SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 19/02/2004

Assinatura: *Ara Paula Jansão Freire*

Invariantes de germes do plano no plano¹

Mariana Rodrigues da Silveira

Orientador: *Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

¹Este trabalho teve suporte financeiro da Fapesp proc: 01/12532-0

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique

RGWilk

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

maOph

Profa. Dra. Angela Maria Sitta

Angela Maria Sitta

Aos meus pais

Agradecimentos

A Deus, meu eterno companheiro, que esteve comigo e me iluminou em todos os momentos, não deixando que eu desanimasse nos momentos difíceis e dividindo comigo os bons momentos.

À Prof. Roberta pelo incentivo, pelas sugestões e críticas, pela paciência, compreensão, dedicação e confiança.

Aos meus pais João Batista e Maria Hermínia, por me darem a vida, por serem pessoas maravilhosas nas quais me espelhei para criar meus valores e me tornar a pessoa que hoje sou, por me darem todo o apoio moral e financeiro e por me orientarem e me encorajarem em todos os momentos da minha vida. Minha eterna gratidão!

Às minhas irmãs Marina e Joana, aos meus primos, tios e avós, que estiveram ao meu lado me apoiando e incentivando em todos os momentos. Ao meu avô Zezinho, meu exemplo de vida, de bondade, honestidade e força de vontade. Vô, queria que vc estivesse aqui!

Especialmente à minha tia Lúcia por todas as suas orações pelo meu sucesso. Obrigada, tia Lu!

Aos meus amigos, aqueles que me acompanharam e me ajudaram de perto e aqueles que torceram por mim de longe, meus mais profundos agradecimentos. À minha turma Alex, Aline, Fábio, Grazielle, Ronaldinho, Flávia, Luci Any, Kelly e Érica pelo companheirismo, pelas conversas, pelos churrascos, pelo apoio e carinho. Aos meus queridos amigos Camila, minha irmãzinha do coração, e Fernando, meu anjo da guarda. Ao pessoal da minha salinha e aos meus amigos de Paraguaçu. Valeu, gente!

Aos meus professores, que me incentivaram e me orientaram, especialmente a Ires, o Biasi, o Wagner e o Ladeira.

Aos funcionários do ICMC por toda a ajuda e atenção dispensada.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

O objetivo do trabalho é estudar os invariantes de germes de aplicações do plano no plano, que são: o número de cúspides ($c(f)$) e o número de dobras ($d(f)$) que aparecem no discriminante de uma perturbação estável do germe f . Além disso, mostramos que $c(f)$ e $d(f)$ são invariantes topológicos. No caso particular em que f é um germe de corank 1, encontramos fórmulas que simplificam o cálculo de $c(f)$ e $d(f)$.

Abstract

In this work we deal with invariants for map germs from the plane to the plane. These invariants are the number of cusps ($c(f)$) and nodes ($d(f)$) that appear in the discriminant of a stable perturbation of the initial germ f . We show also that $c(f)$ and $d(f)$ are topological invariants. When f has corank 1 we present more simple formulas for $c(f)$ and $d(f)$.

Sumário

Introdução	ii
1 Teoria de Singularidades	1
1.1 Germes e $\mathcal{A}$ -equivalência	1
1.2 Espaço Tangente	3
1.3 Determinação Finita e Desdobramentos	9
1.4 Teorema da Preparação	11
1.5 Equivalência de Contato	13
2 Anéis de Cohen-Macaulay	15
2.1 Resultados Básicos de Álgebra Comutativa	15
2.2 Dimensão	17
2.3 Grade e Anéis de Cohen-Macaulay	18
2.4 Módulos Projetivos e o Teorema de Hilbert-Burch	20
3 Germes de Variedades Analíticas e Ideais de Fitting	23
3.1 Germes de Variedades Analíticas Complexas	23
3.2 O Anel $\mathcal{O}_{X,0}$	25
3.3 Normalização	27
3.4 Intersecção Completa com Singularidade Isolada	28
3.5 Ideais de Fitting	28
4 Cúspides e Nós de Germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$	30
4.1 O invariante delta (δ)	31
4.2 Cálculo de $c(f)$ e $d(f)$	33
4.3 Germes de corank 1	47

Introdução

Uma questão relevante em teoria de singularidades é o estudo dos invariantes associados a um germe de aplicação holomorfa. O primeiro invariante que surgiu foi o número de Milnor de um germe de uma função analítica $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Este invariante pode ser definido de várias maneiras. Algebricamente é definido por

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \rangle}$$

Sua finitude é uma condição necessária e suficiente para a determinação finita e, além disso, ele aparece associado à geometria da singularidade em duas formas: como números de pontos críticos de Morse em uma deformação estável e como o rank da homologia média da fibra de Milnor de f . Na teoria de singularidades de germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com $p > 1$, não se encontra um invariante assim tão completo. Uma razão para isto está no fato que, enquanto para funções aparece apenas um tipo de singularidade estável, ou seja, a singularidade de Morse, para $p > 1$ a complexidade da classificação dos germes e multigerms estáveis aumenta com n e p .

As singularidades de germes de aplicações do plano no plano foram primeiramente estudadas por H. Whitney, em 1955 e, posteriormente, por J. Mather em 1970. Os trabalhos de Whitney e Mather versam sobre singularidades estáveis. A classificação dos germes simples de corank 1 (caso real ou complexo) foi obtida por J. Rieger em [21].

Quando um germe finitamente determinado não estável $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é perturbado de modo a se tornar estável, um certo número de cúspides, $c(f)$, e dobras, $d(f)$, aparecem no discriminante, que é uma curva. Os números $c(f)$ e $d(f)$ refletem a complexidade do germe inicial. Ainda, estes números são invariantes analíticos de f , isto é, se f e g são equivalentes por mudanças de coordenadas na fonte e na meta, então o número de cúspides (respectivamente de dobras) de f e g coincidem. Em [4], T. Gaffney e D. Mond apresentam fórmulas para calcular estes invariantes. Mais ainda, eles mostram que

eles são, de fato, invariantes topológicos, o que leva a condições necessárias e suficientes para trivialidade topológica de famílias de germes $(\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$. Em [21], Rieger dá uma fórmula para estes invariantes em termos da multiplicidade local e dos invariantes μ e δ do conjunto dos pontos críticos. Finalmente, Gaffney e Mond, em [5], relacionam a $\mathcal{A}_e$ -codimensão do germe f com $c(f)$ e $d(f)$ e o número de Tjurina do discriminante.

O objetivo desta dissertação é apresentar as fórmulas que Gaffney e Mond obtiveram para $c(f)$ e $d(f)$. Para o desenvolvimento deste trabalho são necessários conhecimentos da teoria de singularidades e álgebra comutativa.

No capítulo 1 apresentamos alguns tópicos de teoria de singularidades tais como: germes de aplicações holomorfas, a álgebra $\mathcal{O}_n$, o módulo $\mathcal{O}_{n,p}$, $\mathcal{A}$ -equivalência, espaço tangente, determinação finita para germes, estabilidade de germes, equivalência de contato e desdobramentos.

O objetivo da capítulo 2 é apresentar os Anéis de Cohen-Macaulay. Para tanto, desenvolvemos alguns tópicos de Álgebra Comutativa básicos, definimos dimensão, grade e profundidade de um anel. Neste capítulo também abordamos o Teorema de Hilbert Burch.

No capítulo 3 estudamos germes de variedades analíticas complexas. Definimos o anel $\mathcal{O}_{X,0}$, variedades de Cohen-Macaulay, normalização e intersecção completa com singularidade isolada. Além disso, abordamos os ideais de fitting e exibimos um algoritmo para calcular tais ideais quando f é um germe de aplicação $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$.

O capítulo 4 constitui a parte principal desta dissertação. Nele, definimos os invariantes $c(f)$ e $d(f)$, encontramos fórmulas para calculá-los e mostramos que $c(f)$ e $d(f)$ são invariantes topológicos. Além disso, obtemos relações entre estes invariantes e o grau do germe f . Finalmente, apresentamos fórmulas mais simples para o cálculo de $c(f)$ e $d(f)$ no caso particular em que o germe f tem corank 1.

Capítulo 1

Teoria de Singularidades

Neste capítulo abordamos alguns tópicos da teoria de singularidades necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Algumas demonstrações são omitidas. As principais referências são Gibson [10], Golubitsky [11], Martinet [18] e Wall [29].

1.1 Germes e $\mathcal{A}$ -equivalência

Seja $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{C}^n$. Consideremos o conjunto das aplicações holomorfas definidas numa vizinhança aberta de S em $\mathbb{C}^n$ com valores em $\mathbb{C}^p$. Introduzimos neste conjunto a seguinte relação de equivalência: dadas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ em tal conjunto, dizemos que f e g são equivalentes se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ de S tal que $f|_W = g|_W$.

Definição 1.1.1 *O multigerme de uma aplicação holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, onde U é uma vizinhança aberta de $S \subset \mathbb{C}^n$, é a classe de equivalência de f segundo a relação de equivalência definida acima. Denotamos o multigerme de f por $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. Se $S = \{x\}$, esta classe de equivalência é chamada de germe, x é chamado de fonte do germe e $y = f(x)$ é chamado de meta do germe.*

Dados dois germes $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ e $g : (\mathbb{C}^p, y) \rightarrow (\mathbb{C}^q, z)$ podemos obter o germe $f \circ g : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^q, z)$ tomando representantes convenientes de f e g , digamos $\hat{f}$ e $\hat{g}$, de forma que $\hat{g} \circ \hat{f}$ esteja bem definida. O germe $g \circ f$ é o germe de $\hat{g} \circ \hat{f}$.

A derivada do germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ em x é a derivada em x de qualquer representante de f . Notemos que esta definição independe da escolha do representante.

Dizemos que $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é um germe de difeomorfismo se um de seus representantes, e portanto todos, é um difeomorfismo local em x .

Teorema 1.1.2 (Teorema da Função Inversa para Germes) *Consideremos o germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. O germe f é de difeomorfismo se, e somente se, sua derivada $d_x f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é um isomorfismo.*

Definição 1.1.3 *O rank de um germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é o rank da matriz de $d_x f$ e é denotado por $\text{rank } f$. O corank de f , o qual denotamos por $\text{corank } f$, é definido como sendo $\min\{n, p\} - \text{rank } f$.*

Consideremos o germe $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. Dizemos que f é germe de imersão se $\text{rank } f = n$ e de submersão se $\text{rank } f = p$. O germe f é dito ser singular ou singularidade se não é submersão e nem imersão, ou seja, $\text{rank } f < \min\{n, p\}$. Portanto, f é um germe de difeomorfismo se é germe de imersão e de submersão.

Definição 1.1.4 *Dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_1)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ são ditos serem $\mathcal{A}$ -equivalentes, e denotamos por $f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2$, se existem germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^n, x_2)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, y_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ para os quais o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, x_1) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{C}^p, y_1) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{C}^n, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{C}^p, y_2) \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$.

Como consequência da Definição 1.1.4, temos que todo germe $(\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a algum germe $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

O conjunto dos germes $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é denotado por $\mathcal{O}_{n,p}$. Analogamente, podemos definir o conjunto dos germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, que denotamos por $\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $p = 1$, denotamos por $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{E}_n$ respectivamente. O conjunto dos germes de difeomorfismos de $\mathcal{O}_{n,n}$ é um grupo com a operação de composição e é denotado por $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ ou D^n .

Temos que $\mathcal{O}_n$ é um espaço vetorial complexo e possui estrutura de anel local. O ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ é $\mathcal{M}_n = \{g \in \mathcal{O}_n / g(0) = 0\}$. Portanto, $\mathcal{O}_n$ é uma $\mathbb{C}$ -álgebra.

Analogamente, $\mathcal{E}_n$ é um espaço vetorial real com estrutura de anel local e seu ideal maximal é $\mathcal{M}_n^{\mathbb{R}} = \{g \in \mathcal{E}_n / g(0) = 0\}$. Assim, $\mathcal{E}_n$ é uma $\mathbb{R}$ -álgebra.

Notemos que $\mathcal{O}_{n,p}$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre. De fato, se $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ então $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Logo $\mathcal{O}_{n,p} \simeq \mathcal{O}_n \oplus \mathcal{O}_n \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_n$. Analogamente, $\mathcal{E}_{n,p}$ é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre.

Denotamos por $J^k(n, p)$ o espaço vetorial complexo das aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ onde cada uma das componentes $f_1, f_2, \dots, f_p$ é um polinômio de grau menor ou igual a k nas

coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são ditos k -jatos.

Sejam $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa, onde U é um aberto de $\mathbb{C}^n$ e $a \in U$. A expansão em série de potências de $f(x + a)$ em torno de 0 é dada por

$$f(a) + d_a f \cdot x + \frac{1}{2!} d_a^2 f \cdot x^2 + \dots$$

Definição 1.1.5 *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. O k -jato de f em a , denotado por $j^k f(a)$, é definido por*

$$d_a f \cdot x + \frac{1}{2!} d_a^2 f \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{k!} d_a^k f \cdot x^k$$

isto é, $j^k f(a)$ é a expansão em série de potências de $f(x + a) - f(a)$ em torno de 0 truncada no termo de grau k , onde f é um representante do germe.

1.2 Espaço Tangente

Definição 1.2.1 *Sejam G um grupo e M um conjunto. Uma ação do grupo G no conjunto M é uma aplicação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ (escrevemos $\varphi(g, x) = g \cdot x$) satisfazendo*

1. $1 \cdot x = x \ \forall x \in M$, onde 1 é o elemento neutro de G ,
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall g, h \in G, x \in M$.

Uma ação induz uma relação de equivalência em M da seguinte forma: dados $x, y \in M$, dizemos que x é equivalente a y se existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. A classe de equivalência de $x \in M$ segundo esta relação de equivalência é chamada de órbita de x e é denotada por $G \cdot x = \{g \cdot x / g \in G\}$.

A $\mathcal{A}$ -equivalência em $\mathcal{O}_{n,p}$ provém de uma ação. De fato, consideremos o grupo $\mathcal{A} = \text{Diff}(\mathbb{C}^n) \times \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$. Este grupo age em $\mathcal{O}_{n,p}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{O}_{n,p} &\rightarrow \mathcal{O}_{n,p} \\ ((\phi, \psi), f) &\mapsto \psi \circ f \circ \phi^{-1} \end{aligned}$$

Logo, dois germes $f, g \in \mathcal{O}_{n,p}$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, f e g estão na mesma órbita segundo a ação acima.

Definição 1.2.2 *Um grupo de Lie G é um grupo que é uma variedade diferenciável e as aplicações*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G & G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy & x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são de classe C^∞ .

Definição 1.2.3 *Uma ação de um grupo de Lie G numa variedade diferenciável M é uma ação $\varphi : G \times M \rightarrow M$ que é de classe C^∞ .*

No que segue vamos definir uma relação de equivalência entre k -jatos de maneira análoga à definida para germes.

Definição 1.2.4 *Dois k -jatos $f, g \in J^k(n, p)$ são ditos serem equivalentes se existem $\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n)$ e $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^p)$ tais que $j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) = j^k g(0)$.*

A relação de equivalência definida acima provém de uma ação de um grupo de Lie na variedade $J^k(n, p)$. De fato, consideremos o conjunto dos k -jatos de elementos de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n)$. Este conjunto é um grupo com a seguinte operação:

$$j^k h_1(0) * j^k h_2(0) = j^k(h_1 \circ h_2)(0)$$

Denotamos este grupo por D_n^k . Este grupo é um conjunto aberto no espaço vetorial $J^k(n, n)$. Portanto, é uma variedade diferenciável e o seu espaço tangente em qualquer ponto é $J^k(n, n)$. Logo, D_n^k é um grupo de Lie. Segue que $\mathcal{A}^k = D_n^k \times D_p^k$, que é o grupo dos k -jatos de elementos de $\mathcal{A}$, é um grupo de Lie, pois o produto cartesiano de grupos de Lie é um grupo de Lie. O grupo $\mathcal{A}^k$ age em $J^k(n, p)$ da forma:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}^k \times J^k(n, p) &\rightarrow J^k(n, p) \\ (j^k \phi(0), j^k \psi(0), f) &\longmapsto j^k(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0) \end{aligned}$$

Em geral as órbitas de um grupo de Lie numa variedade não são subvariedades. No entanto, se supusermos que as órbitas são subvariedades, o resultado seguinte descreve o espaço tangente a uma órbita.

Proposição 1.2.5 *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G numa variedade M . Suponhamos que as órbitas em M segundo esta ação sejam subvariedades de M . Então, para todo $x \in M$, a aplicação $\varphi_x : G \rightarrow G.x$, dada por $\varphi_x(g) = g.x$, é uma submersão.*

Demonstração Dado $x \in M$, mostremos primeiramente que a aplicação φ_x tem o mesmo rank em todo elemento de G . Para isto, basta mostrar que o rank de φ_x em qualquer $h \in G$ coincide com o rank de φ_x no elemento neutro 1 de G . Seja $\theta : G \rightarrow G$ o difeomorfismo dado por $\theta(g) = hg$ e $\psi : M \rightarrow M$ o difeomorfismo dado por $\psi(y) = h.y$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \\ \theta \downarrow & & \downarrow \psi \\ G & \xrightarrow{\varphi_x} & G.x \end{array}$$

Da definição de ação, este diagrama é comutativo. Aplicando a regra da cadeia obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_1 G & \xrightarrow{d_1 \varphi_x} & T_x G.x \\ d_1 \theta \downarrow & & \downarrow d_x \psi \\ T_h G & \xrightarrow{d_h \varphi_x} & T_x G.x \end{array}$$

Como θ e ψ são difeomorfismos, $d_1 \theta$ e $d_x \psi$ são isomorfismos e, portanto,

$$\dim d_1 \varphi_x(T_1 G) = \dim d_h \varphi_x(T_h G)$$

Logo o rank de φ_x em h é igual ao rank de φ_x em 1 . Basta mostrar agora que φ_x é submersão em algum ponto de G , mas isto segue do Teorema de Sard (ver [10]).

■

A seguir vamos obter o espaço tangente à órbita de $f \in J^k(n, p)$ segundo a ação do grupo $\mathcal{A}^k$. Denotamos tal espaço por $T\mathcal{A}^k.f$. Pela proposição acima, temos que $T\mathcal{A}^k.f$ é a imagem da derivada da aplicação φ_f em $I = (I_n, I_p)$, onde I_n e I_p são as identidades em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente:

$$\begin{aligned} T\mathcal{A}^k.f &= d_I \varphi_f(T_I(D_n^k \times D_p^k)) = d_I \varphi_f(T_{I_n} D_n^k \times T_{I_p} D_p^k) \\ &= d_I \varphi_f(T_{I_n} D_n^k \times \{0\} + \{0\} \times T_{I_p} D_p^k) = d_I \varphi_f(J^k(n, n) \times \{0\}) + d_I \varphi_f(\{0\} \times J^k(p, p)) \end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned} \xi_1 : D_n^k &\longrightarrow J^k(n, p) \\ j^k \phi(0) &\longrightarrow j^k(f \circ \phi^{-1})(0) \\ \xi_2 : D_p^k &\longrightarrow J^k(n, p) \\ j^k \psi(0) &\longrightarrow j^k(\psi \circ f)(0) \end{aligned}$$

Notemos que ξ_1 é a composição da aplicação inversão em D_n^k com a aplicação

$$\begin{aligned} \zeta : D_n^k &\longrightarrow J^k(n, p) \\ j^k \phi(0) &\longmapsto j^k(f \circ \phi)(0) \end{aligned}$$

Logo a imagem de $d_{I_n}\xi_1$ coincide com a imagem de $d_{I_n}\zeta$. Temos que

$$d_I\varphi_f(J^k(n, n) \times \{0\}) = d_{I_n}\xi_1(J^k(n, n)) = d_{I_n}\zeta(J^k(n, n))$$

De fato, se $u \in J^k(n, n) = T_{I_n}D_n^k$, então existe uma curva $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D_n^k$ tal que $\lambda(0) = I_n$ e $\lambda'(0) = u$. Seja $\Lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D_n^k \times D_p^k$ dada por $\Lambda(t) = (\lambda(t), I_p)$. Notemos que $\Lambda(0) = (I_n, I_p) = I$ e $\Lambda'(0) = (u, 0)$. Portanto

$$d_I\varphi_f(u, 0) = \frac{d(\varphi_f \circ \Lambda)}{dt}(0) = \frac{d(\xi_1 \circ \lambda)}{dt}(0) = d_{I_n}\xi_1(u)$$

Basta então calcular $d_{I_n}\zeta(J^k(n, n))$. Seja $g = (g_1, \dots, g_n) \in J^k(n, n)$. Para um valor de t suficientemente pequeno temos que $I_n + tg$ é invertível. Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos a curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D_n^k$ dada por $\alpha(t) = I_n + tg$. Ainda

$$\zeta \circ \alpha(t) = \zeta(I_n + tg) = j^k(f \circ (I_n + tg))(0) = j^k f(x_1 + tg_1, \dots, x_n + tg_n)(0)$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d(\zeta \circ \alpha)}{dt}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\zeta \circ \alpha)(t) - (\zeta \circ \alpha)(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j^k f(x_1 + tg_1, \dots, x_n + tg_n)(0) - j^k f(x_1, \dots, x_n)(0)}{t} \\ &= j^k \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + tg_1, \dots, x_n + tg_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} \right)(0) \\ &= j^k \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_1 + tg_1, \dots, x_n + tg_n)|_{t=0} \right)(0) \\ &= j^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + tg)g_i|_{t=0} \right)(0) = j^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}g_i \right)(0) \end{aligned}$$

Analogamente,

$$d_I\varphi_f(\{0\} \times J^k(p, p)) = d_{I_p}\xi_2(J^k(p, p))$$

Calculemos então $d_{I_p}\xi_2(J^k(p, p))$. Tomando $h \in J^k(p, p)$, podemos considerar, assim como no caso anterior, a curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow D_p^k$ dada por $\beta(t) = I_p + th$. Temos que $\xi_2 \circ \beta(t) = \xi_2(I_p + th) = j^k((I_p + th) \circ f)(0) = j^k(f + th \circ f)(0)$.

$$\begin{aligned} d_{I_p}\xi_2(h) &= \frac{d(\xi_2 \circ \beta)}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\xi_2 \circ \beta)(t) - (\xi_2 \circ \beta)(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j^k(f + th \circ f)(0) - j^k(f)(0)}{t} = j^k \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f + th \circ f - f}{t} \right)(0) = j^k(h \circ f)(0) \end{aligned}$$

Logo $d_{I_p}\xi_2(J^k(p, p)) = \{j^k(h \circ f)(0) / h \in J^k(p, p)\}$. Segue que o espaço tangente à órbita de f em $J^k(n, p)$ segundo a ação do grupo $\mathcal{A}^k$ é

$$T\mathcal{A}^k.f = \{j^k(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i)(0) / g = (g_1, \dots, g_n) \in J^k(n, n)\} + \{j^k(h \circ f)(0) / h \in J^k(p, p)\}$$

Consideremos a órbita de um germe segundo a ação do grupo $\mathcal{A}$. Este grupo não é de Lie e as órbitas não são subvariedades. Motivados pelo caso dos jatos definimos:

Definição 1.2.6 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$.*

1. *O espaço tangente à órbita de f segundo a ação do grupo $\mathcal{A}$ é*

$$T\mathcal{A}.f = \{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i / g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n}\} + \{h \circ f / h \in \mathcal{M}_p \mathcal{O}_{p,p}\}$$

2. *O espaço tangente estendido é*

$$T\mathcal{A}_e.f = \{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i / g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n}\} + \{h \circ f / h \in \mathcal{O}_{p,p}\}$$

Definimos a $\mathcal{A}$ -codimensão de f , ou codimensão de f , como sendo a dimensão de $\frac{\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}.f}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f como sendo a dimensão de $\frac{\mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}_e.f}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Descrevemos a seguir os espaços tangentes da Definição acima usando a linguagem de campos de vetores.

Definição 1.2.7 *Seja M uma variedade diferenciável. O fibrado tangente a M , denotado por TM , é o conjunto $\{(x, v) / v \in T_x M\}$.*

Definição 1.2.8 *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa. A aplicação tangente, denotada por T_f , é definida por*

$$\begin{aligned} T_f : T\mathbb{C}^n &\rightarrow T\mathbb{C}^p \\ (x, v) &\mapsto (f(x), d_x f(v)) \end{aligned}$$

Denotamos por π_n a projeção do fibrado tangente a $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \pi_n : T\mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (x, v) &\mapsto x \end{aligned}$$

Definição 1.2.9 *Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa. Um campo de vetores ao longo de f é uma aplicação holomorfa $\omega : U \rightarrow T\mathbb{C}^p$ que satisfaz $\pi_p \circ \omega = f$, ou seja, para cada $x \in U$, $\omega(x) = (f(x), v)$, onde v é um vetor de $T_{f(x)}\mathbb{C}^p$.*

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{C}^p \\ \pi_n \downarrow & \nearrow \omega & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Dada $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, denotamos por $\theta(f)$ o conjunto dos germes em 0 dos campos de vetores ao longo de f .

Se I_n é a identidade em $\mathbb{C}^n$, denotamos por $\theta(n)$ o conjunto $\theta(I_n)$. Notemos que existe uma identificação natural de $T\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e de $\theta(f)$ com $\mathcal{O}_{n,p}$.

Os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc} T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{TI_n} & T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{C}^p \\ \downarrow & \nearrow \xi & \downarrow \pi_n & \nearrow \omega & \downarrow \pi_p \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{I_n} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

Se $\xi(x) = (x, \bar{\xi}(x))$ então

$$Tf \circ \xi(x) = Tf(x, \bar{\xi}(x)) = (f(x), d_x f(\bar{\xi}(x)))$$

Onde o germe ξ é um elemento de $\theta(n)$ e o germe de $Tf \circ \xi$ é um elemento de $\theta(f)$. Definimos então

$$\begin{array}{ccc} tf : \theta(n) & \longrightarrow & \theta(f) \\ \xi & \longmapsto & Tf \circ \xi \end{array}$$

Temos que $\theta(n)$ e $\theta(f)$ são $\mathcal{O}_n$ -módulos, tf é um homomorfismo de $\mathcal{O}_n$ -módulos e os seguintes subconjuntos de $\theta(f)$ são submódulos.

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n} \right\} = \{ d_x f(g) \mid g \in \mathcal{M}_n \theta(n) \} = tf(\mathcal{M}_n \theta(n))$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \mid g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n} \right\} = \{ d_x f(g) \mid g \in \theta(n) \} = tf(\theta(n))$$

Um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ induz o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} f^* : \mathcal{O}_p & \longrightarrow & \mathcal{O}_n \\ h & \longmapsto & h \circ f \end{array}$$

Dado M um $\mathcal{O}_n$ -módulo, podemos definir em M uma estrutura de $\mathcal{O}_p$ -módulo via f^* . Assim, $\theta(f)$, $tf(\mathcal{M}_n\theta(n))$ e $tf(\theta(n))$ possuem estrutura de $\mathcal{O}_p$ -módulo via f^* . Definimos o homomorfismo de $\mathcal{O}_p$ -módulos (via f^*)

$$\begin{aligned}\omega f : \theta(p) &\longrightarrow \theta(f) \\ \eta &\longmapsto \eta \circ f\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\{h \circ f / h \in \mathcal{M}_p\mathcal{O}_{p,p}\} &= \{\omega f(h) / h \in \mathcal{M}_p\theta(p)\} = \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p)) \\ \{h \circ f / h \in \mathcal{O}_{p,p}\} &= \{\omega f(h) / h \in \theta(p)\} = \omega f(\theta(p))\end{aligned}$$

Os subconjuntos acima são $\mathcal{O}_p$ -submódulos de $\theta(f)$. Além disso,

$$T\mathcal{A}.f = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)) + \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p))$$

$$T\mathcal{A}_c.f = tf(\theta(n)) + \omega f(\theta(p))$$

Notemos que $T\mathcal{A}.f$ não é um $\mathcal{O}_n$ -submódulo mas um $\mathcal{O}_p$ -submódulo via f^* .

Definição 1.2.10 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Dizemos que f é estável se para cada $\omega \in \theta(f)$ existem $\xi \in \theta(n)$ e $\eta \in \theta(p)$ tais que*

$$\omega = tf(\xi) + \omega f(\eta)$$

ou seja, f é estável se $T\mathcal{A}_c.f = \theta(f)$.

1.3 Determinação Finita e Desdobramentos

Definição 1.3.1 *Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é k -determinado, para algum $k \in \mathbb{N}$, se para todo $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ temos que g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f . Dizemos que f é finitamente determinado se f é k -determinado para algum $k \in \mathbb{N}$.*

O teorema seguinte é um resultado de Mather encontrado em [29].

Teorema 1.3.2 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Então são equivalentes*

- i) *O germe f é finitamente determinado,*
- ii) *Existe um inteiro positivo k tal que $\mathcal{M}_n^k \subset T\mathcal{A}.f$,*
- iii) *A $\mathcal{A}$ -codimensão de f é finita,*
- iv) *A $\mathcal{A}_c$ -codimensão de f é finita,*

O resultado seguinte é uma caracterização geométrica dos germes finitamente determinados.

Teorema 1.3.3 *Um germe $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{O}_{n,p}$ é finitamente determinado se, e somente se, existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{C}^n$ tal que para todo subconjunto finito $S \subset V - \{0\}$, o multigerme de f em S é estável.*

Seja $f_0 \in \mathcal{M}_n\mathcal{O}_{n,p}$. Um desdobramento a s -parâmetros de f_0 é um germe de uma aplicação holomorfa

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0) \\ (u, x) &\longmapsto (u, f(u, x)) \end{aligned}$$

satisfazendo $f(0, x) = f_0(x)$. O germe $f : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é chamado de deformação de f_0 .

Dois desdobramentos $F, G : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$ de f_0 são isomorfos se existem germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$, desdobramentos a s -parâmetros dos germes das identidades em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente, tais que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Sejam F um desdobramento a s -parâmetros de $f_0 \in \mathcal{M}_n\mathcal{O}_{n,p}$ e $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ um germe. O pull-back de F por h , denotado por h^*F , é definido como sendo o desdobramento de f_0 a t -parâmetros dado por

$$\begin{aligned} h^*F : (\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^n, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^t \times \mathbb{C}^p, 0) \\ (v, x) &\longmapsto (v, f(h(v), x)) \end{aligned}$$

Se G é desdobramento a t -parâmetros de f_0 , dizemos que G é induzido de F se existe um germe $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F . Em particular, se $h : (\mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ é um germe de difeomorfismo, dizemos que F e G são equivalentes.

Dizemos que F é um desdobramento versal de f_0 se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos de F . Quando F é versal com um número mínimo de parâmetros dizemos que F é miniversal.

O desdobramento F é dito ser trivial se é isomorfo ao desdobramento constante $G : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$, $G(u, x) = (u, f_0(x))$.

Definição 1.3.4 *Seja $f_0 \in \mathcal{M}_n\mathcal{O}_{n,p}$. Um desdobramento a s -parâmetros de f_0 $F : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$ é topologicamente trivial se existem $\phi : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$ germes de homeomorfismos que são desdobramentos da identidade em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente, tais que $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$, onde G é o desdobramento constante.*

Seja $F : (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^p, 0)$, $F(u, x) = (u, f(u, x))$, um desdobramento topologicamente trivial de $f_0 \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{u,p}$ a s -parametros. Então as aplicações $f_u : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, dadas por $f_u(x) = f(u, x)$ são topologicamente equivalentes. De fato, se $\phi(x, y) = (u, \tilde{\phi}(u, x))$ e $\psi(u, y) = (u, \tilde{\psi}(u, y))$ são como acima, temos

$$f_0 \circ \tilde{\phi}_u = \tilde{\psi}_u \circ f_u$$

onde $\tilde{\phi}_u(x) = \tilde{\phi}(u, x)$ e $\tilde{\psi}_u(y) = \tilde{\psi}(u, y)$.

1.4 Teorema da Preparação

Lema 1.4.1 (Lema de Hadamard) *Sejam U uma vizinhança conexa de 0 em $\mathbb{C}^n$ e $f : U \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $f(0, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{C}^q$. Então $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = x_1 f_1(x, y) + \dots + x_n f_n(x, y)$ onde $f_1, \dots, f_n$ são funções definidas em $U \times \mathbb{C}^q$.*

Demonstração Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) &= \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \end{aligned}$$

Tomando $f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt$ obtemos o resultado. ■

Lema 1.4.2 (Lema de Nakayama) *Sejam R um anel comutativo com elemento unidade 1 e $\mathcal{M}$ um ideal de R com a propriedade que $1+x$ é invertível em R para todo $x \in \mathcal{M}$. Sejam M um R -módulo e A e B R -submódulos com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathcal{M}A$ então $A \subseteq B$.*

Demonstração Sejam $a_1, \dots, a_t$ geradores de A . Por hipótese, podemos encontrar $b_1, \dots, b_t$ em B e elementos λ_{ij} em $\mathcal{M}$ tais que para $1 \leq i \leq t$ temos

$$a_i = b_i + \lambda_{i1}a_1 + \dots + \lambda_{it}a_t \quad (1.1)$$

Sejam $A = (\lambda_{ij})$, $a = (a_1, \dots, a_t)$ e $b = (b_1, \dots, b_t)$. Assim, A é uma matriz de ordem t cujos elementos estão em R e $a, b \in \underbrace{M \times \dots \times M}_t$. Então podemos escrever (1.1) na forma

$$(I - A)a = b \quad (1.2)$$

onde I é a matriz identidade de ordem t sobre R . Notemos que $\det(I - A) = 1 - \lambda$, onde λ é uma soma de produtos de elementos em $\mathcal{M}$ e, portanto, é um elemento de $\mathcal{M}$. Por hipótese, $1 - \lambda$ é invertível em R . Portanto a matriz $I - A$ é invertível. Assim, podemos resolver o sistema (1.2) para $a_1, \dots, a_t$ em termos de $b_1, \dots, b_t$. Segue que $a_1, \dots, a_t \in B$. Portanto $A \subseteq B$. ■

O resultado seguinte é uma consequência do Lema de Nakayama e sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Corolário 1.4.3 *Sejam R um anel local comutativo com identidade, $\mathcal{M}$ seu ideal maximal e M um R -módulo finitamente gerado. Então $M/\mathcal{M}M$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $R/\mathcal{M}$. Sejam $\phi : M \rightarrow M/\mathcal{M}M$ a projeção natural, $v_1, \dots, v_n$ uma base para o espaço vetorial $M/\mathcal{M}M$ e $e_1, \dots, e_n \in M$ tais que $\phi(e_i) = v_i$. Então $e_1, \dots, e_n$ formam um conjunto de geradores de M sobre R .*

Para obter uma forma normal para germes f em $\mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ de corank 1, o seguinte teorema será utilizado. Sua demonstração pode ser encontrada em [11].

Teorema 1.4.4 (Teorema da Preparação de Weierstrass) *Seja f uma função analítica a valores complexos definida numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^2$ satisfazendo*

1. $f(0, y) = y^k g(y)$, onde $(0, y) \in \mathbb{C}^2$ e g é uma função analítica de uma variável definida numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}$,
2. $g(0) \neq 0$.

Então existe uma função a valores complexos q definida em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^2$ e funções $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ a valores complexos definidas numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}$ tais que

$$i) \quad qf(x, y) = y^k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(x) y^i \text{ para qualquer } (x, y) \text{ numa vizinhança de 0 em } \mathbb{C}^2,$$

$$ii) \quad q(0) \neq 0.$$

Teorema 1.4.5 (Teorema da Preparação de Malgrange Generalizado) *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e M um $\mathcal{O}_n$ -módulo finitamente gerado. Então M é um $\mathcal{O}_p$ -módulo (via f^*) finitamente gerado se, e somente se, $\frac{M}{f^*\mathcal{M}_p.M}$ é um espaço vetorial complexo de dimensão finita.*

Demonstração Ver [11]. ■

1.5 Equivalência de Contato

Introduzimos nesta seção uma outra relação de equivalência entre germes $(\mathbb{C}^n, x) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$. Esta relação é chamada de equivalência de contato ou $\mathcal{K}$ -equivalência.

Definição 1.5.1 *Dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_1)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ são ditos serem $\mathcal{K}$ -equivalentes, se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^n, x_2)$ e $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1)) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_2, y_2))$ para os quais o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{C}^n, x_1) & \xrightarrow{i_1} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1)) & \xrightarrow{\pi_1} & (\mathbb{C}^n, x_1) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (\mathbb{C}^n, x_2) & \xrightarrow{i_2} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_2, y_2)) & \xrightarrow{\pi_2} & (\mathbb{C}^n, x_2) \end{array}$$

é comutativo, onde i_k é o germe em x_k da inclusão $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ dada por $x \mapsto (x, y_k)$ e π_k é o germe em (x_k, y_k) da projeção $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^n$ dada por $(x, y) \mapsto x$, $k = 1, 2$. Em outras palavras, H é dado por

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$$

com $\theta(x, y_1) = y_2$. Dizemos que f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes se existem h e H como acima tais que

$$H(1, f_1) = (1, f_2) \circ h$$

Dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é finitamente $\mathcal{K}$ -determinado se existe $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $g \in \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^l g(0) = j^l f(0)$ temos que g é $\mathcal{K}$ -equivalente a f .

Se dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_1)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, x_2) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes, então também são $\mathcal{K}$ -equivalentes. De fato, suponhamos que existam germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^n, x_2)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, y_1) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ tais que

$$f_2 \circ \phi = \psi \circ f_1$$

Consideremos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1)) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_2, y_2))$ dado por $H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$, onde $h : (\mathbb{C}^n, x_1) \rightarrow (\mathbb{C}^n, x_2)$ é dado por $h(x) = \phi(x)$ e $\theta : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, (x_1, y_1)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y_2)$ é dado por $\theta(x, y) = \psi(y)$. Segue que

$$H \circ (1, f_1)(x) = (h(x), \theta(x, f_1(x))) = (\phi(x), \psi \circ f_1(x)) = (\phi(x), f_2 \circ \phi(x)) = (1, f_2) \circ h(x)$$

Portanto f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes. No entanto, dois germes $\mathcal{K}$ -equivalentes não são necessariamente $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Definição 1.5.2 *Sejam f_1 e f_2 dois germes em $\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$. Dizemos que f_1 e f_2 são $\mathcal{C}$ -equivalentes se são $\mathcal{K}$ -equivalentes via (H, h) , onde h é o germe da identidade na origem.*

Notemos que f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes se, e somente se, existe um germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $f_1 \circ h$ e f_2 são $\mathcal{C}$ -equivalentes.

Analogamente, dizemos que um germe $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ é finitamente $\mathcal{C}$ -determinado se existe $l \in \mathbb{N}$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $g \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}$ tal que $j^l g(0) = j^l f(0)$ temos que g é $\mathcal{C}$ -equivalente a f .

O resultado seguinte é a Proposição 2.4 de [29].

Proposição 1.5.3 *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Se $n \leq p$ e f é finitamente $\mathcal{K}$ -determinado então f é finitamente $\mathcal{C}$ -determinado.*

Capítulo 2

Anéis de Cohen-Macaulay

2.1 Resultados Básicos de Álgebra Comutativa

Nesta seção abordamos alguns resultados básicos de Álgebra Comutativa omitindo suas demonstrações. Tais resultados e suas demonstrações encontram-se em [1], [19] e [20].

Assumimos nesta seção que R é um anel comutativo.

Definições 2.1.1 *Seja I um ideal de R .*

- 1. O conjunto de todos os elementos $x \in R$ tais que alguma potência de x está em I é um ideal de R chamado de ideal radical de I e denotado por $\sqrt{I}$. Dizemos que I é um ideal radical se $\sqrt{I} = I$.*
- 2. Um elemento x de R é dito ser nilpotente se existe uma potência de x que é igual a zero. O conjunto dos elementos nilpotentes de R é denotado por $\text{nil}(R)$.*
- 3. Dizemos que I é primário se $I \neq R$ e se*

$$xy \in I \text{ então } x \in I \text{ ou } y^n \in I \text{ para algum } n > 0$$

O conjunto dos ideais primos de R é chamado espectro de R e denotado por $\text{spec}(R)$. Se I é um ideal próprio de R então o radical de I é a intersecção de todos os ideais primos de R que contêm I . Todo ideal primo é primário.

Se $R \neq 0$ então $\text{spec}(R)$ tem elementos maximais e minimais e todo ideal primo de R está contido em pelo menos um ideal primo maximal e contém pelo menos um ideal primo minimal.

Uma decomposição primária de um ideal I de R é uma expressão de I como uma

intersecção finita de ideais primários

$$I = \bigcap_{j=1}^n I_j$$

Uma decomposição primária é dita ser minimal se os ideais $\sqrt{I_j}$ são dois a dois distintos e

$$I_j \not\subseteq \bigcap_{k \neq j} I_k$$

$1 \leq j \leq n$. Qualquer decomposição primária pode ser reduzida a uma decomposição primária minimal.

Nem todo ideal possui decomposição primária e, quando a decomposição primária existe, nem sempre ela é única. No entanto, o seguinte resultado de [1, Corolário 4.11, pg 54] mostra que, sob certas condições, quando tal decomposição existe, então ela é única.

Teorema 2.1.2 *Sejam I um ideal com decomposição primária minimal*

$$I = \bigcap_{i=1}^n I_i$$

As componentes primárias I_i de I tais que $\sqrt{I_i}$ é um primo minimal de I são unicamente determinadas por I . Assim, se I tem uma decomposição primária minimal onde os radicais das componentes primárias são primos minimais, então tal decomposição é a única com estas propriedades.

Definição 2.1.3 *O anel R é dito ser Noetheriano se para toda sequência ascendente de ideais de R*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

existe n tal que $I_k = I_{k+1}$ para todo $k \geq n$.

Uma formulação equivalente para a definição acima é que um anel R é Noetheriano se, e somente se, todo ideal de R é finitamente gerado.

Como $\mathcal{O}_n$ é isomorfo a $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, segue do Teorema da Base de Hilbert (ver [1]) que $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano.

O resultado seguinte, bem como sua demonstração, podem ser encontrados em [1]. Este resultado será utilizado no capítulo seguinte.

Teorema 2.1.4 *Em um anel Noetheriano todo ideal tem uma decomposição primária.*

Definição 2.1.5 *Seja M um R -módulo. Dizemos que M é Noetheriano se para toda sequência ascendente de submódulos de M*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq \dots$$

existe n tal que $M_k = M_{k+1}$ para todo $k \geq n$.

Um R -módulo M é Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.

Se R é um anel Noetheriano e M é um R -módulo finitamente gerado então M é Noetheriano.

2.2 Dimensão

Nesta seção introduzimos o conceito de dimensão de um módulo finitamente gerado, necessário para a definição de módulos de Cohen-Macaulay. Apresentamos também alguns resultados importantes omitindo as demonstrações. Tais resultados, bem como suas demonstrações, se encontram em Matsumura [19].

Consideremos R um anel comutativo, $R \neq 0$.

Definição 2.2.1 *Uma sequência de $n + 1$ ideais primos da forma*

$$p_0 \supset p_1 \supset \dots \supset p_n$$

é chamada cadeia prima de comprimento n . Se $p \in \text{spec}(R)$, o supremo de todos os comprimentos das cadeias primas com $p_0 = p$ é chamado de altura de p e é denotado por $ht(p)$. Se I é um ideal próprio de R , definimos a altura de I como sendo o ínfimo das alturas dos ideais primos de R que contém I , ou seja,

$$ht(I) = \inf \{ht(p) \mid p \supseteq I\}$$

Se $ht(p) = 0$ então p é um primo minimal de R .

Definição 2.2.2 *A dimensão de R , também chamada de dimensão de Krull de R , é definida como sendo o supremo das alturas de todos os ideais primos de R , ou seja,*

$$\dim_{\text{krull}} R = \sup \{ht(p) \mid p \in \text{spec}(R)\}$$

Também denotamos a dimensão de Krull de R por $\dim R$.

Se R é um domínio de ideais principais então $\dim R = 1$.

Notemos que se a dimensão de R é finita então é igual ao comprimento da mais longa cadeia prima em R .

Definição 2.2.3 *Seja $M \neq 0$ um R -módulo. Definimos a dimensão de M como sendo*

$$\dim M = \dim(R/\text{Ann}(M))$$

onde $\text{Ann}(M) = \{a \in R / aM = 0\}$. Convencionalmente, se $M = 0$, dizemos que $\dim M = -1$.

O resultado seguinte é de grande importância, pois tem como consequência imediata que todo anel local Noetheriano tem dimensão finita. Sua demonstração é bastante extensa e pode ser encontrada em [19].

Teorema 2.2.4 *Suponhamos que R seja Noetheriano e tenha um número finito de ideais maximais. Então a dimensão de R é finita.*

Teorema 2.2.5 *Suponhamos R Noetheriano e seja $I = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ um ideal de R gerado por r elementos. Se p é um ideal primo minimal de $\{p \in \text{spec}(R) / p \supseteq I\}$, então $h(p) \leq r$. Em particular $ht(I) \leq r$.*

2.3 Grade e Anéis de Cohen-Macaulay

As principais referências para esta seção são [2] e [19].

Definição 2.3.1 *Seja M um R -módulo. Uma sequência $x_1, \dots, x_n$ de elementos de R é chamada sequência M -regular, ou M -sequência, se x_i não é um divisor de zero em $\frac{M}{x_1M + \dots + x_{i-1}M}$ para $i = 1, \dots, n$ e $\frac{M}{x_1M + \dots + x_nM} \neq 0$.*

Quando todos os x_i pertencem a um ideal I de R , dizemos que $x_1, \dots, x_r$ é uma sequência M -regular em I .

Definição 2.3.2 *Uma sequência M -regular $x_1, \dots, x_n$ em um ideal I de R é maximal (respectivamente maximal em I) se $x_1, \dots, x_{n-1}$ não é uma sequência M -regular para qualquer $x_{n+1} \in R$ (respectivamente $x_{n+1} \in I$).*

Consideremos as sequências exatas curtas de R -módulos que começam em A e terminam em B

$$\alpha: \quad 0 \quad \rightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$\alpha' : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow X' \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Dizemos que α é Yoneda equivalente a α' se existe um homomorfismo $f : X \rightarrow X'$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I_A & & \downarrow f & & \downarrow I_B & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

É possível mostrar que a equivalência Yoneda é uma relação de equivalência. Definimos $\text{Ext}_R^1(B, A)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência das seqüências exatas curtas segundo esta relação.

Consideremos agora as seqüências exatas de R -módulos que começam em A e terminam em B com n módulos intermediários

$$\alpha : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$\alpha' : \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow X'_1 \longrightarrow X'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_n \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Dizemos que α e α' são equivalentes se existem homomorfismos $f_i : X_i \rightarrow X'_i$, $i = 1, \dots, n$, tais que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I_A & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & & & \downarrow f_n & & \downarrow I_B & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & X'_2 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Esta relação não é de equivalência, pois não é simétrica. No entanto, podemos definir uma relação de equivalência a partir desta. Definimos então $\text{Ext}_R^n(B, A)$ como sendo o conjunto das classes de equivalência das seqüências exatas que começam em A e terminam em B com n módulos intermediários.

Teorema 2.3.3 [2, Teorema 1.2.5] *Suponhamos R Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Seja I um ideal de R com $IM \neq M$. Então todas as seqüências M -regulares maximais em I tem o mesmo comprimento n dado por*

$$n = \min \{i / \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$$

Definição 2.3.4 *Suponhamos R Noetheriano e M um R -módulo finitamente gerado. Seja I um ideal tal que $IM \neq M$. O grade de I em M , denotado por $\text{grade}(I, M)$, é*

o comprimento de todas as seqüências M -regulares maximais em I , ou seja,

$$\text{grade}(I, M) = \min \{i / \text{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}$$

Mostra-se que $IM = M$ se, e somente se, $\text{grade}(I, M) = \infty$.

Definição 2.3.5 *Suponhamos R Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Então o grade de M é dado por*

$$\text{grade} M = \min \{i / \text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0\}$$

Se $M = 0$ definimos $\text{grade} M = \infty$.

Se I é um ideal de R então $\text{grade}(R/I) = \text{grade}(I, R)$

Suponhamos R local Noetheriano com ideal maximal $\mathcal{M}$ e M um R -módulo finitamente gerado. Neste caso, o grade de $\mathcal{M}$ em M é chamado de profundidade de M e é denotado por $\text{depth} M$. Logo,

$$\text{depth} M = \min \{i / \text{Ext}_R^i(R/\mathcal{M}, M) \neq 0\}$$

O teorema seguinte é um resultado utilizado na definição de anel de Cohen-Macaulay. Este resultado está demonstrado em [2].

Proposição 2.3.6 *Suponhamos R local Noetheriano com ideal maximal $\mathcal{M}$ e M um R -módulo finitamente gerado. Então*

1. $\text{depth} M = \infty$ se, e somente se, $M = 0$.
2. Se $M \neq 0$ então $\text{depth} M < \dim M$.

Sejam R um anel local Noetheriano, $\mathcal{M}$ seu ideal maximal e M um R -módulo finitamente gerado. Vimos acima que $\text{depth} M \leq \dim M$ se $M \neq 0$.

Definição 2.3.7 *Dizemos que M é um módulo de Cohen-Macaulay se $M \neq 0$ ou se $\text{depth}(M) = \dim M$. Se R é um R -módulo de Cohen-Macaulay, dizemos que R é um anel de Cohen-Macaulay.*

2.4 Módulos Projetivos e o Teorema de Hilbert-Burch

As referências utilizadas nesta seção são [2], [3] e [17].

Seja R um anel comutativo.

Definição 2.4.1 Dizemos que uma sequência exata de R -módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

cinde se β tem inversa à direita, ou seja, existe um homomorfismo $\beta' : M'' \rightarrow M$ tal que $\beta \circ \beta' = I_{M''}$.

O seguinte resultado, encontrado em [3], será utilizado na aplicação do Teorema de Hilbert-Burch.

Teorema 2.4.2 Se uma sequência exata de R -módulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$$

cinde então $M' \oplus M'' \simeq M$.

Definição 2.4.3 Dizemos que um R -módulo P é projetivo se dado um epimorfismo de R -módulos $\sigma : B \rightarrow C$, cada aplicação $\gamma : P \rightarrow C$ tem um levantamento $\beta : P \rightarrow B$ tal que $\sigma\beta = \gamma$.

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow \beta & \downarrow \sigma \\ P & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array}$$

Proposição 2.4.4 [17, Proposição 5.5] Um R -módulo P é projetivo se, e somente se, é somando direto de um R -módulo livre, ou seja, existe um R -módulo Q tal que $P \oplus Q$ é um R -módulo livre.

Teorema 2.4.5 Um R -módulo P é projetivo se, e somente se, $\text{Ext}_R^1(P, G) = 0$ para todo R -módulo G .

Definição 2.4.6 Seja C um R -módulo. Uma resolução de C é uma sequência exata de R -módulos e homomorfismos

$$\longrightarrow X_n \xrightarrow{\delta} X_{n-1} \xrightarrow{\delta} \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\delta} X_0 \xrightarrow{\epsilon} C \longrightarrow 0$$

O teorema a seguir é um importante resultado cuja demonstração se encontra em [2].

Teorema 2.4.7 (Teorema de Hilbert-Burch) Sejam R um anel local Noetheriano, $\varphi : R^n \rightarrow R^{n+1}$ uma aplicação R -linear com matriz M e $I_n(M)$ o ideal gerado pelos menores de ordem n de M . Se $\text{grade}(R/I_n(M)) \geq 2$ então $I_n(M)$ tem resolução

$$0 \longrightarrow R^n \xrightarrow{\varphi} R^{n+1} \longrightarrow I_n(M) \longrightarrow 0$$

O resultado seguinte é uma aplicação do teorema anterior para o anel $\mathcal{O}_2$ e será utilizado no capítulo 4.

Corolário 2.4.8 *Seja $\varphi : \mathcal{O}_2^n \rightarrow \mathcal{O}_2^{n+1}$ uma aplicação $\mathcal{O}_2$ -linear com matriz M e $I_n(M)$ o ideal gerado pelos menores de ordem n de M . Se $\mathcal{O}_2/I_n(M)$ é um espaço vetorial de dimensão finita então a sequência*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_2^n \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_2^{n+1} \xrightarrow{\varphi} I_n(M) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração Pelo teorema acima basta mostrar que $\text{grade}(\mathcal{O}_2/I_n(M)) \geq 2$. Consideremos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I_n(M) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_2 \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_2/I_n(M) \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

onde i é a aplicação inclusão de $I_n(M)$ em $\mathcal{O}_2$ e π é a projeção natural.

Mostremos primeiramente que a sequência (2.1) cinde. Sejam $m = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2/I_n(M)$ e $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ uma base para $\mathcal{O}_2/I_n(M)$. Assim, dado $\bar{v} \in \mathcal{O}_2/I_n(M)$, temos que $\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_m \bar{v}_m$, onde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ são unicamente determinados. Consideremos então a aplicação linear

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{O}_2/I_n(M) &\longrightarrow \mathcal{O}_2 \\ v &\longmapsto \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \end{aligned}$$

Como $\pi \circ \theta = \text{Id}_{\mathcal{O}_2/I_n(M)}$, então a sequência 2.1 cinde.

Segue do Teorema 2.4.2 que $\mathcal{O}_2 \simeq I_n(M) \oplus \mathcal{O}_2/I_n(M)$. Como $\mathcal{O}_2$ é um $\mathcal{O}_2$ -módulo livre, pela Proposição 2.4.4 temos que $\mathcal{O}_2/I_n(M)$ é um $\mathcal{O}_2$ -módulo projetivo e pelo Teorema 2.4.5 temos então que

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_2}^1(\mathcal{O}_2/I_n(M), \mathcal{O}_2) = 0$$

Portanto

$$\text{grade}(\mathcal{O}_2/I_n(M)) = \text{grade}(I_n(M), \mathcal{O}_2) = \min \{i / \text{Ext}_{\mathcal{O}_2}^i(\mathcal{O}_2/I_n(M), \mathcal{O}_2) \neq 0\} \geq 2$$

■

Capítulo 3

Germes de Variedades Analíticas e Ideais de Fitting

3.1 Germes de Variedades Analíticas Complexas

Nesta seção introduzimos o conceito de germe de variedade analítica complexa, germe de variedade de Cohen-Macaulay e apresentamos alguns resultados sobre tais germes. As principais referências são [12] e [13].

Definição 3.1.1 *Uma subvariedade analítica complexa de um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto X de U tal que, em alguma vizinhança aberta V de cada ponto de U , X é o conjunto dos zeros de um número finito de funções analíticas definidas em V .*

Neste trabalho, estamos interessados na estrutura de uma subvariedade numa vizinhança de um ponto fixado. Vamos considerar este ponto como sendo a origem. Consideremos os pares (X_α, U_α) , onde U_α é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$ e X_α é uma subvariedade analítica de U_α . Dois pares (X_α, U_α) e (X_β, U_β) são equivalentes se existe uma vizinhança aberta U de 0 em $\mathbb{C}^n$ tal que $U \subset U_\alpha \cap U_\beta$ e $U \cap X_\alpha = U \cap X_\beta$.

Definição 3.1.2 *Um germe de uma subvariedade analítica complexa na origem em $\mathbb{C}^n$ é uma classe de equivalência de um par (X_α, U_α) , onde U_α é uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}^n$ e X_α é uma subvariedade analítica complexa de U_α .*

Sejam X_1 e X_2 germes de subvariedades analíticas complexas em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente. Uma aplicação contínua $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ é um germe na origem de uma aplicação contínua φ definida num representante de X_1 com valores em um representante de X_2 e $\varphi(0) = 0$. Uma aplicação contínua $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ é dita ser uma aplicação analítica complexa se os germes X_1 e X_2 podem ser representados por subvariedades analíticas

complexas de vizinhanças abertas da origem em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente, para as quais existe uma aplicação analítica complexa $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $\phi(X_1) \subseteq X_2$, $\phi(0) = 0$ e $\varphi = \phi|_{X_1}$.

Ainda, estamos interessados nas propriedades dos germes de subvariedades que independem de mudanças de coordenadas. Introduzimos então o conceito de germe de variedade analítica complexa como sendo uma conveniente classe de equivalência de germes de subvariedades.

Definição 3.1.3 *Sejam X_1 e X_2 germes de subvariedades analíticas complexas. Dizemos que X_1 e X_2 são equivalentes se existem aplicações analíticas $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ e $\psi : X_2 \rightarrow X_1$ tais que $\psi \circ \varphi : X_1 \rightarrow X_1$ e $\varphi \circ \psi : X_2 \rightarrow X_2$ são as aplicações identidades em X_1 e X_2 respectivamente. Uma classe de equivalência é chamada de germe de variedade analítica complexa.*

Um germe de variedade analítica complexa sempre pode ser representado por um germe de subvariedade analítica complexa em algum espaço vetorial complexo.

Dado X um germe de subvariedade analítica complexa em $\mathbb{C}^n$, existe um ideal do anel local $\mathcal{O}_n$ consistindo dos germes de funções analíticas que se anulam em X . Esse ideal é chamado de ideal da subvariedade X e é denotado por $I(X)$. Mais precisamente, $f \in I(X)$ se existe uma subvariedade $\tilde{X}$ de um aberto U que é um representante de X e uma função analítica $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ que é um representante de f tal que $\tilde{f}|_{\tilde{X}} \equiv 0$.

Reciprocamente, dado um ideal J de $\mathcal{O}_n$, existem $f_1, \dots, f_r$ em $\mathcal{O}_n$ que geram J , pois $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano. Sejam U uma vizinhança aberta da origem e $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_r$ representantes de $f_1, \dots, f_r$ definidos em U . O subconjunto

$$\{z \in U / \tilde{f}_1(z) = \dots = \tilde{f}_r(z) = 0\}$$

define um germe de subvariedade analítica complexa que denotamos por $V(J)$.

O seguinte resultado é consequência imediata das definições acima, com exceção do item (iv), que é o conhecido Teorema dos Zeros de Hilbert.

Proposição 3.1.4 *Sejam X , X_1 e X_2 germes de subvariedades analíticas em $\mathbb{C}^n$ e J , J_1 e J_2 ideais de $\mathcal{O}_n$.*

- i) *Se $X_1 \subseteq X_2$, então $I(X_1) \supseteq I(X_2)$;*
- ii) *Se $J_1 \subseteq J_2$, então $V(J_1) \supset V(J_2)$;*
- iii) *$X = V(I(X))$;*
- iv) *$\sqrt{J} = I(V(J))$;*

v) $X_1 = X_2$ se, e somente se, $I(X_1) = I(X_2)$;

vi) $V(J_1 + J_2) = V(J_1) \cap V(J_2)$;

vii) $V(J_1 \cap J_2) = V(J_1) \cup V(J_2)$.

Um germe X de uma subvariedade analítica em $\mathbb{C}^n$ é dito ser redutível se pode ser escrito como $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 e X_2 são germes de subvariedades analíticas em $\mathbb{C}^n$ contidas propriamente em X . O germe X é dito ser irredutível se não é redutível.

Temos que X é irredutível se, e somente se, $I(X)$ é um ideal primo de $\mathcal{O}_n$ (ver [14], Teorema 13, pg 89). Além disso, toda subvariedade analítica complexa pode ser escrita como uma união finita de germes de subvariedades analíticas complexas irredutíveis. Se a decomposição for tal que nenhum fator pode ser omitido, então ela é única e cada germe de subvariedade irredutível é chamada de componente irredutível.

Sejam X um germe de subvariedade analítica complexa e $I(X) \subseteq \mathcal{O}_n$. Como $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano, $I(X)$ tem uma decomposição primária:

$$I(X) = q_1 \cap \dots \cap q_r$$

onde $q_1, \dots, q_r$ são ideais primários de $\mathcal{O}_n$. Logo

$$X = V(I(X)) = V(q_1 \cap \dots \cap q_r) = V(q_1) \cup \dots \cup V(q_r)$$

Consideremos $p_i = \sqrt{q_i}, i = 1, \dots, r$. Como cada q_i é primário, p_i é um ideal primo, $i = 1, \dots, r$. Sabemos que $V(p_i) = V(q_i)$, logo $X = \cup_{i=1}^r V(p_i)$. Ainda $I(V(p_i)) = p_i$, que é primo, portanto cada $V(p_i)$ é irredutível. Eliminando os germes $V(p_i)$ tais que $V(p_i) \subseteq V(p_j)$ para algum $j \neq i$, obtemos então a decomposição em fatores irredutíveis de X e cada $V(p_i)$ é uma componente irredutível de X .

3.2 O Anel $\mathcal{O}_{X,0}$

As principais referências para esta seção são [12] e [13].

Seja X um germe de subvariedade analítica em $\mathbb{C}^n$. O anel dos germes de funções analíticas em X , denotado por $\mathcal{O}_{X,0}$, é definido por

$$\mathcal{O}_{X,0} = \frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$$

Dado um germe $f \in \mathcal{O}_n$, seja $\tilde{f}$ um representante de f definido numa vizinhança da origem. A restrição de $\tilde{f}$ a X é uma função definida numa vizinhança da origem contida

em X . Temos portanto um homomorfismo de $\mathcal{O}_n$ no anel dos germes de funções definidas em X . O núcleo deste homomorfismo é $I(X)$. Assim, $\mathcal{O}_{X,0}$ pode ser identificado com o anel dos germes de funções analíticas definidas em X . Além disso, $\mathcal{O}_{X,0}$ é um anel local Noetheriano.

O conjunto dos anéis $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \in X$, forma um feixe de anéis que é denotado por $\mathcal{O}_X$. Informalmente $\mathcal{O}_X$ é um subconjunto do conjunto dos germes de funções contínuas definidas em X . Se $\pi : X \rightarrow Y$ é uma aplicação analítica entre germes de subvariedades analíticas então π define um feixe de anéis $\pi_*\mathcal{O}_X$. Seus elementos podem ser pensados como germes de funções contínuas definidas em abertos da forma $\pi^{-1}(U)$, onde $U \subset Y$ é um aberto. Ainda, $\pi_*\mathcal{O}_X$ é isomorfo a $\mathcal{O}_Y$. Portanto $\pi_*\mathcal{O}_X$ é um $\mathcal{O}_Y$ -módulo.

Sejam X_1 e X_2 germes de subvariedades analíticas complexas. Uma aplicação analítica complexa $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ induz um homomorfismo $\varphi^* : \mathcal{O}_{X_2,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X_1,0}$.

Seja X um germe de variedade complexa analítica irredutível. Definimos a dimensão de X como sendo a dimensão de Krull do anel $\mathcal{O}_{X,0}$. Se X é um germe de variedade analítica complexa qualquer em $\mathbb{C}^n$, então X se escreve como uma união finita $X = \bigcup X_i$, onde cada X_i é uma variedade analítica complexa irredutível. Neste caso a dimensão de X é dada por $\dim X = \max_i \{\dim X_i\}$. O germe X é dito ser equidimensional se $\dim X = \dim X_i$ para todas as componentes X_i . A codimensão de X é definida como sendo $n - \dim X$.

Definição 3.2.1 *Seja X um germe de uma variedade analítica complexa. Dizemos que X é Cohen-Macaulay se o anel $\mathcal{O}_{X,0}$ é um anel de Cohen-Macaulay, ou seja,*

$$\text{depth}\mathcal{O}_{X,0} = \dim \mathcal{O}_{X,0}$$

Definição 3.2.2 *Uma aplicação analítica complexa $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ entre dois germes de variedades analíticas complexas é dita ser uma aplicação analítica complexa finita se $\varphi^{-1}(0) = 0$.*

O resultado seguinte é o Teorema A_1 de [23].

Teorema 3.2.3 *Sejam X e S germes de variedades analíticas complexas, $\pi : X \rightarrow S$ uma aplicação analítica finita onde S é suave e $\dim X = \dim S$. Então são equivalentes:*

- X é Cohen-Macaulay.
- $\pi_*\mathcal{O}_X$ é um $\mathcal{O}_S$ -módulo livre na origem.

O resultado seguinte é o Teorema A_2 de [23].

Teorema 3.2.4 *Sejam φ uma matriz de ordem $r \times s$ com entradas em $\mathcal{O}_n$ e $I_k(\varphi)$ o ideal gerado pelos menores de ordem k de φ . Se $0 < k \leq s \leq r$ então $\text{codim } V(I_k(\varphi)) \leq (r - k - 1)$. Se a igualdade vale, então $I_k(\varphi)$ define um germe de variedade de Cohen-Macaulay.*

Teorema 3.2.5 *Seja $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ uma aplicação analítica finita entre dois germes de variedades analíticas complexas onde X_1 é uma variedade de Cohen-Macaulay, X_2 é irredutível e $\dim X_1 = \dim X_2$. Se $\varphi_* \mathcal{O}_{X_1}$ é um $\mathcal{O}_{X_2}$ módulo livre na origem então cada ponto num representante de X_2 possui*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X_1,0}}{\varphi^*(\mathcal{M}_{X_2,0})\mathcal{O}_{X_1,0}}$$

pré imagens em X_1 contadas com multiplicidade, onde $\mathcal{M}_{X_2,0}$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X_2,0}$ e a dimensão é de espaço vetorial complexo.

Demonstração Segue de [3, Corolário 18.11] (ver comentário após o Corolário) que toda variedade de Cohen-Macaulay é equidimensional. Assim, X_1 é equidimensional. Se X_1 é equidimensional, X_2 é irredutível e $\dim X_1 = \dim X_2$, então para todo ponto p num representante de X_2 a cardinalidade de $\varphi^{-1}(p)$ é constante, digamos, igual a r (ver comentário na pg 25 de [13]). Como $\varphi_* \mathcal{O}_{X_1}$ é um $\mathcal{O}_{X_2}$ -módulo livre na origem, segue do [13, Teorema 7, pg 25] que

$$r = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X_1,0}}{\varphi^*(\mathcal{M}_{X_2,0})\mathcal{O}_{X_1,0}}$$

■

3.3 Normalização

As principais referências para esta seção são [12] e [13].

Definição 3.3.1 *Seja X um germe de variedade analítica complexa. Dizemos que X é normal se o anel $\mathcal{O}_{X,0}$ é igual ao seu fecho integral $\overline{\mathcal{O}_{X,0}}$.*

Seja X um germe de variedade analítica complexa irredutível. Então o anel local $\mathcal{O}_{X,0}$ é um domínio integral. Os elementos do corpo de frações deste domínio integral são chamados de germes de funções meromorfas em X . Assim, um germe de função meromorfa f é um germe da forma h/g , onde $h \in \mathcal{O}_{X,0}$ e $g \in \mathcal{O}_{X,0} - \{0\}$. Um germe de aplicação é dito ser germe de aplicação meromorfa se cada uma de suas componentes é um germe de função meromorfa.

Uma normalização de X é um germe de variedade analítica complexa normal $\bar{X}$ e um germe de aplicação bimeromorfa $f : (\bar{X}, 0) \rightarrow (X, 0)$.

Suponhamos agora que X seja redutível e seja $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ a decomposição de X em suas componentes irredutíveis. Uma normalização $\bar{X}$ de X é definida como sendo a união disjunta de normalizações $\bar{X}_i$ das suas componentes.

3.4 Intersecção Completa com Singularidade Isolada

Definição 3.4.1 *Sejam X um germe de variedade analítica complexa em $\mathbb{C}^N$ de dimensão n e I um ideal que define X . Dizemos que I define uma intersecção completa em 0 se I admite $N - n$ geradores $f_1, \dots, f_{N-n}$ em $\mathcal{O}_N$.*

Sejam X uma variedade analítica em $\mathbb{C}^N$ de dimensão n e $I(X)$ um ideal que define X . Suponhamos que X seja uma intersecção completa. Consideremos o caso em que X tem uma singularidade isolada em 0. Isto significa que se $f_1, \dots, f_{N-n}$ é um conjunto de geradores de I , então existe uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}^N$ tal que $f_1, \dots, f_{N-n}$ convergem e para todo $y \neq 0$ no conjunto dos zeros comuns de $f_1, \dots, f_{N-n}$, $df_1(y), \dots, df_{N-n}(y)$ são linearmente independentes. Neste caso dizemos que X com sua $\mathbb{C}$ -álgebra local $\mathcal{O}_N/I$ é uma intersecção completa com singularidade isolada ou, abreviadamente, ICIS. Frequentemente usamos expressões tais como

$$(f_1, \dots, f_{N-n}) : (\mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{N-n}, 0)$$

(ou $I \subseteq \mathcal{O}_N$, ou $\mathcal{O}_N/I$) define um ICIS.

Definição 3.4.2 *Seja X uma intersecção completa com singularidade isolada em 0 de dimensão n e $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ um ideal que define X . Definimos o número de Milnor de X como sendo*

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{n+k} / \left(\left\{ \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})} : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n+k \right\}, f_1, \dots, f_k \right) \mathcal{O}_{n+k}$$

e denotamos por $\mu(X)$ ou $\mu(f_1, \dots, f_k)$.

3.5 Ideais de Fitting

Nesta seção definimos ideais de Fitting de um módulo M e apresentamos um método para calcular tais ideais quando $M = \mathcal{O}_n$. As principais referências são [23] e [22].

Definição 3.5.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R -módulo. Consideremos a sequência exata*

$$R^p \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

Definimos o k -ésimo ideal de Fitting de M como sendo o ideal em R gerado pelos menores de ordem $(q - k)$ da matriz λ , onde $q - p \leq k < q$. Se $k \geq q$ definimos $\mathcal{F}_k(M) = R$ e se $k < q - p$ definimos $\mathcal{F}_k(M) = 0$.

A definição de $\mathcal{F}_k(M)$ independe da escolha da sequência exata (ver [16, 4.D]).

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação holomorfa finitamente determinado. Para calcular o k -ésimo ideal de Fitting de $f_*\mathcal{O}_n$ construímos uma sequência exata de $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulos

$$\mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{n+1}^q \xrightarrow{\alpha} f_*\mathcal{O}_n \longrightarrow 0 \quad (3.2)$$

onde o homomorfismo α leva os elementos da base de $\mathcal{O}_{n+1}^q$ nos geradores $g_1, \dots, g_l$ de $f_*\mathcal{O}_n$ como $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo e as colunas de λ são as relações entre os g_i com coeficientes em $\mathcal{O}_{n+1}$. Portanto $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_n)$ é o ideal de $\mathcal{O}_{n+1}$ gerado pelos menores de ordem $(q - k)$ de λ .

Segue do Corolário 1.4.3 que se as classes de $g_1, \dots, g_l$ em $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$ geram $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ então $g_1, \dots, g_l$ geram $f_*\mathcal{O}_n$ como $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo. Assim, para determinar os geradores de $f_*\mathcal{O}_n$, basta determinar uma base de $\frac{f_*\mathcal{O}_n}{\mathcal{M}_{n+1}f_*\mathcal{O}_n}$. Se $g_1, \dots, g_l$ geram $f_*\mathcal{O}_n$ então $q = l$ e $\alpha(e_i) = g_i$, onde $\{e_1, \dots, e_l\}$ é base de $\mathcal{O}_{n+1}^l$. Segue de [23, Lema 2.1] que existe uma sequência exata como (3.2) onde λ é injetiva e, neste caso $p = q$.

Capítulo 4

Cúspides e Nós de Germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$

Em 1955 Whitney ([30]) obteve formas normais para germes estáveis de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$, que são:

1. $(x, y) \rightarrow (x, y)$ (imersão)
2. $(x, y) \rightarrow (x, y^2)$ (dobra)
3. $(x, y) \rightarrow (x, xy + y^3)$ (cúspide de Whitney)

Se considerarmos também multigerms, devemos acrescentar o bigerme

4. $\begin{cases} (x, y) & \rightarrow (x, y^2) \\ (x', y') & \rightarrow (x'^2, y') \end{cases}$ (dobra dupla)

Definição 4.0.2 *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$. Chamamos de conjunto singular de f , e denotamos por $S(f)$, o conjunto*

$$S(f) := \{x \in (\mathbb{C}^2, 0) / \det[d_x f] = 0\}$$

O conjunto $\Delta(f) = f(S(f))$ é chamado de discriminante de f .

Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe estável. Então f é equivalente a um germe da forma (1), (2), (3) ou (4).

i) Se $f(x, y) = (x, y)$, então $S(f) = \Delta(f) = \emptyset$.

ii) Suponhamos $f(x, y) = (x, y^2)$. Então

$$S(f) = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / y = 0\}$$

$$\Delta(f) = \{f(x, 0) / (x, 0) \in (\mathbb{C}^2, 0)\} = \{(x, 0) / x \in (\mathbb{C}, 0)\}$$

iii) Suponhamos $f(x, y) = (x, xy + y^3)$. Então

$$S(f) = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / x + 3y^2 = 0\}$$

$$\begin{aligned} \Delta(f) &= \{f(-3y^2, y) / y \in (\mathbb{C}, 0)\} = \{(-3y^2, -2y^3) / y \in (\mathbb{C}, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / 4x^3 + 27y^2 = 0\} \end{aligned}$$

que é a cúspide ordinária.

iv) Suponhamos que f é o bigerme $\begin{cases} (x, y) \rightarrow (x, y^2) \\ (x', y') \rightarrow (x'^2, y') \end{cases}$. Então

$$S(f) = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / y = 0\} \cup \{(x', y') \in (\mathbb{C}^2, 0) / x' = 0\}$$

$$\Delta(f) = \{(x, 0) / x \in (\mathbb{C}, 0)\} \cup \{(0, y') / y' \in (\mathbb{C}, 0)\} - \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / xy = 0\}$$

que é um nó simples.

Assim, se $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ é um germe estável, as singularidades de $\Delta(f)$ correspondem a pontos (respectivamente pares de pontos) em $S(f)$ onde f é um germe (respectivamente um bigerme) do tipo (3) (respectivamente (4)). Quando f é do tipo (3), temos uma cúspide ordinária em $\Delta(f)$ e quando f é do tipo (4), temos um nó em $\Delta(f)$. Se f é como em (1) ou (2), então $\Delta(f)$ é suave.

Quando um germe não estável $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ é perturbado de modo que se torne estável, um número de cúspides e nós aparece em seu discriminante. Denotamos o número de cúspides por $c(f)$ e o número de nós por $d(f)$. Os números $c(f)$ e $d(f)$ refletem a complexidade do germe inicial. Neste capítulo, apresentamos fórmulas para calcular $c(f)$ e $d(f)$.

4.1 O invariante delta (δ)

Definição 4.1.1 *Um germe de uma variedade analítica complexa é dito ser uma curva analítica se é equidimensional e tem dimensão 1.*

Seja X um germe de curva analítica complexa em $\mathbb{C}^n$. Então $\mathcal{O}_{X,0} = \frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$ tem dimensão de Krull igual a 1. Ainda, $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano, logo $I(X) \subseteq \mathcal{O}_n$ tem uma decomposição primária.

Definição 4.1.2 *Dizemos que um anel é reduzido se seu único elemento nilpotente é 0. Isto é equivalente a dizer que $\langle 0 \rangle$ é uma intersecção de ideais primos.*

Definição 4.1.3 Dizemos que uma curva analítica X é reduzida se o anel $\mathcal{O}_{X,0}$ é um anel reduzido.

Seja X uma curva analítica reduzida. Suponhamos que $X = \cup X_i$ seja sua decomposição em componentes irredutíveis. Para cada i , seja p_i um ideal primo de $\mathcal{O}_n$ tal que $V(p_i) = X_i$. Como X é equidimensional, $\dim X = \dim X_i$ para todo i . Ainda, como cada p_i é primo, $I(X_i) = \sqrt{p_i} = p_i$ para todo i . Portanto

$$\dim_{K_{rull}} \frac{\mathcal{O}_n}{p_i} = \dim X_i = 1$$

Consideremos agora o caso particular em que X é uma curva plana. Neste caso, temos o seguinte resultado de [12].

Teorema 4.1.4 *Seja X um germe de uma subvariedade analítica em $\mathbb{C}^n$. O germe X é equidimensional de dimensão $n - 1$ se, e somente se, $I(X)$ é um ideal principal.*

Assim, se X é uma curva plana, $I(X)$ é um ideal principal. Seja $f \in \mathcal{O}_n$ tal que $I(X) = \langle f \rangle$. Como $\mathcal{O}_n$ é um domínio de fatoração única, existem $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ irredutíveis tais que $f = f_1^{n_1} \dots f_r^{n_r}$. Então

$$\langle f \rangle = \langle f_1^{n_1} \rangle \cap \dots \cap \langle f_r^{n_r} \rangle \quad (4.1)$$

Como cada f_i é irredutível então $\langle f_i^{n_i} \rangle$ é primário. De fato, sejam $g, h \in \mathcal{O}_n$ tais que $gh \in \langle f_i^{n_i} \rangle$ e $g \notin \langle f_i^{n_i} \rangle$. Então $f_i^{n_i}$ divide gh e não divide g . Como f_i é irredutível, então f_i divide h . Portanto $h^{n_i} \in \langle f_i^{n_i} \rangle$, o que mostra que $\langle f_i^{n_i} \rangle$ é um ideal primário. Além disso, $\sqrt{\langle f_i^{n_i} \rangle} = \langle f_i \rangle$. Assim, a expressão (4.1) é uma decomposição primária de f .

Segue também do fato de f_i ser irredutível que $\langle f_i \rangle$ é um primo minimal para $i = 1, \dots, r$.

Se X é reduzida, $I(X) = \langle f \rangle$ é uma intersecção de ideais primos (que também são principais):

$$\langle f \rangle = \langle g_1 \rangle \cap \dots \cap \langle g_s \rangle \quad (4.2)$$

A equação (4.2) é uma decomposição primária onde cada componente é um primo minimal. Segue da unicidade da decomposição primária (Teorema 2.1.2) que $r = s$ e $\langle f_i^{n_i} \rangle = \langle g_i \rangle$, $i = 1, \dots, r$. Portanto $n_i = 1$, $i = 1, \dots, r$.

Temos então que $p_i = \langle f_i \rangle$, $i = 1 \dots r$ e

$$\dim X_i = \dim_{K_{rull}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_i \rangle}$$

Assim, uma curva analítica plana reduzida é dada por $f = f_1 \dots f_r$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n$ é irredutível, $i = 1, \dots, r$.

Definição 4.1.5 *Seja X um germe de uma curva analítica plana reduzida. Então o invariante δ de X em 0 é definido como sendo $\delta(X, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\mathcal{O}_{X,0}}$. Definimos*

$$\delta(X) = \sum_{x \in X} \delta(X, x)$$

Observação 4.1.6 Segue de [27, 3.2] que $\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\mathcal{O}_{X,0}}$ é um espaço de dimensão finita e que a soma do lado direito na definição acima é finita, pois δ é não nulo apenas nos pontos singulares. Assim, $\delta(X)$ é sempre finito.

Seja X uma curva analítica plana reduzida. Para calcular o invariante $\delta(X, 0)$ usamos a fórmula de Milnor, tendo em vista que o cálculo segundo a definição acima é difícil. Esta fórmula envolve o número de ramos de X e o número de Milnor de X . O número de Milnor de $f \in \mathcal{O}_n$, denotado por $\mu(f)$, ou simplesmente μ , é a dimensão do espaço vetorial complexo

$$\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_x, f_y \rangle}$$

onde f_x e f_y são as derivadas parciais de f . Como $I(X) = \langle f \rangle$ para algum $f \in \mathcal{O}_n$, o número de Milnor de X é definido como sendo o número de Milnor de f . A fórmula de Milnor (ver [21]) é dada por

$$\mu = 2\delta - r + 1$$

onde r é o número de ramos de X .

Observações 4.1.7 1. Se X é uma curva plana regular, então $r = 1$. De fato, segue do Teorema da Função Implícita que, num ponto regular, uma curva plana é um gráfico. Além disso, numa curva plana regular $\mu = 0$. Aplicando a fórmula de Milnor temos que $\delta = 0$.

2. A fórmula de Milnor também mostra que δ é invariante por mudança de coordenadas.

4.2 Cálculo de $c(f)$ e $d(f)$

Uma consequência do Teorema 1.3.3 é o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1 *Um germe $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ é finitamente determinado se, e somente se,*

1. $S(f)$ é uma curva reduzida.

2. $f : S(f) \rightarrow \Delta(f)$ é bijetora

Demonstração Suponhamos f finitamente determinada.

1. Seja $x_0 \in S(f) - \{0\}$. Segue do Teorema 1.3.3 que o germe de f em x_0 é estável. Logo $S(f)$ é uma variedade diferenciável de dimensão 1 (ver [11]). Portanto $S(f)$ é uma curva reduzida. De fato, como $h = \det d_x f$ define $S(f)$, temos que x_0 é um valor regular de h , ou seja, $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0) \neq 0$ ou $\frac{\partial h}{\partial y}(x_0) \neq 0$. Logo, h e $\frac{\partial h}{\partial x}$ (ou h e $\frac{\partial h}{\partial y}$) não tem raiz em comum e, portanto, $S(f)$ é reduzida.
2. Seja $x \in S(f) - \{0\}$. Então o germe de $f|_{S(f)}$ em x não tem singularidade (ver [11]). Logo é um germe de imersão e, portanto, injetor. Segue de [27] que $\Delta(f)$ também é uma curva reduzida.

■

Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado. Então existe um desdobramento a um parâmetro $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$, tal que f_t é estável para todo $t \neq 0$. A aplicação f_t é chamada de perturbação estável de f . Assim, $\{f_t, t \in (\mathbb{C}, 0)\}$ é uma família de germes em $\mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ com $f_0 = f$ e f_t estável para $t \neq 0$. Logo, para $t \neq 0$, f_t é equivalente a um dos germes (1), (2), (3) ou (4) apresentados na introdução deste capítulo.

Teorema 4.2.2 *Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$, tal que f_t é estável para todo $t \neq 0$. Então, para $t \neq 0$, $S(f_t)$ é suave e, portanto, $S(F)$ tem uma singularidade isolada em $(0, 0)$.*

Demonstração

Temos que $S(f_t)$ é suave para todo $t \neq 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} S(F) &= \{(x, y, t) \in (\mathbb{C}^3, 0), / \det[d_{(x,y,t)}F] = 0\} \\ &= \{(x, y, t) \in (\mathbb{C}^3, 0), / \det[d_{(x,y)}f_t] = 0\} \\ &= \{(x, y, t) \in (\mathbb{C}^3, 0), / (x, y) \in S(f_t)\} \end{aligned}$$

Portanto, $S(F)$ tem uma singularidade isolada em $(0, 0)$.

■

Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$, tal que f_t é estável para todo $t \neq 0$. Como $S(F)$ tem uma singularidade isolada em $(0, 0)$, segue de [13, Corolário 1 do Teorema 15, pg 97] que $S(F)$ é normal e de [7, Teorema 0.8(1)] que $S(F)$ é uma normalização de $\Delta(F)$.

Fixemos $t \in (\mathbb{C}, 0)$. Sejam

$$S(F)_t = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / (x, y, t) \in S(F)\}$$

$$\Delta(F)_t = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / (x, y, t) \in \Delta(F)\}$$

Notemos que $\det[d_{(x,y,t)}F] = 0$ se, e somente se, $\det[d_{(x,y)}f_t] = 0$, logo $S(F)_t = S(f_t)$. Assim, se

$$\begin{aligned} \pi_s : S(F) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto t \end{aligned}$$

então $\pi_s^{-1}(t) = S(F)_t = S(f_t)$. Ainda, $\Delta(F)_t = \{f_t(x, y) / (x, y) \in S(f_t)\} = \Delta(f_t)$. Logo, se

$$\begin{aligned} \pi_\Delta : \Delta(F) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto t \end{aligned}$$

então $\pi_\Delta^{-1}(t) = \Delta(F)_t = \Delta(f_t)$.

Pela Proposição 3.3 [27] temos que

$$\delta(\Delta(f_t)) = \delta(\Delta(f_0)) - \delta(S(f_0)) \quad (4.3)$$

Teorema 4.2.3 *Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe estável e finitamente determinado e $\Delta(f)$ seu discriminante. Então $\delta(\Delta(f), (x, y)) = 0$ ou 1 para todo $(x, y) \in \Delta(f)$.*

Demonstração Vimos na Proposição 4.2.1 que $\Delta(f)$ é uma curva reduzida. Seja $(x_1, y_1) \in \Delta(f)$. Então $(x_1, y_1) = f(x_0, y_0)$ para algum $(x_0, y_0) \in S(f)$. Segue do Teorema 1.3.3 que o germe de f em (x_0, y_0) , que denotamos também por f , é estável, logo é equivalente a um germe da forma (1), (2), (3) ou (4).

Se f é da forma (1) ou (2) então $\Delta(f)$ é regular e, portanto, $\delta = 0$.

Suponhamos f equivalente ao germe da forma (3). Neste caso $\Delta(f)$ tem equação $4x^3 + 27y^2 = 0$. Seja $g(x, y) = 4x^3 + 27y^2$. Então

$$\mu(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^2, y \rangle} = 2$$

Como $r = 1$ e $\mu = 2$ segue que

$$\delta = \frac{\mu + r - 1}{2} = 1$$

Suponhamos f equivalente ao germe da forma (4). Então $\Delta(f)$ tem equação $g(x, y) = xy = 0$. Então

$$\mu(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x, y \rangle} = 1$$

Como $r = 2$ e $\mu = 1$ segue que

$$\delta - \frac{\mu + r - 1}{2} = 1$$

■

Como $\delta(\Delta(f_t)) = \sum_{(x,y) \in \Delta(f_t)} \delta(\Delta(f_t), (x, y))$ então o lado esquerdo de (4.3) consiste das somas das contribuições locais das singularidades de $\Delta(f_t)$ que são cúspides ou nós. Cada cúspide contribui com 1 e cada nó contribui com 1.

As singularidades de $\Delta(f_t)$ correspondem a pontos (respectivamente pares de pontos) em $S(f_t)$ onde f_t é um germe (respectivamente um bigerme) do tipo (3) (respectivamente (4)).

Se $c(f)$ é o número de cúspides e $d(f)$ é o número de nós em $\Delta(f_t)$, que tendem a 0 quando t tende a 0, então temos por (4.3)

$$c(f) + d(f) = \delta(\Delta(f_t)) = \delta(\Delta(f_0)) - \delta(S(f_0)) \quad (4.4)$$

Como consequência da Proposição 4.2.1, de (4.4) e da Observação 4.1.6 temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.4 *Um germe $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ é finitamente determinado se, e somente se, $c(f) < \infty$ e $d(f) < \infty$.*

A seguir, apresentamos um resultado de [23] que relaciona $c(f)$ e $d(f)$ com ideais de Fitting. Sejam X um germe de uma variedade n -dimensional, $X_1, \dots, X_m$ as componentes irredutíveis de X e $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ analítica e finita. Segue de [27, 5.2.10] que $f(X_i)$ é variedade. Temos então a decomposição em componentes irredutíveis

$$f(X_i) = V(q_{i_1}) \cup \dots \cup V(q_{i_r})$$

como na seção 3.1.

Chamamos de imagem reduzida de X_i por f à variedade reduzida

$$\tilde{X}_i = V(\sqrt{q_{i_1}}) \cup \dots \cup V(\sqrt{q_{i_r}})$$

Teorema 4.2.5 *Sejam $(X, 0)$ um germe de uma curva reduzida e $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ finita e injetiva. Se $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(f_*\mathcal{O}_{S(f)})$ é o primeiro ideal de Fitting do $\mathcal{O}_2$ -módulo $f_*\mathcal{O}_{S(f)}$, então*

$$c(f) + d(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / \mathcal{F}_1$$

Demonstração Ver [23, Teo 3.6].

■

Exemplo 4.2.6 Consideremos $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ dada por $f(x, y) = (x, y^4 + xy)$. Temos que f é um germe finitamente determinado. Como $S(f)$ tem dimensão 1, utilizamos a receita apresentada no capítulo 2 para calcular o ideal de Fitting de $f_*\mathcal{O}_{S(f)}$. Temos

$$S(f) = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / 4y^3 + x = 0\} = \{(-4y^3, y) / y \in (\mathbb{C}, 0)\}$$

$$\begin{aligned} f|_{S(f)} : (S(f), 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (-4y^3, y) &\longrightarrow (-4y^3, -3y^4) \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{f_*\mathcal{O}_{S(f)}}{\mathcal{M}_2 f_*\mathcal{O}_{S(f)}} \simeq \frac{\mathcal{O}_1}{\langle -4y^3, -3y^4 \rangle} \simeq \mathbb{C}\{1, y, y^2\}$$

Segue então do Corolário 1.4.3 que $\mathcal{O}_{S(f)}$ é gerado por $1, y, y^2$ sobre $\mathcal{O}_2$. Encontremos agora as relações entre $1, y$ e y^2 . Considerando $U = -4y^3$ e $V = -3y^4$ obtemos as relações

$$\begin{aligned} U^2.1 - 0.y + 16/3V.y^2 &= 0 \\ -4V.1 + 3U.y + 0.y^2 &= 0 \\ 0.1 - 4V.y + 3U.y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Logo

$$\lambda = \begin{pmatrix} U^2 & 0 & 16/3V \\ -4V & 3U & 0 \\ 0 & -4V & 3U \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\mathcal{F}_1(f_*\mathcal{O}_{S(f)}) = \langle U^2, V^2, UV, U^3, U^2V \rangle$$

Segue que

$$c(f) + d(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2 / \langle U^2, V^2, UV, U^3, U^2V \rangle = 3$$

Denotamos por Σ_f^i o conjunto

$$\{(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0) / \dim \ker d_{(x,y)}f = i\}$$

e por $\Sigma_f^{i,j}$ o conjunto

$$\{(x, y) \in \Sigma_f^i / \dim \ker d_{(x,y)}f|_{\Sigma_f^i} = j\}$$

Proposição 4.2.7 *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ tal que $\Sigma_f^{1,1} = \{0\}$. Então*

$$c(f) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x, q_x J_y - q_y J_x \rangle}} \quad (4.5)$$

onde p e q são as componentes de f , J é o determinante jacobiano de f e os subscritos

indicam derivadas parciais.

Demonstração O ideal no denominador de (4.5) é o ideal $I_2(M_f)$ gerado pelos menores de ordem 2 da matriz

$$M_f = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \\ J_x & J_y \end{pmatrix}$$

Temos que $V(I_2(M_f)) = \Sigma_f^{1,1}$. De fato, sejam $f : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ um representante do germe f , onde U é uma vizinhança aberta de zero em $\mathbb{C}^2$, e $(x_0, y_0) \in V(I_2(M_f))$. Então

$$\begin{aligned} J(x_0, y_0) &= (p_x q_y - p_y q_x)(x_0, y_0) = 0 \\ (p_x J_y - p_y J_x)(x_0, y_0) &= 0 \\ (q_x J_y - q_y J_x)(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $0 \in \Sigma_f^1$, então $\dim \text{Im} d_0 f = 1$ e, portanto, uma das funções p_x ou p_y ou q_x ou q_y não se anula em 0. Fazendo mudanças de coordenadas na fonte e na meta se necessário, podemos supor que $p_x(0) \neq 0$. Encolhendo U se necessário, podemos também supor que $p_x(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in U$. Segue que para todo $(x, y) \in U$ tal que $J(x, y) = 0$ temos $(x, y) \in \Sigma_f^1$. Logo

$$\Sigma_f^1 = \{(x, y) \in U \mid J(x, y) = 0\}$$

Assim $(x_0, y_0) \in \Sigma_f^1$. Calculemos então $d_{(x_0, y_0)} f|_{\Sigma_f^1}$. Temos que

$$d_{(x_0, y_0)} f|_{\Sigma_f^1} = (d_{(x_0, y_0)} f)|_{T_{(x_0, y_0)} \Sigma_f^1} : T_{(x_0, y_0)} \Sigma_f^1 \rightarrow d_{(x_0, y_0)} f(T_{(x_0, y_0)} \Sigma_f^1)$$

é dada por

$$d_{(x_0, y_0)} f|_{\Sigma_f^1}(u, v) = d_{(x_0, y_0)} f(u, v) = (p_x(x_0, y_0)u + p_y(x_0, y_0)v, q_x(x_0, y_0)u + q_y(x_0, y_0)v)$$

Se (u, v) é um vetor tangente a Σ_f^1 em (x_0, y_0) então (u, v) pertence ao núcleo da derivada de J , isto é, $d_{(x_0, y_0)} J(u, v) = 0$. Mas

$$d_{(x_0, y_0)} J(u, v) = J_x(x_0, y_0)u + J_y(x_0, y_0)v$$

logo, $J_x(x_0, y_0)u + J_y(x_0, y_0)v = 0$. Então

$$\begin{aligned} \ker d_{(x_0, y_0)} f|_{\Sigma_f^1} &= \{(u, v) \mid J_x(x_0, y_0)u + J_y(x_0, y_0)v = p_x(x_0, y_0)u + p_y(x_0, y_0)v \\ &= q_x(x_0, y_0)u + q_y(x_0, y_0)v = 0\} = \{(u, v) \mid M_f(x_0, y_0)(u, v) = 0\} \end{aligned}$$

Por (4.6) temos que o rank de $M_f(x_0, y_0)$ é 1, logo $\dim \ker d_{(x_0, y_0)} f|_{\Sigma_f^1} = 1$. Segue que $(x_0, y_0) \in \Sigma_f^{1,1}$. Como $\Sigma_f^{1,1} = \{0\}$, é imediato que $\Sigma_f^{1,1} \subset V(I_2(M_f))$.

Consideremos agora

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (x, y, u) &\longmapsto (p(x, y, u), q(x, y, u), u) = (f_u(x, y), u) \end{aligned}$$

uma deformação a 1-parâmetro de f , onde f_u é estável para todo $u \neq 0$. Sejam

$$M_F = \begin{pmatrix} p_x(x, y, u) & p_y(x, y, u) \\ q_x(x, y, u) & q_y(x, y, u) \\ J_x(x, y, u) & J_y(x, y, u) \end{pmatrix}$$

e $X = V(I_2(M_F))$. Temos que $(x, y, u) \in X$ se, e somente se, $(x, y) \in \Sigma_{f_u}^{1,1}$. Fixemos $u \neq 0$. Como f_u é estável, então f_u é uma imersão, uma dobra, uma cúspide de Whitney ou uma dobra dupla. Logo, $\Sigma_{f_u}^{1,1}$ é vazio, exceto quando f_u é a cúspide de Whitney e, neste caso, $\Sigma_{f_u}^{1,1} = \{(0, 0)\}$.

Segue que $\Sigma_{f_u}^{1,1}$ tem dimensão 0 e, portanto, $X = \cup_u \Sigma_{f_u}^{1,1}$ tem dimensão igual a 0 ou 1, ou seja, a codimensão de X é maior ou igual a 2. Pelo Teorema 3.2.4 temos que a codimensão de X é igual a 2 e X é uma variedade de Cohen-Macaulay.

Consideremos a projeção na base do desdobramento

$$\begin{aligned} \pi : (X, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, y, u) &\longmapsto u \end{aligned}$$

Temos que

$$\pi^{-1}(0) = \{(x, y, 0) \in (X, 0)\} = \{(x, y, 0) / (x, y) \in \Sigma_f^{1,1}\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Segue do Teorema 3.2.3 que $\pi_* \mathcal{O}_X$ é um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ -módulo livre na origem. Segue então do Teorema 3.2.5 que cada ponto u em $(\mathbb{C}, 0)$ tem

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,0} / \pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}) \mathcal{O}_{X,0}$$

pré-imagens em X contadas com multiplicidade.

Mostremos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0}) \mathcal{O}_{X,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$$

Sabemos que

$$\mathcal{O}_{X,0} \simeq \frac{\mathcal{O}_3}{I_2(M_F)}$$

Dada a aplicação inclusão

$$\begin{aligned} i : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

Temos o homomorfismo induzido

$$\begin{aligned} i^* : \mathcal{O}_3 &\longrightarrow \mathcal{O}_2 \\ k &\longmapsto k \circ i \end{aligned}$$

Dado $f \in I_2(M_F)$,

$$i^*(f)(x, y) = f \circ i(x, y) = f(x, y, 0) \in I_2(M_f)$$

Logo, $i^*(I_2(M_F)) \subset I_2(M_f)$. Assim i^* induz um homomorfismo sobrejetor

$$i^* : \frac{\mathcal{O}_3}{I_2(M_F)} \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$$

que chamaremos também de i^* . Temos que

$$\ker i^* = \{\bar{g} \in \frac{\mathcal{O}_3}{I_2(M_F)} / i^*(g) \in I_2(M_f)\}$$

Dado $g \in \ker i^*$, temos $g(x, y, 0) \in I_2(M_f)$ para todo $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$. Então, $g \in \tilde{g} + I_2(M_F)$, onde $\tilde{g}(x, y, 0) = 0$ para todo $(x, y) \in (\mathbb{C}^2, 0)$ e, portanto, $g \in \pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})\mathcal{O}_3/I_2(M_F)$. Reciprocamente, dado $\bar{g} \in \pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})\mathcal{O}_3/I_2(M_F)$, temos $\bar{g} = \sum_i \pi^*(h_i)\bar{g}_i$ com $h_i \in \mathcal{M}_{\mathbb{C},0}$ e $\bar{g}_i \in \mathcal{O}_3/I_2(M_F)$. Como $i^*(\pi^*(h_i)) = 0$ segue que $i^*(\bar{g}) = 0$, isto é, $\bar{g} \in \ker i^*$. Concluímos então que $\ker i^* = \pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})\mathcal{O}_3/I_2(M_F)$. Assim,

$$\frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})\mathcal{O}_{X,0}} \simeq \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$$

e, portanto,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{X,0}}{\pi^*(\mathcal{M}_{\mathbb{C},0})\mathcal{O}_{X,0}} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$$

Se $u \neq 0$

$$\pi^{-1}(u) = \{(x, y, u) / (x, y) \in \Sigma_{f_u}^{1,1}\}$$

onde f_u é um germe estável e a cardinalidade de $\pi^{-1}(u) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_2/I_2(M_f)$. Mas $\pi^{-1}(u)$ corresponde aos pontos de cúspide de f_u . Portanto, as pré-imagens são todas simples. De

fato, se $f(x, y) = (x, y^3 + xy)$ então

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 3y^2 + x \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

e

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle 3y^2 + x, 6y^2 - 3y^2 - x, 6y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x, y \rangle} = 1$$

Portanto f_u tem $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$ cúspides. ■

O valor de $d(f)$ pode agora ser calculado usando (4.4) e a fórmula obtida na proposição acima. Segue da fórmula de Milnor e de (4.4) que

$$c(f) + d(f) = \frac{\mu(\Delta(f)) - \mu(S(f))}{2} \quad (4.7)$$

Lema 4.2.8 *Sejam $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ e*

$$M_f = \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \\ J_x & J_y \end{pmatrix}$$

onde p e q são as componentes de f , J é o determinante jacobiano de f e os subscritos indicam derivadas parciais. Seja $I_2(M_f)$ o ideal gerado pelos menores de ordem 2 da matriz M_f . Então a sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{\langle p_x, p_y \rangle} \xrightarrow{q_x J_y - q_y J_x} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} \xrightarrow{\phi} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)} \longrightarrow 0 \quad (4.8)$$

é exata.

Demonstração A sequência é exata em $\frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$, pois ϕ é a projeção canônica e, portanto sobrejetiva.

Consideremos a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_2^2 \xrightarrow{M_f} \mathcal{O}_2^3 \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_2 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)} \longrightarrow 0 \quad (4.9)$$

onde $\Delta : \mathcal{O}_2^3 \rightarrow \mathcal{O}_2$ é dada por

$$\Delta(f_1, f_2, f_3) = f_1(q_x J_y - q_y J_x) - f_2(p_x J_y - p_y J_x) + f_3 J$$

Como f é finitamente determinada, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)} = c(f) < \infty$. Segue do Corolário 2.4.2 que (4.9) é exata em $\mathcal{O}_2^3$. Logo, a aplicação $q_x J_y - q_y J_x$ é injetiva. De fato, seja $g \in \mathcal{O}_2$ tal que $g(q_x J_y - q_y J_x) \in \langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle$. Então existem α e $\beta \in \mathcal{O}_2$ tais que

$$g(q_x J_y - q_y J_x) + \alpha(p_x J_y - p_y J_x) + \beta J = 0$$

ou seja, $\Delta(g, -\alpha, \beta) = 0$. Logo $(g, -\alpha, \beta) \in \ker \Delta = \text{Im } M_f$. Segue que existem γ e $\eta \in \mathcal{O}_2$ tais que

$$(g, \alpha, \beta) = M_f(\gamma, \eta) = \gamma(p_x, q_x, J_x) + \eta(p_y, q_y, J_y)$$

ou seja, $g = \gamma p_x + \eta p_y \in \langle p_x, p_y \rangle$. Portanto, (4.8) é exata em $\mathcal{O}_2 / \langle p_x, p_y \rangle$.

Basta mostrar agora que (4.8) é exata em $\mathcal{O}_2 / \langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle$. Temos que

$$\ker \phi = \frac{I_2(M_f)}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} = (q_x J_y - q_y J_x) (\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle)$$

logo $\ker \phi \subset \text{Im } (q_x J_y - q_y J_x)$. Reciprocamente, se $\bar{g} \in \text{Im } (q_x J_y - q_y J_x)$ então $\bar{g}$ é da forma

$$h(q_x J_y - q_y J_x) + \langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle$$

para algum $h \in \mathcal{O}_2$. Logo,

$$\phi(\bar{g}) = h(q_x J_y - q_y J_x) + I_2(M_f) \in I_2(M_f)$$

ou seja, $\bar{g} \in \ker \phi$. Portanto 4.8 é exata em $\mathcal{O}_2 / \langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle$. ■

Corolário 4.2.9 *Seja $f \in \mathcal{M}_2 \mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado. Então*

$$c(f) = \mu(S(f)) + m(f) - 2$$

onde $m(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1, f_2 \rangle}$ é o grau da aplicação $f = (f_1, f_2)$.

Demonstração Mostremos primeiramente que podemos escolher coordenadas de modo que $p^{-1}(0) \cap S(f) = \{0\}$. Temos que f é k -determinada para algum k . Então, para todo $g \in \mathcal{M}_2 \mathcal{O}_{2,2}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ temos que f é $\mathcal{A}$ -equivalente a g . Portanto f é $\mathcal{K}$ -equivalente a g . Segue daí que f é $\mathcal{K}$ -determinada. Pela Proposição 1.5.3 temos então que f é $\mathcal{C}$ -determinada. Por [29, pg 493], $m(f) < \infty$. Segue do Teorema 3.2.5 que $f^{-1}(0)$ tem um número finito de pontos e, portanto, $f^{-1}(0) \cap S(f)$ tem um número finito de pontos. Observemos que $S(f)$, $p^{-1}(0)$ e $q^{-1}(0)$ são curvas em $\mathbb{C}^2$. Se $p^{-1}(0)$

coincide com $S(f)$ numa vizinhança da origem, então $q^{-1}(0)$ não pode coincidir com $S(f)$ nesta vizinhança, pois $f^{-1}(0) \cap S(f)$ tem um número finito de pontos. A menos de uma mudança de coordenadas podemos então assumir que $p^{-1}(0) \cap S(f) = \{0\}$.

Consideremos o ideal $I = \langle J, p \rangle \subset \mathcal{O}_2$, onde $J(x, y)$ é o determinante jacobiano de f em (x, y) . A variedade analítica definida por I é dada por

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 / p(x, y) = 0 \text{ e } J(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in p^{-1}(0) \cap S(f)\} = \{0\}$$

Portanto, I define um conjunto analítico de codimensão 2 e tem dois geradores. Como 0 é singularidade isolada, então I define um ICIS. O ideal $\langle J \rangle$ tem 1 gerador e define a curva $S(f)$, que tem dimensão 1, logo $\langle J \rangle$ também define um ICIS.

Segue de [16, 5.11 (a)] que

$$\mu(J, p) + \mu(J) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle}$$

onde μ é o número de Milnor do ICIS definido por I . Notemos que $\mu(J) = \mu(S(f))$. Como o ICIS definido por I é 0-dimensional, segue de [16, 5.12] que

$$\mu(J, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p \rangle} - 1$$

Assim

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} = \mu(S(f)) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p \rangle} - 1$$

Vimos que o conjunto $f^{-1}(0)$ possui um número finito de pontos. Logo podemos tomar $f^{-1}(0) = \{0\}$, ou seja, $p^{-1}(0) \cap q^{-1}(0) = \{0\}$. Assim, $\langle p, q \rangle$ tem dois geradores e define um conjunto de codimensão 2. Segue daí que $\langle p, q \rangle$ define um ICIS. O ideal $\langle p \rangle$ tem 1 gerador e define uma variedade de codimensão 1. Portanto também define um ICIS. Aplicando [16, 5.11 (a)] obtemos

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p \rangle} = \mu(p) + \mu(p, q)$$

e por [16, 5.12]

$$\mu(p, q) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle p, q \rangle} = m(f) - 1$$

Logo

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p \rangle} = \mu(p) + m(f) - 1$$

Portanto

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} = \mu(p) + \mu(S(f)) + m(f) - 2 \quad (4.10)$$

Segue do Lema 4.2.8 que

$$\dim \operatorname{Im}(q_x J_y - q_y J_x) = \dim \ker \phi$$

$$\dim \operatorname{Im}(q_x J_y - q_y J_x) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\langle p_x, p_y \rangle}$$

$$\dim \operatorname{Im} \phi = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{I_2(M_f)}$$

ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle p_x, p_y \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} = c(f)$$

Logo

$$c(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle J, p_x J_y - p_y J_x \rangle} = \mu(p)$$

Substituindo a expressão acima em (4.10) obtemos o resultado. ■

A seguir mostramos a invariância analítica de $c(f)$ e $d(f)$, ou seja, se dois germes f e g são $\mathcal{A}$ -equivalentes, então $c(f) = c(g)$ e $d(f) = d(g)$. Trata-se de um caso particular do Teorema 4.2.11.

Proposição 4.2.10 *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado. Os números $c(f)$ e $d(f)$ são invariantes analíticos.*

Demonstração Seja $g \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ tal que $f \sim_{\mathcal{A}} g$, ou seja, existem germes de difeomorfismos $\phi, \psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tais que $f = \psi \circ g \circ \phi$. Temos que

$$\det[d_x f] = \det[d_{g \circ \phi(x)} \psi] \det[d_{\phi(x)} g] \det[d_x \phi]$$

Como $d_{g \circ \phi(x)} \psi$ e $d_x \phi$ são isomorfismos, então $\det[d_{\phi(x)} g] = 0$ se, e somente se, $\det[d_x f] = 0$. Segue que

$$\phi(S(f)) = \{\phi(x) \in (\mathbb{C}^2, 0) / \det[d_{\phi(x)} g] = 0\} = \{y \in (\mathbb{C}^2, 0) / \det[d_y g] = 0\} = S(g)$$

Ainda,

$$\psi(\Delta(g)) = \psi(g(S(g))) = \psi \circ g \circ \phi(S(f)) = f(S(f)) = \Delta(f)$$

Como o número de Milnor é um invariante analítico então

$$\mu(S(f)) = \mu(S(g))$$

e

$$\mu(\Delta(f)) = \mu(\Delta(g))$$

Mostremos agora que $m(f) = m(g)$. Para isto, basta mostrar que $I_f = \langle f_1, f_2 \rangle$ e $I_g = \langle g_1, g_2 \rangle$ são isomorfos, onde f_1, f_2 e g_1, g_2 são as funções coordenadas respectivamente de f e g . De fato, se $I_f \simeq I_g$ temos

$$m(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_f} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{I_g} = m(g)$$

Mostremos primeiramente no caso em que $\phi = Id_{\mathbb{C}^n}$. Se ψ_1, ψ_2 são as funções coordenadas de ψ então

$$f = (f_1, f_2) = (\psi_1 \circ g, \psi_2 \circ g)$$

Como $\psi_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$, segue do Lema 1.4.1 que

$$\psi_i(x, y) = \alpha_{1i}(x, y)x + \alpha_{2i}(x, y)y$$

onde $\alpha_{ji} \in \mathcal{O}_2$, $i, j = 1, 2$. Logo

$$f_i(x, y) = \psi_i(g(x, y)) = \alpha_{1i}(g(x, y))g_1(x, y) + \alpha_{2i}(g(x, y))g_2(x, y)$$

ou seja, $f_i \in I_g$, $i = 1, 2$. Portanto $I_f \subseteq I_g$. Por simetria, $I_f = I_g$. Consideremos agora ϕ um difeomorfismo qualquer. Segue do caso anterior que $I_f = I_{g \circ \phi}$. Consideremos o isomorfismo induzido por ϕ

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{O}_2 &\longrightarrow \mathcal{O}_2 \\ k &\longmapsto k \circ \phi \end{aligned}$$

Temos que $\phi^*(I_g) = I_{g \circ \phi}$. De fato, seja $\tilde{g} \in I_g$. Então

$$\tilde{g}(x, y) = \beta_1(x, y)g_1(x, y) + \beta_2(x, y)g_2(x, y)$$

onde $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{O}_2$ e

$$\begin{aligned} \phi^*(\tilde{g}(x, y)) &= \phi^*(\beta_1(x, y))\phi^*(g_1(x, y)) + \phi^*(\beta_2(x, y))\phi^*(g_2(x, y)) \\ &= (\beta_1 \circ \phi)(x, y)(g_1 \circ \phi)(x, y) + (\beta_2 \circ \phi)(x, y)(g_2 \circ \phi)(x, y) \end{aligned}$$

ou seja, $\phi^* \circ \tilde{g} \in I_{g \circ \phi}$. Logo $\phi^*(I_g) \subseteq I_{g \circ \phi}$. Reciprocamente, seja $\tilde{g} \in I_{g \circ \phi}$. Então

$$\tilde{g} = \gamma_1 g_1 \circ \phi + \gamma_2 g_2 \circ \phi$$

onde $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{O}_2$. Como ϕ^* é isomorfismo, existem $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{O}_2$ tais que $\phi^*(\beta_1) = \gamma_1$ e $\phi^*(\beta_2) = \gamma_2$. Logo

$$\tilde{g} = \phi^*(\beta_1)\phi^*(g_1) + \phi^*(\beta_2)\phi^*(g_2) = \phi^*(\beta_1g_1 + \beta_2g_2)$$

ou seja, $\tilde{g} \in \phi^*(I_g)$. Portanto $I_f = I_{g \circ \phi} \simeq I_g$.

Segue do Corolário 4.2.9 que

$$c(f) = \mu(S(f)) + m(f) - 2 = \mu(S(g)) + m(g) - 2 = c(g)$$

e

$$d(f) = \frac{1}{2}(\mu(\Delta(f)) - \mu(S(f))) - c(f) \quad \frac{1}{2}(\mu(\Delta(g)) - \mu(S(g))) - c(g) = d(g)$$

■

Teorema 4.2.11 *Seja $f \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ um germe finitamente determinado. Os números $c(f)$ e $d(f)$ são invariantes topológicos.*

Demonstração Seja $g \in \mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ tal que existem germes de homeomorfismos $\phi, \psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, onde $f = \psi \circ g \circ \phi$. Pela Proposição 4.2.1 temos que $S(f)$ e $S(g)$ são curvas. Segue do Teorema 1.3.3 que existe uma vizinhança U da origem tal que, se $y \in U \cap S(f)$, o germe de f em y é estável. Portanto, o germe de f em y é uma dobra ou uma cúspide de Whitney. A cúspide de Whitney corresponde a uma cúspide em $S(f)$. Como cúspides ocorrem isoladamente, podemos encolher U de forma que o germe de f em y seja uma dobra. O mesmo ocorre para g . Como ϕ é homeomorfismo, ϕ leva dobra em dobra. Logo $\phi(S(f)) = S(g)$. Analogamente $\psi(\Delta(g)) = \Delta(f)$. Ainda, segue de [28] que o número de Milnor de uma hipersuperfície singular é um invariante topológico, logo

$$\mu(S(f)) = \mu(S(g)) \quad \mu(\Delta(f)) = \mu(\Delta(g))$$

Notemos que $\mathbb{C}$ é um anel de Cohen-Macaulay, pois $\dim \mathbb{C} = \text{depth} \mathbb{C} = 0$. Pelo Teorema 3.2.5 temos então que $m(f)$ é igual à cardinalidade de $f^{-1}(v_0)$ para v_0 suficientemente próximo da origem. Logo, $m(f) = m(g)$.

O resultado segue do Corolário 4.2.9 e de (4.7).

■

Corolário 4.2.12 *Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, $F(x, t) = (f_t(x), t)$, um desdobramento de um germe de aplicação holomorfa finitamente determinado $f = f_0$. Suponhamos que f_t é instável em 0 para todo t . Então F é um desdobramento topologicamente trivial se, e somente se, $c(f_t)$ e $d(f_t)$ são constantes.*

Demonstração Se F é um desdobramento topologicamente trivial, então todas as f_t são topologicamente equivalentes. Segue de Corolário 4.2.11 que $c(f_t)$ e $d(f_t)$ são constantes.

Reciprocamente, suponhamos que $c(f_t)$ e $d(f_t)$ sejam constantes. Como $c(f_t)$ é constante, segue do Corolário 4.2.9 que $\mu(S(f_t))$ é constante. Por (4.7), $c(f_t)$ e $d(f_t)$ constantes implicam que $\mu(\Delta(f_t))$ é constante. O resultado segue de [6, 9.9].

■

4.3 Germes de corank 1

Nesta seção obtemos uma fórmula que simplifica o cálculo de $c(f)$ e $d(f)$ quando f tem corank 1. A idéia central é considerar f como um desdobramento a um parâmetro de um germe de função do tipo A_k e, como tal, induzida do desdobramento versal de A_k .

Nesta seção f é um germe em $\mathcal{M}_2\mathcal{O}_{2,2}$ de corank 1. No resultado seguinte obtemos uma pré forma normal para tais germes.

Teorema 4.3.1 *Seja $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe finitamente determinado de corank 1. Então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a um germe da forma*

$$(x, y^n + \sum_{i=1}^{n-2} a_i(x)y^i)$$

onde $n = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle f_1, f_2 \rangle}$ é o grau de f .

Demonstração Como f tem corank 1, existe uma submatriz de ordem 1 da matriz de d_0f cujo determinante é não nulo. Fazendo mudanças de coordenadas na fonte e na meta se necessário, podemos supor que $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0) \neq 0$. Consideremos então o germe $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, dado por $\phi(x, y) = (f_1(x, y), y)$. A matriz de $d_0\phi$ é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, $d_0\phi$ é isomorfismo e, portanto, ϕ é germe de difeomorfismo. Podemos então considerar o germe $\phi^{-1} = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$. Temos:

$$(x, y) = \phi \circ \phi^{-1}(x, y) = (f_1(\phi^{-1}(x, y)), \varphi_2(x, y))$$

Portanto

$$f \circ \phi^{-1}(x, y) = f(\phi^{-1}(x, y)) = (f_1(\phi^{-1}(x, y)), f_2(\phi^{-1}(x, y))) = (x, f_2(\phi^{-1}(x, y)))$$

Segue que, a menos de mudança de coordenadas na fonte, f é da forma $f(x, y) = (x, f_2(x, y))$.

Como f é finitamente determinada temos que $f_2(0, y) \neq 0$. Assim, $f_2(0, y) = y^l g(y)$ com $g(0) \neq 0$. Como

$$n = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x, f_2(0, y) \rangle}$$

segue que $l = n$.

Como consequência do Teorema 1.4.4 podemos escrever

$$f(x, y) = (x, (\alpha_0(x) - \cdots + \alpha_{n-1}(x)y^{n-1} + y^n)u)$$

onde $u \in \mathcal{O}_2$ é um elemento invertível.

Consideremos o seguinte germe de difeomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (X, Y) &\longmapsto (X, u^{-1}Y - \alpha_0(X)) \end{aligned}$$

Assim, $\psi \circ f(x, y) = (x, \alpha_1(x)y - \cdots + \alpha_{n-1}(x)y^{n-1} + y^n)$.

Considerando agora o germe de difeomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n}) \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(x, y) &= f(x, y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n}) = (x, \alpha_1(x)(y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n}) + \alpha_2(x)(y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n})^2 + \cdots \\ &+ \alpha_{n-1}(x)(y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n})^{n-1} + (y - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{n})^n) = (x, a_0(x) + a_{n-2}(x)y + \cdots + a_1(x)y^{n-2} + y^n) \end{aligned}$$

Finalmente, após mudança de coordenadas na meta f é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$(x, y) \longmapsto (x, a_{n-2}(x)y + \cdots + a_1(x)y^{n-2} + y^n)$$

■

Se $m(f) = k + 1$, segue do teorema acima que, a menos de mudança de coordenadas na fonte e na meta podemos escrever

$$f(x, y) = (x, y^{k+1} + a_1(x)y^{k-1} + \cdots + a_{k-1}(x)y) \quad (4.11)$$

Os coeficientes $a_i(x)$ de y^{k-i} determinam a aplicação

$$\begin{aligned} a_f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^{k-1} \\ x &\longmapsto (a_1(x), \dots, a_{k-1}(x)) \end{aligned}$$

Podemos ver f como um desdobramento a 1 parâmetro de uma singularidade do tipo A_k

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (x, g(x, y)) \end{aligned}$$

onde $g(x, y) = y^{k+1} + a_1(x)y^{k-1} + \dots + a_{k-1}(x)y$ e $g(x, 0) = y^{k-1}$

A aplicação $a_f = (a_1, \dots, a_{k-1})$ pode ser vista como uma aplicação da base do desdobramento f na base do desdobramento versal F de A_k :

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C}, 0) \\ (u_1, \dots, u_{k-1}, y) &\longmapsto (u_1, \dots, u_{k-1}, y^{k+1} + u_1 y^{k-1} + \dots + u_{k-1} y) = (u, g_u(y)) \end{aligned}$$

Definimos agora os conjuntos de bifurcação B , B_C e B_D na base do desdobramento F :

$$B_C = \{u \in \mathbb{C}^{k-1} / g_u \text{ tem um ponto crítico degenerado}\}$$

$$B_D = \{u \in \mathbb{C}^{k-1} / g_u \text{ tem dois pontos críticos com o mesmo valor crítico}\}$$

$$B = \{u \in \mathbb{C}^{k-1} / g_u \text{ não é estável}\}$$

Segue de [11, Proposição 2.2] que $B = B_C \cup B_D$.

Sejam Δ_{sing} o conjunto dos pontos singulares de $\Delta(F)$ e $\pi : \mathbb{C}^{k-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{k-1}$ a projeção na base do desdobramento F . Segue de [23, §6] que

$$B_C = \{u \in (\mathbb{C}^{k-1}, 0) / \exists y \in (\mathbb{C}, 0) \text{ tal que } \frac{\partial g_u}{\partial y}(y) = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g_u}{\partial y^2}(y) = 0\}$$

$$B = \pi(\Delta_{\text{sing}})$$

e que o conjunto Δ_{sing} é a variedade dos zeros do primeiro ideal de Fitting de $F_*\mathcal{O}_{S(F)}$, isto é, $\Delta_{\text{sing}} = V(\mathcal{F}_1(F_*\mathcal{O}_{S(F)}))$. Dessa forma calculamos B . O conjunto B_D pode então ser calculado dividindo a equação de B pela de B_C .

Exemplos 4.3.2 1. Consideremos $f(x, y) = (x, y^4 + a_1(x)y^2 + a_2(x)y)$. Então

$$F(u_1, u_2, y) = (u_1, u_2, y^4 + u_1 y^2 + u_2 y) = (u, g_u(y))$$

Temos

$$\begin{aligned} S(F) &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^3, 0) / \det[d_{(u,y)}F] = 0\} \\ &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^3, 0) / 4y^3 + 2u_1y + u_2 = 0\} \\ &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^3, 0) / u_2 = -4y^3 - 2u_1y\} \\ \Delta(F) &= \{F(u_1, u_2, y) / (u_1, u_2, y) \in S(F)\} \\ &= \{(u_1, -4y^3 - 2u_1y - u_1y, -3y^4 - u_1y^2)\} \end{aligned}$$

Temos que

$$B_C = \{u \in (\mathbb{C}^2, 0) / \exists y \in (\mathbb{C}, 0) \text{ tal que } 4y^3 + 2u_1y + u_2 = 0 \text{ e } 12y \cdot 2u_1 = 0\}$$

ou seja, B_C é o discriminante de $4y^3 + 2u_1y + u_2$. Com o auxílio do programa Maple calculamos este discriminante e, portanto, a equação de B_C :

$$8u_1^3 + 27u_2^2 = 0$$

Queremos agora encontrar a equação de B . Para isso, é necessário calcular primeiramente o primeiro ideal de Fitting de $F_*\mathcal{O}_{S(F)}$. Temos

$$\begin{aligned} F|_{S(F)} : S(F) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u_1, -4y^3 - 2u_1y, y) &\longmapsto (u_1, -4y^3 - 2u_1y, -3y^4 - u_1y^2) \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{F_*\mathcal{O}_{S(F)}}{\mathcal{M}_3 F_*\mathcal{O}_{S(F)}} \simeq \frac{\mathcal{O}_2}{\langle u_1, -4y^3 - 2u_1y, -3y^4 - u_1y^2 \rangle} \simeq \mathbb{C}\{1, y, y^2\}$$

Sejam $U = u_1$, $V = -4y^3 - 2u_1y$ e $W = -3y^4 - u_1y^2$. Com o auxílio do programa Maple encontramos as relações entre $1, y$ e y^2

$$\begin{aligned} 4W \cdot 1 - 3V \cdot y - 2U \cdot y^2 &= 0 \\ \left(\frac{3}{4}V^2 + \frac{8}{3}UW\right) \cdot 1 + 0 \cdot y + \left(4W - \frac{1}{3}U^2\right) \cdot y^2 &= 0 \\ 16W^2 \cdot 1 - VU^2 \cdot y + (-9V^2 + 16UW - 2U^3) \cdot y^2 &= 0 \end{aligned}$$

obtendo assim a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4W & -3V & -2U \\ \frac{3}{4}V^2 + \frac{8}{3}UW & 0 & 4W - \frac{1}{3}U^2 \\ 16W^2 & -VU^2 & -9V^2 + 16UW - 2U^3 \end{pmatrix}$$

O primeiro ideal de Fitting de $F_*\mathcal{O}_{S(F)}$ é o ideal gerado pelos menores de or-

dem 2 de A. Também com o auxílio do Maple, calculamos a equação de $\Delta_{sing} := V(\mathcal{F}_1(F_*\mathcal{O}_{S(F)}))$, donde segue a equação de $B = \pi(\Delta_{sing})$

$$u_2(8u_1^3 + 27u_2^2) = 0$$

Portanto a equação de B_D é

$$u_2 = 0$$

2. Consideremos agora $f(x, y) = (x, y^5 + a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y)$.

$$F(u_1, u_2, u_3, y) = (u_1, u_2, u_3, y^5 + u_1y^3 + u_2y^2 + u_3y) = (u, g_u(y))$$

Temos

$$\begin{aligned} S(F) &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^4, 0) / \det[d_{(u,y)}F] = 0\} \\ &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^4, 0) / 5y^4 + 3u_1y^2 + 2u_2y + u_3 = 0\} \\ &= \{(u, y) \in (\mathbb{C}^4, 0) / u_3 = -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \{F(u_1, u_2, u_3, y) / (u_1, u_2, u_3, y) \in S(F)\} \\ &= \{(u_1, u_2, -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y, -4y^5 - 2u_1y^3 - u_2y^2)\} \end{aligned}$$

Temos que

$$B_C = \{u \in (\mathbb{C}^3, 0) / \exists y \in (\mathbb{C}, 0) \text{ tal que } 5y^4 + 3u_1y^2 - 2u_2y + u_3 = 0 \text{ e } -4y^5 - 2u_1y^3 - u_2y^2 = 0\}$$

ou seja, B_C é o discriminante de $5y^4 + 3u_1y^2 - 2u_2y + u_3$. Com o auxílio do programa Maple, encontramos a equação de B_C

$$-81u_1^4u_3 + 360u_1^2u_3^2 - 400u_3^3 + 135u_2^4 + 27u_1^3u_2^2 - 540u_1u_2^2u_3 = 0$$

Ainda, $F|_{S(F)} : S(F) \rightarrow (\mathbb{C}^4, 0)$ é dada por

$$F|_{S(F)}(u_1, u_2, -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y, y) = (u_1, u_2, -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y, -4y^5 - 2u_1y^3 - u_2y^2)$$

Logo

$$\frac{F_*\mathcal{O}_{S(F)}}{\mathcal{M}_4 F_*\mathcal{O}_{S(F)}} \simeq \frac{\mathcal{O}_3}{\langle u_1, u_2, -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y, -4y^5 - 2u_1y^3 - u_2y^2 \rangle} \simeq \mathbb{C}\{1, y, y^2, y^3\}$$

Sejam $U = u_1$, $V = -5y^4 - 3u_1y^2 - 2u_2y$ e $W = -4y^5 - 2u_1y^3 - u_2y^2$. Com o auxílio

do programa Maple encontramos as relações entre $1, y, y^2$ e y^3

$$\begin{aligned} -5Z.1 + 4W.y + 3V.y^2 + 2U.y^3 &= 0 \\ \frac{2}{5}UW.1 + (-5Z - \frac{4}{5}UV).y + (4W - \frac{6}{5}U^2).y^2 + 3V.y^3 &= 0 \\ (-\frac{1}{2}ZU - \frac{3}{5}VW).1 - \frac{6}{5}V^2.y + (-5Z - \frac{23}{10}UV).y^2 + (4W - U^2).y^3 &= 0 \\ (4W^2 + \frac{55}{4}VZ - \frac{6}{5}U^2W).1 - \frac{12}{5}U^2V.y + (14UW - \frac{9}{4}V^2 - \frac{18}{5}U^3).y^2 + (25Z + \frac{15}{2}UV).y^3 &= 0 \end{aligned}$$

obtendo assim a matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5Z & 4W & 3V & 2U \\ -\frac{2}{5}UW & -5Z - \frac{4}{5}UV & 4W - \frac{6}{5}U^2 & 3V \\ -\frac{1}{2}ZU - \frac{3}{5}VW & -\frac{6}{5}V^2 & -5Z - \frac{23}{10}UV & 4W - U^2 \\ 4W^2 + \frac{55}{4}VZ - \frac{6}{5}U^2W & -\frac{12}{5}U^2V & 14UW - \frac{9}{4}V^2 - \frac{18}{5}U^3 & 25Z + \frac{15}{2}UV \end{pmatrix}$$

O primeiro ideal de Fitting de $F_*\mathcal{O}_{S(f)}$ é o ideal gerado pelos menores de ordem 3 de Λ . Também com o auxílio do Maple, calculamos a equação de $\Delta_{sing} = V(\mathcal{F}_1(F_*\mathcal{O}_{S(f)}))$, donde segue a equação de $B = \pi(\Delta_{sing})$ e, portanto, a equação de B_D :

$$\frac{16}{25}u_1^6 - \frac{224}{25}u_1^4u_3 + \frac{1040}{25}u_1^2u_3^2 - 64u_3^3 + \frac{88}{25}u_1^3u_2^2 - \frac{6336}{125}u_1u_2^2u_3 - \frac{27}{5}u_2^2 = 0$$

Suponhamos que f seja como em (4.11). Segue de [11] que f tem uma cúspide em (x, y) se, e somente se,

$$\frac{\partial g_{a_f(x)}}{\partial y}(y) = \frac{\partial^2 g_{a_f(x)}}{\partial y^2}(y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 g_{a_f(x)}}{\partial y^3}(y) \neq 0$$

Mas isto acontece se, e somente se, y é uma singularidade do tipo A_2 de $g_{a_f(x)}$. Ainda, se f tem uma dobra dupla em (x, y_1) e (x, y_2) então

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{a_f(x)}}{\partial y}(y_1) &= 0 & \text{e} & \quad \frac{\partial^2 g_{a_f(x)}}{\partial y^2}(y_1) \neq 0 \\ \frac{\partial g_{a_f(x)}}{\partial y}(y_2) &= 0 & \text{e} & \quad \frac{\partial^2 g_{a_f(x)}}{\partial y^2}(y_2) \neq 0 \end{aligned}$$

ou seja, y_1 e y_2 são singularidades do tipo A_1 de $g_{a_f(x)}$ e $g_{a_f(x)}(y_1) = g_{a_f(x)}(y_2)$.

Reciprocamente, se y_1 e y_2 são singularidades do tipo A_1 de $g_{a_f(x)}$ e $g_{a_f(x)}(y_1) = g_{a_f(x)}(y_2)$, então cada ramo do bigerme de f em $\{(x, y_1), (x, y_2)\}$ é uma dobra. Logo, f tem uma dobra dupla em $\{(x, y_1), (x, y_2)\}$ se, e somente se, y_1 e y_2 são singularidades do

tipo A_1 de $g_{a_f(x)}$ e $g_{a_f(x)}(y_1) = g_{a_f(x)}(y_2)$.

No primeiro caso $a_f(x) \in B_C$ e no segundo $a_f(x) \in B_D$. Segue daí que se a_f encontra B somente em seus pontos regulares e, nestes pontos, transversalmente, então f é estável e neste caso

$$c(f) = \text{número de vezes que } a_f \text{ encontra } B_C$$

$$d(f) = \text{número de vezes que } a_f \text{ encontra } B_D$$

Dizemos que um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico se satisfaz um número finito de equações polinomiais. Segue que um subconjunto algébrico de $\mathbb{C}$ é uma união finita de pontos.

Teorema 4.3.3 *Se f é como em (4.11) então*

$$c(f) = v(b_C \circ a_f) \qquad d(f) = v(b_D \circ a_f)$$

onde b_C e b_D são as equações reduzidas de B_C e B_D respectivamente, e v é a ordem de $0 \in \mathbb{C}$.

Demonstração Numa demonstração análoga à do Teorema 4.3.1 vemos que, a menos de mudança de coordenadas, qualquer desdobramento de f é induzido por um desdobramento do germe $a_f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$ e vice-versa.

Suponhamos que exista uma deformação a_t a 1-parâmetro da curva a_f tal que, para $t \neq 0$, a_t encontra B_C e B_D somente em seus pontos regulares e, nestes pontos, transversalmente. Então a deformação f_t induzida de a_t é tal que f_t é estável para $t \neq 0$, o número de cúspides no discriminante de f_t é igual ao número de zeros de $b_C \circ a_t$ e cada um destes zeros é simples. Temos que localmente o número de zeros de uma função $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é preservado por deformação. Logo

$$v(b_C \circ a_t) = v(b_C \circ a_f)$$

para todo t . Portanto o número de cúspides no discriminante de f_t é $v(b_C \circ a_f)$. Analogamente, o número de dobras duplas no discriminante de f_t é $v(b_D \circ a_f)$.

Resta mostrar que existem deformações a 1-parâmetro de a_f com tais propriedades. Seja $b = b_C b_D$. Vamos primeiramente obter a_t de forma que $b \circ a_t$ tenha $v(b \circ a_f)$ zeros simples. Tomemos $\tilde{a} : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{k-1}, 0)$, $\tilde{a}(x) = (\tilde{a}_1(x), \dots, \tilde{a}_{k-1}(x))$ uma curva transversal a B e definimos

$$a_t(x) = a_f(x) + t(\tilde{a}(x) - a_f(x))$$

Considerando $b \circ a_t$ como um polinômio em t , o conjunto dos valores de t para os quais $b \circ a_t$ tem raízes repetidas é algébrico. Tal conjunto não é todo $\mathbb{C}$, pois $b \circ a_1 = b \circ \tilde{a}$

tem somente raízes simples. Logo este conjunto algébrico é um número finito de pontos e, portanto, $t = 0$ é um ponto isolado deste conjunto. Assim, para $t \neq 0$ suficientemente pequeno, $b \circ a_t$ tem somente raízes simples.

Temos que

$$b \circ a_t = (b_C \circ a_t)(b_D \circ a_t)$$

Assim, r é uma raiz de $b \circ a_t$ se, e somente se, r é uma raiz de $b_C \circ a_t$ ou uma raiz de $b_D \circ a_t$. Como $b \circ a_t$ só tem raízes simples, então $b_C \circ a_t$ e $b_D \circ a_t$ só têm raízes simples. Isto significa que a_t encontra B_C e B_D apenas em pontos regulares, e lá transversalmente. ■

Este resultado mostra que $c(f)$ e $d(f)$ são determinados pela interseção de a_f com B_C e B_D .

Apresentamos a seguir alguns exemplos para ilustrar a utilização do Teorema 4.3.3 no cálculo de c e d .

Exemplos 4.3.4 1. Consideremos $f_{1,k} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $f_{1,k}(x, y) = (x, y^4 + x^k y)$. Temos que $m(f_{1,k}) = 4$ e $a_{f_{1,k}}(x) = (0, x^k)$. Então

$$b_C = 8u_1^3 + 27u_2^2 \quad \text{e} \quad b_C \circ a_{f_{1,k}}(x) = 27x^{2k}$$

$$b_D = u_2 \quad \text{e} \quad b_D \circ a_{f_{1,k}}(x) = x^k$$

Portanto

$$c(f_{1,k}) = v(b_C \circ a_{f_{1,k}}) = 2k$$

$$d(f_{1,k}) = v(b_D \circ a_{f_{1,k}}) = k$$

2. Seja $f_{2,k_1,k_2} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $f_{2,k_1,k_2}(x, y) = (x, y^4 + x^{k_1}y + x^{k_2}y^2)$, onde $3k_2 < 2k_1$. Temos que $m(f_{2,k_1,k_2}) = 4$ e $a_{f_{2,k_1,k_2}}(x) = (x^{k_2}, x^{k_1})$. Então

$$b_C = 8u_1^3 + 27u_2^2 \quad \text{e} \quad b_C \circ a_{f_{2,k_1,k_2}}(x) = 8x^{3k_2} + 27x^{2k_1} = x^{3k_2}(8 + 27x^{2k_1-3k_2})$$

$$b_D = u_2 \quad \text{e} \quad b_D \circ a_{f_{2,k_1,k_2}}(x) = x^{k_1}$$

Segue que

$$c(f_{2,k_1,k_2}) = v(b_C \circ a_{f_{2,k_1,k_2}}) = 3k_2$$

$$d(f_{2,k_1,k_2}) = v(b_D \circ a_{f_{2,k_1,k_2}}) = k_1$$

3. Tomemos $f_{3,k_1,k_2} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $f_{3,k_1,k_2}(x, y) = (x, y^4 + 8x^{3k_1}y - 6x^{2k_1}y^2 + x^{2k_1-k_2}y^2)$ com $k_2 > 0$. Temos que $m(f_{3,k_1,k_2}) = 4$ e $a_{f_{3,k_1,k_2}}(x) = (6x^{2k_1} -$

$x^{2k_1+k_2}, 8x^{3k_1}$). Então

$$b_C \circ a_{f_{3,k_1,k_2}}(x) = 8x^{6k_1+3k_2} - 144x^{6k_1+2k_2} + 864x^{6k_1+k_2}$$

$$b_D \circ a_{f_{3,k_1,k_2}}(x) = 8x^{3k_1}$$

Segue que

$$c(f_{3,k_1,k_2}) = v(b_C \circ a_{f_{3,k_1,k_2}}) = 6k_1 + k_2$$

$$d(f_{3,k_1,k_2}) = v(b_D \circ a_{f_{3,k_1,k_2}}) = 3k_1$$

Pelo Corolário 4.2.11 temos os germes acima são topologicamente distintos, já que os números c e d são dois a dois distintos.

Referências Bibliográficas

- [1] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press, London, 1993.
- [3] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, New York, 1995.
- [4] T. Fukuda and G. Ishikawa, On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity, *Tokio J. Math.* 10 (1987) 375-384).
- [5] T. Gaffney, *Properties of finitely determined germs*, Thesis, Brandeis University, 1975.
- [6] T. Gaffney, Polar multiplicities and equisingularity of map germs, *Topology*, 32, 1993, 185-223.
- [7] T. Gaffney and A. Du Plessis and L. Wilson, Map-germs determined by their discriminants, stratifications, singularities and differential equations, I, *Travaux en Cours*, 54 (1997), 1-40, Hermann.
- [8] T. Gaffney and D. M. Q. Mond, Cusp and double folds of germs of analytic maps $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, *London Math. Soc.* (2) 43 (1991) 185-192.
- [9] T. Gaffney and D. Mond, Weighted homogeneous maps from the plane to the plane, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 109 (3), 1991, 451-470.
- [10] C.G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Maths., 25, Pitman, 1979.
- [11] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, GTM 14, Springer-Verlag, 1973.

- [12] R. C. Gunning, *Lectures on complex analytic varieties: the local parametrization theorem*, University Press, Princeton, 1970.
- [13] R. C. Gunning, *Lectures on complex analytic varieties: finite analytic mappings*, University Press, Princeton, 1974.
- [14] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, EUA, 1965.
- [15] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Fourth Printing, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [16] E. N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, LMS Lecture Notes 77, London, Cambridge University Press, 1984.
- [17] S. Mac Lane, *Homology*, Springer, New York, 1995.
- [18] J. Martinet, *Singularities of smooth functions and mappings*, LMS Lecture Notes 58, Cambridge University Press, 1982.
- [19] H. Matsumura, *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1970.
- [20] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.
- [21] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces, *Annals of Mathematics Studies* 61, University Press, Princeton, 1968.
- [22] D. Mond, Singularities of mappings from surfaces to 3-space, *Singularity Theory*, D.T., Lê, K. Saito, B. Tossier. eds, World Scientific, Singapore (1995), 509-526.
- [23] D. Mond and R. Pellikaan, Fitting ideals and multiple points of analytic mappings, *Proceedings of the Ptzcuaro Workshop on Algebraic and Analytic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1414 (Springer, Berlin, 1991).
- [24] M. Reid, *Undergraduate algebraic geometry*, Cambridge University Press, London, 1988.
- [25] J.H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc.* (2) 36 (1987), 351-369.
- [26] F. Tari, *Singularidades de aplicações diferenciáveis*, *Notas Didáticas do ICMC*, 34, 1999.

- [27] B. Teissier, The Hunting of invariants in the geometry of the discriminant, *Real and Complex Singularities* (ed. P. Hohn; Sijthoff e Noordhoff, Oslo, 1977) 564-648.
- [28] L. D. Tráng, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, *Singularités à Cargèse, Asterisque* 7/8 (Société Mathématique de France, Paris, 1973) 171-182.
- [29] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.* 13(1981) 481-539.
- [30] H. Whitney, On Singularities of mappings of Euclidean spaces .I. Mappings of the plane into the plane, *Ann. of Math.* 62 (1955) 374-410.

Índice Remissivo

- k -jatos, 3
 - equivalentes, 4
- anéis
 - de Cohen-Macaulay, 20
 - Noetherianos, 16, 17
 - reduzidos, 31
- aplicação tangente, 7
- campo de vetores, 8
- Cohen-Macaulay
 - anéis, 20
 - germes de variedades, 26
 - módulos, 20
- curva, 31
 - reduzida, 32, 33
- decomposição
 - primária, 15, 16, 25
- delta, 33
- desdobramento
 - versal, 10
- desdobramentos, 10
 - induzidos, 10
 - isomorfos, 10
 - topologicamente triviais, 11
 - triviais, 10
- dimensão
 - de germe de variedade, 26
 - de um anel, 17
 - de um módulo, 18
 - finita, 18
- espaço tangente, 7
- estável
 - germe, 9
- fibrado tangente, 7
- finita
 - aplicação, 26
- germes
 - $\mathcal{A}$ -equivalentes, 2
 - $\mathcal{K}$ -equivalentes, 13
 - de corank 1, 47
 - de subvariedade analítica, 23
 - de subvariedades, 25
 - de variedades, 24
 - de variedades de Cohen-Macaulay, 26
 - de variedades equidimensionais, 26
 - estáveis, 9, 30
 - finitamente determinados, 9
 - multigerme, 1
 - rank, 2
- grade
 - de um módulo, 20
- grupos
 - ação de, 3, 4
 - de Lie, 3, 4
- Hadamard, 11
- Hilbert-Burch, 21
- ideal
 - altura de, 17
 - de Fitting, 29, 37

- primário, 15
- primo, 15
- primo maximal, 15
- primo minimal, 15
- radical, 15
- intersecção completa, 28
- intersecção completa com singularidade isolada (ICIS), 28
- módulos
 - de Cohen-Macaulay, 20
 - Noetherianos, 17
 - projetivos, 21
- Malgrange, 13
- Milnor
 - fórmula de, 33
 - número de, 33
- nilpotente, 15
- Noetheriano
 - anel, 17
 - módulo, 17
- normalização, 27, 34
- profundidade
 - de um módulo, 20
- pull-back, 10
- sequência
 - exata, 21, 22
 - regular, 18
- subvariedades analíticas, 23
 - germes de, 23
- Weierstrass, 12