SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 20/02/2004

Assinatura: Ana Paula Jampaio Freire

Existência e concentração de soluções para equações de Schrödinger ¹

Alex Eduardo Andrade Borges

Orientador: *Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

*Aos meus pais,
esposa e filho,
com amor...*

Agradecimentos

Acima de tudo a Deus, por estar sempre ao meu lado.

Aos meus pais, **Carlos** e **Ninha**, pelo amor, preocupação e apoio que sempre manifestaram e principalmente pelo esforço que fizeram para que eu tivesse oportunidade de estudo e conseguisse concluir mais esta etapa da minha vida.

À amada esposa **Vânia**, por ter sido amante e companheira no decorrer deste percurso tão cheio de surpresas.

Ao meu pequenino **Luís Felipe**, por ter sido uma das surpresas maravilhosas da minha vida.

Ao Prof. Sérgio Henrique Monari Soares, pela orientação, dedicação, paciência, amizade e seriedade profissional com que conduziu este trabalho.

Aos meus irmãos e familiares que acreditaram e torceram por mim.

À turma de matemática/98 da USP e aos amigos da pós graduação, que sempre me incentivaram, me ajudaram de alguma forma ultrapassar muitos obstáculos e tornaram esta caminhada mais suave.

À todos os professores e funcionários do ICMC, que de muitas formas contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos Professores Valdir e Janete pelos anos de orientação em iniciação científica.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigado!

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a existência e o comportamento de concentração de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{p-1}\psi.$$

Sob diferentes hipóteses em V , várias condições suficientes para a existência de soluções não triviais são estabelecidas. Em particular, quando V satisfaz uma certa condição no infinito, é provado que essas soluções se concentram em pontos de mínimo global de V quando $h \rightarrow 0$.

Abstract

The aim of this work is to study the existence and the concentration behavior of standing wave solutions of the nonlinear Schrödinger equation

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - \gamma|\psi|^{p-1}\psi.$$

Making different assumptions on V , various sufficient conditions for the existence of non-trivial solutions are established. In particular, under certain condition on V at infinity, it is proved that these solutions concentrate at global minimum points of V as $h \rightarrow 0$.

Sumário

Introdução	1
1 Existência de Soluções para Equações de Schrödinger com Coeficientes Periódicos	5
2 Existência de Soluções para Equações de Schrödinger	14
3 Concentração de Soluções de Equações de Schrödinger	31
A Diferenciabilidade do Funcional Associado	42
B Teorema do Passo da Montanha	45
C Princípio Variacional de Ekeland	48
D Lema de Lions	53
Referências Bibliográficas	54

Introdução

Neste trabalho, estudamos alguns resultados de existência de soluções para equações elípticas não lineares em $\mathbb{R}^N$ da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (1)$$

onde $N \geq 3$; $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ e o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e limitado inferiormente.

A equação (1) surge no estudo de existência de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear do tipo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(x)\psi - \gamma |\psi|^{p-1} \psi. \quad (2)$$

Ou seja, quando se procura por soluções do problema (2) da forma $\psi(x, t) = e^{\frac{-iEt}{\hbar}} u(x)$, o problema se reduz a uma equação do tipo

$$-\hbar^2 \Delta u - (V(x) - E)u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

Uma escolha apropriada em E torna $V - E$ limitado inferiormente por zero. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor em todo o trabalho que $E = 0$ e que V é limitado inferiormente por uma constante positiva. Desta forma, a equação (3) pode ser escrita como

$$-\hbar^2 \Delta u - V(x)u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

ou equivalentemente

$$-\Delta v - V(hx)v = |v|^{p-1}v, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5)$$

onde $v(x) = u(hx)$ e $\inf V > 0$.

Em [6], Floer e Weinstein estudaram a equação (4) quando $N = 1$ e $p = 3$. Admitindo que o potencial V é limitado estes autores provaram que para cada $h > 0$ pequeno, existe uma solução u_h de (4) cujo máximo global converge para cada ponto crítico não degenerado do potencial V , previamente fixado, o que caracteriza um fenômeno de concentração.

Em [12, 13], Oh generalizou esse resultado para dimensões superiores sob certas hipóteses no potencial V no infinito e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$.

Em [3], Ding e Ni provaram que se $N \geq 2$ e V é radial então para todo $h > 0$, a equação (4) possui uma solução radial positiva com energia mínima entre todas as soluções radiais não triviais em $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Em [15], Rabinowitz provou que se o potencial V for periódico, o problema (4) possui uma solução não trivial. Em [16], Rabinowitz mostrou que a equação (4) possui uma solução não trivial de energia mínima para todo $h > 0$ se

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$$

ou para todo $h > 0$ suficientemente pequeno se

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x). \quad (6)$$

Em [17], Wang, motivado por uma questão feita por Rabinowitz em [16], estudou o comportamento de concentração das soluções positivas de energia mínima da equação (4) encontradas em [16], quando $h \rightarrow 0^+$. Wang provou que se (6) ocorre, então qualquer seqüência de soluções positivas de energia mínima da equação (4) contém uma subseqüência concentrando em um ponto de mínimo global do potencial V , quando $h \rightarrow 0^+$.

O trabalho [4], de Felmer e del Pino, foi o primeiro a tratar o caso degenerado para a equação (4) do ponto de vista local. Eles criaram um método de penalização para encontrar soluções do tipo passo da montanha que se concentram em torno de mínimos locais

de V , com degenerescência arbitrária. Em [5], Felmer e del Pino generalizaram o método para construir uma família de soluções com vários picos de concentração localizados nas proximidades de qualquer conjunto finito de mínimos locais de V previamente fixado.

Muitos trabalhos tratam do caso em que o potencial V é constante e a equação (4) é considerada em domínio limitado, entre os mais relevantes citamos os trabalhos de Ni e Takagi [9, 10], e Ni e Wei [11]. Em [9, 10], Ni e Takagi provaram que uma solução de energia mínima para o problema de Neumann

$$\begin{cases} -h^2 \Delta u + u - u^p = 0, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7)$$

possui exatamente um ponto de máximo local (portanto global) em $\overline{\Omega}$, isto é, um único pico, o qual localiza-se na fronteira de Ω e, a menos de subsequência, concentra-se em torno de um ponto onde a curvatura média maximiza-se. Por outro lado, em [11], Ni e Wei provaram que uma solução de energia mínima do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -h^2 \Delta u + u - u^p = 0, & \text{em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

necessariamente concentra-se em torno de um ponto mais central do domínio Ω , isto é, em torno de um ponto de máxima distância a fronteira de Ω .

Esta dissertação de Mestrado está organizada do seguinte modo: no Capítulo 1, seguindo Rabinowitz [15], estudamos o problema (1) para o caso em que o potencial V é periódico. No Capítulo 2, usando Rabinowitz [16], estudamos o mesmo problema quando potencial V satisfaz a condição

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq V_\infty, \quad (9)$$

para alguma constante positiva V_∞ .

Por fim, no Capítulo 3, explorando parte do artigo [17] de Wang estudamos o comportamento de concentração das soluções u_h de (4) obtidas no Capítulo 2, quando $h \rightarrow 0$.

Informamos que os resultados abordados neste trabalho são válidos para uma classe mais geral de não linearidades $f(x, u)$. Preferimos lidar somente com o caso particular

em que $f(x, u) = f(u) = u^p$, para evitar dificuldades técnicas adicionais e evidenciar os métodos utilizados para estudar a existência e a concentração de soluções.

Capítulo 1

Existência de Soluções para Equações de Schrödinger com Coeficientes Periódicos

Neste capítulo iremos considerar a seguinte equação:

$$-\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.1)$$

satisfazendo:

(V₁) $V \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e é X_l periódica em x_l , $1 \leq l \leq N$.

(V₂) $V(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

A dificuldade presente aqui é que em domínios ilimitados as imersões de Sobolev, em geral, não são compactas, de modo que o funcional associado a equação pode não satisfazer a condição de Palais-Smale. No entanto, sob a condição de periodicidade da função potencial V , o problema de existência de solução de (1.1) fica reduzido à análise do problema em domínio limitado.

A idéia, então, é mostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução u_k de (1.1) que é kX_i periódica em x_i , $1 \leq i \leq N$. A existência de u_k é dada por meio do Teorema do Passo da Montanha. Usando resultados de regularidade elíptica, obtemos uma estimativa uniforme de u_k , o que permite extrair uma subsequência que converge para uma solução do problema (1.1).

Teorema 1.1. *Se (V_1) - (V_2) são satisfeitas e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, $N > 2$, então a equação (1.1) possui uma solução clássica não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Observação 1.2. *O resultado acima é válido para uma situação mais geral, mais precisamente quando a não linearidade $f(x, u)$ satisfaz:*

(f_1) $f \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e é X_l periódica em x_l , $1 \leq l \leq N$.

(f_2) $f(x, 0) = 0 = f_u(x, 0)$.

(f_3) Existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que

$$|f(x, z)| \leq b_1 + b_2|z|^s,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R}$, onde $1 < s < \frac{N+2}{N-2}$, se $N > 2$.

(f_4) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x, z) \equiv \mu \int_0^z f(x, t) dt \leq z(f(x, z)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Vejamos a demonstração do Teorema 1.1.

Demonstração: Seja

$$Q_k = \{x \in \mathbb{R}^N \mid -\frac{k}{2}X_i \leq x_i \leq \frac{k}{2}X_i, \ 1 \leq i \leq N\} \quad (1.2)$$

e considere o conjunto

$$E_k = \{u \in H^1(Q_k) : u \text{ é } kX_i \text{ periódico em } x_i, \ 1 \leq i \leq N\} \quad (1.3)$$

O conjunto E_k munido com a norma

$$\|u\|_k^2 \equiv \int_{Q_k} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx. \quad (1.4)$$

é um espaço de Hilbert.

Para $u \in E_k$, considere o funcional

$$I_k(u) = \frac{1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{p+1} \int_{Q_k} |u|^{p+1} dx. \quad (1.5)$$

Pelo Corolário A.6, Apêndice A, o funcional $I_k \in C^2(E_k, \mathbb{R})$ e

$$I'_k(u)v = \int_{Q_k} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) dx - \int_{Q_k} |u|^{p-1}uv dx,$$

para todo $v \in E_k$. Assim, os pontos críticos de I_k em E_k são soluções fracas de (1.1). Além disso, tais soluções são kX_i periódicas em x_i , $1 \leq i \leq N$.

Para encontrar pontos críticos de I_k em E_k , aplicamos o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [1], o qual faz uso da seguinte condição de compacidade.

Definição 1.3. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Uma sequência (u_n) é uma sequência de Palais-Smale no nível c $((PS)_c)$ relacionada a I se*

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0.$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente em X .

Teorema 1.4. *(Teorema do Passo da Montanha) Sejam X um espaço de Hilbert e $I \in C^2(X, \mathbb{R})$ satisfazendo $(PS)_c$. Suponha que $I(0) = 0$ e*

(ϕ_1) Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $b := \inf I(u)|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,

(ϕ_2) Existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leq I(0)$.

Então, I possui um valor crítico $c \geq \alpha$. Além disso, c é caracterizado por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: Veja Teorema B.2, Apêndice B.

No que segue, com o objetivo de encontrar soluções fracas de (1.1), vamos verificar que I_k satisfaz as condições geométricas (ϕ_1) , (ϕ_2) e a condição (PS).

Para verificar (ϕ_2) , escolhendo $u \in E_k - \{0\}$ e $\beta \geq 0$ temos

$$I_k(\beta u) = \frac{\beta^2}{2} \|u\|_k^2 - \frac{\beta^{p+1}}{p+1} \int_{Q_k} |u|^{p+1} dx.$$

Como $p+1 > 2$, $I_k(\beta u) \rightarrow -\infty$, quando $\beta \rightarrow \infty$. Portanto, (ϕ_2) é satisfeita.

Para verificar (ϕ_1) , sendo $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, temos pela imersão de Sobolev que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{p+1} \leq C \|u\|_k.$$

Assim,

$$I_k(u) = \frac{1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{p+1} \int_{Q_k} |u|^{p+1} dx \geq \frac{1}{2}\|u\|_k^2 - \frac{C}{p+1} \|u\|_k^{p+1}.$$

Portanto, para todo $u \in E_k$ tal que $\|u\|_k = \rho$, com $\rho = \left(\frac{p+1}{4C}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, temos $I_k(u) \geq \alpha$, $\alpha = \frac{\rho^2}{4}$; o que verifica a condição (ϕ_1) .

A seguir, vamos verificar que I_k satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ em E_k . Para isso, seja (u_m) uma sequência em E_k tal que

$$I_k(u_m) \rightarrow c, \quad I'_k(u_m) \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Primeiramente, vamos mostrar que (1.6) implica que a sequência (u_m) é limitada em E_k . De fato, fixe $2 < \mu \leq p+1$, então

$$\begin{aligned} I_k(u_m) - \frac{1}{\mu} I'_k(u_m) u_m &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|_k^2 + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{Q_k} |u_m|^{p+1} dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|_k^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{(\mu-2)}{2\mu} \|u_m\|_k^2 \leq |I_k(u_m) - \frac{1}{\mu} I'_k(u_m) u_m| \leq \overline{M} + \frac{1}{\mu} \|I'_k(u_m)\| \|u_m\|_k \quad (1.7)$$

Suponhamos por contradição que (u_m) não seja limitada em E_k . Logo, existe uma subsequência (u_{n_i}) de (u_m) com $\|u_{n_i}\|_k \rightarrow \infty$. Dividindo ambos os lados de (1.7) por $\|u_{n_i}\|_k$, obtemos

$$\frac{(\mu-2)}{2\mu} \|u_{n_i}\|_k \leq \frac{\overline{M}}{\|u_{n_i}\|_k} + \frac{1}{\mu} \|I'_k(u_{n_i})\|.$$

Usando que $I'_k(u_{n_i}) \rightarrow 0$, esta última expressão mostra que (u_{n_i}) é limitada, contradizendo $\|u_{n_i}\|_k \rightarrow \infty$. Portanto, (u_m) é limitada em E_k .

Tomando, se necessário, uma subsequência de (u_m) , podemos admitir que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ fraco em } E_k \quad (1.8)$$

$$u_m \rightarrow u \text{ forte em } L^s(Q_k), \text{ para todo } 2 \leq s < 2^* := \frac{2N}{N-2}. \quad (1.9)$$

Em particular, para $s = p+1$, $u_m \rightarrow u$ em $L^{p+1}(Q_k)$. Agora, observe que

$$\|u_m - u\|^2 = I'_k(u_m)(u_m - u) - I'_k(u)(u_m - u) + \int_{Q_k} ((u_m)^p - (u)^p)(u_m - u) \quad (1.10)$$

Combinando (1.6) e (1.9),

$$I'_k(u_m)(u_m - u) - I'_k(u)(u_m - u) \rightarrow 0, \text{ quando } m \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \int_{Q_k} ((u_m)^p - (u)^p)(u_m - u) dx \right| &\leq C_1 (\|u_m\|_{p+1}^p + \|u\|_{p+1}^p) \|u_m - u\|_{p+1} \\ &\leq C_2 \|u_m - u\|_{p+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Logo, de (1.10)-(1.12), $u_m \rightarrow u$ em E_k , quando $m \rightarrow \infty$, e com isto, I_k satisfaz $(PS)_c$ em E_k .

Considere o nível minimax associado ao funcional I_k dado por

$$c_k = \inf_{g \in \Gamma} \max_{\theta \in [0,1]} I_k(g(\theta)), \quad (1.13)$$

onde

$$\Gamma_k = \{g \in C([0, 1], E_k) : g(0) = 0, \quad g(1) = e\}. \quad (1.14)$$

Pelo Teorema do Passo da Montanha, c_k é um valor crítico positivo de I_k , isto é, existe um $u_k \in E_k$ tal que

$$I_k(u_k) = c_k \quad e \quad I'_k(u_k) = 0. \quad (1.15)$$

O que prova a existência de uma solução fraca não trivial de (1.1).

A condição em p permite aplicar um argumento de regularidade conhecido na literatura por *bootstrap* para:

- i) mostrar que u_k é solução clássica da equação (1.1) e que pertence à $C^{2,\alpha}(Q_k, \mathbb{R})$ para todo $\alpha \in (0, 1)$;
- ii) fornecer estimativas para u_k em algumas normas, principalmente em $L^\infty(Q_k)$ e $C^{2,\alpha}(Q_k, \mathbb{R})$.

Observamos que estas estimativas dependem de k . Assim, para mostrar que a sequência u_k converge para uma solução de (1.1), é necessário estabelecer uma estimativa uniforme de u_k em alguma dessas normas. Antes de fazermos isso, vamos estabelecer um limitante superior para c_k que independa de k .

Escolha $\varphi_1 \in E_1 - \{0\}$ tal que $\varphi_1 \equiv 0$ numa vizinhança de ∂Q_1 e

$$I_1(\varphi_1) \leq 0. \quad (1.16)$$

Defina $\varphi_k(x) = \varphi_1(x)$ em Q_1 , e $\varphi_k(x) = 0$ em $Q_k \setminus Q_1$. Estendendo φ_k periodicamente, $\varphi_k \in E_k$. Seja $g_k(\theta) = \theta \varphi_k$, para $\theta \in [0, 1]$. Então, pela definição de φ_k e por (1.16), temos que $g_k \in \Gamma_k$ e

$$c_k \leq \max_{\theta \in [0,1]} I_k(g_k(\theta)) = \max_{\theta \in [0,1]} I_1(\theta \varphi_1) \equiv M. \quad (1.17)$$

Note que M independe de k .

A estimativa (1.17) fornece uma limitação superior para u_k em E_k independente de k .

Em verdade, temos:

$$c_k = I_k(u_k) - \frac{1}{2} I'_k(u_k) u_k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{Q_k} |u|^{p+1} dx \quad (1.18)$$

Então por (1.4)-(1.5) e (1.17)-(1.18),

$$\begin{aligned} \|u_k\|_k^2 &= 2 \left(c_k + \frac{1}{p+1} \int_{Q_k} |u|^{p+1} dx \right) = 2 \left(1 + \frac{2}{p-1} \right) c_k \\ &\leq 2 \left(1 + \frac{2}{p-1} \right) M \equiv M_1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Proposição 1.5. *Seja O um conjunto aberto limitado em $\mathbb{R}^N$. Então, para qualquer $\alpha \in (0, 1)$, existem constantes positivas K_1 e K_2 tais que*

$$\|u_k\|_{L^\infty(O)} \leq K_1 \quad (1.20)$$

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(O)} \leq K_2 \quad (1.21)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, com K_1 dependendo do diâmetro de O e K_2 dependendo do diâmetro de O e de α .

Demonstração: É suficiente mostrar as estimativas para um k suficientemente grande, em geral, $k \geq k_0$ onde $O \subset\subset Q_{k_0}$. Escolha $\hat{O}$ tal que $O \subset\subset \hat{O} \subset\subset Q_{k_0}$.

Pelas estimativas elípticas em L^p (cf. Teorema 9.11, [8]), para todo $p \in (1, \infty)$ e $u \in W^{2,p}(\hat{O})$,

$$\|u\|_{W^{2,p}(O)} \leq K_3 (\|f(u)\|_{L^p(\hat{O})} + \|u\|_{L^p(\hat{O})}), \quad (1.22)$$

Assim, como anteriormente: (u_k) limitada em $L^{2^*}(O_j)$, $(|u_k|^p)$ limitada em $L^{p_0}(O_j)$, implicava (u_k) limitada em $W^{2,p_0}(O_{j-1})$, agora temos: (u_k) limitada em $L^{t_0}(O_j)$, $(|u_k|^p)$ limitada em $L^{p_1}(O_j)$, o que implica (u_k) limitada em $W^{2,p_1}(O_{j-1})$, onde $p_1 = \frac{t_0}{p} > \frac{2^*}{p} = p_0$.

Se $p_1 > \frac{N}{2}$ então, aplicando o Passo 1, (u_k) é limitada em $L^\infty(O_{j-1})$ e, portanto, (u_k) é limitada em $L^\infty(O)$.

Se $p_1 = \frac{N}{2}$, então, aplicando o Passo 2, (u_k) é limitada em $L^\infty(O_{j-2})$ e, portanto, (u_k) é limitada em $L^\infty(O)$.

Se $p_1 < \frac{N}{2}$, então (1.23) mostra que (u_k) é limitada em L^{t_1} onde

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_0} - \frac{2}{N} = p \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{2^*} \right) + \frac{1}{t_0}.$$

Continuando este processo, na j -etapa teremos:

Ou $p_j \geq \frac{N}{2}$ e, portanto, (u_k) é limitada em $L^\infty(O)$, ou $p_j < \frac{N}{2}$ e

$$0 < \frac{1}{t_j} = \frac{1}{p_j} - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i-1}} \right) + \frac{1}{t_0} = p \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{2^*} \right) + \frac{1}{t_0}$$

$$\text{Daí, } 0 < -jp \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{t_0} \right) + \frac{1}{t_0}, \text{ ou seja, } jp \left(\frac{1}{2^*} - \frac{1}{t_0} \right) < \frac{1}{t_0},$$

contrariando (1.26). Logo (1.20) está satisfeito.

Por fim, para provar (1.21) usaremos as estimativas de Schauder [8] para o problema (1.1). Para qualquer $\alpha \in (0, 1)$ e $O \subset\subset \hat{O} \subset\subset Q_{k_0}$,

$$\|u_k\|_{C^{2,\alpha}(O)} \leq K_5 (\|f(u_k)\|_{C^\alpha(\hat{O})} + \|u_k\|_{L^\infty(\hat{O})}) \quad (1.27)$$

onde $f(u_k) = |u_k|^{p-1}u_k$ e K_5 depende de N , α , dos diâmetros de O e $(\hat{O} - O)$ e da limitação $C^\alpha(Q_1)$ de V .

Por (1.20) e (1.27), para obter (1.21), basta estimar $(f(u_k))$ em $C^\alpha(\hat{O})$. Para isso, usando a desigualdade do Valor Médio

$$\frac{|f(u_k(x)) - f(u_k(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{\|Df(u_k(z))\| \|\nabla u_k(z)\| |x - y|}{|x - y|^\alpha},$$

com $z = (1 - t)x + ty$, para algum $t \in (0, 1)$.

Agora, por (1.20) e usando (1.22) com $p > N$ obtemos uma limitação uniforme para u_k em C^1 , via imersão de Sobolev. Logo, existe uma constante positiva K_6 tal que, para todo k

$$\|f(u_k)\|_{C^\alpha(\hat{O})} \leq K_6.$$

Consequentemente, por (1.27), a verificação de (1.21) está completa.

Observação 1.6. *Combinando os resultados obtidos pelo processo de bootstrap temos:*

$$\|u_k\|_{L^\infty(O)} \leq K\|u_k\|_{H^1(\hat{O})} \leq K\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq KM_1. \quad (1.28)$$

As limitações da Proposição 1.5 e o Teorema de Arzelà-Ascoli implicam que uma subsequência de (u_k) converge em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ para $u \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ solução de (1.1). Além disso, por (1.19) temos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq M_1. \quad (1.29)$$

Falta mostrar que u é não trivial. Multiplicando a equação (1.1) por u_k e integrando por partes obtemos

$$\|u_k\|_k^2 = \int_{Q_k} |u_k|^{p+1} dx.$$

Pela desigualdade de Poincaré

$$\|u_k\|_k^2 \leq K_7 \|u_k\|_{L^\infty}^{p-1} \|u_k\|_k^2$$

com K_7 independente de k . Como $\|u_k\|_k > 0$ pois $I_k(u_k) = c_k > 0$ temos,

$$\|u_k\|_{L^\infty}^{p-1} \geq \frac{1}{K_7} > 0. \quad (1.30)$$

Note que I_k é simétrico em $\mathbb{Z}^N$, isto é, se $j = (j_1, \dots, j_N) \in \mathbb{Z}^N$, $u \in E_k$ e

$$(\tau_j u)(x) = u(x_1 + j_1 X_1, \dots, x_N + j_N X_N),$$

então

$$I_k(\tau_j u) = I_k(u).$$

Além disso, quando u_k for ponto crítico de I_k em E_k , então $\tau_j u_k$ também será para todo $j \in \mathbb{Z}^N$. Consequentemente,

$$\max_{Q_k} |u_k| = \|u_k\|_{L^\infty(Q_k)} = \max_{Q_1} (\varphi_k), \quad (1.31)$$

onde φ_k é uma função construída a partir de $\tau_j u_k$, para algum $j \in \mathbb{Z}^N$, se necessário for (cf. página 5 a definição de φ_k).

Desde que $u_k \rightarrow u$ em L_{loc}^∞ , se $u \equiv 0$, $u_k \rightarrow 0$ uniformemente em Q_1 , contrariando (1.30).

Logo u é uma solução não trivial da equação (1.1).

■

Capítulo 2

Existência de Soluções para Equações de Schrödinger

Neste capítulo, consideraremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.1)$$

no qual, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$ ou $1 < p$ se $N = 2$ e $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz:

(V₃) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(V₄) Existe uma constante positiva V_∞ tal que

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq V_\infty.$$

A prova da existência de solução para (2.1) será feita usando métodos variacionais. Para isto, consideraremos E o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da seguinte norma:

$$\|u\|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx.$$

Por (V₃), E está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Definimos o funcional $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (2.1) e dado por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx, \quad (2.2)$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Pelo Corolário A.6, Apêndice A, o funcional I está bem definido em E e $I \in C^2(E, \mathbb{R})$. Além disso, todo ponto crítico de I é uma solução fraca de (2.1). Aplicando os argumentos utilizados no Capítulo 1, essa solução fraca também é uma solução clássica de (2.1).

Uma condição necessária para que $u \in E$ seja um ponto crítico de I é que

$$I'(u)u = 0.$$

Esta condição define o que na literatura é chamado de variedade de Nehari e dada por

$$\mathcal{N} = \{u \in E - \{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx = \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1}dx\}$$

Tal qual fizemos no Capítulo 1, o funcional I satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, exceto possivelmente a condição Palais-Smale. No entanto, utilizando propriedades dos níveis de energia, mostraremos que I possui um valor crítico positivo. A seguir recordaremos a definição de seqüência $(PS)_c$ e enunciaremos a versão do Teorema do Passo da Montanha que utilizaremos:

Definição 2.1. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Uma seqüência (u_n) é uma seqüência de Palais-Smale no nível c (seqüência $(PS)_c$) relacionada a I se*

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Teorema 2.2. *Sejam X um espaço de Hilbert real e $I \in C^2(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e*

(ϕ_1) Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $b := \inf I(u)|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,

(ϕ_2) Existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leq I(0)$.

Então, existe uma seqüência $(PS)_c$, com $c \geq \alpha$, onde

$$c := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)), \quad (2.4)$$

sendo

$$\Gamma := \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Demonstração: Veja Teorema B.2 do Apêndice B.

No que segue daremos uma caracterização do nível minimax c obtido no Teorema anterior. Primeiramente notemos que para qualquer $u \in E - \{0\}$ e $t > 0$, definindo

$$\sigma(t) \equiv I(tu) = \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1}dx$$

temos

- i) $\sigma(0) = 0$,
- ii) $\sigma(t) < 0$ para t suficientemente grande,
- iii) $\sigma(t) > 0$ para t suficientemente pequeno.

Por isso, o $\max_{t \geq 0} \sigma(t)$ existe e como veremos é atingido para um único valor de t . De fato, $\sigma'(t) = 0$ é equivalente a

$$t\|u\|^2 - t^p \int (u^+)^{p+1} dx = 0, \quad (2.5)$$

o que implica

$$t = \left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|_{p+1}^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

pois $u \in E - \{0\}$.

Consequentemente, isto permite definir uma aplicação $\varphi(u) : E - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que a cada $u \in E - \{0\}$ faz corresponder $t = \varphi(u)$ para o qual

$$\max_{t \geq 0} \sigma(t) = \sigma(\varphi(u)).$$

Além disso, para cada $u \in E - \{0\}$, $t = \varphi(u)$ é o único valor de $t > 0$ tal que $tu \in \mathcal{N}$. Para ver isto, basta multiplicar (2.5) por $t = \varphi(u)$.

Proposição 2.3. *A aplicação $E - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ : u \mapsto \varphi(u)$ é contínua.*

Demonstração: Seja $u_m \rightarrow u$ em $E - \{0\}$. Então

$$\varphi(u_m)^2 \|u_m\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_m) u_m^+)^{p+1} dx. \quad (2.6)$$

Temos que $\varphi(u_m) \leq 1$ ou $\varphi(u_m) > 1$. Como veremos a seguir basta considerarmos este último caso. Seja $\mu \in (2, p+1)$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_m) u_m^+)^{p+1} dx &\geq \frac{\mu}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi(u_m) u_m^+)^{p+1} dx \\ &\geq \frac{\mu}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} [\varphi(u_m)]^\mu (u_m^+)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\varphi(u_m)^2 \|u_m\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(u_m)^{p+1} (u_m^+)^{p+1} dx \geq \frac{\mu}{p+1} \varphi(u_m)^\mu \int_{\mathbb{R}^N} (u_m^+)^{p+1} dx$$

o que implica que

$$\varphi(u_m)^{\mu-2} \leq \frac{(p+1)\|u_m\|^2}{\mu \int_{\mathbb{R}^N} (u_m^+)^{p+1} dx} \rightarrow \frac{(p+1)\|u\|^2}{\mu \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx}, \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

Segue que $\varphi(u_m)$ é limitada, e uma subsequência de $\varphi(u_m)$ converge para $\bar{\varphi}$. Se $\bar{\varphi} = 0$, dividimos (2.6) por $\varphi(u_m)^2$ e obtemos $\|u\| = 0$ quando $m \rightarrow \infty$, contrariando assim que $u \in E - \{0\}$.

Logo $\bar{\varphi} > 0$ e passando o limite em (2.6) obtemos:

$$\bar{\varphi}^2 \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{\varphi}^{p+1} (u^+)^{p+1} dx$$

o que implica que $\bar{\varphi}u \in \mathcal{N}$. Pela unicidade de $\varphi(u)$, $\bar{\varphi} = \varphi(u)$. Segue então que

$$\varphi(u_m) \rightarrow \bar{\varphi} = \varphi(u).$$

■

Agora defina

$$c^* \equiv \inf_{\substack{u \in E \\ u \neq 0}} \max_{\theta \geq 0} I(\theta u).$$

Logo obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. $c^* = c = \inf_{\mathcal{N}} I$.

Demonstração: Para cada $u \in E - \{0\}$ temos que

$$\max_{\theta \geq 0} I(\theta u) = I(\varphi(u)u) \quad \text{e} \quad \varphi(u)u \in \mathcal{N},$$

segue então que $c^* = \inf_{\mathcal{N}} I$.

Seja $g \in \Gamma$. Afirmamos que $g([0, 1]) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. De fato, se $u \in E - \{0\}$ pertence à $\mathcal{N}$

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx \geq \frac{\mu}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx,$$

para todo $\mu \in (2, p+1)$ fixado, logo

$$I(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u^+)^{p+1}}{p+1} dx > 0.$$

Desde que $g(0) = 0$ e $I(g(1)) < 0$ segue que $g([0, 1]) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Então

$$\max_{t \in [0, 1]} I(g(t)) \geq \min_{u \in \mathcal{N}} I(u) = c^*$$

logo $c \geq c^*$.

Por outro lado, para $u \in E - \{0\}$ dado, tem-se $I(\theta u) < 0$ para θ suficientemente grande.

Na verdade, cada raio $\theta u : \theta \geq 0$ pode ser associado com a função $g_u \in \Gamma$, tomando o devido reescalonamento em θ para que $g_u(1) < 0$.

Consequentemente

$$c^* = \inf_{u \in E} \max_{\theta \geq 0} I(\theta u) = \inf_{u \in E} \max_{t \in [0,1]} I(g_u(t)) \geq \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) = c$$

o que implica que $c^* \geq c$. Portanto, $c = c^*$. ■

Observação 2.5. Como $c = \inf_{\mathcal{N}} I$ e todo ponto crítico de I pertence a $\mathcal{N}$, se c é valor crítico positivo de I , ele é o menor valor crítico positivo de I .

Mostraremos a seguir que o nível minimax c depende continuamente da função potencial V .

Lema 2.6. Sejam V e $\widehat{V}$ satisfazendo (V_3) com os valores minimax c e $\widehat{c}$ correspondentes. Se $V \geq \widehat{V}$ então $c \geq \widehat{c}$.

Demonstração: Se $V \geq \widehat{V}$, então se $\widehat{I}$ é o funcional associado com $\widehat{V}$ temos $I(u) \geq \widehat{I}(u)$, para todo $u \in E$. Seja $\widehat{\Gamma}$ o análogo a Γ para $\widehat{I}$, então, $g \in \Gamma$ implica $g \in \widehat{\Gamma}$ ($\Gamma \subset \widehat{\Gamma}$), logo

$$\max_{t \in [0,1]} I(g(t)) \geq \max_{t \in [0,1]} \widehat{I}(g(t))$$

Consequentemente

$$c \geq \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \widehat{I}(g(t)) \geq \inf_{g \in \widehat{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} \widehat{I}(g(t)) = \widehat{c}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.7. Sejam V, V_m satisfazendo (V_3) , para todo $m \in \mathbb{N}$. Se $V_m \rightarrow V$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ então $c(V_m) \rightarrow c(V)$, isto é, c depende continuamente de V .

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$, então para m suficientemente grande

$$V + \epsilon \geq V + |V_m - V| \geq V \geq V - |V_m - V| \geq V - \epsilon.$$

Com isto e pelo Lema 2.6 é suficiente mostrar um resultado mais simples:

$$c_\epsilon \equiv c(V + \epsilon) \rightarrow c_0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Iremos mostrar primeiro para $\epsilon < 0$. Pelo Lema 2.6

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} c_\epsilon = \underline{c} \leq c_0.$$

Suponha que $\underline{c} < c_0$.

$$I_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + (V + \epsilon)u^2) - \frac{(u^+)^{p+1}}{p+1} \right] dx.$$

Seja $\epsilon_k \rightarrow 0^-$, quando $k \rightarrow \infty$ e $\delta_m \rightarrow 0^+$ quando $m \rightarrow \infty$. Para cada k , pela Proposição 2.4, sem perda de generalidade podemos supor que existe uma seqüência $(u_{km}) \subset E$ tal que $\|u_{km}\| = 1$ e

$$\max_{\theta \geq 0} I_{\epsilon_k}(\theta u_{km}) \leq c_{\epsilon_k} + \delta_m.$$

Assim, como na demonstração da Proposição 2.4, para cada u_{km} associamos a função $g_{u_{km}} \in \Gamma_k$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I_{\epsilon_k}(g_{u_{km}}(t)) = \max_{\theta \geq 0} I(\theta u_{km}).$$

Pelo Corolário C.3, Apêndice C, existem seqüências $(w_{km}) \subset E$ e $(t_{km}) \subset [0, 1]$ tais que

$$\begin{aligned} \|w_{km} - g_{u_{km}}(t_{km})\| &\leq \delta_m^{1/2}, \\ I_{\epsilon_k}(w_{km}) &\in (c_{\epsilon_k} - \delta_m, c_{\epsilon_k}), \\ \|I'_{\epsilon_k}(w_{km})\| &\leq \delta_m^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tomando $m = k$, seja $u_k \equiv u_{kk}$, então:

$$\begin{aligned} c_0 &\leq \max_{\theta \geq 0} I(\theta u_k) = I(\varphi(u_k)u_k) \\ &= I_{\epsilon_k}(\varphi(u_k)u_k) - \epsilon_k \varphi(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx \\ &\leq \max_{\theta \geq 0} I_{\epsilon_k}(\theta u_k) - \epsilon_k \varphi(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx \\ &\leq c_{\epsilon_k} + \delta_k - \epsilon_k \varphi(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx \\ &\leq \underline{c} + \delta_k - \epsilon_k \varphi(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx, \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde a última desigualdade é consequência do Lema 2.6.

Como $\|u_k\| = 1$, existe uma constante M_1 tal que

$$\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq M_1$$

Portanto, se $(\varphi(u_k))$ é limitada e com limitação independente de k , basta tomarmos ϵ_k suficientemente pequeno para que (2.9) contrarie a hipótese ($\underline{c} < c_0$).

Afirmamos que $\varphi(u_k)$ é limitada. De fato, se, ao longo de uma subsequência, $\varphi(u_k) \leq 1$ nada a demonstrar. Se $\varphi(u_k) > 1$ então fazendo análogo a demonstração da Proposição 2.3 teremos

$$\varphi(u_k)^{\mu-2} \leq \frac{(p+1)}{\mu \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)^{p+1} dx}.$$

Se, ao longo de uma subsequência, o termo $(u_k)^{p+1}$ for limitado e distante de zero, teremos um limitante superior para $\varphi(u_k)$. Caso contrário, quando $k \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_k)^{p+1} dx \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Usando (2.8) mostraremos que (2.10) não ocorre. A aplicação $g_{u_k}(t) \equiv g_{u_k k}(t)$ tem a forma $\psi_k(t)u_k$. Além disso, $g_{u_k}(t_k) = \psi_k(t_k)u_k \equiv \xi_k u_k$ e por (2.8),

$$\|w_k - \xi_k u_k\| \leq \delta_k^{1/2}. \quad (2.11)$$

Assim como feito na demonstração do Teorema 1.1, (2.8) implica que (w_m) é limitado em E . Além disso, de (2.11) e $\|u_k\| = 1$, existe uma constante M_2 independente de k tal que

$$\xi_k \leq \delta_k^{1/2} + \|w_k\| \leq M_2. \quad (2.12)$$

Por (2.12), para qualquer $r > 0$ e $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^2(B_r(y))} &\geq M_2^{-1} \|\xi_k u_k\|_{L^2(B_r(y))} \\ &\geq M_2^{-1} (\|w_k\|_{L^2(B_r(y))} - \|w_k - \xi_k u_k\|_{L^2(B_r(y))}) \\ &\geq M_2^{-1} (\|w_k\|_{L^2(B_r(y))} - M_3 \delta_k^{1/2}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde M_3 é constante.

Afirmção: Existe uma seqüência (y_k) em $\mathbb{R}^N$ e constantes $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_k)} w_k^2(x) dx \geq \beta > 0. \quad (2.14)$$

De fato, suponhamos por contradição que a afirmação seja falsa. Então, para todo $R > 0$ dado,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_k^2(x) dx = 0.$$

Consequentemente, pelo Lema de Lions (cf. Lema D.1, Apêndice D)

$$w_k \rightarrow 0 \text{ em } L^q(\mathbb{R}^N) \quad (2.15)$$

para todo $2 < q < \frac{2N}{N-2}$. Mas as limitações de $\|w_k\|$ e (2.8) implicam que

$$I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k) w_k \rightarrow \underline{c} > 0. \quad (2.16)$$

Por outro lado, por (2.15) temos

$$I_{\epsilon_k}(w_k) - \frac{1}{2} I'_{\epsilon_k}(w_k) w_k = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) w_m^{p+1} dx \rightarrow 0$$

contrariando (2.16), verificando assim (2.14). Fazendo $y = y_k$ e $r = R$ em (2.13) temos para k suficientemente grande,

$$\|u_k\|_{L^2(B_R(y_k))} \geq M_2^{-1} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

Agora, para provar que (2.10) não ocorre é suficiente mostrar que existe um $\beta_1 > 0$ tal que

$$\int_{B_R(y_k)} (u_k)^{p+1} dx \geq \beta_1.$$

Mas, usando a desigualdade de Hölder, existe uma constante positiva C que depende de N e R tal que

$$\int_{B_R(y_k)} (u_k)^{p+1} dx \geq C \|u_k\|_{L^2(B_R(y_k))}^{p+1} \geq C \left[M_2^{-1} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/2} \right]^{p+1} \doteq \beta_1.$$

Isto completa a demonstração de (2.7) para o caso $\epsilon < 0$. Argumentos similares são utilizados para provar (2.7) para o caso $\epsilon > 0$. No que segue faremos um roteiro dos passos da demonstração neste caso. Pelo Lema 2.6,

$$c_0 \leq \bar{c} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} c_\epsilon.$$

Suponha que $c_0 < \bar{c}$. Seja δ_k como introduzido anteriormente. Pela Proposição 2.4, existe uma seqüência $(u_k) \subset E$ tal que $\|u_k\| = 1$ e

$$\max_{\theta \geq 0} I(\theta u_k) = c_0 + \delta_k. \quad (2.18)$$

Escolha $w_k = w_{kk}$ como em (2.8). Para cada $\epsilon \geq 0$ e $u \in E - \{0\}$ considere $\varphi_\epsilon(u)$ sendo para I_ϵ o que $\varphi(u)$ é para I . Então por (2.18),

$$\begin{aligned} \bar{c} &< c_\epsilon \leq \max_{\theta \geq 0} I_\epsilon(\theta u_k) = I_\epsilon(\varphi_\epsilon(u_k)u_k) \\ &= I(\varphi_\epsilon(u_k)u_k) + \epsilon \varphi_\epsilon(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx \\ &\leq c_0 + \delta_k + \epsilon \varphi_\epsilon(u_k)^2 \int_{\mathbb{R}^N} u_k^2 dx. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se φ_ϵ é limitada então (2.19) contraria a hipótese ($c_0 < \bar{c}$) e (2.7) está provado.

Como feito anteriormente, ou $\varphi_\epsilon \leq 1$ ou

$$\varphi_\epsilon(u_k)^{\mu-2} \leq \frac{(p+1) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_k|^2 + ((V(x) + \epsilon)u_k)^2] dx}{\mu \int_{\mathbb{R}^N} (u_k)^{p+1} dx}. \quad (2.20)$$

Os argumentos utilizados para o caso $\epsilon < 0$ e o fato de $\|u_k\| = 1$ mostram que $\varphi_\epsilon(u_k)$ é limitada para ϵ suficientemente pequeno, o que completa a demonstração do Teorema 2.7. ■

Enunciaremos a seguir um resultado crucial para provar a existência de solução do problema (2.1), cuja prova é baseada em argumentos de comparação entre os níveis min-max. Vamos primeiramente introduzir algumas notações. Denotemos por c_∞ o nível minimax associado ao funcional

$$I_\infty(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_\infty u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^-)^{p+1} dx,$$

definido em E , com V_∞ dado por (V_4) .

Teorema 2.8. *Suponha que V satisfaça (V_3) e (V_4) . Então c é um valor crítico de I ou $c \geq c_\infty$.*

Demonstração: Primeiramente suponhamos que V satisfaça uma versão mais forte da condição (V_4) , a saber,

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > V_\infty. \quad (2.21)$$

Pela caracterização de c dada na Proposição 2.4, existe uma seqüência $(u_m) \subset E$ tal que $\|u_m\| = 1$ e

$$\max_{\theta \geq 0} I(\theta u_m) \rightarrow c, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Assim como feito na Proposição 2.4, a cada u_m associa-se uma função $g_m \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(g_m(t)) = \max_{\theta \geq 0} I(\theta u_m).$$

Pelo Corolário C.3, do Apêndice C, existem seqüências $(w_m) \subset E$, $0 < \epsilon_m \rightarrow 0$, e $t_m \in [0, 1]$ tais que

$$\begin{aligned} \|w_m - g_m(t_m)\| &\leq \epsilon_m^{1/2}, \\ I(w_m) &\in (c - \epsilon_m, c), \\ \|I'(w_m)\| &\leq \epsilon_m^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assim como feito na demonstração do Teorema 1.1, (2.23) implica que (w_m) é limitada em E . Além disso, uma subsequência de w_m converge fracamente em E e fortemente em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < 2^*$, para uma função w , solução fraca de (2.1).

Afirmção: Existe uma seqüência (y_m) em $\mathbb{R}^N$ e constantes $R > 0$ e $\beta > 0$ tais que

$$\liminf_{m \rightarrow 0^+} \int_{B_R(y_m)} w_m^2(x) dx \geq \beta > 0. \quad (2.24)$$

De fato, se (2.24) não é válido então

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} w_m^2(x) dx = 0.$$

Pelo Lema D.1, $w_m \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para qualquer que seja $2 < q < 2^*$. Em particular, $w_m \rightarrow 0$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado,

$$I(w_m) - \frac{1}{2} I'(w_m) w_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |w_m|^{p+1} dx. \quad (2.25)$$

Como o lado direito da equação (2.25) tende a zero quando $m \rightarrow \infty$, encontramos uma contradição com (2.23), verificando assim a afirmação.

Se (y_m) contém uma subsequência limitada, por (2.24) podemos admitir $w \neq 0$. Além disso, para qualquer $r > 0$ temos,

$$I(w_m) - \frac{1}{2} I'(w_m) w_m = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |w_m|^{p+1} dx \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{B_r(0)} |w_m|^{p+1} dx.$$

Por (2.23) e pelas imersões de Sobolev segue que

$$c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx. \quad (2.26)$$

Mas $w \in E$ é uma solução clássica de (2.1), conseqüentemente o lado direito da equação (2.26) é igual a $I(w)$. Logo, segue da Observação 2.5 e $w \neq 0$ que $I(w) = c$, concluindo assim a demonstração do Teorema 2.8 para este caso.

Suponhamos agora que (y_m) seja ilimitada. Fixemos $V_0 < \mu < V_\infty$ e consideremos $r > 0$ tal que

$$V(x) \geq \mu, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N; |x| \geq r. \quad (2.27)$$

Então, para todo $t > 0$,

$$\begin{aligned} \max_{\theta \geq 0} I(\theta u_m) &\geq I(tu_m) = I_\mu(tu_m) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(x) - \mu) |tu_m|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_r(0)} (V(x) - \mu) |tu_m|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} (V(x) - \mu) |tu_m|^2 dx, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde

$$I_\mu(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \mu u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Por (2.27),

$$\max_{\theta \geq 0} I(\theta u_m) \geq I_\mu(tu_m) + \frac{1}{2} \int_{B_r(0)} (V(x) - \mu) |tu_m|^2 dx, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Escolhendo $t = \varphi_\mu(u_m)$, onde $\varphi_\mu(u_m)$ é dado por (2.5) para I_μ , obtemos

$$I_\mu(\varphi_\mu(u_m)) = \max_{\theta \geq 0} I_\mu(\theta u_m). \quad (2.30)$$

Então, pela Proposição 2.4 para I_μ , e por (2.29)

$$\max_{\theta \geq 0} I(\theta u_m) \geq c_\mu + \frac{1}{2} \int_{B_r(0)} (V(x) - \mu) (\varphi_\mu(u_m) u_m)^2 dx. \quad (2.31)$$

Como na demonstração do Teorema 2.7, a seqüência $(\varphi_\mu(u_m))$ é limitada.

Suponhamos que exista um $\gamma_1 > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{L^2(B_r(0))} \geq \gamma_1. \quad (2.32)$$

Assim, como na demonstração do Teorema 2.7, $g_{u_m}(t_m) \equiv \xi_m u_m$ e por (2.23),

$$\|\xi_m u_m - w_m\| \leq \epsilon_k^{1/2}. \quad (2.33)$$

Logo

$$\|w_m\|_{L^2(B_r(0))} \geq \|\xi_m u_m\|_{L^2(B_r(0))} - \|w_m - \xi_m u_m\|_{L^2(B_r(0))}. \quad (2.34)$$

Por (2.33), o termo de w_m do lado direito de (2.34) tende a zero quando $m \rightarrow \infty$. Se $\xi_m \rightarrow 0$ ao longo de uma subsequência, $\xi_m u_m \rightarrow 0$ e $I(\xi_m u_m) \rightarrow 0$, o que contraria (2.22). Portanto, (ξ_m) tem um limitante inferior positivo e (2.34) mostra que existe um $\gamma_2 > 0$ tal que

$$\|w_m\|_{L^2(B_r(0))} \geq \gamma_2.$$

Análogo ao caso em que (y_m) limitado, w_m converge fracamente em E para uma solução w de (2.1) com $I(w) = c$.

Se (2.32) não ocorre, então tomando uma subsequência de (u_m) , ainda denotada por (u_m) , temos

$$\|u_m\|_{L^2(B_r(0))} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Por (2.22), (2.31), (2.35) e pela limitação de $(\varphi_\mu(u_m))$ temos

$$c \geq c_\mu.$$

Fazendo agora $\mu \rightarrow V_\infty$ e usando o Teorema 2.7 obtemos

$$c \geq c_\infty.$$

Portanto, a demonstração do Teorema 2.8 está completa para o caso em que (2.21) é válida.

Suponhamos agora que $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty$. Então para todo $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > V_\infty - \epsilon. \quad (2.36)$$

Logo, pelos resultados já provados, ou (i) c é um valor crítico de I ou (ii) $c \geq c_\infty(\epsilon)$, onde $c_\infty(\epsilon)$ é o nível minimax associado ao funcional

$$I_\epsilon(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + (V_\infty - \epsilon)u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx.$$

Suponhamos que (i) não seja válido. Então fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ e usando o Teorema 2.7 obtemos $c \geq c_\infty$, concluindo assim a demonstração do Teorema 2.8. ■

Corolário 2.9. *Se $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ quando $N \geq 3$ ou $p > 1$ quando $N = 1, 2$ então c_∞ é um valor crítico de I_∞ com uma correspondente solução clássica u_∞ do problema:*

$$-\Delta u + V_\infty u = |u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.37)$$

Demonstração: Pelo Corolário C.3, do Apêndice C, existe uma sequência $(w_m) \subset E$, tal que

$$\begin{aligned} I_\infty(w_m) &\rightarrow c_\infty, \\ I'_\infty(w_m) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, as funções w_m são limitadas em E e existem uma sequência $(y_m) \subset \mathbb{R}^N$, β e $R > 0$ tais que

$$\liminf_{m \rightarrow 0^+} \int_{B_R(y_m)} w_m^2(x) dx \geq \beta > 0.$$

Observe que se $y \in \mathbb{R}^N$, $u \in E$ e se $(\tau_y u)(x) \equiv u(x - y)$ então $I_\infty(\tau_y u) = I_\infty(u)$. Na verdade, transladando w_m se necessário, podemos admitir

$$\liminf_{m \rightarrow 0^+} \int_{B_R(0)} w_m^2(x) dx \geq \beta > 0,$$

e os argumentos da demonstração do Teorema 2.8 implicam que w_m converge fracamente em E para uma solução u_∞ de (2.37), com $I_\infty(u_\infty) = c_\infty$. ■

Observação 2.10. *Combinando o Teorema 2.8 com o Lema 2.6, notemos que para qualquer $\nu \in [V_0, V_\infty]$ o valor minimax correspondente c_ν é um valor crítico do funcional associado I_ν .*

No resultado que segue, mostraremos que quando V satisfaz uma condição mais forte que (V_4) , o valor minimax c é um valor crítico.

Teorema 2.11. *Suponhamos que $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaça (V_3) e*

$$(V_5) \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \equiv V_\infty \geq V(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \text{com } V_\infty \neq V(x).$$

Então c é um valor crítico de I .

Demonstração: Se c não é um valor crítico de I então, pelo Teorema 2.8, $c \geq c_\infty$. Seja w um ponto crítico de I_∞ correspondente ao nível c_∞ então

$$c_\infty = I_\infty(w) = \max_{\theta \geq 0} I_\infty(\theta w). \quad (2.38)$$

Para qualquer $\theta > 0$,

$$I_\infty(\theta w) = I(\theta w) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V) |\theta w|^2 dx. \quad (2.39)$$

Tomando $\theta = \varphi(w)$ obtemos por (V_5) , (2.38) e (2.39)

$$\begin{aligned} c_\infty &\geq I(\varphi(w)w) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V)|\varphi(w)w|^2 dx \\ &\geq c + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V)|\varphi(w)w|^2 dx > c \end{aligned} \quad (2.40)$$

contrariando, assim, o Teorema 2.8. Portanto, c é valor crítico de I . ■

O resultado final deste capítulo estabelece a existência de solução para o seguinte problema singularmente perturbado:

$$\begin{cases} -h^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.41)$$

onde $h > 0$ é um parâmetro real, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $1 < p$ se $N = 1, 2$ e o potencial V satisfaz a condição (V_3) .

Notemos que via mudança de variáveis $x \mapsto hx$ em $\mathbb{R}^N$ o problema (2.41) é equivalente a

$$\begin{cases} -\Delta v + V(hx)v = v^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.42)$$

no qual $v(x) = u(hx)$.

Teorema 2.12. *Suponhamos que V satisfaça (V_3) e*

$$(V_6) \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \geq V_\infty > \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x).$$

Então existe um $h_0 > 0$ tal que (2.42) possui uma solução clássica para todo $h \in (0, h_0)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos admitir que $V_0 = V(0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$.

Seja $h > 0$ e considere $\tilde{E}$ o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido da seguinte norma:

$$\|u\|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(hx)|u|^2) dx.$$

Como $\inf_{\mathbb{R}^N} V > 0$, $\tilde{E}$ está imerso continuamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Definimos o funcional $I_h : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$ associado ao problema (2.42) e dado por

$$I_h(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(hx)u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{p+1} dx. \quad (2.43)$$

Pelo Corolário A.6, Apêndice A, o funcional I_h está bem definido em $\tilde{E}$ e $I_h \in C^2(\tilde{E}, \mathbb{R})$. Denotemos por c_h o valor minimax do funcional I_h e dado por (2.4).

Fixemos $V_0 < \nu < V_\infty$. Pelo Lema 2.6,

$$c_\nu < c_\infty.$$

onde c_ν é o nível minimax do funcional I_ν dado por

$$I_\nu(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \nu u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1} dx.$$

Seja $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $w > 0$, tal que

$$I_\nu(w) = c_\nu \text{ e } I'_\nu(w) = 0.$$

A existência de w é dada pela Observação 2.10.

Para cada $R > 0$, seja $w_R(x) = \eta_R(x)w(x)$, onde $\eta_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta_R \equiv 1$ em $B_R(0)$, $\eta_R \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2R}(0)$ e $|\nabla \eta_R| \leq C(N)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$w_R \rightarrow w \text{ em } \tilde{E}, \text{ quando } R \rightarrow +\infty. \quad (2.44)$$

De (2.44) e pela Proposição 2.3, $\varphi(w_R) \rightarrow \varphi(w) = 1$, quando $R \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\varphi(w_R)w_R \rightarrow w \text{ em } \tilde{E}, \text{ quando } R \rightarrow +\infty.$$

Consequentemente

$$I_\nu(\varphi(w_R)w_R) = I_\nu(w) + (I_\nu(\varphi(w_R)w_R) - I_\nu(w)) = I_\nu(w) + o_R(1)$$

onde $o_R(1) \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow \infty$.

Consideremos $R > 0$ suficientemente grande de modo que

$$I_\nu(\varphi(w_R)w_R) < c_\infty. \quad (2.45)$$

Seja agora

$$\begin{aligned} I_h(tw_R) &= I_\nu(tw_R) + \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (V(hx) - \nu)w_R^2 dx \\ &= I_\nu(tw_R) + \frac{t^2}{2} \int_{B_{2R}(0)} (V(hx) - \nu)w_R^2 dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Consideremos $0 < h < 1$. Pela desigualdade do Valor Médio, existe uma constante $C(R) \geq 0$ tal que

$$|V(hx) - V(0)| \leq C(R)h, \quad (2.47)$$

onde $C(R) = 2R\|\nabla V\|_{L^\infty(\overline{B}_{2R}(0))}$.

Usando $V(0) = V_0$ e $V_0 < \nu$, segue de (2.47) que

$$V(hx) - \nu < V_0 - \nu + C(R)h.$$

Logo

$$V(hx) - \nu < 0, \quad \forall h \in (0, \frac{\nu - V_0}{C(R)}). \quad (2.48)$$

Observamos que $C(R)$ poderia ser nula se V fosse constante em $B_{2R}(0)$. Mas, nesse caso, a condição (2.48) ocorreria para todo $h \in (0, 1)$.

Definindo $h_0 = \min \left\{ 1, \frac{\nu - V_0}{C(R)} \right\}$, segue de (2.46) e (2.48) que

$$I_h(tw_R) < I_\nu(tw_R), \quad \forall h \in (0, h_0), \quad t > 0.$$

Logo

$$\max_{t>0} I_h(tw_R) \leq \max_{t>0} I_\nu(tw_R) = I_\nu(\varphi(w_R)w_R). \quad (2.49)$$

Assim, por (2.45) e (2.49),

$$c_h = \inf_{w \in \tilde{E} - \{0\}} \max_{t>0} I_h(tw) \leq I_\nu(\varphi(w_R)w_R) < c_\infty,$$

desde que $h \in (0, h_0)$. Usando o Teorema 2.8, c_h é um valor crítico de I_h e, consequentemente, o problema (2.42) possui uma solução clássica. ■

Observação 2.13. Em [16] é provado que os resultados anteriores são válidos para uma situação mais geral, mais precisamente quando a não linearidade $f(x, u)$ satisfaz:

$$(f_1) \quad f \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$(f_2) \quad f(x, 0) = 0 = f_z(x, 0).$$

$$(f_3) \quad \text{Existem constantes } c_1, c_2 > 0 \text{ e } 1 < s < 2^* \text{ tais que para todo } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

$$|f_z(x, z)| \leq c_1 + c_2|z|^{s-1},$$

(f_4) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x, z) \equiv \mu \int_0^z f(x, t) dt \leq z(f(x, z)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(f_5) $t^{-1}zf(x, tz)$ é função crescente em $t > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $z \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Capítulo 3

Concentração de Soluções de Equações de Schrödinger

Neste capítulo, seguindo os argumentos de Wang [17], mostraremos que para todo $h > 0$ suficientemente pequeno, os máximos globais x_h das soluções u_h encontradas no Capítulo 2 concentram-se em torno de um mínimo global da função potencial V , quando $h \rightarrow 0$.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -h^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.1)$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} -\Delta v + V(hx)v = v^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ v > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (3.2)$$

no qual $v(x) = u(hx)$, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ ou $1 < p$ se $N = 1, 2$ e o potencial V satisfaz a condição:

$$(V_7) \quad \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > V_0 \equiv \inf_{\mathbb{R}^N} V > 0.$$

Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Suponhamos que V satisfaça (V_7) . Então existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h < h_0$ existe uma solução u_h de (3.1). Além disso, existe uma seqüência $h_k \rightarrow 0$ tal*

que $u_{h_k} \equiv u_k$ possui exatamente um máximo local (portanto, global) $x_k \in \mathbb{R}^N$. Também, $V(x_k) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$, quando $k \rightarrow \infty$, e

$$u_k(x) \leq C \exp \left(-\frac{M}{h} |x - x_k| \right),$$

para certas constantes C, M .

Observação 3.2. A demonstração do Teorema 3.1 é longa. Primeiramente prova-se que

$$w_h(\cdot) = u_h(h \cdot + x_h) \rightarrow u_0(\cdot), \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } H^1(\mathbb{R}^N), \text{ quando } h \rightarrow 0^+,$$

onde u_0 é a única solução do problema limite

$$\begin{cases} -\Delta u + V_0 u = u^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u > 0, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} u(x) \\ u(x) \rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.3)$$

A idéia central da demonstração do Teorema 3.1 é comparar a solução w_h do nível minimax com a solução u_0 do problema limite (3.3). Por Gidas-Ni-Nirenberg [7], u_0 é radial, $u'_0(r) < 0$ para todo $r \neq 0$, e

$$u_0(r), |u'_0(r)| \leq C r^{(N-1)/2} e^{-\sqrt{V_0} r}.$$

para uma constante positiva C .

Em vista do Teorema 2.12, para demonstrarmos o Teorema 3.1, basta estudarmos o comportamento de concentração da família de soluções $v_h(x) = u_h(hx)$ de (3.2) obtidas no Capítulo 2. Para tanto necessitamos de alguns resultados dados pelos lemas que se seguem.

Lema 3.3. Seja c_0 o valor minimax do Passo da Montanha do funcional I_0 dado por

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + V_0 u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} (u^+)^{p+1} dx.$$

Então,

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_h = c_0.$$

Demonstração: Pela Observação 2.10 do Capítulo 2 e a caracterização do nível minimax, o problema

$$\begin{cases} -\Delta w + V_0 w = w^p, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ w > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (3.4)$$

possui uma solução de menor energia $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, isto é, w satisfaz

$$c_0 = I_0(w) = \inf_{v \in H^1} \sup_{\theta \geq 0} I_0(\theta v).$$

Para cada $r > 0$ seja $w_r(x) = \eta_r(x)w(x)$, onde η_r é uma função corte com suporte compacto na bola $B_{2r}(0)$, $\eta_r \equiv 1$ em $B_r(0)$ e $|\nabla \eta_r| \leq C(N)$. Desse modo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$w_r \rightarrow w \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \text{ quando } r \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Agora, para cada h e r positivos, existe $t_{h,r} > 0$ tal que

$$I_h(t_{h,r}w_r) = \max_{t \geq 0} I_h(tw_r).$$

Portanto,

$$t_{h,r}^{p-1} \int_{B_{2r}(0)} w_r^{p+1} dx = \int_{B_{2r}(0)} (|\nabla w_r|^2 + V(hx)w_r^2) dx. \quad (3.6)$$

Para cada $r > 0$ fixado, a família $\{t_{h,r}\}_h$ é limitada. De fato, de (3.6) temos que

$$t_{h,r}^{p-1} \int_{B_{2r}(0)} w_r^{p+1} dx = \int_{B_{2rR}(0)} (|\nabla w_r|^2 + V_0 w_r^2) dx + \int_{B_{2r}(0)} (V(hx) - V_0) w_r^2 dx \quad (3.7)$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{B_{2r}(0)} (V(hx) - V_0) w_r^2 dx = 0 \quad (3.8)$$

Assim, de (3.7) e (3.8), segue que $\{t_{h,r}\}_h$ limitada. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $t_r \geq 0$ tal que $t_{h,r} \rightarrow t_r$, quando $h \rightarrow 0$. Assim, fazendo $h \rightarrow 0$ em (3.7), obtemos

$$t_r^{p-1} \int_{B_{2r}(0)} w_r^{p+1} dx = \int_{B_{2r}(0)} (|\nabla w_r|^2 + V_0 w_r^2) dx. \quad (3.9)$$

De (3.5) e (3.9),

$$\begin{aligned} t_r^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |w_r|^{p+1} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_r|^2 + V_0 w_r^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^2 + V_0 w^2) dx + o_r(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |w|^{p+1} dx + o_r(1) = \int_{\mathbb{R}^N} |w_r|^{p+1} dx + o_r(1) \end{aligned}$$

onde $o_r(1) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Daí,

$$(t_r^{p-1} - 1) \int_{\mathbb{R}^N} |w_r|^{p+1} dx = o_r(1) \quad (3.10)$$

Por outro lado, novamente por (3.5), $w_r \rightarrow w$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$, com $\|w\|_{p+1}^{p+1} \neq 0$ pois

$$\|w\|_{p+1}^{p+1} = \|w\|_2^2 \neq 0.$$

Portanto, fazendo $r \rightarrow \infty$ em (3.10), obtemos $t_r \rightarrow 1$.

Defina $g(t) = I_0(tw_r)$ em $[0, \infty)$. Sob a condição em p e por (3.9), concluimos que o máximo de g em $[0, \infty)$ é atingido somente em t_r , isto é,

$$I_0(t_r w_r) = \max_{t \geq 0} I_0(t w_r).$$

Pela caracterização de c_h ,

$$c_h \leq \max_{t \geq 0} I_h(t w_r) = I_h(t_{h,r} w_r),$$

o que nos leva à seguinte desigualdade

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} c_h \leq I_0(t_r w_r).$$

Agora, de (3.5) e da convergência de (t_r) , obtemos

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} c_h \leq \lim_{r \rightarrow \infty} I_0(t_r w_r) = I_0(w) = c_0.$$

Por outro lado, sendo $V(hz) \geq V_0$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, segue que $c_h \geq c_0$ para todo h . Logo

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} c_h \geq c_0.$$

O que nos permite concluir que $c_h \rightarrow c_0$, quando $h \rightarrow 0^+$.

■

Observemos agora que, como

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_h|^2 + V(hx)v_h^2) dx = I_h(v_h) - \frac{1}{p+1} I'_h(v_h)v_h = c_h,$$

usando o Lema 3.3, segue que (v_h) é limitada.

Lema 3.4. *Existe uma família $\{y_h\}$ em $\mathbb{R}^N$ e constantes positivas R e β tais que*

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \int_{B_R(y_h)} v_h^2(x) dx \geq \beta > 0.$$

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que o lema seja falso. Então, para todo $R > 0$ dado, existe uma seqüência $v_n = v_{h_n}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} v_n^2(x) dx = 0, \quad \forall R > 0.$$

Pelo Lema de Lions (cf. Lema D.1, Apêndice D), $v_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 < q < \frac{2N}{N-2}$. Por outro lado, v_n verifica

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V_{h_n}(z)) v_n^2 dz = \int_{\mathbb{R}^N} v_n^{p+1} dz,$$

logo, teríamos $v_n \rightarrow 0$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, conseqüentemente, $c_{h_n} \rightarrow 0$; o que é um absurdo, pois, pelo Lema 3.3, $c_{h_n} \rightarrow c_0 > 0$. ■

Lema 3.5. *A família $\{hy_h\}_h$ é limitada para todo $h > 0$ pequeno.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que exista uma seqüência (h_n) tal que $h_n y_{h_n} \rightarrow \infty$. Consideremos a seqüência

$$w_n(x) = v_n(x + y_n),$$

onde $y_n = y_{h_n}$ e estudemos seu comportamento quando $n \rightarrow \infty$. A função w_n é solução clássica de

$$-\Delta w_n + V(h_n x + h_n y_n) w_n = w_n^p, \quad w_n > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N. \quad (3.11)$$

Pelo Lema 3.4,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} w_n^2(x) dx \geq \beta > 0. \quad (3.12)$$

Pela limitação de v_h , a função w_n é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, a menos de subsequência, podemos admitir que $w_n \rightarrow w_0 \geq 0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e fortemente em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para todo $2 < q < 2^*$. Além disso, por (3.12), $w_0 \neq 0$. Agora, de (3.11), vale a seguinte identidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_n \nabla w_0 + V(h_n x + h_n y_n) w_n w_0) dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_n^p w_0 dx.$$

Pelo Lema de Fatou e por (V_7) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_0|^2 + V_0 w_0^2) dx < \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1} dx. \quad (3.13)$$

Seja $\theta > 0$ o número que verifica

$$I_0(\theta w_0) = \max_{t \geq 0} I_0(t w_0).$$

De (3.13), segue que $\theta \in (0, 1)$, logo

$$\begin{aligned} c_0 &\leq I_0(\theta w_0) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \theta^{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1} dx < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{p+1} dx \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} w_n^{p+1} dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = c_0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, provando assim o lema. ■

Observação 3.6. *Segue da demonstração do Lema 3.5 que se $(h_k y_{h_k})$ converge para x_0 , então $V(x_0) = V_0$, isto é, x_0 é mínimo global de V .*

De fato, considere

$$w_k(x) = v_{h_k}(x + y_{h_k}).$$

Como na demonstração do Lema 3.5, $w_k \rightarrow \bar{w}$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, com $\bar{w}$ sendo uma função não-negativa. Agora,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_k \nabla \bar{w} + V(h_k x + h_k y_{h_k}) w_k \bar{w}) dx = \int_{\mathbb{R}^N} w_k^p \bar{w} dx.$$

Sabendo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{w}|^2 + V(x_0) \bar{w}^2) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla w_k \nabla \bar{w} + V(h_k x + h_k y_{h_k}) w_k \bar{w}) dx,$$

encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{w}|^2 + V(x_0) \bar{w}^2) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^{p+1} dx.$$

Desse modo, se $V_0 < V(x_0)$ então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{w}|^2 + V_0 \bar{w}^2) dx < \int_{\mathbb{R}^N} \bar{w}^{p+1} dx.$$

Repetindo o mesmo argumento empregado na etapa final da demonstração do Lema 3.5 obtemos uma contradição com o nível minimax c_0 , o que conclui a verificação da observação.

Lema 3.7. *A sequência w_k converge fortemente para $\bar{w}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Primeiramente, por (V_7) ,

$$\begin{aligned} c_k = I_k(v_k) - \frac{1}{p+1} I'_k(v_k) v_k &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_k|^2 + V_0 v_k^2) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^2 + V_0 w_k^2) dx, \end{aligned}$$

onde $v_k = v_{h_k}$. Pelo Lema 3.3,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^2 + V_0 w_k^2) dx \leq c_0. \quad (3.14)$$

Agora, pelo Lema 3.5 e Observação 3.6, $\bar{w}$ satisfaz

$$-\Delta \bar{w} + V_0 \bar{w} = \bar{w}^p \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad \bar{w} > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

o qual juntamente com o Lema de Fatou e (3.14) implicam

$$\begin{aligned} c_0 &\leq I_0(\bar{w}) = I_0(\bar{w}) - \frac{1}{p+1} I'_0(\bar{w}) \bar{w} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{w}|^2 + V_0 \bar{w}^2) dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^2 + V_0 w_k^2) dx \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^2 + V_0 w_k^2) dx \\ &\leq c_0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^2 + V_0 w_k^2) dx = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla \bar{w}|^2 + V_0 \bar{w}^2) dx.$$

■

Em consequência do Lema 3.7 e da imersão de $H^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, decorre que

$$\int_{|x| \geq R} |w_k|^{2^*} dx \rightarrow 0, \text{ quando } R \rightarrow \infty, \text{ uniformemente em } k.$$

De fato, seja $\epsilon > 0$ dado. De $\bar{w} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $R_0 > 0$ tal que

$$\int_{|x| \geq R} |\bar{w}|^{2^*} dx < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall R \geq R_0. \quad (3.16)$$

Por outro lado, como $w_k \rightarrow \bar{w}$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^N)$, novamente pela imersão de Sobolev, $w_k \rightarrow \bar{w}$ fortemente em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |w_k - \bar{w}|^{2^*} dx < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k \geq k_0. \quad (3.17)$$

Por (3.16) e (3.17), para todo $k \geq k_0$ e $R \geq R_0$ temos

$$\int_{|x| \geq R} |w_k|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |w_k - \bar{w}|^{2^*} dx + \int_{|x| \geq R} |\bar{w}|^{2^*} dx < \epsilon. \quad (3.18)$$

Agora, como w_k é uma subsolução de $\Delta u + c(x)u = 0$, com $c(x) = w_k^{p-1}(x)$, pelo Teorema 8.17 em [8], segue que

$$\max_{B_1(P)} w_k \leq C \left(\int_{B_2(P)} |w_k|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}}$$

no qual P é um ponto arbitrário e C depende somente de N e da constante que limita $\|w_k\|_{L^{2^*}(B_2(P))}$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\max_{|x| \geq R} w_k(x) < \delta, \quad \forall k \geq k_0.$$

Seja $p_k \in \mathbb{R}^N$ um máximo local de w_k . Como

$$-\Delta w_k(p_k) + V(h_k p_k + h_k y_k) w_k(p_k) = w_k^p(p_k),$$

pelo Princípio do Máximo Forte, $w_k(p_k) \geq (V_0)^{\frac{1}{p-1}}$. Logo, escolhendo $\delta = \frac{1}{2}(V_0)^{\frac{1}{p-1}}$, existe $R_0 > 0$ tal que

$$w_k(x) < \delta, \quad \forall k \geq k_0, |x| \geq R_0. \quad (3.19)$$

De onde segue que $p_k \in \bar{B}_{R_0}(0)$. Afirmamos que p_k é o único máximo local (portanto global) de w_k . A prova dessa afirmação faz uso de um importante resultado de Gidas-Nirenberg [7] sobre simetria de soluções e do seguinte lema de Ni-Takagi [9].

Lema 3.8. *Seja $g \in C^2(\overline{B_R})$ uma função radial satisfazendo $g'(0) = 0$ e $g''(r) < 0$ para $0 \leq r \leq R$. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $f \in C^2(\overline{B_R})$ satisfaz $\nabla f(0) = 0$ e $\|g - f\|_{C^2(\overline{B_R})} < \delta$, tem-se $\nabla f \neq 0$ para $x \neq 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e por $\nabla f(0) = 0$, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \nabla \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx) dt \cdot x.$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \nabla \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \cdot x + \int_0^1 \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(tx) dt \cdot x.$$

Mas g é radial, isto é, $g(x) = g(|x|)$; logo, alguns cálculos levam a

$$\nabla \frac{\partial g}{\partial x_j}(tx) dt \cdot x = g''(tx) x_j.$$

Daí, se $\nabla f(x) = 0$, tem-se

$$-\left(\int_0^1 g''(tx) dt\right) t^2 x_j = \int_0^1 \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(tx) dt \cdot x, \text{ para cada } j = 1, \dots, N.$$

Agora, seja $\alpha := \min |g''|$, então $\alpha > 0$ se $0 \leq r \leq R$. Logo,

$$\begin{aligned} \alpha^2 x_j^2 &\leq \left| \left(-\int_0^1 g''(tx) dt \right) x_j \right|^2 \\ &= \left(\int_0^1 g''(tx) dt \right)^2 x_j^2 \\ &= \left| \int_0^1 \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(tx) dt \cdot x \right|^2 \\ &\leq \left| \int_0^1 \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_j} \right)(tx) dt \right|^2 |x|^2 \end{aligned}$$

donde segue, ao somar-se todos os termos variando j de 1 a N , que

$$\alpha^2 |x|^2 \leq N^2 \sup |D^2(f - g)| |x|^2.$$

Portanto, se $\|f - g\|_{C^2(\overline{B_R})} < \frac{\alpha^2}{N^2}$, então necessariamente $|x| = 0$. ■

Aplicando os argumentos utilizados no Capítulo 1, a sequência (w_k) converge para $\bar{w}$ no sentido C_{loc}^2 . Por Gidas-Ni-Nirenberg [7], $\bar{w}$ tem um único máximo em zero, é radialmente simétrica e

$$\bar{w}(x), |\nabla \bar{w}(x)| = O(e^{-|x|}/|x|^{(N-1)/2}) \quad (3.20)$$

quando $|x| \rightarrow \infty$. Assim, zero é o máximo global de $\bar{w}$. Portanto, pelo Lema 3.8, w_k não possui outro máximo, a não ser o zero, o que verifica a afirmação.

Recordando que $w_k(x) = v_k(x + y_{h_k})$ e que $v_k(x) = u_{h_k}(h_k x)$, temos que u_{h_k} maximiza-se em $x_k = h_k p_k + h_k y_{h_k}$, no qual converge para x_0 , pois (p_k) é limitada, $h_k \rightarrow 0$ e $h_k y_{h_k} \rightarrow x_0$. De onde segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(x_k) = V_0.$$

Finalmente, para provar o decaimento exponencial de u_{h_k} , necessitamos de um resultado envolvendo w_k .

Lema 3.9. *Existem constantes $C, M > 0$ tais que*

$$w_k \leq C \exp^{-M|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: De (3.19), existe $R_0 > 0$ tal que

$$w_k(x) \leq \frac{1}{2}(V_0)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{para todo } |x| \geq R_0. \quad (3.21)$$

Fixemos $\phi(x) = C \exp^{-M|x|}$ com $M^2 < \frac{1}{2}(V_0)^{\frac{1}{p-1}}$ e $w_k \leq C \exp^{-M|x|}$, para todo $|x| = R_0$.

Note que

$$\Delta \phi \leq M^2 \phi, \quad \text{para todo } x \neq 0. \quad (3.22)$$

Definamos $\phi_h = \phi - w_k$. Por (3.21) e (3.22) temos

$$\begin{cases} -\Delta \phi_h + \frac{V_0}{2} \phi_h \geq 0, & |x| \geq R_0, \\ \phi_h \geq 0, & |x| = R_0, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi_h = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

O Princípio do Máximo Forte implica que

$$\phi_h \geq 0, \quad \text{para todo } |x| \geq R_0.$$

Logo

$$w_k \leq \phi = C \exp^{-M|x|}, \quad \text{para todo } |x| \geq R_0.$$

Como R_0 é arbitrário, concluímos a demonstração do Lema 3.9. ■

Consequentemente, usando a definição de u_k e o Lema 3.9 obtemos

$$u_k(x) \leq C \exp(-M|\frac{x - h_k y_k}{h_k}|).$$

De onde segue

$$u_k(x) \leq C \exp(-M|\frac{x - x_k}{h_k}|),$$

com $x_k \rightarrow x_0$, quando $k \rightarrow \infty$, e $V(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x)$.

■

Apêndice A

Diferenciabilidade do Funcional Associado

Definição A.1. *Seja $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X . O funcional I possui derivada de Gateaux $G \in X'$ em $u \in U$ se, para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [I(u + th) - I(u) - Gth] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u é denotada por $I'(u)$.

Proposição A.2. *Se I possui derivada de Gateaux contínua em U então $I \in C^1(U, \mathbb{R})$.*

Definição A.3. *Seja $I \in C^1(U, \mathbb{R})$. O funcional I possui derivada segunda de Gateaux $L \in \mathcal{L}(X, X')$ em $u \in U$ se, para todo $h, v \in X$,*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (I'(u + th) - I'(u) - Lth)v = 0.$$

A derivada segunda de Gateaux de I em u é denotada por $I''(u)$.

Usando o Teorema do Valor Médio pode-se provar a seguinte proposição.

Proposição A.4. *Se I possui derivada segunda de Gateaux contínua em U então $I \in C^2(U, \mathbb{R})$.*

Proposição A.5. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e seja $1 < p < \infty$. Os funcionais*

$$I(u) := \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx, \quad J(u) := \int_{\Omega} |u^+|^{p+1} dx$$

são de classe $C^2(L^{p+1}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$I'(u)h = (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u h dx, \quad J'(u)h = (p+1) \int_{\Omega} |u^+|^{p-1} u^+ h dx.$$

Demonstração: Iremos considerar apenas o funcional I , a demonstração para o funcional J é similar.

Existência da derivada de Gateaux. Sejam $u, h \in L^{p+1}(\Omega)$. Dado $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{|u(x) + th(x)|^{p+1} - |u(x)|^{p+1}}{|t|} &= (p+1)|u(x) + cth(x)|^p |h(x)| \\ &\leq (p+1)[|u(x)| + |h(x)|]^p |h(x)|. \end{aligned}$$

A desigualdade de Hölder implica que

$$[|u(x)| + |h(x)|]^p |h(x)| \in L^1(\Omega).$$

E segue do Teorema de Lebesgue que

$$I'(u)h = (p+1) \int_{\Omega} |u|^{p-1} u h dx.$$

Continuidade da derivada de Gateaux. Seja $f(u) := (p+1)|u|^{p-1}u$. Suponha que $u_n \rightarrow u$ em L^{p+1} , então $f(u_n) \rightarrow f(u)$ em L^q onde $q := (p+1)/p$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|(I'(u_n) - I'(u))h| \leq |f(u_n) - f(u)|_q |h|_{p+1},$$

e então

$$\|I'(u_n) - I'(u)\| \leq |f(u_n) - f(u)|_q \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Existência da derivada segunda de Gateaux. Sejam $u, h, v \in L^{p+1}$. Dado $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} |[f(u(x) + th(x)) - f(u(x))]v(x)|/|t| &= (p+1)p|u(x) + cth(x)|^{p-1} |h(x)| |v(x)| \\ &\leq (p+1)p[|u(x)| + |h(x)|]^{p-1} |h(x)| |v(x)|. \end{aligned}$$

A desigualdade de Hölder implica que

$$[|u(x)| + |h(x)|]^{p-1} |h(x)| |v(x)| \in L^1(\Omega).$$

E segue do Teorema de Lebesgue que

$$I''(u)hv = (p+1)p \int_{\Omega} |u|^{p-1} h v dx.$$

Continuidade da derivada segunda de Gateaux. Seja $g(u) := (p+1)p|u|^{p-1}$. Suponha que $u_n \rightarrow u$ em L^{p+1} , então $g(u_n) \rightarrow g(u)$ em L^r onde $r := (p+1)/(p-1)$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$|[(I''(u_n) - I''(u))h]v| \leq |g(u_n) - g(u)|_r |h|_{p+1} |v|_{p+1},$$

e então

$$\|I''(u_n) - I''(u)\| \leq |g(u_n) - g(u)|_r \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

■

Em consequência das imersões de Sobolev e da Proposição A.5, temos seguinte corolário.

Corolário A.6. *Se $1 < p \leq \frac{N+2}{N-2}$ e $N \geq 3$ então os funcionais I e J são de classe $C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.*

Apêndice B

Teorema do Passo da Montanha

Lema B.1. *Sejam X um espaço de Hilbert real, $I \in C^2(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Considere o conjunto $A_s = \{u \in X : I(u) \leq s\}$. Suponha que*

$$\|I'(u)\| \geq 2\epsilon, \quad \forall u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Então existe uma função $\eta \in C(X, X)$ tal que:

$$(i) \quad \eta(u) = u, \text{ se } I(u) \in [c - 2\epsilon, c + 2\epsilon],$$

$$(ii) \quad \eta(A_{c+\epsilon}) \subset A_{c-\epsilon}.$$

Demonstração: Sejam

$$A := \{u \in X : c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon\}$$

$$B := \{u \in X : c - \epsilon \leq I(u) \leq c + \epsilon\}$$

$$g(u) := \frac{\|u - A\|}{\|x - A\| + \|x - B\|}.$$

Então $g = 1$ em B , $g = 0$ em $X \setminus A$ e g é localmente Lipschitz contínua em X . Seja f um campo vetorial localmente Lipschitz contínuo definido por

$$f(u) := \begin{cases} -g(u)\|\nabla I(u)\|^{-2}\nabla I(u), & u \in A, \\ 0, & u \in X \setminus A. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

É claro que $\|f(u)\| \leq (2\epsilon)^{-1}$ em X . Para cada $u \in X$, o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t, u) &= f(\psi(t, u)), \\ \psi(0, u) &= u, \end{aligned}$$

possui uma única solução $\psi(., u)$ definida em $\mathbb{R}$. Além disso, ψ é contínua em $\mathbb{R} \times X$. Então a aplicação $\eta(u) := \psi(2\epsilon, u)$ satisfaz (i).

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}I(\psi(t, u)) &= \langle \nabla I(\psi(t, u)), \frac{d}{dt}\psi(t, u) \rangle \\ &= \langle \nabla I(\psi(t, u)), f(\psi(t, u)) \rangle \\ &= -g(\psi(t, u)) \end{aligned} \tag{B.2}$$

temos que $I(\psi(., u))$ é não crescente. Seja $u \in A_{c+\epsilon}$. Se existir $t \in [0, 2\epsilon]$ tal que $I(\psi(t, u)) < c - \epsilon$, então $I(\psi(2\epsilon, u)) < c - \epsilon$ e (ii) está satisfeito. Se

$$\psi(t, u) \in B, \quad \forall t \in [0, 2\epsilon],$$

então por (B.2),

$$\begin{aligned} I(\psi(2\epsilon, u)) &= I(u) + \int_0^{2\epsilon} \frac{d}{dt}I(\psi(t, u))dt \\ &= I(u) - \int_0^{2\epsilon} g(\psi(t, u))dt \\ &\leq c + \epsilon - 2\epsilon = c - \epsilon, \end{aligned}$$

e (ii) está satisfeito. ■

Teorema B.2. *Sejam X um espaço de Hilbert real e $I \in C^2(X, \mathbb{R})$. Suponha que $I(0) = 0$ e*

(ϕ_1) *Existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $b := \inf I(u)|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$,*

(ϕ_2) *Existe um $e \in X \setminus \overline{B_\rho}$ tal que $I(e) \leq I(0)$.*

Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um $u \in X$ tal que

a) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$,

b) $\|I'(u)\| < 2\epsilon$,

onde

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} I(\gamma(t)),$$

com

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

Demonstração: A hipótese (ϕ_1) implica

$$b \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

e então

$$b \leq c \leq \max_{t \in [0,1]} I(te).$$

Suponhamos que, para algum $\epsilon > 0$, a conclusão do teorema não é satisfeita. Podemos assumir então que

$$c - 2\epsilon \geq I(0) \geq I(e). \quad (\text{B.3})$$

Pela definição de c , existe um $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \leq c + \epsilon. \quad (\text{B.4})$$

Considere $\beta := \eta \circ \gamma$, onde η é dado pelo Lema B.1. Por (B.3) e pela parte (i) do Lema anterior,

$$\beta(0) = \eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0,$$

e analogamente $\beta(1) = e$, e então $\beta \in \Gamma$. Segue de (B.4) e (ii) do Lema B.1 que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\beta(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é uma contradição. ■

Para provar que c é um valor crítico de I , nós precisamos do seguinte resultado de compacidade.

Definição B.3. *Sejam X um espaço de Banach, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Uma seqüência (u_n) é uma seqüência de Palais-Smale no nível c (seqüência $(PS)_c$) relacionada a I se*

$$I(u_n) \rightarrow c, \quad I'(u_n) \rightarrow 0 \quad (\text{B.5})$$

Dizemos que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda seqüência $(PS)_c$ possui uma subseqüência convergente em X .

Teorema B.4. *(Ambrosetti-Rabinowitz) Suponha que as hipóteses do Teorema B.2 sejam válidas. Se I satisfaz a condição $(PS)_c$, então c é valor crítico de I .*

Demonstração: O Teorema B.2 implica a existência de uma seqüência $(u_n) \subset X$ satisfazendo (B.5). Pela condição $(PS)_c$, a seqüência (u_n) possui uma subseqüência convergindo para $u \in X$. Então $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. Portanto c é valor crítico de I . ■

Apêndice C

Princípio Variacional de Ekeland

Teorema C.1. (*Princípio Variacional de Ekeland*) Seja (M, d) um espaço métrico completo. Seja $f : M \rightarrow (-\infty, \infty]$ uma função semicontínua inferiormente, limitada inferiormente e $f \not\equiv \infty$. Dado $\epsilon > 0$, tome $u \in M$ tal que

$$f(u) \leq \inf_M f + \epsilon.$$

Então existe $v \in M$ tal que

$$f(v) \leq f(u) \tag{C.1}$$

$$d(u, v) \leq 1 \tag{C.2}$$

e, para cada $w \neq v$ em M ,

$$f(w) > f(v) - \epsilon d(v, w). \tag{C.3}$$

Demonstração: Primeiro definamos uma relação de ordem em M da seguinte forma

$$w \leq v \Leftrightarrow f(w) + \epsilon d(v, w) \leq f(v)$$

É imediato que as propriedades da relação de ordem são satisfeitas.

- (i) (reflexiva) $u \leq u$;
- (ii) (anti-simétrica) $u \leq v$ e $v \leq u$ implica que $u = v$;
- (iii) (transitiva) $u \leq v$ e $v \leq w$ implica $u \leq w$; para todo $u, v, w \in M$.

Definamos agora uma sequência (S_n) de subconjuntos de M da seguinte forma: começando com $u_0 = u$, seja

$$S_0 = \{w \in M : w \leq u_0\}$$

e escolhemos $u_1 \in S_0$ tal que $f(u_1) \leq \inf_{S_0} f + 1$. Por indução definimos

$$S_n = \{w \in M : w \leq u_n\}$$

e escolhemos $u_{n+1} \in S_n$ tal que $f(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} f + \frac{1}{(n+1)}$.

Claramente $S_{n+1} \subset S_n$ quando $u_{n+1} \leq u_n$. S_n é fechado: seja $x_j \in S_n$ com $x_j \rightarrow x \in M$. De $x_j \in S_n$ temos que $f(x_j) \leq f(u_n) - \epsilon d(x_j, u_n)$. Passando o limite e usando a semicontinuidade inferior de f e a continuidade de d temos que $x \in S_n$. Agora, se $w \in S_{n+1}$, $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ o que implica

$$\epsilon d(w, u_{n+1}) \leq f(u_{n+1}) - f(w) \leq \inf_{S_n} f + \frac{1}{(n+1)} - \inf_{S_n} f = \frac{1}{(n+1)}$$

logo $d(w, u_{n+1}) \leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}$ e então diâmetro $S_{n+1} \leq \frac{1}{\epsilon(n+1)}$, isto é, diâmetro $S_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. O fato de M ser completo implica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{v\} \quad (\text{C.4})$$

para algum $v \in M$. Em particular, $v \in S_0$, isto é, $v \leq u_0 = u$ e então

$$d(u, v) \leq \epsilon^{-1}(f(u) - f(v)) \leq \epsilon^{-1}(\inf_M f + \epsilon - \inf_M f) = 1.$$

Para obter (C.3) é suficiente mostrar que $w \leq v$ implica que $w = v$. Se $w \leq v$ então, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$w \leq u_n$$

logo $w \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$ e, por (C.4), $w = v$. ■

Teorema C.2. *Sejam K um espaço métrico compacto, $K_0 \subset K$ um conjunto fechado, X um espaço de Banach, $\varphi \in C(K_0, X)$ e defina o espaço métrico completo M por*

$$M = \{g \in C(K, X) : g(s) = \varphi(s), \text{ se } s \in K_0\}$$

com a distância usual d . Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e defina

$$c = \inf_{g \in M} \max_{s \in K} I(g(s)), \quad c_1 = \max_{\varphi(K_0)} I.$$

Se $c > c_1$ então para cada $\epsilon > 0$ e cada $f \in M$ tal que

$$\max_{s \in K} I(f(s)) \leq c + \epsilon, \quad (\text{C.5})$$

existe um $v \in X$ tal que

$$\begin{aligned} c - \epsilon &\leq I(v) \leq \max_{s \in K} I(f(s)), \\ d(v, f(K)) &\leq \epsilon^{1/2}, \\ |I'(v)| &\leq \epsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$0 < \epsilon < c - c_1. \quad (\text{C.6})$$

Seja $f \in M$ satisfazendo a condição (C.5). Definimos a função $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(g) = \max_{s \in K} I(g(s)),$$

e então $c = \inf_M \Phi > c_1$. Para mostrar que Φ é contínua, usaremos a continuidade uniforme de I em $g(K)$.

Pelo Teorema C.1, existe $h \in M$ tal que

$$\Phi(h) \leq \Phi(f) \leq c + \epsilon,$$

$$\max_{s \in K} |h(s) - f(s)| \leq \epsilon^{1/2}$$

e

$$\Phi(g) > \Phi(h) - \epsilon^{1/2} d(h, g) \quad (\text{C.7})$$

sempre que $g \in M$ e $g \neq h$. Na verdade, o teorema estará provado se mostrarmos a existência de algum $s \in K$ tal que

$$c - \epsilon \leq I(h(s))$$

$$|I'(h(s))| \leq \epsilon^{1/2},$$

isto é,

$$\langle I'(h(s)), v \rangle \geq -\epsilon^{1/2}$$

sempre que $v \in X$ e $|v| = 1$. Suponhamos, por contradição, que para cada $s \in S$, onde

$$S = \{s \in K : c - \epsilon \leq I(h(s))\},$$

existam $\delta_s > 0$, $v_s \in X$ com $|v_s| = 1$ e uma bola aberta B_s em K contendo s tal que, para $t \in B_s$ e $u \in X$ com $|u| \leq \delta_s$, tenhamos

$$\langle I'(h(t)) + u, v_s \rangle < -\epsilon^{1/2}. \quad (\text{C.8})$$

Como S é compacto, existe uma subcobertura finita $B_{s_1}, \dots, B_{s_k}$ de S e definamos $\psi_j : K \rightarrow [0, 1]$ por

$$\begin{aligned} \psi_j(t) &= \frac{d(t, B_{s_j}^c)}{\sum_{i=1}^k d(t, B_{s_i}^c)}, \text{ se } t \in \bigcup_{i=1}^k B_{s_i} \\ \psi_j(t) &= 0, \quad \text{se } t \in K \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{s_i}. \end{aligned}$$

Finalmente, considere $\delta = \min(\delta_{s_1}, \dots, \delta_{s_k})$, $\psi : K \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua tal que

$$\begin{aligned} \psi(t) &= 1, \text{ se } c \leq I(h(t)) \\ &= 0, \text{ se } I(h(t)) \leq c - \epsilon. \end{aligned}$$

e seja $g \in C(K, X)$ definida por

$$g(t) = h(t) + \delta \psi(t) \sum_{i=1}^k \psi_j(t) v_{s_j}.$$

Segue de (C.6) que para $t \in K_0$

$$I(h(t)) = I(\varphi(t)) \leq c_1 < c - \epsilon$$

e então $\psi(t) = 0$. Na verdade, para $t \in K_0$, $g(t) = h(t) = \varphi(t)$, logo $g \in M$.

O Teorema do Valor Médio e (C.8) implicam que, para cada $t \in S$, existe um $0 < \tau < 1$ tal que

$$\begin{aligned} I(g(t)) - I(h(t)) &= \left\langle I' \left(h(t) + \tau \delta \psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) v_{s_j} \right), \delta \psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) v_{s_j} \right\rangle \\ &= \delta \psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) \left\langle I' \left(h(t) + \tau \delta \psi(t) \sum_{j=1}^k \psi_j(t) v_{s_j} \right), v_{s_j} \right\rangle \\ &\leq -\epsilon^{1/2} \delta \psi(t). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Se $t \notin S$, $\psi(t) = 0$ e $I(g(t)) = I(h(t))$. Se $\bar{t}$ é tal que $I(g(\bar{t})) = \Phi(g)$, obtemos

$$I(h(t)) \geq I(g(\bar{t})) \geq c$$

e então $\bar{t} \in S$ e $\psi(\bar{t}) = 1$. Por (C.9) obtemos

$$I(g(\bar{t})) - I(h(\bar{t})) \leq \epsilon^{1/2}\delta.$$

Em particular,

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2}\delta \leq I(h(\bar{t})) \leq \Phi(h)$$

logo $g \neq h$. Mas, pela definição de g temos $d(g, h) \leq \delta$ e então

$$\Phi(g) + \epsilon^{1/2}d(g, h) \leq \Phi(h),$$

contrariando (C.7) e completando assim a demonstração. ■

Corolário C.3. *Sobre as hipóteses do Teorema C.2, para cada seqüência (f_k) em M tal que*

$$\max_K I(f_k) \rightarrow c,$$

existe uma seqüência (v_k) em X tal que

$$I(v_k) \rightarrow c$$

$$d(v_k, f_k(K)) \rightarrow 0$$

$$|I'(v_k)| \rightarrow 0,$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Demonstração: Basta definirmos $\epsilon_k = \max_K I(f_k) - c$ se $\max_K I(f_k) - c > 0$, $\epsilon_k = 1/k$ se $\max_K I(f_k) - c \leq 0$ e aplicarmos o Teorema C.2 para ϵ_k e f_k , para todo $k \in \mathbb{N}^*$. ■

Apêndice D

Lema de Lions

Lema D.1. (*P.L. Lions, 1984*) Suponha (u_m) limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e seja $R > 0$ tal que

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |u_m|^2 dx = 0. \quad (\text{D.1})$$

Então $u_m \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, onde $2 < q < 2^*$.

Demonstração: Para qualquer $y \in \mathbb{R}^N$ e $q \in (2, 2^*)$, temos pela desigualdade de Hölder e pela imersão de Sobolev que

$$\|u\|_{L^q(B_R(y))} \leq C \|u\|_{L^2(B_R(y))}^{1-\lambda} \|u\|_{H^1(B_R(y))}^{\lambda}$$

onde $\lambda = \frac{(q-2)}{2q}N$ e C depende de q , N e R mas independe de y . Suponha $\lambda q \geq 2$, isto é, $q \geq \frac{4}{N} + 2 = \bar{q}$. Então

$$\int_{B_R(y)} |u|^q dx \leq C^q \|u\|_{L^2(B_R(y))}^{q(1-\lambda)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\lambda q - 2} \int_{B_R(y)} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx. \quad (\text{D.2})$$

Escolhendo uma família de bolas $\{B_R(y_i)\}$ cuja união cobre $\mathbb{R}^N$ e tal que cada ponto de $\mathbb{R}^N$ está contido em no máximo k bolas, obtemos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq k C^q \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B_R(y)} |u|^2 dx \right)^{q(1-\lambda)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^{\lambda q}. \quad (\text{D.3})$$

Tomando $u = u_m$, temos por (D.1) e (D.3) que o Lema é válido para $q \geq \bar{q}$.

Se $2 < q < \bar{q}$, então $q = 2\lambda + \bar{q}(1-\lambda)$ para algum $\lambda \in (0, 1)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}^q \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^{\lambda} \|u\|_{L^{\bar{q}}(\mathbb{R}^N)}^{(1-\lambda)q}. \quad (\text{D.4})$$

Tomando $u = u_m$ em (D.4), o resultado então segue pelo caso anterior.

■

Referências Bibliográficas

- [1] AMBROSETTI, A.; RABINOWITZ, P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* v.14, p.349-381, 1973.
- [2] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Paris: Masson, 1987, 233p.
- [3] DING, W.Y.; NI, W. M. On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, v.91, p.283-308 1986,.
- [4] FELMER, P. L.; DEL PINO, M. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var.*, v.4, p.121-137, 1996.
- [5] FELMER, P. L.; DEL PINO, M. Multi-peaks bound states of nonlinear Schrödinger equations, *Ann. Inst. Poincaré, Anal. Nonlineaire*, v.15, p.127-149, 1998.
- [6] FLOER, A.; WEINSTEIN, A. Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equations with a bounded potencial, *J. Funct. Anal.* v.69, p.397-408, 1986.
- [7] GIDAS, B.; NI, W. M.; NIRENBERG, L. Symmetric of positive solutions of nonlinear equations in $\mathbb{R}^N$, *Advances in Math. Suppl. Studies 7A, Math. Anal. and Applications, Part A*. New York: Academic Press, p.369-402, 1981.
- [8] GILBARD, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differencial equations of second order*, 2.ed, Springer-Verlag, New York, 513 p, 1983.
- [9] NI, W. M.; TAKAGI, I. On a shape on least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, v.44, 1991, p.819-851,
- [10] NI, W. M.; TAKAGI, I. Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem, *Duke Math. J.*, v.70, p.247-281, 1993.

- [11] NI, W. M.; WEI, J. On the location and profile of spike-layer solutions to singularly perturbed semilinear Dirichlet problems, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, v.48, p.731-768, 1995.
- [12] OH, Y. J. Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potential on the class $(V)_a$, *Comm. Partial Diff. Eq.*, v.13, p.1499-1519, 1988.
- [13] OH, Y. J. Corrections to Existence of semi-classical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potential on the class $(V)_a$, *Comm. Partial Diff. Eq.*, v.14, p.833-834, 1989.
- [14] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, AMS, v.65, 1986, 100p.
- [15] RABINOWITZ, P. H. A Note on a semilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^N$, *Differential Equations*, p.307-317, 1991.
- [16] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations, *Z. Angew Math. Phys.*, v.43, p.270-291, 1992.
- [17] WANG, X. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations, *Commun. Math. Phys.*, v.153, p.229-244, 1993.
- [18] WILLEM, M. *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996, 159p.