Monodromia de curvas algébricas planas

Silas Fantin

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 12/07/2007

Assinatura:

Monodromia de curvas algébricas planas

Silas Fantin

Orientador: Prof. Dr. Abramo Hefez

Co-orientador: Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos

Julho/2007

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente em minha vida.

Ao professor Abramo Hefez, por ter me aceito como seu aluno de doutorado, e pela sugestão do tema da tese, permitindo-me trabalhar com liberdade e tranquilidade.

A Andrea Gomes Guimarães, pela sua ajuda e pelo seu entusiasmo no decorrer do doutorado, e ao Billy (Carlos) pela amizade, e pelos diagramas feitos na tese.

A Ana Paula e Laura, na secretaria de pós-graduação do ICMC-USP, e a Mariana e Léa, na secretaria da pós-graduação da UFF, pela ajuda prestada no decorrer deste período.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e incentivo constantes. A minha mãe, que mais desejava ver este trabalho concluído, presto minha homenagem póstuma.

A minha esposa Regina Freitas, pela paciência, apoio, estímulo e compreensão neste período de doutorado.

Ao departamento de estruturas matemáticas da UERJ, e a CAPES, pelo suporte financeiro, que permitiu a realização deste trabalho.

Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora.

Aos demais funcionários, professores e alunos do ICMC-USP, neste momento anônimos, o meu (não menor) muito obrigado.

Resumo

Em 1968, J. Milnor introduziu a monodromia local de Picard-Lefschetz de uma hipersuperfície complexa com singularidade isolada. Em seguida, E. Brieskorn perguntou se esta monodromia é sempre finita. Em 1972, Lê Dũng Trâng provou que a resposta é positiva no caso de germes de curvas planas analíticas irreduzíveis. Na época, já eram conhecidos exemplos de curvas planas com dois ramos e monodromia finita. Em 1973, N. A'Campo produziu o primeiro exemplo de germe de curva plana com dois ramos e monodromia infinita. Portanto, a questão mais simples, e ainda em aberto, que se coloca neste contexto, é a determinação da finitude da monodromia para germes de curvas planas com dois ramos. O presente trabalho, consiste em determinar, em várias situações, o polinômio mínimo da monodromia de germes de curvas analíticas planas com dois ramos, cujos gêneros são menores ou iguais a dois, o que permite decidir a sua finitude.

Abstract

In 1968, J. Milnor introduced the Picard-Lefschetz monodromy of a complex hypersurface with an isolated singularity. Subsequently, E. Brieskorn asked if this monodromy is always finite. In 1972, Lê Dũng Tráng proved that the answer is positive in the case of irreducible analytic germs of plane curves. At this time, examples of plane curves with two branches and finite monodromy were known. In 1973, N. A'Campo produced the first example of a germ of plane curve with two branches and infinite monodromy. Therefore, the simplest and still open problem in this context is to determine whether the monodromy of a plane curve with two branches is finite or infinite. The present work consists in determining, in several situations, the minimal polynomial of the monodromy for germs of plane analytic curves with two branches, whose genera are less or equal than two, which allows us to decide its finiteness.

Índice

Introdução	1
Capítulo 1: Preliminares	
1.1 A monodromia local	3
1.2 Polinômios de Alexander e finitude da monodromia	5
1.3 Apresentação do grupo de um link algébrico	8
Capítulo 2: Ramos de gênero 1	
2.1 Ramos com pares de Puiseux distintos	11
2.2 Ramos com pares de Puiseux iguais	31
Capítulo 3: Ramos de gênero 2	
3.1 Ramos com pares de Puiseux distintos	44
3.2 Ramos com pares de Puiseux iguais	85
3.3 Epílogo	99
Apêndice	
A Cálculos para ramos de gênero 1	100
B Cálculos para ramos de gênero 2	110
Referências bibliográficas	136

Introdução

Seja $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com $f(0) = 0$ tal que $C = f^{-1}(0)$ tem uma singularidade isolada em 0. A geometria local de C próximo de 0 é completamente descrita pelo *link algébrico* $L := C \cap S_\epsilon^{2n+1}$ da singularidade, onde S_ϵ^{2n+1} é a esfera de raio ϵ em $\mathbb{R}^{2(n+1)} (\simeq \mathbb{C}^{n+1})$.

Estamos interessados no seguinte problema: *Dado o germe f , como descrito acima, determinar se a sua monodromia algébrica é de ordem finita ou infinita.* O problema torna-se mais fácil quando $n = 1$, uma vez que, nesta situação, a geometria foi completamente descrita nos trabalhos de Brauner [Bra], Kähler [Ka] e Reeve [Re] no início do Século 20. Neste caso, chamamos C de curva plana e o link algébrico L tem r componentes, correspondendo aos ramos de C na origem. Cada componente de L é um nó tórico iterado, e tanto as iterações em cada componente do link, quanto os entrelaçamentos entre as várias componentes, são completamente especificados pelo desenvolvimento de Puiseux de cada ramo.

No caso em que $n = 1$ e o germe f é analiticamente irredutível, ou seja, $r = 1$, a sua monodromia é sempre finita (cf. [Lê1], [A'c1] ou [SW1]). Se $r = 2$, existem exemplos nos quais a monodromia é finita ou infinita (cf. [A'c1] e [Wo]). *Este trabalho se propõe de estudar, para $n = 1$ e $r = 2$, em várias situações, o problema da finitude da monodromia, com enfoque no cálculo do segundo polinômio de Alexander associado ao link algébrico da singularidade.*

Apresentamos a seguir uma descrição sucinta dos capítulos que compõem este trabalho.

No primeiro capítulo, encontram-se as ferramentas gerais para o desenvolvimento do trabalho. Fazemos também um apanhado de alguns resultados que se encontram na literatura, para contextualizar o nosso problema.

No segundo capítulo, determinamos o segundo polinômio de Alexander, no caso de curvas com dois ramos de gênero 1, isto é, cada ramo têm um único par de Puiseux, para com isso decidir sobre a finitude da monodromia.

Finalmente, no terceiro capítulo, abordamos a mesma questão no caso de ramos de gênero 2, isto é, cada ramo tem dois pares de Puiseux, onde determinamos o segundo polinômio de Alexander, ou damos explicitamente a matriz de Alexander.

Nos apêndices apresentamos os desenvolvimentos algébricos omitidos no decorrer do texto, para tornar a leitura mais amena e manter o foco no problema.

Capítulo 1 - Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir as notações, as definições, e os fatos básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 A monodromia local

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica com um ponto crítico isolado na origem. Denotaremos por B_ϵ a bola fechada de $\mathbb{C}^2$ centrada na origem e de raio $\epsilon > 0$. Consideremos $S_\epsilon = \partial B_\epsilon$, $C_\epsilon = B_\epsilon \cap f^{-1}(0)$ e $L_\epsilon = C_\epsilon \cap S_\epsilon$. Se ϵ é suficientemente pequeno, sabe-se que L_ϵ é uma subvariedade C^∞ de S_ϵ e que o conhecimento da topologia do par (S_ϵ, L_ϵ) é equivalente ao conhecimento da topologia do par (B_ϵ, C_ϵ) (cf. [Mi]). Portanto, para compreender a topologia do par (B_ϵ, C_ϵ) , bastará compreender a topologia de L_ϵ e de $S_\epsilon \setminus L_\epsilon$. A este propósito tem-se o seguinte resultado:

Teorema da Fibrção de Milnor *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica na origem de $\mathbb{C}^2$ com ponto crítico isolado. Então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon : S_\epsilon \setminus L_\epsilon &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

é a projeção de uma fibração C^∞ localmente trivial, com fibra $F_\theta = \varphi_\epsilon^{-1}(e^{2\pi i\theta})$ uma variedade de dimensão real 2 do tipo de homotopia de um bouquet de μ círculos colados em um ponto, onde μ é a codimensão sobre $\mathbb{C}$ do ideal jacobiano $J(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \rangle$ no anel das séries de potências convergentes $\mathbb{C}\{z_1, z_2\}$, sendo chamado de número de Milnor de f .

Este resultado implica que a homologia da fibra de Milnor está concentrada na dimensão 1 e que a mesma é um grupo abeliano livre com μ geradores; isto é,

$H_1(F_\theta) \cong \mathbb{Z}^\mu$. Como para ϵ suficientemente pequeno, nem o mergulho de L_ϵ em S_ϵ , nem a fibração φ_ϵ dependem de ϵ , denotaremos S_ϵ por S , L_ϵ por L e φ_ϵ por φ , quando este for o caso.

Como $\varphi : S \setminus L \rightarrow S^1$ é uma fibração, podemos levantar o arco $e^{2\pi it}$ para $0 \leq t \leq s \leq 1$ e construir assim uma família contínua de homeomorfismos $h_s : F_\theta \rightarrow F_{\theta+2\pi s}$ tal que $h_0 = Id_{F_\theta}$. O homeomorfismo $h = h_1 : F_\theta \rightarrow F_\theta$ é chamado de **monodromia geométrica** de C na origem. A monodromia geométrica h induz no grupo de homologia da fibra F_θ , com coeficiente num grupo G (no nosso caso $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{C}$), o automorfismo

$$T = (h)_* : H_1(F_\theta, G) \longrightarrow H_1(F_\theta, G),$$

chamado de operador de **monodromia algébrica** local, ou de operador de monodromia de Picard-Lefschetz.

A investigação do operador de monodromia algébrica local, quando $G = \mathbb{C}$, teve início com a prova por E. Brieskorn em [Br] do famoso Teorema de Monodromia para hipersuperfícies com singularidades isoladas, que enunciaremos a seguir no caso de curvas.

Teorema de Monodromia *Todos os autovalores de T são raízes da unidade, os blocos de Jordan da forma canônica de T têm no máximo ordem 2, e os blocos de Jordan com autovalor 1 têm ordem 1.*

No mesmo trabalho, Brieskorn fez a seguinte pergunta: *A monodromia algébrica local T , para uma hipersuperfície com singularidade isolada, tem sempre ordem finita?*

A pergunta de Brieskorn equivale a saber se existe um número natural d tal que $T^d = Id$. Portanto, em vista do Teorema de Monodromia, a finitude da monodromia algébrica local é equivalente ao fato do operador T ser diagonalizável, ou ainda, equivalente ao fato do polinômio mínimo de T não ter raízes múltiplas. Logo, uma maneira de decidir tal questão, é determinar o polinômio mínimo de T .

Lê Dũng Tráng em [Lê1], deu uma resposta afirmativa à questão no caso de curvas planas analiticamente irreduzíveis, calculando o polinômio mínimo de T , e mostrando que todas as suas raízes são simples.

A'Campo em [A'c1], exibiu o primeiro exemplo de uma curva plana com dois ramos, cuja monodromia é infinita. Portanto, a questão mais simples que se coloca é a determinação da finitude da monodromia para curvas planas com dois ramos.

Esta é a questão à qual é dedicado o presente trabalho. Mais precisamente, determinaremos em algumas situações, o polinômio mínimo da monodromia para germes de curvas analíticas planas com dois ramos. É possível tratar, com essas mesmas técnicas, o caso de curvas com um número maior de ramos. Mas não o faremos, dado a complexidade dos cálculos envolvidos.

1.2 Polinômios de Alexander e finitude da monodromia.

Sabe-se que, no caso de uma curva plana C , o polinômio característico da monodromia é o primeiro polinômio de Alexander $\Delta_1(t)$ de C , e que o polinômio mínimo $\lambda(t)$, é o quociente do primeiro polinômio de Alexander $\Delta_1(t)$ pelo segundo polinômio de Alexander $\Delta_2(t)$ de C . (cf. [SW2], página 129).

O primeiro polinômio de Alexander de uma curva é calculado na literatura, de vários modos (cf. [Bu2], [FC], [SW2], [CDG1]), inclusive para um número arbitrário de ramos. Entretanto, não há registro do cálculo do polinômio $\Delta_2(t)$ para curvas redutíveis (no caso irredutível, Lê Dũng Tráng mostra que $\Delta_2(t) = 1$).

O nosso trabalho é centrado no cálculo de $\Delta_2(t)$ quando C tem dois ramos, com o objetivo de encontrar o polinômio minimal da monodromia e conseqüentemente decidir sobre a sua finitude. Os resultados conhecidos mais abrangentes nesta direção, se encontram nos artigos [SW2] e [Wo] que exploram apenas propriedades de $\Delta_1(t)$, não sendo por isso completos, mas fornecendo algumas condições necessárias e outras suficientes, para a finitude da monodromia. O resultado mais significativo dos trabalhos acima citados, é baseado na seguinte observação:

Observação *Se T tem ordem finita e δ é uma raiz p^m -ésima da unidade para algum primo p e algum inteiro positivo m , então a multiplicidade de δ como raiz de $\Delta_1(t)$ é no máximo $r - 1$, onde r é o número de ramos da curva.*

A estratégia que adotaremos neste trabalho é semelhante àquela utilizada no artigo [Lê1]. O cálculo do polinômio de Alexander $\Delta_2(t)$ será feito aqui pelo método desenvolvido por R. Fox em [F2] e [F5], por meio de uma matriz cujas entradas são polinômios em $\mathbb{Z}[t]$, chamada de matriz de Alexander, e que descreveremos a seguir.

Seja $\pi_1(X) = \{x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m\}$ uma apresentação com n geradores e m relações com $n > m$, do grupo fundamental de $X = S \setminus L$. Seja F_n o grupo livre gerado por $x_1, \dots, x_n$. Considere $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ o operador de

derivação no anel de grupo $\mathbb{Z}[F_n]$, possuindo as seguintes propriedades:

Se $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}[F_n]$ e $g, g_1, \dots, g_k \in F_n$, então

- (1) $D_j(\xi_1 + \xi_2) = D_j(\xi_1) + D_j(\xi_2).$
- (2) $D_j(g_1 \dots g_k) = D_j g_1 + g_1 D_j g_2 + g_1 g_2 D_j g_3 + \dots + g_1 \dots g_{k-1} D_j g_k.$
- (3) $D_j g^{-1} = -g^{-1} D_j g,$
- (4) $D_j g^n = \frac{g^n - 1}{g - 1} D_j g,$
- (5) $D_j g^{-n} = -g^{-n} \frac{g^n - 1}{g - 1} D_j g.$

A **matriz de Alexander** de $\pi_1(X)$ é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$, onde a aplicação

$$\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(S^1)] \simeq \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

é induzida pela fibração φ de Milnor.

O primeiro polinômio de Alexander $\Delta_1(t)$ de $\pi_1(X)$ é definido como sendo o máximo divisor comum dos determinantes das submatrizes de ordem m da matriz de Alexander, enquanto que o segundo polinômio de Alexander $\Delta_2(t)$ é o máximo divisor comum dos determinantes das submatrizes de ordem $(m - 1)$.

Sendo a classe de conjugação da monodromia de C um invariante topológico (cf. [Mi]), e sendo os pares de Puiseux de cada ramo de C , juntamente com o contato entre os seus respectivos desenvolvimentos de Puiseux, invariantes topológicos completos de C , o nosso problema consistirá em determinar a matriz de Alexander de um link algébrico de dois ramos, dadas as expansões em séries de Puiseux. Com isso, poderemos responder se o operador de monodromia associada a este link, tem ordem finita ou infinita.

A medida que o número de pares de Puiseux associados aos ramos aumenta, a quantidade de menores envolvidos nos cálculos aumenta, tornando mais difícil descrever explicitamente o polinômio mínimo da monodromia.

O polinômio $\Delta_1(t)$ para um link algébrico com duas componentes (ou mais), foi calculado por Burau na década de 30 em [Bu2] usando outras técnicas de topologia algébrica. A seguir, damos explicitamente a expressão de $\Delta_1(t)$ como se encontra em [SW2]. Seja C uma curva com dois ramos de equação $f = f_1 f_2$ e considere o desenvolvimento de Puiseux de cada ramo, que podemos supor finitos:

$$(\star) \quad y_1 = \sum_{i=1}^{s_1} a_{1\varepsilon_i} x^{\varepsilon_i} \quad \text{e} \quad y_2 = \sum_{j=1}^{s_2} a_{2\delta_j} x^{\delta_j}$$

onde para $i = 1, \dots, s_1$ e $j = 1, \dots, s_2$, temos que

$$\varepsilon_i = \frac{m_{1i}}{n_{11} \dots n_{1i}} \quad \text{e} \quad \delta_j = \frac{m_{2j}}{n_{21} \dots n_{2j}}$$

As informações topológicas de C podem ser extraídas das representações paramétricas acima. A determinação dos pares de Puiseux de cada ramo é padrão, e o seu número é chamado de **gênero** do ramo. O contato entre os dois ramos se mede pelo grau i de coincidência dos dois desenvolvimentos:

$$i = \max \{ j; a_{1,\varepsilon_k} = a_{2,\delta_k} \text{ e } \frac{m_{1,k}}{n_{1,k}} = \frac{m_{2,k}}{n_{2,k}} \text{ para todo } k \leq j \}.$$

Sem perda de generalidade, assumiremos que $\frac{m_{1,i+1}}{n_{1,i+1}} \geq \frac{m_{2,i+1}}{n_{2,i+1}}$.

Polinômio Característico da Monodromia ([SW2], Th. 7.6) *O polinômio característico da monodromia para um link algébrico com dois ramos é*

$$\Delta_1(t) = (t-1) \prod_{j=1}^i \left(\frac{t^{w_{1,j} \cdot e_{0,j}} - 1}{t^{w_{1,j} \cdot e_{0,j+1}} - 1} \frac{t^{e_{0,j+1}} - 1}{t^{e_{0,j}} - 1} \right) \left\{ \frac{t^{w_{2,i+1} \cdot e_{0,i+1}} - 1}{t^{e_{0,i+1}} - 1} \prod_{k=1}^2 \prod_{j=i+k}^{s_k} \frac{t^{n_{k,j} \cdot e_{k,j}} - 1}{t^{e_{k,j}} - 1} \right\}$$

onde w_i é definido recursivamente para cada $1 \leq j \leq s_k$ como segue

$$\begin{cases} w_{k1} = m_{k1} \\ w_{kj} = m_{kj} - m_{k,j-1} n_{kj} + w_{k,j-1} n_{k,j-1} n_{kj}, \quad 2 \leq j \leq s_k \end{cases}$$

onde

$$e_{q,j} = \begin{cases} b_{1,j,s_1} + b_{2,j,s_2} & q = 0 \\ w_{2,i+1} \cdot b_{2,i+2,s_2} \cdot b_{1,i+1,j-1} + w_{1,j} \cdot b_{1,j+1,s_1} & q = 1 \\ w_{2,i+1} \cdot b_{1,i+1,s_1} \cdot b_{2,i+2,j-1} + w_{2,j} \cdot b_{2,j+1,s_2} & q = 2 \end{cases}$$

com

$$b_{k,l,m} = \prod_{j=l}^m n_{k,j} \quad \text{e} \quad b_{k,l,m} = 1 \quad \text{se } l > m.$$

Para calcular o polinômio minimal $\lambda(t)$ da monodromia, só nos resta calcular $\Delta_2(t)$, o que faremos usando a matriz de Alexander, para cuja determinação se faz necessário uma apresentação do grupo $\pi_1(X)$ que exibiremos a seguir.

1.3 Apresentação do grupo de um link algébrico

A apresentação que descreveremos abaixo é devida a O. Neto e P. C. Silva em [NS]. Seja C como na seção anterior com parametrizações de seus ramos dadas por $(\star)$. Seja $S = \{(1, 0), (d, \varepsilon); d \in \{1, 2\} \text{ e } a_{1,\varepsilon} \neq 0 \text{ ou } a_{2,\varepsilon} \neq 0\} \cup \{(d', \varepsilon); d, d' \in \{1, 2\} \text{ } d' \neq d \text{ e } a_{1,\gamma} = a_{2,\gamma} \text{ para } 0 \leq \gamma < \varepsilon\}$. Associamos a C uma árvore Ξ , cujos vértices são classes de equivalência $[d, \varepsilon]$ em S , segundo a seguinte relação de equivalência:

$$(1, \varepsilon) \sim (2, \varepsilon) \Leftrightarrow a_{1,\gamma} = a_{2,\gamma} \text{ para } 0 \leq \gamma \leq \varepsilon$$

A classe $\phi = [1, 0]$ é chamada de raiz de Ξ . Diremos que $w = [d, \delta]$ é um **filho** de $z = [d, \varepsilon]$, escrevendo $w > z$, se $\delta > \varepsilon$ e é minimal com esta propriedade. Diremos que $[d, \varepsilon]$ é uma haste se $a_{d,\varepsilon} = 0$. Chamaremos de terminais os vértices que não possuem filhos. A árvore é formada ligando cada vértice aos seus filhos.

Seja $z = [d, \eta]$ um vértice não terminal de Ξ , onde $\eta = \frac{m_{dk}}{n_{d1} \dots n_{dk}}$. Ao vértice z são associados dois números inteiros positivos ν_z e μ_z definidos como segue:

Como z não é terminal, existe um filho $w' = [d', \rho]$ de z que não é haste. Logo, $\rho = \frac{m_{d'k+1}}{n_{d'1} \dots n_{d'k+1}}$. Pomos $\nu_z = n_{d'k+1}$ e $\mu_z = l_{d'k+1}$ onde $l_{d'1} = m_{d'1}$ e $l_{d'j} = m_{d'j} - m_{d'j-1}n_{d'j} + m_{d'j-1}n_{d'j-1}n_{d'j}$ para $j \geq 2$. Os inteiros ν_z e μ_z sendo coprimos, existem inteiros r_z e s_z tais que $r_z \mu_z = s_z \nu_z + 1$.

Grupo do Link: ([NS], Th. 1.2) *O grupo fundamental $\pi_1(X)$, é apresentado pelos geradores α_z, β_z com z percorrendo os vértices da árvore Ξ e pelas relações $\beta_\phi = 1$, $[\alpha_z, \beta_z] = 1$ para todo z , além das relações abaixo, separadas em 4 tipos:*

- (R1) $\alpha_w^{\nu_z \mu_z} \beta_w = \alpha_z^{\mu_z} \beta_z^{\nu_z}$ se $w > z$ e w não é uma haste
- (R2) $\alpha_w^{\mu_z} \beta_w^{\nu_z} = \alpha_z^{\mu_z} \beta_z^{\nu_z}$ se $w > z$ e w é uma haste
- (R3) $(\gamma_z \alpha_z^{s_z} \beta_z^{r_z})^{\nu_z} = (\alpha_z^{\mu_z} \beta_z^{\nu_z})^{r_z}$ se z é não terminal sem filho haste
- (R4) $\gamma_z \alpha_z^{s_z} \beta_z^{r_z} = \alpha_{z_0}^{s_z} \beta_{z_0}^{r_z}$ se z é não terminal com filho haste z_0

onde γ_z é o produto dos $\alpha_{z'}$, com z' um filho não haste de z .

Exemplo 1: Seja f uma curva plana com dois ramos cujos desenvolvimentos de Puiseux, são respectivamente:

$$\begin{cases} y_1 = x^{3/2} + x^{7/4} \\ y_2 = x^{3/2} + x^{5/2} \end{cases}$$

Representaremos os vértices de Ξ que correspondem às hastes pelos círculos brancos e os restantes pelos círculos negros, conforme a Figura 1.

Figura 1:

Temos que $\{\phi, 1, 10\}$ são os vértices não terminais da árvore, onde:

$$\begin{cases} \varepsilon_\phi = 0, & \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 3/2, & \varepsilon_{11} = \varepsilon_{10} = 7/4, & \varepsilon_{101} = 5/2, \\ (\mu_\phi, \nu_\phi) = (3, 2), & (\mu_1, \nu_1) = (13, 2), & (\mu_{1,0}, \nu_{1,0}) = (8, 1) \\ (r_\phi, s_\phi) = (1, 1), & (r_1, s_1) = (1, 6), & (r_{10}, s_{10}) = (1, 7) \end{cases}$$

Logo, o grupo do link $\pi_1(X)$ é apresentado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 11, 10, 101\}$, verificando as seguintes relações $\beta_\phi = 1$ e $[\alpha_z, \beta_z] = 1$ para todo z e as relações associadas a cada vértice não terminal da árvore Ξ acima

$$\begin{cases} \phi : & \alpha_\phi^3 \beta_\phi^2 = \alpha_1^6 \beta_1 & (\alpha_1 \alpha_\phi \beta_\phi)^2 = (\alpha_\phi^3 \beta_\phi^2)^1 \\ 1 : & \alpha_1^{13} \beta_1^2 = \alpha_{11}^{26} \beta_{11} = \alpha_{10}^{13} \beta_{10}^2 & \alpha_{11} \alpha_1^6 \beta_1 = \alpha_{10}^6 \beta_{10} \\ 10 : & \alpha_{10}^8 \beta_{10} = \alpha_{101}^8 \beta_{101} & \alpha_{101} \alpha_{10}^7 \beta_{10} = \alpha_{10}^8 \beta_{10} \end{cases}$$

Capítulo 2 - Ramos de gênero 1

Nos próximos dois capítulos, descreveremos explicitamente a matriz de Alexander em função dos desenvolvimentos de séries de Puiseux dos dois ramos da curva C , para com ela calcular efetivamente o segundo polinômio de Alexander, e com isto, encontrar o polinômio mínimo da monodromia.

Convém ressaltar, que o método desenvolvido pelo R. Fox, para o cálculo dos polinômios de Alexander, conforme descrito na Seção 1.2, necessita de uma apresentação do grupo do link com mais geradores do que relações. Como utilizamos neste trabalho a apresentação do grupo do link dada por O. Neto e P. C. Silva, e em tal apresentação nem sempre temos mais geradores do que relações, seremos conduzidos a impor condições sobre os pares de Puiseux dados, para estarmos na situação desejada.

Além disso, a apresentação do grupo do link de O. Neto e P. C. Silva é descrita por árvores cujos tipos variam dentro de um conjunto finito de possibilidades que dependem dos dados topológicos da curva. Isso naturalmente nos conduz ao desdobramento da análise em vários casos, correspondendo aos tipos de árvores que ocorrem.

Neste capítulo, estudaremos especificamente a monodromia de um germe de curva plana com dois ramos, ambos de gênero 1.

O caso de dois ramos se diferencia do caso irredutível pela variedade de árvores que se apresentam. No caso irredutível, qualquer que seja o gênero da curva, há apenas um tipo de árvore, o que facilita o processo indutivo do cálculo da matriz de Alexander, como realizado em [Lê1].

Figura 2: Árvore no caso irredutível de gênero 3

No caso de germes de curvas planas com dois ramos, a quantidade de tipos de árvores cresce muito à medida que o gênero das curvas aumenta, o que torna o

processo indutivo mais complexo. Na situação em foco, temos os seguintes tipos de árvores:

Figura 3: Árvores para ramos de gênero 1 com pares de Puiseux distintos

Figura 4: Árvores para ramos de gênero 1 com pares de Puiseux iguais

2.1 Ramos com pares de Puiseux distintos

Caso 1: Nessa situação, os ramos da nossa curva, podem ser representados pelas seguintes expansões de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} \end{cases}$$

onde (m_{i1}, n_{i1}) é o único par de Puiseux do ramo f_i para $i = 1, 2$. Isto conduz especificamente à seguinte árvore, dada na Figura 5.

Figura 5:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_{21}, & \nu_\phi = n_{21} & \text{e} & m_{21}r_\phi = n_{21}s_\phi + 1 \\ \mu_0 = m_{11}, & \nu_0 = n_{11} & \text{e} & m_{11}r_0 = n_{11}s_0 + 1 \end{cases}$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$ é gerado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 0, 01, 1\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir¹.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R2) \quad 0 > \phi \text{ e } 0 \text{ é uma haste} & \Rightarrow \alpha_0^{\mu_\phi} \beta_0^{\nu_\phi} = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R4) \quad \phi \text{ é não terminal com haste } 0 & \Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi} = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\ & \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (0) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 01 > 0 \text{ e } 01 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_{01}^{\nu_0 \mu_0} \beta_{01} = \alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0} \\ & \Rightarrow \beta_{01} = \alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \end{aligned}$$

¹Os desenvolvimentos algébricos omitidos encontram-se no apêndice A, segundo as referências especificadas.

$$\begin{aligned}
(R3) \quad 0 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{\nu_0} = (\alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0})^{r_0} \\
&\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_0, \beta_0] = 1 \Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1 \quad \text{veja (A.1)}$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1$$

$$[\alpha_{01}, \beta_{01}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1 \quad \text{veja (A.2)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_0, \beta_0, \alpha_\phi, \alpha_{01}$, sujeitos às relações:

$$(1) \quad [\alpha_0, \beta_0] = 1$$

$$(2) \quad \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(3) \quad (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}$$

$$(4) \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1$$

Como temos interesse em grupos $\pi_1(X)$ que têm uma apresentação na qual existem mais geradores do que relações (veja Seção 1.2), fazemos a hipótese restritiva $m_{11} = \lambda n_{11} + 1$, para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$, o que implica que $r_0 = 1$. Adotaremos como novos geradores:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0, \\ x_2 = \beta_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0}, \\ x_4 = \alpha_\phi. \end{cases}$$

Observe que a relação (4) é equivalente à relação $[\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, x_3] = 1$, e que esta é trivializada devido à relação (3). Isto conduz à nova apresentação:

$$\begin{aligned}
\pi_1(X) &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4; r_1, r_2, r_3 \}, \text{ onde} \\
r_1 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\
r_2 &= x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}} \\
r_3 &= x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}}
\end{aligned}$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, 2, 3, 4$. onde Φ é a aplicação induzida

pela fibração de Milnor. Como ainda não sabemos a priori os valores de $\Phi(x_i)$, temporariamente escrevemos:

$$\Phi : \mathbb{Z} [\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 & \mapsto t^a \\ x_2 & \mapsto t^b \\ x_3 & \mapsto t^c \\ x_4 & \mapsto t^d \end{cases}$$

Note que as relações r_i , para $i = 2, 3$, fornecem relações entre a, b, c, d , a saber:

$$(*) \quad \begin{cases} n_{11} c = m_{11} a + n_{11} b \\ m_{21} d = m_{21} a + n_{21} b \end{cases}$$

Para determinar a matriz de Alexander, faremos o seguinte cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$.

Como $r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \right) = 1 - \Phi(x_2) = 1 - t^b.$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = x_1 - x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2} \right) = \Phi(x_1) - 1 = t^a - 1$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_4} \right) = 0$$

Como $r_2 = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \frac{x_1^{m_{11}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1}.$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_2} = x_1^{m_{11}} \frac{x_2^{n_{11}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2} \right) = t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_3} = - \frac{x_3^{n_{11}} - 1}{x_3 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_4} \right) = 0$$

Como $r_3 = x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}}$, temos que

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_1} = \frac{x_1^{m_{21}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_2} = x_1^{m_{21}} \frac{x_2^{n_{21}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} \right) = t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_4} = -\frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_4} \right) = -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4) \},$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Desse modo,

$$\det(A_1) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_2) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^b - 1)$$

$$\det(A_3) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\det(A_4) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1) \} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}.$$

Por outro lado, da Seção 1.2, sabemos que:

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21})} - 1} \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21})} - 1} (t - 1).$$

Igualando entre si essas duas expressões de $\Delta_1(t)$, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1) \},$$

segue que

$$(t^r - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} = (t - 1) \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21})} - 1} \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21})} - 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{n_{11}c} - 1) (t^{m_{21}d} - 1) (t^{(m_{11}+m_{21})} - 1) (t^{(n_{11}+n_{21})} - 1) \\ &= (t - 1) (t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1) (t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1) (t^c - 1) (t^d - 1). \quad (**) \end{aligned}$$

Identificando os termos de menor grau em t , na igualdade acima, vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$ e notando que a possibilidade $d \geq c$ gera um absurdo em vista de $(**)$ e $(*)$, segue que $d < c$. Analisando os termos de menor grau em t na igualdade resultante, temos que

$$d = n_{11} + n_{21}.$$

Em virtude das relações $(*)$, concluimos que

$$c = m_{11} + m_{21}, \quad a = n_{11} \quad \text{e} \quad b = m_{21}.$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \begin{array}{l} \det(A_{12}), \det(A_{13}), \det(A_{14}), \det(A_{23}), \det(A_{24}), \det(A_{34}), \\ \det(B_{12}), \det(B_{13}), \det(B_{14}), \det(B_{23}), \det(B_{24}), \det(B_{34}), \\ \det(C_{12}), \det(C_{13}), \det(C_{14}), \det(C_{23}), \det(C_{24}), \det(C_{34}) \end{array} \right\},$$

onde A, B, C são obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ retirando-se a terceira, segunda ou primeira linhas respectivamente, e A_{ij}, B_{ij} e C_{ij} denotam as matrizes formadas pelas colunas i e j de A, B , e C respectivamente.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A_{12}) = -(t^{n_{11}c} - 1) \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\det(A_{13}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^b - 1)$$

$$\det(A_{14}) = 0$$

$$\det(A_{23}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_{24}) = 0$$

$$\det(A_{34}) = 0$$

Por outro lado,

$$B = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \end{bmatrix}.$$

$$\det (B_{12}) = - (t^{m_{21}d} - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det (B_{13}) = 0$$

$$\det (B_{14}) = \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (B_{23}) = 0$$

$$\det (B_{24}) = - \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (B_{34}) = 0$$

Finalmente, temos que

$$C = \begin{bmatrix} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & - \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \end{bmatrix}.$$

$$\det (C_{12}) = \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \quad \text{veja (A.5)}$$

$$\det (C_{13}) = \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}$$

$$\det (C_{14}) = - \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}$$

$$\det (C_{23}) = \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} t^{m_{21}a}$$

$$\det (C_{24}) = - \frac{t^{n_{11}a} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{m_{11}a} - 1)$$

$$\det (C_{34}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}$$

Concluimos então que, neste caso,

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \right\},$$

$$\text{onde } a = n_{11}, \quad b = m_{21}, \quad c = m_{11} + m_{21} \quad \text{e} \quad d = n_{11} + n_{21}$$

Exemplo 1 Sejam f e g dois germes de curvas planas redutíveis com dois ramos de gênero 1, onde $f = (y^4 - x^{25})(x^4 - y^5)$ e $g = (y^4 - x^{25})(x^5 - y^4)$.

Para a curva f , temos que

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{25}{4}} = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{4}{5}} = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} \end{cases}$$

Denotando por ϕ_i o i -ésimo polinômio ciclotômico, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21})} - 1} \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21})} - 1} (t - 1) \\ &= \frac{t^{4(4+5)} - 1}{t^{(4+5)} - 1} \frac{t^{4(25+4)} - 1}{t^{(25+4)} - 1} (t - 1) \\ &= \frac{t^{36} - 1}{t^9 - 1} \frac{t^{116} - 1}{t^{29} - 1} (t - 1) \\ &= \phi_{36} \phi_{18} \phi_{12} \phi_6 \phi_{116} \phi_{58} \phi_{29} \phi_4^2 \phi_2^2 \phi_1. \end{aligned}$$

Logo, a monodromia de f é infinita devido à observação feita na Seção 1.2. Isto também pode ser verificado com o cálculo do polinômio minimal da monodromia que faremos a seguir. Como neste caso, $a = 4$, $b = 4$, $c = 29$, $d = 9$, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_2(t) &= \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \right\} \\ &= \text{mdc} \left\{ \frac{t^{116} - 1}{t^{29} - 1}, \frac{t^{36} - 1}{t^9 - 1}, \frac{t^{36} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{100} - 1}{t^4 - 1} - \frac{t^{116} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{16} - 1}{t^4 - 1} \right\} \\ &= \text{mdc} \left\{ \phi_{116} \phi_{58} \phi_4 \phi_2, \phi_{36} \phi_{18} \phi_{12} \phi_6 \phi_4 \phi_2, \frac{t^{36} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{100} - 1}{t^4 - 1} - \frac{t^{116} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{16} - 1}{t^4 - 1} \right\} \\ &= \text{mdc} \left\{ \phi_4 \phi_2, \frac{t^{36} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{100} - 1}{t^4 - 1} - \frac{t^{116} - 1}{t^4 - 1} \frac{t^{16} - 1}{t^4 - 1} \right\} = 1 \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\lambda(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} = \frac{\phi_{116} \phi_{58} \phi_{36} \phi_{29} \phi_{18} \phi_{12} \phi_6 \phi_4^2 \phi_2^2 \phi_1}{1}$$

o que nos permite concluir que a monodromia é infinita nesta situação.

Para a curva g , temos que

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{25}{4}} = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{5}{4}} = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(t) &= \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21})} - 1} \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21})} - 1} (t - 1) \\
&= \frac{t^{5(4+4)} - 1}{t^{(4+4)} - 1} \frac{t^{4(25+5)} - 1}{t^{(25+5)} - 1} (t - 1) \\
&= \frac{t^{40} - 1}{t^8 - 1} \frac{t^{120} - 1}{t^{30} - 1} (t - 1) \\
&= \phi_{40}^2 \phi_{20}^2 \phi_{10} \phi_5 \phi_{120} \phi_{60} \phi_{12} \phi_8 \phi_4 \phi_1.
\end{aligned}$$

Como, neste caso, $a = 4$, $b = 5$, $c = 30$, e $d = 8$, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta_2(t) &= \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \right\} \\
&= \text{mdc} \left\{ \frac{t^{120} - 1}{t^{30} - 1}, \frac{t^{40} - 1}{t^8 - 1}, \frac{t^{40} - 1}{t^5 - 1} \frac{t^{100} - 1}{t^4 - 1} - \frac{t^{120} - 1}{t^5 - 1} \frac{t^{20} - 1}{t^4 - 1} \right\} \\
&= \text{mdc} \left\{ \phi_{40} \phi_{20}, \frac{t^{40} - 1}{t^5 - 1} \frac{t^{100} - 1}{t^4 - 1} - \frac{t^{120} - 1}{t^5 - 1} \frac{t^{20} - 1}{t^4 - 1} \right\} = \phi_{40} \phi_{20}
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\lambda(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} = \frac{\phi_{40}^2 \phi_{20}^2 \phi_{10} \phi_5 \phi_{120} \phi_{60} \phi_{12} \phi_8 \phi_4 \phi_1}{\phi_{40} \phi_{20}},$$

o que nos permite concluir, nesta situação, que a monodromia é finita.

Caso 2: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2$ onde temos as seguinte representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{22}}} \end{cases}$$

onde (m_{11}, n_{11}) é o par de Puiseux do ramo f_1 e (m_{22}, n_{22}) é o par de Puiseux do ramo f_2 . Isto conduz à seguinte árvore, dada na Figura 6.

Figura 6:

Com as notações da Seção 1.3:

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_{21}, & \nu_\phi = n_{21} = 1 & \text{e} & m_{21}r_\phi = n_{21}s_\phi + 1 \\ \mu_0 = m_{11}, & \nu_0 = n_{11}, & \text{e} & m_{11}r_0 = n_{11}s_0 + 1 \\ \mu_1 = m_{22}, & \nu_1 = n_{22} & \text{e} & m_{22}r_1 = n_{22}s_1 + 1 \end{cases}$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 0, 01, 1, 11\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}} \\ (R2) \quad 0 > \phi \text{ e } 0 \text{ é uma haste} & \Rightarrow \alpha_0^{\mu_\phi} \beta_0^{\nu_\phi} = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_0^1 = \alpha_0^{-m_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}} \\ (R4) \quad \phi \text{ é não terminal com haste } 0 & \Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi} = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\ & \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (0) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 01 > 0 \text{ e } 01 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_{01}^{\nu_0 \mu_0} \beta_{01} = \alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0} \\ & \Rightarrow \beta_{01} = \alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \\ (R3) \quad 0 \text{ é não terminal sem haste} & \Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{\nu_0} = (\alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0})^{r_0} \\ & \Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0} \end{aligned}$$

Relações de (1):

$$(R1) \quad 11 > 1 \text{ e } 1 \text{ não é haste} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{11}^{\nu_1 \mu_1} \beta_{11} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1}$$

$$\Rightarrow \beta_{11} = \alpha_{11}^{-m_{22} n_{22}} \alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}$$

$$(R3) \quad 1 \text{ é não terminal sem haste} \Rightarrow (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1}$$

$$\Rightarrow (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_0, \beta_0] = 1 \Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1 \quad \text{veja (A.6)}$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1$$

$$[\alpha_{01}, \beta_{01}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1 \quad \text{veja (A.7)}$$

$$[\alpha_{11}, \beta_{11}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_{11}] = 1 \quad \text{veja (A.8)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_{01}, \alpha_{11}$, sujeitos às relações:

$$(1) \quad \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(2) \quad \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}$$

$$(3) \quad [\alpha_0, \beta_0] = 1$$

$$(4) \quad \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(5) \quad (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}$$

$$(6) \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1$$

$$(7) \quad (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}$$

$$(8) \quad [\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_{11}] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições sobre os pares de Puiseux dos dois ramos:

$$\begin{cases} m_{11} = \lambda_1 n_{11} + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ m_{22} = \lambda_2 n_{22} + 1 & \text{para algum } \lambda_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

o que implica que $r_0 = r_1 = 1$. Adotaremos como novos geradores

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0, \\ x_2 = \beta_0, \\ x_3 = \alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0}, \\ x_4 = \alpha_\phi, \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = \alpha_1, \\ x_6 = \beta_1, \\ x_7 = \alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1}. \end{cases}$$

Observe que a relação (6) é equivalente à relação $[\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, x_3] = 1$ e que esta é trivializada devido a (5). Observe também que a relação (8) é equivalente à relação $[\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}, x_7] = 1$, e que esta é trivializada devido a (7). Ficamos assim com as seguintes relações:

$$(1) \quad x_6 = x_5^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}$$

$$(2) \quad x_5 = x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}$$

$$(3) \quad [x_1, x_2] = 1$$

$$(4) \quad x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} = x_4^{m_{21}}$$

$$(5) \quad x_3^{n_{11}} = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}}$$

$$(6) \quad x_7^{n_{22}} = x_5^{m_{22}} x_6^{n_{22}}$$

Podemos eliminar os geradores x_5 e x_6 e as relações (1) e (2), adaptando convenientemente a relação (6). Ficamos assim com os 5 geradores $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$ e as 4 relações a seguir:

$$(1) \quad [x_1, x_2] = 1$$

$$(2) \quad x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} = x_4^{m_{21}}$$

$$(3) \quad x_3^{n_{11}} = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}}$$

$$(4) \quad x_7^{n_{22}} = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}}$$

Logo, renomeando x_7 por x_5 , podemos escrever:

$$\begin{aligned}\pi_1(X) &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; r_1, r_2, r_3, r_4 \}, \text{ onde} \\ r_1 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\ r_2 &= x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}} \\ r_3 &= x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ r_4 &= (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} x_5^{-n_{22}}\end{aligned}$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Como ainda não sabemos a priori os valores de $\Phi(x_i)$, temporariamente escrevemos

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] &\longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \\ \begin{cases} x_1 & \longmapsto t^a \\ x_2 & \longmapsto t^b \\ x_3 & \longmapsto t^c \\ x_4 & \longmapsto t^d \\ x_5 & \longmapsto t^e \end{cases}\end{aligned}$$

Note que as relações r_i , para $i = 2, 3, 4$, fornecem relações entre a,b,c,d,e; a saber,

$$(*) \begin{cases} n_{11} c = m_{11} a + n_{11} b \\ m_{21} d = m_{21} a + n_{21} b \\ n_{22} e = (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22} + [(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22} \end{cases}$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$.

Como $r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\right) = 1 - \Phi(x_2) = 1 - t^b.$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = x_1 - x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}\right) = \Phi(x_1) - 1 = t^a - 1$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_1}{\partial x_4}\right) = 0$$

Como $r_2 = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \frac{x_1^{m_{11}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1}\right) = \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_2}{\partial x_2} &= x_1^{m_{11}} \frac{x_2^{n_{11}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2} \right) = t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \\
\frac{\partial r_2}{\partial x_3} &= - \frac{x_3^{n_{11}} - 1}{x_3 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\
\frac{\partial r_2}{\partial x_4} &= 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_4} \right) = 0
\end{aligned}$$

Como $r_3 = x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_3}{\partial x_1} &= \frac{x_1^{m_{21}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_2} &= x_1^{m_{21}} \frac{x_2^{n_{21}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} \right) = t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_3} &= 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_3} \right) = 0 \\
\frac{\partial r_3}{\partial x_4} &= - \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_4} \right) = - \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}
\end{aligned}$$

Como $r_4 = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} x_5^{-n_{22}}$, temos que

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_1} = \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \quad \text{veja (A.9)}$$

$$\begin{aligned}
&- (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
&\frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) &= \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
&- t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
&\frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{21}n_{21}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_2} = x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \quad \text{veja (A.10)}$$

$$\begin{aligned}
&- (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
&x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) &= t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
&\quad - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
&\quad t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{21}n_{21}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
\frac{\partial r_4}{\partial x_3} = 0 &\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_3} \right) = 0 \\
\frac{\partial r_4}{\partial x_4} &= - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \quad \text{veja (A.11)} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
&\quad \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(m_{21}n_{21}-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) &= - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
&\quad + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
&\quad \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}-1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{21}n_{21}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
&\quad + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\
\frac{\partial r_4}{\partial x_5} &= - \frac{x_5^{n_{22}} - 1}{x_5 - 1} \quad \text{veja (A.12)} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_5} \right) &= - \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1}
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) & 0 & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \det(A_5) \}$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_2) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1)$$

$$\det(A_3) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\det(A_4) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det(A_5) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1) \quad \text{veja (A.13)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1) \}.$$

Por outro lado, como a curva é dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{1}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{22}}}, \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $n_{21} = 1$, que

$$\Delta_1(t) = (t - 1) \frac{t^{w_{21}e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{11}e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{n_{22}e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1}.$$

onde

$$\begin{cases} w_{21} = m_{21} \\ w_{22} = m_{22} - m_{21}n_{22} + m_{21}n_{21}n_{22} = m_{22} \\ e_{01} = b_{1,1,1} + b_{2,1,2} = (\prod_{j=1}^1 n_{1,j}) + (\prod_{j=1}^2 n_{2,j}) = n_{11} + n_{21}n_{22} \\ e_{11} = w_{2,1}.b_{2,2,2}.b_{1,1,0} + w_{1,1}.b_{1,2,1} = m_{21}.n_{22}.1 + m_{11}.1 = m_{11} + m_{21}n_{22} \\ e_{22} = w_{2,1}.b_{1,1,1}.b_{2,2,1} + w_{22}.b_{2,3,2} = m_{21}.n_{11}.1 + w_{22}.1 = m_{22} + m_{21}n_{11} \end{cases}$$

Igualando entre si essas duas expressões de $\Delta_1(t)$, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1) \},$$

temos que

$$(t^r - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} = (t - 1) \frac{t^{n_{11}.e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{m_{21}e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{22}.e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{n_{11}c} - 1) (t^{m_{21}d} - 1) (t^{n_{22}e} - 1) (t^{e_{11}} - 1) (t^{e_{01}} - 1) (t^{e_{22}} - 1) \\ &= (t - 1) (t^{n_{11}e_{11}} - 1) (t^{m_{21}e_{01}} - 1) (t^{n_{22}e_{22}} - 1) (t^c - 1) (t^d - 1) (t^e - 1). \quad (**) \end{aligned}$$

Identificando os termos de menor grau em t na igualdade acima, vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$ e notando que a possibilidade $d \geq c$ e $d > e$ gera um absurdo, em vista de $(**)$ e $(*)$, temos que $d < c$ e $d < e$. Analisando os termos de menor grau em t , na igualdade resultante, temos que,

$$\begin{cases} d = e_{01} = n_{11} + n_{21} n_{22} \\ c = e_{11} = m_{11} + m_{21} n_{22} \\ e = e_{22} = m_{22} + m_{21} n_{11} \end{cases}$$

Em vista das relações $(*)$, concluímos que:

$$a = n_{11} \quad \text{e} \quad b = m_{21} n_{22}$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \begin{array}{l} \det(A_{123}), \det(A_{124}), \det(A_{125}), \det(A_{134}), \det(A_{135}), \\ \det(A_{145}), \det(A_{234}), \det(A_{235}), \det(A_{245}), \det(A_{345}), \\ \det(B_{123}), \det(B_{124}), \det(B_{125}), \det(B_{134}), \det(B_{135}), \\ \det(B_{145}), \det(B_{234}), \det(B_{235}), \det(B_{245}), \det(B_{345}), \\ \det(C_{123}), \det(C_{124}), \det(C_{125}), \det(C_{134}), \det(C_{135}), \\ \det(C_{145}), \det(C_{234}), \det(C_{235}), \det(C_{245}), \det(C_{345}), \\ \det(D_{123}), \det(D_{124}), \det(D_{125}), \det(D_{134}), \det(D_{135}), \\ \det(D_{145}), \det(D_{234}), \det(D_{235}), \det(D_{245}), \det(D_{345}) \end{array} \right\}$$

onde A, B, C, D são obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ retirando-se a quarta, segunda, terceira e primeira linhas respectivamente, e $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$ e D_{ijk} denotam as matrizes formadas pelas colunas i, j, k de A, B, C e D respectivamente.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A_{123}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det(A_{124}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\begin{aligned}
\det (A_{125}) &= 0 \\
\det (A_{134}) &= -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} (t^b-1) \\
\det (A_{135}) &= 0 \\
\det (A_{145}) &= 0 \\
\det (A_{234}) &= -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} (t^a-1) \\
\det (A_{235}) &= 0 \\
\det (A_{245}) &= 0 \\
\det (A_{345}) &= 0
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que,

$$B = \begin{bmatrix} -(t^b-1) & (t^a-1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(t^{m_{21}a}-1)}{(t^a-1)} & t^{m_{21}a} \frac{(t^{n_{21}b}-1)}{(t^b-1)} & 0 & -\frac{(t^{m_{21}d}-1)}{(t^d-1)} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det (B_{123}) &= 0 \\
\det (B_{124}) &= -\frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} (t^{n_{22}e}-1) && \text{veja (A.4)} \\
\det (B_{125}) &= \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} (t^{m_{21}d}-1) && \text{veja (A.4)} \\
\det (B_{134}) &= 0 \\
\det (B_{135}) &= 0 \\
\det (B_{145}) &= -\frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} (t^b-1) \\
\det (B_{234}) &= 0 \\
\det (B_{235}) &= 0 \\
\det (B_{245}) &= \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} (t^a-1) \\
\det (B_{345}) &= 0
\end{aligned}$$

Também, temos que,

$$C = \begin{bmatrix} -(t^b-1) & (t^a-1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} & -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\det (C_{123}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[(t^a - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) + (t^b - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) \right] \\
\det (C_{124}) &= - \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) (t^{n_{11}c} - 1) \quad \text{veja (A.3)} \\
\det (C_{125}) &= \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^{n_{11}c} - 1) \quad \text{veja (A.3)} \\
\det (C_{134}) &= \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) (t^b - 1) \\
\det (C_{135}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1) \\
\det (C_{145}) &= 0 \\
\det (C_{234}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) (t^a - 1) \\
\det (C_{235}) &= \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1) \\
\det (C_{245}) &= 0 \\
\det (C_{345}) &= 0
\end{aligned}$$

Finalmente, temos que,

$$\begin{aligned}
D &= \begin{bmatrix} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & - \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) & 0 & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & - \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \end{bmatrix}. \\
\det (D_{123}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[\frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) + t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) \right] \\
\det (D_{124}) &= \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[\frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) - t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad + \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) \left[\frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} - \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \right] \\
\det (D_{125}) &= - \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \left[\frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} - \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \right] \\
\det (D_{134}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[\frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) + \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) \right] \\
\det (D_{135}) &= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \\
\det (D_{145}) &= \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1}
\end{aligned}$$

$$\det (D_{234}) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) + \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) \right]$$

$$\det (D_{235}) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} t^{m_{21}a}$$

$$\det (D_{245}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} t^{m_{21}a}$$

$$\det (D_{345}) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1}$$

Concluimos então que,

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ 25 \text{ determinantes não nulos acima} \}$$

Exemplo 2 Seja $f = f_1 f_2$ na qual

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{16}{3}} = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} \\ y_2 = x^{\frac{2}{1}} + x^{\frac{16}{5}} = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{21}n_{22}}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 0$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $n_{21} = 1$ que

$$\begin{cases} w_{21} = m_{21} = 2 \\ w_{22} = m_{22} = 16 \\ e_{01} = n_{11} + n_{21} n_{22} = 3 + 5 = 8 \\ e_{11} = m_{11} + m_{21} n_{22} = 16 + 10 = 26 \\ e_{22} = m_{22} + m_{21} n_{11} = 16 + 6 = 22 \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \frac{t^{w_{21}e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{11}e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{n_{22}e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1} (t - 1) \\ &= \frac{t^{16} - 1}{t^8 - 1} \frac{t^{78} - 1}{t^{26} - 1} \frac{t^{110} - 1}{t^{22} - 1} (t - 1) \\ &= \phi_{16} \phi_{78} \phi_{39} \phi_6 \phi_3 \phi_{110} \phi_{55} \phi_{10} \phi_5 \phi_1. \end{aligned}$$

Portanto, a monodromia é finita.

2.2 Ramos com pares de Puiseux iguais

Caso 1: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2 = (x^m - y^n)(x^n - y^m)$, com as seguintes representações por séries de Puiseux

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} = x^{\frac{m}{n}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} = x^{\frac{n}{m}} \end{cases}$$

onde (m_{i1}, n_{i1}) é o par de Puiseux do ramo f_i para $i = 1, 2$. Vemos que este caso, é um caso particular, da apresentação que fizemos para ramos com pares de Puiseux distintos. Neste caso,

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21})} - 1} \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21})} - 1} (t - 1) \\ &= \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t^{n(m+n)} - 1}{t^{(m+n)} - 1} (t - 1) \\ &= \left[\frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \right]^2 (t - 1) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}, \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \right\}$$

onde

$$\begin{cases} a = n_{11} = n & c = m_{11} + m_{21} = n + m \\ b = m_{21} = n & d = n_{11} + n_{21} = n + m \end{cases}$$

Substituindo os valores acima na expressão de $\Delta_2(t)$, obtemos

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1}, \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1}, \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^n - 1} \frac{t^{mn} - 1}{t^n - 1} - \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^n - 1} \frac{t^{nn} - 1}{t^n - 1} \right\}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} &= \left[\frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t - 1}{t^n - 1} \right] \frac{t^n - 1}{t - 1} \\ \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t^{mn} - 1}{t^n - 1} &= \left[\frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t - 1}{t^n - 1} \right] \frac{t^{mn} - 1}{t^n - 1} (t^{m+n} - 1) \\ \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^n - 1} \frac{t^{nn} - 1}{t^n - 1} &= \left[\frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t - 1}{t^n - 1} \right] \frac{t^{nn} - 1}{t^n - 1} (t^{m+n} - 1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_2(t) = \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} \frac{t - 1}{t^n - 1}$$

Conseqüentemente,

$$\lambda(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)} = \frac{t^{n(n+m)} - 1}{t^{(n+m)} - 1} (t^n - 1) = \phi_n^2(t) q(t),$$

e portanto, temos monodromia infinita neste caso.

Caso 2: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2$ com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} = x^{\frac{m}{n}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{22}}} = x^{\frac{z}{1}} + x^{\frac{m}{n}} \end{cases}$$

onde (m_{11}, n_{11}) é o par de Puiseux do ramo f_1 e (m_{22}, n_{22}) é o par de Puiseux do ramo f_2 . Vemos que este caso, é um caso particular da apresentação que fizemos para ramos com pares de Puiseux distintos. Temos que

$$\Delta_1(t) = (t - 1) \frac{t^{n_{11}(m_{11}+m_{21}n_{22})} - 1}{t^{(m_{11}+m_{21}n_{22})} - 1} \frac{t^{m_{21}(n_{11}+n_{21}n_{22})} - 1}{t^{(n_{11}+n_{21}n_{22})} - 1} \frac{t^{n_{22}(m_{22}+m_{21}n_{11})} - 1}{t^{(m_{22}+m_{21}n_{11})} - 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= (t - 1) \frac{t^{n(m+zn)} - 1}{t^{(m+zn)} - 1} \frac{t^{z(n+n)} - 1}{t^{(n+n)} - 1} \frac{t^{n(m+zn)} - 1}{t^{(m+zn)} - 1}, \\ &= (t - 1) \left[\frac{t^{n(m+zn)} - 1}{t^{(m+zn)} - 1} \right]^2 \frac{t^{2nz} - 1}{t^{2n} - 1}, \\ &= \phi_p^2(t) \cdot q(t) \quad \text{com } p \text{ primo divisor de } n \end{aligned}$$

e portanto, temos monodromia infinita neste caso.

Caso 3: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2 = (x^{m_1} - y^{n_1}) (2x^{m_1} - y^{n_1})$ cujas representações por séries de Puiseux são dadas por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} = x^{\frac{m_1}{n_1}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} = 2 x^{\frac{m_1}{n_1}} \end{cases}$$

onde (m_{i1}, n_{i1}) é o par de Puiseux do ramo f_i para $i = 1, 2$. Isto conduz à seguinte árvore, dada na Figura 7.

Figura 7:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_\phi = m_1, \quad \nu_\phi = n_1 \quad \text{e} \quad m_1 r_\phi = n_1 s_\phi + 1 \end{array} \right.$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 2\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$(R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}$$

$$(R1) \quad 2 > \phi \text{ e } 2 \text{ não é haste} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_2 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_2 = \alpha_2^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}$$

$$(R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi}$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (A.15)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores α_ϕ, α_1 e α_2 , sujeitos às relações:

$$\begin{cases} (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi} \\ [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \\ [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_2] = 1 \end{cases}$$

Como temos 3 geradores α_ϕ, α_1 e α_2 , sujeitos a 3 relações, e como não conseguimos fazer uma mudança de variável que reduza o número de relações, o método mencionado na Seção 1.2 para o cálculo dos polinômios de Alexander, não se aplica à este caso.

Caso 4: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2 = (x^{m_1} - y^{n_1})(x^{m_1} - y^{n_1} + x^k y^j)$, com $n_1 k + m_1 j > m_1 n_1$, cujas representações por séries de Puiseux são da forma:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} \end{cases}$$

onde (m_1, n_1) é o par de Puiseux de ambos os ramos. Isto conduz à seguinte árvore, dada na Figura 8.

Figura 8:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_1, & \nu_\phi = n_1 & \text{e} & m_1 r_\phi = s_\phi n_1 + 1 \\ \mu_1 = m_2 - m_1 + m_1 n_1, & \nu_1 = n_2 = 1 & \text{e} & \mu_1 r_1 = s_1 n_2 + 1 \end{cases}$$

Note que, neste caso, temos que $r_1 = 1$ e $s_1 = \mu_1 - 1$.

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$ é gerado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 10, 11\}$ da árvore Ξ , satisfazendo as relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\
&\Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \\
(R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi} \\
&\Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}
\end{aligned}$$

Relações de (1) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 11 > 0 \text{ e } 11 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_{11}^{\nu_1 \mu_1} \beta_{11} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_{11} = \alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) \\
(R2) \quad 10 > 1 \text{ e } 10 \text{ é uma haste} &\Rightarrow \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} = \alpha_{10}^{\mu_1} \beta_{10}^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_{10}^1 = \alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^1 \\
(R4) \quad 1 \text{ é não terminal com haste } 10 &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \\
&\Rightarrow \alpha_{10} = \alpha_1 \alpha_{11}^{-1} \quad \text{veja (A.16)}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[\alpha_\phi, \beta_\phi] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi \\
[\alpha_1, \beta_1] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)} \\
[\alpha_{11}, \beta_{11}] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}, \alpha_{11}] = 1 \quad \text{veja (A.17)} \\
[\alpha_{10}, \beta_{10}] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}, \alpha_{11}] = 1 \quad \text{veja (A.18)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores α_ϕ, α_1 e α_{11} , sujeitos às relações:

$$(1) \quad (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}$$

$$(2) [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1$$

$$(3) [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}, \alpha_{11}] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer a seguinte restrição:

$$m_1 = \lambda n_1 + 1, \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Isto implica que $r_\phi = 1$. Adotaremos como novos geradores

$$x_1 = \alpha_\phi, \quad x_2 = \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi}, \quad x_3 = \alpha_{11}.$$

Observe que a relação (2) se torna a relação $[x_1^{m_1}, x_2 x_1^{-s_\phi}] = 1$, via mudança de geradores, e sendo esta trivializada, devido à nova relação $x_2^{n_1} = x_1^{m_1}$ decorrente de (1). Assim, temos que $\pi_1(X) = \{x_1, x_2, x_3; r_1, r_2\}$, onde

$$\begin{cases} r_1 = x_2^{n_1} x_1^{-m_1} \\ r_2 = (x_2 x_1^{-s})^{\mu_1 - m_1 n_1} x_1^{m_1} x_3 x_1^{-m_1} (x_2 x_1^{-s})^{-(\mu_1 - m_1 n_1)} x_3^{-1} \end{cases}$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, 2, 3$, onde Φ é a aplicação induzida pela fibração de Milnor. Temporariamente, escrevemos

$$\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 \mapsto t^a \\ x_2 \mapsto t^b \\ x_3 \mapsto t^c \end{cases}$$

Para efeito de simplificação das contas no cálculo do Fox da matriz de Alexander, faremos uma nova mudança de geradores; a saber,

$$y_1 = x_2 x_1^{-s_\phi}, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_3.$$

Conseqüentemente, temos que

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \{y_1, y_2, y_3; r_1, r_2\}, \text{ onde} \\ r_1 &= (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} y_2^{-m_1} \\ r_2 &= y_1^{\mu_1 - m_1 n_1} y_2^{m_1} y_3 y_2^{-m_1} y_1^{-(\mu_1 - m_1 n_1)} y_3^{-1} \end{aligned}$$

Logo, a aplicação Φ nos novos geradores, é dada por

$$\Phi : \mathbb{Z} [\pi_1 (X)] \longrightarrow \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} y_1 & \mapsto t^{b-s_\phi a} \\ y_2 & \mapsto t^a \\ y_3 & \mapsto t^c \end{cases}$$

Note que a relação r_1 fornece a seguinte relação entre a e b .

$$(*) \quad \{ m_1 a = n_1 b$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_j} \right)$.

Como $r_1 = (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} y_2^{-m_1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_1} = \frac{(y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} - 1}{(y_1 y_2^{s_\phi}) - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_1} \right) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_2} = y_1 \frac{y_2^{s_\phi} - 1}{y_2 - 1} \frac{(y_1 y_2^{s_\phi})^{(n_1-1)} - 1}{(y_1 y_2^{s_\phi}) - 1} - (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1-1} y_1 y_2^{-(m_1-s_\phi)} \frac{y_2^{(m_1-s_\phi)} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_2} \right) = - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \quad \text{veja (A.19)}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_3} \right) = 0$$

Como $r_2 = y_1^{\mu_1-m_1 n_1} y_2^{m_1} y_3 y_2^{-m_1} y_1^{-(\mu_1-m_1 n_1)} y_3^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_1} = \frac{y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} - 1}{y_1 - 1} - y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} y_2^{m_1} y_3 y_2^{-m_1} y_1^{-(\mu_1-m_1 n_1)} \frac{y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} - 1}{y_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1} \right) = - \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1 a} - 1}{t^{(b-s_\phi a)} - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.20)}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_2} = y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} \frac{y_2^{m_1} - 1}{y_2 - 1} - y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} y_2^{m_1} y_3 y_2^{-m_1} \frac{y_2^{m_1} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2} \right) = - t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1 a} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.20)}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_3} = y_1^{(\mu_1-m_1 n_1)} y_2^{m_1} - 1 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_3} \right) = t^{\mu_1(b-s_\phi a)-1} \quad \text{veja (A.20)}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \begin{bmatrix} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^b - 1} & - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 \\ - \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1 a} - 1}{t^{(b-s_\phi a)} - 1} (t^c - 1) & - t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1 a} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^c - 1) & t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1 \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3) \}$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1}{t^b - 1} (t^{b-s_\phi a} - 1) \\ \det(A_2) &= \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1}{t^b - 1} (t^a - 1) \\ \det(A_3) &= - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1}{t^b - 1} (t^c - 1) \end{aligned} \quad \text{veja (A.21)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1}{t^b - 1} \text{mdc} \{ (t^{b-s_\phi a} - 1), (t^a - 1), (t^c - 1) \}.$$

Por outro lado, como

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 1$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $n_2 = 1$, que

$$\Delta_1(t) = (t - 1) \frac{t^{w_{11} e_{01}} - 1}{t^{w_{11} e_{02}} - 1} \frac{t^{w_{22} e_{02}} - 1}{t^{e_{01}} - 1}.$$

onde

$$\begin{cases} w_{11} = m_1 \\ w_{22} = m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2 = \mu_1 \\ e_{01} = b_{1,1,1} + b_{2,1,2} = n_1 + n_1 n_2 = 2 n_1 \\ e_{02} = b_{1,2,1} + b_{2,2,2} = 1 + n_2 = 2 \end{cases}$$

Substituindo esses valores na expressão logo acima de $\Delta_1(t)$, obtemos

$$\Delta_1(t) = (t - 1) \frac{t^{m_1(2n_1)} - 1}{t^{2n_1} - 1} \frac{t^{2\mu_1} - 1}{t^{2m_1} - 1}.$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{ (t^{b-s_\phi a} - 1), (t^a - 1), (t^c - 1) \},$$

segue que

$$(t^r - 1) \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(b-s_\phi a)\mu_1} - 1}{t^b - 1} = (t - 1) \frac{t^{m_1(2n_1)} - 1}{t^{2n_1} - 1} \frac{t^{2\mu_1} - 1}{t^{2m_1} - 1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{m_1 a} - 1) (t^{\mu_1(b-s_\phi a)} - 1) (t^{2m_1} - 1) (t^{2n_1} - 1) \\ &= (t - 1) (t^{m_1(2n_1)} - 1) (t^{2\mu_1} - 1) (t^b - 1) (t^a - 1). \end{aligned}$$

Identificando os termos de menor grau em t , na igualdade acima, vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$ e em vista de $(*)$, temos $a < b$. Analisando os termos de menor grau em t , na igualdade resultante, temos que

$$a = 2n_1$$

Em vista de $(*)$, concluimos que

$$m_1 a = n_1 b \Rightarrow b = 2m_1$$

$$b - s_\phi a = 2m_1 - s_\phi 2n_1 = 2m_1 - 2(m_1 r_\phi - 1) = 2 \text{ pois } r_\phi = 1.$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ \det(B_1), \det(B_2), \det(B_3), \det(B_4), \det(B_5), \det(B_6) \},$$

onde B_i são as matrizes (1×1) obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$.

Temos que

$$\det(B_1) = \frac{t^{2m_1 n_1} - 1}{t^{2n_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2m_1} - 1} \frac{t^{2n_1} - 1}{t^2 - 1}$$

$$\det(B_2) = - \frac{t^{2m_1 n_1} - 1}{t^{2n_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2m_1} - 1}$$

$$\det(B_3) = 0$$

$$\det(B_4) = - \frac{t^{2(\mu_1 - m_1 n_1)} - 1}{t^2 - 1} (t^c - 1)$$

$$\det(B_5) = - \frac{t^{2m_1 n_1} - 1}{t^{2n_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2m_1} - 1} \frac{t^{2m_1} - 1}{t^2 - 1} t^{2(\mu_1 - m_1 n_1)} (t^c - 1)$$

$$\det(B_6) = t^{2\mu_1} - 1$$

Portanto,

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ \det(B_2), \det(B_4), \det(B_6) \}.$$

Como

$$\text{mdc} \{ t^{2\mu_1 - 2m_1 n_1} - 1, t^{2\mu_1} - 1 \} = t^{2 \text{mdc} \{ \mu_1, m_1 n_1 \}} - 1$$

e notando que

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ \text{mdc} \{ \det(B_2), \det(B_6) \}, \text{mdc} \{ \det(B_4), \det(B_6) \} \}$$

obtemos facilmente que

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \frac{t^{2m_1n_1} - 1}{t^{2m_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2n_1} - 1}, t^{2\mu_1} - 1 \right\}.$$

Note que $\mu_1 = m_2 - m_1 + m_1n_1$ exatamente o ndice de interseo I, entre os ramos f_1 e f_2 . Com isso, provamos o seguinte resultado:

Teorema 1 *Seja f um germe analtico com dois ramos de gnero 1, cuja classe topolgica determinada pelas parametrizaes de Puiseux $y_1 = x^{m_1/n_1}$ e $y_2 = x^{m_1/n_1} + x^{m_2/n_1}$. Suponha que $m_1 = \lambda n_1 + 1$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$. Temos que os polinmios de Alexander de f , so dados por:*

$$\begin{aligned} \Delta_1(t) &= \frac{t^{2m_1n_1} - 1}{t^{2m_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2n_1} - 1} (t^{2(m_2 - m_1 + m_1n_1)} - 1) \\ \Delta_2(t) &= \text{mdc} \left\{ \frac{t^{2m_1n_1} - 1}{t^{2m_1} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2n_1} - 1}, t^{2(m_2 - m_1 + m_1n_1)} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Corolrio Nas condies do Teorema, o polinmio mnimo da monodromia $\lambda(t) = \Delta_1(t)/\Delta_2(t)$, no possui fatores mltiplos. Nesses casos, a monodromia de f finita.

A seguir, apresentamos tabelas, para ilustrar o uso dos resultados obtidos. Nessas tabelas, I representa o ndice de interseo entre os dois ramos da curva C , e percorre todos os possveis valores iniciais. O nmero μ , representa o nmero de Milnor, e conseqentemente o grau de $\Delta_1(t)$, o polinmio caracterstico da monodromia. A noto n.a., representa o nmero de autovalores da monodromia, (sem levar em considerao suas multiplicidades). Alm disso, as curvas listadas, so apenas representantes de suas classes de equisingularidade.

I	Polinômio	μ	n.a.	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$
4	$f_4 = (x^2 + y^3)(x^3 + y^2)$	11	6	$\phi_{10}^2 \cdot \phi_2^2 \cdot \phi_1$	ϕ_{10}
6	$f_6 = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^2)$	15	11	$\phi_{12}^2 \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_1$	ϕ_{12}
7	$f_7 = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + xy^2)$	17	17	$\phi_{14} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_7 \cdot \phi_1$	1
8	$f_8 = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^2y)$	19	19	$\phi_{16} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_8 \cdot \phi_4 \cdot \phi_1$	1
9	$f_9 = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^3)$	21	21	$\phi_{18} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_9 \cdot \phi_6 \cdot \phi_3 \cdot \phi_1$	1
10	$f_{10} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^2y^2)$	23	23	$\phi_{20} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_{10} \cdot \phi_5 \cdot \phi_4 \cdot \phi_1$	1
11	$f_{11} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^3y)$	25	25	$\phi_{22} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_{11} \cdot \phi_1$	1
12	$f_{12} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^4)$	27	23	$\phi_{24} \cdot \phi_{12}^2 \cdot \phi_8 \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_1$	ϕ_{12}
13	$f_{13} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^3y^2)$	29	29	$\phi_{26} \cdot \phi_{13} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_1$	1
14	$f_{14} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^4y)$	31	31	$\phi_{28} \cdot \phi_{14} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_7 \cdot \phi_1$	1
15	$f_{15} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^5)$	33	33	$\phi_{30} \cdot \phi_{15} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_{10} \cdot \phi_6 \cdot \phi_5 \cdot \phi_3 \cdot \phi_1$	1
16	$f_{16} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^4y^2)$	35	35	$\phi_{32} \cdot \phi_{16} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_8 \cdot \phi_4 \cdot \phi_1$	1
17	$f_{17} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^5y)$	37	37	$\phi_{34} \cdot \phi_{17} \cdot \phi_{12} \cdot \phi_1$	1
18	$f_{18} = (x^2 + y^3)(x^2 + y^3 + x^6)$	39	35	$\phi_{36} \cdot \phi_{18} \cdot \phi_{12}^2 \cdot \phi_9 \cdot \phi_6 \cdot \phi_4 \cdot \phi_3 \cdot \phi_1$	ϕ_{12}
19	$f_{19} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^5y^2)$	41	41	$\phi_{12} \cdot (t^{38} - 1) / \phi_2$	1
20	$f_{20} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^6y)$	43	43	$\phi_{12} \cdot (t^{40} - 1) / \phi_2$	1
21	$f_{21} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^7)$	45	45	$\phi_{12} \cdot (t^{42} - 1) / \phi_2$	1
22	$f_{22} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^6y^2)$	47	47	$\phi_{12} \cdot (t^{44} - 1) / \phi_2$	1
23	$f_{23} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^7y)$	49	49	$\phi_{12} \cdot (t^{46} - 1) / \phi_2$	1
24	$f_{24} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^8)$	51	47	$\phi_{12} \cdot (t^{48} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}
25	$f_{25} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^7y^2)$	53	53	$\phi_{12} \cdot (t^{50} - 1) / \phi_2$	1
26	$f_{26} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^8y)$	55	55	$\phi_{12} \cdot (t^{52} - 1) / \phi_2$	1
27	$f_{27} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^9)$	57	57	$\phi_{12} \cdot (t^{54} - 1) / \phi_2$	1
28	$f_{28} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^8y^2)$	59	59	$\phi_{12} \cdot (t^{56} - 1) / \phi_2$	1
29	$f_{29} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^9y)$	61	61	$\phi_{12} \cdot (t^{58} - 1) / \phi_2$	1
30	$f_{30} = (x^2 - y^3)(x^2 - y^3 + x^{10})$	63	59	$\phi_{12} \cdot (t^{60} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}

Tabela 1

Note que na tabela acima, a linha correspondente a $I = 4$, nos dá monodromia infinita, pois se trata do primeiro exemplo de curvas planas redutíveis, cuja monodromia é infinita, dada por A'Campo em [A'c1]. Nas demais linhas, temos monodromia finita. O cálculo de $\Delta_2(t)$ para $I = 6$, foi obtido usando o software Singular. As linhas onde $I = 6 + 6k$ com $k \in \mathbb{N}$, nos fornecem o resultado que a monodromia é finita, que não decorre de nenhum critério anteriormente conhecido. Note também que I pode percorrer todos os inteiros maiores do que 30.

I	Polinômio	μ	n.a	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$
9	$(x^3 + y^{16})(x^{16} + y^3)$	77	39	$\phi_{57}^2 \phi_3^2 \phi_1$	ϕ_{57}
18	$y_1 = x^{16/3} e y_2 = x^{2/1} + x^{16/3}$	95	51	$\phi_{66}^2 \phi_{33}^2 \phi_{12} \phi_6^2 \phi_4 \phi_3^2 \phi_1$	1
27	$y_1 = x^{16/3} e y_2 = x^{3/1} + x^{16/3}$	113	63	$\phi_{75}^2 \phi_{18} \phi_{15}^2 \phi_9 \phi_3^2 \phi_1$	1
36	$y_1 = x^{16/3} e y_2 = x^{4/1} + x^{16/3}$	131	71	$\phi_{84}^2 \phi_{42}^2 \phi_{24} \phi_{21}^2 \phi_{12}^3 \phi_8 \phi_6^2 \phi_4 \phi_3^2 \phi_1$	1
45	$y_1 = x^{16/3} e y_2 = x^{5/1} + x^{16/3}$	149	87	$\phi_{93}^2 \phi_{30} \phi_{15} \phi_{10} \phi_5 \phi_3^2 \phi_1$	1
48	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3)$	155	95	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{96} - 1) / \phi_2$	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12}$
54	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^2)$	167	163	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{108} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}
60	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^4)$	179	167	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{120} - 1) / \phi_2$	$\phi_{24} \phi_{12}$
66	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^6)$	191	187	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{132} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}
72	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^8)$	203	175	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{144} - 1) / \phi_2$	$\phi_{48} \phi_{24} \phi_{12}$
78	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^{10})$	215	211	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{156} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}
84	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^{12})$	227	215	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{168} - 1) / \phi_2$	$\phi_{24} \phi_{12}$
90	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^3 y^{14})$	239	235	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{168} - 1) / \phi_2$	ϕ_{12}
96	$(x^3 + y^{16})(x^3 + y^{16} + x^6)$	251	191	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12} (t^{192} - 1) / \phi_2$	$\phi_{96} \phi_{48} \phi_{24} \phi_{12}$

Tabela 2

Podemos tomar os seguintes polinômios, como representantes das classes para $I = 18, 27, 36$ e 45 , respectivamente:

$$\begin{cases} f_{18} = (y^3 - x^{16})(y^3 - 3y^2x^2 + 3yx^4 - x^{16} - x^6) \\ f_{27} = (y^3 - x^{16})(y^3 - 3y^2x^3 + 3yx^6 - x^{16} - x^9) \\ f_{36} = (y^3 - x^{16})(y^3 - 3y^2x^4 + 3yx^8 - x^{16} - x^{12}) \\ f_{45} = (y^3 - x^{16})(y^3 - 3y^2x^5 + 3yx^{10} - x^{16} - x^{15}) \end{cases}$$

Note que na Tabela 2, as linhas correspondentes a $I = 9, 18, 27, 36$ e 45 nos dão monodromia infinita. Nas demais linhas, temos monodromia finita. O cálculo de $\Delta_2(t)$ para $I = 48$, foi obtido usando o software Singular. As linhas onde $I = 48 + 6k$ com $k \in \mathbb{N}$, nos fornecem o resultado que a monodromia é finita, o que não decorre de nenhum critério anteriormente conhecido. Note também que para os I intermediários omitidos na Tabela 2, temos que $\Delta_1(t)$ não possui fatores múltiplos, e conseqüentemente, $\Delta_2(t) = 1$ para estes valores de I . Além disso, I pode percorrer todos os inteiros maiores do que 96.

Resumindo, obtemos os seguintes resultados para ramos de gênero 1:

Ramos com pares de Puiseux distintos

Caso 1: A matriz de Alexander foi determinada, $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos pares de Puiseux e a monodromia pode ser finita ou infinita.

Caso 2: A matriz de Alexander foi determinada, $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos 25 determinantes menores e a monodromia pode ser finita ou infinita.

Ramos com pares de Puiseux iguais

Caso 1: A matriz de Alexander foi determinada, $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos pares de Puiseux e a monodromia é sempre infinita.

Caso 2: A matriz de Alexander foi determinada, $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos 25 determinantes menores e a monodromia é sempre infinita.

Caso 3: A matriz de Alexander não foi determinada.

Caso 4: A matriz de Alexander foi determinada, $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos pares de Puiseux e a monodromia é sempre finita.

Capítulo 3 - Ramos de gênero 2

Neste capítulo, estudaremos a monodromia de um germe de curva plana com dois ramos, ambos de gênero 2. A nossa análise será naturalmente desdobrada em vários casos, segundo as árvores que ocorrem quando os pares de Puiseux são distintos ou iguais.

3.1 Ramos com pares de Puiseux distintos

Nesta situação, temos as seguintes possibilidades para os tipos de árvores que podem ocorrer, conforme dado na Figura 9.

Figura 9: Árvores para ramos de gênero 2 com pares de Puiseux distintos

Caso 1: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2$, onde temos as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} + x^{\frac{m_{12}}{n_{11}n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{21}n_{22}}} \end{cases}$$

onde (m_{1i}, n_{1i}) são os pares de Puiseux do ramo f_1 e (m_{2i}, n_{2i}) são os pares de Puiseux do ramo f_2 , para $i = 1, 2$. Isto conduz à seguinte árvore:

Figura 10:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mu_\phi = m_{21}, & \nu_\phi = n_{21} & \text{e} \quad m_{21}r_\phi = n_{21}s_\phi + 1 \\ \mu_0 = m_{11}, & \nu_0 = n_{11} & \text{e} \quad m_{11}r_0 = n_{11}s_0 + 1 \\ \mu_1 = m_{22} - m_{21}n_{22} + m_{21}n_{21}n_{22}, & \nu_1 = n_{22} & \text{e} \quad \mu_1 r_1 = s_1 \nu_1 + 1 \\ \mu_{01} = m_{12} - m_{11}n_{12} + m_{11}n_{11}n_{12}, & \nu_{01} = n_{12} & \text{e} \quad \mu_{01} r_{01} = s_{01} n_{12} + 1 \end{array} \right.$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$ é gerado por α_z, β_z com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 0, 01, 1, 2, 3\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir².

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}} \\ (R2) \quad 0 > \phi \text{ e } 0 \text{ é uma haste} & \Rightarrow \alpha_0^{\mu_\phi} \beta_0^{\nu_\phi} = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \\ (R4) \quad \phi \text{ é não terminal com haste } 0 & \Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi} = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\ & \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (0) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 01 > 0 \text{ e } 01 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_{01}^{\nu_0 \mu_0} \beta_{01} = \alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0} \\ & \Rightarrow \beta_{01} = \alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \end{aligned}$$

²Os desenvolvimentos algébricos omitidos encontram-se no apêndice B, segundo as referências especificadas.

$$\begin{aligned}
(R3) \quad 01 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{\nu_0} = (\alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0})^{r_0} \\
&\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}
\end{aligned}$$

Relações de (1):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 2 > 1 \text{ e } 2 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\nu_1 \mu_1} \beta_2 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} \\
(R3) \quad 1 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1} \\
&\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}
\end{aligned}$$

Relações de (01):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 3 > 01 \text{ e } 3 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_3^{\nu_{01} \mu_{01}} \beta_3 = \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{\nu_{01}} \\
&\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3^{-\mu_{01} \nu_{01}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{\nu_{01}} \\
(R3) \quad 01 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{\nu_{01}} = (\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{\nu_{01}})^{r_{01}} \\
&\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{n_{12}} = \alpha_{01}^{\mu_{01} r_{01}} \beta_{01}^{n_{12} r_{01}}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_0, \beta_0] = 1 \Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1 \quad \text{veja (A.1)}$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1$$

$$[\alpha_{01}, \beta_{01}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1 \quad \text{veja (A.2)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (B.1)}$$

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1 \quad \text{veja (B.2)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{01}, \beta_{01}, \alpha_{11}$, e β_{11} , sujeitos às relações:

$$(1) \quad [\alpha_0, \beta_0] = 1$$

$$(2) \quad \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(3) \quad (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}$$

$$(4) \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1$$

$$(5) \quad (\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}$$

$$(6) \quad [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_2] = 1$$

$$(7) \quad (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{n_{12}} = (\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}})^{r_{01}}$$

$$(8) \quad [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições, sobre os pares de Puiseux dos dois ramos:

$$\begin{cases} m_{11} = n_{11} \lambda_1 + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z}, \\ \mu_1 = n_{22} \lambda_2 + 1 & \text{para algum } \lambda_2 \in \mathbb{Z}, \\ \mu_{01} = n_{12} \lambda_3 + 1 & \text{para algum } \lambda_3 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

o que implica que $r_0 = r_1 = r_{01} = 1$. Adotaremos como novos geradores

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0, \\ x_2 = \beta_0, \\ x_3 = \alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \alpha_\phi, \\ x_5 = \alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1}, \\ x_6 = \alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}}. \end{cases}$$

Observe que temos as seguintes equivalências entre as relações:

$$(4') \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, x_3] = 1 \Leftrightarrow (4) \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1$$

$$(6') \quad [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, x_5] = 1 \Leftrightarrow (6) \quad [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_2] = 1$$

$$(8') \quad [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, x_6] = 1 \Leftrightarrow (8) \quad [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

Vemos que as relações (4'), (6') e (8') são trivializadas pelas relações (3'), (5') e (7') respectivamente. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \}, \text{ onde} \\ r_1 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\ r_2 &= x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}} \\ r_3 &= x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ r_4 &= (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} x_4^{m_{21}n_{22}} x_5^{-n_{22}} \\ r_5 &= (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} x_2^{n_{11}n_{12}} x_6^{-n_{12}} \end{aligned}$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, \dots, 6$, onde Φ é a aplicação induzida pela fibração de Milnor. Temporariamente, escrevemos

$$\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & \longmapsto & t^a \\ x_2 & \longmapsto & t^b \\ x_3 & \longmapsto & t^c \\ x_4 & \longmapsto & t^d \\ x_5 & \longmapsto & t^e \\ x_6 & \longmapsto & t^f \end{array} \right.$$

Note que as relações r_i , para $i = 2, 3, 4, 5$, fornecem as seguintes relações entre a, b, c, d, e, f :

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_{11} \ c = m_{11} \ a + n_{11} \ b \\ m_{21} \ d = m_{21} \ a + n_{21} \ b \\ n_{22} \ e = (s_\phi \ a + r_\phi \ b - s_\phi \ d) (m_{22} - m_{21} \ n_{22}) + m_{21} \ n_{22} \ d \\ n_{12} \ f = (c - r_0 \ b - s_0 \ a) (m_{12} - m_{11} \ n_{12}) + m_{11} \ n_{12} \ a + n_{11} \ n_{12} \ b \end{array} \right.$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$.

Como $r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \right) = 1 - \Phi(x_2) = 1 - t^b.$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = x_1 - x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2} \right) = \Phi(x_1) - 1 = t^a - 1$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_5} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_6} \right) = 0$$

Como $r_2 = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \frac{x_1^{m_{11}} - 1}{x_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1}.$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_2} = x_1^{m_{11}} \frac{x_2^{n_{11}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2} \right) = t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_3} = - \frac{x_3^{n_{11}} - 1}{x_3 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_5} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_5} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_6} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_6} \right) = 0$$

Como $r_3 = x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}}$, temos que

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_1} = \frac{x_1^{m_{21}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1}.$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_2} = x_1^{m_{21}} \frac{x_2^{n_{21}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} \right) = t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_4} = - \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_4} \right) = - \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_5} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_5} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_6} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_6} \right) = 0$$

Como $r_4 = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} x_4^{m_{21}n_{22}} x_5^{-n_{22}}$, temos que

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_1} = \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})} - 1}{(t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}) - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_2} = x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) = t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})} - 1}{(t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}) - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_4} &= - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21}n_{22}} \frac{x_4^{m_{21}n_{22}} - 1}{x_4 - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) &= - t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})} - 1}{(t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}) - 1} \\
&\quad + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})} \frac{t^{m_{21}n_{22}d} - 1}{t^d - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_5} &= - \frac{x_5^{n_{22}} - 1}{x_5 - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_5} \right) &= - \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_6} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_6} \right) = 0$$

Como $r_5 = (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} x_2^{n_{11}n_{12}} x_6^{-n_{12}}$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_5}{\partial x_1} &= - (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) \frac{x_1^{s_0} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1} \\
&\quad + (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} \frac{x_1^{m_{11}n_{12}} - 1}{x_1 - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) &= - t^{c-r_0b-s_0a} \frac{t^{s_0a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1} \\
&\quad + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} \frac{t^{m_{11}n_{12}a} - 1}{t^a - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_5}{\partial x_2} &= - x_3 x_2^{-r_0} \frac{x_2^{r_0} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1} \\
&\quad + (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} \frac{x_2^{n_{11}n_{12}} - 1}{x_2 - 1} \\
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) &= - t^{c-r_0b} \frac{t^{r_0b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1} \\
&\quad + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} t^{m_{11}n_{12}a} \frac{t^{n_{11}n_{12}b} - 1}{t^b - 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_3} = \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) = \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1}$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_5} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_6} = - \frac{x_6^{n_{12}} - 1}{x_6 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_6} \right) = - \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) & 0 & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \det(A_5), \det(A_6) \},$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = (t^a - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1}$$

$$\det(A_2) = -(t^b - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1}$$

$$\det(A_3) = (t^c - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\det(A_4) = -(t^d - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det(A_5) = (t^e - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \quad \text{veja (B.6)}$$

$$\det(A_6) = -(t^f - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \quad \text{veja (B.9)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1), (t^f - 1) \}$$

$$\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1}.$$

Por outro lado, recordando que a curva foi dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} + x^{\frac{m_{12}}{n_{11}n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{21}n_{22}}}, \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 0$, $s_1 = 2$, e $s_2 = 2$, que

$$\Delta_1(t) = (t-1) \frac{t^{w_{21} e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{11} e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{n_{22} e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1} \frac{t^{n_{12} e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1}$$

onde

$$\begin{cases} w_{11} = m_{11} \\ w_{12} = m_{12} - m_{11} n_{12} + m_{11} n_{11} n_{12} \\ w_{21} = m_{21} \\ w_{22} = m_{22} - m_{21} n_{22} + m_{21} n_{21} n_{22} \\ e_{01} = b_{1,1,2} + b_{2,1,2} = (\prod_{j=1}^2 n_{1,j}) + (\prod_{j=1}^2 n_{2,j}) = n_{11} n_{12} + n_{21} n_{22} \\ e_{11} = w_{2,1} b_{2,2,2} b_{1,1,0} + w_{1,1} b_{1,2,2} = m_{21} n_{22} 1 + m_{11} n_{12} = m_{11} n_{12} + m_{21} n_{22} \\ e_{12} = w_{2,1} b_{2,2,2} b_{1,1,1} + w_{12} b_{1,3,2} = m_{21} n_{22} n_{11} + w_{12} \\ e_{22} = w_{2,1} b_{1,1,2} b_{2,2,1} + w_{22} b_{2,3,2} = m_{21} n_{11} n_{12} + w_{22} \end{cases}$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{(t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1), (t^f - 1)\},$$

segue que

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \\ &= (t-1) \frac{t^{w_{21} e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{11} e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{n_{22} e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1} \frac{t^{n_{12} e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{n_{11}c} - 1) (t^{m_{21}d} - 1) (t^{n_{22}e} - 1) (t^{n_{12}f} - 1) (t^{e_{01}} - 1) (t^{e_{11}} - 1) (t^{e_{22}} - 1) (t^{e_{12}} - 1) \\ &= (t-1) (t^{n_{11} e_{11}} - 1) (t^{m_{21} e_{01}} - 1) (t^{n_{22} e_{22}} - 1) (t^{n_{12} e_{12}} - 1) (t^c - 1) (t^d - 1) (t^e - 1) (t^f - 1). \end{aligned} \quad (**)$$

Identificando, na igualdade acima, os termos de menor grau em t , vemos que $r = 1$. Simplificando $(t-1)$ e analisando na igualdade resultante, em vista de $(*)$, os termos de menor grau em t , temos que

$$\begin{cases} d = e_{01} = n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22} \\ c = e_{11} = m_{11}n_{12} + m_{21}n_{22} \\ e = e_{22} = m_{21}n_{11}n_{12} + w_{22} \\ f = e_{12} = m_{21}n_{11}n_{22} + w_{12} \end{cases}$$

Em vista das relações de $(*)$, concluímos que

$$a = n_{11} n_{12} \quad \text{e} \quad b = m_{21} n_{22}$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \begin{array}{l} \det(A_{1234}), \det(A_{1235}), \det(A_{1236}), \det(A_{1345}), \det(A_{1346}), \\ \det(A_{1456}), \det(A_{2345}), \det(A_{2346}), \det(A_{2356}), \det(A_{2456}), \\ \det(A_{3456}), \det(B_{1234}), \det(B_{1235}), \det(B_{1236}), \det(B_{1345}), \\ \det(B_{1346}), \det(B_{1456}), \det(B_{2345}), \det(B_{2346}), \det(B_{2356}), \\ \det(B_{2456}), \det(B_{3456}), \det(C_{1234}), \det(C_{1235}), \det(C_{1236}), \\ \det(C_{1345}), \det(C_{1346}), \det(C_{1456}), \det(C_{2345}), \det(C_{2346}), \\ \det(C_{2356}), \det(C_{2456}), \det(C_{3456}), \det(D_{1234}), \det(D_{1235}), \\ \det(D_{1236}), \det(D_{1345}), \det(D_{1346}), \det(D_{1456}), \det(D_{2345}), \\ \det(D_{2346}), \det(D_{2356}), \det(D_{2456}), \det(D_{3456}), \det(E_{1234}), \\ \det(E_{1235}), \det(E_{1236}), \det(E_{1345}), \det(E_{1346}), \det(E_{1456}), \\ \det(E_{2345}), \det(E_{2346}), \det(E_{2356}), \det(E_{2456}), \det(E_{3456}) \end{array} \right\}$$

onde as matrizes A , B , C , D , E são obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ retirando-se a quinta, quarta, terceira, segunda e primeira linhas respectivamente, e A_{ijkl} , B_{ijkl} , C_{ijkl} , D_{ijkl} e E_{ijkl} denotam as matrizes formadas pelas colunas i, j, k e l de A, B, C, D e E , respectivamente.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) & 0 & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A_{1234}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1) \quad \text{veja (B.5)}$$

$$\det(A_{1235}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det(A_{1236}) = 0$$

$$\det(A_{1345}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1)$$

$$\det(A_{1346}) = 0$$

$$\det(A_{1456}) = 0$$

$$\det(A_{2345}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_{2346}) = 0$$

$$\det(A_{2356}) = 0$$

$$\det(A_{2456}) = 0$$

$$\det (A_{3456}) = 0$$

Temos que

$$B = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \end{bmatrix}.$$

$$\det (B_{1234}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^f - 1) \quad \text{veja (B.8)}$$

$$\det (B_{1235}) = 0$$

$$\det (B_{1236}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^d - 1)$$

$$\det (B_{1345}) = 0$$

$$\det (B_{1346}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (B_{1456}) = 0$$

$$\det (B_{2345}) = 0$$

$$\det (B_{2346}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (B_{2356}) = 0$$

$$\det (B_{2456}) = 0$$

$$\det (B_{3456}) = 0$$

Temos que

$$C = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \end{bmatrix}.$$

$$\det (C_{1234}) = \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^f - 1) \quad \text{veja (B.7)}$$

$$\det (C_{1235}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^f - 1) \quad \text{veja (B.7)}$$

$$\det (C_{1236}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^a - 1) (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}$$

$$\det (C_{1345}) = 0$$

$$\det (C_{1346}) = -\Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (C_{1456}) = 0$$

$$\det (C_{2345}) = 0$$

$$\det (C_{2346}) = \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (C_{2356}) = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (C_{2456}) = 0$$

$$\det (C_{3456}) = 0$$

Temos que

$$D = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) & 0 & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \end{bmatrix}.$$

$$\det (D_{1234}) = \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1)$$

$$\det (D_{1235}) = -\Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^d - 1)$$

$$\det (D_{1236}) = 0$$

$$\det (D_{1345}) = -\Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (D_{1346}) = 0$$

$$\det (D_{1456}) = \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (D_{2345}) = \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (D_{2346}) = 0$$

$$\det (D_{2356}) = 0$$

$$\det (D_{2456}) = -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (D_{3456}) = 0$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
E &= \begin{bmatrix} \frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} & -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \end{bmatrix} \\
\det(E_{1234}) &= \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} (t^{n_{22}e}-1) \\
&\quad + \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \left[\Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) - \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) \right] \\
&\quad - \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \left[\frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) - t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) \right] \\
\det(E_{1235}) &= \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \left[\frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) - t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) \right] \\
&\quad - \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \left[t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} - t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} \frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} \right] \\
\det(E_{1236}) &= -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \left[\frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) - t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) \right] \\
\det(E_{1345}) &= \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \left[\frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) + \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) \right] \\
\det(E_{1346}) &= \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \left[\frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) + \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) \right] \\
\det(E_{1456}) &= -\frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \\
\det(E_{2345}) &= \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \left[t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) + \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) \right] \\
\det(E_{2346}) &= -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \left[t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) - \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) \right] \\
\det(E_{2356}) &= \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} t^{m_{21}a} \\
\det(E_{2456}) &= -\frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} t^{m_{11}a} \\
\det(E_{3456}) &= \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \frac{t^{n_{22}e}-1}{t^e-1} \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1}
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ 31 \text{ menores não nulos acima } \}.$$

Caso 2: Seja $f = f_1 f_2$ com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{12}}{n_1 n_{12}}} \\ y = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{22}}{n_1 n_{22}}} \end{cases}$$

onde $\{(m_1, n_1), (m_{i2}, n_{i2})\}$ são os pares de Puiseux do ramo f_i para $i = 1, 2$. Isto conduz à seguinte árvore:

Figura 11:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_1, & \nu_\phi = n_1 & \text{e} & m_1 r_\phi = n_1 s_\phi + 1 \\ \mu_1 = w_{22}, & \nu_1 = n_{22} & \text{e} & w_{22} r_1 = n_{22} s_1 + 1 \\ \mu_{10} = w_{12}, & \nu_{10} = n_{12} & \text{e} & w_{12} r_{10} = n_{12} s_{10} + 1 \end{cases}$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z , com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 10, 2, 3\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \\ (R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi} \\ & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (1):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 2 > 1 \text{ e } 2 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\nu_1 \mu_1} \beta_2 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-w_{22} n_{22}} \alpha_1^{w_{22}} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^{n_{22}} \\
(R2) \quad 10 > 1 \text{ e } 10 \text{ é uma haste} &\Rightarrow \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} = \alpha_{10}^{\mu_1} \beta_{10}^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^{n_{22}} = \alpha_{10}^{w_{22}} \beta_{10}^{n_{22}} \\
(R4) \quad 1 \text{ é não terminal com haste } 10 &\Rightarrow \alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \\
&\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1}
\end{aligned}$$

Relações de (10):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 3 > 10 \text{ e } 3 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_3^{\nu_{10} \mu_{10}} \beta_3 = \alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{\nu_{10}} \\
&\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3^{-w_{12} n_{12}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} \\
(R3) \quad 10 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{\nu_{10}} = (\alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{\nu_{10}})^{r_{10}} \\
&\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{n_{12}} = (\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}})^{r_{10}}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)}$$

$$[\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1 \Rightarrow [\alpha_2, \beta_2] = 1 \quad \text{veja (B.10)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1$$

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1 \quad \text{veja (B.11)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_{10}$ e β_{10} , sujeitos às relações:

$$(1) \quad (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}$$

$$(2) \quad [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1$$

$$(3) \quad \alpha_1^{m_{22} - m_1 n_{12}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} = \alpha_{10}^{w_{22}} \beta_{10}^{n_{22}}$$

$$(4) (\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{n_{12}} = (\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}})^{r_{10}}$$

$$(5) [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

$$(6) [\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições, sobre os pares de Puiseux dos ramos da curva:

$$\begin{cases} m_1 = n_1 \lambda_1 + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ \mu_{10} = n_{12} \lambda_3 + 1 & \text{para algum } \lambda_3 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

o que implica que $r_\phi = r_{10} = 1$. Adotaremos como novos geradores:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{10}, \\ x_2 = \beta_{10}, \\ x_3 = \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \alpha_\phi, \\ x_5 = \alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}}. \end{cases}$$

Observe que a relação (2), via mudança, se torna a relação $[x_1^{m_1}, x_2 x_1^{-s_\phi}] = 1$ que é equivalente à relação $[x_1^{m_1}, x_2] = 1$. Sendo esta, trivializada devido à nova relação (1) $x_2^{n_1} = x_1^{m_1}$; e que a relação (5), via esta mudança de geradores, se torna a relação $[\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, x_5] = 1$, a qual é trivializada pela relação (4). Assim,

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; r_1, r_2, r_3, r_4 \}, \text{ onde} \\ r_1 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\ r_2 &= x_1^{w_{12}} x_2^{n_{12}} x_5^{-n_{12}} \\ r_3 &= x_3^{n_1} x_4^{-m_1} \\ r_4 &= x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22} - m_1 n_{12})} \end{aligned}$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, \dots, 5$, onde Φ é a aplicação induzida pela fibração de Milnor. Temporariamente escrevemos:

$$\Phi : \mathbb{Z} [\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 \mapsto t^a \\ x_2 \mapsto t^b \\ x_3 \mapsto t^c \\ x_4 \mapsto t^d \\ x_5 \mapsto t^e \end{cases}$$

Note que as relações r_i , para $i = 2, 3, 4$, fornecem relações entre a, b, c, d ; a saber:

$$(*) \quad \begin{cases} n_{12} e = w_{12} a + n_{12} b \\ m_1 d = n_1 c \\ (c - s_\phi d) (m_{22} - m_1 n_{12}) = w_{22} a + n_{22} b - m_1 n_{22} d \end{cases}$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$.

Como $r_1 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 1 - x_1 x_2 x_1^{-1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \right) = 1 - \Phi(x_2) = -(t^b - 1)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = x_1 - x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_2} \right) = \Phi(x_1) - 1 = t^a - 1$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_5} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial x_5} \right) = 0$$

Como $r_2 = x_1^{w_{12}} x_2^{n_{12}} x_3^{-n_{12}}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_1} = \frac{x_1^{w_{12}} - 1}{x_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{w_{12}a} - 1}{t^a - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_2} = x_1^{w_{12}} \frac{x_2^{n_{12}} - 1}{x_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_2} \right) = t^{w_{12}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_5} = -\frac{x_5^{n_{12}} - 1}{x_5 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_5} \right) = -\frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1}$$

Como $r_3 = x_3^{n_1} x_4^{-m_1}$, temos que

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_3} = \frac{x_3^{n_1} - 1}{x_3 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_3} \right) = \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_4} = -\frac{x_4^{m_1} - 1}{x_4 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_4} \right) = -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial x_5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial x_5} \right) = 0$$

Como $r_4 = x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12})}$, temos que

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_1} = \frac{x_1^{w_{22}} - 1}{x_1 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) = \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_2} = x_1^{w_{22}} \frac{x_2^{n_{22}} - 1}{x_2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) = t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_3} = -\frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1} \quad \text{veja (B.12)}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_3} \right) = -\frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_4} = -x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} \frac{x_4^{m_1 n_{22}} - 1}{x_4 - 1} \quad \text{veja (B.13)}$$

$$+ (x_3 x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1 n_{12}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12}-1)} \frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1 n_{12}} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) = -t^{w_{22} a + n_{22} b - m_1 n_{22} d} \frac{t^{m_1 n_{22} d} - 1}{t^d - 1} + t^{c-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1}$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_5} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_5} \right) = 0$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12} a} \frac{t^{n_{12} b} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \\ 0 & 0 & \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \det(A_5) \},$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1) \quad \text{veja (B.16)}$$

$$\det(A_2) = - \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1) \quad \text{veja (B.16)}$$

$$\det(A_3) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (B.14)}$$

$$\det(A_4) = - \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (B.14)}$$

$$\det(A_5) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1) \quad \text{veja (B.17)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1) \}.$$

Por outro lado, recordando que a curva foi dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{12}}{n_1 n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{22}}{n_1 n_{22}}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 1$, $s_1 = 2$, e $s_2 = 2$, que

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{m_1 e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{w_{22}e_{02}} - 1}{t^{m_1 e_{02}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1} (t - 1)$$

onde

$$\begin{cases} w_{11} = m_1 \\ w_{12} = m_{12} - m_1 n_{12} + m_1 n_1 n_{12} \\ w_{22} = m_{22} - m_1 n_{22} + m_1 n_1 n_{22} \\ e_{01} = b_{1,1,2} + b_{2,1,2} = (\prod_{j=1}^2 n_{1,j}) + (\prod_{j=1}^2 n_{2,j}) = n_{11}n_{12} + n_{21}n_{22} = n_1(n_{12} + n_{22}) \\ e_{02} = b_{1,2,2} + b_{2,2,2} = n_{12} + n_{22} \\ e_{12} = w_{2,2}.b_{2,3,2}.b_{1,2,1} + w_{12}.b_{2,3,2} = w_{22} + w_{12} \end{cases}$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1) \},$$

segue que

$$\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^r - 1) = \frac{t^{m_1 e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{w_{22}e_{02}} - 1}{t^{m_1 e_{02}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1} (t - 1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^{m_1 d} - 1) (t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1) (t^{n_{12}e} - 1) (t^{e_{01}} - 1) (t^{m_1 e_{02}} - 1) (t^{e_{12}} - 1) (t^r - 1) \\ &= (t^{m_1 e_{01}} - 1) (t^{w_{22}n_{12} + n_{22}w_{22}} - 1) (t^{n_{12}e_{12}} - 1) (t^d - 1) (t^c - 1) (t^e - 1) (t - 1) \end{aligned}$$

Identificando, na igualdade acima, os termos de menor grau em t , vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$ e notando que a possibilidade $d \geq c$ ou $c \geq e$ geram um absurdo, em vista de $(**)$ e $(*)$, temos que $d < c < e$. Analisando, na igualdade resultante, os termos de menor grau em t , temos que

$$\begin{cases} d = e_{01} = n_1 (n_{12} + n_{22}) \\ c = m_1 e_{02} = m_1 (n_{12} + n_{22}) \\ a = n_{12} \\ b = w_{22} \\ e = w_{12} + w_{22} \end{cases}$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \begin{array}{l} \det(A_{123}), \det(A_{124}), \det(A_{125}), \det(A_{134}), \det(A_{135}), \\ \det(A_{145}), \det(A_{234}), \det(A_{235}), \det(A_{245}), \det(A_{345}), \\ \det(B_{123}), \det(B_{124}), \det(B_{125}), \det(B_{134}), \det(B_{135}), \\ \det(B_{145}), \det(B_{234}), \det(B_{235}), \det(B_{245}), \det(B_{345}), \\ \det(C_{123}), \det(C_{124}), \det(C_{125}), \det(C_{134}), \det(C_{135}), \\ \det(C_{145}), \det(C_{234}), \det(C_{235}), \det(C_{245}), \det(C_{345}), \\ \det(D_{123}), \det(D_{124}), \det(D_{125}), \det(D_{134}), \det(D_{135}), \\ \det(D_{145}), \det(D_{234}), \det(D_{235}), \det(D_{245}), \det(D_{345}) \end{array} \right\}$$

onde A, B, C, D são obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ retirando-se a quarta, terceira, segunda e primeira linhas respectivamente, e onde $A_{ijk}, B_{ijk}, C_{ijk}$ e D_{ijk} denotam as matrizes formadas pelas colunas i, j e k , de A, B, C e D , respectivamente.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{w_{12}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} \\ 0 & 0 & \frac{t^{n_{12}c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A_{123}) = -\frac{t^{n_{12}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1)$$

$$\det (A_{124}) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^e - 1)$$

$$\det (A_{125}) = 0$$

$$\det (A_{134}) = 0$$

$$\det (A_{135}) = - \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (A_{145}) = \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (A_{234}) = 0$$

$$\det (A_{235}) = \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (A_{245}) = - \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (A_{345}) = 0$$

Temos que

$$B = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12} a} \frac{t^{n_{12} b} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \\ \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det (B_{123}) = \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} (t^{n_{12} e} - 1)$$

$$\det (B_{124}) = - \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) (t^{n_{12} e} - 1)$$

$$\det (B_{125}) = - \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} (t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1)$$

$$\det (B_{134}) = 0$$

$$\det (B_{135}) = \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} (t^b - 1)$$

$$\det (B_{145}) = - \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) (t^b - 1)$$

$$\det (B_{234}) = 0$$

$$\det (B_{235}) = - \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} (t^a - 1)$$

$$\det (B_{245}) = \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) (t^a - 1)$$

$$\det (B_{345}) = 0$$

Temos que

$$C = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{(c-s\phi d)(m_{22} - m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s\phi d)} - 1} & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(C_{123}) &= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} (t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1) \\ \det(C_{124}) &= -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} (t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1) \\ \det(C_{125}) &= 0 \\ \det(C_{134}) &= \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1}{t^c - 1} (t^b - 1) \\ \det(C_{135}) &= 0 \\ \det(C_{145}) &= 0 \\ \det(C_{234}) &= -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1}{t^c - 1} (t^a - 1) \\ \det(C_{235}) &= 0 \\ \det(C_{245}) &= 0 \\ \det(C_{345}) &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$D = \begin{bmatrix} \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12} a} \frac{t^{n_{12} b} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \\ 0 & 0 & \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{(c-s\phi d)(m_{22} - m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s\phi d)} - 1} & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(D_{123}) &= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \left[t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} - t^{w_{12} a} \frac{t^{n_{12} b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} \right] \\ \det(D_{124}) &= -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \left[t^{w_{22} a} \frac{t^{n_{22} b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} - t^{w_{12} a} \frac{t^{n_{12} b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} \right] \\ \det(D_{125}) &= 0 \\ \det(D_{134}) &= \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22} a + n_{22} b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{w_{12} a} - 1}{t^a - 1} \\ \det(D_{135}) &= \frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} \\ \det(D_{145}) &= -\frac{t^{n_{12} e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22} a} - 1}{t^a - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(D_{234}) &= \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} t^{w_{12}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1} \\
\det(D_{235}) &= \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} t^{w_{22}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1} \\
\det(D_{245}) &= - \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} t^{w_{22}a} \frac{t^{n_{22}b} - 1}{t^b - 1} \\
\det(D_{345}) &= \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}e} - 1}{t^e - 1}
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ 26 \text{ menores não nulos acima} \}$$

Caso 3: Seja $f = f_1 f_2$ com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{12}}{n_1 n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{22}}{n_1}} + x^{\frac{m_{23}}{n_1 n_{23}}} \end{cases}$$

onde $\{(m_1, n_1), (m_{12}, n_{12})\}$ são os pares de Puiseux do ramo f_1 e $\{(m_1, n_1), (m_{23}, n_{23})\}$ são os pares de Puiseux do ramo f_2 . Isto conduz à árvore, dada na Figura 12.

Figura 12:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_1, & \nu_\phi = n_1 & \text{e} & m_1 r_\phi = n_1 s_\phi + 1 \\ \mu_1 = w_{22} = m_{22} - m_1 n_{22} + m_1 n_1 n_{22}, & \nu_1 = n_{22} = 1 & \text{e} & w_{22} r_1 = n_{22} s_1 + 1 \\ \mu_{10} = w_{12} = m_{12} - m_1 n_{12} + m_1 n_1 n_{12}, & \nu_{10} = n_{12} & \text{e} & w_{12} r_{10} = n_{12} s_{10} + 1 \\ \mu_{11} = w_{23} = m_{23} & \nu_{11} = n_{23} & \text{e} & w_{23} r_{11} = n_{23} s_{11} + 1 \end{cases}$$

Note que $(r_1, s_1) = (1, \mu_1 - 1)$. Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z , com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 10, 11, 2, 3\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\
&\Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \\
(R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi} \\
&\Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}
\end{aligned}$$

Relações de (1) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 11 > 1 \text{ e } 11 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_{11}^{\nu_1 \mu_1} \beta_{11} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_{11} = \alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \\
(R2) \quad 10 > 1 \text{ e } 10 \text{ é uma haste} &\Rightarrow \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} = \alpha_{10}^{\mu_1} \beta_{10}^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_{10} = \alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \\
(R4) \quad 1 \text{ é não terminal com haste } 10 &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \\
&\Rightarrow \alpha_{11} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1}
\end{aligned}$$

Relações de (10) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 3 > 10 \text{ e } 3 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_3^{\nu_{10} \mu_{10}} \beta_3 = \alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{\nu_{10}} \\
&\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3^{-w_{12} n_{12}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} \\
(R3) \quad 10 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{\nu_{10}} = (\alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{\nu_{10}})^{r_{10}} \\
&\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{n_{12}} = (\alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{n_{12}})^{r_{10}}
\end{aligned}$$

Relações de (11) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 2 > 11 \text{ e } 2 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\nu_{11} \mu_{11}} \beta_2 = \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{\nu_{11}} \\
&\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-\mu_{11} n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R3) \quad 11 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{\nu_{11}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{\nu_{11}})^{r_{11}} \\
&\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{n_{23}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}})^{r_{11}}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)}$$

$$[\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1, \alpha_{10}] = 1 \quad \text{veja (B.18)}$$

$$[\alpha_{11}, \beta_{11}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1, \alpha_{10}] = 1 \quad \text{veja (B.19)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{11}^{\mu_1} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (B.20)}$$

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1 \quad \text{veja (B.21)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{10}, \beta_{10}, \alpha_{11}$, e β_{11} , sujeitos às relações:

- (1) $(\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}$
- (2) $[\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1$
- (3) $(\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{n_{23}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}})^{r_{11}}$
- (4) $[\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1$
- (5) $(\alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}})^{n_{12}} = (\alpha_{10}^{\mu_{10}} \beta_{10}^{n_{12}})^{r_{10}}$
- (6) $[\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$
- (7) $[\alpha_1^{\mu_1} \beta_1, \alpha_{10}] = 1$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições:

$$\begin{cases} m_1 = \lambda_1 n_1 + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ \mu_{11} = \lambda_2 n_{23} + 1 & \text{para algum } \lambda_2 \in \mathbb{Z} \\ \mu_{10} = \lambda_3 n_{12} + 1 & \text{para algum } \lambda_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

o que implica que $r_\phi = r_{10} = r_{11} = 1$. Adotaremos como novos geradores,

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_\phi, \\ x_2 = \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi}, \\ x_3 = \alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \alpha_3 \alpha_{10}^{s_{10}} \beta_{10}^{r_{10}}, \\ x_5 = \alpha_{10}. \end{cases}$$

Observe que as relações (2), (4) e (6) são equivalentes às relações

$$[x_1^{m_1}, x_2] = 1, \quad [\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, x_3] = 1 \quad \text{e} \quad [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, x_4] = 1$$

respectivamente, e que as mesmas são trivializadas pelas novas relações (1'), (3') e (5'), obtidas de (1), (3) e (5) respectivamente, após a troca dos geradores. Temos que $\pi_1(X)$ é gerado por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 , sujeitos às seguintes relações:

$$(1) \quad x_2^{n_1} = x_1^{m_1}$$

$$(2) \quad x_3^{n_{23}} = x_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} (x_2 x_1^{-s_\phi})^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} x_1^{m_1 n_{23}} \quad \text{veja (B.22)}$$

$$(3) \quad x_4^{n_{12}} = x_5^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} (x_2 x_1^{-s_\phi})^{n_{12}(m_{22}-m_1)} x_1^{m_1 n_{12}} \quad \text{veja (B.23)}$$

$$(4) \quad [(x_2 x_1^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1} x_1^{m_1}, x_5] = 1$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, \dots, 5$, onde Φ é a aplicação induzida pela fibração de Milnor. Temporariamente escrevemos:

$$\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 & \mapsto & t^a \\ x_2 & \mapsto & t^b \\ x_3 & \mapsto & t^c \\ x_4 & \mapsto & t^d \\ x_5 & \mapsto & t^e \end{cases}$$

Para efeito de simplificação das contas no cálculo do Fox da matriz de Alexander, faremos uma nova mudança de geradores; a saber,

$$\begin{cases} y_1 = x_2 x_1^{-s_\phi}, \\ y_2 = x_1, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_4 = x_4, \\ y_5 = x_5. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \{ y_1, y_2, y_3, y_4; r_1, r_2, r_3 \}, \quad \text{onde} \\ r_1 &= (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} y_2^{-m_1} \\ r_2 &= y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} y_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} y_2^{m_1 n_{23}} y_3^{-n_{23}} \\ r_3 &= y_5^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} y_1^{n_{12}(m_{22}-m_1)} y_2^{m_1 n_{12}} y_4^{-n_{12}} \\ r_4 &= y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} y_5 y_2^{-m_1} y_1^{-(m_{22}-m_1)} y_5^{-1} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a aplicação Φ nos novos geradores, é dada por

$$\Phi : \mathbb{Z} [\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} y_1 & \mapsto & t^{b-s_\phi a} \\ y_2 & \mapsto & t^a \\ y_3 & \mapsto & t^c \\ y_4 & \mapsto & t^d \\ y_5 & \mapsto & t^e \end{cases}$$

Note que as relações r_i , para $i = 1, 2$, fornecem as seguintes relações entre a, b, c :

$$(*) \begin{cases} m_1 a = n_1 b \\ n_{23} c = -(\mu_{11} - \mu_1 n_{23})e + (\mu_{11} - m_1 n_1 n_{23})(b - s_\phi a) + m_1 n_{23} a \\ n_{12} d = (\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e + n_{12}(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a) + m_1 n_{12} a \end{cases}$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_j} \right)$.

Como $r_1 = (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} y_2^{-m_1}$, temos que

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_1} = \frac{(y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} - 1}{(y_1 y_2^{s_\phi}) - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_1} \right) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_2} = y_1 \frac{y_2^{s_\phi} - 1}{y_2 - 1} \frac{(y_1 y_2^{s_\phi})^{(n_1-1)} - 1}{(y_1 y_2^{s_\phi}) - 1} - (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1-1} y_1 y_2^{-(m_1-s_\phi)} \frac{y_2^{(m_1-s_\phi)} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_2} \right) = - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1}$$

veja (A.19)

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_5} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_5} \right) = 0$$

Como $r_2 = y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} y_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} y_2^{m_1 n_{23}} y_3^{-n_{23}}$, temos que

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_1} = y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \frac{y_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} - 1}{y_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1} \right) = t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23})(b-s_\phi a)} - 1}{t^{(b-s_\phi a)} - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_2} = y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} y_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} \frac{y_2^{m_1 n_{23}} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2} \right) = t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e + (\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23})(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_{23}a} - 1}{t^a - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_3} = - y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} y_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} y_2^{m_1 n_{23}} y_3^{-n_{23}} \frac{y_3^{n_{23}} - 1}{y_3 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_3} \right) = - \frac{t^{n_{23}c} - 1}{t^c - 1}$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_4} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial y_5} = - y_5^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \frac{y_5^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} - 1}{y_5 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_5} \right) = - t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} - 1}{t^e - 1}$$

Como $r_3 = y_5^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} y_1^{n_{12}(m_{22}-m_1)} y_2^{m_1 n_{12}} y_4^{-n_{12}}$, temos que

$$\frac{\partial r_3}{\partial y_1} = y_5^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} \frac{y_1^{n_{12}(m_{22}-m_1)} - 1}{y_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1} \right) = t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e} \frac{t^{n_{12}(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{(b-s_\phi a)} - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial y_2} = y_5^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} y_1^{n_{12}(m_{22}-m_1)} \frac{y_2^{m_1 n_{12}} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2} \right) = t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e + n_{12}(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_{12}a} - 1}{t^a - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial y_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial y_4} = - y_5^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})} y_1^{n_{12}(m_{22}-m_1)} y_2^{m_1 n_{12}} y_3^{-n_{12}} \frac{y_4^{n_{12}} - 1}{y_4 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_4} \right) = - \frac{t^{n_{12}d} - 1}{t^d - 1}$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial y_5} = \frac{y_5^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})} - 1}{y_5 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_5} \right) = \frac{t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e} - 1}{t^e - 1}$$

Como $r_4 = y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} y_5 y_2^{-m_1} y_1^{-(m_{22}-m_1)} y_5^{-1}$, temos que

$$\frac{\partial r_4}{\partial y_1} = \frac{y_1^{m_{22}-m_1} - 1}{y_1 - 1} - y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} y_5 y_2^{-m_1} y_1^{-(m_{22}-m_1)} \frac{y_1^{m_{22}-m_1} - 1}{y_1 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1} \right) = - \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{b-s_\phi a} - 1} (t^e - 1)$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial y_2} = y_1^{m_{22}-m_1} \frac{y_2^{m_1} - 1}{y_2 - 1} - y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} y_5 y_2^{-m_1} \frac{y_2^{m_1} - 1}{y_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2} \right) = - t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^e - 1)$$

$$\frac{\partial r_4}{\partial y_3} = 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial y_4} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_4} \right) = 0 \\
\frac{\partial r_4}{\partial y_5} &= y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} - y_1^{m_{22}-m_1} y_2^{m_1} y_5^{-m_1} y_1^{-(m_{22}-m_1)} y_5^{-1} \\
\Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_5} \right) &= t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} & -\frac{t^{m_1 a}-1}{t^a-1} \frac{t^{b-s_\phi a}-1}{t^b-1} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2} \right) & -\frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} & 0 & -t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e}-1}{t^e-1} \\ \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2} \right) & 0 & -\frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} & \frac{t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e}-1}{t^e-1} \\ \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2} \right) & 0 & 0 & t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1 \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \det(A_5) \}$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = - \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} (t^{b-s_\phi a}-1)$$

$$\det(A_2) = \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} (t^a-1)$$

$$\det(A_3) = - \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} (t^c-1) \quad \text{veja (B.24)}$$

$$\det(A_4) = \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} (t^d-1) \quad \text{veja (B.25)}$$

$$\det(A_5) = - \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} (t^e-1) \quad \text{veja (B.26)}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(t) &= \frac{t^{n_1 b}-1}{t^b-1} \frac{t^{n_{23} c}-1}{t^c-1} \frac{t^{n_{12} d}-1}{t^d-1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a}-1}{t^a-1} \\
&\quad \text{mdc} \{ (t^a-1), (t^{b-s_\phi a}-1), (t^c-1), (t^d-1), (t^e-1) \}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, recordando que a curva foi dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{12}}{n_1 n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_{22}}{n_1}} + x^{\frac{m_{23}}{n_1 n_{23}}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 1$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ e $n_{22} = 1$, que

$$\Delta_1(t) = (t-1) \frac{t^{w_{11}e_{01}} - 1}{t^{w_{11}e_{02}} - 1} \frac{t^{w_{22}e_{02}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1} \frac{t^{n_{23}e_{23}} - 1}{t^{e_{23}} - 1}.$$

onde

$$\begin{cases} w_{11} = m_1 \\ w_{12} = m_{12} - m_1 n_{12} + m_1 n_1 n_{12} \\ w_{22} = m_{22} - m_{21} n_{22} + m_{21} n_{21} n_{22} = m_{22} + m_1 (n_1 - 1) \\ w_{23} = m_{23} - m_{22} n_{23} + m_{22} n_{22} n_{23} = m_{23} \\ e_{01} = b_{1,1,2} + b_{2,1,3} = n_1 n_{12} + n_1 n_{22} n_{23} = n_1 (n_{12} + n_{23}) \\ e_{02} = b_{1,2,2} + b_{2,2,3} = n_{12} + n_{23} \\ e_{12} = w_{2,2} \cdot b_{2,3,3} \cdot b_{1,2,1} + w_{1,2} \cdot b_{1,3,2} = w_{22} n_{23} + w_{12} \\ e_{23} = w_{2,2} \cdot b_{1,2,2} \cdot b_{1,3,2} + w_{2,3} \cdot b_{2,4,3} = w_{22} \cdot n_{12} + w_{23} \end{cases}$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc}\{(t^a - 1), (t^{b-s_\phi a} - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1)\}$$

segue que

$$\begin{aligned} (t^r - 1) & \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12} d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1}{t^a - 1} \\ & = (t-1) \frac{t^{w_{11}e_{01}} - 1}{t^{w_{11}e_{02}} - 1} \frac{t^{w_{22}e_{02}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1} \frac{t^{n_{23}e_{23}} - 1}{t^{e_{23}} - 1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{m_1 a} - 1) (t^{m_{23} c} - 1) (t^{n_{12} d} - 1) (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \\ & (t^{m_1 e_{02}} - 1) (t^{e_{01}} - 1) (t^{e_{12}} - 1) (t^{e_{23}} - 1) \\ & = (t-1) (t^{m_1 e_{01}} - 1) (t^{w_{22}e_{02}} - 1) (t^{n_{12}e_{12}} - 1) (t^{n_{23}e_{23}} - 1) \quad (**) \\ & (t^a - 1) (t^b - 1) (t^c - 1)(t^c - 1) \end{aligned}$$

Identificando, na igualdade acima, os termos de menor grau em t , vemos que $r = 1$. Simplificando $(t-1)$ e analisando na igualdade resultante, em vista de $(*)$, os termos de menor grau em t , temos que:

$$a = e_{01} = n_1(n_{12} + n_{23})$$

Em vista das relações $(*)$, concluímos que:

$$\begin{cases} b = m_1 (n_{12} + n_{23}) \\ b - s_\phi a = n_{12} + n_{23} \\ c = e_{23} = w_{22} n_{12} + w_{23} \\ d = e_{12} = w_{22} n_{23} + w_{12} \\ e = n_{12} \end{cases}$$

Assim, determinamos a matriz de Alexander, com a qual podemos calcular explicitamente $\Delta_2(t)$, e portanto, o polinômio mínimo da monodromia neste caso.

Caso 4: Seja $f = f_1 f_2$, com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} + x^{\frac{m_{12}}{n_{11} n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{22}}} + x^{\frac{m_{23}}{n_{22} n_{23}}} \end{cases}$$

onde $\{(m_{1i}, n_{1i})\}$ são os pares de Puiseux do ramo f_1 para $i = 1, 2$ e $\{(m_{2j}, n_{2j})\}$ são os pares de Puiseux do ramo f_2 para $j = 2, 3$. Isto conduz à seguinte árvore:

Figura 13:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_{21}, & \nu_\phi = n_{21} = 1 & \text{e} & m_{21}r_\phi = n_{21}s_\phi + 1 \\ \mu_0 = m_{11}, & \nu_0 = n_{11} & \text{e} & m_{11}r_0 = n_{11}s_0 + 1 \\ \mu_1 = m_{22}, & \nu_1 = n_{22} & \text{e} & m_{22}r_1 = n_{22}s_1 + 1 \\ \mu_{11}, & \nu_{11} = n_{23} & \text{e} & \mu_{11}r_{11} = n_{23}s_{11} + 1 \\ \mu_{01}, & \nu_{01} = n_{12} & \text{e} & \mu_{01}r_{01} = n_{12}s_{01} + 1 \end{cases}$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$ é gerado por α_z, β_z , com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 0, 01, 1, 11, 2, 3\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$(R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(R2) \quad 0 > \phi \text{ e } 0 \text{ é uma haste} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0^{\mu_\phi} \beta_0^{\nu_\phi} = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi}$$

$$\Rightarrow \beta_0^1 = \alpha_0^{-m_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$\begin{aligned}
(R4) \quad \phi \text{ é não terminal com haste } 0 &\Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi} = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\
&\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}
\end{aligned}$$

Relações de (0):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 01 > 0 \text{ e } 01 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_{01}^{\nu_0 \mu_0} \beta_{01} = \alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0} \\
&\Rightarrow \beta_{01} = \alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \\
(R3) \quad 0 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{\nu_0} = (\alpha_0^{\mu_0} \beta_0^{\nu_0})^{r_0} \\
&\Rightarrow (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}
\end{aligned}$$

Relações de (1):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 11 > 1 \text{ e } 1 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_{11}^{\nu_1 \mu_1} \beta_{11} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_{11} = \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} \\
(R3) \quad 1 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1} \\
&\Rightarrow (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}
\end{aligned}$$

Relações de (11):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 2 > 11 \text{ e } 11 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\nu_{11} \mu_{11}} \beta_2 = \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{\nu_{11}} \\
&\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-\mu_{11} n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} \\
(R3) \quad 11 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{\nu_{11}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{\nu_{11}})^{r_{11}} \\
&\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{n_{23}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}})^{r_{11}}
\end{aligned}$$

Relações de (01):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 3 > 01 \text{ e } 01 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_3^{\nu_{01} \mu_{01}} \beta_3 = \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{\nu_{01}} \\
&\Rightarrow \beta_3 = \alpha_3^{-\mu_{01} n_{12}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} \\
(R3) \quad 01 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{\nu_{01}} = (\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{\nu_{01}})^{r_{01}} \\
&\Rightarrow (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{n_{12}} = (\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}})^{r_{01}}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_0, \beta_0] = 1 \Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1 \quad \text{veja (A.1)}$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1$$

$$[\alpha_{01}, \beta_{01}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1 \quad \text{veja (A.2)}$$

$$[\alpha_{11}, \beta_{11}] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_{11}] = 1 \quad \text{veja (B.27)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (B.28)}$$

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1 \quad \text{veja (B.29)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_0, \beta_0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{11}, \beta_{11}, \alpha_{01}$, e β_{01} , sujeitos às relações:

$$(1) \quad \beta_1 = \alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(2) \quad \alpha_1 = \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}$$

$$(3) \quad [\alpha_0, \beta_0] = 1$$

$$(4) \quad \alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}}$$

$$(5) \quad (\alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0})^{n_{11}} = (\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{r_0}$$

$$(6) \quad [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1$$

$$(7) \quad (\alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_{22}} = (\alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}})^{r_1}$$

$$(8) \quad [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_{11}] = 1$$

$$(9) \quad (\alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}})^{n_{23}} = (\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}})^{r_{11}}$$

$$(10) \quad [\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1$$

$$(11) \quad (\alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}})^{n_{12}} = (\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}})^{r_{01}}$$

$$(12) \quad [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições, sobre os pares de Puiseux dos ramos da curva:

$$\begin{cases} m_{11} = \lambda_1 n_{11} + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ m_{22} = \lambda_2 n_{22} + 1 & \text{para algum } \lambda_2 \in \mathbb{Z} \\ \mu_{11} = \lambda_3 n_{23} + 1 & \text{para algum } \lambda_3 \in \mathbb{Z} \\ \mu_{01} = \lambda_4 n_{12} + 1 & \text{para algum } \lambda_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

o que implica que $r_0 = r_1 = r_{11} = r_{01} = 1$. Adotaremos como novos geradores:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_0, \\ x_2 = \beta_0, \\ x_3 = \alpha_{01} \alpha_0^{s_0} \beta_0^{r_0}, \\ x_4 = \alpha_\phi, \\ x_5 = \alpha_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = \beta_1, \\ x_7 = \alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1}, \\ x_8 = \alpha_2 \alpha_{11}^{s_{11}} \beta_{11}^{r_{11}}, \\ x_9 = \alpha_3 \alpha_{01}^{s_{01}} \beta_{01}^{r_{01}}. \end{cases}$$

Observe que as relações (6), (8), (10) e (12) são equivalentes a

$$\begin{cases} (6') [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, x_3] = 1, \\ (8') [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, x_7] = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} (10') [\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, x_8] = 1 \\ (12') [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, x_9] = 1 \end{cases}$$

respectivamente, e que as mesmas são trivializadas pelas relações (5'), (7'), (9') e (11'), obtidas de (5), (7), (9) e (11), respectivamente, após a troca dos geradores. Ficamos assim, com as seguintes relações:

$$(1) \quad x_6 = x_5^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}$$

$$(2) \quad x_5 = x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}$$

$$(3) \quad [x_1, x_2] = 1$$

$$(4) \quad x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} = x_4^{m_{21}}$$

$$(5) \quad x_3^{n_{11}} = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}}$$

$$(6) \quad x_7^{n_{22}} = x_5^{m_{22}} x_6^{n_{22}}$$

$$(7) \quad x_8^{n_{23}} = \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}$$

$$(8) \quad x_9^{n_{22}} = \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}$$

Substituindo as relações (1) e (2) na relação (6) acima, podemos eliminá-las, e ficaremos com 7 geradores $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9\}$ e as 6 relações a seguir:

$$(1) \quad [x_1, x_2] = 1$$

$$(2) \quad x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} = x_4^{m_{21}}$$

$$(3) \quad x_3^{n_{11}} = x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}}$$

$$(4) \quad x_7^{n_{22}} = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}}$$

$$(5) \quad x_8^{n_{23}} = [x_7 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23} - m_{22} n_{23}}$$

$$(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22} - m_{21} n_{22}) n_{23}} x_4^{m_{21} n_{22} n_{23}} \quad \text{veja (B.30)}$$

$$(6) \quad x_9^{n_{12}} = (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12} - m_{11} n_{12}} x_1^{m_{11} n_{12}} x_2^{n_{11} n_{12}} \quad \text{veja (B.31)}$$

Renomeando x_7, x_8, x_9 por x_5, x_6, x_7 , respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \pi_1(X) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}, \text{ onde} \\ r_1 &= x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \\ r_2 &= x_1^{m_{11}} x_2^{n_{11}} x_3^{-n_{11}} \\ r_3 &= x_1^{m_{21}} x_2^{n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ r_4 &= (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} x_5^{-n_{22}} \\ r_5 &= [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23} - m_{22} n_{23}} \\ &\quad (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22} - m_{21} n_{22}) n_{23}} x_4^{m_{21} n_{22} n_{23}} x_6^{-n_{23}} \\ r_6 &= (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12} - m_{11} n_{12}} x_1^{m_{11} n_{12}} x_2^{n_{11} n_{12}} x_7^{-n_{12}} \end{aligned}$$

Observe que as quatro primeiras relações acima, são as mesmas que aparecem na apresentação do grupo do link para curvas com dois ramos distintos de gênero 1, como descrito no Caso 2, da Seção 2.1 (veja página 23). Portanto, a matriz de Alexander deste link, terá um bloco consistindo da matriz de Alexander obtida na Seção 2.1.

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ para $i = 1, \dots, 7$. Temporariamente, escrevemos

$$\Phi : \mathbb{Z} [\pi_1 (X)] \longrightarrow \mathbb{Z} [t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 \mapsto t^a \\ x_2 \mapsto t^b \\ x_3 \mapsto t^c \\ x_4 \mapsto t^d \\ x_5 \mapsto t^e \\ x_6 \mapsto t^f \\ x_7 \mapsto t^g \end{cases}$$

Note que as relações r_i , para $i = 2, 3, 4, 5, 6$, fornecem as relações entre a,b,c,d,e,f,g:

$$(*) \begin{cases} n_{11} \ c = m_{11} \ a + n_{11} \ b \\ m_{21} \ d = m_{21} \ a + n_{21} \ b \\ n_{22} \ e = (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22} + [(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22} \\ n_{23} \ f = [e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d \\ \quad + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23}) \\ \quad + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{21}n_{22})n_{23} + m_{21}n_{22}n_{23}d \\ n_{12} \ g = (c - r_0b - s_0a)(m_{12} - m_{11}n_{12}) + m_{11}n_{12}a + n_{11}n_{12}b \end{cases}$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right)$.

Pela observação que fizemos acima, bastará derivar as relações r_5 e r_6 .

Como

$$r_5 = [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} x_4^{m_{21}n_{22}n_{23}} x_6^{-n_{23}},$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_5}{\partial x_1} = & [x_5 \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ & \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}] \\ & \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} - 1 \\ & + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \\ & \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \end{aligned} \quad \text{veja (B.32)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) &= \left[t^e \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} - t^{e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d} \right. \\
&\quad \left. \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \right] \\
&\quad \frac{t[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22} n_{23}) - 1}{t[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)] - 1} \\
&\quad + t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22} n_{23})} \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \\
&\quad \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21} n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_2} &= \left[x_5 x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} \right. \\
&\quad \left. x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \right] \\
&\quad \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] m_{23} - m_{22} n_{23} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\
&\quad + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] m_{23} - m_{22} n_{23} x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \\
&\quad \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22} - m_{21} n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \quad \text{veja (B.33)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) &= \left[t^{e + s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} - t^{e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d} \right. \\
&\quad \left. t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \right] \\
&\quad \frac{t[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22} n_{23}) - 1}{t[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)] - 1} \\
&\quad + t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21} n_{21}) - m_{21} d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22} n_{23})} t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \\
&\quad \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21} n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_5}{\partial x_4} &= \left[-x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \right. \\
&\quad \left. - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \right] \quad \text{veja (B.34)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(s_1-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \Big] \\
& \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\
& - [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\
& (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
& + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\
& (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \frac{x_4^{m_{21}n_{22}n_{23}} - 1}{x_4 - 1} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) = & \left[-t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} - 1} \right. \\
& - t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} + t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \\
& \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1-1)} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \Big] \\
& \frac{t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\
& - t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})} \\
& t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \\
& + t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})} \\
& t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \frac{t^{m_{21}n_{22}n_{23}d} - 1}{t^d - 1} \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_5} = & \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) = & \frac{t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_6} = & - \frac{x_6^{n_{23}} - 1}{x_6 - 1} \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_6}\right) = - \frac{t^{n_{23}f} - 1}{tf - 1} \\
\frac{\partial r_5}{\partial x_7} = & 0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_7}\right) = 0
\end{aligned}$$

Como $r_6 = (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} x_2^{n_{11}n_{12}} x_7^{-n_{12}}$, temos que

$$\frac{\partial r_6}{\partial x_1} = - (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) \frac{x_1^{s_0} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1}$$

$$\begin{aligned}
& + (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} \frac{x_1^{m_{11}n_{12}} - 1}{x_1 - 1} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) &= - t^{c-r_0b-s_0a} \frac{t^{s_0a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
& + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} \frac{t^{m_{11}n_{12}a} - 1}{t^a - 1} \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_2} &= - x_3 x_2^{-r_0} \frac{x_2^{r_0} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1} \\
& + (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} \frac{x_2^{n_{11}n_{12}} - 1}{x_2 - 1} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) &= - t^{c-r_0b} \frac{t^{r_0b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
& + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} t^{m_{11}n_{12}a} \frac{t^{n_{11}n_{12}b} - 1}{t^b - 1} \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_3} &= \frac{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} - 1}{(x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0}) - 1} \\
\Rightarrow \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) &= \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_4} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_4}\right) = 0 \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_5} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_5}\right) = 0 \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_6} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_6}\right) = 0 \\
\frac{\partial r_6}{\partial x_7} &= - \frac{x_7^{n_{12}} - 1}{x_7 - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_7}\right) = - \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1}
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) & -\frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \det(A_5), \det(A_6), \det(A_7) \},$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_2) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^b - 1)$$

$$\det(A_3) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^c - 1) \quad \text{veja (A.3)}$$

$$\det(A_4) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^d - 1) \quad \text{veja (A.4)}$$

$$\det(A_5) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^e - 1) \quad \text{veja (A.13)}$$

$$\det(A_6) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^f - 1) \quad \text{veja (B.36)}$$

$$\det(A_7) = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} (t^g - 1) \quad \text{veja (B.37)}$$

Logo,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1}$$

$$\text{mdc} \{ (t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1), (t^f - 1), (t^g - 1) \}.$$

Por outro lado, como a curva é dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_{11}}{n_{11}}} + x^{\frac{m_{12}}{n_{11}n_{12}}} \\ y_2 = x^{\frac{m_{21}}{n_{21}}} + x^{\frac{m_{22}}{n_{22}}} + x^{\frac{m_{23}}{n_{22}n_{23}}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 0$, $s_1 = 2$ e $s_2 = 3$, que

$$\Delta_1(t) = (t - 1) \frac{t^{w_{21}e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{11}e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1} \frac{t^{n_{22}e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1} \frac{t^{n_{23}e_{23}} - 1}{t^{e_{23}} - 1}.$$

onde

$$\begin{cases} w_{12} = m_{12} - m_{11}n_{12} + m_{11}n_{11}n_{12} \\ w_{21} = m_{21} \\ w_{22} = m_{22} - m_{21}n_{22} + m_{21}n_{21}n_{22} = m_{22} \\ w_{23} = m_{23} - m_{22}n_{23} + m_{22}n_{22}n_{23} \\ e_{01} = b_{1,1,2} + b_{2,1,3} = (\prod_{j=1}^2 n_{1,j}) + (\prod_{j=1}^3 n_{2,j}) = n_{11} n_{12} + n_{21} n_{22} n_{23} \\ e_{11} = w_{2,1}.b_{2,2,3}.b_{1,1,0} + w_{1,1}.b_{1,2,2} = m_{21}.n_{22}.n_{23}.1 + m_{11}.n_{12} = m_{21} n_{22} n_{23} + m_{11} n_{12} \\ e_{12} = w_{2,1}.b_{2,2,3}.b_{1,1,1} + w_{1,2}.b_{1,3,2} = m_{21}.n_{22}.n_{23}.n_{11} + w_{12}.1 = m_{21} n_{22} n_{23} n_{11} + w_{12} \\ e_{22} = w_{2,1}.b_{1,1,2}.b_{2,2,1} + w_{22}.b_{2,3,3} = m_{21}.n_{11}.n_{12}.1 + w_{22}.n_{23} = m_{21} n_{11} n_{12} + m_{22} n_{23} \\ e_{23} = w_{2,1}.b_{1,1,2}.b_{2,2,2} + w_{2,3}.b_{2,4,3} = m_{21}.n_{11}.n_{12}.n_{22} + w_{23}.1 = m_{21} n_{11} n_{12} n_{22} + w_{23} \end{cases}$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{(t^a - 1), (t^b - 1), (t^c - 1), (t^d - 1), (t^e - 1), (t^f - 1), (t^g - 1)\},$$

segue que

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \\ &= (t - 1) \frac{t^{n_{11} \cdot e_{11}} - 1}{t^{e_{11}} - 1} \frac{t^{m_{21}e_{01}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} \frac{t^{n_{22} \cdot e_{22}} - 1}{t^{e_{22}} - 1} \frac{t^{n_{23}e_{23}} - 1}{t^{e_{23}} - 1} \frac{t^{n_{12}e_{12}} - 1}{t^{e_{12}} - 1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & (t^r - 1) (t^{n_{11}c} - 1) (t^{m_{21}d} - 1) (t^{n_{22}e} - 1) (t^{n_{23}f} - 1) (t^{n_{12}g} - 1) \\ &= (t - 1) (t^{n_{11}e_{11}} - 1) (t^{m_{21}e_{01}} - 1) (t^{n_{22}e_{22}} - 1) (t^{n_{23}e_{23}} - 1) (t^{n_{12}e_{12}} - 1) \quad (**) \\ & \quad (t^c - 1) (t^d - 1) (t^e - 1)(t^f - 1) (t^g - 1). \end{aligned}$$

Identificando, na igualdade acima, os termos de menor grau em t , vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$ e analisando na igualdade resultante, em vista de $(**)$ e $(*)$, os termos de menor grau em t , concluímos que

$$\begin{cases} d = e_{01} = n_{11} n_{12} + n_{21} n_{22} n_{23} \\ c = e_{11} = m_{11} n_{12} + m_{21} n_{22} n_{23} \\ e = e_{22} = m_{21} n_{11} n_{12} + m_{22} n_{23} \\ f = e_{23} = m_{21} n_{11} n_{12} n_{22} + w_{23} \\ g = e_{12} = m_{21} n_{22} n_{23} n_{11} + w_{12} \end{cases}$$

Em vista das relações $(*)$, concluímos que

$$a = n_{11} n_{12} \quad \text{e} \quad b = m_{21} n_{22} n_{23}.$$

Assim, determinamos a matriz de Alexander, com a qual podemos calcular explicitamente $\Delta_2(t)$, e portanto, o polinômio mínimo da monodromia neste caso.

3.2 Ramos com pares de Puiseux iguais

Nesta situação, temos as seguintes possibilidades para os tipos de árvores que podem ocorrer, conforme dado na Figura 14.

Figura 14: Árvores para ramos de gênero 2 com pares de Puiseux iguais

Como os casos de 1 a 4, são casos particulares dos casos estudados para ramos com pares de Puiseux distintos, eles serão omitidos.

Caso 5: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2$ com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + 2 x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} \end{cases}$$

onde (m_i, n_i) são os pares de Puiseux dos ramos f_i para $i = 1, 2$. Isto conduz à seguinte árvore:

Figura 15:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_1, & \nu_\phi = n_1 & \text{e} & m_1 r_\phi = n_1 s_\phi + 1 \\ \mu_1 = m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2, & \nu_1 = n_2 & \text{e} & \mu_1 r_1 = s_1 \nu_1 + 1 \end{cases}$$

Portanto, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z , com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 1, 2, 3\}$ da árvore Ξ , satisfazendo as relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \\ (R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_\phi^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi} \\ & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (1) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 2 > 1 \text{ e } 2 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_2^{\nu_1 \mu_1} \beta_2 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\ & \Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} \\ (R1) \quad 3 > 1 \text{ e } 3 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_3^{\nu_1 \mu_1} \beta_3 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\ & \Rightarrow \beta_3 = \alpha_3^{-\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} \\ (R3) \quad 1 \text{ é não terminal sem haste} & \Rightarrow (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1^{s_1} \beta_\phi^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1} \\ & \Rightarrow (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1^{s_1})^{n_2} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2})^{r_1} \end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$[\alpha_\phi, \beta_\phi] = 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi$$

$$[\alpha_1, \beta_1] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)}$$

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (B.1)}$$

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_3] = 1 \quad \text{veja (B.1)}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \alpha_2$ e α_3 , sujeitos às relações:

$$(1) (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi}$$

$$(2) [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1$$

$$(3) (\alpha_2 \alpha_3 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2})^{r_1}$$

$$(4) [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_2] = 1$$

$$(5) [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_3] = 1$$

Como temos 4 geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, sujeitos à 5 relações, e como não conseguimos fazer uma mudança de geradores que reduza o número de relações, o método mencionado na Seção 1.2, para o cálculo dos polinômios de Alexander, não se aplica neste caso.

Caso 6: Neste caso, podemos escolher $f = f_1 f_2$, com as seguintes representações por séries de Puiseux:

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + x^{\frac{m_3}{n_1 n_2 n_3}} \end{cases}$$

onde $\{(m_1, n_1), (m_2, n_2)\}$ são os pares de Puiseux de ambos os ramos. Isto conduz à árvore, dada na Figura 16.

Figura 16:

Com as notações da Seção 1.3,

$$\begin{cases} \mu_\phi = m_1 & \nu_\phi = n_1 & \text{e} & m_1 r_\phi = s_\phi n_1 + 1 \\ \mu_1 = m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2, & \nu_1 = n_2 & \text{e} & \mu_1 r_1 = s_1 \nu_1 + 1 \\ \mu_2 = m_3 - m_2 n_3 + m_2 n_2 n_3, & \nu_2 = 1 & \text{e} & \mu_2 r_2 = s_2 \nu_2 + 1 \end{cases}$$

Note que $(r_2, s_2) = (1, \mu_2 - 1)$. Temos que, o grupo do link $\pi_1(X)$, é gerado por α_z, β_z , com z percorrendo o conjunto dos vértices $\mathcal{V} = \{\phi, 0, 1, 2, 20, 21\}$ da árvore Ξ , satisfazendo às relações que exibiremos a seguir.

Relações de (ϕ) :

$$\begin{aligned} (R1) \quad 1 > \phi \text{ e } 1 \text{ não é haste} & \Rightarrow \alpha_1^{\nu_\phi \mu_\phi} \beta_1 = \alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi} \\ & \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \\ (R3) \quad \phi \text{ é não terminal sem haste} & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi})^{\nu_\phi} = (\alpha_\phi^{\mu_\phi} \beta_\phi^{\nu_\phi})^{r_\phi} \\ & \Rightarrow (\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi} \end{aligned}$$

Relações de (1) :

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 2 > 1 \text{ e } 2 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\nu_1 \mu_1} \beta_2 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1} \\
&\Rightarrow \beta_2 = \alpha_2^{-\mu_1 n_2} \alpha_1^{m_1} \beta_1^{n_2} \\
(R3) \quad 1 \text{ é não terminal sem haste} &\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1} \\
&\Rightarrow (\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{n_2} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2})^{r_1}
\end{aligned}$$

Relações de (2):

$$\begin{aligned}
(R1) \quad 21 > 2 \text{ e } 21 \text{ não é haste} &\Rightarrow \alpha_{21}^{\nu_2 \mu_2} \beta_{21} = \alpha_2^{\mu_2} \beta_2^{\nu_2} \\
&\Rightarrow \beta_{21} = \alpha_{21}^{-\mu_2 1} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2^1 \\
(R2) \quad 20 > 1 \text{ e } 20 \text{ é uma haste} &\Rightarrow \alpha_2^{\mu_2} \beta_2^{\nu_2} = \alpha_{20}^{\mu_2} \beta_{20}^{\nu_2} \\
&\Rightarrow \beta_{20}^1 = \alpha_{20}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2 \\
(R4) \quad 2 \text{ é não terminal com haste } 20 &\Rightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{s_2} \beta_2^{r_2} = \alpha_{20}^{s_2} \beta_{20}^{r_2} \\
&\Rightarrow \alpha_{20} = \alpha_2 \alpha_{21}^{-1} \quad \text{veja (B.38)}
\end{aligned}$$

Relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[\alpha_\phi, \beta_\phi] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_\phi \beta_\phi = \beta_\phi \alpha_\phi \Leftrightarrow \alpha_\phi = \alpha_\phi \\
[\alpha_1, \beta_1] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \quad \text{veja (A.14)} \\
[\alpha_2, \beta_2] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1}, \alpha_2] = 1 \quad \text{veja (B.1)} \\
[\alpha_{21}, \beta_{21}] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_{21}] = 1 \quad \text{veja (B.39)} \\
[\alpha_{20}, \beta_{20}] &= 1 \Leftrightarrow [\alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_{21}] = 1 \quad \text{veja (B.40)}
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores $\alpha_\phi, \alpha_1, \alpha_2$ e α_{21} , sujeitos às relações:

$$\begin{aligned}
(1) \quad &(\alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi})^{n_1} = (\alpha_\phi^{m_1})^{r_\phi} \\
(2) \quad &[\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \\
(3) \quad &(\alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1})^{\nu_1} = (\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1})^{r_1} \\
(4) \quad &[\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1}, \alpha_2] = 1
\end{aligned}$$

$$(5) \quad [\alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_{21}] = 1$$

Para podermos ter mais geradores do que relações na apresentação de $\pi_1(X)$, somos conduzidos a fazer as seguintes restrições:

$$\begin{cases} m_1 = \lambda_1 n_1 + 1 & \text{para algum } \lambda_1 \in \mathbb{Z} \\ \mu_1 = \lambda_2 n_2 + 1 & \text{para algum } \lambda_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

o que implica que $r_\phi = r_1 = 1$. Adotaremos como novos geradores:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_\phi, \\ x_2 = \alpha_1 \alpha_\phi^{s_\phi}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \alpha_2 \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1}, \\ x_4 = \alpha_{21}. \end{cases}$$

Observe que as relações (2) e (4) são equivalentes às relações

$$(2') \quad [x_1^{m_1}, x_2] = 1 \quad \text{e} \quad (4') \quad [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{\nu_1}, x_3] = 1$$

respectivamente, e que as mesmas são trivializadas pelas relações (1') e (3'), obtidas de (1) e (3) respectivamente, após a troca dos geradores. Temos que $\pi_1(X)$ pode ser apresentado com geradores x_1, x_2, x_3 , e x_4 , sujeitos às relações:

$$(1) \quad x_2^{n_1} = x_1^{m_1}$$

$$(2) \quad x_3^{n_2} = (x_2 x_1^{-s_\phi})^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} x_1^{m_1 n_2}$$

$$(3) \quad [(x_3 x_1^{-m_1} (x_2 x_1^{-s_\phi})^{m_1 n_1 - s_1})^{\mu_2 - \mu_1 n_2} (x_2 x_1^{-s_\phi})^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} x_1^{m_1 n_2}, x_4] = 1$$

Para determinar a matriz de Alexander associada a esta apresentação, devemos determinar $\Phi(x_i) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, para $i = 1, 2, 3, 4$, onde Φ é a aplicação induzida pela fibração de Milnor. Temporariamente, escrevemos

$$\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

$$\begin{cases} x_1 & \mapsto & t^a \\ x_2 & \mapsto & t^b \\ x_3 & \mapsto & t^c \\ x_4 & \mapsto & t^d \end{cases}$$

Para efeito de simplificação das contas no cálculo do Fox da matriz de Alexander, faremos uma nova mudança de geradores, a saber,

$$\begin{cases} y_1 = x_2 x_1^{-s_\phi}, \\ y_2 = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 = x_3, \\ y_4 = x_4. \end{cases}$$

Temos que

$$\begin{aligned}\pi_1(X) &= \{ y_1, y_2, y_3, y_4 ; r_1, r_2, r_3 \}, \quad \text{onde} \\ r_1 &= (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1} y_2^{-m_1} \\ r_2 &= y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} y_2^{m_1 n_2} y_3^{-n_2} \\ r_3 &= (y_3 y_2^{-m_1} y_1^{m_1 n_1 - s_1})^{\mu_2 - \mu_1 n_2} y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} y_2^{m_1 n_2} y_4 y_2^{-m_1 n_2} y_1^{-(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)} \\ &\quad (y_3 y_2^{-m_1} y_1^{m_1 n_1 - s_1})^{-(\mu_2 - \mu_1 n_2)} y_4^{-1}\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a aplicação Φ nos novos geradores, é dada por

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{Z}[\pi_1(X)] &\longrightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \\ \begin{cases} y_1 & \mapsto t^{b-s_\phi a} \\ y_2 & \mapsto t^a \\ y_3 & \mapsto t^c \\ y_4 & \mapsto t^d \end{cases}\end{aligned}$$

Note que as relações r_i , para $i = 1, 2$, fornecem as seguintes relações entre a, b, c ,

$$(*) \begin{cases} m_1 a = n_1 b \\ n_2 c = (\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a) + m_1 n_2 a \end{cases}$$

Faremos a seguir o cálculo de $\Phi \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_j} \right)$. Observe que a primeira linha desta matriz se obtém pelos cálculos feitos no caso 4 da Seção 2.2. Deste modo, basta determinar as duas linhas restantes da matriz.

Como $r_2 = y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} y_2^{m_1 n_2} y_3^{-n_2}$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_2}{\partial y_1} &= \frac{y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} - 1}{y_1 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1} \right) = \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{(b - s_\phi a)} - 1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y_2} &= y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \frac{y_2^{m_1 n_2} - 1}{y_2 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2} \right) = t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y_3} &= y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} y_2^{m_1 n_2} y_3^{-n_2} \frac{y_3^{n_2} - 1}{y_3 - 1} \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_3} \right) = - \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \\ \frac{\partial r_2}{\partial y_4} &= 0 \Rightarrow \Phi \left(\frac{\partial r_2}{\partial y_4} \right) = 0\end{aligned}$$

Como

$$r_3 = (y_3 y_2^{-m_1} y_1^{m_1 n_1 - s_1})^{\mu_2 - \mu_1 n_2} y_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} y_2^{m_1 n_2} y_4 y_2^{-m_1 n_2} y_1^{-(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)}$$

$$(y_3 y_2^{-m_1} y_1^{m_1 n_1 - s_1})^{-(\mu_2 - \mu_1 n_2)} y_4^{-1},$$

fazendo cálculos similares, temos que

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1} \right) &= \left[t^{c-m_1 a} \frac{t^{(m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{b-s_\phi a} - 1} - \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} \right. \\ &\quad \left. + t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \frac{t^{(m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{b-s_\phi a} - 1} \right] (1 - t^d) \\ \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2} \right) &= \left[t^{c-m_1 a} \frac{t^{(m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{b-s_\phi a} - 1} - \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} \right. \\ &\quad \left. - t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + (\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} \right] (t^d - 1) \\ \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3} \right) &= - \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} (t^d - 1) \\ \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_4} \right) &= t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de Alexander é dada por

$$\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{b-s_\phi a} - 1} & t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} & -\frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3} \right) & \Phi \left(\frac{\partial r_3}{\partial y_4} \right) \end{bmatrix}.$$

Por definição, o primeiro polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_1(t) := \text{mdc} \{ \det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4) \},$$

onde A_i é a matriz $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$ na qual foi retirada a i -ésima coluna. Deste modo,

$$\det(A_1) = \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1}{t^a - 1} (t^{b-s_\phi a} - 1)$$

$$\det(A_2) = - \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1}{t^a - 1} (t^a - 1)$$

$$\det(A_3) = \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1}{t^a - 1} (t^c - 1)$$

veja (B.42)

$$\det(A_4) = \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1}{t^a - 1} (t^d - 1)$$

veja (B.43)

Logo,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1a+(m_1n_1-s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2-\mu_1n_2)+n_2c} - 1}{t^a - 1}$$

$$\text{mdc} \{ (t^{(b-s_\phi a)} - 1), (t^a - 1), (t^c - 1), (t^d - 1) \}.$$

Por outro lado, como a curva é dada por

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1n_2}} \\ y_2 = x^{\frac{m_1}{n_1}} + x^{\frac{m_2}{n_1n_2}} + x^{\frac{m_3}{n_1n_2n_3}} \end{cases}$$

segue da Seção 1.2, com $i = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$ e $n_3 = 1$, que

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{w_{11}e_{01}} - 1}{t^{w_{11}e_{02}} - 1} \frac{t^{w_{12}e_{02}} - 1}{t^{w_{12}e_{03}} - 1} \frac{t^{w_{23}e_{03}} - 1}{t^{e_{01}} - 1} (t - 1)$$

onde

$$\begin{cases} w_{11} = m_1 \\ w_{12} = m_2 - m_1n_2 + m_1n_1n_2 = \mu_1 \\ w_{23} = m_3 - m_2n_3 + m_2n_2n_3 = \mu_2 \\ e_{01} = b_{1,1,2} + b_{2,1,3} = n_1n_2 + n_1n_2n_3 = 2n_1n_2 \\ e_{02} = b_{1,2,2} + b_{2,2,3} = n_2 + n_2n_3 = 2n_2 \\ e_{03} = b_{1,3,2} + b_{2,3,3} = 1 + n_3 = 2 \end{cases}$$

Logo: Substituindo, temos que

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{n_1(2m_1n_2)} - 1}{t^{2m_1n_2} - 1} \frac{t^{n_2(2w_{12})} - 1}{t^{2w_{12}} - 1} \frac{t^{2\mu_2} - 1}{t^{2n_1n_2} - 1} (t - 1).$$

Igualando entre si as duas expressões de $\Delta_1(t)$ obtidas, e colocando

$$(t^r - 1) = \text{mdc} \{ (t^{(b-s_\phi a)} - 1), (t^a - 1), (t^c - 1), (t^d - 1) \},$$

segue que

$$\frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1a+(m_1n_1-s_1)(b-s_\phi a)](I-\mu_1n_2)+n_2c} - 1}{t^a - 1} =$$

$$\frac{t^{n_2(2w_{12})} - 1}{t^{2w_{12}} - 1} \frac{t^{n_1(2m_1n_2)} - 1}{t^{2m_1n_2} - 1} \frac{t^{2I} - 1}{t^{2n_1n_2} - 1} (t - 1).$$

Portanto,

$$(t^{n_2c} - 1) (t^{n_1b} - 1) (t^{[c-m_1a+(m_1n_1-s_1)(b-s_\phi a)](I-\mu_1n_2)+n_2c} - 1) (t^r - 1)$$

$$(t^{2w_{12}} - 1) (t^{2m_1n_2} - 1) (t^{2n_1n_2} - 1) =$$

$$(t^{n_2(2w_{12})} - 1) (t^{n_1(2m_1n_2)} - 1) (t^{2I} - 1) (t - 1) (t^c - 1) (t^b - 1) (t^a - 1).$$

Identificando, na igualdade acima, os termos de menor grau em t , vemos que $r = 1$. Simplificando $(t - 1)$, e em vista de (*), temos que $a < b$. Analisando, na igualdade resultante, os termos de menor grau em t , temos que,

$$a = 2 n_1 n_2$$

Em vista de (*), concluimos que:

$$\begin{aligned} (1) \quad m_1 a = n_1 b &\Rightarrow b = \frac{m_1}{n_1} (2n_1 n_2) = 2m_1 n_2 \\ (2) \quad b - s_\phi a &= 2m_1 n_2 - s_\phi (2n_1 n_2) = 2m_1 n_2 - 2n_2(m_1 r_\phi - 1) = 2n_2 \\ (3) \quad n_2 c &= (\mu_1 - m_1 n_1 n_2) (b - s_\phi a) + m_1 n_2 a \\ &= (\mu_1 - m_1 n_1 n_2) (2n_2) + m_1 n_2 (2n_1 n_2) \\ &\Rightarrow c = 2(\mu_1 - m_1 n_1 n_2 + m_1 n_1 n_2) = 2\mu_1 = 2w_{12} \\ (4) \quad [c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)] &(\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c \\ &= [2w_{12} - m_1 (2n_1 n_2) + (m_1 n_1 - s_1)(2n_2)] (\mu_2 - w_{12} n_2) + n_2 (2w_{12}) \\ &= [2w_{12} - 2m_1 n_1 n_2 + 2m_1 n_1 n_2 - 2(n_2 s_1)] (\mu_2 - w_{12} n_2) + 2w_{12} n_2 \\ &= [2w_{12} - 2(w_{12} - 1)] (\mu_2 - w_{12} n_2) + 2w_{12} n_2 = 2\mu_2 \end{aligned}$$

Por definição, o segundo polinômio de Alexander é dado por

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \left\{ \begin{array}{l} \det(A_{12}), \det(A_{13}), \det(A_{14}), \det(A_{23}), \det(A_{24}), \det(A_{34}), \\ \det(B_{12}), \det(B_{13}), \det(B_{14}), \det(B_{23}), \det(B_{24}), \det(B_{34}), \\ \det(C_{12}), \det(C_{13}), \det(C_{14}), \det(C_{23}), \det(C_{24}), \det(C_{34}) \end{array} \right\},$$

onde A, B e C são obtidas de $\Phi \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)$ retirando-se a terceira, segunda e primeira linhas respectivamente, e A_{ij}, B_{ij} e C_{ij} denotam as matrizes formadas pelas colunas i e j de A, B e C , respectivamente.

Temos que

$$A = \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{b - s_\phi a} - 1} & t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} & -\frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(A_{12}) &= \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^c - 1}{t^a - 1} \\ \det(A_{13}) &= -\frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \\ \det(A_{14}) &= 0 \end{aligned} \quad \text{veja (B.41)}$$

$$\det (A_{23}) = - \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{2n_2} - 1}{t^a - 1}$$

$$\det (A_{24}) = 0$$

$$\det (A_{34}) = 0$$

Temos que

$$B = \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_4}\right) \end{bmatrix}.$$

$$\det (B_{12}) = - \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^2 - 1} [(t^{2\mu_1} - 1)(t^{2(\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1) - (t^2 - 1)(t^{2\mu_2} - 1)]$$

$$\det (B_{13}) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^d - 1}{t^2 - 1} (t^{2(\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1)$$

$$\det (B_{14}) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

$$\det (B_{23}) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^2 - 1} (t^{2(\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1)$$

$$\det (B_{24}) = \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{2n_2} - 1}{t^a - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

$$\det (B_{34}) = 0$$

Finalmente, temos que

$$C = \begin{bmatrix} \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) & -\frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) & (t^{2\mu_2} - 1) \end{bmatrix}.$$

$$\det (C_{12}) = \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) - \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right)$$

$$\det (C_{13}) = \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) - \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_3}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right)$$

$$\det (C_{14}) = \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(2n_2)} - 1}{t^{2n_2} - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

$$\det (C_{23}) = \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) - \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_3}\right) \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right)$$

$$\det (C_{24}) = \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(2n_2)} (t^{2\mu_2} - 1)$$

$$\det (C_{34}) = - \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

Definimos

$$\Delta(t) := \text{mdc} \left\{ \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^2 - 1}{t^a - 1}, t^{2\mu_2} - 1 \right\}.$$

Proposição 2 *Nas condições acima, temos que*

$$\Delta_2(t) = \text{mdc} \{ \Delta(t), \det(C_{12}), \det(C_{13}), \det(C_{23}) \}$$

Prova: Para isto, basta mostrar as seguintes afirmações:

Afirmação 1:

$$\text{mdc} (\det (A_{12}), \det (A_{23})) = \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^2 - 1}{t^a - 1}$$

De fato, como

$$\det (A_{12}) = \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^c - 1}{t^a - 1}$$

$$\det (A_{23}) = - \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{2n_2} - 1}{t^a - 1}$$

segue que,

$$\begin{aligned} \text{mdc} (\det (A_{12}), \det (A_{23})) &= \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} \text{mdc} (t^c - 1, t^{2n_2} - 1) \\ &= \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} (t^{\text{mdc}(2\mu_1, 2n_2)} - 1) \\ &= \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^2 - 1}{t^a - 1}. \end{aligned}$$

Afirmação 2:

$$\text{mdc} (\det (B_{14}), \det (C_{34})) = (t^{2\mu_2} - 1)$$

De fato, como

$$\det (B_{14}) = \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} (t^{2\mu_2} - 1) \quad \det (C_{34}) = \frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

basta mostrarmos, que

$$\text{mdc} \left(\frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \right) = 1$$

Suponha por absurdo que

$$\text{mdc} \left(\frac{t^{n_2c} - 1}{t^c - 1}, \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \right) = \text{mdc} \left(\prod_{j/n_2c \nmid j \nmid c} \phi_j, \prod_{i/n_1b \nmid i \nmid b} \phi_i \right) = \prod_{i/n_2c, i/n_1b, i \nmid b, i \nmid c} \phi_i$$

Deste modo, deve existir i satisfazendo á seguinte condição:

$$i = c \operatorname{fator}(n_2) = b \operatorname{fator}(n_1)$$

pois i não divide b e i não divide c . Logo,

$$\begin{aligned} c \operatorname{fator}(n_2) &= b \operatorname{fator}(n_1) \Rightarrow \frac{c}{b} \operatorname{fator}(n_2) = \operatorname{fator}(n_1) \\ &\Rightarrow \left[\frac{2(m_2 - m_1 n_2 + m_1 n_1 n_2)}{2m_1 n_2} \right] \operatorname{fator}(n_2) = \operatorname{fator}(n_1) \\ &\Rightarrow \left[\frac{m_2}{m_1 n_2} + (n_1 - 1) \right] 2 \leq \left[\frac{m_2}{m_1 n_2} + (n_1 - 1) \right] \operatorname{fator}(n_2) = \operatorname{fator}(n_1) \leq n_1 \\ &\Rightarrow \frac{2m_2}{m_1 n_2} + 2n_1 - 2 \leq n_1 \\ &\Rightarrow \frac{2m_2}{m_1 n_2} + (n_1 - 2) \leq 0 \quad \text{o que é um absurdo pois } n_1 \geq 2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Neste caso 6, temos a seguinte **conjectura** para $\Delta_2(t)$.

$$\Delta_2(t) = \Delta(t) = \operatorname{mdc} \left\{ \frac{t^{2\mu_1 n_2} - 1}{t^{2\mu_1} - 1} \frac{t^{2m_1 n_1 n_2} - 1}{t^{2m_1 n_2} - 1} \frac{t^2 - 1}{t^{2n_1 n_2} - 1}, t^{2\mu_2} - 1 \right\}$$

Exemplo 3 Seja f um germe de curva com as seguintes respresentações por séries de Puiseux

$$\begin{cases} y_1 = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{19}{8}} \\ y_2 = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{19}{8}} + x^{\frac{m_3}{8}} \end{cases}$$

onde $\{(9, 4), (19, 2)\}$ são os pares de Puiseux de ambos os ramos. Neste caso

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{2m_1 n_1 n_2} - 1}{t^{2m_1 n_2} - 1} \frac{t - 1}{t^{2n_1 n_2} - 1} \frac{t^{2\mu_1 n_2} - 1}{t^{2\mu_1} - 1} (t^{2\mu_2} - 1)$$

onde $\mu_1 = 73$, e $\mu_2 = I(f_1, f_2) = I$ é o índice de interseção entre os ramos f_1 e f_2 .

Conseqüentemente,

$$\Delta_1(t) = \frac{t^{144} - 1}{t^{36} - 1} \frac{t - 1}{t^{16} - 1} \frac{t^{292} - 1}{t^{146} - 1} (t^{2I} - 1)$$

se $I = 180$, então $\Delta_1(t) = \phi_{24}^2 \phi_{72}^2 q_1(t)$ e $\Delta_2(t) = \phi_{24} \phi_{72}$

se $I = 192$, então $\Delta_1(t) = \phi_{24}^2 \phi_{48}^2 q_2(t)$ e $\Delta_2(t) = \phi_{24} \phi_{48}$

se $I = 204$, então $\Delta_1(t) = \phi_{24}^2 q_3(t)$ e $\Delta_2(t) = \phi_{24}$

se $I = 216$, então $\Delta_1(t) = \phi_{24}^2 \phi_{48}^2 \phi_{72}^2 \phi_{144}^2 q_4(t)$ e $\Delta_2(t) = \phi_{24} \phi_{48} \phi_{72} \phi_{144}$

onde os $q_i(t)$, para $i = 1, 2, 3, 4$, são polinômios sem fatores múltiplos.

Resumindo, obtemos os seguintes resultados para ramos de gênero 2:

Ramos com pares de Puiseux distintos

Caso 1: A matriz de Alexander foi determinada e $\Delta_2(t)$ foi calculado em função de 31 determinantes menores.

Caso 2: A matriz de Alexander foi determinada e $\Delta_2(t)$ foi calculado em função de 26 determinantes menores.

Caso 3: A matriz de Alexander foi determinada explicitamente.

Caso 4: A matriz de Alexander foi determinada explicitamente.

Ramos com pares de Puiseux iguais

Casos 1 a 4: São análogos aos feitos para ramos com pares de Puiseux distintos.

Caso 5: A matriz de Alexander não foi determinada.

Caso 6: A matriz de Alexander foi determinada e $\Delta_2(t)$ foi calculado em função dos pares de Puiseux.

Epílogo

O presente trabalho permite calcular explicitamente o polinômio mínimo da monodromia em várias situações. Não há resultados análogos na literatura onde este cálculo é feito de modo tão explícito para curvas com vários ramos. Com isto, podemos decidir em muitos casos sobre a finitude da monodromia, obtendo resultados que não são recuperados com critérios anteriormente obtidos. Por outro lado, existe um algoritmo desenvolvido por E. Brieskorn e implementado por M. Schulze no Singular, para o cálculo da monodromia, mas cuja complexidade não permite executá-lo para curvas com dois ramos de gênero maiores ou iguais a 2. Em particular, não permite fazer os cálculos de nosso Exemplo 3.

Ao iniciarmos este trabalho tínhamos a expectativa de encontrar, em função dos dados topológicos de um germe de curva plana com dois ramos quaisquer, a expressão fechada para $\Delta_2(t)$, o que não pode se concretizar por vários motivos. O primeiro motivo, reside no fato, da apresentação de Neto e Silva do grupo fundamental do link da curva, ter um número de geradores menor ou igual ao número de relações, impossibilitando o uso do método de Fox. Tal inconveniente poderia ser sanado, se conseguíssemos outra apresentação mais apropriada, mas isto envolveria outro tipo de opção inicial, com o respectivo grau de incerteza de seu sucesso. Uma outra dificuldade, consiste na diversidade de situações combinatórias que aparecem à medida que aumenta a complexidade da topologia da curva.

Por esta razão, optamos por impor restrições numéricas sobre os dados topológicos da curva, para recaírmos na boa situação de ter mais geradores do que relações na apresentação do grupo, e assim nos limitamos, a analisar as possíveis árvores que podem ocorrer para gêneros 1 e 2, para decidirmos sobre a finitude da monodromia, nestas várias situações.

Apêndice A

Neste apêndice, apresentaremos os desenvolvimentos algébricos, que foram omitidos no decorrer do texto no capítulo 2 de ramos de gênero 1.

(A.1)

$$\begin{aligned}
 [\alpha_0, \beta_0] &= 1 \Rightarrow \alpha_0 \beta_0 = \beta_0 \alpha_0 \\
 &\Rightarrow \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} (\alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}}) = (\alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}}) \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\
 &\Rightarrow \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\
 &\Rightarrow (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}) \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}) \\
 &\Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \alpha_1 \\
 &\Rightarrow \alpha_1 (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}) = (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}) \alpha_1 \\
 &\Rightarrow \alpha_1 \beta_1 = \beta_1 \alpha_1 \\
 &\Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1
 \end{aligned}$$

(A.2)

$$\begin{aligned}
 [\alpha_{01}, \beta_{01}] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_{01} \beta_{01} = \beta_{01} \alpha_{01} \\
 &\Leftrightarrow \alpha_{01} (\alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}) = (\alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}) \alpha_{01} \\
 &\Leftrightarrow \alpha_{01} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} = \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \alpha_{01} \\
 &\Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1
 \end{aligned}$$

(A.3)

$$\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} = -t^{m_{11}a} (t^{n_{11}b} - 1) - (t^{m_{11}a} - 1)$$

$$\begin{aligned}
&= -t^{m_{11}a + n_{11}b} + t^{m_{11}a} - t^{m_{11}a} + 1 \\
&= -(t^{n_{11}c} - 1)
\end{aligned}$$

(A.4)

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} &= -t^{m_{21}a} (t^{n_{21}b} - 1) - (t^{m_{21}a} - 1) \\
&= -t^{m_{21}a + n_{21}b} + t^{m_{21}a} - t^{m_{21}a} + 1 \\
&= -(t^{m_{21}d} - 1)
\end{aligned}$$

(A.5)

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} \\
&= t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \\
&= \frac{(t^{m_{21}a + n_{21}b} - t^{m_{21}a})}{(t^b - 1)} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{(t^{m_{11}a + n_{11}b} - t^{m_{11}a})}{(t^b - 1)} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \\
&= \frac{(t^{m_{21}d} - 1) - (t^{m_{21}a} - 1)}{(t^b - 1)} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{(t^{n_{11}c} - 1) - (t^{m_{11}a} - 1)}{(t^b - 1)} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \\
&= \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} \\
&\quad - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} + \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} \\
&= \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1}
\end{aligned}$$

(A.6)

$$[\alpha_0, \beta_0] = 1 \Rightarrow \alpha_0 \beta_0 = \beta_0 \alpha_0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} (\alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}}) = (\alpha_0^{m_{21}} \beta_0^{n_{21}}) \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\
&\Rightarrow \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \\
&\Rightarrow (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}) \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}) \\
&\Rightarrow \alpha_1 \alpha_\phi^{m_{21}} = \alpha_\phi^{m_{21}} \alpha_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \alpha_1 (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}) = (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}) \alpha_1 \\
&\Rightarrow \alpha_1 \beta_1 = \beta_1 \alpha_1 \\
&\Rightarrow [\alpha_1, \beta_1] = 1
\end{aligned}$$

(A.7)

$$\begin{aligned}
[\alpha_{01}, \beta_{01}] = 1 &\Leftrightarrow \alpha_{01} \beta_{01} = \beta_{01} \alpha_{01} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{01} (\alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}) = (\alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}) \alpha_{01} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{01} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} = \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}} \alpha_{01} \\
&\Leftrightarrow [\alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}}, \alpha_{01}] = 1
\end{aligned}$$

(A.8)

$$\begin{aligned}
[\alpha_{11}, \beta_{11}] = 1 &\Leftrightarrow \alpha_{11} \beta_{11} = \beta_{11} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} (\alpha_{11}^{-m_{22} n_{22}} \alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}) = (\alpha_{11}^{-m_{22} n_{22}} \alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}}) \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}} = \alpha_1^{m_{22}} \beta_1^{n_{22}} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{m_{22}} (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}})^{n_{11}} = \alpha_1^{m_{22}} (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}})^{n_{11}} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{m_{22}-m_{21} n_{21} n_{11}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{11}} = \alpha_1^{m_{22}-m_{21} n_{21} n_{11}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{11}} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21} n_{21} n_{11}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{11}} \\
&\quad = (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21} n_{21} n_{11}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{11}} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow [(\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{22}-m_{21} n_{21} n_{11}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{11}}, \alpha_{11}] = 1
\end{aligned}$$

(A.9)

Seja $D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Pelas propriedade (5) da derivação, temos que:

$$D_1 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} = - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21} n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1}$$

Como $r_4 = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} x_5^{-n_{22}}$ temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_1} &= \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} D_1 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21} n_{21}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&\quad - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
&\quad \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \left[\frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \right]
\end{aligned}$$

(A.10)

$$D_2 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} = - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_2} &= \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} D_2(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \\
&= x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&\quad - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
&\quad x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}
\end{aligned}$$

(A.11)

$$D_4 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} = (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(m_{21}n_{21}-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_4} &= - \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} D_4(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \\
&\quad + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1}
\end{aligned}$$

Substituindo temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_4} = & - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
& + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
& \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(m_{21}n_{21}-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
& + (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} \frac{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} - 1}{[(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}] - 1} \\
& (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1}
\end{aligned}$$

(A.12)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_4}{\partial x_5} = & - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22}} [(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-m_{21}n_{21}} x_4^{m_{21}}]^{n_{22}} x_5^{-n_{22}} \frac{x_5^{n_{22}} - 1}{x_5 - 1} \\
= & - x_5^{n_{22}} x_5^{-n_{22}} \frac{x_5^{n_{22}} - 1}{x_5 - 1} = - \frac{x_5^{n_{22}} - 1}{x_5 - 1}
\end{aligned}$$

(A.13)

$$\begin{aligned}
\det & \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\
= & \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[- (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) - (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) \right] \\
& - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^d - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \\
= & - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[(t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) + (t^d - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \right]
\end{aligned}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
& (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) \\
= & (t^{s_\phi a} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
& (t^{s_\phi a} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& + t^{s_\phi a} (t^{r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
& t^{s_\phi a} (t^{r_\phi b} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
= & (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
& (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}
\end{aligned}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}
& (t^a - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1} \right) + (t^b - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2} \right) + (t^d - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4} \right) \\
= & (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
& (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} (t^{s_\phi d} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} \\
& (t^{s_\phi d} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21} - 1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} \frac{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]n_{22}} - 1}{t^{[(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21}) + m_{21}d]} - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-m_{21}n_{21})} (t^{m_{21}d} - 1) \\
= & [(t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) + (-t^{s_\phi a + r_\phi b} + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)})] \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& + [-(t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) + (t^{s_\phi d} - 1) t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)}] t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)m_{22}}
\end{aligned}$$

[illegible]

$$= (t^{n_{22e}} - 1)$$

Portanto:

$$\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}) & \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}) & 0 & \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}) \end{bmatrix} = - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{n_{22e}} - 1)$$

(A.14)

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \beta_1] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \beta_1 = \beta_1 \alpha_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) = (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) \alpha_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_\phi^{m_1} \alpha_1 \\ &\Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_1] = 1 \end{aligned}$$

(A.15)

$$\begin{aligned} [\alpha_2, \beta_2] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_2 \beta_2 = \beta_2 \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow \alpha_2 (\alpha_2^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) = (\alpha_2^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow \alpha_2 \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_\phi^{m_1} \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow [\alpha_\phi^{m_1}, \alpha_2] = 1 \end{aligned}$$

(A.16)

$$\begin{aligned} (R4) \quad 1 \text{ é não terminal com haste } 10 &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{s_1} \beta_1^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \\ &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1 - 1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^1 = \alpha_{10}^{\mu_1 - 1} \beta_{10}^1 \\ &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1 - 1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_{10}^{\mu_1 - 1} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}) \\ &\Rightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1 - 1 - m_1 n_1} = \alpha_{10}^{-1} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \\ &\Rightarrow \alpha_{10} = \alpha_1 \alpha_{11}^{-1} \end{aligned}$$

(A.17)

$$\begin{aligned} [\alpha_{11}, \beta_{11}] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_{11} \beta_{11} = \beta_{11} \alpha_{11} \\ &\Leftrightarrow \alpha_{11} (\alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})) = (\alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})) \alpha_{11} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \alpha_{11}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}, \alpha_{11}] = 1$$

(A.18)

$$[\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1 \Leftrightarrow \alpha_{10} \beta_{10} = \beta_{10} \alpha_{10}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^1) = (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^1) \alpha_{10}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} \alpha_{10}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 \alpha_{11}^{-1}) \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} (\alpha_1 \alpha_{11}^{-1})$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1}, \alpha_{11}] = 1$$

(A.19)

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_2} = y_1 \frac{y_2^{s_\phi} - 1}{y_2 - 1} \frac{(y_1 y_2^{s_\phi})^{(n_1-1)} - 1}{(y_1 y_2^{s_\phi}) - 1} - (y_1 y_2^{s_\phi})^{n_1-1} y_1 y_2^{-(m_1-s_\phi)} \frac{y_2^{(m_1-s_\phi)} - 1}{y_2 - 1}$$

temos que

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial r_1}{\partial y_2} \right) &= t^{b-s_\phi a} \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(n_1-1)b} - 1}{t^b - 1} - t^{(n_1-1)b} t^{b-s_\phi a} t^{-(m_1-s_\phi)a} \frac{t^{(m_1-s_\phi)a} - 1}{t^a - 1} \\ &= t^{b-s_\phi a} \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(n_1-1)b} - 1}{t^b - 1} \\ &\quad - t^{n_1 b - b + b - s_\phi a - m_1 a + s_\phi a} \frac{t^{(m_1-s_\phi)a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^b - 1}{t^b - 1} \\ &= \frac{(t^b - t^{b-s_\phi a}) (t^{n_1 b - b} - 1) - (t^{(m_1-s_\phi)a} - 1) (t^b - 1)}{(t^a - 1) (t^b - 1)} \\ &= \frac{t^{n_1 b} - t^b - t^{b-s_\phi a + n_1 b - b} + t^{b-s_\phi a} - t^{m_1 a - s_\phi a + b} + t^{m_1 a - s_\phi a} + t^b - 1}{(t^a - 1) (t^b - 1)} \\ &= \frac{t^{n_1 b} + t^{b-s_\phi a} - t^{m_1 a - s_\phi a + b} - 1}{(t^a - 1) (t^b - 1)} \\ &= \frac{(t^{m_1 a} - 1) - t^{b-s_\phi a} (t^{m_1 a} - 1)}{(t^a - 1) (t^b - 1)} \\ &= - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \end{aligned}$$

(A.20)

$$\begin{aligned}
(b-s_\phi a)(\mu_1-m_1n_1) &= \mu_1b - m_1(n_1b) - \mu_1s_\phi a + m_1(n_1s_\phi)a \\
&= \mu_1(b-s_\phi a) - m_1(m_1a) + m_1a(m_1-1) = \mu_1(b-s_\phi a) - m_1a
\end{aligned}$$

(A.21)

$$\begin{aligned}
\det(A_3) &= -\frac{t^{m_1a}-1}{t^b-1} t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1a} \frac{t^{m_1a}-1}{t^a-1} (t^c-1) \\
&\quad - \frac{t^{m_1a}-1}{t^a-1} \frac{t^{b-s_\phi a}-1}{t^b-1} \frac{t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1a}-1}{t^{(b-s_\phi a)}-1} (t^c-1) \\
&= -\frac{t^{m_1a}-1}{t^b-1} \frac{t^c-1}{t^a-1} [t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1a} (t^{m_1a}-1) + (t^{\mu_1(b-s_\phi a)-m_1a}-1)] \\
&= -\frac{t^{m_1a}-1}{t^a-1} \frac{t^c-1}{t^b-1} (t^{\mu_1(b-s_\phi a)}-1)
\end{aligned}$$

Apêndice B

A seguir, apresentamos os desenvolvimentos algébricos que foram omitidos no decorrer do texto, para os ramos de gênero 2.

(B.1)

$$\begin{aligned}
 [\alpha_2, \beta_2] = 1 & \Leftrightarrow \alpha_2 \beta_2 = \beta_2 \alpha_2 \\
 & \Leftrightarrow \alpha_2 (\alpha_2^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}) = (\alpha_2^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}) \alpha_2 \\
 & \Leftrightarrow \alpha_2 \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} \alpha_2 \\
 & \Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_2] = 1
 \end{aligned}$$

(B.2)

$$\begin{aligned}
 [\alpha_3, \beta_3] = 1 & \Leftrightarrow \alpha_3 \beta_3 = \beta_3 \alpha_3 \\
 & \Leftrightarrow \alpha_3 (\alpha_3^{-\mu_{01} n_{12}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}) = (\alpha_3^{-\mu_{01} n_{12}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}) \alpha_3 \\
 & \Leftrightarrow \alpha_3 \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} = \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} \alpha_3 \\
 & \Leftrightarrow [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1
 \end{aligned}$$

(B.3)

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} &= \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}})^{n_{22}} \\
 &= \alpha_1^{\mu_1} \alpha_1^{-m_{21} n_{21} n_{22}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22}} \\
 &= (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{22} - m_{21} n_{22}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22}} \\
 &= (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{22} - m_{21} n_{22}} x_4^{m_{21} n_{22}}
 \end{aligned}$$

(B.4)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} &= \alpha_{01}^{\mu_{01}} (\alpha_{01}^{-m_{11} n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{n_{12}} \\
 &= \alpha_{01}^{\mu_{01}} \alpha_{01}^{-m_{11} n_{11} n_{12}} \alpha_0^{m_{11} n_{12}} \beta_0^{n_{11} n_{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_3 \beta_0^{-r_0} \alpha_0^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}} \\
&= (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} x_2^{n_{11}n_{12}}
\end{aligned}$$

(B.5)

$$\begin{aligned}
\det(A_{1234}) &= \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b}-1}{t^b-1} & -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a}-1}{t^a-1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b}-1}{t^b-1} & -\frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \left[-(t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) - (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) \right] \\
&\quad + \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \left[(t^{m_{21}a} - 1) + (t^{m_{21}d} - t^{m_{21}a}) \right] \\
&= \frac{t^{n_{12}f}-1}{t^f-1} \frac{t^{n_{11}c}-1}{t^c-1} \frac{t^{m_{21}d}-1}{t^d-1} \left[(t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) + (t^d - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \right]
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
&(t^a-1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) + (t^b-1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) + (t^d-1) \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \\
&= (t^{s_\phi a} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \\
&\quad + (t^{s_\phi a + r_\phi b} - t^{s_\phi a}) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \\
&\quad - t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} (t^{s_\phi d} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \\
&\quad + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} (t^{m_{21}n_{22}d} - 1) \\
&= (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{(t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}) - 1} \\
&\quad + (-t^{s_\phi a + r_\phi b} + t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \\
&\quad + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} (t^{m_{21}n_{22}d} - 1) \\
&= (t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22}) + m_{21}n_{22}d} - t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})} \\
& = (t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22}) + m_{21}n_{22}d} - 1) \\
& = (t^{n_{22}e} - 1)
\end{aligned}$$

Logo

$$\det(A_{1234}) = \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{n_{22}e} - 1)$$

(B.6)

$$\begin{aligned}
\det(A_5) &= - \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\
&= - \frac{t^{n_{12}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{n_{22}e} - 1)
\end{aligned}$$

(B.7)

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[-(t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) - (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) \right] \\
&+ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) [-(t^{m_{11}a + n_{11}b} - t^{m_{11}a}) - (t^{m_{11}a} - 1)] \\
&= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \left[(t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) + (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) + (t^c - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \right]
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
& (t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) + (t^c - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) = \\
&= - (t^{c-r_0b} - t^{c-r_0b-s_0a}) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1} \\
&+ t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} (t^{m_{11}n_{12}a} - 1) \\
&- (t^c - t^{c-r_0b}) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} t^{m_{11}n_{12}a} (t^{n_{11}n_{12}b} - 1) \\
& + (t^c - 1) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1} \\
& = (t^{c-r_0b-s_0a} - 1) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{(c-r_0b-s_0a)} - 1} \\
& + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12}) + m_{11}n_{12}a + n_{11}n_{12}b} - t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} \\
& = (t^{n_{12}f} - 1)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} = -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^{n_{12}f} - 1)$$

(B.8)

$$\begin{aligned}
\det(B_{1234}) &= \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^{n_{12}f} - 1)
\end{aligned}$$

(B.9)

$$\begin{aligned}
\det(A_6) &= \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^{n_{12}f} - 1)
\end{aligned}$$

(B.10)

$$[\alpha_2, \beta_2] = 1 \Leftrightarrow \alpha_2 \beta_2 = \beta_2 \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 \left(\alpha_2^{-w_{22} n_2} \alpha_1^{w_{22}-m_1 n_{12}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} \right) = \left(\alpha_2^{-w_{22} n_2} \alpha_1^{w_{22}-m_1 n_{12}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} \right) \alpha_2$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1} =$$

$$\alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1} \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}} \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \alpha_1^{m_{22}-m_1 n_{22}} \alpha_\phi^{m_1 n_{22}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{10}^{w_{22}} \beta_{10}^{n_{22}} \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} = \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \alpha_{10}^{w_{22}} \beta_{10}^{n_{22}}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1$$

(B.11)

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow \alpha_3 \beta_3 = \beta_3 \alpha_3$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 \left(\alpha_3^{-w_{12} n_{12}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} \right) = \left(\alpha_3^{-w_{12} n_{12}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} \right) \alpha_3$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} = \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} \alpha_3$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

(B.12)

Como $r_4 = x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12})}$ Temos que

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_3} = x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} D_3 (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12})}$$

$$= - x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12})} \frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

$$= - \frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

(B.13)

$$\frac{\partial r_4}{\partial x_4} = - x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} \frac{x_4^{m_1 n_{22}} - 1}{x_4 - 1}$$

$$+ x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} D_4 (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12})}$$

$$\begin{aligned}
&= - x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} \frac{x_4^{m_1 n_{22}} - 1}{x_4 - 1} \\
&+ x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12}-1)} \frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1 n_{12}} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&= - x_1^{w_{22}} x_2^{n_{22}} x_4^{-m_1 n_{22}} \frac{x_4^{m_1 n_{22}} - 1}{x_4 - 1} \\
&+ (x_3 x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1 n_{12}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_3 x_4^{-s_\phi})^{-(m_{22}-m_1 n_{12}-1)} \frac{(x_3 x_4^{-s_\phi})^{m_{22}-m_1 n_{12}} - 1}{(x_3 x_4^{-s_\phi}) - 1}
\end{aligned}$$

(B.14)

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{w_{22}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22}a} \frac{t^{n_{22}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} &= - [t^{w_{22}a+n_{22}b} - t^{w_{22}a} + t^{w_{22}a} - 1] \\
&= - (t^{w_{22}a+n_{22}b} - 1)
\end{aligned}$$

(B.15)

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{w_{12}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} &= - [t^{w_{12}a+n_{12}b} - t^{w_{12}a} + t^{w_{12}a} - 1] \\
&= - (t^{w_{12}a+n_{12}b} - 1) \\
&= - (t^{n_{12}e} - 1)
\end{aligned}$$

(B.16)

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_3}) & \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}) \end{bmatrix} &= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}) + \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \Phi(\frac{\partial r_4}{\partial x_3}) \\
&= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{1}{t^d - 1} [-t^{w_{22}a+n_{22}b} + t^{w_{22}a+n_{22}b-m_1 n_{22}d} + (t^c - t^{c-s_\phi d}) \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1}] \\
&+ \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{1}{t^c - 1} [-\frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1} (t^c - 1)] \\
&= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{1}{t^d - 1} [-t^{w_{22}a+n_{22}b} + t^{w_{22}a+n_{22}b-m_1 n_{22}d} - (t^{c-s_\phi d} - 1) \frac{t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s_\phi d)} - 1}] \\
&= \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{1}{t^d - 1} [-t^{w_{22}a+n_{22}b} + t^{w_{22}a+n_{22}b-m_1 n_{22}d} - t^{(c-s_\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} + 1] \\
&= -\frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{w_{22}a+n_{22}b} - 1}{t^d - 1}
\end{aligned}$$

$$= - \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1}$$

(B.17)

$$\begin{aligned} \det(A_5) &= \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{w_{12}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{12}a} \frac{t^{n_{12}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \\ \frac{t^{w_{22}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22}a} \frac{t^{n_{22}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{(c-s\phi d)(m_{22}-m_1 n_{12})} - 1}{t^{(c-s\phi d)} - 1} & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{w_{22}a} - 1}{t^a - 1} & t^{w_{22}a} \frac{t^{n_{22}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 c} - 1}{t^c - 1} & -\frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_3}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^{m_1 d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{w_{22}a + n_{22}b} - 1}{t^c - 1} (t^{n_{12}e} - 1) \end{aligned}$$

(B.18)

$$\begin{aligned} [\alpha_{10}, \beta_{10}] = 1 &\Leftrightarrow \alpha_{10} \beta_{10} = \beta_{10} \alpha_{10} \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) = (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) \alpha_{10} \\ &\Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1, \alpha_{10}] = 1 \end{aligned}$$

(B.19)

$$\begin{aligned} [\alpha_{11}, \beta_{11}] = 1 &\Leftrightarrow \alpha_{11} \beta_{11} = \beta_{11} \alpha_{11} \\ &\Leftrightarrow \alpha_{11} (\alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) = (\alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) \alpha_{11} \\ &\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \alpha_{11} \\ &\Leftrightarrow (\alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1}) \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 (\alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1}) \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10}^{s_1} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \alpha_{10}^{s_1} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1) \\ &\Leftrightarrow \alpha_{10}^{\mu_1 - 1} \alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1 \alpha_{10}^{\mu_1 - 1} \alpha_{10}^{-\mu_1} \\ &\Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1, \alpha_{10}] = 1 \end{aligned}$$

(B.20)

$$\begin{aligned} [\alpha_2, \beta_2] = 1 &\Leftrightarrow \alpha_2 \beta_2 = \beta_2 \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow \alpha_2 (\alpha_2^{-\mu_1 n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_1} \beta_{11}^{n_{23}}) = (\alpha_2^{-\mu_1 n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_1} \beta_{11}^{n_{23}}) \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_{11}^{\mu_1} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1$$

(B.21)

$$[\alpha_3, \beta_3] = 1 \Leftrightarrow \alpha_3 \beta_3 = \beta_3 \alpha_3$$

$$\Leftrightarrow \alpha_3 (\alpha_3^{-\mu_1 n_{23}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}) = (\alpha_3^{-w_{12} n_{12}} \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}) \alpha_3$$

$$\Leftrightarrow [\alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1$$

(B.22)

Observe que

$$\alpha^{\mu_1} \beta_1 = \alpha_1^{\mu_1} \alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1} = \alpha_1^{m_{22}-m_1} \alpha_\phi^{m_1}$$

como $\beta_{11} = \alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1$ então

$$\Rightarrow \beta_{11}^{n_{23}} = (\alpha_{11}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1)^{n_{23}} = \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{23}} \alpha_1^{\mu_1 n_{23}} \beta_1^{n_{23}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} = \alpha_{11}^{\mu_{11}} \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{23}} \alpha_1^{\mu_1 n_{23}} \beta_1^{n_{23}}$$

$$= (\alpha_{10}^{s_1} \beta_{10}^{r_1} \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1})^{\mu_{11}-\mu_1 n_{23}} \alpha_1^{\mu_1 n_{23}} \beta_1^{n_{23}}$$

$$= \alpha_{10}^{s_1(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \beta_{10}^{r_1(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \beta_1^{-r_1(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{-s_1(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{\mu_1 n_{23}} \beta_1^{n_{23}}$$

$$= \alpha_{10}^{(\mu_1-1)(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1)^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{-(\mu_1-1)(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})+\mu_1 n_{23}} \beta_1^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})+n_{23}}$$

$$= \alpha_{10}^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{\mu_{11}} \beta_1^{n_{23}}$$

$$= \alpha_{10}^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{\mu_{11}} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^{n_{23}}$$

$$= \alpha_{10}^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})} \alpha_1^{\mu_{11}-m_1 n_1 n_{23}} \alpha_\phi^{m_1 n_{23}}$$

(B.23)

como $\beta_{10} = \alpha_{10}^{\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1$ então

$$\beta_{10}^{n_{12}} = (\alpha_{10}^{-\mu_1} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1)^{n_{12}} = \alpha_{10}^{-\mu_1 n_{12}} \alpha_1^{\mu_1 n_{12}} \beta_1^{n_{12}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{10}^{w_{12}} \beta_{10}^{n_{12}} = \alpha_{10}^{\mu_{10}} \alpha_{10}^{-\mu_1 n_{12}} \alpha_1^{\mu_1 n_{12}} \beta_1^{n_{12}}$$

$$= \alpha_{10}^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} \alpha_1^{\mu_1 n_{12}} (\alpha_1^{-m_1 n_1} \alpha_\phi^{m_1})^{n_{12}}$$

$$= \alpha_{10}^{\mu_{10}-\mu_1 n_{12}} \alpha_1^{n_{12}(\mu_1-m_1 n_1)} \alpha_\phi^{m_1 n_{12}}$$

Algumas contas que utilizaremos a seguir

(C.1)

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} t^{-(\mu_{11} - \mu_1 n_{23})e + (\mu_{11} - m_1 n_1 n_{23})(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_{23} a} - 1}{t^a - 1} \\
&\quad + \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^b - 1} \left[t^{-(\mu_{11} - \mu_1 n_{23})e + (\mu_{11} - m_1 n_1 n_{23})(b - s_\phi a)} - t^{-(\mu_{11} - \mu_1 n_{23})e} \right] \\
&= \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^b - 1} \left[t^{n_{23} c} - t^{-(\mu_{11} - \mu_1 n_{23})e} \right]
\end{aligned}$$

(C.2)

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} \left[t^{(\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e + n_{12}(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a) + m_1 n_{12} a} - t^{(\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e + n_{12}(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} \right] \\
&\quad + \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^b - 1} \left[t^{(\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e + n_{12}(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} - t^{(\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e} \right] \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} \left[t^{n_{12} d} - t^{(\mu_{10} - \mu_1 n_{12})e} \right]
\end{aligned}$$

(C.3)

$$\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} (t^e - 1) \\
&\quad - \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^e - 1}{t^b - 1} (t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} - 1) \\
&= -\frac{t^e - 1}{t^a - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a) + m_1 a} - t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} + t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a)} - 1 \\
&= -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^e - 1}{t^a - 1} (t^{(m_{22} - m_1)(b - s_\phi a) + m_1 a} - 1)
\end{aligned}$$

(B.24)

$$\begin{aligned}
\det(A_3) &= \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) & 0 & -t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & -\frac{t^{n_{21} d} - 1}{t^d - 1} & \frac{t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) & 0 & t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_{21} d} - 1}{t^d - 1} \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) & -t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) & t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{t^{n_{21} d} - 1}{t^d - 1} \left\{ (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \left(\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^b - 1} [t^{n_{23} c} - t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e}] \right) \right. \\
&\quad \left. \frac{1 - t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e}}{t^e - 1} \left[-\frac{t^e - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \right] \right\} \quad (C.1) \\
&= -\frac{t^{n_{21} d} - 1}{t^d - 1} (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{1}{t^b - 1} \\
&\quad [t^{n_{23} c} - t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} + t^{-(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} - 1] \\
&= -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12} d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^c - 1)
\end{aligned}$$

(B.25)

$$\begin{aligned}
\det(A_4) &= \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) & -\frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} & -t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} \frac{t^{(\mu_{11}-\mu_1 n_{23})e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & 0 & \frac{t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) & 0 & t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} \left\{ (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \left[\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} (t^{n_{12} d} - t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{t^{(\mu_{10}-\mu_1 n_{12})e} - 1}{t^e - 1} \left[-\frac{t^e - 1}{t^b - 1} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1) \right] \right\} \quad (C.2) \\
&= -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12} d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1 a} - 1}{t^a - 1} (t^d - 1)
\end{aligned}$$

(B.26)

$$\det(A_5) = \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_2}{\partial y_2}\right) & -\frac{t^{n_{23} c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & 0 & -\frac{t^{n_{12} d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^{n_{23}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}d} - 1}{t^d - 1} \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_1a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial y_2}\right) \end{bmatrix} \\
&= - \frac{t^{n_1b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_{23}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_{12}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(m_{22}-m_1)(b-s_\phi a)+m_1a} - 1}{t^a - 1} (t^e - 1) \quad (C.3)
\end{aligned}$$

(B.27)

$$\begin{aligned}
[\alpha_{11}, \beta_{11}] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_{11} \beta_{11} = \beta_{11} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} (\alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}) = (\alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}) \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{11} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} = \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} \alpha_{11} \\
&\Leftrightarrow [\alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}}, \alpha_{11}] = 1
\end{aligned}$$

(B.28)

$$\begin{aligned}
[\alpha_2, \beta_2] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_2 \beta_2 = \beta_2 \alpha_2 \\
&\Leftrightarrow \alpha_2 (\alpha_2^{-\mu_{11} n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}) = (\alpha_2^{-\mu_{11} n_{23}} \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}) \alpha_2 \\
&\Leftrightarrow \alpha_2 \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} = \alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} \alpha_2 \\
&\Leftrightarrow [\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}}, \alpha_2] = 1
\end{aligned}$$

(B.29)

$$\begin{aligned}
[\alpha_3, \beta_3] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_3 \beta_3 = \beta_3 \alpha_3 \\
&\Leftrightarrow \alpha_3 (\alpha_3^{-\mu_{01} n_{12}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}) = (\alpha_3^{-\mu_{01} n_{12}} \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}) \alpha_3 \\
&\Leftrightarrow \alpha_3 \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} = \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} \alpha_3 \\
&\Leftrightarrow [\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}}, \alpha_3] = 1
\end{aligned}$$

(B.30)

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_{22}} = \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_{21} n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}})^{n_{22}} \\
&= \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1} \alpha_1^{-m_{21} n_{21} n_{22}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22}} = \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1 - m_{21} n_{21} n_{22}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22}} \\
\Rightarrow \beta_{11}^{n_{23}} &= (\alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22}} \alpha_1^{\mu_1 - m_{21} n_{21} n_{22}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22}})^{n_{23}} \\
&= \alpha_{11}^{-\mu_1 n_{22} n_{23}} \alpha_1^{(m_{22} - m_{21} n_{22}) n_{23}} \alpha_\phi^{m_{21} n_{22} n_{23}}
\end{aligned}$$

Como $n_{21} = 1$ temos que $\mu_1 = m_{22}$ logo

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} &= \alpha_{11}^{\mu_{11}} \alpha_{11}^{-m_{22}n_{22}n_{23}} \alpha_1^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \alpha_\phi^{m_{21}n_{22}n_{23}} \\ &= \alpha_{11}^{(m_{23}-m_{22}n_{23})} \alpha_1^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \alpha_\phi^{m_{21}n_{22}n_{23}}\end{aligned}$$

Por outro lado, como:

$$\alpha_1 = (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi}), \quad \beta_1 = (\alpha_1^{-m_{21}n_{21}} \alpha_\phi^{m_{21}}) \quad \text{e} \quad r_1 = 1$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha_{11} &= x_7 \beta_1^{-r_1} \alpha_1^{-s_1} = x_7 (\alpha_1^{m_{21}n_{21}} \alpha_\phi^{-m_{21}}) \alpha_1^{-s_1} \\ &= x_7 (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} \alpha_\phi^{-m_{21}} (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{-s_1}\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^{\mu_{11}} \beta_{11}^{n_{23}} &= \alpha_{11}^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \alpha_1^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \alpha_\phi^{m_{21}n_{22}n_{23}} \\ &= [x_7 (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} \alpha_\phi^{-m_{21}} (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ &\quad (\alpha_0^{s_\phi} \beta_0^{r_\phi} \alpha_\phi^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \alpha_\phi^{m_{21}n_{22}n_{23}} \\ &= [x_7 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ &\quad (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} x_4^{m_{21}n_{22}n_{23}}\end{aligned}$$

(B.31)

$$\begin{aligned}\beta_{01}^{n_{12}} &= (\alpha_{01}^{-m_{11}n_{11}} \alpha_0^{m_{11}} \beta_0^{n_{11}})^{n_{12}} = \alpha_{01}^{-m_{11}n_{11}n_{12}} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}} \\ \Rightarrow \alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} &= \alpha_{01}^{\mu_{01}} \alpha_{01}^{-m_{11}n_{11}n_{12}} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}} \\ &= \alpha_{01}^{(m_{12}-m_{11}n_{12})} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}}\end{aligned}$$

Como $\alpha_{01} = x_3 \beta_0^{-r_0} \alpha_0^{-s_0}$, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{01}^{\mu_{01}} \beta_{01}^{n_{12}} &= \alpha_{01}^{m_{12}-m_{11}n_{12}} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}} \\ &= (x_3 \beta_0^{-r_0} \alpha_0^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} \alpha_0^{m_{11}n_{12}} \beta_0^{n_{11}n_{12}} \\ &= (x_3 x_2^{-r_0} x_1^{-s_0})^{m_{12}-m_{11}n_{12}} x_1^{m_{11}n_{12}} x_2^{n_{11}n_{12}}\end{aligned}$$

(B.32)

$$\text{Como } r_5 = [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} x_4^{m_{21}n_{22}n_{23}} x_6^{-n_{23}}$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] \\ = x_5 \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

Logo:

$$\frac{\partial r_5}{\partial x_1} = [x_5 \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \quad (B.32) \\ \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}] \\ \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\ + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \frac{x_1^{s_\phi} - 1}{x_1 - 1} \\ \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

(B.33)

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] \\ = x_5 x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \\ x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_5}{\partial x_2} = & \left[x_5 \ x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \right. \\
& \left. x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \right] \\
& \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\
& + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} x_1^{s_\phi} \frac{x_2^{r_\phi} - 1}{x_2 - 1} \\
& \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}
\end{aligned}$$

(B.34)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_4} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} &= - x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} (x_4^{-1} + \dots + x_4^{-s_\phi}) \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&= - (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
\frac{\partial}{\partial x_4} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} &= \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(s_1-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
\frac{\partial}{\partial x_4} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} &= (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_4} [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] \\
&= x_5 \frac{\partial}{\partial x_4} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \\
&\quad + x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{\partial}{\partial x_4} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1} \\
&= - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\
&\quad - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1}
\end{aligned}$$

$$+ x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(s_1-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_5}{\partial x_4} = & \left[-x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \right. \\ & - x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{m_{21}} - 1}{x_4 - 1} \\ & + x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-(s_1-1)} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{s_1} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \left. \right] \\ & \frac{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} - 1}{[x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}] - 1} \\ & - [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ & (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) \frac{x_4^{s_\phi} - 1}{x_4 - 1} \frac{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{(x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi}) - 1} \\ & + [x_5 (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{m_{21}n_{21}} x_4^{-m_{21}} (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{-s_1}]^{m_{23}-m_{22}n_{23}} \\ & (x_1^{s_\phi} x_2^{r_\phi} x_4^{-s_\phi})^{(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \frac{x_4^{m_{21}n_{22}n_{23}} - 1}{x_4 - 1} \end{aligned}$$

(B.35)

$$\begin{aligned} \det & \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\ = & \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \\ = & \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) \end{bmatrix} \\ & + \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} \\ = & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[(t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) + (t^d - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= - \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[(t^{n_{23}f} - 1) - (t^e - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5} \right) \right]$$

De fato, como

$$\begin{aligned} \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) &= \left[t^e \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} - t^{e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d} \right. \\ &\quad \left. \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \right] \\ &\quad \frac{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\ &\quad + t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \\ &\quad \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\ \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) &= \left[t^{e + s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} - t^{e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d} \right. \\ &\quad \left. t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \right] \\ &\quad \frac{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\ &\quad + t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \\ &\quad \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} (t^a - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) &+ (t^b - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) \\ &= (t^a - 1) \left\{ \left[t^e \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} - t^{e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d} \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \right] \\ &\quad \frac{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\ &\quad + t^{[e + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} \frac{t^{s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \} \\
+ & (t^b - 1) \{ [t^{e+s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d}(m_{21}n_{21}) - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} - t^{e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d} \\
& t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)} \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(s_1)} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}] \\
& \frac{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\
& + [t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} t^{s_\phi a} \frac{t^{r_\phi b} - 1}{t^b - 1} \\
& \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \} \\
= & \{ [(t^{e+s_\phi a} - t^e) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} (t^{s_\phi a} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1}] \\
& + [(t^{e+s_\phi a + r_\phi b} - t^{e+s_\phi a}) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1} \\
& - t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} (t^{s_\phi a + r_\phi b} - t^{s_\phi a}) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(s_1)} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}] \} \\
& \frac{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\
+ & \{ t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} (t^{s_\phi a} - 1) \\
& \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& + t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} (t^{s_\phi a + r_\phi b} - t^{s_\phi a}) \\
& \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \} \\
= & [(t^{e+s_\phi a + r_\phi b} - t^e) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1} \\
& - t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)s_1} - 1}{t^{s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d} - 1}] \\
& \frac{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} - 1}{t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)]} - 1} \\
+ & t^{[e+(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{21}n_{21}) - m_{21}d + (s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(-s_1)](m_{23} - m_{22}n_{23})} (t^{s_\phi a + r_\phi b} - 1) \\
& \frac{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)(m_{22} - m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a + r_\phi b - s_\phi d)} - 1}.
\end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned}
\Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4} \right) = & \left[- t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}(m_{21}n_{21}) - 1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} - 1} \right. \\
& - t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} + t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \\
& \left. \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-(s_1-1))} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \right] \\
& \frac{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) - 1}{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)] - 1} \\
& - t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \\
& + t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \frac{t^{m_{21}n_{22}n_{23}d} - 1}{t^d - 1},
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
(t^d-1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4} \right) = & (t^d-1) \left\{ \left[- t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} - 1} \right. \right. \\
& - t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} + t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \\
& \left. \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-(s_1-1))} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \right] \\
& \frac{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) - 1}{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)] - 1} \\
& - t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \frac{t^{s_\phi d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} - 1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} - 1} \\
& + t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& \left. t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}} \frac{t^{m_{21}n_{22}n_{23}d} - 1}{t^d - 1} \right\} \\
= & \left[\left(- t^{e+s_\phi a+r_\phi b} + t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} \right) \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})} - 1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d} - 1} \right. \\
& - t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})} + t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \quad t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)} \quad (t^{s_\phi d}-1) \quad t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \quad] \\
& \frac{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})-1}{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)]-1} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& (t^{s_\phi a+r_\phi b}-t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \quad + \quad t^{n_{23}f} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}.
\end{aligned}$$

Consequemmente,

$$\begin{aligned}
& (t^a-1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) + (t^b-1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) + (t^d-1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4} \right) \\
& = \quad [\quad (t^{e+s_\phi a+r_\phi b}-t^e) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)] \quad (t^{s_\phi a+r_\phi b}-1) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1}-1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}-1} \quad] \\
& \frac{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})-1}{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)]-1} \\
& + \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \quad (t^{s_\phi a+r_\phi b}-1) \\
& \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \\
& + \quad [\quad (-t^{e+s_\phi a+r_\phi b}+t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})}-1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}-1} \\
& - \quad t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})} \quad + \quad t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d} \\
& + \quad t^{e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)} \quad (t^{s_\phi d}-1) \quad t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)} \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \quad] \\
& \frac{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})-1}{t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)]-1} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23}) \\
& (t^{s_\phi a+r_\phi b}-t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23}}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \quad + \quad t^{n_{23}f} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)](m_{23}-m_{22}n_{23})+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{22}-m_{21}n_{22})n_{23} \\
& = \quad [\quad (t^{e+s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}-t^e) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})}-1}{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)}-1} \\
& - \quad t[e+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(m_{21}n_{21})-m_{21}d+(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)(-s_1)] \quad (t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}-1) \quad \frac{t^{(s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d)s_1}-1}{t^{s_\phi a+r_\phi b-s_\phi d}-1}
\end{aligned}$$

[illegible]

Logo,

$$(t^a - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1} \right) + (t^b - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2} \right) + (t^d - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4} \right) = (t^{n_{23}f} - 1) - (t^e - 1) \Phi \left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5} \right).$$

(B.36)

$$\begin{aligned} \det(A_6) &= \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \left\{ \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad + \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) \end{bmatrix} \left. \right\} \\ &= -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \left\{ -\frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[(t^{n_{12}f} - 1) - (t^e - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{n_{22}e} - 1) \right\} \quad \text{veja (A.13)} \\ &= -\frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left[- (t^{n_{23}f} - 1) + (t^e - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) - (t^e - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) \right] \end{aligned}$$

Logo,

$$\det (A_6) = \frac{t^{n_{12}g} - 1}{t^g - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} (t^{n_{23}f} - 1)$$

(B.37)

$$\begin{aligned} \det (A_7) &= \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_4}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_5}{\partial x_5}\right) & -\frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_2}\right) & 0 & \Phi\left(\frac{\partial r_4}{\partial x_4}\right) & \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} & 0 \\ \frac{t^{m_{21}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{21}a} \frac{t^{n_{21}b} - 1}{t^b - 1} & 0 & -\frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) & 0 \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \left\{ \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) \end{bmatrix} + \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) \begin{bmatrix} -(t^b - 1) & (t^a - 1) \\ \frac{t^{m_{11}a} - 1}{t^a - 1} & t^{m_{11}a} \frac{t^{n_{11}b} - 1}{t^b - 1} \end{bmatrix} \right\} \\ &= -\frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} \\ &\quad \left[(t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) + (t^c - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right) \right] \\ &= -\frac{t^{n_{23}f} - 1}{t^f - 1} \frac{t^{n_{22}e} - 1}{t^e - 1} \frac{t^{m_{21}d} - 1}{t^d - 1} \frac{t^{n_{11}c} - 1}{t^c - 1} (t^{n_{12}g} - 1). \end{aligned}$$

De fato, temos que

$$(t^a - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_1}\right) + (t^b - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_2}\right) + (t^c - 1) \Phi\left(\frac{\partial r_6}{\partial x_3}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (t^a - 1) \left[- t^{c-r_0b-s_0a} \frac{t^{s_0a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \right. \\
&\quad \left. + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} \frac{t^{m_{11}n_{12}a} - 1}{t^a - 1} \right] \\
&+ (t^b - 1) \left[- t^{c-r_0b} \frac{t^{r_0b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \right. \\
&\quad \left. + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} t^{m_{11}n_{12}a} \frac{t^{n_{11}n_{12}b} - 1}{t^b - 1} \right] \\
&+ (t^c - 1) \left[\frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \right] \\
&= (t^{c-r_0b} - t^{c-r_0b-s_0a}) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&\quad + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})+m_{11}n_{12}a} - t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} \\
&\quad + (t^c - t^{c-r_0b}) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&\quad + t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})+m_{11}n_{12}a+n_{11}n_{12}b} - t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})+m_{11}n_{12}a} \\
&\quad + (t^c - 1) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&= (t^{c-r_0b-s_0a} - t^c) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&\quad - t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} + t^{n_{12}g} \\
&\quad + (t^c - 1) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&= (t^{c-r_0b-s_0a} - 1) \frac{t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} - 1}{t^{c-r_0b-s_0a} - 1} \\
&\quad - t^{(c-r_0b-s_0a)(m_{12}-m_{11}n_{12})} + t^{n_{12}g} \\
&= (t^{n_{12}g} - 1).
\end{aligned}$$

(B.38)

(R4) 2 é não terminal com haste 20 $\Rightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{s_2} \beta_2^{r_2} = \alpha_{20}^{s_2} \beta_{20}^{r_2}$

$$\Rightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{\mu_2-1} \beta_2^1 = \alpha_{20}^{\mu_2-1} (\alpha_{20}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2^1)^1$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} = \alpha_{20}^{-1} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2^1 \beta_2^{-1} \alpha_2^{-(\mu_2-1)}$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} = \alpha_{20}^{-1} \alpha_2$$

$$\Rightarrow \alpha_{20} = \alpha_2 \alpha_{21}^{-1}$$

(B.39)

$$\begin{aligned}
[\alpha_{21}, \beta_{21}] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_{21} \beta_{21} = \beta_{21} \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{21} (\alpha_{21}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2) = (\alpha_{21}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2) \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2 = \alpha_2^{\mu_2} \beta_2 \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{\mu_2} (\alpha_2^{\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2}) = \alpha_2^{\mu_2} (\alpha_2^{\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2}) \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} = \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{21} \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}) = \\
&\quad \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}) \alpha_{21} \\
&\Leftrightarrow [\alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_{21}] = 1
\end{aligned}$$

(B.40)

$$\begin{aligned}
[\alpha_{20}, \beta_{20}] &= 1 \Leftrightarrow \alpha_{20} \beta_{20} = \beta_{20} \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{20} (\alpha_{20}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2) = (\alpha_{20}^{-\mu_2} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2) \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{20} \alpha_2^{\mu_2} \beta_2 = \alpha_2^{\mu_2} \beta_2 \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{20} \alpha_2^{\mu_2} (\alpha_2^{-\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2}) = \alpha_2^{\mu_2} (\alpha_2^{-\mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2}) \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{20} \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} = \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} \beta_1^{n_2} \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow \alpha_{20} \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}) = \\
&\quad \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1} (\alpha_1^{-m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}) \alpha_{20} \\
&\Leftrightarrow (\alpha_2 \alpha_{21}^{-1}) \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2} = \\
&\quad \alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2} (\alpha_2 \alpha_{21}^{-1}) \quad \text{se } r_2 = 1 \\
&\Leftrightarrow [\alpha_2^{\mu_2 - \mu_1 n_2} \alpha_1^{\mu_1 - m_1 n_1 n_2} \alpha_\phi^{m_1 n_2}, \alpha_{21}] = 1
\end{aligned}$$

(B.41)

$$\begin{aligned}
&\det \left[\begin{array}{cc} \frac{\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1}}{\frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{(b - s_\phi a)} - 1}} & -\frac{\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1}}{\frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^a - 1}} \end{array} \right] \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} + \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{(b - s_\phi a)} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{1}{t^a - 1} [t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a) + m_1 n_2 a} - t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} + t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a) - 1}] \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^a - 1}
\end{aligned}$$

(B.42)

$$\begin{aligned}
\det(A_3) &= \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 \\ \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{(b - s_\phi a)}} & t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} & 0 \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_4}\right) \end{bmatrix} \\
&= (t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1) \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^a - 1}.
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) + \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) \\
&= \left[t^{c - m_1 a} \frac{t^{m_1 a} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad - t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + (\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} \left. \right] (t^d - 1) \\
&\quad - \frac{t^{b - s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \left[t^{c - m_1 a} \frac{t^{(m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{b - s_\phi a} - 1} \frac{t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad - t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \frac{t^{(m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1}{t^{b - s_\phi a} - 1} \left. \right] (t^d - 1) \\
&= \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \left[(t^c - t^{c - m_1 a}) \frac{t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad - t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + (\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a) + m_1 n_2 a} \\
&\quad + t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + (\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b - s_\phi a)} \\
&\quad - (t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - t^{c - m_1 a}) \frac{t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1} \\
&\quad - t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} \\
&\quad \left. + t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \right] \\
&= \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \left[(t^c - t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)}) \frac{t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad - t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} + t^{[c - m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b - s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \left. \right]
\end{aligned}$$

(B.43)

$$\begin{aligned}
\det (A_4) &= \det \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^b - 1} & 0 \\ \frac{t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b-s_\phi a)} - 1}{t^{(b-s_\phi a)} - 1} & t^{(\mu_1 - m_1 n_1 n_2)(b-s_\phi a)} \frac{t^{m_1 n_2 a} - 1}{t^a - 1} & -\frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) \end{bmatrix} \\
&= \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \begin{bmatrix} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} & -\frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{(t^a - 1)} \\ \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) & \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) \end{bmatrix} + \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_3}\right) \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^a - 1} \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \left[\Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_2}\right) + \Phi\left(\frac{\partial r_3}{\partial y_1}\right) \frac{t^{b-s_\phi a} - 1}{t^a - 1} \right] \\
&\quad - \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^a - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} (t^d - 1) \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \\
&\quad \left[\left(t^c - t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} \right) \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad \left. - t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} + t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \right] \\
&\quad - \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} (t^c - 1) \\
&= \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^d - 1}{t^a - 1} \\
&\quad \left[- \left(t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1 \right) \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} - 1}{t^{c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)} - 1} \right. \\
&\quad \left. - t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} + t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2)} \right] \\
&= - \frac{t^{n_2 c} - 1}{t^c - 1} \frac{t^{n_1 b} - 1}{t^b - 1} \frac{t^{[c-m_1 a + (m_1 n_1 - s_1)(b-s_\phi a)](\mu_2 - \mu_1 n_2) + n_2 c} - 1}{t^a - 1} (t^d - 1)
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [A'c1] A'Campo, N.: *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes*, Inventiones Math. 20 (1973), 147-169.
- [A'c2] A'Campo, N.: *Monodromy of real isolated singularities*, Topology 42 (2003), 1229-1240.
- [BK] Brieskorn E., e Knorrer, H.: *Plane Algebraic Curves*, Livro da Birkhauser Verlag (1986)
- [Bra] Brauner, K.: *Zur Geometrie der Funktionen Zweier Komplexer Veränderlichen*, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), 1-54.
- [Bri] Brieskorn E.: *Die Monodromie der Isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, Manuscripta Math. 2 (1970), 103-160.
- [Bu1] Burau, W.: *Kennzeichnung der Schlauchknoten*, Abh. Math. Sem. Hamburg 9 (1932), 125-133.
- [Bu2] Burau, W.: *Kennzeichnung der Schlauchverkettungen*, Abh. Math. Sem. Hamburg 10 (1934), 285-297.
- [CDG1] Campillo A., Delgado F., e Gusein-Zade S. M.: *The Alexander Polynomial of a plane Singularity the Ring of functions on it*, Duke Mathematical Journal (2003), 125-156.
- [CS] Carneiro M. J. D., e Soares M. G.: *Introdução à Topologia de Singularidades Complexas*, 15 Colóquio Brasileiro de Matemática (1985).
- [Du1] Durfee, A.: *The Characteristic Polynomial of the Monodromy*, Pacific Journal of Math. 59 (1975), 21-26.
- [Du2] Durfee, A.: *The monodromy of a degenerating family of curves*, Inventiones Math. 28 (1975), 231-241.
- [EN] Eisenbud, D., e Neumann, W.: *Three-Dimensional Link Theory and Invariants of Plane Curve Singularities*, Annals of Mathematics Studies 110 (1985), Princeton Univ. Press.

- [F1] Fox, R.: *Free differential calculus I, Derivation in the Free Group Ring*, Annals of Mathematics 57 (1953), 547-560.
- [F2] Fox, R.: *Free differential calculus II*, Annals of Mathematics 59 (1954), 196-210.
- [F3] Fox, R.: *Free differential calculus III, Subgroups*, Annals of Mathematics 64 (1956), 407-419.
- [F4] Fox, R.: *Free differential calculus IV, The Quotient Groups of the Lower Central Series*, Annals of Mathematics 68 (1958), 81-95.
- [F5] Fox, R.: *Free differential calculus V, The Alexander Matrices Re-Examined*, Annals of Mathematics 71 (1960), 408- .
- [FC] Fox, R., e Crowell, R.: *Introduction to Knot Theory*, GTM - Graduate Texts in Mathematics 57 (Springer-Verlag, 1963).
- [Ka] Kähler, K.: *Über die Verzweigung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlichen in die Umgebung einer singulären Stelle*, Math. Zeit., 30, (1929), 188-204.
- [Lê1] Lê Dung Trang: *Sur Les Noeuds Algebriques*, Compositio Mathematica 25 (1972), 281-321.
- [Lê2] Lê Dung Trang: *Three Lectures on Local Monodromy*, Lectures Notes Series 43 (1974).
- [Lê3] Lê Dung Trang: *Plane curve singularities and carousels*, Annales de L'Institut Fourier (2003), 1117-1139.
- [Lev1] Levine, J.: *Polynomials invariants of knots of codimension two*, Annals of Mathematics 84 (1966), 537-544.
- [Lev2] Levine, J.: *A method for generating link polynomials*, Am. J. Mathematics 89 (1967), 69-84.
- [Lev3] Levine, J.: *An algebraic classification of some knots of codimension two*, Comm. Math. Helv. 45 (1970), 185-198.
- [Li] Libgober, A.: *Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes*, Duke Math. Journal 49 (1982), 833-851.

- [Mi] Milnor, J.: *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math Study 61 (1968), Princeton Univ. Press.
- [NS] Neto, O., e Silva, P.C.: *The fundamental group of an algebraic link*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 340 (2005), 141-146.
- [Re] Reeve, J.E.: *A summary of results in the topological classification of plane algebroid singularities*, Rendiconti del Seminario Matematico (Torino) 14 (1954-1955), 159-187.
- [SW1] Sumners D. W., e Woods J. M.: *A short proof of finite monodromy for analytically irreducible plane curves*, Comp. Math. 28 (1974), 213-216.
- [SW2] Sumners D. W., e Woods J. M.: *The Monodromy of Reducible Plane Curves*, Inventiones Math. 40 (1977), 107-141.
- [T] Torres, G.: *On the Alexander Polynomial*, Annals of Mathematics 57 (1953), 57-89.
- [Wa] Wall, C.T.C.: *Singular Points of Plane Curves*, London Mathematical Society Student Texts 63 (2004).
- [Wo] Woods, J. M.: *Some criteria for finite and infinite monodromy of plane algebraic curves*, Inventiones Math. 26 (1974), 179-185.
- [Ya] Yamamoto, M.: *Classification of isolated algebraic by their Alexander polynomials*, Topology 23 (1984), 277-287.
- [Za] Zariski, O.: *On the Topology of Algebroid singularities*, Am. J. of math 54 (1932), 453-465.