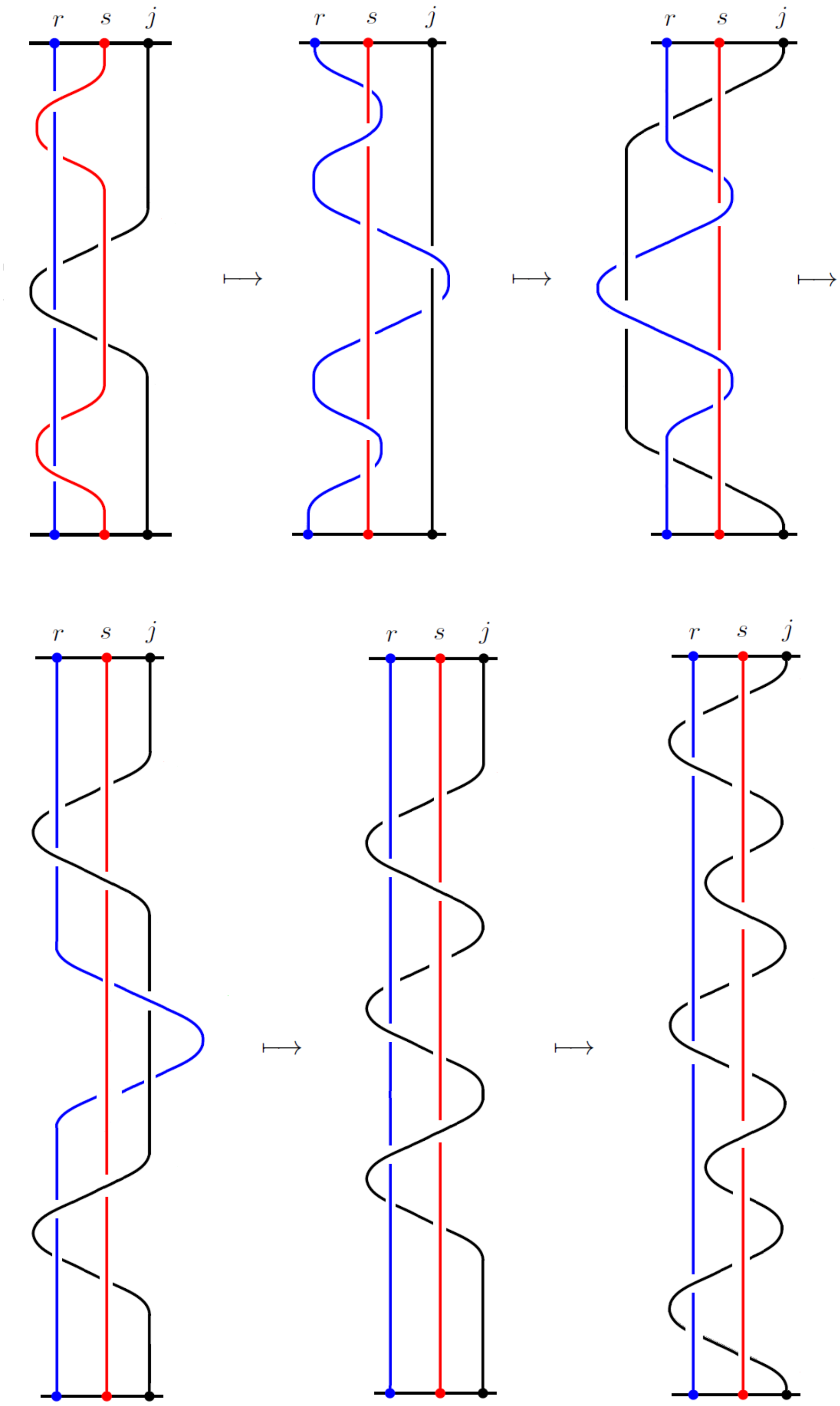

Figura A.5: Relação (d): $a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{r,s} = a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}$, se $r < s < j$.

Finalmente,

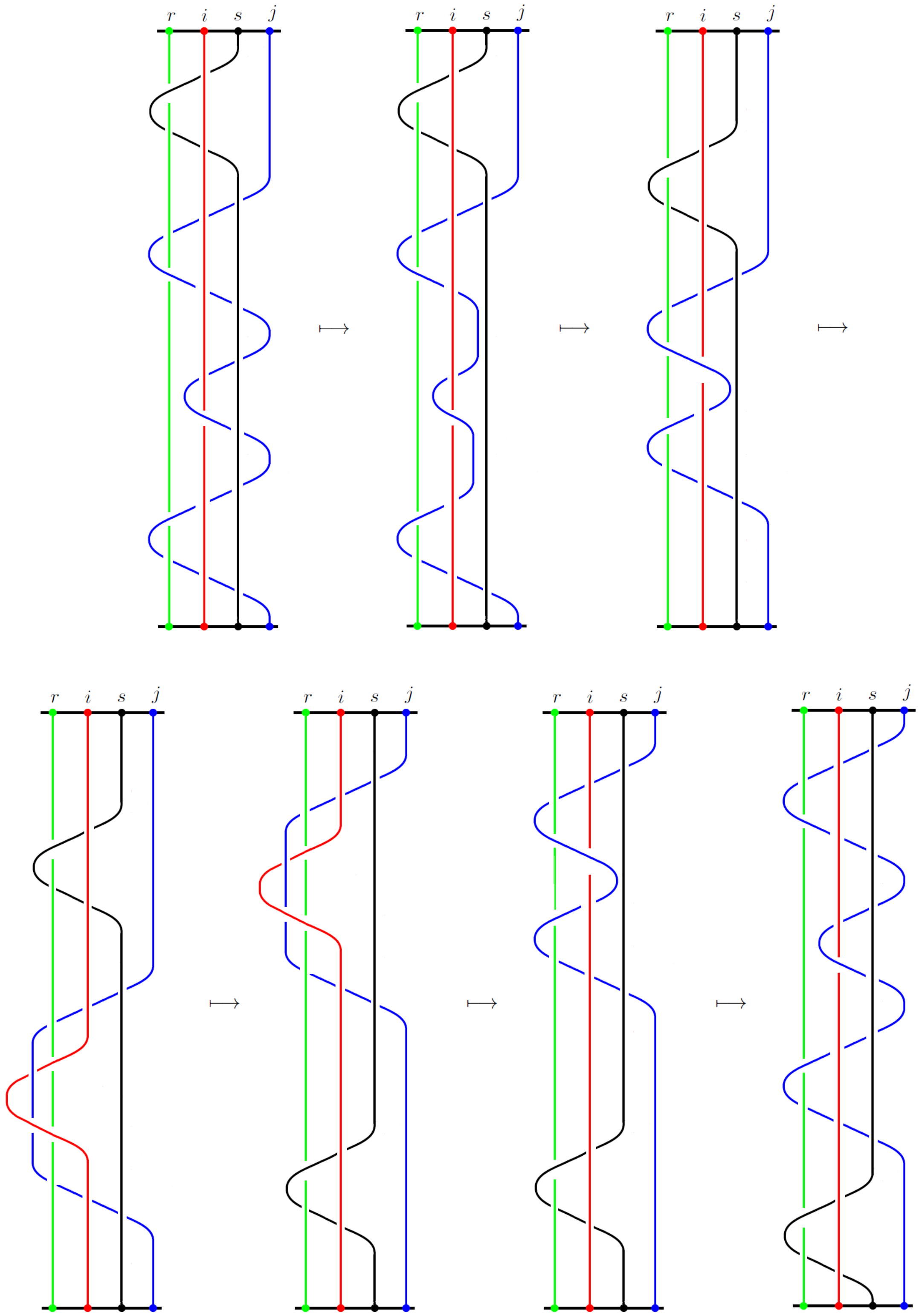

Figura A.6: Relação (e): $a_{r,s}^{-1}a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1} = a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}a_{r,s}^{-1}$, se $r < i < s < j$.

Renomeando os índices, podemos resumir estas relações de acordo com o:

Lema A.0.20. [20, Lema 4.2] *O grupo H_n admite uma apresentação com geradores:*

$$a_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\ldots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\ldots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1},\ \textit{para}\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\ \textit{e relações}:$$

$$a_{r,s}^{-1}a_{i,j}a_{r,s} = \begin{cases} a_{i,j}, & \textit{se}\ i < r < s < j\ \textit{ou}\ r < s < i < j \\ a_{r,j}a_{i,j}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ r < i = s < j \\ a_{r,j}a_{s,j}a_{i,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ i = r < s < j \\ a_{r,j}a_{s,j}a_{r,j}^{-1}a_{s,j}^{-1}a_{i,j}a_{s,j}a_{r,j}a_{s,j}^{-1}a_{r,j}^{-1}, & \textit{se}\ r < i < s < j. \end{cases}$$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados de Teoria de Conjuntos, Teoria de Grupos, Topologia Geral e Topologia Algébrica

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos de teoria de conjuntos, teoria de grupos, topologia geral e topologia algébrica que serão usados nos capítulos anteriores.

B.0.5 Equipotência entre conjuntos

Definição B.0.21. [**15, Definition 7.1**] *Dois conjuntos X e Y são equipotentes (ou possuem o mesmo cardinal) se existe bijeção $f : X \to Y$. Usaremos a notação $|X| = |Y|$, sempre que X e Y forem equipotentes.*

Observação B.0.22. *Equipotência é uma relação de equivalência na classe de todos os conjuntos, então ela decompõe esta classe em sub-classes mutuamente exclusivas, chamadas classes de equipotência.*

Definição B.0.23. [**15, pág. 46**] *Dado um conjunto X, o conjunto de todas as funções $f : X \to \{0, 1\}$ será denotado por 2^X.*

Proposição B.0.24. *Para qualquer conjunto X, temos $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$.*

Definição B.0.25. [**15, Definition 7.3**] *Para quaisquer dois conjuntos X e Y, se existe uma função injetora $f : X \to Y$, usaremos a notação $|X| \leqslant |Y|$.*

Proposição B.0.26. **[15, Proposition 7.4]** *Dados dois conjuntos X, Y, então:*

(a) $|A| \leqslant |X|$, *para qualquer subconjunto* $A \subset X$.

(b) *Se existe uma função sobrejetora* $f : X \to Y$, *então* $|Y| \leqslant |X|$.

B.0.6 O Lema dos Cinco

Lema B.0.27 (Lema dos Cinco)**.** **[25, Lemma 1]** *Consideramos o seguinte diagrama comutativo, no qual todos os vértices são grupos e todas as setas denotam homomorfismos de grupos:*

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\phi_0"'] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\phi_1"'] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\phi_2"'] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\phi_3"'] & A_4 \arrow[d, "\phi_4"'] \\
B_0 \arrow[r, "\beta_0"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & B_4
\end{tikzcd}$$

e cujas linhas horizontais são sequências exatas curtas. Se ϕ_0, ϕ_1, ϕ_3 e ϕ_4 são isomorfismos, então ϕ_2 também é um isomorfismo.

Demonstração:
Mostraremos que ϕ_2 é bijeção, como segue.
$\vdash$ $\underline{\phi_2 \text{ é injetor, ou seja, } Ker(\phi_2) = \{1\}}$.
De fato, seja $a \in Ker(\phi_2)$. Logo, $\phi_2(a) = 1$ e assim, $\beta_2 \circ \phi_2(a) = 1$. Pela comutatividade no quadrado 3 pela direita, temos $\beta_2 \circ \phi_2 = \phi_3 \circ \alpha_2$. Logo, $\phi_3(\alpha_2(a)) = 1$, ou seja, $\alpha_2(a) \in Ker(\phi_3)$. Desde que ϕ_3 é injetor, segue que $\alpha_2(a) = 1$, ou seja, $a \in Ker(\alpha_2)$. Pela exatidão em A_2, temos que $Im(\alpha_1) = Ker(\alpha_2)$, o que implica que $a \in Im(\alpha_1)$ e assim, existe $a_1 \in A_1$ tal que $\alpha_1(a_1) = a$.
Por outro lado, pela comutatividade do quadrado 2 pela direita, temos que $\beta_1 \circ \phi_1 = \phi_2 \circ \alpha_1$. Logo, $\beta_1(\phi_1(a_1)) = \phi_2(\alpha_1(a_1)) = \phi_2(a) = 1$ e assim, $\phi_1(a_1) \in Ker(\beta_1)$. Pela exatidão em B_1, temos que $Im(\beta_0) = Ker(\beta_1)$. Logo, $\phi_1(a_1) \in Im(\beta_0)$. Logo, existe $b_0 \in B_0$ tal que $\beta_0(b_0) = \phi_1(a_1)$.
Como ϕ_0 é sobrejetor, existe $a_0 \in A_0$ tal que $\phi_0(a_0) = b_0$. Pela comutatividade no quadrado 1, segue que $\beta_0 \circ \phi_0 = \phi_1 \circ \alpha_0$. Logo, $\beta_0 \circ \phi_0(a_0) = \phi_1 \circ \alpha_0(a_0)$ e então:

$$\phi_0(a_0) = b_0 \Rightarrow \beta_0 \circ \phi_0(a_0) = \beta_0(b_0) = \phi_1(a_1).$$

Assim, da comutatividade temos $\phi_1 \circ \alpha_0(a_0) = \phi_1(a_1)$. Desde que ϕ_1 é injetor, segue que $\alpha_0(a_0) = a_1$, ou seja, $a_1 \in Im(\alpha_0)$ e pela exatidão de A_1, temos que $Im(\alpha_0) = Ker(\alpha_1)$. Logo, $a_1 \in Ker(\alpha_1)$, ou seja, $\alpha_1(a_1) = 1$. Mas provamos que $\alpha_1(a_1) = a$. Portanto, $a = 1$, como queríamos.

$\vdash$ ϕ_2 é sobrejetor.

Mostraremos que dado $b \in B_2$, temos que existe $a \in A_2$ tal que $\phi_2(a) = b$. De fato, seja $b \in B_2$ e por definição, $\beta_2(b) \in B_3$. Como ϕ_3 é sobrejetor, existe $a_3 \in A_3$ tal que $\phi_3(a_3) = \beta_2(b)$. Assim, $\phi_3(a_3) \in Im(\beta_2) = Ker(\beta_3)$, pela exatidão em B_3. Portanto, $\beta_3 \circ \phi_3(a_3) = 1$. Logo, pela comutatividade do diagrama no quadrado 4 ($\beta_3 \circ \phi_3 = \phi_4 \circ \phi_3$), segue que $\phi_4 \circ \alpha_3(a_3) = 1$. Como ϕ_4 é injetor, segue $\alpha_3(a_3) = 1$ e assim, pela exatidão em A_3, temos que $a_3 \in Ker(\alpha_3) = Im(\alpha_2)$. Assim, existe $a_2 \in A_2$ tal que $\alpha_2(a_2) = a_3$. Pela comutatividade no quadrado 3, temos $\beta_2 \circ \phi_2 = \phi_3 \circ \alpha_2$. Logo, $\beta_2(\phi_2(a_2)) = \phi_3(a_3) = \beta_2(b)$. Seja $(\beta_2(\phi_2(a_2)))^{-1}$ o inverso de $\beta_2(\phi_2(a_2))$. Logo, temos:

$$1 = \beta_2(b) \cdot (\beta(\phi_2(a_2))^{-1}) \overset{homo}{=} \beta_2(b \cdot \phi_2(a_2)^{-1})$$

Assim, pela exatidão em B_2, temos que $b \cdot \phi_2(a_2)^{-1} \in Ker(\beta_2) = Im(\beta_1)$, ou seja, existe $b_1 \in B_1$ tal que $\beta_1(b_1) = b \cdot \phi_2(a_2)^{-1}$. Ainda, como $b_1 \in B_1$ e ϕ_1 é sobrejetor, existe $a_1 \in A_1$ tal que $\phi_1(a_1) = b_1$, ou seja, $\beta_1 \circ \phi_1(a_1) = \beta_1(b_1)$. Assim, $\beta_1 \circ \phi_1(a_1) = b \cdot \phi_2(a_2)^{-1}$.
Por outro lado, pela comutatividade do quadrado 2, ($\phi_2 \circ \alpha_1 = \beta_1 \circ \phi_1$), temos $\phi_2(\alpha_1(a_1)) = b \cdot \phi_2(a_2)^{-1}$. Logo, $\phi_2(a_2) \cdot \phi_2(\alpha_1(a_1)) = b$ e, como ϕ_2 é homomorfismo, temos $\phi_2(\alpha_1(a_1)a_2) = b$, com $\alpha_1(a_1)a_2 \in A_2$. Portanto, ϕ_2 é sobrejetor.

❑

B.0.7 Ações de grupos

Nesta seção, consideramos a noção de ações de grupos.

Definição B.0.28. *Uma* ***ação à esquerda*** *de um grupo G sobre um conjunto qualquer X é uma função $\mu : G \times X \to X$, usualmente denotada por $(g, x) \mapsto \mu(g, x) = g \cdot x$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $(1_G, x) \mapsto 1_G \cdot x = x, \ \forall\ x \in X$. (Identidade).

(ii) $(gh, x) \mapsto (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x), \forall\, x \in X, \forall\, g, h \in G$. (Compatibilidade)

Quando uma tal ação existe, dizemos que G age sobre o conjunto X.

De maneira análoga, podemos definir uma ação à direita de um grupo G sobre um conjunto X como segue.

Definição B.0.29. *Uma **ação à direita** de um grupo G sobre um conjunto qualquer X é uma função $\mu : X \times G \to X$, usualmente denotada por $(x, g) \mapsto \mu(x, g) = x \cdot g$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $(x, 1_G) \mapsto x \cdot 1_G = x$, $\forall\, x \in X$. (Identidade).

(ii) $(x, gh) \mapsto x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$, $\forall\, x \in X$, $\forall\ g, h \in G$. (Compatibilidade)

Observação B.0.30. *É comum usar uma notação exponencial para representar ações à direita $\mu : X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto x^g = x \cdot g$. A diferença entre ações à direita e à esquerda é a ordem segundo a qual um produto da forma $gh \in G$ age sobre $a \in A$. Para uma ação à esquerda, h age primeiro, seguido pela ação de g. Enquanto que para uma ação à direita, g age primeiro, seguido pela ação de h.*

Observação B.0.31. *No caso em que X é um espaço topológico que admite uma ação à direita* (respectivamente, uma ação à esquerda) *de um grupo G, nos referimos a X como um G-espaço à direita* (respectivamente, um G-espaço à esquerda) *e usaremos também a notação (X, μ) para o G-espaço X. Se X é um G-espaço à esquerda, então, a relação*

$$x \cdot g = g^{-1} \cdot x, \tag{B.0.1}$$

define uma estrutura de G-espaço à direita em X, ou seja, definindo:

$$\begin{aligned} \mu :\ \ X \times G &\to X && \text{(B.0.2)} \\ (x, g) &\mapsto x \cdot g := g^{-1} \cdot x, && \text{(B.0.3)} \end{aligned}$$

temos que μ é uma ação à direita de G sobre X. De fato, desde que X é um G-espaço à esquerda, temos:

(i) $(x, 1_G) \mapsto x \cdot 1_G := 1_G \cdot x = x, \forall\, x \in X$.

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned}(x,gh) &\mapsto x\cdot(gh) := (gh)^{-1}\cdot x\\ &= (h^{-1}g^{-1})\cdot x = h^{-1}\cdot(g^{-1}x)\\ &= h^{-1}\underbrace{(x\cdot g)}_{=x'\in X} = (x\cdot g)\cdot h,\ \forall\, x\in X,\ \forall\, g,h\in G.\end{aligned}$$

No caso em que X é um G-espaço (à direita ou à esquerda), temos definido um novo espaço topológico, obtido de X pela ação do grupo G, chamado o espaço de órbitas, como segue.

Definição B.0.32. *Seja $\mu : X\times G\to X$ uma ação à direita de um grupo G sobre um espaço topológico X. Então:*

(i) *para cada $x\in X$, o conjunto $xG = \{x\cdot g\ ;\ g\in G\}\subset X$ é chamado a órbita de x pela ação de G.*

(ii) *o subgrupo $G_x = \{g\in G\ ;\ x\cdot g = x\}\subset G$ é chamado subgrupo de isotropia de $x\in X$.*

(iii) *cada órbita é uma classe da seguinte relação de equivalência:*

$$x_1\sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2\cdot g,\quad \textit{para algum}\ \ g\in G. \tag{B.0.4}$$

(iv) *quaisquer duas órbitas são iguais ou disjuntas. Assim, elas determinam uma partição do espaço topológico X. O conjunto de todas as órbitas de X pela ação de G será denotado por X/G. Podemos munir este conjunto com a topologia quociente co-induzida pela projeção natural $p : X\to X/G$, definida por $x\mapsto x\cdot G$. Assim, X/G é um espaço topológico, chamado espaço de órbitas de X pela ação de G.*

(v) *uma ação é chamada livre se os subgrupos de isotropia são triviais, ou seja, $G_x = \{1_G\}$, para todo $x\in X$. Isso significa que $x\cdot g\neq x$, para todo $g\in G-\{1_G\}$ e para todo $x\in X$.*

São válidos os seguintes resultados.

Teorema B.0.33. [29, Theorems 17.1, 17.2] *Sejam G um grupo finito e X um espaço de Hausdorff. Se G age livremente sobre X, então $p : X\to X/G$ é uma aplicação de recobrimento.*

No caso particular em que a ação de G sobre o espaço X é determinada por um grupo compacto, o espaço de órbitas X/G possui uma importante propriedade, dada no seguinte

Teorema B.0.34. [5, Teorema 3.1] *Seja* (X, μ) *um* G*-espaço* (à direita ou à esquerda), *onde* G *é um grupo compacto. Então,* X/G *é um espaço de Hausdorff.*

Observação B.0.35. [30, pág. 253] *Seja* $p : E \to B$ *uma aplicação de recobrimento. Se* E *é uma* n*-variedade topológica e se* B *é um espaço de Hausforff, então* B *também é uma* n*-variedade topológica.*

B.0.8 Grupos de Homotopia de Ordem Superior

Iniciamos esta seção fixando algumas convenções. Um espaço com ponto base é um par (X, x_0) consistindo de um espaço topológico X e um ponto base $x_0 \in X$. Uma aplicação entre espaços com ponto base $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ é uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$. Um par de espaços é um par (X, A) consistindo de um espaço topológico X e um sub-espaço $A \subseteq X$. Uma aplicação entre pares de espaços $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é uma função contínua $f : X \longrightarrow Y$, com $f(A) \subseteq B$.

Definição B.0.36. [34, pág. 155] *Uma categoria* $\mathcal{C}$ *consiste de:*

(1) *Uma classe de objetos* X*.*

(2) *Para cada par ordenado* (X, Y) *de objetos, um conjunto*

$$Hom(X, Y) := \{f : X \to Y\}$$

de morfismos ou flechas.

(3) *Uma função, chamada a composição de morfismos, que está definida para qualquer tripla de objetos* (X, Y, Z)*.*

$$\begin{array}{rccc} \circ : & Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z) & \longrightarrow & Hom(X,Z) \\ & (f,g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

satisfazendo os seguintes axiomas:

<u>Axioma 1</u>*:* (Associatividade) *Se* $f \in Hom(X,Y)$*,* $g \in Hom(Y,Z)$ *e* $h \in Hom(Z,W)$*:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

<u>Axioma 2</u>*:* (Existência do morfismo identidade) *Para cada objeto* X*, existe um morfismo* $id_X \in Hom(X,X)$ *tal que*

$$\begin{aligned} f \circ id_X &= f, \quad \forall f \in Hom(X,Y) \\ id_X \circ g &= g, \quad \forall g \in Hom(Z,X) \end{aligned}$$

chamado morfismo identidade.

Observação B.0.37. *Mostra-se que os seguintes exemplos são categorias:*

(i) *Se os objetos de* $\mathcal{C}$ *são os espaços topológicos e se os morfismos de* $\mathcal{C}$ *são as aplicações contínuas entre espaços topológicos, então* $\mathcal{C}$ *é uma categoria, denotada por* Top*.*

(ii) *Se os objetos de* $\mathcal{C}$ *são os espaços com ponto base e se os morfismos de* $\mathcal{C}$ *são as aplicações entre espaços com ponto base, então* $\mathcal{C}$ *é uma categoria e será denotada por* $Top_\star$*.*

(iii) *Se os objetos de* $\mathcal{C}$ *são os pares de espaços e se os morfismos de* $\mathcal{C}$ *são as aplicações entre pares de espaços, então* $\mathcal{C}$ *é uma categoria e será denotada por* Top^2*.*

(iv) *Se os objetos de* $\mathcal{C}$ *são grupos se os morfismos de* $\mathcal{C}$ *são os homomorfismos de grupos, então* $\mathcal{C}$ *é uma categoria e será denotada por* Grp*.*

Definição B.0.38. *Na categoria* Top*, dois morfismos* $f_0, f_1 \in Hom(X,Y)$ *são chamados homotópicos , e escrevemos* $f_0 \simeq f_1$*, se existe um morfismo* $H : X \times I \longrightarrow Y$ *tal que* $H(x,0) = f_0(x)$ *e* $H(x,1) = f_1(x), \forall x \in X$*. A aplicação* H *é chamada uma homotopia entre* f_0 *e* f_1 *e escrevemos* $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$ *ou* $H : f \simeq g$*.*

Observação B.0.39. *Definindo* $f_0 \sim f_1$ *se, e somente se,* $f_0 \simeq f_1$*, temos que a relação de homotopia é uma relação de equivalência sobre o conjunto* $Hom(X,Y)$*, de todas as funções* *contínuas de X em Y. A classe de equivalência de uma função contínua $f : X \to Y$ com respeito à relação de homotopia é chamada classe de homotopia e será denotada por $[f]$. O conjunto das classes de homotopia de todas as funções contínuas de X em Y será denotada por $[X, Y] = Hom(X, Y)/ \simeq$.*

Observação B.0.40. *Se os objetos de $\mathcal{C}$ são espaços topológicos e se os morfismos de $\mathcal{C}$ são dados por classes de homotopia de aplicações contínuas, isto é, para cada par de espaços topológicos X, Y tem-se $Hom(X, Y) = \{[f] \in [X, Y]\}$, mostra-se que $\mathcal{C}$ é uma categoria, chamada a categoria de homotopia de espaços, a qual será denotada por $H(Top)$. A composição $[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z]$ é definida por $[f] \circ [g] = [g \circ f]$.*

Existem variantes da relação de homotopia nas categorias $Top_\star$ e Top^2, como segue.

Definição B.0.41. *Dois morfismos $f, g : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ em $Top_\star$ são chamados* ***homotópicos em relação aos pontos base*** *, e escrevemos $f \simeq g$ rel x_0, se existe uma homotopia $H : f \simeq g$ tal que $H(x_0, t) = y_0, \forall t \in [0, 1]$.*

Observação B.0.42. *Similarmente, mostra-se que a homotopia relativa a pontos base determina uma relação de equivalência em $Hom((X, x_0), (Y, y_0))$, a qual é compatível com a composição. A classe de equivalência de uma aplicação entre espaços com ponto base $[f]$ é chamada classe de homotopia relativa a pontos base e o conjunto de tais classes de homotopia será denotado por $[(X, x_0), (Y, y_0)]$.*

Definição B.0.43. *Dados um par de espaços topológicos (X, A), um espaço topológico Y e duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ tais que $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$, uma* ***homotopia relativa*** *entre f e g é uma homotopia $H : f \simeq g$, satisfazendo $H(a, t) = f(a) = g(a), \forall t \in [0, 1], \forall a \in A$, ou seja, $H(a, -) : [0, 1] \longrightarrow Y$ é constante, para cada $a \in A$. Usaremos a notação $H : f \simeq g$ rel A, para representar tal homotopia.*

Observação B.0.44. *Note que se A for vazio* (respectivamente, um conjunto com um único ponto)*, então a noção de homotopia relativa coincide com a noção de homotopia* (respectivamente, homotopia relativa a pontos base).

Definição B.0.45. *Na categoria Top^2, dois morfismos $f_0, f_1 \in Hom((X, A), (Y, B))$ são chamados homotópicos , e escrevemos $f_0 \simeq f_1$, se existe um morfismo $H : (X \times I, A \times$*

$I) \longrightarrow (Y,B)$ tal que $H(x,0) = f_0(x)$ e $H(x,1) = f_1(x), \forall x \in X$. A aplicação H é chamada uma homotopia de pares entre f e g, e será denotada por $f \overset{H}{\simeq} g$ ou $H : f \simeq g$.

Observação B.0.46. *Também neste caso, temos determinada uma relação de equivalência sobre $Hom((X,A),(Y,B))$ e o conjunto de todas as classes de homotopia de pares será denotada por $[(X,A),(Y,B)]$.*

Observação B.0.47. *Se os objetos de $\mathcal{C}$ são os espaços com ponto base e se os morfismos de $\mathcal{C}$ são dados por classes de homotopia relativa a pontos base, então $\mathcal{C}$ é uma categoria, chamada a categoria de homotopia de espaços com ponto base e será denotada por $H(Top_\star)$. Se os objetos de $\mathcal{C}$ são pares de espaços topológicos e se os morfismos de $\mathcal{C}$ são dados por classes de homotopia de pares, então $\mathcal{C}$ é uma categoria, chamada a categoria de homotopia de pares de espaços e será denotada por $H(Top^2)$.*

Definição B.0.48. *Um morfismo $f : X \to Y$ em uma categoria $\mathcal{C}$ é chamado uma **equivalência** na categoria $\mathcal{C}$, se existe um morfismo $g : Y \to X$ tal que*

$$g \circ f = id_X \quad e \quad f \circ g = id_Y.$$

Um objeto X é equivalente a um objeto Y, se existe uma equivalência $f : X \to Y$.

Definição B.0.49. *Um **funtor covariante** de uma categoria $\mathcal{C}$ em uma categoria $\mathcal{D}$ é uma regra, que denotaremos por $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, que associa a cada objeto $X \in \mathcal{C}$, um objeto $F(X) \in \mathcal{D}$, e a cada morfismo $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$, um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ de $\mathcal{D}$, satisfazendo as seguintes condições:*

1. *F preserva identidades, ou seja, para cada $X \in \mathcal{C}$ se $Id_X : X \longrightarrow X$ é o morfismo identidade, então $F(id_X) = id_{F(X)} : F(X) \longrightarrow F(X)$.*

2. *F preserva a composição de morfismos, ou seja,*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad \forall f \in Hom(X,Y), \forall g \in Hom(Y,Z).$$

Definição B.0.50. *Consideremos um espaço com ponto ponto base (X,x_0), ou seja, (X,x_0) é um **objeto** na categoria $Top_\star$. Para cada $n \geqslant 0$, denotemos por:*

(1) $I^n := \underbrace{I \times \cdots \times I}_{n-vezes}$ *o $n-$cubo, onde $I = [0,1]$.*

(2) O bordo de I^n, denotado por ∂I^n, é o sub-espaço de I^n consistindo de todos os pontos de I^n com pelo menos uma das coordenadas igual a zero ou um, isto é,

$$\partial I^n := \{(s_1, \cdots, s_2) \in I^n : \exists i \in \{1, \cdots, n\} \quad tal\ que\ s_i = 0 \quad ou \quad s_i = 1\}.$$

I^n $\qquad$ ∂I^n

Figura B.1: Representação de I^n e seu bordo.

Convencionamos que $I^0 := \{s_0\}$ e $\partial I^0 = \varnothing$. O conjunto de todas as classes de homotopia em $Hom((I^n, \partial I^n), (X, x_0))$ será denotado por:

$$\frac{Hom((I^n, \partial I^n), (X, x_0))}{\simeq} := \pi_n(X, x_0)$$

Observação B.0.51. *Observemos que:*

(i) *Se $n = 0$, existe uma bijeção $\pi_0(X, x_0) \to \frac{X}{\sim}$, onde $X/\sim$ denota o conjunto das componentes conexas por caminhos de X, isto é,*

$$\frac{X}{\sim} := \{[x] : x \in X\} \qquad com\ [x] := \{y \in X : y \sim x\},$$

com a relação de equivalência $\sim$ definida em X como segue:

$$x, y \in X : y \sim x \Longleftrightarrow \exists\ \alpha : [0,1] \to X\ contínua\ tal\ que\ \alpha(0) = x\ e\ \alpha(1) = y.$$

(ii) *Se* $n = 1$, *temos que* $\pi_1(X, x_0)$ *é o grupo fundamental de* X *com ponto base* x_0 (munido da operação induzida da concatenação de laços), *que em geral não é abeliano. Neste caso, a relação* $\simeq$ *é a relação de homotopia de caminhos relativa a* $\partial I = \{0, 1\}$.

(iii) *Seja agora* $n \geqslant 2$. *Definimos a seguinte operação sobre* $\pi_n(X, x_0)$:

$$\begin{aligned} \star : \quad \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ ([f], [g]) &\mapsto [f] \star [g] := [f \star g], \quad \textit{onde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \star g : \quad (I^n, \partial I^n) &\longrightarrow (X, x_0) \\ s = (s_1, \cdots, s_n) &\mapsto (f \star g)(s) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \cdots, s_n), & 0 \leqslant s_1 \leqslant \frac{1}{2}. \\ g(2s_1 - 1, s_2, \cdots, s_n), & \frac{1}{2} \leqslant s_1 \leqslant 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Mostra-se que esta operação é bem definida sobre as classes de homotopia e que, para $n \geqslant 2$, $(\pi_n(X, x_0), \star)$ *é um grupo abeliano*[23], *chamado o n-ésimo grupo de homotopia do par* (X, x_0), *cujo elemento identidade é a classe de homotopia da aplicação constante*

$$\begin{aligned} C_{x_0} : \quad (I^n, \partial I^n) &\longrightarrow (X, x_0) \\ s &\mapsto C_{x_0}(s) := x_0, \ \forall s \in I^n. \end{aligned}$$

E para cada aplicação $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$, *a sua inversa é dada por*

$$\begin{aligned} g : \quad (I^n, \partial I^n) &\longrightarrow (X, x_0) \\ (s_1, \cdots, s_n) &\mapsto g(s_1, \cdots, s_n) := f(1 - s_1, \cdots, s_n). \end{aligned}$$

Observação B.0.52. [21, pág. 342] *Uma aplicação contínua* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *induz um bem definido homomorfismo, para todo* $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_* : \pi_n(X, x_0) &\to \pi_n(Y, y_0) \\ [f] &\mapsto \varphi_*([f]) := [\varphi \circ f] \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

[23]Vide [**21, pág. 340**].

(i) $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

(ii) $(id_{(X,x_0)})_* = id_{\pi_n(X,x_0)}$.

Dessa forma, $\pi_n : Top_\star \to Grp$, *que associa a cada espaço com ponto base* (X, x_0), *o seu n-ésimo grupo de homotopia* $\pi_n(X, x_0)$, *e a cada aplicação entre espaços com ponto base* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, *associa o homomorfismo induzido* $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, *é um funtor covariante. Além disso, se uma aplicação* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *é uma equivalência de homotopia, então o homomorfismo induzido* $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ *é um isomorfismo, para cada inteiro* $n \geqslant 2$.

Apêndice

C

Apresentação do Grupo Fundamental da Garrafa de Klein

Neste apêndice daremos uma apresentação, em termos de geradores e relatores, do grupo fundamental da Garrafa de Klein. Para isto, usaremos o Teorema de Seifert-Van Kampen (vide [29]).

Seja X um espaço topológico, o qual é a união de dois sub-espaços U_1 e U_2, ambos abertos e conexos por caminhos e tais que $U_1 \cap U_2$ é não vazio e conexo por caminhos. O teorema de Van Kampen nos permite calcular o grupo fundamental de X, desde que conheçamos os grupos fundamentais de U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$.

Teorema C.0.53 (Teorema de Seifert-Van Kampen)**.** *Seja (X, x_0) um espaço com ponto base tal que $X = U_1 \cup U_2$, com U_1 e U_2 abertos, conexos por caminhos e tais que $x_0 \in U_1 \cap U_2$ é conexo por caminhos. Então*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)}{N} \tag{C.0.1}$$

no qual N é o fecho normal de $\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0)$ gerado pela palavra

$$(\varphi_1)_*([\alpha]) \cdot \{(\varphi_2)_*([\alpha])\}^{-1}, \ \ \forall \ \ [\alpha] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0), \tag{C.0.2}$$

onde $\varphi_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ e $\varphi_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ são as inclusões naturais.

O grupo fundamental da garrafa de Klein

A garrafa de Klein foi descrita pela primeira vez em 1882 pelo matemático alemão Felix Klein. A garrafa de Klein é o espaço quociente K obtido por identificação dos lados opostos de um quadrado, conforme ilustra a Figura C.1.

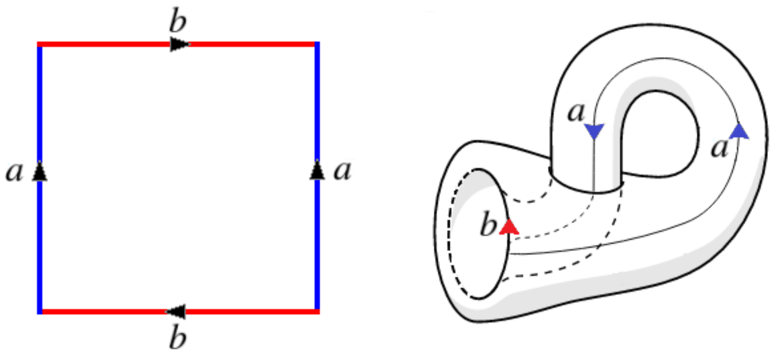

Figura C.1: Identificações na Garrafa de Klein.

Consideremos a representação da garrafa de Klein K dada na Figura C.2. Fixamos um ponto y no interior do quadrado, como indicado na figura. Sejam $U_1 = K - \{y\}$ e $U_2 = K - \{a_1 \cup a_2\}$. Então, U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ são abertos, conexos por caminhos, com $U_1 \cap U_2$ não vazio. Assim, podemos aplicar o Teorema de Seifert - Van Kampen para calcular o grupo fundamental de K.

Sejam x_0, x_1 pontos fixados, como indicado na Figura C.2. Note que x_1 aparece quatro vezes no diagrama, desde que estes quatro pontos são identificados em um único ponto em K. Seja c uma circunferência com centro em y, passando pelo ponto x_0 e seja d um segmento de reta unindo x_0 a x_1.

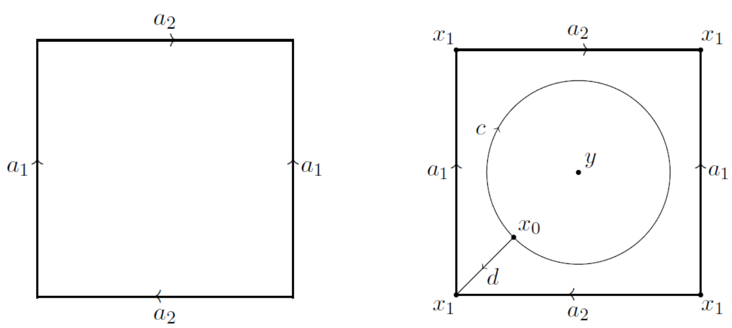

Figura C.2: Bordos identificados da Garrafa de Klein.

Fazendo as identificações apenas no bordo do quadrado, obtemos a figura oito $\mathcal{O}$, como ilustrado na Figura C.3. Este espaço é um retrato por deformação forte de U_1.

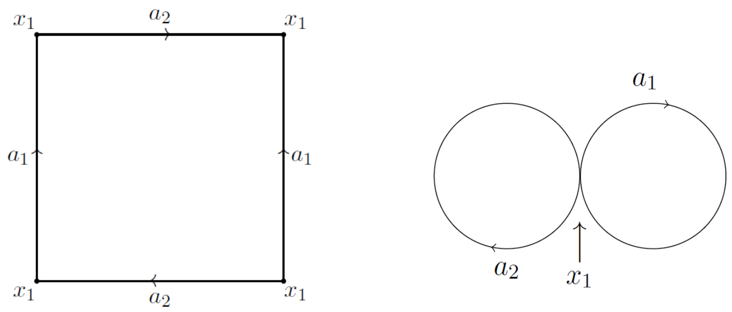

Figura C.3: Bordos identificados da Garrafa de Klein.

Denotemos por α_1, α_2 caminhos fechados em U_1, com ponto base x_1, que dão uma volta ao redor de a_1 e a_2, respectivamente, no sentido indicado na Figura C.3. Segue de [35, Lemma 60.5], que $\pi_1(U_1, x_1)$ é o grupo livre gerado por $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$, ou seja,

$$\pi_1(U_1, x_1) \cong \pi_1(\mathcal{O}, x_1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Fazendo a mudança do ponto base, seja d o caminho em U_1 correspondente ao segmento de reta d, conforme Figura C.4. Então, $\pi_1(U_1, x_0)$ é o grupo livre gerado por $A_1 = [d * \alpha_1 * d^{-1}]$ e $A_2 = [d * \alpha_2 * d^{-1}]$.

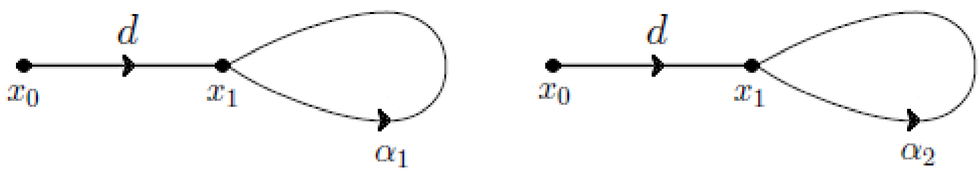

Figura C.4: Mudança do ponto base.

O espaço U_2 é contrátil, então $\pi_1(U_2, x_0) = 1$.

Temos ainda que $x_0 \in U_1 \cap U_2$ e a circunferência c é um retrato por deformação forte de $U_1 \cap U_2$, conforme Figura C.5. Seja γ um caminho fechado em $U_1 \cap U_2$, com ponto base x_0, que dá uma volta ao redor de c, no sentido indicado na Figura C.2. Dessa forma, $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ é o grupo livre gerado por $[\gamma]$, ou seja, $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \cong \mathbb{Z}$.

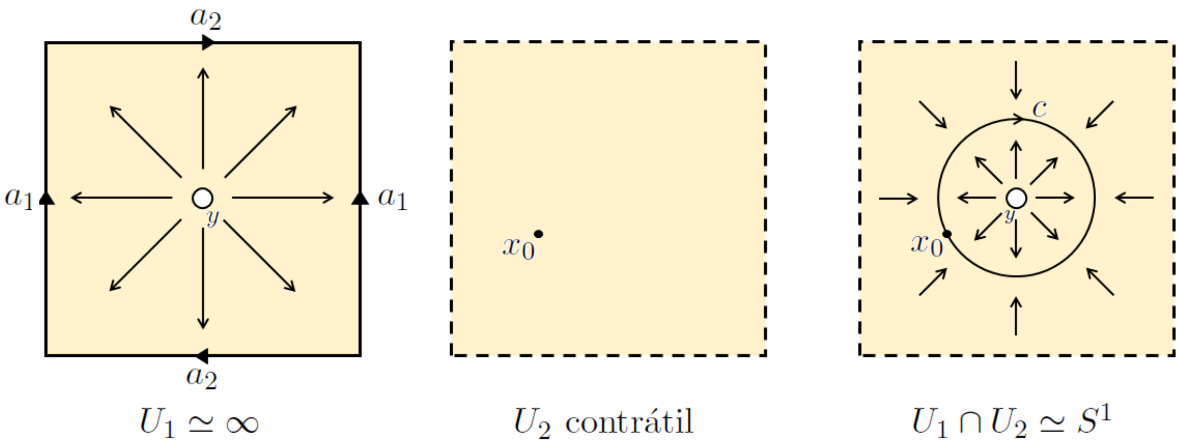

Figura C.5: Retrato por deformação de U_1 e $U_1 \cap U_2$.

Denotemos por $\varphi_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ a inclusão natural. Em U_1, temos:

$$\begin{aligned}(\varphi_1)_*[\gamma] = [\varphi_1(\gamma)] &= [d * \alpha_1 * \alpha_2 * {\alpha_1}^{-1} * \alpha_2 * d^{-1}] \\ &= [d * \alpha_1 * d^{-1}] \cdot [d * \alpha_2 * d^{-1}] \cdot [d * {\alpha_1}^{-1} * d^{-1}] \cdot [d * \alpha_2 * d^{-1}] \\ &= A_1 A_2 A_1^{-1} A_2.\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\pi_1(U_2, x_0)$ é trivial, então a inclusão $\varphi_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ induz o homomorfismo nulo $(\varphi_2)_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi_1(U_2, x_0)$. Assim, temos $(\varphi_2)_*[\gamma] = 1$. Portanto, segue do Teorema de Van Kampen que $\pi_1(K, x_0)$ é isomorfo ao grupo que possui a seguinte apresentação $\left\langle A_1, A_2 \mid A_1 A_2 A_1^{-1} A_2 \right\rangle$.

Referências Bibliográficas

[1] Artin, E. Theorie der Zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 4* (1925), pp. 47–72. Citado 3 vezes nas páginas 1, 86, e 98.

[2] Artin, E. Theory of Braids. *Annals of Mathematics 48* (1947), pp. 101–126. Citado na página 2.

[3] Birman, J. S. *Braids, Links and Mapping Class Groups.* Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 75.

[4] Bogopolski, O. *Introduction to Group Theory.* European Mathematical Society, 2008. Citado na página 63.

[5] Bredon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups.* Pure and Applied Mathematics. Academic Press New York and London, 1972. Citado na página 160.

[6] Cohen, D. E. *Combinatorial group theory: a topological approach.* London Mathematical Society Student Texts 14. Cambridge University Press, 1989. Citado 26 vezes nas páginas 2, 5, 7, 8, 13, 15, 18, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 42, 44, 45, 46, e 49.

[7] Cohen, F., and Pakianathan, J. Configurations Spaces and Braid Group. Class Notes, 1994. Citado na página 87.

[8] Cutler, D., Flanigan, F., Galovich, S., Hayes, D., and Missel, C. On the Category of Normal Embeddings of a Group. *Journal of Algebra 74* (1982), pp. 55–75. Citado na página 63.

[9] Davis, J. F., and Kirk, P. *Lecture Notes in Algebraic Topology*. Graduate Studies in Mathematics 35. American Mathematical Society, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 89 e 90.

[10] Dehornoy, P. From Large Cardinals to Braids via Distributive Algerbra. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications 04* (1995), pp. 33–79. Citado na página 1.

[11] Dehornoy, P. *Braids and Self-Distributivity*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2000. Citado na página 82.

[12] Dehornoy, P., Dynnikov, I., Rolfsen, D., and Wiest, B. *Ordering Braids*, vol. 148 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2008. Citado 26 vezes nas páginas 2, 3, 80, 105, 106, 108, 110, 112, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 126, 127, 129, 130, 133, 135, 136, 137, 140, 141, 145, e 146.

[13] Derek, J. R. *A Course in the Theory of Groups*. Graduate Texts in Mathematics 80. Springer, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 23, 32, e 34.

[14] Derek, J. R. *An Introduction to Abstract Algebra*. Walter de Gruyter Textbook, 2003. Citado na página 10.

[15] Dugundji, J. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., 1966. Citado 2 vezes nas páginas 155 e 156.

[16] Fadell, E., and Neuwirth, L. Configuration Spaces. *Math. Scand. 10* (1962), pp. 111–118. Citado 3 vezes nas páginas 88, 90, e 91.

[17] Fadell, E., and van Buskirk, J. The Braid Groups of $\mathbb{E}^2$ and $\mathbb{S}^2$. *Duke Math. J. 29* (1960), pp. 211–213. Citado na página 98.

[18] Fenn, R., Greene, M. T., Rolfsen, D., Rourke, C., and Wiest, B. Ordering the Braid Groups. *Pacific Journal Mathematics 01* (1998), pp. 01–29. Citado na página 1.

[19] Fox, R., and Neuwirth, L. The Braid Groups. *Math. Scand. 10* (1962), pp. 119–126. Citado 3 vezes nas páginas 2, 75, e 96.

[20] Hansen, V. L. *Braids and Covering: selected topics*. London Mathematical Society Student Texts 18. Cambridge University Press, 1989. Citado 19 vezes nas páginas 2, 3, 75, 76, 77, 80, 81, 82, 83, 86, 87, 90, 91, 96, 97, 98, 100, 149, e 154.

[21] Hatcher, A. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 89, 90, 94, e 165.

[22] HÖlder, O. Die axiome der Quantität und die Lehre von Mass. *Math. Phys. kl. 53* (1901), pp. 01–64. Citado na página 112.

[23] Hungerford, T. W. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics 73. Springer, 1974. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 42, e 57.

[24] Hurwitz, A. Uber Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzwei-gungspunkten. *Math. Ann. 39* (1891), pp. 01–60. Citado na página 1.

[25] Johnson, D. L. *Presentation of Groups.* London Mathematical Society Student Texts 15. Cambridge University Press, 1997. Citado 11 vezes nas páginas 2, 23, 24, 51, 52, 60, 63, 64, 68, 69, e 156.

[26] Kassel, C., and Turaev, V. *Braid Groups.* Graduate Texts in Mathematics 247. Springer, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 2, 75, e 90.

[27] Kim, D. M. *Braid Groups, Orderings, and Algorithms.* PhD thesis, The University of British Columbia, Vancouver - Canada, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 112, 113, 116, e 122.

[28] Kim, D. M., and Rolfsen, D. An Ordering for Groups of Pure Braids and Fibre-Type Hyperplane Arrangements. *Canad. J. Math. 55* (2003), pp. 822–838. Citado 9 vezes nas páginas 2, 80, 105, 107, 108, 110, 111, 112, e 118.

[29] Kosniowski, C. *A first course in algebraic topology.* Cambridge University Press, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 159 e 167.

[30] Lee, J. M. *Introduction to Topological Manifolds.* Graduate Texts in Mathematics 202. Springer, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 86 e 160.

[31] Magnus, W. *Über* Automorphismen von Fundamental Gruppen berandeter Flächen. *Math. Ann. 119* (1934), pp. 617–646. Citado na página 1.

[32] Magnus, W., Karrass, A., and Solitar, D. *Combinatorial group theory: Presentation of groups in terms of generators and relations.* Dover Publications, Inc., 1976. Citado 4 vezes nas páginas 104, 125, 126, e 127.

[33] MARKOFF, A. Foundations of the Algebraic Theory of Tresses. *Trav. Inst. Math. Stekloff 16* (1945), p. 53. Citado na página 1.

[34] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology.* The Benjamin - Cummings Publishing Company, Inc., 1984. Citado 2 vezes nas páginas 95 e 160.

[35] MUNKRES, J. R. *Topology.* Prentice Hall, Inc., 2000. Citado 3 vezes nas páginas 91, 120, e 169.

[36] MURA, R. B., AND RHEMTULLA, A. *Orderable Groups.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 27. Marcel Dekker, Inc., 1977. Citado na página 112.

[37] MURASUGI, K., AND KURPITA, B. I. *A Study of Braids.* Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 2, 75, 124, e 149.

[38] SCOTT, W. R. *Group Theory.* Dover Publications, Inc., 1987. Citado na página 43.

[39] STEENROD, N. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton Mathematical Series. Oxford U.P, 1951. Citado na página 88.

[40] VINOGRADOV, A. A. On the free Product of Ordered Groups. *Mat. Sb. 25* (1949), pp. 163–168. Citado na página 112.

[41] VIRO, O. Y., FUCHS, D. B., NOVIKOV, S. P., AND ROKHLIN, V. A. *Topology II: Homotopy and Homology. Classical Manifolds.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences 24. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2004. Citado na página 91.

[42] ZARISKI, O. On the Poincaré Group and Dynamics of Diffeomorphisms of Surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. 19* (1936), pp. 417–431. Citado na página 1.

Índice Remissivo