A topologia de folheações e sistemas integráveis
Morse-Bott em superfícies

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

A topologia de folheações e sistemas integráveis Morse-Bott em superfícies

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. José Andres Martínez Alfaro

USP – São Carlos
Setembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M617t Meza-Sarmiento, Ingrid Sofia
A topologia de folheações e sistemas integráveis
Morse-Bott em superfícies / Ingrid Sofia Meza-
Sarmiento; orientadora Regilene Delazari dos Santos
Oliveira; co-orientador José Andres Martínez-Alfaro.
-- São Carlos, 2015.
158 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. sistema integrável. 2. folheação. 3. função
Morse-Bott. 4. invariante topológico. 5. grafo de
Reeb. I. Delazari dos Santos Oliveira, Regilene,
orient. II. Martínez-Alfaro, José Andres, co-orient.
III. Título.

Ingrid Sofia Meza Sarmiento

**Topology of Morse-Bott foliations and Morse-Bott integrable
systems on surfaces**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos
Oliveira

Coadvisor: Prof. Dr. José Andres Martínez Alfaro

**USP – São Carlos
September 2015**

*“Depois de termos conseguido subir
a uma grande montanha,
só descobrimos que existem ainda,
mais grandes montanhas para subir.”*

Nelson Mandela.

Agradecimentos

À Deus, pela vida, saúde, fortaleza e sabedoria.

À minha família, pelo apoio incondicional, pela espera e confiança.

À minha orientadora, Prof. Dra. Regilene Delazari Dos Santos Oliveira e ao meu co-orientador Prof. Dr. José Martínez Alfaro pelo apoio incondicional, acolhimento, paciência, dedicação, amizade, confiança, responsabilidade, competente orientação e ensinamentos, e pelas contribuições e sugestões na pesquisa dessa tese.

Aos professores Luis Fernando de Osório Mello, Dr., Ketty Abaroa de Rezende, Dra. e Claudio Aguinaldo Buzzi, Dr., por ter aceitado compor a banca examinadora, assim como, pelas sugestões, correções e comentários feitos à tese.

Aos professores do ICMC-USP pela orientação e ensinamentos.

Aos meus amigos, Simone Lante, Henry Gullo, Jackson Itikawa e àqueles que estão no silêncio do meu coração pela amizade incondicional, companheirismo, conselhos, alegrias e apoio nos momentos difíceis.

Aos Departamentos de Geometría e Topología e Matemática Aplicada da Universitat de València (Espanha) pelo apoio, acolhimento e colaboração durante meu estágio e logo visita científica à Universitat de València.

Aos funcionários do ICMC-USP.

Ao Programa Estudantes-Convênio de Pós-Graduação (PEC-PG CAPES-Brasil), pela bolsa concedida.

Ao auxílio PROEX.

Ao Projeto “Dynamical Systems and their Applications” FP7-PEOPLE-2012-IRSES-316338 pelo suporte financeiro na realização do meu estágio doutoral na Universitat de València (Espanha).

Ao Projeto “Singularidades, Geometría Genérica y Morfología Matemática” MTM2012-33073 pelo suporte financeiro na realização do meu estágio doutoral e visita científica na Universitat de València (Espanha).

Dedicatória

*A Deus, fonte de vida.
A minha amada família.*

Resumo

Nesta tese estudamos os sistemas integráveis definidos em superfícies compactas possuindo uma integral primeira que é uma função Morse-Bott a valores em $\mathbb{R}$. Estes sistemas são aqui chamados de sistemas integráveis Morse-Bott. Classificamos as curvas fechadas e órbitas associados a pontos de selas imersos em superfícies compactas. Essa classificação é aplicada ao estudo das folheações Morse-Bott em superfícies e nos permite definir um invariante topológico completo para a classificação topológica global destas folheações. Como uma aplicação desse estudo obtemos a classificação dos sistemas Morse-Bott assim como a classificação topológica das funções Morse-Bott em superfícies compactas e orientáveis. Demonstramos ainda um teorema da realização baseado em duas transformações e numa folheação geradora. Para o caso das funções Morse-Bott também obtivemos um teorema de realização. Finalmente, investigamos a generalização de alguns dos resultados anteriores para sistemas definidos em superfícies não orientáveis.

Palavras-chave: sistema integrável, integral primeira, folheação, superfície, função Morse-Bott, grafo de Reeb, invariante topológico.

Abstract

In this thesis we study integrable systems on compact surfaces with a first integral as a Morse-Bott function with target $\mathbb{R}$. These systems are called here integrable Morse-Bott systems. Initially we present the classification of closed curves and eights associated to saddle points on compact surfaces. This classification is applied to the study of Morse-Bott foliations on surfaces allowing us to define a complete topological invariant for the global topological classification of these foliations. Then as an application of this study we obtain the classification of integrable Morse-Bott systems as well as the topological classification of Morse-Bott functions on compact and orientable surfaces. We also prove a realization theorem based on two transformation and a generating foliation (the foliation on the sphere with two centers). In the case of Morse-Bott functions we also obtain a realization theorem. Finally we investigate generalizations of previous results for systems defined on non-orientable surfaces.

Key words: integrable system, first integral, foliation, surface, Morse-Bott function, Reeb graph, topological invariant.

Lista de notações e símbolos

As notações usadas nesta tese são as seguintes (segundo a ordem que aparecem no texto):

S = superfície, sup.,

Π = superfície fechada,

$S_1 \# S_2$ = soma conexa disjunta de duas superfícies S_1 e S_2 ,

$\Sigma(g, 0)$ = sup. fechada e orientável de genus $g \geq 0$,

$\Upsilon(h, 0)$ = sup. não orientável de genus $h \geq 1$,

$\Sigma(g, k)$ = sup. fechada e orientável de genus $g \geq 0$ com k componentes no bordo,

$\Upsilon(h, k)$ = sup. fechada e não orientável de genus $h \geq 1$ com k componentes no bordo,

$H_1(S)$ = primeiro grupo de homologia de uma superfície S ,

J = curva fechada simples,

$\mathfrak{N}J$ = vizinhança regular fechada da curva simples J ,

G = grafo,

$Sing(f)(M)$ = conjunto singular de f em M ,

$I_b(f)$ = conjunto de nível de b definido por $f^{-1}(b)$,

$s_b(f)$ = fibra singular de f ,

$Hess_s f$ = matriz Hessiana de f no ponto s ,

$\mathcal{MB}$ = Morse-Bott,

$\mathcal{F}$ = folheação,

$(M, \mathcal{F})$ = variedade folheada,

$Sing(\mathcal{F}(S))$ = conjunto das folhas singulares de uma folheação singular $\mathcal{F}$ em S ,

$Cir(f)(S)$ = subvariedades singulares de f homeomorfas a S^1 ,

$Cen(f)(S)$ = singularidades isoladas de índice 0 e 2 de f ,

- $Sad(f)(\Sigma(g, 0))$ = singularidades de índice 1 de f ,
 $\mathcal{F}(f)$ = folheação singular definida pelos conjuntos de nível de f ,
 $Cen(\mathcal{F}(S))$ = o conjunto dos pontos de centros,
 $Sad(\mathcal{F}(S))$ = o conjunto dos pontos de sela,
 $X(M)$ = campo vetorial definido em M ,
 (X, f) = campo vetorial ou sistema integrável e uma integral primeira f de X ,
 $ker(Hess_p(f))$ = kernel da matriz Hessiana de f em p ,
 $S \setminus A$ = complementar de S com respeito a A ,
 K_i = componentes conexas e compactas de $S \setminus J$,
 $\mathcal{P}(K_i)$ = superfície obtida pela colagem de discos nas curvas do bordo da superfície K_i ,
 $E(a) = \lceil a \rceil$ = a função piso,
 $C(a) = \lfloor a \rfloor$ = a função teto,
 $\mathfrak{B}$ = oito de separatriz ou oito,
 $\chi(S)$ = característica de Euler de S ,
 $J_{\mathfrak{B}}$ = curva contrátil ao oito $\mathfrak{B}$,
 J_s = curva contrátil a uma das componentes do oito,
 $\Theta(\mathcal{F})$ = o grafo de uma folheação Morse-Bott,
 $\Theta_{\xi}(\mathcal{F})$ = o par formado por $\Theta(\mathcal{F})$ e a função ξ ,
 $\mathcal{F}ol(\Theta_{\xi})$ = folheação associada a $\Theta_{\xi}(\mathcal{F})$,
 $\mathcal{F}_c$ = folheações por círculos (ou curvas fechadas) na vizinhança de um centro,
 $\mathcal{F}_s$ = folheações por círculos (ou curvas fechadas) na vizinhança de um centro uma sela,
 $\mathcal{P}_{s_1, s_2, \dots, s_m}(\mathcal{F})$ = folheação obtida de $\mathcal{F}$ colando $\mathcal{F}_c$ a cada círculo no bordo de $\Sigma(g, m)$,
 $\mathcal{G}_c = \mathcal{P}_{s_1}(\mathcal{F}_c)$ = folheação singular na esfera com dois centros,
 $\mathcal{F}_s$ = folheação na vizinhança de um oito,
 $\mathcal{G}_s$ = folheação singular na esfera com três centros e uma sela,
 $\mathcal{F}_{1_{c_1, c_2}} \sqcup \mathcal{F}_2$ = união das folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ por meio de seus centros c_1, c_2 ,
 $\mathcal{F}^n$ = folheação $\mathcal{MB}$ com n pontos de sela,
 $\psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ = conjunto dos sistemas integráveis Morse-Bott em Σ ,
 e -curva = curva equatorial,
 ne -curva = curva não equatorial,
 $(\Theta(X), \xi, \eta)$ = invariante topológico para sistemas $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$,

$\mathcal{R}^\eta(f)$ = grafo de Reeb ordenado,

$l_{\pm m}$ = curva de dois lados tal que $\Upsilon(h, 0) \setminus J \cong K_1 \sqcup K_2$, onde K_j é orientável e K_l , $l \neq j$, é não orientável, $j, l = 1, 2$.

$l_{=m}$ = curva de dois lados tal que $\Upsilon(h, 0) \setminus J \cong K_1 \sqcup K_2$, onde K_1, K_2 são sup. não orientáveis,

l_K^+ = curva de dois lados com $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ conexo,

l_K^- = curva de um lado com $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ conexo,

$A \cong B$ = A é homeomorfo a B ,

$\sqcup$ = união disjunta,

$\Theta_\xi^-(\mathcal{F})$ = invariante para folheações $\mathcal{MB}$ em sup. não orientáveis.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Superfícies fechadas	7
1.2 Noções básicas da teoria de grafos	16
1.3 Funções Morse-Bott	19
1.3.1 Singularidades das funções Morse-Bott	26
1.4 Folheações Morse-Bott em superfícies	28
1.5 Nós em superfícies	32
1.6 Sistemas integráveis em superfícies	35
1.7 Invariantes para a classificação topológica de fluxos em superfícies	39
2 Classificação das folheações Morse-Bott em superfícies orientáveis	53
2.1 Classificação das curvas fechadas em superfícies orientáveis	53
2.2 Classificação dos oitos em superfícies fechadas e orientáveis.	58
2.3 Classificação das folheações Morse-Bott	66
2.3.1 O grafo de uma folheação Morse-Bott	69
3 Realização do invariante	79
3.1 O teorema da realização	79
3.2 Folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies orientáveis com duas selas	87
4 Classificação de sistemas Morse-Bott e de funções Morse-Bott simples	93
4.1 Introdução	93
4.2 Classificação de sistemas $\mathcal{MB}$ em superfícies orientáveis	93

4.3	Equivalência de funções $\mathcal{MB}$	97
4.4	Invariante para a classificação topológica das funções $\mathcal{MB}$	101
4.5	O Teorema da realização	105
5	Folheações Morse-Bott em superfícies não orientáveis	111
5.1	Classificação das curvas fechadas em superfícies não orientáveis	112
5.2	Classificação de oitos em superfícies fechadas não orientáveis	116
5.2.1	Oitos no plano projetivo	125
5.2.2	Oitos na garrafa de Klein	127
5.2.3	Oitos no 3-projetivo	129
5.3	Invariante para folheações Morse-Bott em superfícies não orientáveis	135
6	Trabalhos Futuros	141
6.1	Sistemas em superfícies	141
6.1.1	Generalização do invariante	141
6.1.2	Sistemas com outro tipo de integrabilidade	142
6.1.3	Folheações não orientáveis	143
6.1.4	Métodos quantitativos	144
6.2	Sistemas em variedades 3-dimensionais	144
6.2.1	Sistemas integráveis em variedades 3-dimensionais	144
6.2.2	Sistemas completamente integráveis	145
6.2.3	Folheações de codimensão um em 3-variedades	147
	Referências Bibliográficas	147

Introdução

Sistemas integráveis são fluxos cujas trajetórias se agrupam em folhas de uma folheação, essa folheação é gerada pelos conjuntos de nível de uma função chamada de integral primeira do sistema. Mais concretamente, um sistema integrável X , definido numa n -variedade M^n , admite uma integral primeira $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r com $r \geq 1$, se f é constante sobre as órbitas de X mas não é identicamente constante em conjuntos abertos de M^n . Existem muitos trabalhos que tratam das propriedades locais dos sistemas integráveis, no entanto, propriedades globais deste tipo de sistema não foram tão exploradas. Estes aspectos globais podem ser estudados por meio da investigação da estrutura topológica dos sistemas integráveis e de sua relação com a variedade onde está definido, por exemplo, considerando o estudo topológico das suas singularidades ou conjuntos singulares e suas órbitas conectantes.

Um dos métodos mais utilizados e que tem alcançado bons resultados na investigação dos aspectos globais dos sistemas integráveis é a construção de invariantes topológicos. A estratégia está sujeita a algumas reduções iniciais dos sistemas. A primeira, consiste na construção do espaço de órbitas Σ/X (ou $\Sigma/\mathcal{F}$, o espaço das folhas para o caso de uma folheação), espaço formado pela reunião de classes onde cada classe é definida através da seguinte relação de equivalência: dois pontos pertencem à mesma classe se, e somente se, eles pertencem a mesma órbita. Geralmente $(\Sigma/X, \sim)$ é uma folheação singular. Num segundo passo, organiza-se $(\Sigma/X, \sim)$ em um número finito de regiões abertas de modo que em cada região as órbitas tem o mesmo tipo de comportamento. Assim as órbitas tem as mesmas propriedades assintóticas ou definem um fluxo paralelo. Em seguida, as informações sobre essas regiões são codificadas em um grafo, desta maneira, todas as informações iniciais do sistema ficam representadas no grafo. O grafo munido de todas

as informações adicionais é um invariante topológico para o sistema inicial. Se a partir desse invariante pode-se reconstruir o fluxo dizemos que o invariante é completo. Nesta tese, dados dois sistemas diferenciáveis definidos em uma variedade n -dimensional M^n , $X_1(M^n)$ e $X_2(M^n)$, diremos que $X_1(M^n)$ e $X_2(M^n)$ são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo $h : M^n \rightarrow M^n$ que envia órbitas de $X_1(M^n)$ em órbitas de $X_2(M^n)$ preservando a orientação das órbitas (para mais detalhes veja a Seção 1.6 no Capítulo 1). Dessa maneira, se dois sistemas são topologicamente equivalentes eles têm invariantes “equivalentes”.

A busca por invariantes topológicos para o estudo de sistemas integráveis e folheações em variedades m -dimensionais é um dos assuntos de interesse tanto na Matemática como na Física e outras áreas aplicadas. Para definir um invariante topológico para os sistemas integráveis definidos em variedades 3-dimensionais contendo informações adicionais sobre a integral primeira é preciso conhecer o tipo topológico das singularidades e trajetórias do sistema, por exemplo o tipo de nó das órbitas periódicas ([28]). Apesar de existir uma grande variedade de trabalhos relacionados ao estudo e classificação topológica dos sistemas integráveis definidos em superfícies esse assunto está longe de estar completo. Nesta tese exploramos o método da construção de um invariante topológico completo para a classificação topológica dos sistemas integráveis em superfícies fechadas e orientáveis cuja integral primeira é uma função Morse-Bott. Chamamos esses sistemas de sistemas Morse-Bott. Funções Morse-Bott definidas numa variedade de dimensão n a valores na reta real são uma generalização das funções de Morse, uma vez que as singularidades de tais funções estão reunidas em subvariedade de dimensão maior ou igual a um.

Um sistema Morse-Bott com uma integral primeira f tem pontos de equilíbrio associados a valores extremos de f , a pontos de sela, isto é, associados às singularidades de f de índice um e podem existir outros pontos de equilíbrio do sistema os quais estão em conjuntos de nível regulares de f .

Um aspecto importante no estudo dos sistemas Morse-Bott é a decomposição da superfície onde ele está definido por conjuntos de nível da integral primeira ou, em outras palavras, o estudo da folheação singular gerada na superfície pela integral primeira do sistema. Nesta tese, essa folheação será chamada de folheação Morse-Bott e seu estudo, nesse caso, nos permite reconhecer o retrato de fase do sistema. Em particular, um inva-

riante topológico completo para a classificação das folheações Morse-Bott é um invariante topológico completo para os sistemas Morse-Bott se adicionamos a esse invariante a informação topológica sobre as folhas regulares da folheação que estão preenchidas por pontos de equilíbrio do sistema. Veremos ainda que, usando o invariante topológico obtido na classificação das folheações Morse-Bott podemos classificar as funções Morse-Bott definidas em superfícies orientáveis.

Finalmente, o invariante topológico completo definido nesta tese para o estudo das folheações Morse-Bott é um grafo conexo que tem propriedades interessantes e faz do estudo das folheações Morse-Bott em superfícies assim como dos sistemas integráveis, mais simples do que por meio dos invariantes existentes na literatura até hoje. Por exemplo, este grafo determina completamente a superfície, já que o número de ciclos básicos no grafo coincide com o genus da superfície, e também determina o tipo topológico das folhas singulares da folheação, propriedade que deve ser considerada em qualquer outro invariante topológico para o estudo deste tipo de folheação. Vale ressaltar que, nem todo grafo cujos vértices ou arestas estão codificados com informações sobre as regiões homogêneas de um fluxo (isto é, regiões nas quais as órbitas do fluxo têm o mesmo comportamento), determina a superfície na qual o fluxo do sistema está definido, por exemplo, considere o espaço de órbitas Σ/x do sistema definido na esfera e representado como na Figura 1, Σ/x possui quatro ciclos mas a esfera não é contrátil a Σ/x .

Figura 1: Sistema com um centro e seu espaço de órbitas.

Esta tese investiga os sistemas integráveis definidos em superfícies compactas possuindo uma integral primeira f que é uma função de Morse-Bott a valores reais. Estes sistemas são aqui chamados de sistemas Morse-Bott. Com o objetivo de construir um invariante para os sistemas Morse-Bott, classificamos as curvas fechadas e oitos de pontos de sela imersos em superfícies compactas (Teoremas 2.1.4 e 2.2.12). A classificação das

curvas fechadas e oitos de pontos de sela juntamente com o conceito de grafo de Reeb nos levaram a construção de um invariante topológico completo para a classificação topológica global das folheações Morse-Bott definidas em superfícies compactas e orientáveis (Teorema 2.3.7). Como uma aplicação desse estudo obtemos a classificação dos sistemas integráveis Morse-Bott (Teorema 4.2.5) assim como a classificação topológica das funções Morse-Bott em superfícies compactas e orientáveis (Teorema 4.4.4). Demonstramos ainda um teorema da realização para grafos abstratos imersos em superfícies compactas e orientáveis como grafos de sistemas integráveis (Teoremas 3.1.5 e 3.1.6) e como grafo associado a uma função de Morse-Bott (Teorema 4.5.4). Finalmente investigamos a generalização dos resultados anteriores para sistemas definidos em superfícies não orientáveis, nessa linha, obtivemos a classificação das curvas fechadas em superfícies compactas não orientáveis (Teorema 5.1.1), a classificação dos oitos de pontos de sela imersos em superfícies compactas e não orientáveis de genus $h \leq 3$ (Seção 5.2) e um invariante completo para as folheações Morse-Bott definidas em superfícies compactas não orientáveis (Teorema 5.3.3).

A tese está organizada em 6 capítulos. No Capítulo 1, introduzimos definições e resultados básicos assim como algumas ferramentas topológicas necessárias para a compreensão dos principais resultados desta tese. Também apresentamos uma pequena introdução histórica sobre a evolução dos diferentes invariantes que existem na literatura para o estudo dos sistemas integráveis e fluxos contínuos em superfícies. No Capítulo 2, tratamos da classificação topológica global das folheações Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis. Em seguida, no Capítulo 3, apresentamos condições necessárias e suficientes para que um grafo abstrato seja realizável como grafo de uma folheação Morse-Bott. Ainda nesse capítulo veremos que todos os sistemas Morse-Bott podem ser obtidos a partir de uma folheação básica por meio de duas transformações a ela aplicadas. Os resultados obtidos nestes capítulos foram aceitos para publicação em *Journal of Differential Equations* e se encontram disponíveis em www.icmc.usp.br/CMS/Arquivos/arquivos_enviados/ESTAGIO-BIBLIO_171_Serie%20Mat%20394.pdf

Como uma aplicação da classificação topológica das folheações Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis, no Capítulo 4 introduzimos um invariante topológico completo para a classificação topológica das funções Morse-Bott definidas em superfícies fechadas

orientáveis a valores reais. Apresentamos condições necessárias e suficientes para um grafo conexo, dirigido e finito G estar associado a uma função Morse-Bott. No preprint [44] encontramos a classificação topológica das funções Morse-Bott definidas em superfícies fechadas orientáveis a valores reais e demais resultados. Este trabalho foi aceito para publicação nos Proceedings of the XIII International Workshop on Real and Complex Singularities, a ser publicado pela American Mathematical Society (AMS) series *Contemporary in Mathematics* in cooperation with the Real Sociedad Matemática Española (RSME) e está disponível em www.icmc.usp.br/CMS/Arquivos/arquivos_enviados/ESTAGIO-BIBLIO_171_Serie%20Mat%20409.pdf

No Capítulo 5, generalizamos alguns resultados obtidos no Capítulo 2 desta tese para o caso das folheações Morse-Bott definidas em superfícies fechadas não orientáveis e definimos um invariante topológico para a classificação desse tipo de folheações. Estes resultados farão parte do terceiro trabalho resultante desta tese a ser redigido. Finalmente, no Capítulo 6, trazemos uma lista de problemas em aberto, relacionados com os resultados alcançados nesta tese que pretendemos investigar em futuro próximo.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir definições, conceitos, resultados básicos e algumas ferramentas topológicas para a compreensão dos resultados apresentados nos demais capítulos desta tese.

Iniciamos o capítulo com a definição e classificação das superfícies fechadas, em seguida tratamos das curvas mergulhadas em superfícies. A definição de funções Morse-Bott, de folheações definidas por curvas de nível de uma função Morse-Bott e os tipos de singularidades para este tipo de folheações são apresentadas neste capítulo também, assim como, alguns resultados pertencentes a teoria de nós e grafos. As duas últimas seções dedicamos à teoria dos sistemas diferenciais integráveis definidos em superfícies, em particular, estudamos alguns invariantes topológicos para campos vetoriais definidos em superfícies.

1.1 Superfícies fechadas

Nesta seção apresentamos a definição formal de superfície fechada e algumas de suas propriedades topológicas que utilizaremos nesta tese. Para maiores detalhes sobre os assuntos tratados nesta seção veja por exemplo [25, 27, 46, 50].

Definição 1.1.1. *Um superfície fechada é uma variedade 2-dimensional, conexa, compacta e sem bordo.*

Definição 1.1.2. *Diremos que duas superfícies S_1 e S_2 , são homeomorfas se existe um*

Figura 1.1: Superfícies básicas.

Figura 1.2: Faixa de Möbius.

homeomorfismo $h : S_1 \rightarrow S_2$.

Segundo a classificação das superfícies fechadas (Teorema 1.1.9) existem quatro superfícies básicas (a esfera, o toro, a garrafa de Klein e o plano projetivo) e qualquer outra superfície é formada pela soma conexa destas superfícies básicas (ver Definição 1.1.4 e a Figura 1.1).

Definição 1.1.3. *Uma superfície é orientável se não contém uma faixa de Möbius. Caso contrário, dizemos que a superfície é não orientável.*

Por exemplo, o plano projetivo é uma superfície não orientável porque contém uma faixa de Möbius. De [38] (Proposição 6.20) temos que uma superfície é orientável se, e somente se, é homeomorfa a uma esfera ou a soma conexa de n -toros.

Muitas superfícies estão descritas em $\mathbb{R}^3$, porém existem superfícies onde isso não acontece, por exemplo, o plano projetivo está descrito em $\mathbb{R}^4$, assim como a garrafa de Klein. Geralmente as superfícies fechadas não orientáveis são consideradas em $\mathbb{R}^4$. No entanto, a faixa de Möbius (ver Figura 1.2) é uma superfície não orientável com bordo em $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1.4. *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies. A soma conexa disjunta de S_1 e S_2 denotada por $S_1 \# S_2$ se define da seguinte maneira: escolha $D_1 \subset S_1$ e $D_2 \subset S_2$ tal que D_1 e D_2 sejam homeomorfos a discos abertos; escolha um homeomorfismo $f : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ e considere o espaço obtido pela colagem de $S_1 \setminus D_1$ a $S_2 \setminus D_2$ via o homeomorfismo f , assim:*

$$S_1 \# S_2 := X \bigcup_f Y,$$

onde $X = S_1 \setminus D_1$ e $Y = S_2 \setminus D_2$.

Exemplo 1.1.5 ([38], pg. 164). 1. Denote por S^2 a esfera. Dada qualquer superfície

S , a soma conexa $S \# S^2$ é homeomorfa a S .

2. Se S_1 e S_2 são dois planos projetivos então $S_1 \# S_2$ é homeomorfo a uma garrafa de Klein.

Sejam S_1 , S_2 e S_3 superfícies fechadas então $S_1 \# S_2$ é homeomorfo a $S_2 \# S_1$ e $(S_1 \# S_2) \# S_3$ é homeomorfo a $S_1 \# (S_2 \# S_3)$. Para mais detalhes veja [46].

Definição 1.1.6. *Uma triangulação ou triangularização de uma superfície compacta e conexa S consiste de uma família de subconjuntos fechados $\{T_1, \dots, T_n\}$, chamados triângulos de S , cada um dos quais é homeomorfo a um triângulo do plano, de modo que cada par de triângulos da coleção $\{T_1, \dots, T_n\}$ possui um vértice em comum ou uma aresta em comum ou são disjuntos.*

Em geral, os espaços topológicos não são trianguláveis. Rodó (1925) mostrou que toda superfície compacta e conexa admite uma triangulação.

Teorema 1.1.7 ([50]). *Se S é uma superfície compacta então S é homeomorfa ao espaço quociente obtido por sua identificação aos pares com uma região poligonal do plano chamada de representação poligonal da superfície S .*

Figura 1.3: Representação poligonal do toro, garrafa de Klein, esfera e do plano projetivo.

Esta realização de S como um tal espaço quociente permite que a mesma seja representada por uma palavra chamada de **palavra representação da superfície S** . Desta maneira temos a representação do toro, da garrafa de Klein, da esfera e do plano projetivo como na Figura 1.3.

Superfície S	Palavra representação de S
Toro T	$aba^{-1}b^{-1}$
Garrafa de Klein	$aba^{-1}b$
Esfera S^2	aa^{-1} ou $abb^{-1}a^{-1}$
Plano projetivo	aa ou $abab$

Dadas duas superfícies disjuntas S_1 e S_2 , a palavra representação da soma conexa $S_1 \# S_2$ é obtida por justaposição das palavras representações w_1 e w_2 de S_1 e S_2 , respectivamente, desde que estas palavras não possuam letras em comum (isto é, é preciso ter cuidado para escolher símbolos diferentes). Assim, $w_1 w_2$ é a palavra representação de $S_1 \# S_2$.

Exemplo 1.1.8. 1. A palavra representação da superfície dada pela soma conexa $\mathbb{R}^2 P^2 \# \mathbb{R}^2 P^2$ de dois planos projetivos é $a_1 a_1 a_2 a_2$. Dessa maneira $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$ é palavra representação da soma conexa de n -planos projetivos.

2. A soma conexa de dois toros $T \# T$ tem a palavra reoresentação $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$.
E $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ é a palavra representação de $T \# \dots \# T$ (n -toros).

A seguir, veremos como é possível manipular a palavra representação de uma superfície de maneira reversível e sem afetar a superfície representada, isto é, as transformações que utilizamos devem ser reversíveis e tal que a palavra obtida em cada etapa da manipulação represente a mesma superfície, salvo por homeomorfismos.

O conjunto das seguintes oito transformações de palavras satisfazem esses critérios e permitem a classificação das superfícies fechadas em termos da somas conexas de toros e de planos projetivos. Veja [68] para mais detalhes.

Transformação 1 Sendo A e B blocos de letras quaisquer e sendo $w = Axx^{-1}B$ uma palavra representação de uma superfície, temos $Axx^{-1}B = AB = Ax^{-1}xB$. Desta maneira, segue que a soma conexa $S \# S^2$ é homeomorfa a S , qualquer que seja a superfície S .

Transformação 2 Sendo x uma letra na palavra representação w , podemos em w trocar simultaneamente x por x^{-1} e x^{-1} por x . Em outras palavras, $AxBx^{-1}C = Ax^{-1}BxC$ e $Ax^{-1}Bx^{-1}C = AxBxC$, para quaisquer blocos de letras A , B e C .

Trasnformação 3 Se A e B são blocos numa palavra representação w , isto é, $w = AB$, então podemos permutá-los, ou seja, $w = AB = BA$.

Transformação 4 Se w é a palavra representação de uma superfície S , então w^{-1} também o é. Em outras palavras $w = w^{-1}$.

Transformação 5 $AxBCx^{-1} = AxCBx^{-1}$. Em outras palavras, sendo x uma letra numa palavra representação, podemos permutar dois blocos de letras quaisquer localizados entre x e x^{-1} .

Transformação 6 $AxBxC = AxxB^{-1}C$, bem como $AxBxC = AB^{-1}xxC$.

Transformação 7 $AxBxCx^{-1}Dy^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}ADCB$.

Transformação 8 $Axxaba^{-1}b^{-1}B = AxxaabbB$.

Figura 1.4: A curva $l=2$ mergulhada em $\Upsilon(4,0)$. À esquerda $\Upsilon(4,0)$ é a soma conexa de quatro planos projetivos e à direita, $\Upsilon(4,0)$ é a soma conexa do toro com a garrafa de Klein.

Lee [38] mostra que cada uma das transformações elementares de 1 a 8, acima descritas, aplicada a uma representação poligonal de uma superfície S produz uma nova representação poligonal homeomorfa à primeira. Nesta tese não iremos empregar explicitamente as transformações acima descritas. No entanto, as curvas fechadas e oitos associados a pontos de sela que estudamos nesta tese admitem diferentes representações poligonais segundo a palavra representação da superfície onde estão mergulhados. Por exemplo, a curva denotada por $l=2$ no Capítulo 5 admite duas representações poligonais diferentes (uma mais simples do que a outra) de acordo com a palavra representação da superfície $\Upsilon(4,0)$ onde ela está mergulhada. Na Figura 1.4 temos as duas representações.

Uma vez estabelecidas as transformações de palavras de 1 a 8, deduzimos o seguinte resultado.

Teorema 1.1.9. *Seja S uma superfície fechada e orientável. Então S é homeomorfa a uma esfera, a um toro ou a uma soma conexa de dois ou mais toros. Se S for superfície não-orientável então S ela é homeomorfa ao plano projetivo ou soma conexa de dois ou mais planos projetivos.*

Denotemos por $\Sigma(g,0)$ a superfície fechada e orientável de genus $g \geq 0$ e por $\Upsilon(h,0)$ a superfície não-orientável de genus $h \geq 1$. Por $\Sigma(g,k)$ (resp. $\Upsilon(h,k)$) denotaremos a superfície fechada e orientável Σ (resp. não-orientável Υ) de genus g (resp. h) com k componentes no bordo. Cada uma destas componentes é homeomorfa a um círculo. Com estas notações, temos que $\Upsilon(1,1)$ é a faixa de Möbius, $\Sigma(0,0)$ é a esfera, $\Sigma(0,2)$ é o cilindro e assim por diante. Podemos portanto, dar novo enunciado ao Teorema 1.1.9.

Teorema 1.1.10. *Toda superfície fechada e orientável é homeomorfa a esfera ou a soma conexa de n -toros. Qualquer superfície não-orientável é homeomorfa à soma conexa de um plano projetivo ou uma garrafa de Klein e uma superfície fechada e orientável. Em outras palavras, toda superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ é homeomorfa a*

- (a) *soma conexa de $(1/2(h - 1))$ -toros e um plano projetivo $\Sigma(1, 0) \# \Sigma(1, 0) \cdots \cdots \# \Sigma(1, 0) \# \Upsilon(1, 0)$, se h é ímpar, ou*
- (b) *soma conexa de $(1/2(h - 2))$ -toros e uma garrafa de Klein $\Sigma(1, 0) \# \Sigma(1, 0) \cdots \cdots \# \Sigma(1, 0) \# \Upsilon(2, 0)$, se h é par.*

Do teorema acima e aplicando indução sobre o número de toros na soma conexa obtemos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.11. *A soma conexa de superfícies orientáveis é uma superfície orientável. Qualquer soma conexa de superfícies onde pelo menos uma das superfícies é homeomorfa a um plano projetivo é uma superfície não orientável.*

A seguir lembramos a definição de característica de Euler de uma superfície triangulável.

Definição 1.1.12. *Seja S uma superfície compacta com triangulação $\{T_1, \dots, T_t\}$. Sejam v o número total de vértices de S , e o número total de arestas de S , t o número total de triângulos de S . Então $\chi(S) = v - e + t$ é chamada de característica de Euler de S .*

A característica de Euler depende unicamente da superfície S e não depende da triangulação escolhida para S .

Proposição 1.1.13. *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies compactas. As características de Euler de S_1 , S_2 e $S_1 \# S_2$ obedecem a seguinte relação $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.*

Da Proposição 1.1.11, do Teorema 1.1.9 e usando indução podemos deduzir os seguintes valores para a característica de Euler das superfícies compactas elementares.

Superfície	Característica de Euler
Esfera	2
Soma conexa de n toros	$2 - 2n$
Soma conexa de n planos projetivos	$2 - n$
Soma conexa de n toros e um plano projetivo	$1 - 2n$
Soma conexa de n toros e uma garrafa de Klein	$-2n$

O próximo resultado nos diz que a característica de Euler de uma superfície é um invariante topológico numérico e simplifica a classificação das superfícies compactas.

Teorema 1.1.14. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas. Então S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e ambas superfícies são orientáveis ou não-orientáveis.*

O seguinte teorema nos fornece um critério para decidir quando duas superfícies compactas com bordo são homeomorfas.

Teorema 1.1.15. *Sejam S_1 e S_2 superfícies compactas com bordo. Assuma que seus bordos tem o mesmo número de componentes conexas. Então S_1 e S_2 são homeomorfas se, e somente se, as superfícies S_1^* e S_2^* obtidas pela colagem de um disco a cada componente do bordo de S_1 e S_2 são homeomorfas.*

Seja S uma superfície compacta e conexa com ou sem bordo e assuma que é dada uma triangulação a S . Denote por S^* a superfície obtida de S ao remover o interior de um triângulo de sua triangulação. Então S^* possui uma componente no bordo a mais do que S , portanto, usando a definição da característica de Euler obtemos que

$$\chi(S^*) = \chi(S) - 1. \quad (1.1)$$

Assim, se começamos por uma triangulação de S (sem bordo) e eliminamos os interiores de k triângulos disjuntos dois-a-dois, obtemos uma superfície com bordo S^* cuja característica de Euler é

$$\chi(S^*) = \chi(S) - k. \quad (1.2)$$

Teorema 1.1.16. *Duas superfícies compactas com bordo são homeomorfas se, e somente se, elas têm o mesmo número de componentes no bordo, ambas são orientáveis ou não-orientáveis e ambas têm a mesma característica de Euler.*

Com as notações acima descritas e o Teorema 1.1.9 segue que o primeiro grupo de homologia de uma superfície compacta orientável $\Sigma(g, 0)$, com $g \geq 0$ é

$$H_1(\Sigma(g, 0)) = 2g\mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

O primeiro grupo de homologia de uma superfície compacta não orientável $\Upsilon(h, 0)$, com $h \geq 1$ é

$$H_1(\Upsilon(h, 0)) = \mathbb{Z}^{\oplus(h-1)} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \quad (1.4)$$

onde $\mathbb{Z}^{\oplus(h-1)}$ denota a soma direta $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$, $(h-1)$ -vezes.

Mais ainda, o primeiro grupo de homologia da superfície compacta orientável $\Sigma(g, m)$ obtida após eliminar m discos disjuntos ou pontos de $\Sigma(g, 0)$ é dada por

$$H_1(\Sigma(g, m)) = (2g + m - 1)\mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Para uma superfície compacta não orientável $\Upsilon(h, m)$ o primeiro grupo de homologia obedece a igualdade

$$H_1(\Upsilon(h, m)) = (h + m - 1)\mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

Para mais detalhes veja [27, 38, 50].

Definição 1.1.17. *Uma curva fechada simples J em uma superfície compacta S é a imagem de um mergulho $\Psi : S^1 \rightarrow S$, isto é $\Psi(S^1) = J$.*

A curva J possui duas orientações de acordo com a orientação de S^1 . Nesta tese consideramos curvas fechadas simples, salvo que se especifique o contrário.

Definição 1.1.18. *Seja J uma curva fechada simples no interior de uma superfície compacta S . Diremos que J é uma curva **homotópica a zero** ou contrátil se ela limita um disco em S . Caso contrário, diremos que J é **essencial** ou não contrátil. J será uma curva **homológica a zero** ou homologicamente nula se J divide a superfície S em duas superfícies K_i , $i = 1, 2$, onde K_i tem genus k_i e o genus k de S satisfaz a igualdade $k = k_1 + k_2$, $0 \leq k_1 \leq k_2$. J será uma curva de **dois lados** ou que mantém a orientação se a vizinhança regular fechada de J , denotada por $\mathfrak{N}J$, é homeomorfa a $S^1 \times I$, um anel. J será uma curva de **um lado** ou que reverte a orientação se $\mathfrak{N}J$ é homeomorfa a uma*

Figura 1.5: Em $\Sigma(3, 0)$, a curva rosa é homotópica a zero e a curva verde é homológica a zero mas não homotópica a zero. Em $\Upsilon(2, 0)$ temos duas curvas sendo que a curva azul não é separadora e é de um lado enquanto que a curva vermelha não é separadora e é de dois lados.

faixa de Möbius. Finalmente diremos que J não separa a superfície S quando $S \setminus J$ é conexa.

Para mais detalhes sobre a definição de vizinhança regular veja [29]. Em uma superfície compacta distinguiremos quatro tipos de curvas fechadas simples: as curvas homotópicas a zero; as curvas homológicas a zero mas não homotópicas a zero; as curvas não separadoras e de um lado e as curvas não separadoras e de dois lados, assim como em [30]. Veja Figura 1.5.

Vale ressaltar que se J é uma curva fechada simples no interior de $\Sigma(g, 0)$ então necessariamente J é curva de dois lados. Em outras palavras, as curvas de um lado, caso existirem, pertencerão às superfícies fechadas não orientáveis. Além disso, se J é uma curva de um lado no interior de $\Upsilon(h, 0)$, para $h \geq 1$, então J é uma curva não separadora.

1.2 Noções básicas da teoria de grafos

Esta seção tem como objetivo introduzir algumas noções básicas sobre a teoria de grafos topológicos. Essas noções serão importantes para a discussão dos invariantes que apresentamos nesta tese. Optamos por não apresentar as provas dos resultados aqui expostos, existem diversas referências onde podemos encontrar mais detalhes e esclarecimentos sobre conceitos abordados, veja por exemplo [29, 32]. Apresentamos algumas áreas nas quais a teoria dos grafos pode ser utilizada, como por exemplo na teoria de homologia.

Definição 1.2.1. *Um grafo G consiste de um conjunto não vazio de pontos $V = V(G)$ e um conjunto de vértices $E = E(G)$. O conjunto E é chamado de arestas de G e ao par não ordenado $e = (u, v)$ de E chamamos de aresta que une u a v ou v a u .*

Nesta tese todos grafos são finitos, isto é, os conjuntos V e E são finitos.

Uma **trajetória** em um grafo é uma sequência alternada de vértices e arestas $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ na qual a i -ésima aresta do grafo é $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ou $e_i = (v_i, v_{i-1})$. A primeira coordenada de uma aresta e_i é o **primeiro vértice** e a segunda coordenada de **segundo vértice**. Uma trajetória é um **caminho** se seus vértices (e como consequência todas as arestas da trajetória) são diferentes. Em um caminho, o primeiro vértice v_0 da primeira aresta será chamado de **origem** e o segundo vértice da última aresta v_n é chamado de **vértice final**. A origem e o vértice final são chamados de **extremos do caminho**. Finalmente, um **ciclo** em um grafo G é uma trajetória na qual $v_0 = v_n$. A **longitude** ou comprimento de um ciclo é o número de vértices do ciclo. Um ciclo de longitude n é também chamado de n -ciclo.

Um grafo é **conexo** se dados dois pares quaisquer de vértices do grafo existe uma trajetória que os une. Uma **árvore** é um grafo conexo que não possui ciclos.

Na teoria dos grafos topológicos cada aresta $e = (u, v)$ tem duas direções, a direção positiva indicada em e por uma seta de u a v e a direção negativa, indicada em e por uma seta de v a u . Uma aresta e dotada de uma direção é chamada de **aresta orientada**. Um **ciclo orientado** é um ciclo onde todas as arestas são orientadas na mesma direção.

O **ciclo rank** de um grafo conexo é o número $m(G)$ dado por $m(G) = \#E - \#V + 1$.

Definição 1.2.2. Um **laço** é uma aresta que une um vértice a si mesmo. Um **subgrafo** de G é um grafo que contém todas suas arestas e vértices em G . Um **multigrafo** é um grafo que não possui ciclos mas duas ou mais arestas podem unir dois vértices. A esse tipo de arestas chamamos de **arestas múltiplas**.

Definição 1.2.3. Um grafo dirigido (ou dígrafo) é um grafo onde cada aresta $e = (u, v)$ é um par ordenado unindo dois vértices diferentes.

Por definição, um grafo dirigido não tem laços ou arestas múltiplas.

Seja G um grafo dirigido e $e = (u, v)$ uma aresta de G . Dizemos que a aresta é dirigida de u a v e é **incidente** a u e v . Também diremos que e é **adjacente** a v e v é adjacente de u . O **grau de saída** de um vértice v , denotado por e^- , é o número de vértices adjacentes que partem de v e o **grau de chegada** de v , denotado por e^+ , é o número de vértices adjacentes chegando a v . A soma do grau de saída de v com o grau de chegada de v se

denomina o **grau** ou valência de v . Um **vértice fonte** é um vértice de grau de chegada zero, um **vértice poço** é um vértice de grau de saída zero e um **vértice interior** é um vértice que tem grau de saída e de chegada diferentes de zero.

Definição 1.2.4. *Dois grafos são isomorfos se existe uma correspondência um-a-um entre seus vértices e arestas a qual preserva suas adjacências.*

Um grafo é **regular** se todos seus vértices tem o mesmo grau. Os **grafos cúbicos** são grafos cujos vértices tem grau três e são um tipo interessante de grafos regulares, eles podem ser encontrados em diversas áreas do conhecimento como por exemplo na Química e na Matemática. Além disso, possuem propriedades particulares, como demonstra [32] no resultado enunciado a seguir.

Corolário 1.2.5 ([32]). *Todo grafo cúbico tem um número par de vértices.*

Algumas pesquisas tem por objetivo o estudo de algoritmos computacionais para calcular o número de grafos cúbicos com um número par de vértices. Por exemplo, na Figura 1.6 apresentamos uma tabela, copiada de [12], com o número exato de grafos cúbicos com até trinta e dois vértices (ver [12] para outros detalhes).

Um outro grafo interessante é o **diagrama de Dynkin**, chamados assim pelo matemático Eugene Dynkin. Um diagrama de Dynkin é um tipo de grafo com algumas arestas duplas ou triplas (desenhadas como uma linha dupla ou tripla, respectivamente). As arestas múltiplas são, algumas vezes, dirigidas. Este tipo de grafos aparecem na classificação das álgebras de Lie semi-simples sobre corpos algebricamente fechados e estão presentes em outros contextos também. Em particular, a classificação dessas álgebras de Lie é feita por meio do seu sistema de raízes o qual é representado por um diagrama de Dynkin, veja [74] para mais detalhes.

Tanto os grafos cúbicos como os grafos ou diagramas de Dynkin não são objetos de estudo desta tese e nem são ferramentas fundamentais para os resultados obtidos, no entanto no Capítulo 4, Observação 4.2.6 veremos como informações sobre os grafos cúbicos são úteis na investigação de sistemas Morse-Bott.

$ V(G) $	# cubic graphs
4	1
6	2
8	5
10	19
12	85
14	509
16	4 060
18	41 301
20	510 489
22	7 319 447
24	117 940 535
26	2 094 480 864
28	40 497 138 011
30	845 480 228 069
32	18 941 522 184 590

Figura 1.6: Número de grafos cúbicos com até trinta e dois vértices.

1.3 Funções Morse-Bott

Sejam M uma variedade compacta com métrica Riemanniana induzida pela imersão de M em $\mathbb{R}^k$, para algum $k \geq 1$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, função de classe C^r , com $r \geq 2$.

Definição 1.3.1. Um ponto $p \in M$ é chamado de **ponto singular** da função f se $\text{rank}(df(p))$ não é máximo. Caso contrário, p é chamado de **ponto regular** de f . Se a imagem inversa de um valor $b \in \mathbb{R}$ pela função f , $f^{-1}(b)$, contém um ponto singular dizemos que b é um **valor singular** de f . Do contrário, $b \in \mathbb{R}$ é chamado de **valor regular** de f .

A coleção de todos os pontos singulares de f é chamado de **conjunto singular** de f e nesta tese denotamos esse conjunto por $Sing(f)(M)$. Os pontos singulares de f são chamados também de **singularidades de f** .

Dado $b \in \mathbb{R}$ considere o conjunto de nível de f , $I_b(f)$, o qual consiste dos pontos $x \in M$ para os quais $f(x) = b$. $I_b(f)$ é a união de componentes conexas, $i_b^k(f)$, $k = 1, \dots, m(b)$ chamadas de **fibras**. Uma componente conexa de $I_b(f)$ que contém pontos singulares de

f é chamada de **fibra singular** e será denotada por $s_b(f)$. Diremos que f é **simples** ou **não ressonante** quando todo b , $I_b(f)$ possui uma única componente conexa contendo singularidades de f .

Quando todas as fibras próximas de uma fibra singular são homeomorfas a ela dizemos que a fibra singular é **reduzível**. Para mais detalhes sobre este conceito ver [2].

O grafo de Reeb é um grafo que nos permite estudar a evolução dos conjuntos de nível de funções suaves definidas em variedades. Ele foi introduzido por George Reeb ([63]) e é uma ferramenta que tem aplicações não somente na Matemática (aparece no estudo da Teoria de Morse) como também em outros contextos, como por exemplo na Geometria computacional e em gráficos computacionais. O grafo de Reeb também é conhecido como o *grafo Kronrod-Reeb* ([72]) e, para funções definidas em domínios simplesmente conexos, é conhecido como *árvore de contorno* (ver mais detalhes em [60]) onde é uma estrutura fundamental de dados para entender e representar uma vizinhança de fenômenos em visualização científica.

Definição 1.3.2. [63] *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^r , com $r \geq 2$. Suponha que f tem apenas singularidades isoladas. Definimos o **grafo de Reeb** de f , denotado por R_f , como um grafo que como conjunto foi obtido a partir de M contraindo cada uma das fibras de f em um ponto e cujos vértices são as fibras singulares de f .*

Definição 1.3.3. *O grafo de Reeb R_f de uma função f de classe C^r , com $r \geq 2$, é um complexo simplicial de dimensão 1. Então um **ciclo básico** no grafo de Reeb é qualquer gerador do primeiro grupo de homologia $H_1(R_f)$.*

Vejamos a seguir um exemplo clássico. Considere o 2-toro homeomorfo à superfície W à esquerda na Figura 1.7, acima do plano xy . Seja $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ a representação funcional da função altura acima do plano xy . Então o grafo de Reeb de f é como mostrado na figura.

Como o grafo de Reeb de f pode ser considerado como um subconjunto de M , podemos falar na projeção $\pi : M \rightarrow R_f$ e na inclusão $\iota : R_f \rightarrow M$. A partir destas duas funções duas novas funções são definidas tal e como descritas a seguir ([67]):

- **factor de Stein** de f , que é a função $\bar{f}$ satisfazendo $f = \pi \circ \bar{f}$;
- A restrição de f ao R_f , denotada por $f_{\mathcal{R}}$ e definida por $f_{\mathcal{R}} = f \circ \iota$.

Figura 1.7: O grafo de Reeb da função altura $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ ao longo do eixo z .

Ambas funções estão intimamente relacionadas uma vez que o grafo de Reeb é um subcomplexo da superfície (para maiores referências ver [35]).

Definição 1.3.4. [11] *Uma subvariedade suave do conjunto singular de f , $C \subset \text{Sing}(f)(M)$, é dita **subvariedade crítica não degenerada** de f se $\partial C = \emptyset$, C é compacta e conexa e para todo $s \in C$ temos $T_s C = \ker(\text{Hess}_s f)$, onde $\text{Hess}_s f$ indica a matriz das derivadas parciais de segunda ordem da função f em s conhecida como a Hessiana de f .*

*Quando $\text{Sing}(f)(M)$ consiste apenas de subvariedades críticas não degeneradas dizemos que f é **função Morse-Bott**.*

De agora em diante, usaremos a notação $\mathcal{MB}$ como uma abreviação da palavra *Morse-Bott* e assumiremos que as funções $\mathcal{MB}$ são simples.

O seguinte lema, conhecido como o Lema de Morse-Bott descreve o comportamento local dos pontos pertencentes a uma subvariedade crítica não degenerada.

Lema 1.3.5 ([4]). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{MB}$, C uma componente conexa de $\text{Sing}(f)(M)$ de dimensão d e $p \in C$. Então existe uma vizinhança aberta U de p e uma carta suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{m-d}$, onde $m = \dim M$, tal que:*

- (i) $\phi(p) = 0$;
- (ii) $\phi(U \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{m-d} / y = 0\}$ e
- (iii) $(f \circ \phi^{-1})(x, y) = f(C) - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \cdots + y_{m-d}^2$,

Figura 1.8: Gráfico da função $f(x, y) = x^2$.

onde $k \leq m - d$ é o índice de $Hess_p(f)$ e $f(C)$ é o valor comum de f em C .

Em particular, a terceira condição na definição acima nos diz que toda *função de Morse* sobre uma variedade compacta é uma função $\mathcal{MB}$. Neste caso, as subvariedades críticas não degeneradas são pontos críticos isolados, em particular, todos distintos (mais informações sobre funções de Morse em [13] p. 80, Prop. 8.1 e [26] p. 334 Cor. 8.2.5).

A seguir, apresentamos alguns exemplos de funções $\mathcal{MB}$.

Exemplo 1.3.6. Considere a função $f(x, y) = x^2$ como na Figura 1.8. Então a subvariedade crítica não degenerada de f é o eixo y , representada na figura por uma linha vermelha.

Exemplo 1.3.7. Considere a função altura sob a garrafa como na Figura 1.9. Então as subvariedades críticas não degeneradas desta função são dois centros, denotados por c_1 e c_2 e três circunferências, o_1 , o_2 e o_3 .

Exemplo 1.3.8. A seguinte equação paramétrica

$$\phi(x_1, x_2) = ((R + r \cos x_1) \cos x_2, (R + r \cos x_1) \sin x_2, r \sin x_1),$$

com $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, representa o toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{R}^3$, obtido pela revolução de um círculo de raio r no plano yz com seu centro a uma distância $R > r$ do eixo y , em torno do eixo x . Veja a Figura 1.10

A função $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\phi(x_1, x_2)) = r \sin x_1$, é uma função de Morse-Bott. As subvariedades críticas não degeneradas de f em $\mathbb{T}^2$, são dois círculos, de índices

Figura 1.9: Uma função Morse-Bott definida numa garrafa.

Figura 1.10: A função $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Cada círculo em vermelho corresponde a uma subvariedade crítica não degenerada de f .

0 e 1 respectivamente.

De fato, seja $p \in \mathbb{T}^2$, então p é um ponto crítico de f se, e somente se, $\text{grad } f = 0$, onde $0 = (0, 0)$. Assim $\text{grad } f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}) = 0$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = r \cos x_1 = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, ou seja, nos pontos $(\frac{\pi}{2}, x_2)$ e $(-\frac{\pi}{2}, x_2)$. Tais pontos correspondem aos pontos críticos de f dados por $C_{\pm \frac{\pi}{2}} = ((R + r \cos(\pm \frac{\pi}{2})) \cos x_2, (R + r \cos(\pm \frac{\pi}{2})) \sin x_2, r \sin(\pm \frac{\pi}{2})) = (R \cos x_2, R \sin x_2, \pm r)$. Notemos que $C_{\pm \frac{\pi}{2}}$ são círculos não degenerados de raio $R > 0$, localizados em $z = \pm r$, desde que a matriz Hessiana de f em um ponto p é dada por

$$\text{Hess}_p(f) = \begin{pmatrix} -r \sin x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, em coordenadas locais (x_1, x_2) , podemos deduzir que

$$\text{Hess}_{C_{\pm \frac{\pi}{2}}}(f) = \begin{pmatrix} \mp r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $p \in C_{\frac{\pi}{2}}$ então $p = (R \cos x_2, R \sin x_2, r)$, com $R > r$ para algum x_2 real. Sem perda de generalidade podemos escolher $x_2 = 0$. Parametrizando a curva por p , $(\alpha(x_2), \beta(x_2), r) = (R \cos x_2, R \sin x_2, r)$, temos que $v \in T_p C_{\frac{\pi}{2}}$ se, e somente se, $v = \frac{dC_{\frac{\pi}{2}}}{dx_2} \Big|_{x_2=0} = (0, R, 0)$. Note que $v \in \ker(\text{Hess}_p(f))$. De fato, se $w = (w_1, w_2) \in \ker \text{Hess}_p(f)$ então $w_1 = 0$; portanto $w \in T_p C_{\frac{\pi}{2}}$. Logo $\ker(\text{Hess}_p(f)) = T_p C_{\frac{\pi}{2}}$. Isto mostra que $C_{\frac{\pi}{2}}$ é não-degenerado. Além disso, o índice de $C_{\frac{\pi}{2}}$ é um uma vez que a direção normal a $C_{\frac{\pi}{2}}$ é a direção $\eta = (1, 0)$ e a $\text{Hess}_p(f|_{\eta}) < 0$. Analogamente, $C_{-\frac{\pi}{2}}$ é não-degenerado de índice zero.

Exemplo 1.3.9. [A função de Wigner [42, 81]] A função de Wigner é uma função distribuição de probabilidades no espaço de fase quântico descrito por variáveis do tipo “momento” e “posição”. Estudaremos aqui funções de Wigner dadas pela expressão:

$$f_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \cdot h} e^{-2H/h} \cdot L_n(4H/h),$$

onde $L_n = \frac{1}{n!} e^z \partial_z^n (e^{-z} z^n)$ são os polinômios de Laguerre, e para $n = 0, 1, 2$, temos $L_0 = 1$, $L_1 = 1 - \frac{4H}{h}$, $L_2 = \frac{8H^2}{h^2} - \frac{8H}{h} + 1$.

Vamos supor que $H = \frac{p^2 + x^2}{2}$ e $h = 1$, então para $n = 0, 1, 2$ temos

- (i) $f_0(x, p) = (2p^2 + 2x^2)/\pi \cdot e^{(-p^2-x^2)};$
- (ii) $f_1(x, p) = (-2p^2 - 2x^2 + 4p^4 + 8x^2p^2 + 4x^4)/\pi \cdot e^{(-p^2-x^2)};$
- (iii) $f_2(x, p) = (4p^6 + 12x^2p^4 + 12x^4p^2 - 8p^4 - 16x^2p^2 + 2p^2 + 4x^6 - 8x^4 + 2x^2)/\pi \cdot e^{(-p^2-x^2)}.$

As funções f_0 , f_1 e f_2 são $\mathcal{MB}$. De fato, todas elas tem como subvariedades críticas não degeneradas à origem (como máximo valor absoluto) e circunferências (tal como mostram na Figuras 1.11, 1.12 e 1.13).

Figura 1.11: A função $f_0(x, p)$. $\{x^2 + p^2 = 1\}$ é subvariedade crítica não degenerada. $(x, p) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Figura 1.12: A função $f_1(x, p)$. $\{x^2 + p^2 = (5 + \sqrt{17})/4\}$ and $\{x^2 + p^2 = (5 - \sqrt{17})/4\}$ são subvariedades críticas não degeneradas e f_1 atinge o valor máximo e mínimo relativo respectivamente. $(x, p) \in [-3, 3] \times [-3, 3]$.

Exemplo 1.3.10. [Funções redondas] Uma função redonda é uma função definida em uma variedade m -dimensional M a valores reais cujos pontos críticos de uma ou várias

Figura 1.13: O gráfico da função $f_2(x, p)$. $(x, p) \in [-3.5, 3.5] \times [-3.5, 3.5]$. As circunferências dadas por $\{x^2 + p^2 = (8 - \sqrt{56})/4\}$, $\{x^2 + p^2 = (8 + \sqrt{56})/4\}$ e $\{x^2 + p^2 = 1\}$ são subvariedades críticas não degeneradas.

componentes conexas são homeomorfas à S^1 , também chamadas de *laços críticos*. Vale observar que, em geral, não se supõe que as subvariedades críticas sejam não-degeneradas no sentido de Morse-Bott mas quando estamos sob essa hipótese a função redonda é chamada de **função redonda de Morse**, ela é uma extensão da noção de função ciclo de Morse introduzida em [77]. Então as funções redondas de Morse são casos especiais de funções de $\mathcal{MB}$ onde os conjuntos singulares são uniões disjuntas de círculos [36]. Em [64] estas funções são chamadas de S^1 -função Bott.

1.3.1 Singularidades das funções Morse-Bott

Seja $\Pi(k, 0)$ uma superfície fechada de genus k e sem bordo. Considere f uma função $\mathcal{MB}$ em $\Pi(k, 0)$ e C uma subvariedade crítica não degenerada n -dimensional de f em $\Pi(k, 0)$, com $0 \leq n < 2$. Dado $p \in C$, o Lema de Morse-Bott garante a existência de uma vizinhança aberta U de p e uma carta suave $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2-n}$, tal que $(f \circ \phi^{-1})(x, y) = f(C) \pm x^2 \pm y^2$, onde $f(C)$ é a imagem de C pela f e o índice de Morse k de $Hess_p(f)$ é 0 ou 1.

A seguinte proposição nos diz como são as subvariedades singulares não degeneradas de f em $\Pi(k, 0)$.

Proposição 1.3.11. *Seja f uma função $\mathcal{MB}$. As subvariedades críticas não degeneradas*

de f em $\Pi(k, 0)$ são difeomorfas a um ponto ou a S^1 .

Demonstração. Sendo $\Pi(k, 0)$ uma superfície fechada, a dimensão das subvariedades críticas não degeneradas de f em $\Pi(k, 0)$ pode ser 0, 1 ou 2. Salvo difeomorfismos, no caso 0-dimensional, as subvariedades singulares são conjuntos unitários, a saber, os pontos críticos de f ; no caso 1-dimensional, cada subvariedade crítica não degenerada será ou um círculo ou uma reta de pontos críticos. Sendo $\Pi(k, 0)$ compacta a única possibilidade que cabe aqui é que seja uma circunferência e, portanto, difeomorfa a S^1 . O caso 2-dimensional, não é possível (não teríamos o subespaço normal em cada ponto, além disso a função seria constante em toda a superfície). $\square$

Segue da proposição anterior que se a dimensão de uma subvariedade crítica não degenerada C é zero, então, a menos de difeomorfismo, C é um ponto, digamos $p \in \Pi(k, 0)$, portanto, f é uma função de Morse localmente e o comportamento local já foi estudado em [8].

Consideremos agora o caso em que a dimensão de C , a subvariedade crítica não degenerada de f , é igual a um, nesse caso, salvo difeomorfismos, C é uma circunferência crítica homeomorfa a S^1 . Seja $p \in C$ e η o vetor normal a C em p . Segue do Lema de Morse-Bott que, em coordenadas apropriadas, a função f restrita a direção normal pode ser escrita como

$$f|_{\eta}(y) = f(C) \pm y^2 \quad (1.7)$$

e o índice de $Hess_p(f)$ é 0 ou 1, e o mesmo para todo $p \in C$. Logo, se o índice de $Hess_p(f)$ é 0, segue da equação anterior que

$$f(y) = f(C) + y^2 \quad (1.8)$$

e, portanto, f é uma função crescente na direção normal η . Se o índice de $Hess_p(f)$ é 1 então

$$f(y) = f(C) - y^2 \quad (1.9)$$

e segue ainda que, f é uma função decrescente na direção normal η . Como consequência temos que $f(y) = f(C) + y^2$ e $f(y) = f(C) - y^2$ correspondem aos mínimos e máximos de f respectivamente. Destas considerações temos a seguinte proposição.

Figura 1.14: Gráficos de funções $\pm x^4 \pm y^4, y^4$.

Proposição 1.3.12. *Seja $\Pi(k, 0)$ uma superfície fechada de genus $k \geq 0$ e f uma função $\mathcal{MB}$. De acordo com a dimensão da subvariedade singular não degenerada e seu índice, o conjunto $\text{Sing}(f)(\Pi(k, 0))$ pode ser dividido em três subconjuntos:*

- (i) $\text{Cir}(f)(\Pi(k, 0))$: *subvariedades singulares de f homeomorfas a S^1 , nesses pontos a função atinge seus valores extremos.*
- (ii) $\text{Cen}(f)(\Pi(k, 0))$: *singularidades isoladas de f de índice 0 e 2, pontos onde a função assume valores extremos.*
- (iii) $\text{Sad}(f)(\Pi(k, 0))$: *singularidades de índice 1 e conhecidas como pontos de sela.*

Nesta tese estamos interessados no estudo do tipo topológico das singularidades das funções $\mathcal{MB}$. Existem funções suaves que não são funções $\mathcal{MB}$ cujas singularidades têm o mesmo tipo topológico das singularidades das funções $\mathcal{MB}$, por exemplo funções da forma $\pm x^4 \pm y^4, y^4$, como na Figura 1.14.

1.4 Folheações Morse-Bott em superfícies

Segundo A. Ya. Narmanov e G. Kaypnazarova [51], a teoria das folheações é um ramo da geometria que teve origem no início na segunda metade do século XX como o nascimento da teoria qualitativa das equações diferenciais que relacionou a teoria das equações diferenciais ordinárias com a topologia diferencial. Trabalhos precursores da teoria de

folheações pertencem a matemáticos franceses como A. Haefliger, G. Ehresman, G. Reeb entre outros. I. Nikolaev [56] acredita que G. Ehresman e G. Reeb foram inspirados pelos trabalhos de H. Poincaré, A. M. Lyapunov e G. D. Birkhoff, matemáticos que iniciaram o uso de métodos geométricos no estudo das equações diferenciais.

Folheações aparecem naturalmente como soluções de sistemas de equações diferenciais ou de sistemas integráveis e o estudo das folheações garante o estudo do comportamento global de tais soluções.

Nesta seção estudamos as folheações singulares definidas em superfícies fechadas e orientáveis $\Sigma(g, 0)$, geradas pelos conjuntos de nível de uma função Morse-Bott. Para isso se faz necessário definir o conceito de folheação, folheação singular, folhas, dimensão de folhas e conjunto singular, entre outros conceitos.

Definição 1.4.1. ([76]) *Seja M variedade de dimensão m com ou sem bordo e $\mathcal{F} = \{L_\alpha; \alpha \in A\}$ uma família de subconjuntos L_α de M . Diremos que $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r e dimensão k da variedade M se $\mathcal{F}$ satisfaz as seguintes condições:*

- (i) $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A$.
- (ii) $\bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha = M$.
- (iii) *Dado $p \in M$ existe carta local $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, onde U_λ é vizinhança de p tal que para cada $\alpha \in A$ tal que $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \emptyset$ as componentes conexas de $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ tem a forma $\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \varphi_\lambda(U_\lambda); x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \dots, x_m = c_m\}$, onde $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_m$ são constantes determinadas pela componente conexa (ver Figura 1.15).*

As folheações de classe C^r e dimensão k em M são chamadas de folheações C^r de codimensão $m - k$. Cada L_α é chamada de *folha* e o par $(M, \mathcal{F})$ é chamado de *variedade folheada*. Veja exemplos de folheações em variedades em [15]. A seguir apresentamos dois exemplos de folheações em superfícies.

Exemplo 1.4.2. ([51])(1) Se X é um campo vetorial de classe C^1 sem pontos de equilíbrio em uma superfície M . Segue do teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias que as curvas integrais de X geram uma folheação de dimensão 1 na superfície M .

Figura 1.15: Uma folheação C^r de dimensão k em M .

(2) Seja Π uma superfície fechada, $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in \Pi$ tal que $f(p) = a$. O conjunto de nível f , $I_a(f) = \{q \in \Pi : f(q) = a\}$, é uma subvariedade de Π . Se f não possui pontos críticos então os conjuntos $I_a(f)$, definem uma folheação em Π de codimensão 1.

Definição 1.4.3. Uma **folha singular** de uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão n é uma folha de dimensão menor do que n . Uma **folheação singular** é uma folheação com folhas singulares. Denotamos por $\text{Sing}(\mathcal{F}(M))$ o conjunto de todas as folhas singulares de uma folheação singular $\mathcal{F}$ em M .

Definição 1.4.4. Duas folheações singulares $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ definidas em uma superfície fechada Π são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : \Pi \rightarrow \Pi$ que envia folhas de $\mathcal{F}_1$ em folhas de $\mathcal{F}_2$.

Um exemplo de folheação singular é a folheação definida pelos conjuntos de níveis de uma função diferenciável $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma superfície fechada Π . Neste caso as folhas singulares correspondem aos pontos críticos de f . Nesta tese estudamos as folheações definidas pelas curvas de nível de uma função $\mathcal{MB}$ definida em superfícies fechadas.

Definição 1.4.5. Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável de genus $g \geq 0$. Uma folheação Morse-Bott em $\Sigma(g, 0)$ é uma folheação singular definida pelos conjuntos de nível de $g : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, onde g é função $\mathcal{MB}$. Esta folheação é denotada por $\mathcal{F}(g)$.

Uma vez que as funções $\mathcal{MB}$ que estamos considerando neste trabalho são simples

segue que as folheações $\mathcal{MB}$ definidas pelos conjuntos de nível destas funções também serão simples, ou seja, não haverá separatriz unindo dois pontos de sela.

Sejam $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e f é função $\mathcal{MB}$ em $\Sigma(g, 0)$ tal que as subvariedades críticas de f têm dimensão 0. Então o conjunto das singularidades da folheação $\mathcal{MB}$ $\mathcal{F}(f)$ se divide em dois conjuntos

$Cen(\mathcal{F}(\Sigma))$: o conjunto dos pontos de centros. Estes são os máximos e mínimos da função $\mathcal{MB}$ f .

$Sad(\mathcal{F}(\Sigma))$: o conjunto dos pontos de sela.

Para mais detalhes e exemplos veja [69] e [70].

Vale destacar ainda que, cada conjunto de nível de f que contém um ponto de sela consiste de um ponto crítico p (o ponto de sela) e duas circunferências s_1 e s_2 que se interceptam em p , formando o fecho das separatrizes de p . Chamamos a todo este conjunto de nível de *oito*.

O estudo do comportamento local das folhas singulares assim como a classificação das folheações singulares em superfícies (e ainda em variedades de dimensão maior do que dois) é um problema clássico na matemática. Na literatura encontramos a classificação topológica de alguns tipos de folheações de codimensão 1 com número finito de singularidades, por exemplo, a classificação das folheações definidas por funções de Morse em superfícies ([9]) e a classificação das folheações Morse-Smale ([56]). A classificação topológica de uma classe de folheações topologicamente orientadas na esfera S^2 , com singularidades, seguem da classificação dos campos vetoriais polinomiais, veja [31].

Vale ressaltar aqui que as folheações Morse-Bott que estudamos nesta tese são folheações singulares definidas globalmente por funções Morse-Bott, em outras palavras, a folheação restrita a uma vizinhança de tais singularidades coincide com as componentes conexas de conjuntos de nível de uma função Morse-Bott nessa vizinhança.

Vale mencionar [66] e [14] onde encontramos o estudo das folheações singulares locais, ou seja, folheações cujas singularidades ou fibras singulares estão definidas localmente por funções Morse e funções Morse-Bott, respectivamente.

1.5 Nós em superfícies

A fim de classificar as folheações Morse-Bott em superfícies será necessário definir uma equivalência por fibras que preserve o tipo topológico das mesmas, ou seja, precisaremos investigar como as curvas fechadas e os oitos podem ser imersos em superfícies. Para apresentar nossa investigação a esse respeito precisamos recordar alguns conceitos e resultados da teoria de nós.

Denotaremos por $\Pi(k, m)$ uma superfície fechada e conexa de genus k e m discos no bordo. Então o bordo de $\Pi(k, m)$ é uma união de m curvas de Jordan $(J_1, \dots, J_m)$ as quais são disjuntas duas a duas. Se $\Pi(k, m)$ é uma superfície orientável, a denotaremos por $\Sigma(g, m)$ com $g \geq 0$. Caso $\Pi(k, m)$ seja uma superfície não orientável, a denotaremos por $\Upsilon(h, m)$ com $h \geq 1$.

Definição 1.5.1 ([80]). *Uma orientação concordante do bordo de uma superfície $\Pi(k, m)$, dada por $(J_1, \dots, J_m)$ consiste de uma orientação sobre cada curva de Jordan $J_1, \dots, J_m$, tal que a orientação induzida em $\Pi(k, m)$ pela orientação em J_i é independente de $i = 1, \dots, m$.*

Suponha que h é um homeomorfismo do bordo de $\Pi(k, m)$, $J_1, \dots, J_m$ no bordo de $\Pi(k, m)$, $J'_1, \dots, J'_m$ e assumamos que $h(J_i) = J'_i$, $i = 1, \dots, m$. Os teoremas a seguir caracterizam os homeomorfismos h que se estendem a toda superfície $\Pi(k, m)$.

Teorema 1.5.2 ([80]). *Um homeomorfismo $h : (J_1^1, \dots, J_m^1) \rightarrow (J_1^2, \dots, J_m^2)$ pode ser estendido a um homeomorfismo entre $\Sigma^1(g, m)$ e $\Sigma^2(g, m)$ se, e somente se, h leva uma orientação concordante de $(J_1^1, \dots, J_m^1)$ em uma orientação concordante de $(J_1^2, \dots, J_m^2)$.*

Teorema 1.5.3 ([80]). *Um homeomorfismo $h : (J_1^1, \dots, J_m^1) \rightarrow (J_1^2, \dots, J_m^2)$ pode sempre ser estendido a um homeomorfismo entre $\Upsilon^1(g, m)$ e $\Upsilon^2(g, m)$.*

Outro resultado amplamente usado em topologia e nesta tese é o seguinte.

Lema 1.5.4 (O Lema da Colagem). *Sejam $X = A \cup B$, onde A e B são conjuntos fechados em X e $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ funções contínuas. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$, então existe uma função contínua $h : X \rightarrow Y$ tal que $h(x) = f(x)$, se $x \in A$ e $h(x) = g(x)$, se $x \in B$.*

Segundo Rolfsen [65], um dos principais triunfos da topologia está baseado no estudo dos nós e enlaces (conhecidos na literatura como *links*). A definição de nó e algumas de suas propriedades que descrevemos abaixo são devidas a Rolfsen [65].

Definição 1.5.5 ([65]). *Um subconjunto K de um espaço X é um nó se K é homeomorfo a esfera S^p .*

Para o caso dos nós no plano, temos os seguintes resultados.

Teorema 1.5.6 (Teorema da Curva de Jordan ([65], p. 9)). *Se J é uma curva simples fechada em $\mathbb{R}^2$ então $\mathbb{R}^2 \setminus J$ possui duas componentes conexas cujo bordo é a curva J .*

Teorema 1.5.7 (Teorema de Schönflies ([65], p. 9)). *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, cada uma das componentes de $\mathbb{R}^2 \setminus J$ é homeomorfa a um disco unitário.*

Estes dois últimos resultados são válidos também para S^2 .

Definição 1.5.8. *Dois nós $\phi_i(S^1)$, $i = 1, 2$ em $\Sigma(g, 0)$ são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$ tal que $h(\phi_1(S^1)) = \phi_2(S^1)$.*

Os próximos resultados serão úteis na classificação dos nós em S^2 e $\mathbb{R}^2$.

Lema 1.5.9 (Lema de Alexandre, ([65], Lema 5, p. 10)). *Considere D^n o n -disco unitário de $\mathbb{R}^n$. Se $A \cong B \cong D^n$ então todo homeomorfismo $h : \partial A \rightarrow \partial B$ se estende a um homeomorfismo $\bar{h} : A \rightarrow B$.*

No Teorema 2.1.4, apresentamos uma outra demonstração do corolário a seguir.

Corolário 1.5.10 ([65], Corolário. 4, p. 9). *Quaisquer dois nós de S^1 em S^2 (ou $\mathbb{R}^2$) são equivalentes.*

Demonstração. Sejam J_1, J_2 dois nós em S^2 e sejam U_i, V_i as componentes de $S^2 - J_i$, $i = 1, 2$, dadas pelo Teorema da curva de Jordan. Pelo Teorema de Schönflies, $U_1 \cong U_2 \cong D^2$ e $V_1 \cong V_2 \cong D^2$. Por outro lado, pela definição de nós temos que $J_1 \cong J_2 \cong S^1$, então existe $h : J_1 \rightarrow J_2$ homeomorfismo e como $J_1 = \partial U_1 = \partial V_1$; $J_2 = \partial U_2 = \partial V_2$ então pelo Lema de Alexandre temos que existem homeomorfismos $\bar{h}_U : U_1 \rightarrow U_2$ e $\bar{h}_V : V_1 \rightarrow V_2$ que são extensões de $\bar{h}$.

Definimos $H : S^2 \rightarrow S^2$ como sendo,

$$H(x) = \begin{cases} \bar{h}_U(x) & \text{se } x \in U_1 \\ \bar{h}_V(x) & \text{se } x \in V_1 \\ h(x) & \text{se } x \in J_1 \end{cases}$$

Note que U_1 e V_1 são conjuntos fechados, as funções $\bar{h}_U$ e $\bar{h}_V$ são contínuas e $\bar{h}_U(x) = \bar{h}_V(x)$, se $x \in U_1 \cup V_1$. Portanto, pelo Lema da Colagem, H é uma função contínua, mais ainda, H é um homeomorfismo, pois $\bar{h}_U$ e $\bar{h}_V$ o são. Por outro lado, $H(J_1) = J_2$. Então concluí-se que J_1 e J_2 são equivalentes. $\square$

Se $\phi_1(S^1) = J$ é nó então $\Sigma(g, 0) \setminus J$ pode ter uma ou duas componentes conexas. Sejam K_i , onde $i = 1, 2$, as superfícies compactas com curvas no bordo obtidas pelo fecho das componentes conexas de $\Sigma(g, 0) \setminus J$. Lembremos que J será uma curva homotópica a zero se ela limita um disco em $\Sigma(g, 0)$, e, neste caso, diremos que J é do tipo l_0 ; caso contrário diremos que J é essencial. J será uma curva homológica a zero se divide a superfície $\Sigma(g, 0)$ em duas superfícies K_i , $i = 1, 2$, tal que K_i tem genus g_i com $g = g_1 + g_2$, $0 \leq g_1 \leq g_2$. Diremos que a curva J é do tipo l_i se é homológica a zero, mas não homotópica a zero, onde o subíndice i se refere ao genus de K_1 ; J será do tipo l_K se a curva não é homológica a zero. Vide Figura 2.1.

Finalmente, $\mathcal{P}(K_i)$ denota a superfície obtida pela colagem de discos nas curvas do bordo K_i , $i = 1, 2$.

Figura 1.16: Dois mergulhos não topologicamente equivalentes no toro.

Para o caso do toro, existem pelo menos dois tipos de nós, J e M , como mostrados na Figura 1.16. Uma vez que o nó J é uma curva homotópica a zero e o nó M é essencial, não existe homeomorfismo do toro em si mesmo que leve J em M . Estes são de fato os únicos dois tipo de nós não equivalentes no toro.

Figura 1.17: O fluxo f^t na esfera.

Teorema 1.5.11 ([65], Teorema 15, p. 25). *Existem dois tipos de nós de S^1 no toro, o nó homotópico a zero e o essencial.*

1.6 Sistemas integráveis em superfícies

Nesta seção se encontram algumas definições básicas da teoria qualitativa de sistemas integráveis em superfícies.

Definição 1.6.1 ([1]). *Um fluxo f^t , ou sistema dinâmico de tempo contínuo, em uma variedade M se define como sendo uma aplicação contínua $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que*

1. $f(m, t_1 + t_2) = f(f(m, t_1), t_2)$, $m \in M$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,
2. $f(m, 0) = m$, $m \in M$.

Para cada $m \in M$, se define a **trajetória** por m como a curva dirigida definida por $l(m) = \{f(m, t) : -\infty < t < +\infty\}$. Se a trajetória $l(m) = \{m\}$, isto é, consiste de um único ponto, dizemos que m é **ponto de equilíbrio** ou **ponto estacionário** ou **ponto singular** do fluxo. Finalmente, uma trajetória que é homeomorfa a um círculo S^1 é chamada de **trajetória fechada**. As trajetórias que não são fechadas e não são pontos de equilíbrio do sistema são chamadas de **trajetórias não fechadas** ou **regulares**.

Exemplo 1.6.2 ([1]). f^t é o grupo de rotação a um-parâmetro na esfera S^2 dada pela rotação de S^2 sobre o eixo SN (que une o polo norte ao polo sul) através do ângulo $t \in \mathbb{R}$. Então as trajetórias desse fluxo são curvas paralelas na esfera e o polo norte N e o polo sul S são seus únicos pontos de equilíbrio. Veja a Figura 1.17.

Denote por TM o espaço tangente a superfície M . Um **campo vetorial** V de classe C^r , $r \geq 0$, em M é a seção $V : M \rightarrow TM$ do fibrado $\pi : TM \rightarrow M$, ou seja, é uma aplicação V de classe C^r tal que $\pi \circ V = \text{id}$.

Considere f^t um fluxo em M com f de classe C^1 . Então em cada ponto $m \in M$, o **vetor tangente** $l(m)$ à trajetória pelo ponto m é dado por

$$V(m) = \left. \frac{d}{dt} f^t(m) \right|_{t=0}.$$

Um **campo vetorial** é a correspondência $m \rightarrow V(m)$, com $m \in M$ e é denotado por V_f . Se f^t é um fluxo, com f de classe C^r , então V_f é um campo vetorial suave de classe C^r , o campo de velocidades do fluxo f^t , (ver [1]). Portanto, uma maneira de especificar o fluxo em uma variedade compacta é especificar o campo vetorial que o define.

Na literatura encontramos alguns fluxos interessantes tais como os fluxos Morse-Smale, os fluxos Morse, os fluxos sem trajetórias recorrentes não triviais, fluxos Hamiltonianos, os fluxos suaves sem pontos errantes, entre outros (ver [1, 59, 21, 22, 18, 61, 9]). Estamos interessados no estudo de uma classe particular de fluxos, os fluxos definidos em superfícies compactas S e gerados pela decomposição em folhas por uma folheação singular em S de codimensão 1. Mais especificamente, estamos interessados no estudo dos sistemas integráveis, cujo retrato de fase é determinado pela decomposição em folhas da folheação definida por uma integral primeira do sistema. A definição formal de integral primeira segue abaixo.

Definição 1.6.3. *Uma integral primeira para um sistema analítico ou suave de equações diferenciáveis*

$$\dot{x}_1 = f_1(x), \dots, \dot{x}_n = f_n(x) \tag{1.10}$$

definido em Ω contido em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ é uma função diferenciável e não constante $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ que é constante ao longo das trajetórias do sistema, isto é, para qualquer solução $x(t)$ de (1.10) em Ω , a função $f(x(t))$ é constante.

Observação 1.6.4. *Se $X(x) = f_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}$ é o campo vetorial suave ou analítico em Ω associado ao sistema (1.10) então uma função diferenciável não constante $\tilde{f}$ em Ω é uma integral primeira para (1.10) se, e somente se, a função $X \cdot \tilde{f}$ se anula em*

todo Ω , em outras palavras

$$X \cdot \tilde{f} = f_1(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} + \dots + f_n(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n} \equiv 0,$$

em Ω . Geometricamente, isso significa que as curvas integrais ou trajetórias do sistema estão contidas nos conjuntos de nível da integral primeira $\tilde{f}$.

Observemos ainda que se $\tilde{f}$ é uma integral primeira de $X = X(x)$ então $\tilde{f}$ não é única. De fato, se g é uma função suave e não constante então $g(\tilde{f})$ é também uma integral primeira de X . Portanto, nesta tese, o par (X, f) denota o par formado pelo campo vetorial ou sistema integrável definido em uma variedade M , e uma integral primeira f de X .

Segue da definição anterior que o conhecimento de uma integral primeira f de um sistema diferenciável definido numa superfície é fundamental no estudo das trajetórias do sistema, uma vez que as mesmas estarão contidas nas curvas de nível de f . Nesta tese, estamos interessados no estudo dos sistemas integráveis definidos em superfícies fechadas com integral primeira Morse-Bott.

Quais são os sistemas Morse-Bott definidos em variedades fechadas de dimensão 1? Para responder esta pergunta, vejamos inicialmente que, salvo homeomorfismos, as variedades fechadas de dimensão 1 são círculos, S^1 . Por outro lado, uma função Morse-Bott $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, tem como subvariedades críticas não degeneradas pontos de máximo e mínimo, logo f é, em particular, uma função de Morse. Observemos ainda que neste caso, f tem pelo menos um máximo global e um mínimo global e os outros pontos são máximos e mínimos locais e o número de máximos é igual ao número de mínimos. Uma função f que é constante ao longo das soluções de um sistema Morse-Bott que não é função de Morse será necessariamente uma função constante e, portanto, segundo nossa definição, não é uma integral primeira.

Um problema interessante na teoria qualitativa dos sistemas integráveis (sistemas dinâmicos em geral) é obter quantidades, características ou propriedades para uma classe particular $\mathcal{K}$ de sistemas. Basicamente, consideramos em $\mathcal{K}$ todos os sistemas que satisfazem as mesmas características ou propriedades e os reunimos em classes. Assim, cada classe fica determinada por suas características e por meio delas introduzimos uma rela-

ção de equivalência em $\mathcal{K}$. A relação de equivalência que vamos considerar nesta tese é a equivalência topológica.

Definição 1.6.5. *Seja M uma variedade m -dimensional. Dois sistemas $X_1(M)$ e $X_2(M)$ são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que envia as órbitas de $X_1(M)$ às órbitas de $X_2(M)$, preservando o sentido das órbitas.*

Para descrever as classes de equivalências em $\mathcal{K}$ podemos definir invariantes topológicos. Por exemplo, o número de trajetórias fechadas e o número de estados de equilíbrios são invariantes topológicos para os fluxos com um número finito de pontos de equilíbrios e de órbitas periódicas dos sistemas em $\mathcal{K}$.

Para uma classe particular de sistemas integráveis definidos em M , dizemos que um invariante topológico é *completo* quando dois sistemas integráveis em $\mathcal{K}$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, possuem os mesmos invariantes.

Existem outros tipos de equivalências topológicas, por exemplo a equivalência de Liouville, para o estudo dos sistemas integráveis Hamiltonianos, os quais são um exemplo de sistemas integráveis.

Exemplo 1.6.6. Uma variedade simplética (M, ω) é uma variedade M $2n$ -dimensional com uma 2-forma fechada e não degenerada ω definida em M , chamada também de *forma simplética* ou *estrutura simplética*.

Toda função suave H definida em uma variedade simplética (M, ω) define um campo vetorial, o qual algumas vezes é chamado de *skew-gradient* da função H , e denotado por $sgrad H$. $sgrad H$ é simplesmente o campo vetorial dual à diferencial da função H com respeito à forma simplética ω .

O fluxo, $f_H^t : M \rightarrow M$ definido pelo campo vetorial $sgrad H$ é chamado de **fluxo Hamiltoniano**. Um sistema dinâmico definido por um campo vetorial $sgrad H$ é chamado de **sistema Hamiltoniano com Hamiltoniana H** no espaço de fase M . Se a dimensão de M é $2n$ diremos que os sistema Hamiltoniano tem n graus de liberdade.

Uma função f no espaço de fase M será uma integral primeira do sistema Hamiltoniano com Hamiltoniana H se f é constante ao longo das trajetórias do sistema, isto é, ao longo das trajetórias do campo vetorial $v = sgrad H$.

Um sistema Hamiltoniano em uma variedade simplética (M, ω) (em outras palavras, um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade) é chamado integrável no sentido de Liouville (ou simplesmente integrável) se existe um conjunto de n integrais primeiras $f_1, \dots, f_n$ para este sistema, que são funcionalmente independentes em M (isto quer dizer que seus respectivos gradientes são linearmente independentes em M quase sempre), tais que os campos vetoriais $\text{sgrad } f_i$ são completos em M (o parâmetro natural sobre suas trajetórias integrais está definido para todos os números reais). Observemos que se M é compacta então esta última afirmação é válida.

Apesar da escolha das integrais primeiras não serem únicas, usualmente por um sistema Hamiltoniano entendemos todos os ingredientes $(M, \omega, H, f_1, \dots, f_n)$. Além disso, como regra, se omite a Hamiltoniana H e se fala do sistema Hamiltoniano $(M, \omega, f_1, \dots, f_n)$ assumindo que a Hamiltoniana H é qualquer uma das funções $f_1, \dots, f_n$.

1.7 Invariantes para a classificação topológica de fluxos em superfícies

Nesta seção abordamos o estudo de alguns invariantes topológicos para a classificação de fluxos e campos vetoriais definidos em superfícies. É importante ressaltar que a maioria dos resultados e definições abordadas nesta seção não são necessários para os resultados principais nesta tese, porém eles nos ajudam a contar um pouco da história dos diferentes invariantes topológicos que existem na literatura, uma vez que também um de nossos objetivos é apresentar um invariante topológico completo para o estudo de uma classe de fluxos contínuos em superfícies fechadas.

Em 1937, Leontovich e Maier consideraram fluxos polinomiais na esfera e obtiveram um invariante topológico completo para essa classe de fluxos com um número finito de pontos fixos. Em 1955, eles generalizaram os resultados obtidos inicialmente e introduziram um novo invariante topológico completo para fluxos definidos na esfera com um número finito de trajetórias singulares ([57]), chamado *the scheme* de um fluxo, o qual inclui uma descrição qualitativa dos pontos fixos e a posição relativa dos ciclos limites, separatrizes e separatrizes de contorno. Vejamos a seguir algumas das definições e o principal resultado

dos trabalhos pioneiros de Leontovich e Maïer.

Sejam f^t um fluxo polinomial em S^2 e $l(x)$ a trajetória desse fluxo passando por $x \in S^2$. Denote por $N_\epsilon(A)$ a ϵ -vizinhança de $A \subset S^2$. Uma trajetória $l(x_0)$ é chamada de orbitalmente instável se existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe um ponto $x \in O_\delta(x_0)$ tal maneira que a trajetória $l(x)$ deixa a ϵ_0 -vizinhança de $l(x_0)$.

Fluxos polinomiais com um número finito de pontos fixos tem as seguintes trajetórias orbitalmente instáveis: pontos fixos, separatrizes e ciclos limites. Essas trajetórias dividem as regiões preenchidas por trajetórias com o mesmo comportamento. Portanto, tais trajetórias tem papel fundamental na classificação topológica de tais fluxos na esfera.

Denote por $B(f^t)$ a coleção de trajetórias orbital instáveis do fluxo f^t .

Teorema 1.7.1. *Sejam f_1, f_2 campos vetoriais polinomiais com um número finito de pontos fixos na esfera. Então os fluxos f_1^t, f_2^t são topologicamente equivalentes se, e somente se, existe um homeomorfismo $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ tal que*

1. $\varphi(B(f_1^t)) = B(f_2^t)$;
2. Cada trajetória em $B(f_1^t)$ é enviada por φ numa trajetória em $B(f_2^t)$;
3. φ envia uma trajetória de cada componente de $S^2 \setminus B(f_1^t)$ numa trajetória de $S^2 \setminus B(f_2^t)$.

Então a família $B(f^t)$ junto com um conjunto de trajetórias, uma de cada componente de $S^2 \setminus B(f_1^t)$, é um invariante completo para os fluxos polinomiais em S^2 ([57]).

Um outro importante invariante topológico completo usado na classificação dos fluxos Morse-Smale definidos em superfícies fechadas e orientáveis é o grafo distinguido, conhecidos também como grafos de Peixoto. Eles foram introduzidos por Peixoto [61] em 1971. Para este tipo de fluxos, Peixoto associou um grafo e provou que este grafo junto com uma estrutura adicional é um invariante topológico completo para a classe dos fluxos Morse-Smale. Vamos lembrar algumas das definições básicas e principais resultados obtidos por Peixoto em [61].

Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável de genus $g \geq 0$ e seja $Est(\Sigma(g, 0))$ o conjunto de todos os fluxos que são estruturalmente estáveis em $\Sigma(g, 0)$. Os fluxos

$X \in Est(\Sigma(g, 0))$ são chamados de fluxos Morse-Smale e são caracterizados pelas seguintes propriedades:

1. Existe um número finito de singularidades e órbitas (ou trajetórias) fechadas e todas elas de tipo hiperbólico,
2. não existe conexão de pontos de sela,
3. os conjuntos α - e ω -limites de cada órbita são formados por uma singularidade ou uma órbita fechada.

Denote por $\Omega = \Omega(X)$ o conjunto formado pelas singularidades e órbitas fechadas de um fluxo X do tipo Morse-Smale X . Os elementos de Ω são fontes, poços ou pontos de sela. Uma fonte (respectivamente, um poço) é uma singularidade ou uma órbita fechada a qual é o α -limite (respectivamente, é o ω -limite) de todas as órbitas próximas a ela.

Um fluxo Morse-Smale $X \in Est(\Sigma(g, 0))$ define um grafo $G(X)$, cujos vértices são os elementos de Ω de X e as arestas são as separatrizes do fluxo X . Então o problema estudado por Peixoto em [61] é como o grafo $G(X)$ caracteriza as classes de fluxos $X \in Est(\Sigma(g, 0))$ que são topologicamente equivalentes. Para isto, ele se concentra no estudo dos fluxos Morse-Smale sem órbitas fechadas. Denote por $Est^0(\Sigma(g, 0))$, o conjunto dos fluxos Morse-Smale sem órbitas fechadas. O grafo $G(X)$ não é um invariante topológico completo para $X \in Est^0(\Sigma(g, 0))$, veja os exemplos da página 392 em [61]. Para que $G(X)$ seja um invariante topológico completo para $X \in Est^0(\Sigma(g, 0))$, Peixoto acrescentou a $G(X)$ um sistema de rotação R , o qual consiste numa ordem cíclica de arestas, dadas a cada vértice de $G(X)$. Peixoto mostrou que $G(X)$ com o sistema de rotação R , denotado por $G(X)^R$ é um invariante topológico completo para $X \in Est^0(\Sigma(g, 0))$. Exibiu também um teorema da realização para $G(X)^R$ e, portanto, a classificação dos fluxos Morse-Smale sem órbitas periódicas definidos em superfícies fechadas e orientáveis foi obtida da classificação dos grafos $G(X)^R$.

Em [52], Neumann e O'Brien introduziram um outro invariante topológico para fluxos, o complexo orbital, que segundo Aranson e co-autores em [1], é uma generalização do invariante definido por Leontovich e Maier. A seguir apresentamos a definição e propriedades do complexo orbital para fluxos contínuos definidos em superfícies orientáveis

(fluxos contínuos definidos em superfícies não orientáveis também é analisado em [52]). É importante ressaltar que apresentaremos este invariante em detalhes assim como um dos exemplos introduzidos por Neumann e O'Brien em [52], a fim de compará-lo com o invariante que introduzimos nesta tese.

Dado um fluxo contínuo f^t sobre uma superfície orientável Σ arbitrária (espaço métrico, não necessariamente compacto e possivelmente sem bordo) considere a relação de equivalência $\sim$ sobre Σ dada por $x \sim y$ se, e somente se, existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $f^t(x) = y$.

As classes de equivalências dessa relação $\sim$ são as trajetórias do fluxo f^t . Sendo $\sim$ uma relação de equivalência temos que duas trajetórias coincidem ou são disjuntas. Considere o espaço quociente $\Sigma/\sim$ por Σ/f^t , chamado de *espaço orbital* de f^t . A função quociente, a qual leva x a sua classe correspondente, é denotada por $\gamma_{f^t} : \Sigma \longrightarrow \Sigma/f^t$. Como é usual, em Σ/f^t considera-se a topologia mais fina como respeito a qual γ_{f^t} é contínua (isto é, um subconjunto U de Σ/f^t é aberto se, e somente se, $\gamma_{f^t}^{-1}(U)$ é aberto em Σ).

Vamos supor que f^t possui um número finito de separatrizes e denote por $\tilde{\Sigma}$ a subvariedade de Σ , dada por $\tilde{\Sigma} = \Sigma \setminus R$, onde R é o conjunto formado por todas as separatrizes do fluxo. Alguns exemplos mostram que Σ/f^t não é invariante topológico completo. Portanto, se faz necessário adicionar alguns elementos na estrutura a Σ/f^t , esse novo complexo orbital é denotado por $K(f^t)$. $K(f^t)$ é uma estrutura formada pela estrutura celular, tipo de fibra, estrutura de ordem e orientabilidade de espirais como descreveremos a seguir.

Separatrizes e Regiões Canônicas: Um par (Σ, f^t) , formado pela superfície Σ e um fluxo f^t , é chamado de *paralelo* se é equivalente a um dos seguintes pares

1. $\mathbb{R}^2$ com o fluxo definido por $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0$;
2. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ com fluxo definido (em coordenadas polares) por $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$;
3. $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ com fluxo definido por $\dot{r} = r, \dot{\theta} = 0$;
4. $S^1 \times S^1$ com fluxo racional (por exemplo, o fluxo induzido por 1. é induzido pela função recobrimento), em particular todos os fluxos racionais sobre o toro são equivalentes.

Tais pares são conhecidos como *faixa*, *anel*, *espiral* e *toroidal*, respectivamente.

Uma curva $\gamma(x)$ que não está contida em uma vizinhança paralela N satisfazendo

1. para algum $y \in N$, $\alpha(y) = \alpha(x)$ e $\omega(y) = \omega(x)$ e,
2. $cl(N) - N$ consiste de $\alpha(x)$, $\omega(x)$ e exatamente duas trajetórias $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ de f^t , com $\alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(x)$ e $\omega(a) = \omega(b) = \omega(x)$ (cl denota fecho).

é dita separatriz. Por Ω denotamos a união de todas as separatrizes de f^t . Uma componente do complementar de Ω , com o fluxo correspondente, é chamada de *região canônica* de f^t . Uma separatriz $\gamma(x)$ é uma *separatriz limite* se x não é um ponto crítico e $\gamma(x) \subseteq cl(\Omega - \gamma(x))$.

Neumann e O'Brien, em [53], mostram que toda região canônica de (Σ, f^t) é paralela. Segue desse fato que toda região canônica admite uma seção transversal a qual é um segmento aberto no caso da região faixa ou anular e uma curva fechada simples, caso contrário.

Vejamos agora como descrever a estrutura adicionada ao espaço quociente Σ/f^t para definir o complexo orbital $K(f^t)$.

Estrutura celular: Seja $\pi : \Sigma \longrightarrow \Sigma/f^t$ a projeção natural. A imagem de cada região canônica $\mathcal{R}$ de f^t é conhecida como uma 1-célula do complexo orbital $K(f^t)$. Uma 1-célula será um arco aberto no caso quando $\mathcal{R}$ é uma faixa ou anel e uma curva fechada simples, quando $\mathcal{R}$ é radial ou toroidal. É usual distingui-las como 1-células aberta e fechada, respectivamente. A imagem de cada separatriz de f^t é conhecida como uma 0-célula.

Tipo de fibra: Cada i -célula de $K(f^t)$, $i = 0, 1$, foi distinguida por Neumann e O'Brien como uma *linha*, *círculo* ou *ponto* i -célula de acordo ao tipo topológico do fibra sobre o ponto dessa célula.

Estrutura de ordem: Começamos pelas 0-células de $K(f^t)$ correspondentes a separatrizes de pontos não críticos da fronteira de uma região canônica de f^t . Para tais células impomos a ordenação a qual corresponde à ordenação natural das separatrizes induzidas pelo fluxo. Em seguida estendemos essa ordenação para os demais pontos 0-células como segue: suponhamos que $\bar{p} = \pi(p)$ é um ponto 0-célula e $\bar{q} = \pi(q)$ é uma linha 0-célula; então

$$\begin{aligned} \bar{p} < \bar{q} & \quad \text{se, e somente se, } p \in \alpha(q), \\ \bar{p} > \bar{q} & \quad \text{se, e somente se, } p \in \omega(q); \end{aligned}$$

nos demais casos $\bar{p}$ e $\bar{q}$ não estão relacionados. Finalmente, seja $\bar{C} = \pi(\mathcal{R})$ uma 1-célula

fechada de $K(f^t)$ o qual é a imagem de uma região espiral $\mathcal{R}$ e seja C uma curva fechada simples, seção de $\mathcal{R}$, e $c \in C$; para cada $p \in \partial\mathcal{R}$ diremos que

$$\begin{aligned} \bar{p} < \bar{C} & \quad \text{se, e somente se, } p \in \alpha(c), \\ \bar{p} > \bar{C} & \quad \text{se, e somente se, } p \in \omega(c). \end{aligned}$$

Orientabilidade de espirais: Uma 1-célula fechada de $K(f^t)$ correspondente a uma região canônica espiral $\mathcal{R}$ é dita *orientável* (respectivamente *não orientável*) se $\mathcal{R}$ é orientável (respectivamente *não orientável*).

Dois complexos orbitais $K(f_1^t)$ e $K(f_2^t)$ são *isomorfos* se existe um homeomorfismo $\kappa : K(f_1^t) \rightarrow K(f_2^t)$ o qual leva células de $K(f_1^t)$ em células de $K(f_2^t)$, preservando o tipo e a orientabilidade (ou não orientabilidade) de células e ainda, preserva a estrutura de ordem.

Desta maneira, Neumann e O'Brien [52] classificaram os fluxos contínuos definidos em uma superfície orientável com um número finito de pontos de equilíbrio e sem conexão de selas, assim como os fluxos definidos em superfícies orientáveis, com um número finito de separatrizes, como enunciado nos seguintes resultados.

Teorema 1.7.2 ([52]). *Sejam f_1^t, f_2^t fluxos contínuos sobre as superfícies orientáveis Σ_1, Σ_2 respectivamente, com todos os pontos de equilíbrio isolados e sem separatrizes limites. Então f_1^t e f_2^t são topologicamente equivalentes se, e somente se, seus complexos orbitais $K(f_1^t)$ e $K(f_2^t)$ são isomorfos.*

Teorema 1.7.3 ([52]). *Sejam f_1^t, f_2^t fluxos contínuos sobre as superfícies compactas e orientáveis Σ_1 e Σ_2 respectivamente, com um número finito de separatrizes limites. Então f_1^t e f_2^t são topologicamente equivalentes se, e somente se, seus complexos orbitais $K(f_1^t)$ e $K(f_2^t)$ são isomorfos.*

Estes dois últimos resultados generalizam a classificação dos fluxos que são estruturalmente estáveis de Peixoto [61].

Em [56], o trabalho de Neumann e O'Brien é traduzido na linguagem de folheações em superfícies e desta maneira seguem os resultados abaixo.

Teorema 1.7.4 ([52]). *Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas folheações regulares numa superfície orientável $\Sigma(g, 0)$ com pontos fixos isolados e sem folhas singulares limites. Então $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são*

topologicamente equivalentes se, e somente se, $K(\mathcal{F}_1)$ e $K(\mathcal{F}_2)$ são isomorfos.

Teorema 1.7.5 ([52]). *Suponha que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são duas folheações regulares numa superfície orientável $\Sigma(g, 0)$ com um número finito de folhas singulares de dimensão um. Então $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, $K(\mathcal{F}_1)$ e $K(\mathcal{F}_2)$ são isomorfos.*

A seguir, apresentamos um exemplo com o objetivo de esclarecer a definição de complexo orbital $K(f^t)$.

Exemplo 1.7.6. Sejam S o plano e f_1^t, f_2^t dois fluxos cujos retratos de fases estão ilustrados nas Figuras 1.18 e 1.19, respectivamente. As separatrizes correspondentes a cada fluxo estão desenhadas nos fluxos por linhas vermelhas. Assim, as regiões canônicas B, C e D possuem duas separatrizes, e as outras duas, uma única separatriz. Para obter os complexos orbitais associados a f_1^t e f_2^t em S , construímos os espaços das órbitas para cada um desses fluxos e a esse espaço adicionamos uma estrutura extra como descrito acima. Para isso, considere $\pi_1 : S \rightarrow S/f_1^t, \pi_2 : S \rightarrow S/f_2^t$ as projeções naturais. A imagem de cada região canônica de f_1^t e f_2^t respectivamente, é uma 1-célula dos complexos orbitais $K(f_1^t)$ e $K(f_2^t)$, que nesse exemplo serão arcos abertos, uma vez que cada região canônica é topologicamente equivalente ao par em $\mathbb{R}^2$ definido por $\dot{x} = 1, \dot{y} = 0$; ou ao par $\mathbb{R}^2$ definido (em coordenadas polares) por $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$. A imagem de cada separatriz de f_1^t e f_2^t respectivamente, é uma 0-célula dos complexos orbitais. Por outro lado, se r é uma i -célula, $i = 0, 1$, então o tipo topológico da imagem $\pi_j^{-1}(x)$, $j = 1, 2$, de um ponto $x \in r$, é uma linha. Finalmente, a estrutura de ordem corresponde à ordenação natural das separatrizes induzidas pelo fluxo. Portanto, os complexos orbitais associados a f_1^t e f_2^t são como os mostrados na parte de abaixo das Figuras 1.18 e 1.19. Observe que a ordenação das 0-células correspondentes às separatrizes na fronteira de cada região canônica, indicada pelos subíndices é o que distingue os dois fluxos.

Observemos que segue da definição do complexo orbital $K(f^t)$ que este é um grafo desconexo. Além disso, veremos no exemplo a seguir que $K(f^t)$ não é um invariante topológico completo para os sistemas Morse-Bott definidos em superfícies fechadas e orientáveis, uma vez que os sistemas apresentados a seguir não são topologicamente equivalentes, mas possuem o mesmo complexo orbital segundo as definições introduzidas em [52].

Figura 1.18: Complexo orbital correspondente ao fluxo f_1^t .

Figura 1.19: Complexo orbital correspondente ao fluxo f_2^t .

Figura 1.20: $\mathcal{F}_1$ e o correspondente complexo orbital.

Exemplo 1.7.7. Considere a decomposição do toro por folhas das folheações de codimensão um, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, em pontos, linhas orientadas e círculos orientados como nas Figuras 1.20 e 1.21), respectivamente. Ambos fluxos possuem quatro pontos singulares, dois pontos de centros e dois pontos de sela. Seus respectivos complexos orbitais estão representados abaixo de cada figura. As folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são exemplos de folheações Morse-Bott e não são topologicamente equivalentes (ver mais detalhes no Exemplo 2.3.4). Portanto, os correspondentes fluxos não são topologicamente equivalentes embora seus complexos orbitais sejam isomorfos.

Observemos que, para construir os complexos orbitais devemos fixar o tipo das fibras e ordenar as separatrizes. O tipo de fibras é o mesmo em cada um dos fluxos, as regiões canônicas são todas anulares, e a ordem das separatrizes dos pontos de sela em cada componente conexa do bordo de uma região canônica, se obtém projetando a ordem das órbitas próximas ao bordo. Como essas órbitas do bordo são circulares então é necessário fixar arbitrariamente uma das separatrizes como a inicial. No caso em que há uma única separatriz na fronteira da região canônica não existe ordenação. Mas, se existem duas separatrizes a ordem será arbitrária, pois fixando uma ou outra separatriz como a inicial obteremos a ordem que queiramos. Logo, a ordem das separatrizes não é fundamental para distinguir os fluxos.

Figura 1.21: $\mathcal{F}_2$ e o correspondente complexo orbital.

O grafo de Lyapunov é outro invariante topológico e foi utilizado por Rezende e Franzosa em [22], para o estudo dos fluxos suaves em superfícies. Estes grafos contém informações sobre o índice (através de vértices etiquetados) assim como informação homológica da superfície. Em [22], os autores apresentam condições necessárias e suficientes para que um grafo abstrato de Lyapunov seja realizável como o grafo de um fluxo Morse-Smale de uma função de Lyapunov numa superfície fechada. No entanto, os grafos de Lyapunov não são um invariante completo para fluxos Morse-Smale. De fato, em [22], p. 777, Rezende e Franzosa apresentam dois fluxos Morse-Smale não topologicamente equivalentes cujos grafos de Lyapunov são isomorfos.

Para os fluxos Morse-Smale com ciclos limites, o invariante proposto por Peixoto, isto é, os grafos distinguidos, é um invariante não completo. Em 1991, Oshemkov e Sharko em [58] apresentaram a classificação completa dos fluxos Morse-Smale em superfícies fechadas (orientáveis e não orientáveis) e compararam com outros invariantes propostos por G. Fleitas e X. Xang (para mais detalhes ver [58]). Os resultados obtidos por Oshemkov e Sharko em [58] são adaptados por Da Silva em [20] à abordagem feita por Wang em [78]. Assim o teorema da classificação feita por Peixoto se resume ao seguinte resultado.

Teorema 1.7.8 ([20]). *Dois fluxos Morse-Smale X e X' , definidos em superfícies fechadas Π e Π' respectivamente são topologicamente equivalentes se, e somente se, as respectivas*

C^* -álgebras associadas a X e X' são isomorfas.

Uma classe particular de fluxos Morse-Smale são os fluxos de Morse, isto é, os fluxos Morse-Smale sem ciclos limites. A classificação destes fluxos também foi apresentada em [9], usando a ideia de átomos e moléculas tal e como veremos a seguir.

Um sistema Hamiltoniano $(M, \omega, f_1, \dots, f_n)$ define uma aplicação $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada ponto $x \in M$, F faz corresponder o ponto $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$. Esta aplicação é chamada de **aplicação momentum**.

O principal objeto de investigação na teoria dos sistemas Hamiltonianos se descreve na seguinte.

Definição 1.7.9. *A decomposição do espaço de fase M de um sistema Hamiltoniano nas componentes conexas de $F^{-1}(y)$ (isto é, as componentes conexas de conjuntos de níveis comuns entre as integrais primeiras $f_1, \dots, f_n$) é chamada de folheação de Liouville correspondente a este sistema.*

As folhas de uma folheação de Liouville que não contém pontos críticos da aplicação momentum são chamadas de **folhas regulares**. Caso contrário, são chamadas de **folhas singulares**.

Para obter a classificação completa dos sistemas Hamiltonianos se faz necessário o estudo da topologia dos conjuntos da folheação de Liouville associados a esses sistemas. Neste sentido se pode dizer que o teorema de Liouville descreve completamente a folheação de Liouville na vizinhança de um toro de Liouville, mas diz quase nada sobre a estrutura topológica próxima das folhas singulares. Portanto, o problema principal na teoria dos sistemas Hamiltonianos é a classificação das folheações de Liouville. Com o objetivo de classificar os sistemas Hamiltonianos, inicialmente se define uma relação de equivalência entre tais sistemas. Logo, se distinguem classes de singularidades não-degeneradas por meio de uma lista de singularidades para dada “complexidade”. Outros detalhes sobre este assunto consultar [9].

Do ponto de vista topológico, a relação de equivalência para folheações de Liouville é a mais importante para a classificação dos sistemas Hamiltonianos e, está relacionada com a classificação dos sistemas Morse-Bott.

Definição 1.7.10. *Dois sistemas Hamiltonianos em U_1, U_2 respectivamente, são chamados de Liouville equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U_1 \rightarrow U_2$ o qual leva as folhas da folheação de Liouville em U_1 nas folhas da folheação de Liouville em U_2 .*

Um sistema Hamiltoniano com um grau de liberdade é simplesmente uma superfície simplética (S, ω) (espaço de fase) com uma função suave $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (S, ω) . Vamos assumir que S é compacta. Então, (S, ω, H) é integrável por definição. Neste caso, a não-degeneração das singularidades do sistema implica que H é uma função de Morse e a folheação de Liouville em S é dada pela folheação definida pelas componentes conexas dos conjuntos de nível da Hamiltoniana H . Portanto, a classificação das fibras singulares da folheação é dada pelo Lema de Morse, em outras palavras, existem unicamente duas classes de equivalências e, para o caso em que H é simples temos a classe das singularidades elípticas (pontos de centros) e das singularidades hiperbólicas (pontos de sela). Portanto, ao invés de falar da classificação das folheações de Liouville podemos falar da classificação por equivalência topológica das funções de Morse em superfícies compactas, como segue.

O primeiro ingrediente para a classificação das funções de Morse em uma superfície compacta S é o grafo de Reeb. Assim o grafo de Reeb é a base da folheação de Liouville em S , em outras palavras, o grafo de Reeb é o espaço quociente da superfície onde dois pontos são equivalentes se, e somente se, eles pertencem à mesma folha. Assim o grafo obtido é finito, mas não é um invariante completo para a classificação das folheações de Liouville em S (e portanto, dos sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade) uma vez que as folhas singulares (mais precisamente os átomos) podem ser de diferentes tipos e, portanto, a informação sobre a estrutura topológica numa vizinhança das fibras singulares deve ser adicionado ao grafo de Reeb. Dessa maneira, podemos associar a cada vértice do grafo de Reeb um átomo e estabelecer uma correspondência entre os círculos do bordo dos átomos e as arestas do grafo de Reeb que são incidentes aos vértices. Dessa maneira temos um novo grafo com etiquetas nos vértices que é chamado de molécula correspondente à folheação de Liouville.

Definição 1.7.11 ([9]). *Duas moléculas W e W' são idênticas, se duas condições são satisfeitas: primeiramente existe um isomorfismo entre as moléculas como grafos etiquetados. Este isomorfismo induz uma permutação dos círculos no bordo do modelo padrão*

(para cada par de vértices correspondentes). A segunda condição é que a permutação da condição anterior deve ser gerada por uma simetria do modelo padrão em si mesmo.

Uma explicação sobre o que se entende sobre simetria de uma átomo pode ser encontrada em [10] pg. 32. Por meio do conceito de molécula se obtém a lista de todas as classes de equivalência de folheações de Liouville na esfera e no toro ([9], Teorema 2.17). A diferença que existe entre essa classificação e a classificação dos sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade é que toda trajetória ou curva solução do sistema existe uma orientação natural, chamada de orientação do fluxo. Então para obter a classificação destes sistemas é necessário considerarmos a direção na qual a Hamiltoniana cresce e esta informação é adicionada nas arestas das moléculas. Chamaremos essas moléculas de moléculas dirigidas. Dessa maneira podemos encontrar a direção (única) do fluxo em cada trajetória. Assim temos o seguinte corolário que nos diz que uma molécula dirigida é um invariante topológico completo para sistemas Hamiltonianos com um grau de liberdade.

Corolário 1.7.12 ([9]). *Sejam f e f' duas funções de Morse em superfícies fechadas e orientáveis S e S' . Então dois campos vetoriais Hamiltonianos $\text{sgrad } f$ e $\text{sgrad } f'$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, suas correspondentes moléculas dirigidas W e W' são idênticas.*

Capítulo 2

Classificação das folheações Morse-Bott em superfícies orientáveis

Neste capítulo apresentamos a classificação topológica global das folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e orientáveis através da construção de um invariante topológico. A estratégia para a construção do invariante consiste na construção do espaço de folhas da folheação e na investigação de suas propriedades e comportamento numa dada vizinhança. Em nosso caso, este invariante é um grafo que carrega informações sobre o tipo topológico das folhas singulares da folheação e, determina completamente a superfície na qual uma determinada folheação $\mathcal{MB}$ está definida.

Com estas noções básicas, nas Seções 2.1 e 2.2 tratamos da classificação topológica das folhas singulares das folheações $\mathcal{MB}$ que, para sistemas $\mathcal{MB}$, são curvas fechadas e pontos de sela com suas separatrizes (ou oitos). Finalmente, com a mencionada classificação, na Seção 2.3 introduzimos um invariante topológico para folheações $\mathcal{MB}$ (ver Definição 2.3.3 e Proposição 2.3.5) e provamos que este invariante é completo (ver Teorema 2.3.7).

2.1 Classificação das curvas fechadas em superfícies orientáveis

A classificação de curvas em superfícies (orientáveis ou não orientáveis) aparece em outros contextos, por exemplo, a classificação das imersões de S^1 em superfícies (orientáveis ou não orientáveis) está relacionada com as palavras de Gauss [49]; em [17] a classificação

das curvas em superfícies é chamada de **geotopia** e em [24], p. 39, a classificação de curvas em superfícies orientáveis é apresentada (embora não seja feita uma demonstração explícita desse resultado) com o objetivo de apresentar a técnica chamada de princípio de mudança de coordenadas, utilizada na teoria de grupo de classes de aplicações.

O objetivo desta seção é apresentar uma classificação dos mergulhos de S^1 em superfícies orientáveis. A classificação aqui apresentada é uma generalização daquela descrita por Rolfsen em [65] para o caso da S^2 (Corolário 1.5.10) e do toro (Teorema 1.5.11).

Vale observar que adotamos a noção de equivalência topológica apresentada no capítulo anterior, que coincide com o conceito de equivalência de nós usado na classificação de nós em S^3 . Mas essa classificação difere da classificação das curvas por homotopia ou homologia.

Antes de enunciar o principal resultado desta seção, introduzimos algumas definições.

Definição 2.1.1. *Um **círculo mergulhado** em $\Sigma(g, 0)$ é a imagem de um mergulho $\phi : S^1 \rightarrow \Sigma(g, 0)$. Um **círculo mergulhado orientado**, ou simplesmente, um **círculo orientado**, é um círculo mergulhado com uma das duas possíveis orientações. Uma **órbita periódica de um fluxo** em $\Sigma(g, 0)$ é um círculo mergulhado com a orientação induzida pelo fluxo.*

A um círculo mergulhado em $\Sigma(g, 0)$ está associado um tipo de nó em $\Sigma(g, 0)$.

Definição 2.1.2. *Dois círculos mergulhados são equivalentes se existe um homeomorfismo de $\Sigma(g, 0)$ em $\Sigma(g, 0)$ que leva um círculo ao outro. Dois círculos orientados são equivalentes se o homeomorfismo que conjuga os círculos mergulhados preserva suas orientações.*

Dado um mergulho $\phi : S^1 \rightarrow \Sigma(g, 0)$, a orientação em S^1 leva o homeomorfismo ϕ induzir uma orientação sobre sua imagem, $\phi(S^1)$. O mergulho $-\phi : S^1 \rightarrow \Sigma(g, 0)$, induz a orientação oposta de ϕ .

Seja J um círculo mergulhado em $\Sigma(g, 0)$. Note que J pode ser visto como um 2-simplexo, isto é, um grafo isomorfo a um triângulo cujos vértices são os 0-simplexos e as arestas são os 1-simplexos (ver [29]).

Considere a inclusão $i : J \rightarrow \Sigma(g, 0)$. Esta aplicação induz o isomorfismo em

homologia $i_* : H_1(J, 2) \rightarrow H_1(\Sigma(g, 0), 2)$. Dessa maneira um círculo mergulhado J pode ser considerado como um gerador do primeiro grupo de homologia módulo 2 em $\Sigma(g, 0)$.

Por outro lado, J é como grafo um subcomplexo de $\Sigma(g, 0)$. Portanto, o complementar $\Sigma(g, 0) \setminus J$ é formado por um número finito de regiões, digamos r . Neste contexto, o próximo lema nos fornece uma relação usada para cálculo de r .

Lema 2.1.3. *Seja J um círculo mergulhado em $\Sigma(g, 0)$ e d a dimensão do subgrupo $i_*(H_1(G, 2))$ do primeiro grupo de homologia de $\Sigma(g, 0) \bmod 2$, onde i_* é a aplicação induzida pela inclusão em homologia. Então J divide $\Sigma(g, 0)$ em $2 - d$ componentes conexas.*

Demonstração. Considere J como um 2-simplexo. Em [29], Giblin mostra que a seguinte relação se verifica

$$\alpha_0(J) - \alpha_1(J) + r = k + 1 - d, \quad (2.1)$$

onde d é a dimensão da imagem de $i_* : H_1(J, 2) \rightarrow H_1(\Sigma(g, 0), 2)$, r é o número de regiões conexas de $\Sigma(g, 0) \setminus J$, k é o número de componentes conexas de J e $\alpha_p = |p\text{-simplexos}|$ de J . Sob as hipóteses fixadas temos $\alpha_0(J) - \alpha_1(J) = 0$ e, portanto, $r = 2 - d$. $\square$

Segue do lema anterior que, se J é homologicamente nulo então $d = 0$ e desta forma $r = 2$, enquanto que, se J é não homologicamente nulo então $d = 1$ e $r = 1$. Portanto, se J é um círculo mergulhado em $\Sigma(g, 0)$, seu complementar $\Sigma(g, 0) \setminus J$ pode ter uma ou duas componentes conexas, dependendo do tipo de homologia de J em $\Sigma(g, 0)$.

Sejam $E(a) = \lceil a \rceil$, a função piso, que associa a cada $a \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a a e $C(a) = \lfloor a \rfloor$, a função teto, que associa a cada $a \in \mathbb{R}$ o menor inteiro maior ou igual a a . O próximo teorema é o resultado principal desta seção e apresenta uma classificação dos mergulhos de S^1 em $\Sigma(g, 0)$.

Teorema 2.1.4. *Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável. O número de mergulhos não equivalentes de S^1 em $\Sigma(g, 0)$ é 1 se $g = 0$ e $E(\frac{g}{2}) + 2$, com representantes $l_0, l_1, \dots, l_{E(\frac{g}{2})}, l_K$, se $g > 0$ (ver Figura 2.1).*

Demonstração. Sejam ϕ_i , $i = 1, 2$ mergulhos de S^1 em $\Sigma(g, 0)$ e sejam $\phi_i(S^1) = J_i$. $i = 1, 2$ suas imagens. Se existe um homeomorfismo h de $\Sigma(g, 0)$ em $\Sigma(g, 0)$ tal que

Figura 2.1: Mergulhos não topologicamente equivalentes em $\Sigma(4, 0)$.

$h(J_1) = J_2$ então a restrição de h ao complementar $\Sigma(g, 0) \setminus J_1$ define um homeomorfismo de $\Sigma(g, 0) \setminus J_1$ em $\Sigma(g, 0) \setminus J_2$.

Com o objetivo de contar o número de mergulhos não equivalentes em $\Sigma(g, 0)$ vamos dividir o conjunto de todos os mergulhos em $\Sigma(g, 0)$ em classes de equivalência de modo que dois mergulhos J_1 e J_2 pertencerão a mesma classe se, e somente se, os conjuntos $\Sigma(g, 0) \setminus J_1$ e $\Sigma(g, 0) \setminus J_2$ são homeomorfos. Em um segundo passo mostraremos que essas classes são unitárias.

Passo 1. (1a) Se $\Sigma(g, 0) \setminus J$ é conexo (isto é $r = 1$) então J é uma curva não homologicamente nula em $\Sigma(g, 0)$. Como podemos reconstruir $\Sigma(g, 0)$ colando uma alça na compactificação $\mathcal{P}(K)$ de K , segue-se que $\mathcal{P}(K)$ será uma superfície de genus $g - 1$ e K é homeomorfa a $\Sigma(g - 1, 2)$. Esta construção não é possível para a esfera.

(1b). Se $\Sigma(g, 0) \setminus J$ tem duas componentes conexas K_i , $i = 1, 2$ (caso em que $r = 2$) então J é uma curva em $\Sigma(g, 0)$ homológica a zero. Portanto, $\Sigma(g, 0)$ é a soma conexa $\mathcal{P}(K_1) \# \mathcal{P}(K_2)$ das compactificações de K_1 e K_2 respectivamante, e

$$H_1(\Sigma(g, 0)) = H_1(\mathcal{P}(K_1)) \oplus H_1(\mathcal{P}(K_2)). \quad (2.2)$$

Sendo a dimensão de $H_1(\Sigma(g, 0))$ igual a $2g$ devemos encontrar pares de inteiros positivos (i, j) , tal que $i = H_1(\mathcal{P}(K_1))$, $j = H_1(\mathcal{P}(K_2))$, e cuja soma seja $2g$. Assim, encontramos $(g + 1)$ maneiras de combinar pares de inteiros positivos de modo que a soma dos mesmos resulte em $2g$, como segue:

$$(0, 2g), (1, 2g - 1), (2, 2g - 2), \dots, (g, g).$$

Dentre estes pares de inteiros positivos, analisemos o que acontece com aqueles pares da forma $H_1(\mathcal{P}(K_i)) = (2g - k)\mathbb{Z}$, com k inteiro positivo ímpar, $i = 1, 2$. Por

definição, o primeiro grupo de homologia da superfície $\mathcal{P}(K_i)$, $i = 1, 2$, vem dado por $H_1(\mathcal{P}(K_i)) = (2g_i)\mathbb{Z}$; logo igualando essas duas expressões para $H_1(\mathcal{P}(K_i))$ obtemos que o genus g_i da superfície K_i , $i = 1, 2$, não é um número inteiro, o que é absurdo. Portanto, eliminaremos aqueles pares que possuem inteiros ímpares obtendo $(E(\frac{g}{2}) + 1)$ -maneiras de realizar a soma conexa do par $(\mathbf{H}_1(\mathcal{P}(K_1)), \mathbf{H}_1(\mathcal{P}(K_2)))$ de modo que a mesma resulte em $H_1(\Sigma(g, 0))$.

Passo 2. Sejam $J_1 = \phi_1(S^1)$ e $J_2 = \phi_2(S^1)$ dois mergulhos de S^1 em $\Sigma(g, 0)$ que pertencem à mesma classe, isto é, os complementares $\Sigma(g, 0) \setminus J_1$ e $\Sigma(g, 0) \setminus J_2$ são homeomorfos. Considere a aplicação $h : J_1 \rightarrow J_2$ dada por $h = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$, devemos provar que existe uma extensão de h à superfície $\Sigma(g, 0)$.

Suponha que $\Sigma(g, 0) \setminus J_i$ tem duas componentes conexas cada K_j^i , $j = 1, 2$, com somente uma curva fechada no bordo onde h está definida. Desde que a concordância da orientação na curva do bordo é trivialmente satisfeita, aplicamos o Teorema 1.5.2 a cada K_j^i para obter extensões de h a K_j^i , digamos $f_j^i : K_j^i \rightarrow K_j^i$, $i, j = 1, 2$. Como f_1^i coincide com f_2^i em J_1 , segue do Lema da Colagem, que existe uma extensão de h a $\Sigma(g, 0)$, mostrando que os dois mergulhos são equivalentes.

O caso em que $\Sigma(g, 0) \setminus J_i$ tem apenas uma componente conexa é análogo. Neste caso K^i , $i = 1, 2$, tem duas componentes no bordo ($J_{1,i} = \text{id}(J_i)$, $J_{2,i} = \text{id}(J_i)$). O homeomorfismo relacionando $J_{1,1}$ com as curvas $J_{2,k}$ $k = 1, 2$ e o homeomorfismo relacionando $J_{1,2}$ com as curvas $J_{2,3-k}$, $k = 1, 2$ são composições de h com as identidades de J_i . A hipótese sobre a concordância da orientação, Teorema 1.5.2, é novamente verificada, desde que a orientação de $(J_{i,1}, J_{i,2})$ é igualmente preservada ou revertida para as duas componentes. Portanto, temos uma extensão de h a K^i que se define em $\Sigma(g, 0)$ identificando as curvas $J_{1,i}$ com $J_{2,i}$. $\square$

O subíndice i dos mergulhos l_i , com $i = 0, 1, \dots, E(\frac{g}{2})$, no enunciado do teorema anterior, nos indica o menor gênero dentre as duas superfícies em que l_i divide a $\Sigma(g, 0)$

Corolário 2.1.5. *Dois círculos orientados são equivalentes se, e somente se, eles são equivalentes como círculos mergulhados.*

Demonstração. Sejam $J_1 = \phi_1(S^1)$ e $J_2 = \phi_2(S^1)$ dois círculos mergulhados equivalentes em $\Sigma(g, 0)$. Provaremos que J_1 e J_2 são equivalentes como círculos orientados.

Vamos assumir que a orientação de cada círculo é a orientação induzida pelos mergulhos ϕ_1 e $-\phi_2$ e que $\phi_2 = -\phi_1 \circ h$. Com a notação usada no Teorema 2.1.4, se h leva a orientação de J_1 na orientação de J_2 , então J_1, J_2 são equivalentes. Se h reverte a orientação, consideremos que J_1 é a imagem de $-\phi_1$, então o homeomorfismo $h^* = -\phi_1^{-1} \circ \phi_2$ é o homeomorfismo que pode ser estendido a toda a superfície pelo Teorema 2.1.4 e que conjuga os círculos mergulhados.

A recíproca segue imediatamente da definição de equivalência de círculos orientados. $\square$

2.2 Classificação dos oitos em superfícies fechadas e orientáveis.

Nesta seção apresentamos a classificação das curvas imersas em superfícies fechadas e orientáveis, com um único ponto de autointerseção. Fazendo uma analogia com os conjuntos de nível de uma função $\mathcal{MB}$, estas curvas são os conjuntos de níveis homeomorfos a “oitos”.

É importante notar que para obter a classificação de oitos em superfícies fechadas e orientáveis não é suficiente conhecer a classificação topológica das componentes dos oitos, é preciso conhecer também as componentes conexas do conjunto complementar da superfície com respeito ao oito. De fato, veremos que dois oitos são topologicamente equivalentes se seus respectivos complementares com respeito à superfície tiverem o mesmo número de componentes conexas e todas homeomorfas entre si.

Definição 2.2.1. *Um oito de separatrix $\mathfrak{B}$, ou simplesmente um oito, é a imagem de uma imersão de S^1 em $\Sigma(g, 0)$, $\psi : S^1 \rightarrow \Sigma(g, 0)$ homeomorfo a duas circunferências coladas por um ponto p . Uma componente s_i , será qualquer uma das duas circunferências.*

Então entendemos que, $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$.

Em [40], um oito é o algorisma oito ou figura oito.

Definição 2.2.2. *Dois oitos $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$, tal que $h(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}'$.*

Lema 2.2.3. *Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ dois oitos em uma superfície fechada e orientável $\Sigma(g, 0)$, $g \geq 0$, e $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$. Então h leva as componentes s_i de $\mathfrak{B}$ nas componentes s'_i de $\mathfrak{B}'$.*

Demonstração. Suponha que $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$, $\mathfrak{B}' = s'_1 \cup_q s'_2$ com $h(p) \neq q$. Então os conjuntos $\mathfrak{B} - \{p\}$ e $\mathfrak{B}' - \{h(p)\}$ serão homeomorfos. Mas, o primeiro conjunto é desconexo e o segundo é conexo. Portanto, $h(p) = q$ e segue o resultado. $\square$

O número r de componentes conexas do complementar $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{B}$ é dado pelo seguinte lema.

Lema 2.2.4. *Seja d a dimensão do subgrupo do primeiro grupo de homologia de $\Sigma(g, 0)$ gerado pelas componentes s_1 e s_2 de $\mathfrak{B}$. Então, $\mathfrak{B}$ divide $\Sigma(g, 0)$ em $3 - d$ regiões conexas.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{B}$ um oito. Do ponto de vista topológico, $\mathfrak{B}$ é equivalente a um grafo cujos vértices são os vértices de dois triângulos colados por um vértice comum e as arestas são as arestas dos dois triângulos. Então o número de regiões em que $\mathfrak{B}$ divide $\Sigma(g, 0)$ é dada pela incógnita r em (2.1), Lema 2.1.3. Como $\alpha_0(\mathfrak{B}) = 5$, $\alpha_1(\mathfrak{B}) = 6$ e $\mathfrak{B}$ é conexo temos $k = 1$ e $r = 3 - d$. $\square$

Como no Lema 2.1.3, podemos calcular o valor de d no Lema 2.2.4. De fato, cada componente s_i de $\mathfrak{B}$ é um gerador do grupo de homologia $H_1(\mathfrak{B}, 2)$ de $\mathfrak{B}$. A imagem de i_* , $i_*(s_i)$ é o próprio s_i visto como um gerador do primeiro grupo de homologia $H_1(\Sigma(g, 0), 2)$ de $\Sigma(g, 0)$. Logo, sendo d o rank de $(i_*(s_1), i_*(s_2))$ temos as seguintes possibilidades: $d = 0$, se as componentes s_i , $i = 1, 2$ são homologicamente nulas; $d = 1$ se, e somente se, ao menos uma s_i , $i = 1, 2$, é homologicamente nula ou, se ambas as componentes s_i têm o mesmo tipo de homologia; $d = 2$, se s_1, s_2 não são homologicamente nulas e não são equivalentes.

Observação 2.2.5. *O Lema 2.1.3 também é válido para o caso em que o oito esteja imerso numa superfície não orientável $\Upsilon(h, 0)$, de genus $h \geq 1$. De fato, a equação (2.1) utilizada na prova do lema é ainda válida neste caso.*

Definição 2.2.6. *Diremos que um oito $\mathfrak{B}$ é um oito não separador se $r = 1$. Caso contrário, $\mathfrak{B}$ é chamado de oito separador.*

Denotamos por $\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ uma vizinhança regular fechada de $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ (para mais detalhes sobre vizinhanças regulares veja [29], [34]). O próximo resultado classifica as vizinhanças regulares de um oito.

Figura 2.2: Diferentes maneiras de dividir $\Sigma(1,0)$ por $\mathfrak{B}$.

Lema 2.2.7. *Uma vizinhança regular fechada de $\mathfrak{B}$ é homeomorfa a $\Sigma(0,3)$ ou $\Sigma(1,1)$.*

Quando $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0,3)$ temos que $\Sigma(g,0) \setminus \mathfrak{NB}$ é dada por:

- a) $\Sigma(g_1,1), \Sigma(g_2,1), \Sigma(g_3,1)$, com $g_1 + g_2 + g_3 = g$.
- b) $\Sigma(g_1,1), \Sigma(g_2,2)$, com $g_1 + g_2 = g - 1$.
- c) $\Sigma(g - 2,3)$.

Quando $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1,1)$ temos que $\Sigma(g,0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Sigma(g - 1,1)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ um oito em $\Sigma(g,0)$. Considere sobre a superfície $\Sigma(g,0)$ um círculo centrado em p de diâmetro suficientemente pequeno de modo que $\mathfrak{B}$ corte o círculo em exatamente quatro pontos, p_1, p_2, p_3 e p_4 . Considerando a componente s_i , $i = 1, 2$, de $\mathfrak{B}$ que corresponde a cada ponto e, ao percorrer o círculo em um sentido e outro começando em qualquer um desses pontos, nós temos dois ciclos ordenados: s_1, s_1, s_2, s_2 e s_1, s_2, s_1, s_2 . A primeiro ciclo ordenado corresponde a $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0,3)$ e o segundo, a $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1,1)$ (vide Figura 2.3). Por outro lado, $\Sigma(g,0)$ é a união da vizinhança regular fechada de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{NB}$, e a vizinhança regular fechada do complementar $\Sigma(g,0) \setminus \mathfrak{NB}$, a qual denotaremos por $\mathfrak{NC}$. Portanto, $\Sigma(g,0) = \mathfrak{NB} \cup \mathfrak{NC}$ e

$$\chi(\Sigma(g,0)) = \chi(\mathfrak{NB}) + \chi(\mathfrak{NC}) - \chi(\mathfrak{NB} \cap \mathfrak{NC}). \quad (2.3)$$

Como $\mathfrak{NB} \cap \mathfrak{NC}$ é a união disjunta de anéis, $S^1 \times I$, temos que $\chi(\mathfrak{NB} \cap \mathfrak{NC}) = 0$ e, portanto, $\chi(\mathfrak{NC}) = 3 - 2g$.

Por outro lado, segue do Lema 2.2.4, que $\mathfrak{B}$ divide a superfície em r componentes

conexas, onde $r = 3, 2$ ou 1 . Considere os seguintes casos.

Caso $r = 3$. Nesse caso, $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ será a união disjunta de superfícies orientáveis K_i de gêneros g_i e cada uma destas superfícies possui uma curva fechada no bordo. Logo,

$$3 - 2g = \chi(\mathfrak{N}\mathfrak{C}) = \sum_i^3 (\chi(K_i)) = \sum_i^3 (2 - 2g_i - 1) = 3 - 2(g_1 + g_2 + g_3). \quad (2.4)$$

Portanto, $g = g_1 + g_2 + g_3$ e o caso a) está provado.

Caso $r = 2$. Nesse caso, $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ será a união disjunta de duas superfícies orientáveis K_i de gêneros g_i sendo que uma delas, digamos K_1 , tem uma curva fechada no bordo e a segunda, K_2 , tem duas. Como no caso anterior, podemos calcular a característica de Euler das componentes K_i :

$$3 - 2g = \chi(\mathfrak{N}\mathfrak{C}) = \sum_i^2 (\chi(K_i)) = 2 - 2g_1 - 1 + 2 - 2g_2 - 2 = 1 - 2(g_1 + g_2). \quad (2.5)$$

Então $g - 1 = g_1 + g_2$ e o caso b) se verifica.

Caso $r = 1$. Aqui $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ será homeomorfo a uma superfície orientável, K , cujo bordo será composto por três curvas fechadas. Logo, a característica de Euler de K é

$$3 - 2g = \chi(K) = 2 - 2g_1 - 3, \quad (2.6)$$

e $g - 2 = g_1$ e com isto concluímos a prova do item c).

Se $\mathfrak{N}\mathfrak{B} \cong \Sigma(1, 1)$ então $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{B}$ possui uma curva no bordo e s_1, s_2 não são homologicamente nulas nem equivalentes, por construção. Observemos também que cada uma das componentes de $\mathfrak{B}$ são curvas de dois lados, portanto $\Sigma(g, 0) \setminus s_1$ é homeomorfo a $\Sigma(g - 1, 2)$. Por outro lado, s_2 pode ser uma curva fechada em $\Sigma(g, 0) \setminus s_1$ ou uma curva aberta. No primeiro caso obtemos o caso c) provado previamente, caso contrário s_2 é uma curva aberta conectando as curvas fechadas no bordo de $\Sigma(g - 1, 2)$. Portanto, $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{B} \cong \Sigma(g - 1, 1)$. $\square$

Definição 2.2.8. Se $\mathfrak{B}$ é um oito separador, $\mathfrak{N}\mathfrak{B}$ é homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$ e possui três curvas fechadas no bordo. Duas delas J_1 e J_2 são contratíveis a s_1 e s_2 respectivamente. Denotamos estes tipos de curvas por J_s . A terceira curva, J_3 é contratível a $\mathfrak{B}$ e a

denotamos por $J_{\mathfrak{B}}$. Sendo s_1 e s_2 orientadas podemos fixar uma orientação compatível com a contração para cada J_s .

Definição 2.2.9. Diremos que $\mathfrak{B}$ tem uma orientação cíclica se as orientações de J_1 , J_2 forem concordantes. Nesse caso, dizemos que $J_{\mathfrak{B}}$ tem orientação compatível com a contração.

Lembremos que se $\mathfrak{B}$ é um oito não separador então as componentes de $\mathfrak{B}$ são não homologicamente nulas. Logo, $\Sigma(g, 0) \setminus s_1$ possui uma componente conexa, K , e s_2 pode ser uma curva fechada de K ou uma curva aberta. Quando s_2 for curva fechada, $\mathfrak{NB}$ será homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$. Caso contrário, $\mathfrak{NB}$ será homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$.

Definição 2.2.10. Diremos que $\mathfrak{B}$ é um oito toroidal se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$ e, um oito planar, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$.

Lema 2.2.11. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ dois oitos planares em $\Sigma(g, 0)$. Todo homeomorfismo $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ que preserve a orientação das componentes dos oitos pode ser estendido a um homeomorfismo $H : \mathfrak{NB} \rightarrow \mathfrak{NB}'$. Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são oitos toroidais então todo homeomorfismo $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ pode ser estendido a um homeomorfismo $H : \mathfrak{NB} \rightarrow \mathfrak{NB}'$.

Demonstração. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ oitos planares em $\Sigma(g, 0)$. Defina em $\mathfrak{B}$ uma orientação cíclica. Com a notação definida anteriormente, $\mathfrak{NB} \setminus \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{NB}' \setminus \mathfrak{B}'$ tem três componentes anulares semi abertas denotadas por A_j , A'_j , cujos bordos são as curvas J_j e J'_j respectivamente para $j = 1, 2, 3$ (vide Figura 2.3 (a)).

Figura 2.3: A vizinhança regular fechada de $\mathfrak{B}$.

A prova consiste em estender h a cada uma das componentes anulares e, em seguida através da colagem obter o homeomorfismo desejado.

A extensão do homeomorfismo h para A_j , $j = 1, 2$, segue da contração que existe entre as componentes dos oitos e as curvas J_j , $j = 1, 2$.

Resta-nos estender o homeomorfismo h para A_3 . Lembremos que os oitos $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são imagens de uma imersão ψ_1 e ψ_2 , respectivamente, dadas por $\psi_1(C) = \mathfrak{B}$ e $\psi_2(C') = \mathfrak{B}'$, onde C e C' são curvas fechadas. Desde que h preserva a orientação de $\mathfrak{B}$, existe um homeomorfismo $\tilde{h} = \psi_2^{-1} \circ h \circ \psi_1$ de C a C' . Podemos identificar A_3, A'_3 com dois anéis semi abertos limitados por C, C' . As extensões de $\tilde{h}$ a esses anéis é a mesma usada para os anéis A_1 e A_2 e nos dá uma extensão de h a A_3 .

Como h está definida de $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$, então h está definido no bordo de A_1, A_2 e A_3 . Portanto, podemos aplicar o Lema da Colagem e obter a extensão H de $\mathfrak{NB}$ a $\mathfrak{NB}'$.

Considere agora que $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são oitos toroidais (veja a Figura 2.3 (b)). Um homeomorfismo h de $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$ pode ser decomposto em dois homeomorfismos, h_i definidos sobre as componentes s_i , $i = 1, 2$. Como $\mathfrak{B}$ é uma parte de $\mathfrak{NB}$ podemos estender h a H definido sobre toda a vizinhança regular considerando que H é o produto de h_1 e h_2 . $\square$

Uma condição suficiente para que dois círculos mergulhados em $\Sigma(g, 0)$ sejam equivalentes é que seus complementares com relação a $\Sigma(g, 0)$ sejam homeomorfos, isto é, se dois círculos mergulhados $\phi_1(S^1)$ e $\phi_2(S^1)$ são topologicamente equivalentes, então os conjuntos complementares $\Sigma(g, 0) \setminus \phi_1(S^1)$ e $\Sigma(g, 0) \setminus \phi_2(S^1)$ são homeomorfos. No entanto, essa condição não é suficiente para garantir que dois oitos sejam topologicamente equivalentes. De fato, segue do Lema 2.2.3 que os oitos descritos pelas Figuras 2.2 (b) e (d) são exemplos de oitos no toro cujos complementares com respeito ao toro são homeomorfos embora as componentes dos oitos não sejam topologicamente equivalentes em si. Portanto, tais oitos não são topologicamente equivalentes.

O seguinte teorema é o principal resultado nesta seção e fornece a classificação topológica dos oitos em superfícies fechadas e orientáveis.

Teorema 2.2.12. *Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável com $g \geq 0$. Então o número de oitos topologicamente distintos em $\Sigma(g, 0)$ é $3g + 1$, se $g = 0, 1$ e $E\left(\frac{g}{2}\right) C\left(\frac{g}{2}\right) + E\left(\frac{g}{2}\right) + 2g + 3$, se $g \geq 2$.*

Demonstração. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ oitos em $\Sigma(g, 0)$. Considere $\Sigma(g, 0) = \mathfrak{NB} \cup \mathfrak{NC}$, onde $\mathfrak{NC}$ é uma vizinhança regular fechada de $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{NB}$. A prova desse teorema é feita em dois

passos. No primeiro passo dividimos o conjunto de todos os oitos em $\Sigma(g, 0)$ em classes de equivalência de modo que dois oitos $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ pertencem à mesma classe se, e somente se, as componentes de $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ têm o mesmo tipo de homologia e seus complementares $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{B}$ e $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{B}'$ são homeomorfos. Num segundo passo, mostraremos que cada classe de equivalência por essa relação tem um único elemento.

Passo 1.

Suponha $g = 0$. Neste caso todas as curvas fechadas em $\Sigma(g, 0)$ são homotópicas a zero e, segue do Lema 2.2.4 que, $\mathfrak{NC}$ é a reunião de três discos, logo existe única maneira de mergulhar um oito em $\Sigma(g, 0)$. Suponha $g \neq 0$.

Assuma inicialmente que ambas as componentes do oito são homologicamente nulas com s_1 homotópica a zero. Então, pelo Teorema 2.1.4, temos que s_1 e s_2 são de tipo l_0 e l_i respectivamente, onde $i = 1, \dots, E\left(\frac{g}{2}\right)$, sendo que o subíndice i indica o menor gênero entre as duas superfícies em que s_2 divide a superfície $\Sigma(g, 0)$.

Portanto, a vizinhança regular fechada do oito cujas componentes são s_1 e s_2 será homeomorfa a $\Sigma(0, 3)$ e o número de regiões em que o oito divide a $\Sigma(g, 0)$ será 3. Então o item a) do Lema 2.2.7 nos garante as seguintes $1 + E\left(\frac{g}{2}\right)$ configurações:

$$\begin{aligned}
 K_1 &\cong D^2, K_2 \cong \Sigma(g, 1), K_3 \cong D^2; \\
 K_1 &\cong D^2, K_2 \cong \Sigma(g-1, 1), K_3 \cong \Sigma(1, 1); \\
 K_1 &\cong D^2, K_2 \cong \Sigma(g-2, 1), K_3 \cong \Sigma(2, 1); \\
 &\vdots \\
 K_1 &\cong D^2, K_2 \cong \Sigma\left(E\left(\frac{g}{2}\right), 1\right), K_3 \cong \Sigma\left(C\left(\frac{g}{2}\right), 1\right).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Denotaremos estes oitos por $\mathfrak{B}(l_0, l_i)$. Veja os casos 1 e 2 da Tabela 2.1.

Assuma agora que as componentes do oito são homólogas a zero, mas não homotópicas a zero. Suponha que s_1 é do tipo l_i e s_2 é do tipo l_j e escolha s_1 de tal maneira que $i \leq j$. Se as duas componentes de $\mathfrak{B} \setminus s_2$ não são homeomorfas, de acordo com a componente que contém s_1 temos duas possibilidades para a tripla K_1, K_2, K_3 :

$$\begin{aligned}
 K_1 &\cong \Sigma(i, 1), K_2 \cong \Sigma(g-j, 1), K_3 \cong \Sigma(j-i, 1); \\
 K_1 &\cong \Sigma(i, 1), K_2 \cong \Sigma(j, 1), K_3 \cong \Sigma(g-(i+j), 1);
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Estes tipos de oitos serão denotados por $\mathfrak{B}(l_i, l_j, j - i)$ ou $\mathfrak{B}(l_i, l_j, g - (i + j))$. Vide os casos 3 e 4 da Tabela 2.1.

Para encontrar o número de oitos cujas componentes são (l_i, l_j) , procedemos como segue: fixamos a curva s_1 de tipo l_i com $i = 1, \dots, E\left(\frac{g}{2}\right)$. O subíndice j da curva do tipo l_j varia dentre os valores $\{1, 2, \dots, g-1\}$. Então com s_1 fixada temos $g-1$ tipos de oitos cujas componentes são (l_i, l_j) . Observe que a curva de tipo l_{g-i} é topologicamente equivalente àquela de tipo l_i , pois os complementares $\Sigma(g, 0) - l_i$ e $\Sigma(g, 0) - l_{g-i}$ são homeomorfos. Quando $l_i = l_2$, j varia entre $\{2, \dots, g-2\}$. De fato, o oito cujas componentes são (l_2, l_1) já foi considerado na contagem anterior e, o oito cujas componentes são (l_2, l_{g-1}) pertence a classe do oito formado pelas componentes (l_2, l_1) uma vez que as curvas l_{g-1} e l_1 são topologicamente equivalentes. Portanto, o número de oitos que não são topologicamente equivalentes com componentes (l_2, l_j) é $g-3$.

Seguindo desta maneira, quando $g = 2E\left(\frac{g}{2}\right) + 1$, no $E\left(\frac{g}{2}\right)$ -passo (o que equivale a considerar a curva de tipo $l_i = l_{E\left(\frac{g}{2}\right)}$) teremos dois pares não equivalentes $(l_{E\left(\frac{g}{2}\right)}, l_{E\left(\frac{g}{2}\right)})$ e $(l_{E\left(\frac{g}{2}\right)}, l_{E\left(\frac{g}{2}\right)+1})$. Se $g = 2E\left(\frac{g}{2}\right)$, teremos no $E\left(\frac{g}{2}\right)$ -passo um único par $(l_{E\left(\frac{g}{2}\right)}, l_{E\left(\frac{g}{2}\right)})$.

Logo, o número de oitos que não são topologicamente equivalentes e cujas componentes (l_i, l_j) , são curvas homologicamente nulas, mas não homotópicas a zero é n^2 , quando g é par e $n(n+1)$ quando g é ímpar. Em outras palavras, existem $E\left(\frac{g}{2}\right) \cdot C\left(\frac{g}{2}\right)$ tipos de oitos não topologicamente equivalentes com componentes homologicamente nulas, mas não homotópicas a zero.

O caso em que o oito tem uma única componente homologicamente nula, por exemplo s_1 , corresponde ao caso $b)$ do Lema 2.2.7. Nesse caso temos, $K_1 \cong \Sigma(g_i, 1)$ e $K_2 \cong \Sigma(g_j, 2)$. Denotamos este tipo de oito por $\mathfrak{B}(l_n, g_i, g_j)$ assumindo que a componente com gênero g_i é a componente com uma curva fechada no bordo. Assim temos g possibilidades:

$$(1) \ K_1 \cong \Sigma(g-1, 2) \text{ e } K_2 \cong D^2;$$

$$(2) \ K_1 \cong \Sigma(g-1, 1) \text{ e } K_2 \cong S^1 \times I;$$

$\vdots$

$$(g) \text{ se } g \text{ é par, } K_1 \cong \Sigma\left(E\left(\frac{g}{2}\right), 1\right) \text{ e } K_2 \cong \Sigma\left(E\left(\frac{g}{2}\right) - 1, 2\right); \text{ ou se } g \text{ é ímpar, } K_1 \cong \Sigma\left(E\left(\frac{g}{2}\right), 2\right) \text{ e } K_2 \cong \Sigma\left(E\left(\frac{g}{2}\right), 1\right).$$

Cada umas destas possibilidades correspondem a um oito cujas componentes são (l_i, l_K) com $i \in \{0, 1, 2, \dots, g-1\}$. Veja os casos 5, 6 e 7 da Tabela 2.1.

Se as componentes s_i do oito são essenciais, não homologicamente nulas ($i = 1, 2$) e homologicamente equivalentes, então estamos no caso b) do Lema 2.2.7 e a vizinhança regular fechada $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ será a reunião de duas superfícies K_i , $i = 1, 2$. Portanto, existem g possibilidades e, o oito será denotado por $\mathfrak{B}(g_i, g_j)$ onde $K_1 \cong \Sigma(g_i, 1)$ e $K_2 \cong \Sigma(g_j, 2)$.

O número g de possibilidades é exatamente o número de oitos cujas componentes são (l_K, l_K) , sendo que para cada toro, $\Sigma(1, 0)$, na soma conexa $\Sigma(g, 0) = \#n\Sigma(1, 0)$, temos dois oitos que não são topologicamente equivalentes (ver os casos 8, 9 e 10 da Tabela 2.1).

Finalmente, se as componentes s_i do oito são essenciais e não homologicamente equivalentes, então $\mathfrak{N}\mathfrak{C}$ tem uma única componente K que corresponde ao caso c) no Lema 2.2.7 com $K \cong \Sigma(g-1, 1)$, se $\mathfrak{N}\mathfrak{B} \cong \Sigma(1, 1)$ ou $K \cong \Sigma(g-2, 3)$, se $\mathfrak{N}\mathfrak{B} \cong \Sigma(0, 3)$. Estes oitos serão denotados por $\mathfrak{B}(1)$ e $\mathfrak{B}(3)$ respectivamente. Veja os casos 11 e 12 na Tabela 2.1.

Passo 2.

Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ dois oitos que pertencem à mesma classe de equivalência. Vamos provar que eles são topologicamente equivalentes. Inicialmente suponha que $\mathfrak{B}$ é um oito planar. Como sempre é possível definir um homeomorfismo $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ que preserve o tipo de orientação dos oitos, segue do Lema 2.2.11 que, h se estende a um homeomorfismo $H : \mathfrak{N}\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{N}\mathfrak{B}'$. Em particular, temos um homeomorfismo $\tilde{H} : \partial(\mathfrak{N}\mathfrak{B}) \rightarrow \partial(\mathfrak{N}\mathfrak{B}')$ que preserva orientações concordantes.

Pelo Teorema 1.5.2, é possível estender $\tilde{H}$ a $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{N}\mathfrak{B}$ e, pelo Lema da Colagem, podemos encontrar uma extensão de h a $\Sigma(g, 0)$.

Se $\mathfrak{B}$ é um oito toroidal, podemos estender $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ de maneira similar. Neste caso não é necessário ter em conta as condições de orientabilidade em $\mathfrak{B}$. $\square$

2.3 Classificação das folheações Morse-Bott

Esta seção tem por objetivo definir um novo invariante topológico para folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e orientáveis.

Vale lembrar que, se $\mathcal{F}(g)$ é uma folheação $\mathcal{MB}$ então as singularidades de $\mathcal{F}(g)$ são pontos de centro e pontos de sela da função g que a realiza e os oitos são os conjuntos de nível de g que contém um ponto de sela. Então a seguinte proposição nos diz que os oitos de uma folheação $\mathcal{MB}$ são todos planares.

Proposição 2.3.1. *Um oito toroidal não é admissível em uma folheação $\mathcal{MB}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ é um oito toroidal de uma folheação $\mathcal{MB}$, $\mathcal{F}(g)$ em $\Sigma(g, 0)$, com $g \geq 0$. Sabemos também que g atinge um valor constante em todo o oito, digamos $g(\mathfrak{B}) = 0$. Provemos que p não é um ponto de sela de g . De fato, se p fosse um ponto de sela de g , então existiria uma vizinhança de p , digamos N_p , tal que $p \in N_p$ e $\mathfrak{B} \setminus N_p$ é a união disjunta de quatro componentes conexas, onde em duas delas g assume valores menores do que $g(\mathfrak{B})$ e nas outras duas, g atinge valores maiores do que $g(\mathfrak{B})$. Além disso, o interior de $\mathfrak{B}$ é preenchido por curvas fechadas associadas a conjuntos de níveis regulares de g que se contraem a $\mathfrak{B}$. Dado que cada uma destas curvas conecta todas as componentes conexas do ponto de sela, não pode acontecer que a função g assumia valores positivos e negativos em pontos destas curvas. Logo, p não pode ser um ponto de sela de g e o resultado segue. $\square$

O seguinte resultado prova que a estrutura topológica de uma folheação $\mathcal{MB}$ difere da estrutura topológica de uma folheação definida globalmente por uma função de Morse.

Proposição 2.3.2. *Seja f uma função de Morse em $\Sigma(g, 0)$ e $\mathcal{F}(f)$ a folheação de Morse induzida pelos conjuntos de níveis de f . Então duas componentes de um oito $\mathfrak{B}$ de $\mathcal{F}(f)$ não podem ser conectadas por uma família de curvas fechadas. Mais ainda, dois cilindros regulares conectando dois oitos somente contém curvas de tipo J_s .*

Demonstração. Seja $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ e assuma que as componentes de $\mathfrak{B}$, s_1 e s_2 , são conectadas por um cilindro folheado por uma família de curvas fechadas. Esta família de curvas pode ser parametrizada por um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e as duas curvas fechadas no bordo desta família são as componentes de $\mathfrak{B}$. Assim, f deve assumir o mesmo valor real no bordo de I . Como f é uma função contínua e derivável em I , segue pelo Teorema de Rolle que f possui ponto crítico c em I e dado que f é uma função de Morse, c é ponto isolado. Logo, existe curva fechada do cilindro tal que c pertence a essa curva. Por outro

lado, $\mathcal{F}(f)$ é a folheação induzida pelos conjuntos de nível de f , portanto f atinge um valor constante sobre todos os pontos dessa curva fechada contrariando o fato de f ser função de Morse.

Por outro lado, suponhamos que $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ são oitos que estão conectados por dois cilindros folheados por uma família de curvas fechadas onde cada curva é um conjunto de nível regular de f . Essa conexão pode ser entendida como uma extensão, por continuidade, de f a partir dos valores regulares de f , nas curvas do bordo de um dos oitos, até atingir os valores regulares nas curvas do bordo do outro oito.

Então temos duas possibilidades: (a) dois cilindros tais que um deles conecta uma curva do tipo J_s de $\mathfrak{B}$ com a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}'}$ de $\mathfrak{B}'$ e o segundo cilindro conecta a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{B}$ com uma curva de tipo J_s de $\mathfrak{B}'$ (ver Figura 2.4 (a)); ou (b) dois cilindros dos quais um deles conecta uma curva de tipo J_s de $\mathfrak{B}$ com uma curva de tipo J_s de $\mathfrak{B}'$ e o outro cilindro conecta a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{B}$ com a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}'}$ de $\mathfrak{B}'$ (ver Figura 2.4 (b)).

Possibilidade (a): Suponha que $a = f(\mathfrak{B}) < f(\mathfrak{B}') = b$. Em $\mathfrak{NB}$ os sinais de $a - f(J_s)$ e $f(\mathfrak{B}) - f(J_{\mathfrak{B}})$ são distintos (analogamente para $\mathfrak{NB}'$, os sinais de $b - f(J_s)$ e $b - f(J_{\mathfrak{B}'})$ são distintos). Então, o cilindro que conecta a componente J_s de $\mathfrak{B}$ com a componente $J_{\mathfrak{B}'}$ de $\mathfrak{B}'$ passará de a até b através de valores regulares de f , respeitando o sentido de crescimento de f . Vejamos que a colagem do segundo cilindro implica na existência de um círculo singular de f .

Considere a colagem do segundo cilindro, que faz a conexão de b até a . Como $a < b$, existe uma família de curvas fechadas do cilindro na qual a função é crescente (após f atingir o valor b) e uma outra família de curvas fechadas na qual a função é decrescente (após f atingir o valor a). Então, o Teorema do Valor Intermediário nos garante que, existe um valor c no interior do intervalo que parametriza este cilindro, que é ponto crítico de f . Como f é uma função Morse, se deduz que c é isolado. No entanto, c pertence a uma curva fechada do cilindro na qual f é constante. Logo, todos os pontos desta curva serão pontos críticos de f e, portanto, essa curva será um círculo singular de f , contradizendo o fato de f ser função de Morse.

A mesma contradição se deduz da possibilidade (b). Portanto, o resultado segue.

□

Figura 2.4: Conexão de dois oitos.

Figura 2.5: Uma folheação no toro que não é Morse.

Na Figura 2.5 apresentamos um exemplo de folheação no toro que não é uma folheação de Morse. De fato, existem dois cilindros regulares, cada um deles conectando dois oitos com uma curva de tipo $J_{\mathcal{B}}$ e outra de tipo J_s respectivamente.

2.3.1 O grafo de uma folheação Morse-Bott

O grafo de Reeb de uma função suave é um invariante topológico muito utilizado no estudo de folheações e de funções. No entanto, este invariante por si só é insuficiente para caracterizar as folheações geradas pelas curvas de nível de funções de Morse em superfícies (ver por exemplo [3, 9]). Mais especificamente, o grafo de Reeb não caracteriza as folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies e ao mesmo tempo contém informações desnecessárias sobre elas, se pensarmos no grafo de Reeb como o grafo que se obtém ao colapsar cada uma das folhas da folheação em um ponto e cujos vértices são as singularidades da folheação.

Na Figura 2.6 apresentamos um exemplo de duas folheações $\mathcal{MB}$ que são topologica-

Figura 2.6: $\mathcal{F}(g_1) \cong \mathcal{F}(g_2)$, $R_G(g_1) \not\cong R_G(g_2)$

mente equivalentes e cujos grafos de Reeb não são isomorfos. A função $\mathcal{MB}$ que realiza essas folheações é a função altura em ambos os casos. A função que realiza a folheação no lado esquerdo na figura possui três singularidades enquanto que aquela que realiza a folheação no lado direito tem duas singularidades. Os grafos de Reeb correspondentes a cada uma dessas folheações é exibido abaixo de cada figura. Por outro lado, o isomorfismo entre os grafos pode ser obtido se eliminamos o vértice no grafo associado ao círculo singular da função que realiza a folheação do lado esquerdo. Neste caso, a eliminação do vértice é possível desde que um círculo singular de uma função $\mathcal{MB}$ não é uma singularidade da folheação.

No entanto, nem sempre essa redução ou eliminação é possível. Por exemplo, na Tabela 3.1 se exhibe uma folheação no toro definida pelos conjuntos de nível da função altura no toro (como no Exemplo 1.3.8). Esta é uma folheação $\mathcal{MB}$ no toro sem pontos de sela, na qual não podemos eliminar os vértices associados aos círculos singulares da função.

Estas observações nos motivam a seguinte definição.

Definição 2.3.3 (O grafo de uma folheação $\mathcal{MB}$). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{MB}$ e f tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$. Então o grafo $\Theta(\mathcal{F})$ da folheação $\mathcal{MB}$ é:*

- a) *Um círculo, no caso de uma folheação regular por curvas fechadas no toro.*
- b) *O grafo que se obtém do grafo de Reeb de f por transformar a união de cada vértice v associado a circunferências críticas de f e as duas arestas incidentes a v , em uma nova aresta. Ver Figura 2.6.*

O grafo $\Theta(\mathcal{F})$ não depende da função particular f tal que $\mathcal{F} = \mathcal{F}(f)$. De fato, podem existir diferentes funções $\mathcal{MB}$ que geram folheações $\mathcal{MB}$ topologicamente equivalentes e,

Figura 2.7: A folheação $\mathcal{F}_1$ e o grafo $\Theta(\mathcal{F}_1)$.

portanto, o mesmo grafo $\Theta(\mathcal{F})$. É importante enfatizar que nossa definição de $\Theta(\mathcal{F})$ está relacionada à construção que se descreve em [16], seção 1.3, pg 13.

Vale observar também que $\Theta(\mathcal{F})$ carrega informações sobre a superfície $\Sigma(g, 0)$ uma vez que o número de ciclos básicos em $\Theta(\mathcal{F})$ coincide com o genus de $\Sigma(g, 0)$, embora não seja um invariante completo como nos mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.4. Nas Figuras 2.7 e 2.8 apresentamos duas folheações $\mathcal{MB}$ no toro que não são topologicamente equivalentes, $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, e cujos grafos e espaço de órbitas são isomorfos. De fato, suponha que $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são topologicamente equivalentes. Então existe um homeomorfismo h do toro no toro que envia as folhas de $\mathcal{F}_1$ às folhas de $\mathcal{F}_2$. Além disso, o tipo topológico das folhas é preservado pelo homeomorfismo h . Sendo assim, as folhas que são homeomorfas a curvas fechadas de $\mathcal{F}_1$ serão levadas por h nas folhas que são homeomorfas a curvas fechadas de $\mathcal{F}_2$ e o mesmo acontece com as folhas homeomorfas a segmentos de reta, a saber, as separatrizes dos pontos de sela. Finalmente, os pontos singulares de $\mathcal{F}_1$ (os pontos de centro e de selas) deverão ser levados aos correspondentes pontos singulares em $\mathcal{F}_2$. Por outro lado, o fecho das separatrizes dos pontos de sela são curvas fechadas e, portanto, também deverão ser preservados por h . Como em $\mathcal{F}_1$ todas as curvas obtidas como fecho das separatrizes dos pontos de sela são curvas essenciais e em $\mathcal{F}_2$ duas delas são essenciais e outras duas homotópicas a zero não pode existir homeomorfismo h que as conjugue.

O exemplo acima nos mostra que o tipo topológico dos oitos precisa estar representado em qualquer invariante completo associado a folheações $\mathcal{MB}$ e ainda, esse tipo topológico pode estar implícito no grafo $\Theta(\mathcal{F})$ munido de alguma estrutura adicional.

Lembremos que, em um oito planar, duas famílias de curvas regulares denotadas por

Figura 2.8: A folheação $\mathcal{F}_2$ e o grafo $\Theta(\mathcal{F}_2)$. Figura 2.9: O sentido de bifurcação das curvas de tipo $J_{\mathfrak{B}}$.

J_s se interceptam e definem o oito. Este por sua vez é o limite de uma única componente que está formada por uma família de curvas regulares de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ (Figura 2.9).

Na próxima proposição mostra-se que para conhecer o tipo topológico dos oitos que aparecem em folheações $\mathcal{MB}$ é suficiente distinguir a aresta incidente ao vértice associado a um ponto de sela que contém a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ (Figura 2.10).

Proposição 2.3.5. *Seja ξ a função em $\Theta(\mathcal{F})$ que associa a cada vértice de sela em $\Theta(\mathcal{F})$ a aresta que contém a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$. Então o grafo e ξ determinam o tipo topológico dos oitos.*

Demonstração. Por definição, o tipo topológico de um oito contém informações sobre o tipo de homologia de suas componentes s_i , se elas são independentes ou não e finalmente, sobre a componente $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{NB}$. Então provamos que é possível obter todas essas informações conhecendo a aresta que contém a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$.

Em $\Theta(\mathcal{F})$, uma componente J_s corresponde a um ponto, digamos p_{J_s} , e o oito $\mathfrak{B}$ corresponde a um vértice, $v_{\mathfrak{B}}$. Então $\Theta(\mathcal{F}) \setminus p_{J_s}$ determina o tipo de homologia da curva J_s uma vez que, $\Theta(\mathcal{F}) \setminus p_{J_s}$ é um subcomplexo simplicial da superfície $\Sigma(g, 0)$ na qual a folheação é definida e, portanto, nos dá informações sobre a superfície obtida ao eliminar

Figura 2.10: A função ξ .

o ponto p_{J_s} . Mais ainda, $\Theta(\mathcal{F}) \setminus p_{J_s}$ nos dá informações sobre o tipo de homologia da componente s_i de $\mathfrak{B}$ pois J_s é contrátil a uma das componente de $\mathfrak{B}$. Também podemos deduzir a partir de $\Theta(\mathcal{F}) \setminus v_{\mathfrak{B}}$ as componente conexas do complementar $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{NB}$. $\square$

Adotaremos as seguintes distinções para as arestas em $\Theta(\mathcal{F})$:

1-aresta: são arestas sem distinção, $\circ - \circ$;

2-aresta: são arestas marcadas com uma seta dirigida ao vértice que se quer distinguir,

$$\circ \rightarrow \circ;$$

3-aresta: são arestas marcadas com uma seta para esquerda e direita simultaneamente,

$$\circ \leftrightarrow \circ.$$

O sentido da seta indicará o sentido de bifurcação na vizinhança da singularidade de tipo sela nas folheações $\mathcal{MB}$. Com estas distinções, o grafo $\Theta(\mathcal{F})$ é um grafo de Dynkin, possivelmente com ciclos.

Seja $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ o par formado por $\Theta(\mathcal{F})$ e a função ξ como na Proposição 2.3.5. Denotamos por $\mathcal{Fol}(\Theta_\xi)$ a folheação associada a $\Theta_\xi(\mathcal{F})$. Com estas notações temos a seguinte definição.

Definição 2.3.6. $\Theta_\xi(\mathcal{F}_1)$ e $\Theta_\xi(\mathcal{F}_2)$ são isomorfos se existe um isomorfismo de $\Theta(\mathcal{F}_1)$ em $\Theta(\mathcal{F}_2)$ que preserva as designações das funções ξ .

O seguinte teorema resolve o problema da classificação das folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e orientáveis e é o principal resultado nesta seção.

Teorema 2.3.7. $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ é um invariante topológico completo para folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e orientáveis.

Demonstração. Necessidade. Vamos supor que $\mathcal{F}_1(f)$ e $\mathcal{F}_2(g)$ são folheações $\mathcal{MB}$ topologicamente equivalentes em $\Sigma(g, 0)$. A superfície $\Sigma(g, 0)$ é contrátil a $\Theta(\mathcal{F})$ uma vez que $\Theta(\mathcal{F})$ é considerado um complexo celular de $\Sigma(g, 0)$. Por outro lado, o número das diferentes singularidades e como estas estão conectadas por cilindros regulares é o mesmo para $\mathcal{F}_1(f)$ e $\mathcal{F}_2(g)$. Portanto, $\Theta(\mathcal{F})$ é um invariante topológico para folheações $\mathcal{MB}$. Finalmente, o tipo topológico dos oitos é, por definição, outro invariante que é equivalente à distinção entre as curvas $J_{\mathfrak{B}}$ e J_s . Portanto, $\Theta_\xi(\mathcal{F}_1)$ e $\Theta_\xi(\mathcal{F}_2)$ são isomorfos.

Suficiência. Sejam $\mathcal{F}_1(f)$ e $\mathcal{F}_2(g)$ duas folheações $\mathcal{MB}$ em $\Sigma(g, 0)$. Assumamos que existe um isomorfismo $\theta : \Theta_\xi(\mathcal{F}_1) \rightarrow \Theta_\xi(\mathcal{F}_2)$. Denote por $S(\mathcal{F}_1)_i = f^{-1}(a_i)$ e $S(\mathcal{F}_2)_i = g^{-1}(b_i)$, $b_i = \theta(a_i)$ dois conjuntos de níveis singulares das folheações relacionados pelo isomorfismo θ ; então existem homeomorfismos $\theta_i^s : S(\mathcal{F}_1)_i \rightarrow S(\mathcal{F}_2)_i$ que no caso de oitos podem ser escolhidos de tal maneira que se preserve o tipo de orientação. Provemos que é possível estender θ_i^s a um homeomorfismo $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ que envia folhas de $\mathcal{F}_1$ a folhas de $\mathcal{F}_2$.

Sem perda de generalidade, assumamos que existem singularidades de selas com o objetivo de evitar casos triviais e, que a extensão de θ_i^s a $\mathfrak{NB}_i$, denotada aqui por θ_i^r e definida no Lema 2.2.11 envia curvas de nível a curvas de nível. As restrições de θ_i^r às componentes de $\partial\mathfrak{NB}_i$ são concordantes por construção. Sabemos que existem extensões de θ_i^r a toda $\Sigma(g, 0)$ que serão denotadas por $h_{\mathfrak{NB}_i}$.

Considere dois oitos $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j$ que se conectam e seja $\mathcal{C}_{ij}^1$ um cilindro que conecta esses oitos. Temos definido um homeomorfismo entre cada componente do bordo de $\mathcal{C}_{ij}^1$. Se ambos homeomorfismos preservam ou reverterem a orientação, é trivial construir uma extensão, $\theta_{\mathcal{C}_{ij}^1}$, dos homeomorfismos sobre o bordo a todo o cilindro. Caso contrário, podemos modificar o tipo de orientação que preserva um dos θ_k^s com o objetivo de estar no caso anterior. Caso tenhamos mais cilindros $\mathcal{C}_{ij}^k$ conectando $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j$ seguimos o mesmo processo para definir um novo $\theta_{\mathcal{C}_{ij}^k}$. O homeomorfismo obtido colando θ_i^r, θ_j^r , e todo $\theta_{\mathcal{C}_{ij}^k}$ pode ser estendido a um homeomorfismo $h_{\mathfrak{NB}_i, \mathfrak{NB}_j}$ em toda $\Sigma(g, 0)$ como no caso de uma sela. Iteramos a extensão a novas selas até que todos os oitos tenham sido envolvidos, obtendo um homeomorfismo $h_{\mathfrak{NB}} : \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Finalmente, considere vizinhanças saturadas dos centros, $\mathfrak{NC}_k$. Essas vizinhanças são discos folheados trivialmente por círculos e $h_{\mathfrak{NB}}$ define um homeomorfismo entre $\partial\mathfrak{NC}_k$ e

Figura 2.11: As curvas desenhadas em verde correspondem as curvas J_s e em vermelho as de tipo $J_{\mathfrak{B}}$.

$\partial\mathfrak{M}(c_k)$. Como sempre é possível estender um homeomorfismo entre os bordos de dois discos folheados por círculos, obtemos finalmente a extensão desejada h .

Note que os bordos das vizinhanças saturadas de um centro podem ser um oito ou uma componente s_i de uma singularidade de sela. Portanto, no intuito de colar os discos adequadamente, a curva $J_{\mathfrak{B}}$ deve ser marcada em $\Theta_{\xi}(\mathcal{F})$. $\square$

A seguir, apresentamos um exemplo que mostra que apenas o tipo topológico dos oitos é insuficiente para determinar quando duas folheações $\mathcal{MB}$ são topologicamente equivalentes.

Exemplo 2.3.8. [Folheações $\mathcal{MB}$ não topologicamente equivalentes] As folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ apresentadas na Figura 2.11 são folheações $\mathcal{MB}$ no toro não topologicamente equivalentes. Observamos que em ambas as folheações existem seis subvariedades críticas não degeneradas associadas às funções $\mathcal{MB}$ que as realizam, mas as únicas singularidades das folheações são os pontos de sela. Vale ressaltar também que os tipos dos oitos que formam estas selas são $\mathfrak{B}(l_k, 3)$ e, as folheações tem espaços de órbitas isomorfos.

Mostraremos que, a partir dos espaços de órbitas e conhecendo o tipo topológico dos oitos, não é possível construir um homeomorfismo no toro que conjugue essas folheações. De fato, existe extensão do homeomorfismo h que leva o oito da sela s_i de $\mathcal{F}_1$ ao correspondente s_j de $\mathcal{F}_2$ a uma vizinhança do oito. Sem perda de generalidade, vamos supor que

tanto em $\mathcal{F}_1$ como em $\mathcal{F}_2$, h satisfaz $h(s_1) < h(s_2)$. Então em $\mathcal{F}_1$ estendemos continuamente h ao cilindro cujos bordos são as curvas de tipo $J_{\mathfrak{B}}$. Se houver um homeomorfismo H que conjugue ambas as folheações deverá, portanto, preservar o tipo topológico das curvas. Assim, H levará as curvas de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de $\mathcal{F}_1$ às correspondentes curvas de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de $\mathcal{F}_2$, assim como, as curvas regulares no cilindro que as conectam. Mas, observemos que ao estender h continuamente da curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de s_3 à curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de s_4 em $\mathcal{F}_2$ necessariamente passamos pela singularidade s_4 , o que não acontece em $\mathcal{F}_1$. Portanto, o homeomorfismo H que conjuga ambas as folheações não pode existir. Os invariantes $\Theta_{\xi}(\mathcal{F}_1)$ e $\Theta_{\xi}(\mathcal{F}_2)$ associados a $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ respectivamente está exibido na Figura 2.11.

1		$K_1 \cong D^2; K_2 \cong D^2; K_3 \cong \Sigma(3, 1)$	$\mathfrak{B}(l_0, l_0)$
2		$K_1 \cong D^2; K_2 \cong \Sigma(2, 1); K_3 \cong \Sigma(1, 1)$	$\mathfrak{B}(l_0, l_1)$
3		$K_1 \cong \Sigma(1, 1); K_2 \cong \Sigma(2, 1); K_3 \cong D^2$	$\mathfrak{B}(l_1, l_1, 0)$
4		$K_1 \cong \Sigma(1, 1); K_2 \cong \Sigma(1, 1); K_3 \cong \Sigma(1, 1)$	$\mathfrak{B}(l_1, l_2, 0)$
5		$K_1 \cong D^2; K_2 \cong \Sigma(2, 2)$	$\mathfrak{B}(l_0, 0, 2)$
6		$K_1 \cong \Sigma(0, 2); K_2 \cong \Sigma(2, 1)$	$\mathfrak{B}(l_1, 0, 2)$
7		$K_1 \cong \Sigma(1, 2); K_2 \cong \Sigma(1, 1)$	$\mathfrak{B}(l_1, 1, 1)$
8		$K_1 \cong D^2; K_2 \cong \Sigma(2, 2)$	$\mathfrak{B}(0, 2)$
9		$K_1 \cong \Sigma(2, 1); K_2 \cong \Sigma(0, 2)$	$\mathfrak{B}(2, 0)$
10		$K_1 \cong \Sigma(1, 1); K_2 \cong \Sigma(1, 2)$	$\mathfrak{B}(1, 1)$
11		$K \cong \Sigma(1, 3)$	$\mathfrak{B}(3)$
12		$K \cong \Sigma(2, 1)$	$\mathfrak{B}(1)$

Tabela 2.1: Oitos não topologicamente equivalentes em $\Sigma(3, 0)$.

Capítulo 3

Realização do invariante

Por meio de um teorema da realização podemos reconhecer como é o conjunto de todos os invariantes admissíveis pelo sistema. Então neste capítulo apresentamos condições necessárias e suficientes para que um grafo abstrato seja realizável como um grafo de uma folheação $\mathcal{MB}$ (ver Teoremas 3.1.5 e 3.1.6, na Seção 3.1). Segue deste estudo que todos os sistemas $\mathcal{MB}$ podem ser obtidos a partir de uma folheação básica através de duas transformações a ela aplicadas.

3.1 O teorema da realização

Nesta seção apresentamos o teorema da realização do invariante topológico completo, introduzido no capítulo anterior, para a classificação das folheações $\mathcal{MB}$ definidas em superfícies fechadas e orientáveis. Também caracterizamos o conjunto dos grafos G que são realizáveis como grafo de uma folheação $\mathcal{MB}$, em função de um grafo gerador e duas transformações aplicadas a este grafo.

Seja $\Sigma(g, m)$ uma superfície fechada e orientável com m curvas fechadas no bordo e $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{MB}$ definida em $\Sigma(g, m)$. Denote por $\mathcal{F}_c$ e $\mathcal{F}_s$ as folheações por círculos (ou curvas fechadas) na vizinhança de um centro e uma sela, respectivamente. Suponha que as m curvas fechadas no bordo de $\Sigma(g, m)$ são limitadas por conjuntos de níveis regulares $s_1, s_2, \dots, s_m$ e denote por $\mathcal{P}_{s_1, s_2, \dots, s_m}(\mathcal{F})$ a folheação obtida a partir de $\mathcal{F}$ colando $\mathcal{F}_c$ a cada círculo no bordo de $\Sigma(g, m)$.

Considere o disco $\Sigma(0, 1)$ e nele a folheação $\mathcal{F}_c$. Então, denotamos por $\mathcal{G}_c = \mathcal{P}_{s_1}(\mathcal{F}_c)$ a folheação na esfera $\Sigma(0, 0)$ com dois centros. Analogamente, se $\Sigma(0, 3)$ é a vizinhança de um oito e $\mathcal{F}_s$ é a folheação em $\Sigma(0, 3)$, denotamos por $\mathcal{G}_s = \mathcal{P}_{s_1, s_2, s_3}(\mathcal{F}_s)$ a folheação na esfera cujas singularidades são três centros e uma sela. Ver figuras na Tabela 3.1.

Por definição, o grafo de uma folheação $\mathcal{MB}$ tem vértices de grau 1 ou 3 e se a folheação está definida em uma superfície fechada e orientável $\Sigma(g, 0)$, então é necessário que o número de ciclos básicos do grafo seja igual ao genus de $\Sigma(g, 0)$.

Definição 3.1.1. *Um grafo abstrato Θ_ξ é um círculo ou um grafo conexo cujos vértices têm grau um ou três, e ainda, os vértices de grau três têm uma aresta distinguida.*

Lembremos que as arestas distinguidas podem ser de três tipos:

1-aresta: são arestas sem distinção, $\circ - \circ$ (segmento simples);

2-aresta: são arestas marcadas com uma seta dirigida ao vértice que se quer distinguir,

$$\circ \rightarrow \circ;$$

3-aresta: são arestas marcadas com uma seta para esquerda e direita simultaneamente,

$$\circ \leftrightarrow \circ.$$

Por uma **n -aresta** entendemos uma aresta distinguida, segundo a descrição acima, onde $n \in \{1, 2, 3\}$ denota a *distinção da aresta*.

Definição 3.1.2. *Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável. Uma **folheação minimal** em $\Sigma(g, 0)$ é uma folheação com um número mínimo de centros.*

Por exemplo, qualquer folheação sem centros numa superfície fechada e orientável de genus $g > 0$ é uma folheação minimal.

Pelo Teorema da Esfera de Reeb [63], uma n -variedade conexa e orientável M^n que admita uma folheação singular tendo somente centros é homeomorfa à esfera S^n e a folheação tem exatamente duas singularidades. Assim, para o caso $n = 2$, a folheação minimal em $\Sigma(0, 0)$ é $\mathcal{G}_c$. Denotaremos o grafo associado a $\mathcal{G}_c$ por G e chamamos a G de **grafo gerador**. Observe que G é um grafo que possui uma aresta e dois vértices.

Sejam $\Sigma_i(g_i, 0)$, $i = 1, 2$, duas superfícies fechadas e orientáveis e $\mathcal{F}_i$ a folheação sobre cada uma delas. Considere a soma conexa de $\Sigma_1(g_1, 0)$ e $\Sigma_2(g_2, 0)$ feita através de dois

discos D_i como é usual. Através da soma conexa podemos definir uma folheação $\mathcal{F}$ como segue.

Definição 3.1.3. *Sejam ∂D_i , $i = 1, 2$, uma folha da bacia de centros e $\mathcal{G}_i$ a restrição de $\mathcal{F}_i$ a $\Sigma_i(g_i, 0) \setminus \mathring{D}_i$, $i = 1, 2$. Então as folhas da nova folheação $\mathcal{F}$ obtida a partir da união de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ consiste da união das folhas de $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.*

Denotamos por $\mathcal{F}_1 \sqcup_{c_1, c_2} \mathcal{F}_2$ a união das folheações $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, onde c_1, c_2 são os centros envolvidos.

A união de folheações pode ser facilmente generalizada à união com um número finito e arbitrário de pares de centros. De fato, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.4. *A união de um número finito de folheações $\mathcal{MB}$ é uma folheação $\mathcal{MB}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ a união de duas folheações $\mathcal{MB}$ e $\Theta(\mathcal{F})$ o grafo associado a $\mathcal{F}$. Se $\Theta(\mathcal{F})$ é isomorfo ao grafo gerador G , então a folheação $\mathcal{MB}$ associada a G é a folheação minimal na esfera $\Sigma(0, 0)$ dada pela união de duas bacias de pontos de centros. Portanto, $\mathcal{F}$ deve ser topologicamente equivalente à folheação minimal a qual é uma folheação $\mathcal{MB}$.

Caso contrário, como a união de duas folheações possui as singularidades de ambas folheações, então $\Theta(\mathcal{F})$ será um conjunto de vértices e arestas. Em particular, os vértices estão associados a pontos de centro e sela. Logo, existe uma função suave $f : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ sobre uma superfície fechada $\Sigma(g, 0)$ que realiza $\Theta(\mathcal{F})$ como o grafo de Reeb de f . Mais ainda, essa função pode ser considerada como a função altura. Para mais detalhes sobre estas duas afirmações veja [47]. Então $\mathcal{F}$ será uma folheação $\mathcal{MB}$. Fazendo indução sobre o número de folheações $\mathcal{MB}$ obtemos a prova da proposição. $\square$

O próximo teorema caracteriza os grafos realizáveis usando o grafo gerador G e duas transformações aplicadas a G .

Teorema 3.1.5. *O grafo abstrato que se obtém aplicando uma das transformações definidas a seguir ao grafo $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ de uma folheação $\mathcal{MB}$, é o grafo de uma folheação $\mathcal{MB}$.*

Transformação I: *Substituir um ponto no interior de uma n -aresta por um vértice v de grau três com uma aresta distinguida e conectada a um vértice final. A soma das distinções das três arestas adjacentes a v deve de ser $n + 1$.*

Figura 3.1: A Transformação I aplicada a uma n -aresta no grafo $\Theta_\xi(\mathcal{F})$, $n_1 + n_2 + n' = n + 1$.

Transformação II: Conectamos dois vértices finais de um grafo (ver Figura 3.2 (b)) ou de um par de grafos (ver Figura 3.2 (a)), eliminando os vértices finais. A distinção da nova aresta é a soma das distinções das arestas conectadas.

Antes de dar início à prova do teorema vejamos a interpretação geométrica das transformações I e II definidas anteriormente.

Sabemos que o grafo $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ associado a uma folheação $\mathcal{MB}$ tem n -arestas, onde n é a distinção da aresta e este depende dos vértices aos quais estas arestas são incidentes. Na Transformação I, adicionamos ao interior de uma n -aresta de $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ um novo vértice v associado a um ponto de sela da folheação assim como outro vértice v' que corresponde a um ponto de centro que não estava na n -aresta inicial. Assim temos que v divide a n -aresta inicial em duas novas n_i -arestas, $i = 1, 2$, sendo que a soma destas duas distinções é $n_1 + n_2 = n$. Considere a nova n' -aresta incidente a v e v' . Pelo fato de v' estar associado a um ponto de centro é necessário que $n' = 1$ ou $n' = 2$. Se, $n' = 1$ então a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de v está em uma das n_i -arestas, $i = 1, 2$ e isso implica que irá acrescentar uma distinção a mais a uma das n_i -arestas. Então, segue que a soma das distinções das três arestas adjacentes a v é $n + 1$. Finalmente, se $n' = 2$, então a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de v se encontra na n' -aresta e, analogamente, a soma das distinções das três arestas adjacentes a v é $n + 1$ (ver Figura 3.1).

Na Transformação II, eliminamos dois pontos de centros e suas respectivas bacias. Dado que as arestas que incidem a cada um dos vértices associados a estes pontos de

centros são n -arestas, temos que ao aplicar a Transformação II obtemos uma nova aresta que tem como distinção a soma das distinções iniciais das n -arestas (ver Figura 3.2).

Figura 3.2: A Transformação II.

Agora vejamos a prova do Teorema 3.1.5.

Demonstração. Seja $\mathcal{F}'$ uma folheação $\mathcal{MB}$ em $\Sigma(g, 0)$ e Θ'_ξ o grafo associado a $\mathcal{F}'$. Vamos provar que a nova folheação obtida ao aplicarmos uma das transformações acima mencionadas a Θ'_ξ é $\mathcal{MB}$.

Começamos com a transformação *I*. Considere um círculo regular s e assumimos inicialmente que s é representado por um ponto sobre uma aresta final. Então

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \sqcup_{s, J} \mathcal{G}_c.$$

Se s não está em uma aresta final, então consideramos s^1 e s^2 curvas no bordo de $\Sigma(g, 2)$ obtidas ao eliminar o interior de uma vizinhança regular de s . Finalmente, seja $\mathcal{F}'_1$ a

folheação em $\Sigma(g, 2)$. Então

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}_{s^1, s^2}(\mathcal{F}'_1) \bigsqcup_{s^i, J} \mathcal{G}_s,$$

onde J é uma curva regular no bordo na vizinhança do ponto de sela. Observe que J pode ser do tipo J_s ou $J_{\mathfrak{B}}$ e o tipo determina as etiquetas sobre as arestas do novo grafo.

A transformação II é a união de duas folheações $\mathcal{MB}$ ou a união de uma folheação $\mathcal{MB}$ e $\mathcal{G}_c$. $\square$

A afirmação inversa do Teorema 3.1.5 também é válida. O teorema a seguir fornece condição necessária para que uma folheação em uma superfície fechada e orientável seja $\mathcal{MB}$.

Teorema 3.1.6. *Toda folheação $\mathcal{MB}$ numa superfície fechada e orientável $\Sigma(g, 0)$ se obtém aplicando uma sequência finita de transformações do tipo I e II a G .*

Demonstração. A prova é feita por indução sobre o número de pontos de sela de $\mathcal{F}$.

Caso $n = 0, 1$. Na Tabela 3.1 se encontram todas as folheações $\mathcal{MB}$ com $n \leq 1$ pontos de sela. Essas folheações foram obtidas ao considerar todas as combinações de vértices de grau três e centros e, adicionando o tipo topológico dos oitos a cada vértice de sela.

Caso $n \geq 2$. Vamos supor que o teorema é válido para folheações com n pontos de sela. Então provamos que o teorema é válido para folheações com $n + 1$ pontos de sela.

Considere $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{MB}$ com $n + 1$ selas e $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ seu grafo correspondente. A prova nesta etapa será dividida em casos, pois devemos analisar todos os possíveis tipos de oitos de $\mathcal{F}$. Indicaremos por $\mathcal{Fol}(\Theta_\xi(\mathcal{F}'))$ a folheação associada ao grafo $\Theta_\xi(\mathcal{F}')$ e, por $\mathcal{F}^n$ uma folheação $\mathcal{MB}$ com n selas.

Caso (a): Tipo $\mathfrak{B}(l_0, l_0)$. Vamos supor que $\mathcal{F}^{n+1}$ possui um oito do tipo $\mathfrak{B}(l_0, l_0)$ e J_1, J_2, J_3 como na Definição 2.2.9. Seja $D_{J_{\mathfrak{B}}}$ o disco limitado por $J_3 = J_{\mathfrak{B}}$. Considere a folheação $\mathcal{F}^n$ definida por $\mathcal{P}_{J_{\mathfrak{B}}}(\mathcal{F}^{n+1} \setminus D_{J_{\mathfrak{B}}})$. Então $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(I(\Theta_\xi(\mathcal{F}^n)))$.

Caso (b): Oito do tipo $\mathfrak{B}(l_X, l_0)$ (onde $X = 1, \dots, E(\frac{g}{2})$) ou $\mathfrak{B}(l_0, g - 1, 0)$ se $X = K$. A folheação que se obtém colapsando o disco limitado pela componente de tipo l_0 ao ponto de sela é uma folheação $\mathcal{MB}$ $\mathcal{F}^n$ com n selas. Então $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(I(\Theta_\xi(\mathcal{F}^n)))$.

Caso (c): Tipo $\mathfrak{B}(l_X, l_X, 0)$ onde $X = 1, \dots, E(\frac{g}{2})$. Uma vizinhança regular fechada de um oito deste tipo separa a superfície em três superfícies, $\Sigma_1 = \Sigma(X, 1)$, $\Sigma_2 = \Sigma(g - X, 1)$

Figura 3.3: Folheações $\mathcal{G}_i$, $i = 1, 2$. Figura 3.4: A folheação $\mathcal{F}^n$ é a união das folheações $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

e $\Sigma_3 = \Sigma(0, 1)$. Seja $\mathcal{G}_i$ a folheação obtida pela união da folheação minimal na esfera $\mathcal{G}_c$, e a folheação em Σ_i , $i = 1, 2$ (ver Figura 3.3). Então

$$\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}ol(I(\Theta_\xi(\mathcal{G}_1 \sqcup_{J_1, J_2} \mathcal{G}_2))).$$

Veja as Figuras 3.4 e 3.5.

Caso (d): Tipo $\mathfrak{B}(l_i, l_j, g - (i + j))$, com $i \leq j$. Vamos considerar uma vizinhança regular fechada $\mathfrak{NB}$ de $\mathfrak{B}$. Sabemos que $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é formada pelas superfícies $\Sigma(i, 1)$ limitada por l_i ; $\Sigma(j, 1)$, limitada por l_j e $\Sigma(g - (i + j), 1)$. A restrição de $\mathcal{F}$ a estas superfícies que em seguida são completadas pela união de $\mathcal{G}_c$ a cada uma delas gera uma folheação $\mathcal{MB}$, $\mathcal{G}_i$. Então $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{F}ol(I(\Theta_\xi(\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2))) \sqcup \mathcal{G}_3$. Vale observar que, neste caso, a transformação I é aplicada em uma aresta que não é aresta final de $\Theta_\xi(\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2)$. De fato, ao aplicar a Transformação I a $\Theta_\xi(\mathcal{G}_1 \sqcup \mathcal{G}_2)$, o tipo topológico do oito da sela resultante é $\mathfrak{B}(l_X, l_0)$ com $X = 1, \dots, E \left(\frac{g}{2} \right)$ que não corresponde ao tipo $\mathfrak{B}(l_i, l_j, g - (i + j))$, com $i \leq j$.

Figura 3.5: $I(\Theta_\xi(\mathcal{F}^n))$ e a folheação $\mathcal{F}^{n+1}$.

Caso (e): Se o oito é do tipo $\mathfrak{B}(l_i, l_j, j - i)$ com $i < j$, o método de indução é similar ao *Caso (d)* anterior.

Caso (f): Oito do tipo $\mathfrak{B}(l_n, g_i, g_j)$. A componente do oito de tipo l_n divide a superfície $\Sigma(g, 0)$ em duas componentes $\Sigma(g_i, 1)$, $\Sigma(g_j, 1)$ com folheações $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ respectivamente. Assumamos que a segunda folheação contém a componente do oito de tipo l_K . Sejam $\mathcal{G}_i = \mathcal{P}_{l_n}(\mathcal{F}_i)$, e c_i , $i = 1, 2$ os novos centros. Seja $\mathcal{G}_3$ a folheação em $\Sigma(g_j, 0)$ obtida ao colapsar l_n a um ponto. Então a folheação $\mathcal{G}_2$ é equivalente a $I(\Theta_\xi(\mathcal{G}_3))$. Logo, $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(II(\Theta_\xi(\mathcal{G}_1), I(\Theta_\xi(\mathcal{G}_3))))$. A transformação II se aplica aos centros c_1 , c_2 . Note ainda que o bordo da bacia do centro c_1 é a componente de tipo l_n .

Caso (g): O tipo $\mathfrak{B}(g_i, g_j)$. Se $g_i = 0$, seja $\mathcal{G}$ a folheação obtida ao colapsar o disco fechado limitado pelas componentes do oito a uma das componentes do tipo l_K . Essa folheação tem n pontos de sela e $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(I(\Theta_\xi(\mathcal{G})))$. Se $g_i > 0$, $\Sigma(g, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ consiste de duas componentes conexas, uma superfície com duas curvas no bordo e uma segunda superfície com uma única curva no bordo. Sejam $\mathcal{G}_1$ (respectivamente $\mathcal{G}_2$) as folheações obtidas pela restrição de $\mathcal{F}^{n+1}$ à primeira (respectivamente, à segunda) superfície unindo $\mathcal{G}_c$ às curvas do bordo de cada uma destas superfícies. Então $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(II(II(I(\Theta_\xi(\mathcal{G}_2))), \Theta_\xi(\mathcal{G}_1)), \Theta_\xi(\mathcal{G}_1)))$.

Caso (h): O tipo do oito $\mathfrak{B}$ formado por s_1 , s_2 , $s_1 \cap s_2 = p$ é $\mathfrak{B}(3)$. Neste caso, as curvas J_1 e J_2 são não homotópicas a zero (elas são contratíveis a s_1 e s_2 respectivamente). A curva J_3 também é não homotópica a zero, do contrário, $s_1 \cup s_2$ limitaria um disco e elas seriam homologicamente equivalentes. As arestas adjacentes ao ponto de sela não podem se conectar a um ponto de centro pois neste caso as componentes s_1 , s_2 seriam homotópicas a zero. Portanto, uma sela $\mathfrak{B}'$ é conectada a $\mathfrak{B}$.

A curva de tipo J_3 de $\mathfrak{B}$ se conecta a outra curva J de $\mathfrak{B}'$ através de um cilindro. Seja s um círculo regular desse cilindro, $\Sigma(g, 0) \setminus s \cong \Sigma(g, 2)$. Unimos uma $\mathcal{G}_c$ a cada curva do bordo. Então temos uma nova folheação com dois centros c_1 , c_2 . Colapsando a bacia de um centro a $\mathfrak{B}$ obtemos uma folheação $\mathcal{F}^n$ com n pontos de sela. Neste caso, $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{Fol}(II(I(\Theta_\xi(\mathcal{F}^n))))$.

Se $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ se conectam através de curvas de tipo J_s a redução é análoga, apenas colapsamos a bacia de um centro a uma das componentes de $\mathfrak{B}$.

Vale ressaltar que todas as folheações resultantes, mesmo para o caso $n = 0, 1$, são

únicas pois o invariante Θ_ξ é completo. □

Sem pontos de sela

Um ponto de sela
$I(G)$
$I(II(G))$
$I(II(G))$

Tabela 3.1: Folheação $\mathcal{MB}$ com $n \leq 1$ pontos de sela.

3.2 Folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies orientáveis com duas selas

Bolsinov e Fomenko ([9], Teo. 2.17) apresentaram uma lista contendo todas as folheações geradas pelos conjuntos de nível de uma função de Morse em superfícies fechadas

Figura 3.6: Possibilidades para o grafo $I(I(G))$.

e orientáveis com no máximo duas selas. Nesta seção apresentamos todas as folheações $\mathcal{MB}$ definidas em superfícies fechadas e orientáveis com duas selas. Para alcançar nosso objetivo, usamos as Transformações I e II definidas no Teorema 3.1.6 e os grafos descritos na Tabela 3.1.

Considere a folheação $\mathcal{MB}$ na esfera cujo grafo é $I(G)$, como na Tabela 3.1. Pelo Teorema 3.1.6 sabemos que ao aplicar a Transformação I a $I(G)$ obtemos folheações $\mathcal{MB}$ realizáveis na esfera com seis singularidades, sendo que duas delas são selas e as outras, centros. Para conhecer as folheações $\mathcal{MB}$ não equivalentes na esfera com seis singularidades, sendo que duas delas são selas e as outras singularidades são centros, devemos analisar todas as possibilidades para a aresta do grafo $I(I(G))$ que contém a curva de tipo J_3 da nova sela que surge ao aplicar a Transformação I a $I(G)$. Todas essas possibilidades estão listadas na Figura 3.6.

Considerando os grafos da Figura 3.6 observamos que os grafos (2) e (3) são isomorfos (então salvo isomorfismos consideramos o grafo (2)), o grafo (1') é isomorfo ao grafo (2) e

Figura 3.7: Possibilidades para o grafo $II(I(I(G)))$

o grafo (3') é isomorfo ao grafo (2') embora os grafos (1), (2) e (2') não sejam isomorfos entre si. Finalmente, para grafos da mesma figura verificamos que o grafo (1'') é isomorfo ao grafo (2); (2'') é isomorfo ao grafo (2') e (3'') é isomorfo ao grafo (2''). Portanto, os grafos da Figura 3.6 não isomorfos resultantes ao aplicar a Transformação I a $I(G)$ são (1), (2) e (2'). Em todos os casos, o isomorfismo definido entre dois grafos, como na Figura 3.6, deve levar vértices em vértices e arestas em arestas respeitando as etiquetas em cada uma delas. Pelo Teorema 2.3.7, as folheações associadas a cada um dos grafos obtidos são únicas, salvo homeomorfismos, e todas elas são realizáveis na esfera. De fato, esses grafos correspondem às moléculas de folheações definidas pelos conjuntos de nível de uma função de Morse realizáveis na esfera, apresentadas em [9], Teo. 2.17.

Se consideramos os grafos (1), (2) e (2') da Figura 3.6 e a eles aplicamos a transformação II obtemos folheações $\mathcal{MB}$ no toro. De fato, ao aplicar a transformação II aos grafos (1), (2) e (2') da Figura 3.6 para o caso da esfera, estamos aumentando o genus da esfera em 1.

Todas os possíveis grafos obtidos dos grafos (1), (2) e (2') da Figura 3.6 pela Transformação II estão na Figura 3.7. Nesta figura os grafos (3) e (1) são isomorfos assim como os

grafos (4) e (2). No entanto, os grafos (1) e (2) não são isomorfos. Vale observar também que os grafos (1)', (2)', (3)' e (4)' da Figura 3.7 não são isomorfos entre si, sendo que, tais grafos não são isomorfos aos grafos (1) e (2) da Figura 3.7. Finalmente, os grafos (2)'' e (4)'' e, os grafos (1)'' e (1), da Figura 3.7, são isomorfos. Portanto, os grafos realizáveis como grafos de folheações $\mathcal{MB}$ com duas selas da Figura 3.7 são: (1), (2), (1)', (2)', (3)', (4)', (2)'' e (3)''. Desses grafos o grafo (3)'' é o grafo associado a uma folheação definida pelos conjuntos de nível de uma função de Morse com duas selas a qual é realizável no toro (ver [9], Teo. 2.17), mas os outros grafos não correspondem a grafos associados a este tipo de folheações.

Analogamente, podemos aplicar a transformação II a cada um dos grafos não isomorfos da Figura 3.7. Desta forma os grafos apresentados na Figura 3.8 são grafos de folheações $\mathcal{MB}$ realizáveis no bitoro. Procedendo da mesma maneira, podemos saber quantas folheações $\mathcal{MB}$ no bitoro existem com duas selas verificando quais dos grafos representados na Figura 3.8 são isomorfos. É possível verificar que os grafos (3) e (5), os grafos (4) e (6), e os grafos (1) e (8) da Figura 3.8 são isomorfos. Portanto, as únicas folheações $\mathcal{MB}$ com duas selas no bitoro são aquelas cujos grafos são isomorfos aos grafos (1), (2), (3), (4), e (7) exibidos na Figura 3.8.

Figura 3.8: Possibilidades para o grafo $II(II(I(I(G))))$.

Capítulo 4

Classificação de sistemas Morse-Bott e de funções Morse-Bott simples

4.1 Introdução

A classificação topológica das folheações Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis está intimamente relacionada com a classificação topológica dos sistemas Morse-Bott assim como a classificação via homeomorfismos das funções Morse-Bott definidas em superfícies fechadas e orientáveis. Portanto, este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, Seção 4.2, apresentamos a classificação topológica dos sistemas Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis e na segunda parte, estudamos a classificação topológica das funções Morse-Bott.

4.2 Classificação de sistemas $\mathcal{MB}$ em superfícies orientáveis

Seja $\psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$, o conjunto dos sistemas Morse-Bott (sistemas $\mathcal{MB}$) definidos em superfícies fechadas e orientáveis $\Sigma = \Sigma(g, 0)$ de genus $g \geq 0$. Considere $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ e f uma integral primeira de X . Alguns pontos de equilíbrio de X resultam da integral primeira f , a saber, os pontos do tipo centro (que são os valores extremos de f) e pontos de tipo sela associados às singularidades de índice 1 de f . No entanto, podem existir outros pontos de equilíbrio de X localizados em conjuntos de níveis regulares de f . Nesta seção abordamos

o estudo dos sistemas $\mathcal{MB}$ que possuem um número finito de conjuntos de níveis regulares da integral primeira f com pontos de equilíbrio do sistema. Basicamente tratamos da classificação de tais sistemas usando o invariante definido no Capítulo 2 para a classificação das folheações $\mathcal{MB}$, adicionando a ele o tipo topológico dos conjuntos de nível regulares da integral primeira que possuem pontos de equilíbrio do sistema (ver Definição 4.2.4) e provamos que este novo invariante é completo (ver Teorema 4.2.5).

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular de codimensão um em uma superfície Σ . A decomposição das folhas de $\mathcal{F}$ em Σ em pontos, linhas orientadas e círculos orientados gera um fluxo em Σ . As trajetórias do fluxo definem uma partição das folhas da folheação. Dessa maneira um invariante para a folheação será também um invariante para o fluxo. Em particular, o invariante para as folheações $\mathcal{MB}$, $\Theta_\xi(\mathcal{F})$, definido no capítulo anterior, é um invariante para os sistemas Morse-Bott ($\mathcal{MB}$). No caso em que os únicos pontos de equilíbrio do sistema são as singularidades da folheação então o invariante da folheação é um invariante topológico completo para a classificação dos sistemas $\mathcal{MB}$ definidos em superfícies orientáveis. Observemos também que um oito $\mathfrak{B}$, em uma folheação $\mathcal{MB}$ está formado por três soluções do sistema: o ponto de equilíbrio p e suas duas separatrizes, s_1, s_2 . Assim, o fecho destas separatrizes, $\bar{s}_1, \bar{s}_2$ correspondem as componentes $s_i, i = 1, 2$, em $\mathfrak{B}$.

Antes de enunciar o principal resultado nesta seção, apresentamos algumas definições.

Definição 4.2.1. *Seja $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$. Uma curva singular de X é uma folha regular da folheação $\mathcal{MB}$ associada a X , formada por pontos de equilíbrio de X .*

Definição 4.2.2. *Seja γ uma curva singular fechada de X e N_γ uma vizinhança regular fechada de γ . Então diremos que γ é uma curva equatorial, ou e-curva, se as órbitas periódicas de X , em uma componente conexa de $N_\gamma \setminus \gamma$, têm sentido de rotação diferente às órbitas periódicas na outra componente conexa. Caso contrário, γ é uma curva não equatorial, ou ne-curva (veja Figura 4.1).*

Definição 4.2.3 (Grafo de um sistema $\mathcal{MB}$). *Seja $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$. O grafo $\Theta(X)$ associado a X é o grafo obtido da folheação Morse-Bott, $\Theta(\mathcal{F})$, quando adicionamos um vértice para cada curva singular fechada de X .*

Figura 4.1: Cada oval representa um conjunto de singularidades e o comportamento local numa vizinhança delas.

Definição 4.2.4. *O invariante topológico para os sistemas $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ é a tripla $(\Theta(X), \xi, \mu)$, onde a função ξ foi definida anteriormente e a função μ associa a cada curva singular fechada de X o seu tipo (e-curva ou ne-curva). Denotamos este invariante por $\Theta_{\xi, \mu}(X)$.*

No seguinte teorema provamos que dois sistemas X, Y em $\psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, os grafos $\Theta_{\xi, \mu}(X)$ e $\Theta_{\xi, \mu}(Y)$ são isomorfos.

Teorema 4.2.5. *$\Theta_{\xi, \mu}(X)$ é um invariante completo para sistemas $\psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$.*

Demonstração. É fácil verificar que se dois sistemas X, Y em $\psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ são topologicamente equivalentes, então os grafos $\Theta_{\xi, \mu}(X)$ e $\Theta_{\xi, \mu}(Y)$ são isomorfos.

Suponhamos que os grafos $\Theta_{\xi, \mu}(X)$ e $\Theta_{\xi, \mu}(Y)$ são isomorfos. Então o isomorfismo que existe entre os grafos $\Theta_{\xi, \mu}(X)$ e $\Theta_{\xi, \mu}(Y)$, induz um isomorfismo entre os grafos das folheações $\mathcal{MB}$ geradas pelos conjuntos de nível das integrais primeiras de X e Y , respectivamente. Logo, pelo Teorema 2.3.7, obtemos que essas folheações são topologicamente equivalentes. Como as folhas destas folheações são invariantes pelos sistemas, devemos

verificar que independentemente da escolha do sentido das trajetórias os sistemas $\mathcal{MB}$ obtidos serão topologicamente equivalentes.

De fato, dada uma órbita γ de $X \in \psi_{\mathcal{MB}}(\Sigma)$ e conhecendo $\Theta_{\xi,\mu}(X)$, o sentido de γ determina o sentido de todas as demais órbitas. Portanto, existem no máximo dois sistemas diferentes com o mesmo invariante: X e $-X$, sendo que $-X$ contém os mesmos pontos de equilíbrio de X , no entanto, suas órbitas têm sentido oposto às órbitas de X . No entanto, no caso de sistemas $\mathcal{MB}$, provaremos que esses dois sistemas são topologicamente equivalentes.

Desde que os grafos $\Theta_{\xi,\mu}(X)$ e $\Theta_{\xi,\mu}(Y)$ são uma retração de contorno da superfície, cada homeomorfismo h entre superfícies gera um homeomorfismo h_G entre seus grafos imersos. Seja x um ponto do grafo associado a um conjunto de nível regular l . Sobre este conjunto de nível temos $h(x, \alpha) = (h_G(x), \phi_x(\alpha))$, onde $\alpha \in l$ indica o argumento (ângulo) ou coordenada na circunferência l em X , $h_G(x)$ é um ponto no grafo associado a um conjunto de nível regular l' em $-X$ e $\phi_x(\alpha)$ é o argumento (ângulo) ou coordenada na circunferência l' em $-X$. Esta aplicação não está definida sobre as curvas singulares, no entanto, por continuidade, a definição de h sobre as curvas regulares é suficiente para determinar o homeomorfismo h em todos os pontos da superfície.

Para finalizar a prova, se h é o homeomorfismo que conjuga ambos sistemas e preserva o sentido das órbitas, em coordenadas apropriadas, h é a identidade. Se o sentido das órbitas não é preservado, substituímos h por $h^*(x, \alpha) = (x, -\alpha)$. $\square$

- Observação 4.2.6.** 1. *Um grafo abstrato G está associado a um sistema $\mathcal{MB}$ se, e somente se, satisfaz as condições do Teorema 3.1.5. De fato, se G satisfaz as condições do Teorema 3.1.5 então existe um folheação $\mathcal{MB}$ a ele associada, adotando um sentido para uma das folhas desta folheação ele se estenderá a todas as demais folhas determinando um sistema $\mathcal{MB}$. Reciprocamente, dado um sistema $\mathcal{MB}$ o grafo associado a folheação definida pela integral primeira do sistema satisfaz as condições do Teorema 3.1.5 e, portanto, temos a caracterização desejada.*
2. *Uma estimativa para o número mínimo de sistemas integráveis $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e orientáveis é obtida através do número de grafos cúbicos ([12]). De fato, dado um sistema $\mathcal{MB}$ X existe um sistema $\mathcal{MB}$ Y sem centros associado a X , de*

modo que aplicando a Transformação I ao invariante $\Theta_{\xi,\eta}(Y)$ obtemos $\Theta_{\xi,\eta}(X)$. O invariante $\Theta_{\xi,\eta}(Y)$ é um grafo cúbico e uma estimativa para o número de grafos cúbicos em superfícies fechadas e orientáveis é dada por [12].

4.3 Equivalência de funções $\mathcal{MB}$

A caracterização de um conjunto de funções, que verifica uma dada propriedade envolve dois aspectos importantes. O primeiro aspecto consiste em obter um invariante para essa classe particular de funções, e o segundo, determinar como esse conjunto está distribuído no espaço de todas as funções suaves.

Com relação ao primeiro aspecto, vale mencionar a classificação dos pontos singulares de germes de aplicações suaves que é um problema importante dentro de Teoria de Singularidades. No entanto, resultados globais são raros nessa linha. Na literatura encontramos diversos trabalhos voltados para a classificação de funções em superfícies sob diferentes relações de equivalência, como por exemplo, equivalências suaves (ver [6, 7]) e a equivalência topológica (ver [37, 71, 72]).

Em particular, Arnold [3], Kulinich [37] e Sharko [72] classificaram as funções de Morse em superfícies usando o grafo de Reeb com alguma informação adicional e Prishyak [62] classificou funções suaves com pontos críticos isolados em superfícies fechadas.

Nesta seção apresentamos a classificação topológica das funções Morse-Bott em superfícies fechadas e orientáveis. Para obter essa classificação definimos um invariante usando o grafo de Reeb e o tipo topológico dos conjuntos de nível singulares da função. Essa informação adicional, até onde sabemos, não foi usada anteriormente. Em particular, mostramos como o tipo topológico dos conjuntos de nível singulares de uma função f , se relaciona com a ordem dos vértices do grafo de Reeb de f . Tal ordem é induzida pelos valores de f (ver Seção 4.4, Proposições 4.4.1 e 4.4.2).

Se f é uma função Morse-Bott e $\mathcal{R}^\eta(f)$ é o grafo de Reeb ordenado associado a f então os dois principais resultados deste capítulo são o teorema da completude (ver Teorema 4.4.4) e o teorema da realização (ver Teorema 4.5.4).

Ressaltamos ainda, que a classificação de funções se relaciona com algumas questões topológicas como Teoria de Homologia e ao mesmo tempo com problemas relacionados a

áreas diferentes da topologia, da mesma forma as funções Morse-Bott e as funções de Morse estão relacionadas com outros conceitos tais como polinômios, fluxos e reconhecimento gráfico por computador. Veja por exemplo [3, 43, 55, 60].

Sejam $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções suaves e M^n uma variedade compacta (orientável ou não orientável) n -dimensional. Uma pergunta natural que surge é quando essas duas funções são equivalentes.

Para o caso particular em que f e g são funções de Morse definidas em superfícies, temos uma maneira usual de estudar a equivalência entre elas. A ideia é considerar as folheações definidas pelos conjuntos de nível de f e g , respectivamente. Então a classificação das funções de Morse em superfícies compactas (orientáveis ou não orientáveis) se resolve estudando inicialmente a estrutura topológica local das fibras singulares para então considerar o estudo global. Essa classificação é conhecida como *classificação das fibras por equivalência* (ver para mais detalhes em [9], Teo 2.5). Mas também é possível refinar essa classificação da seguinte maneira: Duas funções de Morse $f, g : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ em uma superfície compacta $\Sigma(g, 0)$ são **equivalentes** se existem difeomorfismos $k : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$, e $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $g \circ k = l \circ f$ e l preserva orientação. A diferença que existe entre a classificação dada através da equivalência por fibras e a classificação dada pela definição acima (também conhecida como equivalência topológica) é que o número de classes de funções de Morse obtidas por equivalência topológica é maior do que o número de classes obtidas com a equivalência por fibras (ver [9], Teo. 2.6).

Sejam $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável de genus g e $f_1, f_2 : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, funções suaves com um número finito de pontos singulares, portanto, isolados.

Definição 4.3.1. Dizemos que f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes se existem homeomorfismos $k : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$ e $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $f_2 \circ k = l \circ f_1$.

A escolha dos homeomorfismos k e l não é única. Mais ainda, se f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes, então o homeomorfismo k envia conjuntos de nível de f_1 nos conjuntos de nível de f_2 , uma vez que a seguinte igualdade é satisfeita: $I_{l(a)}(f_2) = k(I_a(f_1))$. De fato, por definição temos que

$$I_{l(a)}(f_2) = \{q \in \Sigma(g, 0) : f_2(q) = l(a)\}; \quad \text{e} \quad (4.1)$$

$$k(I_a(f_1)) = \{k(p) \in \Sigma(g, 0) : \text{para algum } p \in I_a(f_1)\}. \quad (4.2)$$

Assim, se $q \in I_{l(a)}(f_2)$ então $q \in \Sigma(g, 0)$ e $f_2(q) = l(a)$. Dado que f_1 e f_2 são topologicamente equivalentes, a existência do homeomorfismo $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ garante a igualdade, $l(f_1(k^{-1}(q))) = l(a)$. Por outro lado, l é uma função injetora. Logo, $f_1(k^{-1}(q)) = a$ e $k^{-1}(q) \in I_a(f_1)$.

Considere $p = k^{-1}(q)$. Dado que k é um homeomorfismo temos $q = k(p)$. Como $f_1(p) = f_1(k^{-1}(q)) = a$, segue que $q \in k(I_a(f_1))$. Então se verifica que $I_{l(a)}(f_2) \subset k(I_a(f_1))$. Analogamente, $k(I_a(f_1)) \subset I_{l(a)}(f_2)$ e, portanto, a igualdade $I_{l(a)}(f_2) = k(I_a(f_1))$ é válida.

Nas mesmas condições acima, apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.3.2. *Duas funções f_1 e f_2 são topologicamente conjugadas se são topologicamente equivalentes e o homeomorfismo l preserva orientação.*

Para mais detalhes sobre a definição de equivalência topológica e conjugação de funções suaves veja [62, 71, 72, 73], por exemplo.

Observemos que se f_1 e f_2 são topologicamente conjugadas então f_1 e $-f_2$ não são necessariamente topologicamente conjugadas. Em Teoria das Singularidades, uma equivalência distinta da empregada nesta seção é empregada na qual as funções l e k na definição anterior são difeomorfismos.

Nosso objetivo é apresentar uma classificação das funções $\mathcal{MB}$ simples em superfícies fechadas e orientáveis via equivalência topológica sendo que para essas funções temos um número finito de subvariedades singulares não degeneradas, todas elas isoladas. No entanto, para alcançar nosso objetivo devemos adaptar a definição de equivalência topológica para funções $\mathcal{MB}$ simples, uma vez que o homeomorfismo $k : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$ pode não preservar os círculos singulares. Em outras palavras, o homeomorfismo k pode enviar um círculo singular e sua correspondente vizinhança, na vizinhança de uma circunferência regular onde nenhuma das curvas fechadas nessa vizinhança seja um círculo singular. Com esta observação apresentamos uma nova definição.

Definição 4.3.3. *Duas funções $\mathcal{MB}$ f_1 e $f_2 : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são conjugadas se existem homeomorfismos $k : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$, $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que l preserva orientação e $f_2 \circ k = l \circ f_1$, e ainda, k envia fibras singulares de f_1 em fibras singulares de f_2 .*

A prova da seguinte proposição segue da definição de funções $\mathcal{MB}$ conjugadas e do fato dessas funções serem simples.

Proposição 4.3.4. *Sejam f_1, f_2 funções $\mathcal{MB}$ simples e conjugadas tal que $f_2 \circ k = l \circ f_1$. Então os conjuntos $s_a(f_1)$ e $s_{l(a)}(f_2)$ são homeomorfos.*

Um **valor singular essencial** de uma função $\mathcal{MB}$ é um valor $a \in \mathbb{R}$ tal que $I_a(f)$ é topologicamente distinto de $I_b(f)$, para todo b numa vizinhança de a . Em particular, os valores singulares de funções de Morse são essenciais.

A seguir, apresentamos a definição de *fatiamiento de uma função* que será muito útil neste capítulo. Para mais detalhes sobre este conceito veja [54, 55]).

Definição 4.3.5. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com n singularidades isoladas e M^n uma variedade compacta e orientável de dimensão n . Um fatiamento de f é uma sequência crescente de números reais*

$$-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = \infty$$

tal que, para todo $i = 1, \dots, n$, os intervalos (a_{i-1}, a_i) , contém exatamente um valor singular de f .

Em [55], os autores adotam a seguinte equivalência para funções de Morse, duas funções de Morse $f_1, f_2 : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ em uma superfície fechada e orientável $\Sigma(g, 0)$ são topologicamente equivalentes, se existe um fatiamento de f_1 , $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = \infty$; um fatiamento de f_2 , $-\infty = b_0 < b_1 < \cdots < b_n = \infty$ e homeomorfismos

$$\Phi_i : M_{a_i}(f_1) \rightarrow M_{b_i}(f_2), \quad i = 1, \dots, n,$$

preservando orientação, onde $M_c(f_j) = \{p \in \Sigma(g) : f_j(p) \leq c\}$, $j = 1, 2$ (ver [48]).

Observe que se f_1, f_2 são funções $\mathcal{MB}$ conjugadas, a existência dos homeomorfismos $k : \Sigma(g, 0) \rightarrow \Sigma(g, 0)$ e $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que k envia fibras singulares de f_1 nas fibras singulares de f_2 garante a existência de homeomorfismos Φ_i , $i = 1, \dots, n$, como definidos acima. De fato, para cada $j = 1, 2$ e $c \in \mathbb{R}$, o conjunto $M_c(f_j)$ é a união de conjuntos de nível de f_1 e f_2 respectivamente, e k induz uma bijeção entre estes conjuntos.

4.4 Invariante para a classificação topológica das funções $\mathcal{MB}$

O objetivo principal nesta seção é construir um invariante topológico para classificar funções $\mathcal{MB}$ simples em superfícies fechadas e orientáveis. Para alcançar esse objetivo usaremos o grafo de Reeb e a classificação das fibras singulares das funções $\mathcal{MB}$ que neste caso são curvas fechadas e oitos. A classificação das fibras singulares foi apresentada no Capítulo 2, onde também provamos que o tipo topológico das fibras singulares pode ser obtido a partir de uma ordenação dos vértices do grafo de Reeb.

Seja f uma função $\mathcal{MB}$ e $\nu > 0$ o número de valores críticos de f . Considere também $\mathcal{R}_f$ o grafo de Reeb de f . Seja η a função que associa a cada vértice de $\mathcal{R}_f$ um número natural entre 1 e $\nu > 0$ seguindo a ordem induzida pelo fatiamento de f . De agora em diante, denotamos por $\mathcal{R}^\eta(f)$ ao par $(\mathcal{R}_f, \eta)$, em outras palavras, $\mathcal{R}^\eta(f)$ é o **grafo de Reeb ordenado**.

Lembremos que dado o grafo de Reeb de f , definimos a função ξ a qual é a função que associa a cada vértice do tipo sela do grafo de Reeb de f a aresta que contém a componente de tipo $J_{\mathfrak{B}}$. Na Proposição 2.3.5 provamos que ξ determina o tipo topológico dos oitos. As seguintes proposições estabelecem a relação existente entre as funções η e ξ .

Proposição 4.4.1. *Dada uma função $\mathcal{MB}$ f , η determina a função ξ sobre o grafo de Reeb de f , $\mathcal{R}_f$.*

Demonstração. A ideia da prova consiste em verificar que dada uma orientação sobre o grafo de Reeb de f determinada por η , então é possível determinar a aresta do grafo de Reeb de f que contém a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ adjacente a um vértice de tipo sela.

Vamos supor que f possui pelo menos um ponto de sela s . Assim, esta singularidade corresponde a um vértice sela, digamos v_s , no grafo de Reeb de f . Associado a s , existe um intervalo (a_i, a_{i+1}) no fatiamento de f tal que $s \in (a_i, a_{i+1})$ é a singularidade de f em (a_i, a_{i+1}) e s divide o intervalo (a_i, a_{i+1}) em duas componentes. Cada ponto de uma aresta adjacente a v_s , e próximo de v_s , está associado um valor real no intervalo (a_i, a_{i+1}) . Portanto, dados p_1, p_2 e p_3 pontos, um em cada uma das arestas adjacentes a v_s , dois deles tem associados números reais na mesma componente do intervalo (a_i, a_{i+1}) . A outra componente de (a_i, a_{i+1}) corresponde a aresta adjacente a v_s que contém a curva de tipo

$J_{\mathfrak{B}}$.

Se f possui mais de um ponto de sela, então podemos usar o mesmo processo acima com todos os vértices sela do grafo de Reeb de f uma vez que η está bem definida. $\square$

Os valores de uma função $\mathcal{MB}$ nos vértices do grafo de Reeb associado a essa função, fazem com que o grafo de Reeb seja um grafo dirigido.

Proposição 4.4.2. *Seja Γ um subgrafo conexo do grafo de Reeb associado a uma função $\mathcal{MB}$ f tendo unicamente vértices de selas. Então a função ξ e a direção de uma aresta de Γ determinam a direção em todo o grafo Γ . Em outras palavras, a função ξ determina uma ordem linear dos vértices de Γ que coincide com a ordem definida por η ou com a ordem oposta, dependendo da escolha da direção de uma das aresta de Γ .*

Demonstração. Dado um vértice de sela s , a função ξ distingue qual é a aresta incidente a s que contém curvas de tipo $J_{\mathfrak{B}}$. Então a função ξ e a direção de uma aresta adjacente a s determina a direção sobre as outras duas arestas adjacentes a s . Se Γ é um subgrafo tendo unicamente vértices de sela, então escolhendo uma das duas possíveis direções para uma das arestas de Γ e fixando a função ξ , obtemos um subgrafo orientado o qual tem a mesma direção (ordem) definida por η ou a direção oposta, dependendo da direção escolhida para a aresta incidente a s . Com isto, se conclui a prova da proposição. $\square$

Observemos que o grafo Γ na proposição anterior não possui vértices associados a máximos e mínimos e a círculos singulares, em outras palavras, o grafo não possui vértices finais e nem vértices de grau 2. De fato, não podemos comparar estes vértices a menos que saibamos os valores que a função assume em cada uma das fibras singulares a eles associadas. Portanto, se Γ tem vértices de grau 1, 2 e 3 somente é possível definir uma ordem parcial e não linear sobre o grafo.

Definição 4.4.3. *Diremos que $\mathcal{R}^\eta(f)$ e $\mathcal{R}^\eta(g)$ são isomorfos se $\mathcal{R}_f$ e $\mathcal{R}_g$ são isomorfos e as atribuições da função η se preservam.*

A seguir, o principal resultado nesta seção.

Teorema 4.4.4 (Teorema da Completude). *Duas funções $\mathcal{MB}$ simples $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ são conjugadas se, e somente se, $\mathcal{R}^\eta(f)$ e $\mathcal{R}^\eta(g)$ são isomorfos.*

Demonstração. (Necessidade) Sejam f e g funções $\mathcal{MB}$ simples e conjugadas. Considere $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ um fatiamento de f e $b_0 < b_1 < \dots < b_n$ um fatiamento de g . Então existem homeomorfismos $\Phi_i : M_{a_i}(f) \rightarrow M_{b_i}(g)$, $i = 1, \dots, n$. Além disso, como existe homeomorfismo k que preserva as fibras singulares e homeomorfismo l (definido no contradomínio das funções) que preserva orientação concluímos que os homeomorfismos Φ_i , $i = 1, \dots, n$ preservam a ordem induzida pelo fatiamento de f , logo os grafos $\mathcal{R}^\eta(f)$ e $\mathcal{R}^\eta(g)$ são isomorfos.

(Suficiência) Vamos supor que f e g são funções $\mathcal{MB}$ simples e que os grafos $\mathcal{R}^\eta(f)$ e $\mathcal{R}^\eta(g)$ são isomorfos. Então, sob essas condições, vamos provar que f e g são conjugadas.

As funções f e g induzem folheações $\mathcal{MB}$, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ respectivamente em Σ . O isomorfismo ψ que existe entre os grafos $\mathcal{R}^\eta(f)$ e $\mathcal{R}^\eta(g)$ determina um isomorfismo entre os grafos das folheações, $\Theta_\xi(\mathcal{F})(f)$ e $\Theta_\xi(\mathcal{F})(g)$. De fato, pela Proposição 4.4.1 sabemos que η determina a função ξ e, como o isomorfismo ψ preserva a orientação de η concluímos que necessariamente a função ξ se preserva.

Então, dado que $\Theta_\xi(\mathcal{F})(f)$ e $\Theta_\xi(\mathcal{F})(g)$ são isomorfos, segue-se do Teorema 2.3.7 que existe um homeomorfismo k de Σ em Σ que define a equivalência entre as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$. Como os círculos singulares de f e g respectivamente são redutíveis, podemos escolher k de tal forma que k envie círculos singulares de f que estão na folheação $\mathcal{F}(f)$ em círculos singulares de g que pertencem à folheação $\mathcal{F}(g)$.

A funções $f \circ k^{-1}$ e f são conjugadas uma vez que podemos considerar o homeomorfismo k que preserva as fibras singulares de $f \circ k^{-1}$ e f e o homeomorfismo l (definido no contradomínio das funções) como sendo a identidade. Logo, l preserva orientação e ainda $f \circ l = (f \circ k^{-1}) \circ k$. Desta forma, a folheação definida por $f \circ k^{-1}$ e a folheação definida por f são topologicamente equivalentes e estas por sua vez, é topologicamente equivalente à folheação definida por g . O gráfico da função $f \circ k^{-1}$ se projeta homeomorficamente sobre o gráfico de g . Portanto, $f \circ k^{-1}$ e g são conjugadas e, por transitividade, f e g são conjugadas. Com isto concluímos a prova do teorema. $\square$

A seguir apresentamos dois exemplos. No primeiro exemplo temos duas funções $\mathcal{MB}$ que não são conjugadas e, no segundo exemplo, que prova que o grafo de Reeb não é suficiente para classificar as funções $\mathcal{MB}$ simples.

Figura 4.2: A montanha de pico gêmeo Elbrouz.

Exemplo 4.4.5. Seja $\Sigma = S^2$, mergulhada em $\mathbb{R}^3$, a esfera unitária. Considere as funções $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$ e $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = -z^2$.

As funções f e g são funções $\mathcal{MB}$. De fato, as subvariedades críticas não degeneradas de f são dois pontos críticos, o polo norte e o polo sul e, as subvariedades críticas não degeneradas de g são dois pontos críticos (o polo norte e o polo sul) e a linha do equador, $z = 0$. Como estas funções não possuem o mesmo número de subvariedades críticas, seus grafos não são isomorfos.

Exemplo 4.4.6. Em [3], Arnold apresenta dois exemplos de funções de Morse com o mesmo grafo de Reeb, no qual uma certa ordenação dos vértices impede que as funções sejam conjugadas. Para ambos exemplos a função de Morse que se considera é a função altura f . No primeiro exemplo Arnold estuda a montanha de pico gêmeo Elbrouz e no segundo exemplo, a montanha vulcânica Vesuvius. Veja as Figuras 4.2, 4.3 com seus respectivos grafos de Reeb. Observe que os grafos, neste caso, são isomorfos mas as funções não são conjugadas porque as ordenações induzidas pelos valores singulares da função altura f , em cada caso, são diferentes. Para o primeiro grafo temos que

$$f(D) = 1, f(C) = 2, f(B) = 3, f(A) = 4$$

e, para o segundo grafo

$$f(D) = 1, f(B) = 2, f(C) = 3, f(A) = 4.$$

Veja outros detalhes em [3].

Figura 4.3: A montanha vulcânica Vesuvius.

4.5 O Teorema da realização

Em [73], Sharko estudou os grafos de Reeb (ou grafos *Kronrod-Reeb*) de funções suaves em variedades de dimensão maior ou igual a dois com um número finito de pontos críticos e deu condições necessárias e suficientes para que um grafo finito seja realizável como o grafo de Reeb destas funções. Mais ainda, Sharko exhibe exemplo de grafo finito com dois vértices de grau 1 que não pode ser realizável como o grafo de Reeb de nenhuma função suave.

Em [47], Masumoto e Saeki provaram o seguinte.

Teorema 4.5.1. *Seja G um grafo finito sem laços. Então, existe uma função suave $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma superfície fechada Π com um número finito de valores críticos tal que o seu grafo de Reeb $\mathcal{R}_f$ é isomorfo a G .*

Mais ainda, Masumoto e Saeki também demonstram que a função que satisfaz as condições do Teorema 4.5.1 é a função altura em uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$, quando G não tem vértices isolados ou não contém laços.

Nesta seção damos condições suficientes e necessárias para que um grafo conexo, dirigido e finito G esteja associado a uma função $\mathcal{MB}$ definida em uma superfície fechada e orientável.

Lembremos que se K é um grafo finito e $\mathbf{c}$ é um ciclo em K então a longitude de $\mathbf{c}$ é o número de vértices de $\mathbf{c}$.

Definição 4.5.2 ([23]). *Seja f uma função de Morse. Dizemos que o grafo de Reeb de f , $\mathcal{R}_f$, é canônico se:*

- (a) $\mathcal{R}_f$ tem exatamente um vértice associado a um mínimo de f e um vértice associado a um máximo de f .
- (b) se existe algum ciclo em $\mathcal{R}_f$, então tem longitude dois.

Definição 4.5.3. Um grafo caminho ou um grafo linear é um grafo simples e conexo que contém apenas vértices de grau 1 e 2.

Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável de genus $g \geq 0$ e f uma função $\mathcal{MB}$ simples em $\Sigma(g, 0)$. Então, o grafo de Reeb associado a f , $\mathcal{R}_f$, é um grafo conexo, finito com etiquetas nos vértices. De fato, como $\Sigma(g, 0)$ é uma superfície compacta e f é simples, segue que $\mathcal{R}_f$ terá um número finito de vértices e arestas. Os vértices de $\mathcal{R}_f$ são associados às singularidades de f . Cada vértice de grau 1 é associado a vizinhança de um valor de máximo ou mínimo de f . Os vértices de grau 2 estão associados às vizinhanças de círculos singulares, isto é, cilindros preenchidos por conjuntos de níveis regulares de f . Finalmente, um vértice de grau 3 que não é um vértice final está associado às vizinhanças de pontos de sela. Assuma que cada aresta do grafo tem uma f -orientação dada pelo sentido de crescimento de f . Então cada vértice de um ponto de sela tem uma (respectivamente, duas) aresta (arestas) entrando e duas (respectivamente, uma) arestas (aresta) saindo do vértice. Um vértice associado a um círculo singular tem duas arestas entrando ou saindo do vértice.

O principal resultado nesta seção é o seguinte.

Teorema 4.5.4. Seja $\Sigma(g, 0)$ uma superfície fechada e orientável. Um grafo dirigido, conexo e finito G é o grafo de Reeb associado a uma função $\mathcal{MB}$ simples $f : \Sigma(g, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ em $\Sigma(g, 0)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) **Condições Locais:** os vértices poço e fonte de G têm grau 1 ou 2; os vértices interiores têm grau 3.
- (b) **Condições Globais:**
 - (b.1) o ciclo rank de G coincide com o genus de Σ .
 - (b.2) a direção do grafo define uma ordem linear no conjunto dos vértices.

(c) **Condições para a orientabilidade:** G não possui laços e nem ciclos orientados.

Segue do Teorema 4.5.1 que qualquer grafo que satisfaça as condições (b) e (c) do Teorema 4.5.4 pode ser realizável como o grafo de Reeb de uma função suave com um número finito de valores críticos em uma superfície compacta e sem bordo.

A prova do Teorema 4.5.1 é construtiva. Masumoto e Saeki em [47] mostram como construir a função suave f através das condições (a)-(c) do Teorema 4.5.4. Primeiro, eles constroem uma função contínua f_1 definida num grafo G (G nas condições do enunciado do Teorema 4.5.1) a qual é um mergulho em cada aresta de G . Tal função pode ser construída considerando inicialmente uma aplicação injetora $i : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$, $V(G)$ é o conjunto dos vértices de G , e estendendo i às arestas de G de tal maneira que i seja linear nas arestas. Então, adotamos uma orientação em cada aresta de G de modo que f_1 seja crescente com respeito a essa orientação.

Para cada $v \in V(G)$, uma vizinhança de v satisfaz as condições do item (a) do Teorema 4.5.4 e para cada uma dessas condições Masumoto e Saeki constroem uma função suave $g_v : N_v \rightarrow \mathbb{R}$, definida em uma superfície compacta com bordo N_v . Além disso, eles provam que o grafo de Reeb de g_v é isomorfo a uma pequena vizinhança de v em G . Finalmente, se realiza a operação de colagem das funções suaves g_v para cada vértice v de G , com o objetivo de construir a função suave $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{N_v} = g_v$, para cada vértice v de G . Assim a função f_1 definida se identifica com a função $\bar{f} : \mathcal{R}_f \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração do Teorema 4.5.4. (Necessidade) Seja $\mathcal{R}_f$ o grafo de Reeb associado a uma função $\mathcal{MB}$ f definida em Σ . A condição (a) do Teorema 4.5.4 é satisfeita porque f é uma função $\mathcal{MB}$ e G é o grafo de Reeb de f . A condição (b.1) é necessária uma vez que a superfície (compacta), pode ser contrátil ao grafo de Reeb. Além disso, como f é uma função monótona, podemos assumir que $\mathcal{R}_f$ possui orientação dada pelo sentido de crescimento de f . Então, f determina uma ordem sobre os vértices de $\mathcal{R}_f$ pela seguinte relação: $v_1 < v_2$ se $f(v_1) < f(v_2)$. Portanto, as condições (b.2) e (c) são satisfeitas.

(Suficiência) Devemos provar que existe uma função $\mathcal{MB}$ $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o grafo de Reeb associado a f seja isomorfo ao grafo abstrato G , onde G satisfaz as condições (a) - (c) do Teorema 4.5.4.

Vamos começar enumerando os vértices de G , digamos $v_1, \dots, v_n$, tal que essa ordem

seja coerente com a ordem definida em G . Considere uma vizinhança N_i para o vértice v_i em G e que contém o vértice v_i mas nenhum outro vértice de G .

De acordo com o grau de v_i podemos associar uma função $\mathcal{MB}$ a N_i para cada $i = 1, \dots, n$. Essas funções são construídas usando os mesmos argumentos e ideias usadas em [47] por Masumoto e Saeki (ver mais detalhes na prova do Teorema 4.5.1 em [47]). Da colagem destas funções segue o resultado. $\square$

Seja f uma função de Morse em uma superfície Σ e $\mathcal{R}_f$ o grafo de Reeb de f . Então, é possível transformar $\mathcal{R}_f$ em um outro grafo de Reeb $\mathcal{R}_g$ associado a uma função de Morse g em Σ através de um conjunto de deformações elementares. Essas deformações (listadas em [23]) chamamos de **transformações de Fabio-Landi**.

Nosso objetivo a seguir, é obter um resultado análogo ao obtido para funções $\mathcal{MB}$. Portanto, é necessário definir duas novas deformações como seguem.

Definição 4.5.5. *Considere um grafo de Reeb ordenado, $\mathcal{R}_1^\eta(f)$ e um vértice de sela v com três arestas adjacentes u_1, u_2, u_3 , onde u_3 une v com c , sendo c um vértice final de centro. Uma deformação elementar direta MB em $\mathcal{R}_1^\eta(f)$ produz um grafo de Reeb sem a aresta u_3 e sem o vértice c . Após essa deformação o vértice v é associado a um círculo singular.*

Definição 4.5.6. *Seja $\mathcal{R}_1^\eta(f)$ o grafo de Reeb de uma função $\mathcal{MB}$ f e v um vértice associado a um círculo singular, com u_1 e u_2 arestas incidentes a v . Uma deformação elementar inversa MB em $\mathcal{R}^\eta(f)$ consiste em adicionar uma nova aresta incidente a v , unindo v com um novo vértice c , sendo que c é associado a um ponto singular de tipo centro. Mais ainda, $\min(f(x), x \in u_1 \cup u_2) < f(c) < \max(f(x), x \in u_1 \cup u_2)$.*

Na Figura 4.4 consideramos uma folheação $\mathcal{MB}$ no 2-toro associada a uma função $\mathcal{MB}$ g . No grafo de Reeb $\mathcal{R}_1^\eta(g)$ de g que aparece à direita na figura, o vértice v_6 é associado a um círculo singular de g com u_1 e u_2 arestas adjacentes a v_6 . Ao aplicar uma deformação elementar inversa MB em $\mathcal{R}_1^\eta(g)$, adicionamos uma nova aresta adjacente a v_6 unindo este vértice com um novo vértice c associado a um ponto singular de tipo centro. O grafo de Reeb obtido está associado à folheação definida pela função altura, como na Figura 1.7.

Figura 4.4: À esquerda, uma folheação $\mathcal{MB}$ no 2-toro; à direita, o grafo de Reeb associado à função que realiza a folheação.

Proposição 4.5.7. *Todo grafo de Reeb dirigido $\mathcal{R}^\eta(f)$ pode ser transformado em um outro grafo canônico através de uma sequência finita de deformações elementares.*

Demonstração. Uma deformação elementar inversa MB não altera o genus do grafo ou número de ciclos. Um sequência finita de deformações elementares inversas MB transforma o grafo de Reeb associado a uma função $\mathcal{MB}$ no grafo de Reeb associado a uma função de Morse na mesma superfície. Aplicando as transformações Fabio-Landi é possível transformar este último grafo em um grafo canônico. Com isto concluímos a prova da proposição. $\square$

Um teorema de realização baseado em transformações do grafo de Reeb é importante para definir uma topologia no conjunto dos grafos de Reeb de funções $\mathcal{MB}$ (ver por exemplo, [5, 23]). Quando os grafos de Reeb são usados para o reconhecimento de imagens, ter estabilidade do grafo diante pequenas perturbações é uma propriedade muito conveniente.

Capítulo 5

Folheações Morse-Bott em superfícies não orientáveis

Sejam $\Upsilon(h, 0)$ uma superfície fechada não orientável de genus $h \geq 1$ e $f : \Upsilon(h, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Morse-Bott (função $\mathcal{MB}$) definida em $\Upsilon(h, 0)$. As subvariedades críticas não degeneradas de f são pontos de máximo ou mínimo, pontos de sela e círculos singulares. As singularidades da folheação Morse-Bott, gerada pelos conjuntos de nível de f , são pontos de centro, oitos e círculos singulares de f que são, como curvas fechadas, de um lado. Observemos que, para o caso em que a superfície é orientável, todos os círculos singulares de f são curvas fechadas de dois lados e, portanto, não representam uma folha singular para a folheação. Ainda, um oito numa superfície não orientável pode admitir que suas componentes sejam ambas curvas fechadas de um lado, ou ambas curvas fechadas de dois lados ou uma curva fechada de um lado e a outra uma curva fechada de dois lados. Portanto, para a classificação topológica das folheações Morse-Bott em superfícies fechadas não orientáveis será necessário conhecer o comportamento local das folhas singulares dessas folheações. Então, iniciamos este capítulo com a classificação topológica das folhas singulares que são homeomorfas a S^1 , em superfícies fechadas não orientáveis e ainda fazemos o estudo local das folhas singulares que são homeomorfas a oitos. Também apresentamos o número de oitos não topologicamente equivalentes que existem para o plano projetivo $\Upsilon(1, 0)$, a garrafa de Klein $\Upsilon(2, 0)$ e o 3-projetivo $\Upsilon(3, 0)$. Finalmente apresentamos um invariante topológico que será útil no estudo das folheações Morse-Bott

definidas em superfícies fechadas não orientáveis. Esse invariante é construído de modo análogo ao apresentado no Capítulo 2 para a classificação das folheações Morse-Bott em superfícies fechadas orientáveis.

5.1 Classificação das curvas fechadas em superfícies não orientáveis

Nesta seção apresentamos a classificação topológica das curvas fechadas ou mergulhos de S^1 numa superfície fechada não orientável, generalizando assim os resultados obtidos na Seção 2.1. A definição de mergulhos de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$ e de equivalência topológica entre dois mergulhos em $\Upsilon(h, 0)$ são idênticas àsquelas da Seção 2.1.

Sejam $E(a)$ o maior inteiro menor ou igual a a , $C(a)$ o menor inteiro maior ou igual a a e J a imagem de um mergulho de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$. O principal resultado nesta seção é o seguinte.

Teorema 5.1.1. *Seja $\Upsilon(h, 0)$ uma superfície fechada não orientável de genus $h \geq 1$. O número de mergulhos não topologicamente equivalentes de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$ é $h+3$, se $h \geq 3$ e tem como representantes as seguintes curvas:*

- $l_{\pm 0}, l_{\pm 1}, \dots, l_{\pm m}, \dots, l_{\pm C(\frac{h}{2})}$, se J é uma curva que separa $\Upsilon(h, 0)$ em uma superfície orientável K_1 de genus m e uma superfície não orientável K_2 de genus $h - 2m$.
- $l_{=1}, l_{=2}, \dots, l_{=m}, \dots, l_{=E(\frac{h}{2})}$, se J é uma curva que separa $\Upsilon(h, 0)$ em duas superfícies não orientáveis, K_1, K_2 de genus h_1 e h_2 respectivamente; $m = \min(h_1, h_2)$ e $h = h_1 + h_2$.
- l_K^- , se J é uma curva de um lado e $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície orientável. Neste caso, J é uma curva não homologicamente nula e o genus de $\Upsilon(h, 0)$ deve ser ímpar.
- l_{-K}^- , se J é uma curva de um lado e $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície não orientável e J é uma curva não homologicamente nula. Para obter este tipo de curva, o genus de $\Upsilon(h, 0)$ deve ser par.
- l_K^+ , se J é uma curva de dois lados, $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície orientável e J é uma curva não homologicamente nula.
- l_{-K}^+ , se J é uma curva de dois lados e $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície não orientável, com J curva não homologicamente nula.

Para $\Upsilon(1, 0)$, temos duas classes de mergulhos cujas curvas representantes são $l_{\pm 0}$ e l_K^- (ver Figura 5.1) e para $\Upsilon(2, 0)$ existem quatro classes de mergulhos cujas curvas

Figura 5.1: Mergulhos não equivalentes em $\Upsilon(1, 0)$.

representantes são $l_{\pm 0}$, $l_{=1}$, l_K^+ , l_K^- (ver Figura 5.2).

Figura 5.2: Mergulhos não equivalentes em $\Upsilon(2, 0)$.

Demonstração. Sejam ϕ_i mergulhos de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$ e sejam $\phi_i(S^1) = J_i$ suas imagens, $i = 1, 2$. Se existe um homeomorfismo h de $\Upsilon(h, 0)$ em $\Upsilon(h, 0)$ tal que $h(J_1) = J_2$ então a restrição de h ao complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus J_1$ define um homeomorfismo de $\Upsilon(h, 0) \setminus J_1$ em $\Upsilon(h, 0) \setminus J_2$.

Para obter o número de mergulhos não equivalentes de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$, dividimos o conjunto de todos os mergulhos em $\Upsilon(h, 0)$ em classes de tal forma que, dois mergulhos J_1 e J_2 pertencerão a mesma classe se, e somente se, os complementares $\Upsilon(h, 0) \setminus J_1$ e $\Upsilon(h, 0) \setminus J_2$ são homeomorfos.

A prova do teorema é feita em dois passos, no primeiro passo analisamos como são os elementos de cada uma dessas classes e no segundo passo, mostramos que cada classe contém um único elemento.

Passo 1 (1a.) Se $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é um conjunto conexo segue de [39] que J é uma curva não homologicamente nula. Mais ainda, $\chi(\Upsilon(h, 0)) = \chi(\Upsilon(h, 0) \setminus J)$ e

$$2 - h = \chi(\Upsilon(h, 0) \setminus J). \quad (5.1)$$

Por outro lado, uma vizinhança regular fechada de J pode ser uma faixa de Möbius ou um cilindro $S^1 \times I$, dependendo se J é uma curva de um lado ou de dois lados, respectivamente. Assim, se J é uma curva de um lado, $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é homeomorfo a uma superfície compacta $\Pi(h - 1, 1)$, orientável ou não orientável. Observe que se $\Pi(h - 1, 1)$ é uma superfície orientável então usando a Equação (5.1), o genus h de $\Upsilon(h, 0)$ é um inteiro positivo ímpar. Em particular, para $h = 1$, isto é, no plano projetivo $\Upsilon(1, 0)$ obtemos somente uma única curva não homologicamente nula J e $\Upsilon(1, 0) \setminus J$ é um disco (ver por exemplo [50]).

Analogamente, se J é uma curva de dois lados então $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície compacta (orientável ou não orientável) cujo bordo são duas curvas fechadas. Portanto, se $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície orientável, digamos $\Sigma(g, 2)$, da Equação (5.1), temos que $2 - h = 2 - 2g - 2$ e assim $g = \frac{h}{2} - 1$. Logo, o genus h de $\Upsilon(h, 0)$ deve ser um inteiro positivo par.

Se $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é uma superfície não orientável, $\Upsilon(h - 2, 2)$, então $h \geq 3$. De fato, $\Upsilon(h, 0)$ pode ser obtida pela colagem de uma alça a $\Upsilon(h, 0) \setminus J$, em outras palavras, à colagem de duas faixas de Möbius a $\Upsilon(h, 0) \setminus J$. Se $h = 2$, $\Upsilon(2, 0) \setminus J$ é um cilindro.

(1b.) Se $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ tem duas componentes conexas K_i , $i = 1, 2$, então J é uma curva homologicamente nula em $\Upsilon(h, 0)$ e J é necessariamente uma curva de dois lados.

Neste caso, cada componente conexa K_i , $i = 1, 2$, é uma superfície compacta (orientável ou não orientável) cujo bordo é uma curva fechada e $\Upsilon(h, 0) = \mathcal{P}(K_1) \# \mathcal{P}(K_2)$, logo

$$\chi(\Upsilon(h, 0)) = \chi(K_1) + \chi(K_2). \quad (5.2)$$

Ressaltamos aqui que ambas componentes K_i , $i = 1, 2$, não podem ser superfícies orientáveis, pois ao colar cada uma delas a uma das curvas no bordo da vizinhança regular fechada de $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ (a qual é um cilindro) teríamos uma superfície orientável, contradizendo o fato de $\Upsilon(h, 0)$ ser uma superfície não orientável.

Se K_1 é uma superfície orientável $\Sigma(g_1, 1)$ e K_2 é uma superfície não orientável $\Upsilon(h_2, 1)$ então da equação (5.2) obtemos a igualdade $2g_1 + h_2 = h$. Logo, para $h \geq 1$ fixo e para valores de g_1 com $g_1 \in \{0, \dots, h-1\}$ obtemos $C\left(\frac{h}{2}\right)$ casos que satisfazem a igualdade $2g_1 + h_2 = h$. Por outro lado, se K_1 e K_2 são ambas superfícies não orientáveis, então segue da equação (5.2) a igualdade $h_1 + h_2 = h$. Assim, fixando $h \geq 1$ na equação (5.2) obtemos $E\left(\frac{h}{2}\right)$ casos.

Desta maneira, os casos obtidos nos itens (1a.) e (1b.) são o número de classes de mergulhos de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$.

Passo 2. Sejam $J_1 = \phi_1(S^1)$ e $J_2 = \phi_2(S^1)$ dois mergulhos de S^1 em $\Upsilon(h, 0)$ que pertencem à mesma classe. Considere a aplicação $H : J_1 \rightarrow J_2$ dada por $h = \phi_1^{-1} \circ \phi_2$. Então, devemos provar que existe uma extensão de H a toda a superfície $\Upsilon(h, 0)$.

Se $\Upsilon(h, 0) \setminus J_i$, $i = 1, 2$ possui duas componentes conexas, K_j^i , $j = 1, 2$, então cada uma destas componentes têm uma curva fechada no bordo onde H está definida. Logo, se as componentes K_j^i , $i, j = 1, 2$ são superfícies não orientáveis, a extensão de H a $\Upsilon(h, 0)$ é consequência direta do Teorema 1.5.3 e do Lema da Colagem. Porém, se existe algum $j = 1, 2$ tal que K_j^i , $i = 1, 2$ é uma superfície orientável, então podemos aplicar o Teorema 1.5.2 a K_j^i , $i = 1, 2$, e desta maneira obter uma extensão $H_j^i : K_j^i \rightarrow K_j^i$ de H a K_j^i para este j em particular, uma vez que a concordância da orientação nas curvas do bordo se verifica facilmente. Para as superfícies não orientáveis K_{3-j}^i , $i = 1, 2$, aplicamos o Teorema 1.5.3 para obter o homeomorfismo $H_{3-j}^i : K_{3-j}^i \rightarrow K_{3-j}^i$ o qual é a extensão de H a K_{3-j}^i , $i = 1, 2$. Dado que os homeomorfismos H_j^i e H_{3-j}^i coincidem em J_i , podemos aplicar o Lema da Colagem para obter a desejada extensão de H a $\Upsilon(h, 0)$.

Se $\Upsilon(h, 0) \setminus J_i$, $i = 1, 2$ é conexo, digamos K^i , $i = 1, 2$, vamos dividir o estudo em casos, considerando J_i como curva de um lado ou de dois lados. Se K^i , $i = 1, 2$, é uma superfície não orientável a extensão de H a $\Upsilon(h, 0)$ é garantida pelo Teorema 1.5.3, independentemente se a curva J_i é de um lado ou de dois lados.

Por outro lado, se K^i , $i = 1, 2$, é uma superfície orientável e J_1 é uma curva de um lado então K_1 têm uma curva fechada no bordo e a extensão de H é garantida pelo Teorema 1.5.2 sob a hipóteses sobre a concordância da orientação (que se verifica, uma vez que a orientação destas curvas são igualmente preservadas ou invertidas). Finalmente, se J_1 é uma curva de dois lados, cada componente conexa K^i , $i = 1, 2$, têm duas curvas fechadas

no bordo e a extensão de H é satisfeita usando os mesmos argumentos empregados no passo 2 do Teorema 2.1.4. $\square$

Observação 5.1.2. *No teorema anterior, a notação $l_{\pm m}$ denota uma curva J de dois lados tal que o complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é a união disjunta de duas superfícies K_1 e K_2 (em outras palavras, J é uma curva homologicamente nula) e, o sinal “ $\pm$ ” (respectivamente, o sinal “ $=$ ”) do subíndice m indica que uma das superfícies K_j ’s, $j = 1, 2$, é orientável e a outra é não orientável (respectivamente, ambas superfícies K_j ’s, $j = 1, 2$ são não orientáveis).*

Se a curva J em $\Upsilon(h, 0)$ é tal que o complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus J$ é conexo (isto é, J é uma curva não homologicamente nula) então o índice “ $+$ ” indica que J é uma curva de dois lados e “ $-$ ” indica que J é de um lado.

Por exemplo, para o 3-projetivo, existem seis tipos de mergulhos não topologicamente equivalentes (ver Figura 5.13) e para o 4-projetivo $\Upsilon(4, 0)$, existem sete (ver Figura 5.3). Optamos por exibir estes mergulhos em uma mesma representação poligonal da superfície. Alguns mergulhos podem ter uma curva representante mais simples em uma representação poligonal da superfície do que em outra, assim por exemplo o mergulho em $\Upsilon(4, 0)$ cuja curva representante é a $l_{=2}$ tem duas representações diferentes (ver Figura 1.4) e em ambos os casos $l_{=2}$ separa $\Upsilon(4, 0)$ em duas superfícies não orientáveis $\Upsilon(2, 1)$.

5.2 Classificação de oitos em superfícies fechadas não orientáveis

Denotemos por $\mathfrak{NB}$ uma vizinhança regular fechada de um oito $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$. O seguinte lema nos mostra os tipos de $\mathfrak{NB}$ para um oito $\mathfrak{B}$ em uma superfície fechada não orientável.

Lema 5.2.1. *Uma vizinhança regular fechada $\mathfrak{NB}$ de um oito $\mathfrak{B}$ é uma superfície compacta orientável ou não orientável. Se $\mathfrak{NB}$ é orientável então $\mathfrak{NB}$ é homeomorfa a $\Sigma(0, 3)$ ou $\Sigma(1, 1)$ e em ambos os casos, cada componente s_i , $i = 1, 2$ do oito são curvas de dois lados. Se $\mathfrak{NB}$ é uma superfície compacta não orientável então $\mathfrak{NB}$ é homeomorfa a $\Upsilon(1, 2)$ ou a $\Upsilon(2, 1)$ e neste caso existem duas possibilidades para as componentes s_i , $i = 1, 2$, do oito: ambas componentes do oito são curvas fechadas de um lado ou uma componente do oito é de um lado e a outra de dois lados.*

 Figura 5.3: Mergulhos não topologicamente equivalentes em $\Upsilon(4, 0)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ um oito em $\Upsilon(h, 0)$. Considere sobre a superfície $\Upsilon(h, 0)$ um círculo centrado em p de diâmetro suficientemente pequeno de modo que $\mathfrak{B}$ corte o círculo em exatamente quatro pontos, p_1, p_2, p_3 e p_4 . Considerando a componente s_i , $i = 1, 2$, de $\mathfrak{B}$ que corresponde a cada ponto. Ao percorrer o círculo em um sentido e em outro começando em qualquer um desses pontos temos dois ciclos ordenados: s_1, s_1, s_2, s_2 e s_1, s_2, s_1, s_2 . Assim, ao combinar estas possibilidades com a orientabilidade ou não orientabilidade de $\mathfrak{NB}$ obtemos o resultado. Note que se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$ existem duas curvas fechadas J_1 e J_2 no bordo de $\mathfrak{NB}$ que são contratíveis as componentes s_1 e s_2 de $\mathfrak{B}$. Dado que J_1 e J_2 são curvas mergulhadas numa superfície orientável, a saber, a esfera temos que necessariamente estas são curvas de dois lados e, portanto, as componentes de $\mathfrak{B}$ são curvas de dois lados. Se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$ então a curva fechada no bordo de $\Sigma(1, 1)$ é uma curva de dois lados. Portanto, se uma das componentes de $\mathfrak{B}$ fosse uma curva fechada de um lado então a curva fechada no bordo de $\Sigma(1, 1)$ seria também de um lado o que é absurdo e a prova está concluída. □

Definição 5.2.2. *Seja $\mathfrak{B}$ um oito em uma superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ com genus $h \geq 1$. Diremos que $\mathfrak{B}$ é*

1. *um oito planar, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$;*
2. *um oito toroidal, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$;*
3. *um oito projetivo de tipo $\mathfrak{NB}^-$, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 2)$ e uma das componentes do oito é uma curva de um lado e a outra componente é uma curva de dois lados;*
4. *um oito projetivo de tipo $\mathfrak{NB}^+$, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 2)$ e ambas componentes do oito são curvas de um lado;*
5. *um oito Klein de tipo $\mathfrak{NB}^-$, se $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$ e uma das componentes do oito é uma curva de um lado e a segunda componente é uma curva de dois lados;*
6. *um oito Klein de tipo $\mathfrak{NB}^+$, se $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$ e ambas componentes do oito são curvas de um lado.*

(a) $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$, s_1 é uma curva de dois lados e s_2 é uma curva de um lado.

(b) $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$, s_1 e s_2 são curvas de um lado.

(c) $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$, s_1 é uma curva de dois lados e s_2 é uma curva de um lado.

(d) $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$, s_1 e s_2 são curvas de um lado.

Figura 5.4: Tipos de $\mathfrak{NB}$ em $\Upsilon(h, 0)$.

Seja $\mathfrak{B}$ um oito em uma superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ de genus $h \geq 1$. O lema a seguir nos permite conhecer cada uma das componentes conexas do complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ para cada uma das possíveis vizinhanças regulares fechadas $\mathfrak{NB}$ de $\mathfrak{B}$.

Lema 5.2.3. *Seja $\mathfrak{B}$ um oito numa superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ de genus $h \geq 1$.*

a) *Se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(0, 3)$ então $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é a união disjunta de:*

a1) $\Sigma(g_1, 1)$, $\Sigma(g_2, 1)$, $\Upsilon(h_3, 1)$, sempre que $2g_1 + 2g_2 + h_3 = h$.

a2) $\Sigma(g_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 1)$, $\Upsilon(h_3, 1)$, sempre que $2g_1 + h_2 + h_3 = h$.

a3) $\Upsilon(h_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 1)$, $\Upsilon(h_3, 1)$, sempre que $h_1 + h_2 + h_3 = h$.

a4) $\Sigma(g_1, 2)$, $\Sigma(g_2, 1)$, sempre que $2g_1 + 2g_2 = h - 2$.

a5) $\Sigma(g_1, 2)$, $\Upsilon(h_2, 1)$, sempre que $2g_1 + h_2 = h - 2$.

a6) $\Sigma(g_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 2)$, sempre que $2g_1 + h_2 = h - 2$.

a7) $\Upsilon(h_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 2)$, sempre que $h_1 + h_2 = h - 2$.

a8) $\Upsilon(h_1, 3)$, sempre que $h_1 = h - 4$.

b) Se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$ então $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é conexo e homeomorfo a $\Upsilon(h - 2, 1)$.

c) Se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 2)$ então as componentes conexas de $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ podem ser homeomorfas a:

c1) $\Sigma(g_1, 1)$, $\Sigma(g_2, 1)$, sempre que $2g_1 + 2g_2 = h - 1$.

c2) $\Sigma(g_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 1)$, sempre que $2g_1 + h_2 = h - 1$.

c3) $\Upsilon(h_1, 1)$, $\Upsilon(h_2, 1)$, sempre que $h_1 + h_2 = h - 1$.

c4) $\Sigma(g_1, 2)$, sempre que $2g_1 = h - 3$.

c5) $\Upsilon(h_1, 2)$, sempre que $h_1 = h - 3$.

d) Finalmente, se $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(2, 1)$ então $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é conexo e homeomorfo a $\Sigma(\frac{h-2}{2}, 1)$ ou $\Upsilon(h - 2, 1)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{B}$ um oito em $\Upsilon(h, 0)$. Então, o fecho de $\mathfrak{NB}$ unido ao fecho de $(\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB})$ cobrem $\Upsilon(h, 0)$. A interseção destes dois conjuntos são círculos e, portanto, tem característica de Euler nula. Além disso, a característica de Euler de $\Upsilon(h, 0)$ é dada por

$$\chi(\Upsilon(h, 0)) = \chi(\mathfrak{NB}) + \chi(\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}). \quad (5.3)$$

Suponha que $\chi(\mathfrak{NB}) = k$ e considere os seguintes casos de acordo com os quatro tipos de vizinhanças regulares fechadas $\mathfrak{NB}$ possíveis para um oito $\mathfrak{B}$ em $\Upsilon(h, 0)$.

Caso (a): $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0, 3)$. Pelo Lema 2.2.4, o número r de componentes conexas do complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ pode ser três, dois ou um, sendo que cada componente conexa é uma superfície compacta K_i e todas elas disjuntas entre si. Além disso, as componentes de $\mathfrak{B}$ são ambas curvas de dois lados (Lema 5.2.1) podendo ser curvas que separam (homologicamente nulas) ou curvas que não separam (curvas não homologicamente nulas). A seguir analisamos as seguintes possibilidades.

Possibilidade 1: $r = 3$. Se $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong K_1 \sqcup K_2 \sqcup K_3$ então $\chi(\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}) = \chi(K_1) + \chi(K_2) + \chi(K_3)$. Observe que neste caso existe superfície K_i não orientável pois do contrário, $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ seria uma superfície orientável (ver Proposição 1.1.11) e, portanto, $\Upsilon(h, 0)$ também. Por outro lado, o número de curvas fechadas no bordo de cada K_i , $i = 1, 2, 3$, deve ser no máximo um (caso contrário a superfície $\Upsilon(h, 0)$ teria uma curva fechada no bordo). Considerando o número de K_i , com $i = 1, 2, 3$, que são não orientáveis, temos os seguintes sub casos.

Caso (a1). Na união disjunta de $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$, como acima, vamos supor que $K_3 \cong \Upsilon(h_3, 1)$, $K_2 \cong \Sigma(g_2, 1)$ e $K_1 \cong \Sigma(g_1, 1)$. Como $\chi(\Upsilon(h, 0)) = 2 - h$ e $\chi(\mathfrak{NB}) = -1$, segue da igualdade (5.3) que

$$\begin{aligned} 2 - h &= -1 + \sum_{i=1}^2 (2 - 2g_i - 1) + (2 - h_3 - 1) \\ &= 2 - (2g_1 + 2g_2) - h_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Portanto, $h = 2g_1 + 2g_2 + h_3$ e o caso (a1) do lema está provado.

Caso (a2). Se $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 1)$, $K_3 \cong \Upsilon(h_3, 1)$ e $K_1 \cong \Sigma(g_1, 1)$ então a característica de Euler de K_i , com $i = 2, 3$, é $2 - h_i - 1$. Portanto, de (5.3) obtemos

$$\begin{aligned} 2 - h &= -1 + \sum_{i=2}^3 (2 - h_i - 1) + (2 - 2g_1 - 1) \\ &= 2 - (h_2 + h_3) - 2g_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Logo, $h = 2g_1 + h_2 + h_3$ e com isto provamos o caso (a2) do lema.

Caso (a3). Suponhamos que $K_i \cong \Upsilon(h_i, 1)$, com $i = 1, 2, 3$. Para cada $i = 1, 2, 3$, temos $\chi(K_i) = 2 - h_i - 1$, então de (5.3) temos

$$2 - h = -1 + \sum_{i=1}^3 (2 - h_i - 1) = 2 - (h_1 + h_2 + h_3). \quad (5.6)$$

Portanto, $h = h_1 + h_2 + h_3$ e o caso (a3) do lema se verifica.

Possibilidade 2: $r = 2$. Neste caso, $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong K_1 \sqcup K_2$ e $\chi(\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}) = \chi(K_1) + \chi(K_2)$. Neste caso devemos considerar a possibilidade onde K_1 e K_2 são superfícies

orientáveis e o número de curvas fechadas no bordo de cada uma delas pode ser um ou dois. Com essas hipóteses vamos considerar os seguintes sub casos.

Caso (a4). Suponhamos que $K_1 \cong \Sigma(g_1, 2)$ e $K_2 \cong \Sigma(g_2, 1)$. Então, $\chi(K_1) = 2 - 2g_1 - 2$ e $\chi(K_2) = 2 - 2g_2 - 1$. Da igualdade em (5.3) temos

$$2 - h = -1 + (2 - 2g_1 - 2) + (2 - 2g_2 - 1) = -2g_1 - 2g_2. \quad (5.7)$$

Logo, $h - 2 = 2g_1 + 2g_2$ e o caso (a4) do lema segue.

Caso (a5). Sejam $K_1 \cong \Sigma(g_1, 2)$ e $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 1)$. Analogamente aos casos anteriores, calculamos as características de Euler para K_1 e K_2 e substituímos em (5.3), obtendo as seguintes igualdades:

$$2 - h = -1 + (2 - 2g_1 - 2) + (2 - h_2 - 1) = -2g_1 - h_2, \quad (5.8)$$

de onde deduzimos que, $h - 2 = 2g_1 + h_2$, o que prova o caso (a5) do lema.

Caso (a6). Vamos supor que $K_1 \cong \Sigma(g_1, 1)$ e $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 2)$. Então, por cálculos análogos ao caso anterior obtemos

$$h - 2 = 2g_1 + h_2, \quad (5.9)$$

e o caso (a6) do lema fica provado.

Caso (a7). Finalmente, supondo que $K_1 \cong \Upsilon(h_1, 1)$ e $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 2)$ e substituindo suas respectivas características de Euler em (5.3) temos

$$2 - h = -1 + (2 - h_1 - 1) + (2 - h_2 - 2) = -h_1 - h_2. \quad (5.10)$$

Logo, $h - 2 = h_1 + h_2$ e, dessa maneira, provamos o caso (a7).

Possibilidade 3: $r = 1$. Então, as componentes de $\mathfrak{B}$ são curvas de dois lados, não são homologicamente nulas e nem equivalentes e $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong K_1$. Então, necessariamente K_1 é uma superfície não orientável com três curvas no bordo. Como $\chi(K_1) = 2 - h_1 - 3$,

de (5.3) obtemos

$$2 - h = -1 + 2 - h_1 - 3 = -2 - h_1. \quad (5.11)$$

Portanto, $h - 4 = h_1$ e o caso (a8) é provado.

Caso (b). Se $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1, 1)$ então $\chi(\mathfrak{NB}) = -1$ e as componentes de $\mathfrak{B}$ são curvas de dois lados que não são homologicamente nulas e nem equivalentes, portanto, o número de componentes conexas do complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é um ($r = 1$). Além disso, a componente conexa é uma superfície não orientável com uma curva no bordo, digamos $\Upsilon(h_1, 1)$. Então, substituindo as características de Euler para $\mathfrak{NB}$, $\Upsilon(h, 0)$ e $\Upsilon(h_1, 1)$ respectivamente em (5.3) temos

$$2 - h = -1 + 2 - h_1 - 1 = -h_1. \quad (5.12)$$

Logo, $h - 2 = h_1$ e $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Upsilon(h - 2, 1)$.

Caso (c): $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$. Pelo Lema 5.2.1 as componentes de $\mathfrak{NB}$ podem ser ambas curvas de um lado, e neste caso, serão necessariamente curvas que não separam a superfície $\Upsilon(h, 0)$, ou uma das componentes é uma curva de um lado e a outra componente é uma curva de dois lados. Destas duas possibilidades concluímos que o número r de componentes conexas do complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é dois ou um. Será dois se uma das componentes de $\mathfrak{B}$ é uma curva de um lado e a outra componente é uma curva de dois lados e será um, se ambas componentes de $\mathfrak{B}$ são curvas de um lado. Neste caso, $\chi(\mathfrak{NB}) = -1$.

Possibilidade 1: $r = 2$. Sejam K_i , $i = 1, 2$, as componentes conexas de $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$. Dependendo da orientabilidade de cada K_i , $i = 1, 2$, obtemos os casos a seguir.

Caso (c1). $K_1 \cong \Sigma(g_1, 1)$, $K_2 \cong \Sigma(g_2, 1)$. Como $\chi(K_i) = 2 - 2g_i - 1$, para $i = 1, 2$, segue de (5.3) que

$$2 - h = \sum_{i=1}^2 (2 - 2g_i - 1) - 1 = 1 - 2g_1 - 2g_2. \quad (5.13)$$

Ou seja, $h - 1 = 2g_1 + 2g_2$ o que prova o item (c1) do lema.

Caso (c2). $K_1 \cong \Sigma(g_1, 1)$, $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 1)$. Calculando as respectivas características de Euler para K_i , $i = 1, 2$, e substituindo-as em (5.3) temos

$$2 - h = (2 - 2g_1 - 1) + (2 - h_2 - 1) - 1 = 1 - 2g_1 - h_2, \quad (5.14)$$

de onde se concluímos que $h - 1 = 2g_1 + h_2$. Com isto mostramos o item (c2) do lema.

Caso (c3). Suponha que $K_1 \cong \Upsilon(h_1, 1)$ e $K_2 \cong \Upsilon(h_2, 1)$. Como nos casos anteriores, substituímos as características de Euler para cada uma das superfícies envolvidas em (5.3) para obter:

$$2 - h = (2 - h_1 - 1) + (2 - h_2 - 1) - 1 = 1 - h_1 - h_2, \quad (5.15)$$

logo $h - 1 = h_1 + h_2$ e o item (c2) do lema fica provado.

Possibilidade 2: $r = 1$. Dado que $\mathfrak{NB}$ é uma superfície não orientável com duas curvas fechadas no bordo então $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Sigma(g_1, 2)$ ou $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Upsilon(h_1, 2)$. Se $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Sigma(g_1, 2)$, da equação (5.3) obtemos que $2 - h = 2 - 2g_1 - 2 - 1$. Portanto, $h - 3 = 2g_1$ com o qual o item (c4) fica provado. Analogamente, se $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Upsilon(h_1, 2)$ então da equação (5.3) temos a igualdade $2 - h = 2 - h_1 - 2 - 1$ e, portanto, $h - 3 = h_1$. Provando o item (c5) do lema.

Caso (d): Finalmente, se $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$, então as componentes de $\mathfrak{B}$ são ambas curvas de um lado (curvas que não separam) ou uma das componentes de $\mathfrak{B}$ é uma curva de um lado e a outra é uma curva de dois lados, mas em qualquer um destes casos as curvas são não homológicas a zero e não equivalentes, logo $r = 1$ e $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ pode ser homeomorfo a uma superfície orientável, digamos $\Sigma(g_1, 1)$ ou homeomorfo a uma superfície não orientável, digamos $\Upsilon(h_1, 1)$. Para calcular os genus g_1 e h_1 destas duas superfícies em função do genus h de $\Upsilon(h, 0)$, substituímos os valores das características de Euler das superfícies envolvidas na equação (5.3). Assim temos que se $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Sigma(g_1, 1)$ então $2 - h = (2 - 2g_1 - 1) - 1$ e $h - 2 = 2g_1$ e, portanto, $\Sigma(\frac{h-2}{2}, 1)$. Por outro lado, se $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB} \cong \Upsilon(h_1, 1)$ então de (5.3) obtemos a igualdade $2 - h = 2 - h_1 - 1 - 1 = -h_1$. Logo, $\Upsilon(h_1, 1) \cong \Upsilon(h - 2, 1)$. $\square$

Observamos que o caso (a8) no Lema 5.2.3 somente é possível se consideramos super-

Figura 5.5: O oito em $\Upsilon(5, 0)$ tem como componentes curvas cujo representante é l_{-K}^+ .

fícies não orientáveis de genus $h \geq 5$. Na Figura 5.5 mostramos o oito planar em $\Upsilon(5, 0)$ tal que $\Upsilon(5, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 3)$. Na representação mostrada nessa figura, consideramos $\Upsilon(5, 0)$ como a soma conexa de $\Sigma(2, 0)$ e $\Upsilon(1, 0)$, sendo que $\Upsilon(1, 0)$ é uma faixa de Möbius com um disco cuja circunferência é colada na circunferência que constitui o bordo da faixa de Möbius.

Gostaríamos de investigar o número de oitos não topologicamente equivalentes que podemos encontrar em uma superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ para um $h \geq 1$ fixo. A abordagem apresentada nas próximas três subseções, nos permite contar o número de oitos não topologicamente equivalentes para o caso em que $h = 1, 2, 3$. Para isso consideramos todas as curvas representantes para as componentes dos oitos em $\Upsilon(h, 0)$ para $h \geq 1$ fixado e consideramos todas as combinações possíveis (duas-a-duas e com repetições) destas curvas a fim de obter um oito em $\Upsilon(h, 0)$. Faremos uso das diferentes decomposições obtidas do Lema 5.2.3 para reconhecer as componentes conexas em que o oito, formado por uma possível combinação duas-a-duas das curvas representantes, divide a superfície segundo a vizinhança regular fechada do oito.

5.2.1 Oitos no plano projetivo

Para o plano projetivo $\Upsilon(1, 0)$, temos duas classes de mergulhos cujas curvas representantes são $l_{\pm 0}$ e l_K^- (ver Figura 5.1). Portanto, as componentes s_1, s_2 de um oito $\mathfrak{B}$ em $\Upsilon(1, 0)$ tem como curvas representantes as curvas $l_{\pm 0}$ e l_K^- . Fazendo combinações duas-a-duas destas curvas concluímos que existem pelo menos 3 tipos de oitos não topologicamente equivalentes em $\Upsilon(1, 0)$. Além disso, o Lema 5.2.3 nos diz como são as componentes conexas do complementar $\Upsilon(1, 0) \setminus \mathfrak{NB}$, para cada uma das possíveis vizinhanças regulares fechadas $\mathfrak{NB}$ de $\mathfrak{B}$ em $\Upsilon(1, 0)$. São elas:

Figura 5.6: Oito de tipo $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_{\pm 0})$.

Caso 1. $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0, 3)$. Neste caso as componentes do oito devem ser curvas de dois lados, logo o oito tem como componentes curvas de tipo $l_{\pm 0}$ e $\Upsilon(1, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ será a união disjunta das componentes conexas: $K_1 \cong \Sigma(0, 1) \cong K_2$ e $K_3 \cong \Upsilon(1, 1)$, uma vez que as possibilidades (a2) até (a8) do Lema 5.2.3 não são realizáveis para $h = 1$ (veja Figura 5.6).

Caso 2. $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1, 1)$. Como no caso anterior temos que as componentes do oito devem ser de tipo $l_{\pm 0}$, no entanto, o complementar $\Upsilon(1, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(h-2, 1)$ o que é absurdo pois $h = 1$.

Caso 3. Se $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$, então as componentes do oito podem ser ambas de um lado ou uma das componentes é de um lado e a outra, uma curva de dois lados. O Lema 5.2.3 garante que o conjunto $\Upsilon(1, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é a união disjunta das componentes conexas $K_1 \cong \Sigma(0, 1) \cong K_2$, pois as possibilidades de (c2) a (c5) não são realizáveis para $h = 1$ (ver Figura 5.7).

Figura 5.7: À esquerda, oito de tipo $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_K^{-})$ e à direita, oito de tipo $\mathfrak{B}(l_K^{-}, l_K^{-})$.

Finalmente, observamos que para o plano projetivo, não podem existir oitos cuja vizinhança regular fechada seja homeomorfa a $\Upsilon(2, 1)$. Portanto, para o plano projetivo existem três tipos de oitos não topologicamente equivalentes (ver Tabela 5.1).

s_1 s_2	$l_{\pm 0}$	l_K^-
$l_{\pm 0}$	$\Sigma(0, 1) \quad \Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	
l_K^-	$\Sigma(0, 1) \quad \Sigma(0, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(0, 1)$

Tabela 5.1: Combinações de curvas e componentes conexas de $\Upsilon(1, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ para cada combinação possível.

5.2.2 Oitos na garrafa de Klein

Na garrafa de Klein $\Upsilon(2, 0)$ existem quatro tipos de curvas não topologicamente equivalentes (ver Figura 5.2):

$l_{\pm 0}$: curva de dois lados e $\Upsilon(2, 0) \setminus l_{\pm 0} \cong \Sigma(0, 1) \sqcup \Upsilon(2, 1)$;

$l_{=1}$: curva de dois lados e $\Upsilon(2, 0) \setminus l_{=1} \cong \Upsilon(1, 1) \sqcup \Upsilon(1, 1)$;

l_K^+ : curva de dois lados e $\Upsilon(2, 0) \setminus l_K^+ \cong \Sigma(0, 2)$;

l_K^- : curva de um lado e $\Upsilon(2, 0) \setminus l_K^- \cong \Upsilon(1, 1)$.

Para ter um oito em $\Upsilon(2, 0)$ devemos considerar o número de combinações das curvas representantes duas-a-duas e com repetições. Este número de combinações é 10. No entanto, mostraremos a seguir que apenas 9 são possíveis, em outras palavras, para a garrafa de Klein existem 9 tipos de oitos não topologicamente equivalentes (ver Tabela 5.2). A seguir apresentamos o estudo um passo-a-passo de como obter este resultado. As componentes conexas do conjunto $\Upsilon(2, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ seguem do Lema 5.2.3. Assim dependendo de como é a vizinhança do oito, temos os seguintes 4 casos.

CASO 1. $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0, 3)$. Primeiramente precisamos verificar quais das condições a_i 's do Lema 5.2.3 são realizáveis.

a1) $2g_1 + 2g_2 + h_3 = 2$, logo a única decomposição possível é: $\Sigma(0, 1), \Sigma(0, 1), \Upsilon(2, 1)$. Este será o oito $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_{\pm 0})$ como na Figura 5.8.

a2) $2g_1 + h_2 + h_3 = 2$. A única decomposição possível é: $\Sigma(0, 1), \Upsilon(1, 1), \Upsilon(1, 1)$. Para essa decomposição encontramos dois tipos de oitos que a realizam como na Figura 5.9.

a3) $h_1 + h_2 + h_3 = 2$. Caso impossível pois os genus $h_i \geq 1$, $i = 1, 2, 3$.

Figura 5.8: $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_{\pm 0})$. Figura 5.9: À esquerda: oitão $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_{=1})$; à direita: oitão $\mathfrak{B}(l_{=1}, l_{=1})$.

a4) $2g_1 + 2g_2 = 0$. Neste caso $\Sigma(0, 2)$, $\Sigma(0, 1)$ e encontramos apenas dois tipos de oitões, mostrados na Figura 5.10.

Figura 5.10: À esquerda: oitão $\mathfrak{B}(l_{\pm 0}, l_K^+)$; à direita: oitão $\mathfrak{B}(l_K^+, l_K^+)$.

Finalmente, as possibilidades (a5) a (a8) do Lema 5.2.3 não são realizáveis para este caso.

CASO 2. Se $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1, 1)$ então $\Upsilon(2, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(0, 1)$ o que é absurdo.

CASO 3. $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$. O único caso possível no Lema 5.2.3 é o caso c2). Para o qual temos que $\Upsilon(2, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é a união disjunta das componentes conexas $\Sigma(0, 1)$ e $\Upsilon(1, 1)$. Este caso é realizável pelos oitões mostrados na Figura 5.11.

CASO 4 $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$. A única possibilidade é que $\Upsilon(2, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ seja homeomorfo a $\Sigma(0, 1)$. Para este tipo de decomposição temos o tipo de oitão como mostrado na Figura

Figura 5.11: (a) $\mathcal{B}(l_{\pm 0}, l_{-K}^-)$; (b) $\mathcal{B}(l_{-K}^-, l_{-K}^-)$; (c) $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{-K}^-)$.

Figura 5.12: O oito $\mathcal{B}(l_K^+, l_{-K}^-)$.

5.12.

Observação 5.2.4. A curva de tipo $l_{=1}$ sempre interceptará a curva l_K^+ em dois pontos distintos, então para a garrafa de Klein o oito de tipo $\mathcal{B}(l_{=1}, l_K^+)$ não é realizável pois não forma um oito.

5.2.3 Oitos no 3-projetivo

Em $\Upsilon(3, 0)$ existem, segundo o Teorema 5.1.1, 6 tipos de curvas não equivalentes. Estas curvas têm como representantes:

$l_{\pm 0}$: curva de dois lados e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_{\pm 0}$ é a união disjunta de $\Sigma(0, 1)$ e $\Upsilon(3, 1)$;

$l_{\pm 1}$: curva de dois lados e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_{\pm 1}$ é a união disjunta de $\Sigma(1, 1)$ e $\Upsilon(1, 1)$;

$l_{=1}$: curva de dois lados e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_{=1}$ é a união disjunta de $\Upsilon(1, 1)$ e $\Upsilon(2, 1)$;

s_1 s_2	$l_{\pm 0}$	$l_{=1}$	l_K^+	l_{-K}^-
$l_{\pm 0}$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$			
$l_{=1}$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$		
l_K^+	$\Sigma(0, 2)$ $\Sigma(0, 1)$	Não	$\Sigma(0, 2)$ $\Sigma(0, 1)$	
l_{-K}^-	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$	$\Upsilon(1, 1)$ $\Sigma(0, 1)$

Tabela 5.2: Combinações de curvas e componentes conexas $\Upsilon(2, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ para cada combinação possível.

l_K^- : curva de um lado e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_K^-$ é homeomorfo a $\Sigma(1, 1)$;

l_{-K}^- : curva de um lado e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_{-K}^-$ é homeomorfo a $\Upsilon(2, 1)$;

l_{-K}^+ : curva de dois lados e $\Upsilon(3, 0) \setminus l_{-K}^+$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 2)$.

Dado que $\Upsilon(3, 0) = \Sigma(1, 0) \# \Upsilon(1, 0)$, é possível visualizar todas essas 6 curvas na representação poligonal de $\Upsilon(3, 0)$ como mostra a Figura 5.13.

Figura 5.13: Tipos de mergulhos não equivalentes em $\Upsilon(3, 0)$.

O número de oitos não topologicamente equivalentes em $\Upsilon(3, 0)$ pode ser obtido usando os mesmos argumentos aplicados para o plano projetivo e a garrafa de Klein.

Seja $\mathcal{B}$ um oito em $\Upsilon(3, 0)$. Pelo Lema 5.2.3, as componentes conexas do complementar $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ são as descritas como segue.

CASO 1 $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(0, 3)$. De todos as possibilidades do Lema 5.2.3, somente os seguintes são realizáveis.

(a1) $2g_1 + 2g_2 + h_3 = 3$. As componentes conexas de $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ são:

$$\Sigma(0, 1); \Sigma(0, 1); \Upsilon(3, 1) \text{ ou } \Sigma(0, 1); \Sigma(1, 1); \Upsilon(1, 1). \quad (5.16)$$

A Figura 5.14(a) apresenta a primeira possibilidade e nas Figuras 5.14(b) e 5.14(c) apresentamos a segunda possibilidade.

Figura 5.14: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_{\pm 0}, l_{\pm 0})$; No centro o oito $\mathcal{B}(l_{\pm 0}, l_{\pm 1})$; À direita o oito $\mathcal{B}(l_{\pm 1}, l_{\pm 1})$.

a2) $2g_1 + h_2 + h_3 = 3$. Neste caso temos como componentes conexas $\Sigma(0, 1)$, $\Upsilon(1, 1)$ e $\Upsilon(2, 1)$ a qual é realizada pelos oitos como mostrados na Figura 5.15.

Figura 5.15: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_{\pm 0}, l_{=1})$; À direita o oito $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{=1})$.

a3) $h_1 + h_2 + h_3 = 3$. Neste caso obtemos as componentes conexas $\Upsilon(1, 1)$, $\Upsilon(1, 1)$ e $\Upsilon(1, 1)$ a qual é realizável pelo oito da Figura 5.16.

a5) $2g_1 + h_2 = 1$. Para este caso, as componentes conexas do complementar $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ são $\Sigma(0, 2)$ e $\Upsilon(1, 1)$, realizável por dois oitos, veja Figura 5.17.

Figura 5.16: $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{=1})$. Figura 5.17: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_{\pm 1}, l_{-K}^+)$; À direita o oito $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{-K}^+)$.

a6) $2g_1 + h_2 = 1$. As componentes conexas do complementar $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ devem ser homeomorfas a $\Sigma(0, 1)$ e $\Upsilon(1, 2)$ e os oitos na Figura 5.18 realizam esta decomposição.

Figura 5.18: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_0, l_{-K}^+)$; À direita o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^+, l_{-K}^+)$.

CASO 2 $\mathfrak{NB} \cong \Sigma(1, 1)$. Aqui $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 1)$ e o oito nestas condições é mostrado na Figura 5.19.

CASO 3 $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(1, 2)$.

c1) $2g_1 + 2g_2 = 2$. As componentes conexas de $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ são $\Sigma(0, 1)$ e $\Sigma(1, 1)$ a qual é realizável pelos oitos mostrados na Figura 5.20.

c2) $2g_1 + h_2 = 2$. Sendo assim, a única decomposição possível para o complementar $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é dada pela união disjunta das componentes conexas $\Sigma(0, 1)$ e $\Upsilon(2, 1)$. Esta decomposição é realizável pelos oitos da Figura 5.21.

Figura 5.19: $\mathcal{B}(l_{-K}^+, l_{-K}^-)$. Figura 5.20: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_0, l_K^-)$; no centro o oito $\mathcal{B}(l_K^-, l_K^-)$; à direita o oito $\mathcal{B}(l_K^-, l_{\pm 1})$. Figura 5.21: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_0, l_{-K}^-)$; no centro o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^-, l_{-K}^-)$ à direita o oito $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{-K}^-)$.

c3) Para que $h_1 + h_2 = 2$ é necessário que $h_1 = h_2 = 1$ e, portanto, obtemos as componentes conexas $\Upsilon(1, 1)$ e $\Upsilon(1, 1)$, realizável pelo oito exibidos na Figura 5.22.

c4) Se $2g_1 = 3 - 3 = 0$, então obtemos a componente conexa homeomorfa a $\Sigma(0, 2)$. Os oitos que realizam tal decomposição são aqueles apresentados na Figura 5.23.

CASO 4 $\mathfrak{NB} \cong \Upsilon(2, 1)$. Então, $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1, 1)$ e os oitos que realizam esta decomposição são mostrados na Figura 5.24.

Portanto, para $\Upsilon(3, 0)$ existem 23 tipos de oitos não topologicamente equivalentes (ver Tabela 5.3).

Figura 5.22: $\mathcal{B}(l_{=1}, l_{-k}^{-})$. Figura 5.23: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_K^{-}, l_{-K}^{-})$; no centro o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^{+}, l_K^{-})$; à direita o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^{-}, l_{-K}^{+})$. Figura 5.24: À esquerda o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^{-}, l_{-K}^{-})$ e à direita o oito $\mathcal{B}(l_{-K}^{-}, l_{-K}^{+})$.

No caso da garrafa de Klein, observamos que alguns oitos não são realizáveis, pois existem curvas representantes que se interceptam em mais de um ponto. O mesmo acontece para o caso do 3-projetivo ($h = 3$). Este é o caso das curvas $(l_{=1}, l_{\pm 1})$. Estas duas curvas não formam um oito, assim como também as curvas $(l_{\pm 1}, l_{-K}^{-})$ e $(l_K^{-}, l_{=1})$. Para o caso de superfícies não orientáveis de genus $h \geq 4$, não foi possível obter uma fórmula ou expressão para o número de oitos não topologicamente equivalentes como ocorre no estudo dos oitos mergulhados em superfícies orientáveis.

Os oitos para superfícies não orientáveis serão denotados por $\mathfrak{B}(l_x, l_{x'})(K_1, K_2)$, onde K_1, K_2 são as componentes conexas do complementar $\Upsilon(h, 0) \setminus \mathfrak{NB}$.

s_1 s_2	$l_{\pm 0}$	$l_{\pm 1}$	$l_{=1}$		l_K^-	l_{-K}^-		l_{-K}^+	
$l_{\pm 0}$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(3, 1)$								
$l_{\pm 1}$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$							
$l_{=1}$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$	Não	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$	$\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$					
l_K^-	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(1, 1)$	Não		$\Sigma(0, 1)$ $\Sigma(1, 1)$				
l_{-K}^-	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$	Não	$\Upsilon(1, 1)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$	$\Sigma(0, 2)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(2, 1)$	$\Upsilon(1, 1)$		
l_{-K}^+	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 2)$	$\Sigma(0, 2)$ $\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 2)$	$\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 2)$	$\Sigma(0, 2)$	$\Upsilon(1, 1)$	$\Sigma(0, 1)$ $\Upsilon(1, 2)$	$\Upsilon(1, 1)$

Tabela 5.3: Combinações de curvas representantes e componentes conexas $\Upsilon(3, 0) \setminus \mathfrak{NB}$ para cada combinação possível.

5.3 Invariante para folheações Morse-Bott em superfícies não orientáveis

Esta seção visa definir um invariante topológico completo para a classificação de folheações $\mathcal{MB}$ definidas em superfícies fechadas não orientáveis $\Upsilon(h, 0)$ de genus $h \geq 1$. Para isso, devemos estudar os tipos de folhas singulares que são admissíveis para uma folheação $\mathcal{MB}$, tal como foi feito no Capítulo 2 para a classificação das folheações $\mathcal{MB}$ definidas em superfícies fechadas e orientáveis. Baseados nestas ideias, a seguinte proposição nos permite identificar os oitos que são admissíveis ou realizáveis por folheação $\mathcal{MB}$, definida em superfície fechada não orientável.

Proposição 5.3.1. *Os únicos oitos admissíveis em folheação $\mathcal{MB}$ definida em superfície fechada não orientável são os oitos planares e os oitos projetivos de tipo $\mathfrak{NB}^+$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{MB}$ definida em superfície fechada não orientável $\Upsilon(h, 0)$ com $h \geq 1$ e suponha que $\mathfrak{B} = s_1 \cup_p s_2$ é um oito de $\mathcal{F}$ e p é um ponto de sela de uma função $\mathcal{MB}$, f , que gera $\mathcal{F}$. Dado que p é um ponto de sela, existe uma vizinhança de p ,

Figura 5.25: Vizinhança de um ponto de sela.

Figura 5.26: Vizinhança de pontos de sela para cada um dos oitos.

digamos V_p , com $p \in V_p$, tal que $\mathfrak{NB} \setminus V_p$ consiste na união disjunta de quatro componentes conexas, duas das quais a função assume valores maiores do que $f(p)$ e outras duas, nas quais f assume valores menores do que $f(p)$. Além disso, o bordo de $\mathfrak{NB} \setminus V_p$ consiste de duas curvas regulares, uma curva na qual a função atinge valores maiores do que $f(p)$, e outra na qual a função atinge valores menores do que $f(p)$ (ver Figura 5.25).

Vamos supor que $\mathfrak{B}$ é um oito projetivo de tipo $\mathfrak{NB}^-$. Então, $\mathfrak{NB}$ é homeomorfo a $\Upsilon(1,2)$ e uma das componentes do oito é uma curva de um lado em quanto que a outra componente é uma curva de dois lados. Uma das curvas do seu bordo une necessariamente duas componentes conexas de $\mathfrak{NB} \setminus V_p$; uma na qual a função assume valores maiores do que $f(p)$, e outra na qual a função assume valores menores do que $f(p)$, o que é um absurdo, afinal essa curva é um conjunto de nível regular de f e, portanto, em todos seus pontos f deve assumir um mesmo valor constante (ver Figura 5.26 (c)). Então, p não é um ponto de sela de f e, portanto, o oito projetivo de tipo $\mathfrak{NB}^-$ formado por p não é admissível para a folheação $\mathcal{F}$.

Analogamente, se $\mathfrak{B}$ é um oito Klein (bem seja de tipo $\mathfrak{NB}^-$ ou de tipo $\mathfrak{NB}^+$) ou um oito toroidal, a curva do seu bordo uniria as quatro componentes conexas de $\mathfrak{NB} \setminus V_p$ e, portanto, como no caso anterior, não corresponderia a um nível regular de f (ver Figura 5.26 (a), (b) e (d)). $\square$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathcal{MB}$ em uma superfície fechada e orientável. Se f é uma função $\mathcal{MB}$ que realiza a folheação $\mathcal{F}$, o invariante $\Theta_\xi(\mathcal{F})$ associado a $\mathcal{F}$ não tem vértices associados a círculos singulares de f exceto para a folheação sem selas definida no toro (ver Tabela 3.1). De fato, os círculos singulares de f são curvas fechadas de dois lados, pelo fato destas curvas estarem mergulhadas numa superfície orientável. No entanto, para o caso de folheações $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas e não orientáveis, podem existir círculos singulares da função que realiza a folheação, que são curvas fechadas de um lado. Neste caso, devemos manter este tipo de folhas uma vez que curvas próximas a ela serão curvas de dois lados e, portanto, o comportamento da folheação mudará antes e depois de atingir curvas de um lado. Em outras palavras, círculos singulares de um lado de uma função $\mathcal{MB}$ que realiza uma folheação em uma superfície fechada não orientável, deverão ser identificados em qualquer invariante associado à folheação.

Por outro lado, um círculo singular de uma função $\mathcal{MB}$, que é (como curva) de um lado é um máximo ou um mínimo da função e, portanto, localmente, terá o mesmo comportamento local como no caso de um ponto de centro (ponto de máximo ou mínimo da função).

Definição 5.3.2. *O invariante topológico associado a uma folheação $\mathcal{MB}$, $\mathcal{F}$, definida em uma superfície fechada e não orientável é $\Theta_\xi(\mathcal{F})$, no qual se identifica cada vértice final a dimensão da fibra, o qual pode ser zero (vértices associados a pontos de centros) ou um (vértices associados a círculos singulares de um lado).*

O invariante como na Definição 5.3.2 será denotado por $\Theta_\xi^-(\mathcal{F})$. Ressaltamos aqui que a função ξ identifica a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$ de um oito planar. No entanto, os oitos projetivos de tipo $\mathfrak{NB}^+$ serão identificados no grafo $\Theta_\xi^-(\mathcal{F})$ por um vértice cujo grau de saída e de chegada é um e, portanto, o vértice terá grau dois. Em outras palavras, uma aresta indicará a evolução dos níveis regulares antes de atingir o oito projetivo e a outra aresta

Figura 5.27: À direita, uma folheação $\mathcal{MB}$ em $\Upsilon(1,0)$ e à esquerda, o invariante $\Theta_{\xi}^{-}(\mathcal{F})$.

indicará a evolução dos níveis regulares após passar pelo oito projetivo, mas essas arestas não serão etiquetas em $\Theta_{\xi}^{-}(\mathcal{F})$.

Usando as mesmas ideias empregadas na prova do Teorema 2.3.7, é possível demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 5.3.3. $\Theta_{\xi}^{-}(\mathcal{F})$ é um invariante topológico completo para folheações $\mathcal{MB}$ definidas em superfícies fechadas e não orientáveis.

A seguir, apresentados dois exemplos de folheações $\mathcal{MB}$, definidas no plano projetivo e no 3-projetivo respectivamente, com seus correspondentes invariantes.

Exemplo 5.3.4. Seja f a função altura definida no plano projetivo. Então, os pontos singulares de f são um ponto de máximo, um ponto de mínimo e um ponto de sela. Então a folheação definida pelos conjuntos de nível de f é uma folheação $\mathcal{MB}$. Neste caso, as folhas singulares da folheação correspondem a dois centros e um oito projetivo de tipo $\mathfrak{NB}^{+}$. A folheação e seu respectivo invariante são como mostrados na Figura 5.27. O vértice associado ao oito projetivo é identificado no invariante unicamente com o objetivo de visualizar o oito mas não é necessário etiquetar este vértice.

A superfície $\Upsilon(3,0)$ pode ser vista como a soma conexa de $\Sigma(1,0)$ com $\Upsilon(1,0)$. Uma folheação $\mathcal{MB}$ em $\Upsilon(3,0)$ é como mostrada à esquerda da Figura 5.28. Uma função $\mathcal{MB}$ que realiza essa folheação pode não ser necessariamente uma função altura, mas vamos supor que essa função admita um círculo singular, desenhado por uma linha em vermelho na faixa de Möbius de $\Upsilon(1,0)$. Este círculo singular é uma curva de um lado. Portanto, corresponde a uma folha singular da folheação de dimensão um. As demais folhas singulares são um centro e dois oitos planares.

Figura 5.28: À esquerda, uma folheação $\mathcal{MB}$ em $\Upsilon(3,0)$ e à direita, o invariante $\Theta_{\xi}^{-}(\mathcal{F})$.

Observação 5.3.5. Tendo a classificação dos mergulhos de S^1 em superfícies fechadas não orientáveis, dos oitos em superfícies fechadas não orientáveis de genus $h \leq 3$ e conhecendo um invariante topológico para a classificação dos sistemas $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas não orientáveis construído por meio de um grafo é natural questionarmos sob quais condições um grafo abstrato é realizável como um invariante para sistemas $\mathcal{MB}$ em superfícies fechadas não orientáveis. A resposta a esta pergunta será dada por um teorema da realização que está em desenvolvimento.

Capítulo 6

Trabalhos Futuros

Neste último capítulo vamos descrever alguns problemas em aberto que pretendemos investigar em futuro próximo e estão relacionados ao estudo desenvolvido nesta tese. Todos os problemas abordados são de interesse na teoria dos sistemas integráveis assim como em outras áreas nas quais a teoria desenvolvida nesta tese possa ser aplicada.

6.1 Sistemas em superfícies

6.1.1 Generalização do invariante

O complexo orbital $K(f^t)$ definido em [52] é um invariante usado para a classificação de fluxos contínuos em superfícies, porém não é um invariante completo e nem conexo. Portanto, das considerações feitas nesta tese, parece natural conjecturarmos que

Conjectura 6.1.1. *O complexo orbital $K(f^t)$ definido em [52], junto com o tipo topológico das singularidades de f^t é um invariante completo para fluxos contínuos em superfícies.*

Também questionamos se é possível generalizar o invariante que construímos a partir do grafo de Reeb para outras famílias de sistemas de tal maneira que o invariante generalizado seja completo e esteja definido sobre um grafo conexo.

Alguns casos importantes para os quais pretendemos investigar a generalização do invariante $\Theta_{\xi,\eta}(X)$, definido nesta tese são os seguintes:

(1.) Sistemas com outros tipos de singularidades, diferentes as estudadas nesta tese. Uma maneira de abordar esse problema é determinar o tipo topológico de todas as singularidades admissíveis para essa classe de sistemas. Por exemplo, sistemas integráveis com conexão de selas ou com outros pontos de equilíbrio (ver [19, 79]).

(2.) A classificação topológica dos sistemas planares pode ser considerada na esfera, que é uma compactificação do plano. Neste sentido podem surgir novas singularidades, talvez mais complexas, nos pontos adicionados ao plano para sua compactificação.

Os casos (1) e (2) acima são exemplos de sistemas com singularidades que não são necessariamente Morse-Bott.

6.1.2 *Sistemas com outro tipo de integrabilidade*

Para alguns sistemas integráveis podemos associar uma nova folheação obtida por agrupar algumas das órbitas do sistema original e formando novas curvas fechadas. Essa nova folheação não necessariamente coincide com a folheação gerada pela integral primeira do sistema, como é o caso das folheações Morse-Bott estudadas nesta tese. Então podemos pensar se é possível generalizar a definição de integral primeira e obter a partir dessa definição generalizada o grafo de Reeb correspondente.

Por exemplo, nesta tese as integrais primeiras dos sistemas Morse-Bott tinham como contra-domínio a reta real. Um problema em aberto é considerar a possibilidade do contra-domínio das integrais primeiras ser o círculo. Por exemplo, considere o toro $\Sigma(1, 0) = S^1 \times S^1$ e $f : \Sigma(1, 0) \rightarrow S^1$, definida por $f(\alpha, \beta) = \alpha$. A folheação definida por f é uma folheação regular (ver Figura 6.1). Um sistema Morse-Bott X em $\Sigma(1, 0)$ pode ser construído ao adotar uma orientação arbitrária numa das folhas da folheação definida por f , dessa forma que as órbitas do sistema obtido serão as folhas da folheação. Logo, f é uma integral primeira de X .

Neste estudo se encaixam também funções a valores na reta real que não podem ser integrais primeiras por possuírem pontos de discontinuidade. É o caso da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Essa função é descontínua em $(0, 0)$ e, portanto, não pode ser integral primeira segundo nossa definição. No entanto, a função $\arctan(x + y, x^2 + y^2)$ está definida em $\mathbb{R}^2$, a valores no círculo e contínua em todos os pontos do plano.

Figura 6.1: Folheação regular no toro.

Figura 6.2: Singularidades não orientáveis de uma folheação numa superfície.

6.1.3 Folheações não orientáveis

As folheações não orientáveis (ver [56]) tem propriedade genéricas diferentes daquelas das folheações orientáveis, por exemplo, o tipo de suas singularidades (ver Figura 6.2). Propomos investigar a classificação topológica de tais folheações com as técnicas abordadas nesta tese, o que implica passar do estudo local (da topologia das singularidades) ao estudo global através de um invariante topológico que seja completo.

Como uma aplicação desse estudo teríamos a caracterização topológica das configurações principais das linhas de curvaturas (ou linhas assintóticas) em uma dada superfície. De fato, a configuração principal das linhas de curvatura em uma superfície S é dada por uma tripla $P_S = P(U_S, F_1, F_2)$, onde U_S é o conjunto de pontos umbílicos e F_1, F_2

denotam a folheação minimal e maximal respectivamente em $S \setminus U_S$ (ver [75]). Existe invariante topológico para as folheações F_1 e F_2 que carregue informações a respeito de tais folheações e as relações entre elas e com os pontos umbílicos (ver [41]) que possa ser empregado como invariante para as linhas de curvatura ou linhas assintóticas?

6.1.4 Métodos quantitativos

Poincaré foi o primeiro a introduzir o que ele chamou de “o estudo qualitativo de curvas soluções” em oposição ao “estudo quantitativo”. Ele fez uma analogia desse estudo com o estudo de uma equação algébrica. Poincaré disse: “primeiro, se encontra o número de raízes reais, usando o teorema de Sturm; isto é, a parte qualitativa, então podemos calcular o número dessas raízes numericamente - a parte quantitativa. Analogamente ao estudo das curvas algébricas, Poincaré disse: “primeiro, se constrói a curva, isto é, analisamos quais são as ramificações que são fechadas, limitadas, etc.; após esse passo qualitativo se determina exatamente um certo número de pontos sobre a curva. Dessa maneira o primeiro passo é: “*construire les courbes définies par des équations différentielles*” (1881) ([33]).

Nesta tese, fizemos o estudo qualitativo dos sistemas Morse-Bott em superfícies. Para isso construímos um invariante topológico o qual carrega informação topológica sobre como os oitos imersos numa superfície, informação obtida pela função ξ . Seguindo as idéias de Poincaré, seria interessante obter métodos quantitativos que auxiliem na classificação dos sistemas integráveis em superfícies a partir do estudo local. Por exemplo, dados dois pontos de sela (de um sistema integrável) e suas variedades invariantes como podemos deduzir se há conexão entre as selas? ou como saber qual é a região canônica da sela que contém a curva de tipo $J_{\mathfrak{B}}$? entre outros aspectos.

6.2 Sistemas em variedades 3-dimensionais

6.2.1 Sistemas integráveis em variedades 3-dimensionais

A classificação topológica de curvas em dimensão dois é equivalente à classificação dos nós em dimensão três. No entanto, nós em variedades 3-dimensionais assim como enla-

ces ou links (ver [65]) tem uma certa complexidade vinda do fato que os nós dependem da variedade 3-dimensional na qual se inserem. Então quando falamos de variedades 3-dimensionais, nos interessamos em variedades básicas, como por exemplo, S^3 , $S \times S^1$ onde S é uma superfície, T^3 , $\mathbb{RP}^3$ entre outras. Portanto, para estudar os sistemas integráveis em variedades 3-dimensionais é importante o estudo dos links de órbitas periódicas, os tipos de links que se podem ter, assim como as órbitas periódicas, as selas e o conjunto das suas separatrizes. Em [45] os autores encontraram invariantes para sistemas integráveis e para os campos vetoriais completamente integráveis em S^3 , classificaram links de órbitas periódicas de campos vetoriais integráveis em S^3 e generalizam resultados sobre sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade. Gostaríamos de generalizar alguns dos resultados em [45] como por exemplo, obter a classificação das folheações Morse-Bott definidas em variedades 3-dimensionais.

6.2.2 Sistemas completamente integráveis

Um campo vetorial v definido em S^3 é um sistema Morse-Bott completamente integrável se existirem F_1, F_2 integrais primeiras funcionalmente independentes de v , tal que F_1 e F_2 são funções Morse-Bott e a restrição de F_i , a cada conjunto de nível $I_a(F_j)$, onde $i \neq j$ é uma função Morse-Bott. A seguir, apresentamos um exemplo de campo vetorial Morse-Bott completamente integrável com uma conexão de selas.

Exemplo 6.2.1 ([45]). Considere o campo vetorial definido em $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \left(\left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + x_2^2 \right), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 \left(\left(x_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + x_2^2 \right), \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -x_3.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Exceto pelo fator nas duas primeiras equações, este é o oscilador harmônico. As integrais

primeiras associadas ao sistema são:

$$\begin{aligned} h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_3^2 + x_4^2, \\ h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Fixando $h_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$, o sistema se define em S^3 .

Seja ζ^3 o conjunto definido implicitamente em $\mathbb{R}^4$ pela equação

$$h(x_1, x_2) + x_3^2 + x_4^2 = -21,$$

onde

$$h(x_1, x_2) = -21x_1^2(-1 + x_1^2 + x_2^2) - 27(x_1^2 + x_2^2)^2 + 6(x_1^4 + (1 + x_1^2)x_2^2).$$

Então ζ^3 é uma variedade homeomorfa a S^3 e invariante pelo sistema definido por (6.1) (ver detalhes em [45], Prop. 24). Se restringimos o domínio de definição do sistema (6.1) a ζ^3 então a função F , abaixo descrita, será integral primeira do sistem.

$$F = F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (h(x_1, x_2) + 21)^2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \zeta^3.$$

Na Figura 6.3 apresentamos a função F . Seguindo o sentido de crescimento de F , as singularidades do sistema (6.1) são: uma órbita periódica quando $x_3 = x_4 = 0$ e $F = 0$; uma órbita periódica do tipo centro em $x_1 = 0, x_2 = 0, F = 441$; duas órbitas periódicas do tipo sela em $x_1 = 0, x_2 = \pm \frac{1}{3}$ e $F = \frac{4096}{9}$; duas órbitas periódicas do tipo centro em $x_1 = \pm \frac{1}{2}, x_2 = 0, F = \frac{35721}{64}$.

Propomos investigar a generalização do estudo feito em [45] para outras variedades 3-dimensionais e investigar outros sistemas Hamiltonianos completamente integráveis (ver [9]), para isso pretendemos utilizar a caracterização topológica de suas singularidades, por exemplo.

Figura 6.3: Função Morse-Bott para o sistema (6.1).

6.2.3 Folheações de codimensão um em 3-variedades

Nesta tese estudamos a classificação topológica de folheações de codimensão 1 através do estudo topológico de suas folhas singulares. Um estudo análogo pode ser feito para as folheações de codimensão 1 em 3-variedades. Para isto será necessária a classificação das vizinhanças de órbitas periódicas e de conjuntos de nível singulares de codimensão 1 (em outras palavras, conjuntos de nível singulares 2-dimensionais) em 3-variedades. Isto se relaciona com sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade e com os sistemas integráveis mencionados na seção anterior.

Existem muito outros problemas nos quais podemos aplicar os resultados expostos nesta tese, neste último capítulo apresentamos os problemas mais naturais a serem explorados pela proximidade com as ferramentas aqui abordadas e por darem uma continuidade à pesquisa proposta nesta tese. Acreditamos que as principais ideias presentes nesta tese sejam atraentes e possam ser úteis e acessíveis em investigações que envolvam invariantes, fluxos, classificação topológica de funções e folheações tanto em superfícies como em variedades de dimensões mais altas, pertencentes a área da Geometria e Topologia.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Kh. Aranson, G. R. Belitsky, and E. V. Zhuzhoma, *Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces*, vol. 153, Transl. Math. Monogr., 1996.
- [2] V. I. Arnold, *Singularities of smooth mappings*, Uspehi Mat. Nauk **23** (1968), 1–44.
- [3] ———, *Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert’s 16-th problem*, Math. Phys. Anal. Geom. **10** (2007), 227–236.
- [4] A. Banyaga and D. Hurtubise, *A proof of the Morse-Bott lemma*, Expo. Math **22** (2004), 365–373.
- [5] U. Bauer, X. Ge, and Y. Wang, *Measuring distance between Reeb graphs*, arXiv:1307.2839 (2013), 1–21.
- [6] L. Birbrair, J. Costa, A. Fernandes, and M. Ruas, *K-bi-Lipschitz equivalence of real function-germs*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1089–1095.
- [7] L. Birbrair, A. Fernandes, and D. Panazzolo, *Lipschitz classification of functions on a Hölder triangle*, Algebra i Analiz **20** (2008), 1–8.
- [8] A. V. Bolsinov, *Fomenko invariants in the theory of integrable Hamiltonian systems*, Russian Math. Surveys **52** (1997), 997–1015.
- [9] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems: Geometry, topology, classification*, Boca Raton, Fla. : Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [10] A. V. Bolsinov and A. A. Oshemkov, *Singularities of integrable Hamiltonian systems*, Topological methods in the theory of integrable systems. Camb. Sci. Publ. (2006), 1–67.

- [11] R. Bott, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **7** (1982), 331–358.
- [12] G. Brinkmann, J. Goedgebeur, and B. D. McKay, *Generation of cubic graphs*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **13** (2011), no. 2, 69–79.
- [13] K. Burns and M. Gidea, *Differential geometry and topology. With a view to dynamical systems*, Boca Raton : CRC Press, 2005.
- [14] C. Camacho and B. Scárdua, *On codimension one foliations with Morse singularities on three-manifolds*, Topology Appl. **154** (2007), 1032–1040.
- [15] A. Candel and L. Conlon, *Foliations I*, Grad. Stud. Math., 2003.
- [16] ———, *Foliations II*, Grad. Stud. Math., 2003.
- [17] J. S. Carter, *Classifying immersed curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 281–287.
- [18] M. Cobo, C. Gutierrez, and J. Llibre, *Flows without wandering points on compact connected surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 9, 4569–4580.
- [19] C. C. Conley, *Some aspects of the qualitative theory of differential equations in “Dynamical systems, an international symposium”*, (Cesari, Hale and Lasalle, Eds) Academic Press, New York **1** (1976), 1–12.
- [20] A. R. da Silva, *Peixoto classification of 2-dim. flows revisited*, Dynamics, Games and Science II. Springer Proc. Math. **2** (2011), 639–645.
- [21] K. A. de Rezende, *Smale flows on the three-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 283–310.
- [22] K. A. de Rezende and R. D. Franzosa, *Lyapunov graphs and flows on surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 767–784.
- [23] B. Di Fabio and C. Landi, *The edit distance for Reeb graphs*, arXiv:1411.1544 (2014), 1–30.

- [24] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, 2012.
- [25] P. A. Firby and C. F. Gardiner, *Surface topology*, Ellis Horwood Ltd, 1982.
- [26] A. T. Fomenko, *Differential geometry and topology*, Plenum Publ. Corporation, 1987.
- [27] W. Fulton, *Algebraic topology*, Springer, 1991.
- [28] R. W. Ghrist, P. J. Holmes, and M. C. Sullivan, *Knots and links in three-dimensional flows*, Springer, 1997.
- [29] P. Giblin, *Graphs, surfaces and homology*, Cambridge University Press, New York, 2010.
- [30] J. L. Gross and J. Yellen, *Handbook of graph theory*, 2003.
- [31] C. Gutierrez, *A class of topological foliations on S^2 that are topologically equivalent to polynomial vector fields*, São Paulo Journal of Mathematical Sciences **2** (2008), 29–35.
- [32] F. Harary, *Graphs theory*, Perseus Books, 1994.
- [33] M. W. Hirsch, *The dynamical systems approach to differential equations*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **11** (1984), no. 1, 1–64.
- [34] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [35] M. Kaluba, W. Marzantowicz, and N. Silva, *On representation of the Reeb graph as a sub-complex of manifold*, arXiv:1405.4597v1 [math. GT] (2014), 1–18.
- [36] G. Khimshiashvili and D. Siersma, *Remarks on minimal round funtions*, Banach Center Publications **62** (2004), 159–172.
- [37] E. V. Kulinich, *On topological equivalence of Morse functions on surfaces*, Methods Functional Anal. Topology **1** (1998), 22–28.
- [38] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Springer, 2010.
- [39] H. I. Levine, *Homotopic curves on surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 986–990.

- [40] E. L. Lima, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Coleção Projeto Euclides, 2012.
- [41] R. López Machí and J. Martínez-Alfaro, *Invariants of transverse foliations*, Topology Appl. **159** (2012), 519–525.
- [42] M. A. Marchioli, *Mecânica Quântica no Espaço de fase: I. Formulação de Weyl-Wigner*, Revista Brasileira de Ensino de Física **24** (2002), 421–436.
- [43] J. Martinez-Alfaro, I. S. Meza-Sarmiento, and R. D. S. Oliveira, *Singular levels and topological invariants of Morse Bott integrable systems on surfaces*, To appear in J. Differential Equations (2016).
- [44] J. Martinez-Alfaro, I. S. Meza-Sarmiento, and R. D. S. Oliveira, *Topological classification of simple Morse Bott functions on surfaces*, To appear in Contemp. Math., Amer. Math. Soc. (2016).
- [45] José Martínez-Alfaro and Regilene Oliveira, *Integrable systems on S^3* , Publ. Math. (2014), 333–352.
- [46] W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Springer-Verlag, 1967.
- [47] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. **65** (2011), 75–84.
- [48] Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Transl. Math. Monogr., 2002.
- [49] M. McIntyre, *Bounding immersed curves*, Topology Appl. **78** (1997), 251–267.
- [50] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Perseus Books Publishing, L.L.C., 1984.
- [51] A. Ya. Narmonov and G. Kaypnazarova, *Foliations theory and it's applications*, TWMS J. Pure Appl. Math **2** (2011), 112–126.
- [52] D. Neumann and T. O'Brien, *Global structure of continuous flows on 2-manifolds*, J. Differential Equations **22** (1976), no. 1, 89–110.

- [53] D. A. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 73–81.
- [54] L. I. Nicolaescu, *An invitation to Morse theory*, New York : Springer, London., 2007.
- [55] ———, *Counting Morse functions on the 2-sphere*, Compositio Math. **144** (2008), 1081–1108.
- [56] I. Nikolaev, *Foliations on surfaces*, Springer-Verlag, 2001.
- [57] I. Nikolaev and E. Zhuzhoma, *Flows on 2-dimensional manifolds*, Springer, 1999.
- [58] A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, *Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds*, Sb. Math. **189** (1998), no. 7-8, 1205–1250.
- [59] A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, *Classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds*, Matem. Sbornik **189**, N . 8 (1998), 93–140.
- [60] G. Patanè, M. Spagnuolo, and B. Falcidieno, *A Minimal Contouring Approach to the Computation of the Reeb Graph*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics **15** N 4 (2009), 583–595.
- [61] M. M. Peixoto, *On the classification of flows on two-manifolds*, Dynamical Systems, edited by M.M. Peixoto, Academic Press, New York (1973), 389–419.
- [62] A. O. Prishlyak, *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface*, Topology Appl. **119** (2002), 257–267.
- [63] G. Reeb, *Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique*, C. R Acad. Sci. Paris **222** (1946), 847–849.
- [64] D. Repovš and V. Sharko, *S^1 -Bott functions on manifolds*, Ukrainian Mathematical Journal **64** (2012), 1685–1698.
- [65] D. Rolfsen, *Knots and links*, Math. Lecture Ser., No. 7. Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.

- [66] L. Rosati, *On smooth foliations with Morse singularities*, Topology Appl. **159** (2012), 1388–1403.
- [67] O. Saeki, *Topology of singular fibers of differentiable maps*, Springer, 2004.
- [68] J. C. V. Sampaio, *Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatro cores*, EdUFSCar, 2008.
- [69] B. Scárdua and J. Seade, *Codimension one foliations with Bott-Morse singularities I*, J. Differential Geometry **83** (2009), 189–212.
- [70] ———, *Codimension 1 foliations with Bott-Morse singularities II*, J. Topology **4** (2011), 343–382.
- [71] V. V. Sharko, *On topological equivalence Morse functions on surfaces*, Internat. Conference at Chelyabinsk State Univ., Low-Dimensional Topology and Combinatorial Group Theory (1996), 19–23.
- [72] ———, *Smooth and topological equivalence of functions on surfaces*, Ukrainian Mathematical Journal **55** (2003), 832–846.
- [73] V. V. Sharko, *About Krondrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods Funct. Anal. Topology **12** (2006), 389–396.
- [74] R. Slansky, *Group theory for unified model building*, Physics Reports **79** (1981), 1–128.
- [75] J. Sotomayor and C. Gutierrez, *Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces*, Monografias del IMCA, 1998.
- [76] I. Tamura, *Topology of foliations: An introduction*, Transl. Math. Monogr. V. 97. Amer. Math. Soc., 1992.
- [77] W. Thurston, *Existence of codimension-one foliations*, Ann. of Math. **2** (1976), 249–268.
- [78] X. Wang, *The C^* -algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds*, Ergodic Theory Dynam. Systems **10** (1990), no. 3, 565–597.

- [79] Y. S. Xiang, *The existence of trajectories joining critical points*, J. Differential Equations **66** (1987), 230–242.
- [80] J. W. T. Youngs, *The extension of a homeomorphism defined on the boundary of a 2-manifold*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 805–808.
- [81] C. K. Zachos, D. B. Fairlie, and T. L. Curtright, *Quantum mechanics in phase space. An overview with selected papers*, World Scientific Series in 20th Century Physics **34** (2012), 1–55.

Índice Remissivo

- $\mathfrak{B}(1)$, 66
- $\mathfrak{B}(3)$, 66
- $\mathfrak{B}(g_i, g_j)$, 66
- $\mathfrak{B}(l_0, l_i)$, 64
- $\mathfrak{B}(l_i, l_j, g - (i + j))$, 65
- $\mathfrak{B}(l_i, l_j, j - i)$, 65
- $\mathfrak{B}(l_n, g_i, g_j)$, 65
- f -orientação, 106
- n -aresta, 80
- n -ciclo, 17
- árvore, 17
- órbita periódica, 54

- adjacente, 17
- aresta, 16
- aresta orientada, 17

- círculo mergulhado, 54
- círculo mergulhado orientado, 54
- campo vetorial, 36
- canônico, 105
- característica de Euler, 13
- ciclo, 17
- ciclo básico, 20
- ciclo orientado, 17
- ciclo rank, 17

- complexo orbital, 41
- componente de um oito, 58
- conjunto de nível, 19
- conjunto singular, 19
- curva de dois lados, 15
- curva de um lado, 15
- curva equatorial, 94
- curva essencial, 15
- curva fechada simples, 15
- curva homológica a zero, 15
- curva homotópica a zero, 15
- curva não equatorial, 94
- curva que não separa, 16
- curva singular, 94

- deformação elementar direta MB, 108
- deformação elementar inversa MB, 108
- diagrama de Dynkin, 18
- distinção da aresta, 80

- factor de Stein, 20
- fatiamiento, 100
- fibra singular, 20
- fibras, 19
- fluxo, 35
- fluxos Morse-Smale, 41

- folha da, 29
- folha singular, 30
- folheação de classe C^r , 29
- folheação de Liouville, 49
- folheação minimal, 80
- folheação Morse-Bott, 30
- folheação singular, 30
- função η , 101
- função μ , 95
- função ξ , 72
- função de Morse, 22
- função de Wigner, 24
- função Morse-Bott, 21
- função redonda, 25
- função simples, 20
- funções $\mathcal{MB}$ conjugadas, 99
- funções de Morse equivalentes, 98
- funções topologicamente conjugadas, 99
- funções topologicamente equivalentes, 98
- grafo, 16
- grafo abstrato, 80
- grafo conexo, 17
- grafo de Lyapunov, 48
- grafo de Reeb, 20
- grafo de Reeb ordenado, 101
- grafo de um sistema $\mathcal{MB}$, 94
- grafo dirigido, 17
- grafo gerador, 80
- grau, 18
- grau de chegada, 17
- grau de saída, 17
- incidente, 17
- integral primeira, 36
- invariante completo para sistemas, 95
- invariante topológico completo, 38
- laço, 17
- Lema da Colagem, 32
- Lema de Morse-Bott, 21
- Liouville equivalentes, 50
- multigrafo, 17
- nó, 33
- oito, 31, 58
- oito Klein, 118
- oito não separador, 59
- oito planar, 62
- oito projetivo, 118
- oito separador, 59
- oito toroidal, 62
- orientação cíclica, 62
- ponto de equilíbrio, 35
- ponto regular, 19
- ponto singular, 19
- pontos de sela, 28
- primeiro grupo de homologia, 15
- representação poligonal de uma superfície, 9
- singularidades, 19
- sistema Hamiltoniano, 39

sistemas topologicamente equivalentes, 38

soma conexa disjunta, 9

subgrafo, 17

subvariedade crítica não degenerada, 21

superfície fechada, 26

teorema de classificação de superfícies, 12

trajetória, 35

Transformação I, 81

Transformação II, 82

transformações de Fabio-Landi, 108

triangulação de uma superfície compacta, 9

união das folheações, 81

vértice, 16

vértice fonte, 18

vértice interior, 18

vértice poço, 18

valor regular, 19

valor singular, 19

valor singular essencial, 100

variedade folheada, 29

vizinhança regular, 16