Ações de p-grupos sobre produto de esferas,
co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos
 $(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$ e $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes \mathbb{Z}$ e Co-
homologia de Tate

Márcio de Jesus Soares

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:

Ações de p-grupos sobre produto de esferas, co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos $(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$ e $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \rtimes Q_2)] \rtimes \mathbb{Z}$ e Co-homologia de Tate

Márcio de Jesus Soares

Orientador: *Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática.

USP – São Carlos
Setembro de 2008

Este trabalho é dedicado a minha esposa Selene
e a nosso bebê que está por chegar.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a todos que contribuíram de certa forma para o desenvolvimento e execução deste trabalho, seja essa contribuição técnica ou afetiva.

Agradeço a minha família pela educação e apoio durante todos estes anos de estudos. A meus pais pelo exemplo e empenho para que minha vontade de estudar fosse realizada. Um agradecimento enorme a meus tios Paulo e Zenilde, que juntamente com meus primos Aroldo, Michela e Marta, acolheram-me em seu lar dando a mim o carinho e tranquilidade necessária para que eu realizasse uma boa graduação.

Aos professores que tive em minha graduação. Em especial, às professoras Dra. Maria Gorete Carreira Andrade e Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela importância que tiveram na decisão sobre qual área seguir; à professora Dra. Aparecida Francisco da Silva por sua preocupação durante todos os passos acadêmicos, principalmente durante o período em que integrei o programa PET sob sua tutoria; e aos professores Dr. Roberto Andreani, Dra. Angela Maria Sitta e Me. Hermes Antonio Pedroso pela confiança e pelos incentivos.

Aos amigos de graduação que ainda são muito presentes. Em especial, Fabiano Allan Martins e Sabrina Saito.

Aos professores que tive durante todo o doutorado, em especial aos professores Dr. Valdir Antonio Menegatto e Dra. Sandra Maria Semensato de Godoy pela ajuda no início deste período.

A meu orientador professor Dr. Daciberg Lima Gonçalves pela disposição e dedicação na orientação, e por todo conhecimento passado durante este período. Ao professor Dr. Oziride Manzoli Neto pela amizade, disposição, incentivo e orientação, sendo fundamental nas horas de desânimo e dificuldades encontradas no caminho.

Aos colegas deste período de trabalho. Em especial, aos amigos Mário Henrique Andrade Cláudio e Thiago de Melo.

Agradeço a minha esposa Selene, não só pelo apoio e companheirismo no decorrer do trabalho, mas por tudo que foi para mim neste período e pelo bebê que está por chegar. A meus sogros, Valdemir e Maria Laudelina pela torcida para o êxito deste trabalho.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho inicialmente estudamos o rank da co-homologia do espaço dos pontos fixos de uma $\mathbb{Z}_p$ -ação semilivre sobre espaços $X \sim_p S^n \times S^n$ e $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$, com $n > 0$. Em seguida, estudamos uma extensão para ações de p -grupos sobre espaços $X \sim_p S^n \times S^m$, com $0 < n \leq m$. Como parte do material utilizado demos uma descrição do diferencial d_1 de uma seqüência espectral que converge para co-homologia equivariante de Tate, bem como uma versão da Fórmula de Künneth para a co-homologia equivariante de Tate. Na parte final, motivado pelo problemas de descrição de espaços de órbita de ações de grupos infinito, calculamos as co-homologias dos grupos virtualmente cíclicos $(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$ e $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^1})] \rtimes \mathbb{Z}$.

ABSTRACT

In this work is studied the rank of the fixed point set of a semifree action on spaces $X \sim_p S^n \times S^n$ and $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$, with $n > 0$. We also consider the extension of the result for actions of p -groups on spaces $X \sim_p S^n \times S^m$, with $0 < n \leq m$. As result of the techniques used, we give a description of the differential d_1 of a spectral sequence that converges to Tate equivariant cohomology, as well a version of the Künneth Formule to Tate equivariant cohomology. At the end, motivated by the space form problem for infinite groups we compute the cohomology of the virtually cyclic groups $(\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b) \rtimes \mathbb{Z}$ and $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^1})] \rtimes \mathbb{Z}$.

SUMÁRIO

<i>Introdução</i>	ix
1. <i>Preliminares</i>	1
1.1 Álgebra homológica	1
1.2 Seqüência Espectral - via Filtrações	6
2. <i>Seqüência espectral e co-homologia equivariante</i>	9
2.1 Complexos duplos	9
2.2 Seqüências Espectrais de Complexos Duplos	10
2.3 Co-homologia de Tate com coeficientes num complexo de co-cadeias	10
2.4 Co-homologia equivariante e seqüências espectrais	11
2.5 O diferencial d_1 da segunda seqüência espectral	13
2.5.1 Os módulos $E_1^{p,q}$	13
2.5.2 Descrição do diferencial d_1	14
3. <i>Co-homologia dos pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$-ações semilivres sobre $X \sim_p S^n \times S^n$</i>	19
3.1 Co-homologia do espaço dos pontos fixos X^G	19
3.2 Ações semilivres de $\mathbb{Z}_p$ sobre $X \sim_p S^n \times S^n$	21
3.2.1 $\mathbb{Z}_p$ -ação trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$	23
3.2.2 $\mathbb{Z}_p$ -ação não-trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$	24
4. <i>Co-homologia dos espaço dos pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$-ações semilivres sobre $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$</i>	29
4.1 Ação de $\mathbb{Z}_p$ induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ trivial	29
4.2 Ações algébricas não-triviais de $\mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$	31

4.3	Ações de $\mathbb{Z}_p$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, com p primo	32
4.4	$\mathbb{Z}_2$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$	33
4.5	$\mathbb{Z}_3$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$, com n par	35
4.6	$\mathbb{Z}_p$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, com n e p ímpares	37
4.6.1	Estudo da ação θ_1	37
4.6.2	Estudo da ação θ_2	41
5.	<i>Espaço dos pontos fixos de ações semilivres de p-grupos sobre um espaço $X \sim_p S^n \times S^m$</i>	45
5.1	A ação de p -grupos finitos	46
5.2	O espaço dos pontos fixos de ações de $\mathbb{Z}_2$ sobre $X \sim_2 \mathbb{P}^2(q) \# - \mathbb{P}^2(q)$	49
6.	<i>Co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos da forma $F \rtimes \mathbb{Z}$, com F finito</i>	53
6.1	Tipos de homotopia de espaços de órbita	54
6.2	Co-homologia de $F \rtimes \mathbb{Z}$	55
6.3	Co-homologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b$	57
6.4	Co-homologia de $(\mathbb{Z}_a \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_b) \rtimes_\theta \mathbb{Z}$	58
6.5	Exemplos	60
6.5.1	Casos com $d = 6$	61
6.5.2	Casos com $d = 2$	63
6.6	Co-homologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$	64
6.7	Co-homologia de $[\mathbb{Z}_a \rtimes_\beta (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_\theta \mathbb{Z}$	67
	<i>Referências Bibliográficas</i>	71

Introdução

Em [19] e [3] (seções VII.8 e VII.9) são apresentados estudos de $\mathbb{Z}_p$ -ações semilivres, com p primo, sobre espaços que têm o mesmo anel de co-homologia do produto de duas esferas $S^n \times S^m$ módulo p , ou seja,

$$H^*(X; \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(S^n \times S^m; \mathbb{Z}_p).$$

No capítulo três abordamos um caso particular quando as esferas têm a mesma dimensão. Estudamos de forma mais precisa para cada tipo de ação, em função da representação que a mesma determina em co-homologia, como devem ser o conjunto dos pontos fixos. Durante a análise da estrutura co-homológica do espaço dos pontos fixos provamos uma versão da Fórmula de Künneth para o caso de co-homologia equivariante de Tate.

Teorema 3.1.1. *Sejam R um domínio de ideais principais, G um grupo finito que atua trivialmente sobre um espaço X de dimensão finita. Se M é um G -módulo, então existe uma seqüência exata*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \hat{H}^p(G; M) \otimes_R H^q(X; R) \rightarrow \hat{H}_G^n(X; M) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1^R \left(\hat{H}^p(G; M), H^q(X; R) \right) \rightarrow 0,$$

que cinde.

Os resultados obtidos no capítulo três contém hipóteses mais fracas do que os encontrados em [19]. Esse enfraquecimento é devido a estrutura multiplicativa da seqüência espectral e à obtenção do seguinte resultado:

Lema 3.2.1. *Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -complexo conexo por caminhos, p primo, tal que $X^{\mathbb{Z}_p}$ é um sub-complexo de X não-vazio. Então, temos que os diferenciais $d_r^{*, r-1}$, da primeira seqüência espectral, (2.1), são todos nulos para $r \geq 2$.*

O que garante-nos que tal sequência espectral colapsa. Já com relação aos resultados VII.8.1 e VII.9.1 de [3](5.0.1 e 5.0.2) nossos resultados acabam por refiná-los, uma vez que indicamos o posto da co-homologia do espaço dos pontos fixos de acordo com a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$.

A fim de realizar o estudo feito no capítulo dois para o caso de espaços com o mesmo anel de co-homologia do produto de três esferas de mesma dimensão módulo p , $H^*(X; \mathbb{Z}_p) \simeq H^*(S^n \times S^n \times S^n; \mathbb{Z}_p)$, obtivemos:

Proposição 4.3.1. *Seja X um espaço com o mesmo anel de co-homologia que $S^n \times S^n \times S^n$ módulo p , $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$. Se n é par e $p > 3$, p primo, então toda $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial.*

Proposição 4.3.2. *Seja $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$. Se n é par, a matriz que define uma ação não-trivial de $\mathbb{Z}_3$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ é da forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

tal que $\alpha\beta\gamma = 1$.

Nos estudos das $\mathbb{Z}_p$ -ações induzidas sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, quando n e p são ímpares temos que existem duas ações distintas, a menos de conjugação. Estas ações distintas produzem resultados bem distintos. Por exemplo,

Proposição 4.6.1. *Suponha que a $\mathbb{Z}_3$ -ação sobre X induza uma $\mathbb{Z}_3$ -ação não-trivial conjugada a θ_1 sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$. Temos que*

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} H^*(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3) = 6.$$

Mais ainda, $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) = 0$ ou 6.

Teorema 4.6.5. *Se n é ímpar, e a ação de $\mathbb{Z}_3$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 , então $X^{\mathbb{Z}_3}$ é uma esfera de co-homologia mod 3, e tem dimensão ímpar.*

O famoso teorema de Smith sobre $\mathbb{Z}_p$ -ações em uma esfera de co-homologia módulo p se estende para ações de p -grupos finitos arbitrários. Isto se encontra explicitado em [4], exercício 2 da secção VII.10.

Proposição 5.1.1. *Seja X um G -complexo de dimensão finita, onde G é um p -grupo. Assuma que X^H é um subcomplexo de X para todo $H \subseteq G$.*

(a) *Se $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é finitamente gerado, então $H^*(X^G; \mathbb{Z}_p)$ também o é.*

(b) *Se X é acíclico mod p , então X^G também o é.*

(c) *Se X é uma esfera de co-homologia mod p , então X^G também o é, desde que $X^G \neq \emptyset$.*

Motivados por este resultado, trabalhamos no capítulo cinco uma forma de poder estender os resultados VII.8.1 e VII.9.1 de [3] (5.0.1 e 5.0.2) para ações de p -grupos finitos arbitrários. Conseguimos esta extensão através do seguinte resultado:

Lema 5.1.2. *Sejam G um p -grupo finito arbitrário, com p primo, e X um G -complexo tal que para cada subgrupo H de G , X^H é um subcomplexo não-vazio de X . Se para cada F pertencente a $\mathcal{F}_p(X)$ o espaço dos pontos fixos $F^{\mathbb{Z}_p}$ também pertencer a $\mathcal{F}_p(X)$, então X^G pertence a $\mathcal{F}_p(X)$.*

No estudo das técnicas que levaram a realização deste trabalho, estudamos certas seqüência espectral. Uma das dificuldades em teoria de seqüência espectral é determinar seus diferenciais. Em [4], capítulo VII secção 8, é apresentada uma descrição para o diferencial d^1 da seqüência espectral que tem como objeto de convergência a homologia equivariante dum G -complexo X com coeficientes num G -módulo M . Em [4], secção X.4 Lema 4.2, uma descrição bastante parcial do diferencial em co-homologia é dada. No capítulo dois na secção 2.5 apresentamos uma descrição completa do diferencial d_1 da seqüência espectral dada pela filtração

$$F^p(TC)^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{n-i, i}$$

sobre o complexo total associado ao complexo duplo

$$C^{p, q} = \text{Hom}_G(F_p, C^q(X; M)).$$

Esta seqüência espectral converge para a co-homologia equivariante do par (G, X) , onde X é um G -complexo.

Os grupos virtualmente cíclicos são grupos G que possuem um subgrupo cíclico de índice finito. Foi mostrado por Wall, (ver [16], [25] e [14]) que estes grupos têm uma das seguintes formas: (I) $F \rtimes \mathbb{Z}$, com F finito; (II) $G_1 *_F G_2$, com F algum subgrupo normal finito de índice dois com relação a ambos os grupos. Estes grupos têm interesses no estudo dos espaços de

órbita. Nosso interesse consiste em estudar os grupos virtualmente cíclicos que venham a atuar livremente sobre uma esfera de homotopia.

Se Σ^{2n-1} é um CW-Complexo de dimensão $2n-1$ que tem o tipo de homotopia duma esfera de dimensão $2n-1$ e G é um grupo finito que atua livremente em Σ^{2n-1} , então podemos considerar o espaço de órbita Σ^{2n-1}/G . Um problema relevante é o de classificar os tipos de homotopia dos espaços de órbita Σ^{2n-1}/G para todas as possíveis ações livres de G sobre Σ^{2n-1} . Uma descrição deste conjunto foi obtida através do teorema 1.8 em [21] e teorema 2.2 em [22] e pode ser descrito da seguinte forma: o conjunto dos tipos de homotopia de espaços de órbita obtidos por todas as G -ações celulares e livres sobre um CW-complexo $(2n-1)$ -dimensional do tipo de homotopia da esfera de dimensão $2n-1$ está em correspondência 1-1 com as órbitas que contêm um gerador em $H^{2n}(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G|}$ com relação a ação de $\pm \text{Aut}(G)$. Os grupos finitos que atuam numa esfera de homotopia são classificados, e para cada um destes grupos foi calculado o número de tipos de homotopia dos espaços de órbita. Os resultados mais recentes sobre este problema foram obtidos nos trabalhos [8, 9, 10, 12, 13, 11], cujo início foi a classificação do espaço de Lenz. Um problema natural a seguir é estudar ações em esfera de homotopia por grupos discretos infinitos. Um teorema de Swan diz que qualquer grupo finito que tem co-homologia periódica age livremente sobre um complexo finito com o mesmo tipo de homotopia que S^n . Em [1], é apresentada uma extensão deste teorema de Swan. Por isso, diremos que um grupo G tem co-homologia periódica fraca se existir d tal que $H^n(G) \approx H^{n+d}(G)$, para $n > n_0$, para algum n_0 . No corolário 1.3 em [1] temos que um grupo discreto Γ atua livre e propriamente em $\mathbb{R}^n \times S^m$ se, e somente se, Γ é um grupo enumerável com co-homologia periódica (no sentido [1]). Neste sentido, é interessante classificar os grupos Γ virtualmente cíclicos com co-homologia periódica. Uma etapa certamente necessária para tal análise é o conhecimento da co-homologia do grupo. Assim, finalizamos o trabalho com os cálculos das co-homologias dos grupos virtualmente cíclicos das formas $\mathbb{Z}_a \rtimes \mathbb{Z}_b$, com $(a, b) = 1$ e $[\mathbb{Z}_a \rtimes (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes \mathbb{Z}$, com $(a, b) = 1$ e $(ab, 2) = 1$, obtendo que ambos os grupos são fracamente periódicos.

1

Preliminares

Este capítulo apresenta resultados de Álgebra Homológica, em especial sobre seqüências espectrais, que serão utilizados nos demais capítulos.

1.1 Álgebra homológica

Lema 1.1.1. *Considere R um anel, e seja Λ uma R -álgebra. Se M é um Λ -módulo, então M é um R -módulo.*

Demonstração. A estrutura de R -módulo é dada por: $r \cdot x := (r1_\Lambda) \cdot x$, com $r \in R$ e $x \in M$. $\square$

Proposição 1.1.2. *Sejam Λ e Λ' R -álgebras. Se N e M são Λ -módulos, com M livre, e N' e M' são Λ' -módulos, com M' livre, então*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(M', N') \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda \otimes_R \Lambda'}(M \otimes_R M', N \otimes_R N').$$

Demonstração. Temos que $M = \bigoplus_I \Lambda$ e $M' = \bigoplus_{I'} \Lambda'$, assim

$$\mathrm{Hom}_\Lambda \left(\bigoplus_I \Lambda, N \right) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\Lambda'} \left(\bigoplus_{I'} \Lambda', N' \right) \cong \left(\prod_I \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, N) \right) \otimes_R \left(\prod_{I'} \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda', N') \right).$$

Como $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, N) \cong N$ e $\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(\Lambda', N') \cong N'$, temos que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\Lambda'}(M', N') \cong \prod_{I \times I'} (N \otimes_R N'). \quad (1.1)$$

Por outro lado, $M \otimes_R M'$ é isomorfo a $\bigoplus_{I \times I'} (\Lambda \otimes_R \Lambda')$, mas

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda \otimes_R \Lambda'} \left(\bigoplus_{I \times I'} (\Lambda \otimes_R \Lambda'), N \otimes_R N' \right) \cong \prod_{I \times I'} (N \otimes_R N'). \quad (1.2)$$

Por (1.1) e (1.2), temos o isomorfismo desejado. $\square$

O próximo resultado é encontrado em [5], proposição II.5.2'.

Proposição 1.1.3. *Sejam Λ e Γ anéis, com A um Λ -módulo à direita, C um Γ -módulo à esquerda, e B é um Λ -módulo à esquerda e Γ -módulo à direita. Existe um único homomorfismo*

$$s : \text{Hom}_\Lambda(A, \text{Hom}_\Gamma(B, C)) \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(A \otimes_\Lambda B, C),$$

tal que para cada $\varphi : A \rightarrow \text{Hom}_\Gamma(B, C)$ temos $[s(\varphi)](a \otimes b) = (\varphi(a))(b)$. Este homomorfismo é um isomorfismo e estabelece uma equivalência natural dos funtores Hom e $\otimes$.

Se M e N são G -módulos, temos que as ações de G sobre M e N induzem uma ação 'diagonal' de G sobre $\text{Hom}(M, N)$, dada por $(g \cdot f)(m) = g \cdot f(g^{-1} \cdot m)$, com $g \in G$, $f \in \text{Hom}(M, N)$ e $m \in M$. A ação no 'domínio' por g^{-1} é devido a contravariância do Hom na primeira variável.

Definição 1.1.4 (Co-homologia de grupo). *Dado G um grupo. Seja F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, considere M um G -módulo. Define-se a co-homologia de G com coeficientes em M , $H^*(G; M)$, por*

$$H^*(G; M) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_G(F, M)).$$

Definição 1.1.5. *Dado um grupo G , sejam F e P resoluções projetivas, respectivamente, dos G -módulos M e N . Definimos*

$$\text{Tor}_*^G(M, N) = H_*(F \otimes_G N) = H_*(F \otimes_G P) = H_*(M \otimes_G P).$$

Definição 1.1.6. *Sejam M e N G -módulos, F uma resolução projetiva de M , e Q uma resolução injetiva de N . Definimos*

$$\text{Ext}_G^*(M, N) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_G(F, N)) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_G(F, Q)) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_G(M, Q)).$$

O teorema a seguir é a Fórmula de Künneth para co-homologia de grupo ordinária. O enunciado apresentado aqui encontra-se em [18](Teorema 5.5.11).

Teorema 1.1.7. *Sejam C e C' complexos de cadeias livres e M e M' módulos sobre um domínio de ideais principais R tais que $\text{Tor}_1^R(M, M') = 0$ e, ou $H(C)$ e $H(C')$ são do tipo finito, ou $H(C')$ é do tipo finito e G' é finitamente gerado. Então, existe uma seqüência exata curta*

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} (H^p(C; M) \otimes_R H^q(C'; M')) \rightarrow H^n(C \otimes_R C'; M \otimes_R M')$$

$$\rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}_1^R(H^p(C; M), H^q(C'; M')) \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

e esta sequência cinde.

Seja $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Então qualquer S -módulo pode ser visto como um R -módulo via α , com isso obtemos um functor de S -módulos a R -módulos, chamado restrição de escalares. Existem duas construções no sentido contrário, chamadas *extensão* e *co-extensão de escalares*. Aqui limitar-nos-emos a *co-extensão de escalares*.

Para qualquer R -módulo à esquerda M , considere o grupo abeliano $\mathrm{Hom}_R(S, M)$, com S visto como um R -módulo à esquerda, por restrição de escalares, ou seja $r \cdot s = \alpha(r)s$. Podemos colocar uma estrutura de S -módulo à esquerda em $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ da seguinte forma: $(s \cdot f)(s') = f(s's)$, $f \in \mathrm{Hom}_R(S, M)$. Este módulo será chamado co-extensão de escalares de R a S obtido de M .

Existe uma aplicação natural $\pi : \mathrm{Hom}_R(S, M) \rightarrow M$, dado por $\pi(f) = f(1)$. Temos que

$$\pi(\alpha(r)f) = (\alpha(r)f)(1) = f(\alpha(r)) = rf(1) = r\pi(f),$$

então π é uma aplicação de R -módulos se o S -módulo $\mathrm{Hom}_R(S, M)$ é visto como um R -módulo por restrição de escalares.

Proposição 1.1.8. *Dado um S -módulo N e uma R -aplicação $f : N \rightarrow M$, existe uma única S -aplicação $g : N \rightarrow \mathrm{Hom}_R(S, M)$ tal que $\pi g = f$, ou seja, temos o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{Hom}_R(S, M) & \\ & \downarrow \pi & \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow g \\ \end{array} \quad (1.4)$$

Demonstração. Para existência basta tomarmos $g(n)$ sendo a aplicação tal que $(g(n))(1) = f(n)$. Consideremos g' tal que $\pi g'(n) = f(n)$, assim $\pi g'(n) = \pi g(n)$ e $(g(n))(1) = (g'(n))(1)$ para todo $n \in N$. Logo, $g = g'$. $\square$

Assim, temos que

$$\mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(S, M)) \simeq \mathrm{Hom}_R(N, M), \quad (1.5)$$

e isso nos diz que a co-extensão de escalares é adjunta à direita à restrição de escalares.

Ao aplicarmos a teoria de co-extensão de escalares ao homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}H \hookrightarrow \mathbb{Z}G$, com $H \subset G$, chamaremos de co-indução de H a G , e denotaremos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)$ por $\mathrm{Coind}_H^G M$. Quando $H = 0$ chamaremos de o módulo simplesmente por co-induzido.

Lema 1.1.9 (Lema de Shapiro). *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Se M é um H -módulo, então*

$$H^*(H; M) \simeq H^*(G; \text{Coind}_H^G M).$$

Demonstração. Seja F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Temos que F também pode ser vista como uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. Por outro lado,

$$\mathcal{H}\text{om}_H(F; M) \simeq \mathcal{H}\text{om}_G(F; \mathcal{H}\text{om}_H(\mathbb{Z}G; M)) \simeq \mathcal{H}\text{om}_G(F; \text{Coind}_H^G M).$$

Assim, temos que $H^*(\mathcal{H}\text{om}_H(F; M)) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_G(F; \text{Coind}_H^G M))$, que é o isomorfismo procurado. $\square$

Se $\pi_1 : N \twoheadrightarrow M_1$ e $\pi_2 : N \twoheadrightarrow M_2$ são sobrejeções de grupos abelianos, então escrevemos $\pi_1 \sim \pi_2$ se existe um isomorfismo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ tal que $\phi\pi_1 = \pi_2$, ou, equivalentemente, se $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$.

Proposição 1.1.10. *Seja N um G -módulo que, como grupo abeliano admite uma decomposição em produto direto $(\pi_i : N \twoheadrightarrow M_i)_{i \in I}$. Assuma que exista uma ação à direita transitiva de G sobre I tal que $\pi_i g \sim \pi_{ig}$, para quaisquer $i \in I$ e $g \in G$. Seja $\pi : N \rightarrow M$ uma das π_i , e seja $H \subset G$ o grupo de isotropia de i . Então, M herda uma estrutura de H -módulo de N , e*

$$N \approx \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M) = \text{Coind}_H^G M.$$

Demonstração. Para o fato que M é um H -módulo, basta ver que, se $g \in H$, então $\pi_i g \sim \pi_{ig} = \pi_i$, para algum $h : M_i \rightarrow M_{ig}$, pois, com isso, podemos definir a ação de H sobre M da seguinte maneira: dado $m \in M$ escolhemos $n \in N$, tal que $\pi(n) = m$, e definimos $m \cdot g = \pi(n \cdot g^{-1})$, para todo $g \in H$. Precisamos verificar que esta ação está bem definida. De fato, dado $m \in M$ e sejam $n, n' \in N$ tais que $\pi_i(n) = \pi_i(n') = m$, temos que

$$\pi_i(n \cdot g^{-1}) = \pi_i \cdot g(n) = h\pi_i(n) = h\pi_i(n') = \pi_i \cdot g(n') = \pi_i(n' \cdot g^{-1}),$$

portanto, não depende da escolha de n . Por III.3.5 de [4], temos que a aplicação $\pi : N \rightarrow M$ estende-se a uma aplicação de G -módulos $N \rightarrow \text{Coind}_H^G M$. Esta aplicação leva o fator direto πg de $\text{Coind}_H^G M$ isomorficamente sobre o fator direto π_{ig} de N , logo é um isomorfismo. $\square$

Corolário 1.1.11. *Seja N um G -módulo que, como grupo abeliano admite uma decomposição em produto direto $(\pi_i : N \twoheadrightarrow M_i)_{i \in I}$. Assuma que exista uma ação à direita transitiva de G sobre I tal que $\pi_i g \sim \pi_{ig}$, para quaisquer $i \in I$ e $g \in G$. Seja $G_i \subset G$ o grupo de isotropia*

de i , e E um conjunto de representantes de $I \bmod G$. Então π_i é um G_i -módulo e existe um G -isomorfismo

$$N \approx \prod_{i \in E} \text{Coind}_{G_i}^G M_i.$$

Demonstração. Podemos ver I como união disjuntas de suas classes laterais módulo G , ou seja,

$$I = \coprod_{i \in E} iG,$$

aqui E é um conjunto de representantes de I módulo G . Assim, temos que

$$N = \prod_{i \in E} \prod_{k \in iG} M_k.$$

Aplicando a proposição 1.1.10 a cada iG , temos que

$$\prod_{k \in iG} M_k = \text{Coind}_{G_i}^G M_i.$$

□

Seja G um grupo finito. Uma resolução completa de G é um complexo acíclico $\hat{F} = (F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}G$ -módulos projetivos, junto com uma aplicação $\varepsilon : F_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\varepsilon : F_+ \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução no sentido usual, com $F_+ = (F_i)_{i \geq 0}$.

Uma maneira de se obter uma resolução completa de G é: considere uma resolução projetiva $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Tomemos o dual de $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ adotando $F_{-i} = \text{Hom}(F_{i-1}, \mathbb{Z})$, para $i > 0$, isto nos fornece a seguinte resolução projetiva contrária $\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \hat{F}$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} F_{-1} \rightarrow F_{-2} \rightarrow \cdots .$$

Ao unirmos $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ com sua dual $\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \hat{F}$ obtemos uma resolução completa de G

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{F} : & \cdots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F_{-1} & \longrightarrow & F_{-2} & \longrightarrow & F_{-3} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & & \searrow \varepsilon & & \nearrow \eta & & & & & & \\ & & & & & & & & \mathbb{Z} & & & & & & & \end{array}$$

Definição 1.1.12 (Co-homologia de Tate). A co-homologia de Tate dum grupo finito G com coeficientes num G -módulo M é definido por

$$\hat{H}^*(G; M) = H^*(\text{Hom}_G(\hat{F}; M)),$$

com $\hat{F}$ sendo uma resolução completa de G .

Para definirmos um produto sobre a co-homologia de Tate precisamos tomar alguns cuidados ao tentar repetir a construção da co-homologia ordinária. No caso ordinário temos que se F é uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $F \otimes F$ é uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[G \times G]$. Já no contexto de Tate se $\widehat{F}$ é uma resolução completa de G , $\widehat{F} \otimes \widehat{F}$ pode não ser uma resolução completa. Então, para o caso da co-homologia de Tate a aproximação da diagonal $\Delta : \widehat{F} \rightarrow \widehat{F} \widehat{\otimes} \widehat{F}$ será uma aplicação de cadeias que preserva a aplicação aumento $\varepsilon : F_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, onde $\widehat{F} \widehat{\otimes} \widehat{F}$ é o complexo de cadeias definido por

$$(\widehat{F} \widehat{\otimes} \widehat{F})_n = \prod_{p+q=n} F_p \otimes F_q,$$

com diferencial $\partial : d \widehat{\otimes} \text{id}_F + \text{id}_F \widehat{\otimes} d$. O produto cup para co-homologia de Tate tem as mesmas propriedades do produto cup para co-homologia de grupo ordinária (ver [4] capítulo VI).

1.2 Seqüência Espectral - via Filtrações

Se C é um complexo de co-cadeias e C' é um subcomplexo de C , então existe uma seqüência exata longa que fornece informação sobre $H(C)$ em termos de $H(C')$ e $H(C/C')$. Agora, suponha que ao invés dum único subcomplexo C' , tenhamos uma seqüência de subcomplexos $\{F^p C\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, com $F^{p+1} C \subset F^p C$. É razoável tentar obter informação sobre $H(C)$ em termos de $H(F_p C / F_{p+1} C)$.

Definição 1.2.1 (Módulo bigraduado com diferencial). *Um módulo bigraduado com diferencial sobre um anel R , é uma coleção de R -módulos, $\{M^{p,q}\}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$, junto com uma R -aplicação linear $d : M \rightarrow M$ tal que $d^{p,q} = d|_{M^{p,q}} : M^{p,q} \rightarrow M^{p+s, q-s+1}$ para algum $s \in \mathbb{Z}$, satisfazendo $d^2 = 0$. Diremos que d é um diferencial e que d tem bigrau $(s, 1-s)$.*

Definimos a *Homologia do módulo bi-graduado M com diferencial de bigrau $(s, 1-s)$* , por

$$H^{p,q}(M, d) = \frac{\ker d^{p,q}}{\text{Im } d^{p-s, q+s-1}}$$

Definição 1.2.2 (Seqüência espectral). *Uma seqüência espectral é uma coleção de R -módulos bigraduados com diferencial $\{E_r, d_r\}$, onde $r = 0, 1, 2, \dots$ e os diferenciais de bigrau $(r, 1-r)$, tal que para todos p, q e r , temos $E_{r+1}^{p,q}$ isomorfo a $H^{p,q}(E_r, d_r)$.*

Observe que com E_r e d_r determinamos E_{r+1} , mas não d_{r+1} . Diremos que uma seqüência espectral colapsa em E_n se o diferencial d_r for nulo para todo $r \geq n$.

Uma maneira de se obter uma seqüência espectral é através de *filtrações*, como será mostrado.

Definição 1.2.3. Uma filtração decrescente F^* sobre um R -módulo A é uma família de submódulos $\{F^p A\}$ para $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$A \supset \dots \supset F^{p-1} A \supset F^p A \supset \dots \supset F^{p+1} A \supset \dots$$

Definição 1.2.4. Um R -módulo é um módulo graduado filtrado com diferencial se

1. A é uma soma direta de submódulos, $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n$;
2. Existe uma R -aplicação linear $d : A \rightarrow A$ de grau 1, ou seja $d : A^n \rightarrow A^{n+1}$, satisfazendo $d^2 = 0$;
3. A tem uma filtração F e o diferencial d respeita a filtração, isto é, $d(F^p A) \subset F^p A$.

Se A é um módulo graduado filtrado, então podemos analisar a filtração sobre cada grau de A tomando $F^p A^n = F^p A \cap A^n$. Definimos o módulo graduado associado a A por $\text{Gr } A$, com

$$\text{Gr}_{p,q} A = \frac{F^p A^{p+q}}{F^{p+1} A^{p+q}}$$

Como o diferencial respeita a filtração $H(A, d)$ herda uma filtração

$$F^p H(A, d) = \text{Im}(H(F^p A) \rightarrow H(A, d)),$$

com $H(F^p A) \rightarrow H(A, d)$ sendo a aplicação induzida pela inclusão.

Consideremos os submódulos:

$$Z_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}); \quad Z_{\infty}^{p,q} = \ker d \cap F^p A^{p+q};$$

$$B_r^{p,q} = F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}); \quad B_{\infty}^{p,q} = \text{Im } d \cap F^p A^{p+q}.$$

Construímos a seqüência espectral definindo

$$E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}} \quad (1.6)$$

e

$$E_{\infty}^{p,q} = \frac{Z_{\infty}^{p,q}}{B_{\infty}^{p,q} + Z_{\infty}^{p+1,q-1}}. \quad (1.7)$$

Temos que $E_0^{p,q} = F^p A^{p,q} / F^{p+1} A^{p,q}$, $E_1^{p,q} = H(F^p A^{p,q} / F^{p+1} A^{p,q})$.

A recuperação do módulo filtrado através dum módulo graduado associado pode ser difícil. Quando R é um corpo esta recuperação pode ocorrer através de argumentos de dimensão. No entanto, se R é um anel comutativo arbitrário pode aparecer dificuldades.

Se H^* é um R -módulo graduado e filtrado, então podemos examinar a filtração sobre cada grau tomando

$$F^p H^n = F^p H^* \cap H^n.$$

Então, o módulo graduado associado é bigraduado definido por

$$Gr_0^{p,q}(H^*, F) = \frac{F^p H^{p+q}}{F^{p+1} H^{p+q}}.$$

Definição 1.2.5. *Uma seqüência espectral $\{E_r, d_r\}$ é convergente a H^* , um R -módulo graduado, se existe uma filtração F sobre H^* tal que*

$$E_\infty^{p,q} \cong H_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde E_∞ é o limite da seqüência espectral.

A determinação do módulo graduado H^* é geralmente o objetivo do cálculo. Se existe uma seqüência espectral convergindo para H^* e se converge unicamente para H^* e todos os problemas de extensão pode ser resolvidos, então H^* pode ser determinado.

Com algumas hipóteses a seqüência espectral construída através das definições 1.2.3 e 1.2.4 converge para co-homologia $H^*(A, d)$, pois temos $E_\infty^{p,q} = F^p H^{p+q}(A, d) / F^{p+1} H^{p+q}(A, d)$.

Quando o módulo graduado H^* é um espaço vetorial, bem como a filtração, baseado no fato de que toda seqüência curta de espaços vetoriais cinde, então a estrutura de H^* como espaço vetorial está completamente determinada a partir do espaço vetorial graduado associado. Isto é o caso se o anel em questão for um corpo.

Para finalizarmos esta secção faremos algumas considerações sobre a estrutura de produto. Se o complexo inicial tem um produto, o qual preserva a filtração, então ele induz um produto sobre os termos da seqüência espectral. Para as seqüências espectrais que iremos estudar a relação entre a estrutura de produto da co-homologia do complexo para o qual a seqüência espectral converge e a estrutura de produto dos termos $E_1, E_2, \dots, E_\infty$ está em detalhes descrita no final da secção VII.5 de [4]. Também, existe uma compatibilidade entre os diferenciais $d_r : E_r \rightarrow E_r$ com relação a estrutura de produto de E_r . Esta relação é dada como parte da proposição X.4.5 de [4]. Então obtemos:

Proposição 1.2.6. *O diferencial d_r é uma derivação com respeito ao produto sobre E_r , isto é,*

$$d_r(uv) = d_r(u)v + (-1)^{\deg u} u d_r(v).$$

2

Seqüência espectral e co-homologia equivariante

Neste capítulo são apresentados os conceitos de *complexo duplo*, *complexo total de co-cadeias* e de *co-homologia equivariante de Tate*. Com estes conceitos mostramos que através de filtrações adequadas sobre o complexo total associado a um certo complexo duplo de co-cadeias obtemos duas seqüências espectrais convergindo para co-homologia equivariante de Tate. Ainda, neste capítulo, apresentamos a descrição do diferencial d_1 de uma dessas seqüências espectrais.

2.1 Complexos duplos

Um complexo de co-cadeias duplo é um módulo bigraduado $C = (C^{p,q})_{p,q \in \mathbb{Z}}$, com um diferencial δ' de bigrau $(1, 0)$ e um diferencial δ'' de bigrau $(0, 1)$, tais que $\delta'\delta'' = \delta''\delta'$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} C^{p,q+1} & \xrightarrow{\delta'} & C^{p+1,q+1} \\ \delta'' \uparrow & & \uparrow \delta'' \\ C^{p,q} & \xrightarrow{\delta'} & C^{p+1,q} \end{array}$$

Dizemos que os elementos de $C^{p,q}$ têm grau p , grau complementar q e grau total $p + q$. Assumiremos que C tem apenas um número finito de módulos não-nulos em cada grau total. O complexo de co-cadeias total associado ao complexo duplo C é o complexo de co-cadeias construído da seguinte forma: para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$(TC)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q},$$

com diferencial $\delta : (TC)^n \rightarrow (TC)^{n+1}$ dado por $\delta|_{C^{p,q}} = \delta' + (-1)^p \delta''$.

2.2 Seqüências Espectrais de Complexos Duplos

Aqui estamos interessados na construção de seqüências espectrais sobre um complexo total TC associado a um complexo duplo C . Tomaremos as seguintes filtrações decrescentes sobre TC , e suas respectivas seqüências espectrais de acordo com secção 1.2.

Filtração I: $F^p(TC)^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{i, n-i}$, que nos leva a seqüência espectral

$$E_1^{p,q} = H^q(C^{p,*}) \implies H^{p+q}(TC). \quad (2.1)$$

Esta seqüência espectral será referida como *primeira seqüência espectral*. Note que d_1 é a aplicação induzida por δ' .

Filtração II: $F^p(TC)^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{n-i, i}$, que nos fornece a seqüência espectral

$$E_1^{p,q} = H^q(C^{*,p}) \implies H^{p+q}(TC). \quad (2.2)$$

Esta seqüência espectral será referida como *segunda seqüência espectral*. Note que d_1 é, a menos de sinal, a aplicação induzida por δ'' .

2.3 Co-homologia de Tate com coeficientes num complexo de co-cadeias

Sejam G um grupo, F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $C = (C^n)_{n \geq 0}$ um complexo de co-cadeias. Define-se a co-homologia de G com coeficientes em C por

$$H^*(G; C) = H^*(\mathcal{H}om_G(F, C)).$$

Estende-se o conceito acima para co-homologia de Tate. Sejam G um grupo finito e $C = (C^n)_{n \geq 0}$ um G -complexo de co-cadeias tal que $C_n = 0$ para $n > n_0$, para algum n_0 . Se $\hat{F}$ é uma resolução completa de G , definimos

$$\hat{H}^*(G; C) = H^*(\mathcal{H}om_G(\hat{F}, C)).$$

Note que $\mathcal{H}om_G(\widehat{F}, C)$ é o complexo total associado ao complexo duplo dos grupos abelianos $C^{p,q} = \text{Hom}_G(F_p, C^q)$. Associado a este complexo duplo temos que as duas seqüências espectrais da secção 2.2 convergem para $\widehat{H}^*(G; C)$.

Na primeira seqüência temos que $E_1^{p,q} = H^q(\mathcal{H}om_G(F_p, C))$, e como o functor $\mathcal{H}om_G(F_p, -)$ é exato, pois F_p é projetivo, $E_1^{p,q} = \mathcal{H}om_G(F_p, H^q(C))$. Como o d_1 é a aplicação induzida por δ' , obtemos que

$$E_2^{p,q} = \widehat{H}^p(G; H^q(C)) \implies \widehat{H}^{p+q}(G; C). \quad (2.3)$$

Na segunda seqüência espectral temos que

$$E_1^{p,q} = \widehat{H}^q(G; C^p) \implies \widehat{H}^{p+q}(G; C). \quad (2.4)$$

A igualdade $E_1^{p,q} = \widehat{H}^q(G; C^p)$ segue diretamente da definição do diferencial d_0 e da definição da co-homologia de Tate. Como o d_1 é a aplicação induzida por δ'' , $E_2^{p,q}$ é o grupo de co-homologia na dimensão p , do complexo de co-cadeias obtido do complexo C aplicando o functor $H^q(G, -)$ em cada dimensão.

2.4 Co-homologia equivariante e seqüências espectrais

Nesta seção usaremos as construções da seção anterior no caso em que o complexo de co-cadeias C é o complexo de co-cadeias celular dum G -complexo X com coeficientes sobre um G -módulo M , $C^*(X; M)$. Definiremos a co-homologia equivariante e estenderemos este conceito no caso de G ser um grupo finito e X um G -complexo de dimensão finita, para co-homologia de Tate. Em seguida, analisaremos a estrutura multiplicativa das seqüências espectrais associadas à co-homologia equivariante.

Sejam G um grupo, X um G -complexo e M um G -módulo. Existe uma G -ação diagonal em $C^*(X; M)$, ver secção 1.1, assim definimos os grupos de co-homologia equivariante de X com coeficiente M por,

$$H_G^*(X; M) = H^*(G; C^*(X; M)).$$

Temos, para a situação desta secção, as seguintes seqüências espectrais:

$$E_2^{p,q} = H^p(G; H^q(X; M)) \implies H_G^{p+q}(X; M), \quad (2.5)$$

obtida de (2.3) e

$$E_1^{p,q} = H^q(G; C^p(X; M)) \implies H_G^{p+q}(X; M), \quad (2.6)$$

obtida de (2.4).

Para estendermos o conceito à co-homologia de Tate, vamos supor que G seja um grupo finito e X um G -complexo de dimensão finita. A razão desta última hipótese vem do fato de que o complexo duplo a ser construído, e utilizado, deve satisfazer as condições da secção 2.1. Seja $\widehat{F}$ uma resolução completa de G , como na secção anterior definimos a co-homologia equivariante de Tate de (G, X) como sendo

$$\widehat{H}_G^*(X; M) = \widehat{H}^*(G; C^*(X; M)).$$

Deste modo temos duas seqüências espectrais:

$$E_2^{p,q} = \widehat{H}^p(G; H^q(X; M)) \implies \widehat{H}_G^{p+q}(X; M), \quad (2.7)$$

obtida de (2.3) e

$$E_1^{p,q} = \widehat{H}^q(G; C^p(X, M)) \implies \widehat{H}_G^{p+q}(X; M), \quad (2.8)$$

obtida de (2.4), provenientes do complexo duplo $C^{p,q} = \text{Hom}_G(F_p, C^q(X; M))$.

Este complexo duplo admite uma estrutura multiplicativa. Assumiremos que o módulo de coeficientes M é um anel comutativo R com a G -ação trivial. O complexo de co-cadeias $C^*(X; R)$, que por simplificação de notação usaremos somente $C^*(X)$, tem um produto cup

$$C^*(X) \otimes C^*(X) \rightarrow C^*(X)$$

associativo, e comutativo, a menos de homotopia, ver [4] secção 4 do capítulo X.

Seja $\widehat{F}$ uma resolução completa de G com uma aproximação da diagonal $\Delta : \widehat{F} \rightarrow \widehat{F} \widehat{\otimes} \widehat{F}$, ver secção 1.1. Considere o seguinte produto cup de co-cadeias:

$$\mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X)) \otimes \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X)) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X) \otimes C^*(X)) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X)),$$

a primeira aplicação é induzida por Δ e a segunda aplicação é induzida pelo produto cup das co-cadeias. De acordo com os comentários antes da proposição X.4.5 de [4] podemos concluir:

Lema 2.4.1. *O produto cup é compatível com as filtrações do complexo total, ou seja, tem-se um produto*

$$F^p \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X)) \otimes F^{p'} \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X)) \rightarrow F^{p+p'} \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X) \otimes C^*(X)).$$

Portanto, temos um produto cup induzido

$$E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \xrightarrow{\sim} E_r^{p+p',q+q'}, \text{ para } r \geq 1.$$

Lembramos, também, que pela proposição 1.2.6 o diferencial d_r é uma derivação com respeito ao produto sobre E_r .

2.5 O diferencial d_1 da segunda seqüência espectral

O objetivo desta seção é encontrar uma expressão para o diferencial d_1 na seqüência espectral de (2.6). Para isso, usaremos uma descrição alternativa do módulo $E_1^{p,q}$.

2.5.1 Os módulos $E_1^{p,q}$

Como X é um G -complexo, para cada célula σ , denotaremos por G_σ seu subgrupo de isotopia. Temos que o módulo $C^p(X; M)$ tem a seguinte estrutura aditiva:

$$C^p(X; M) = \mathcal{H}om(C_p(X), M) = \mathcal{H}om\left(\bigoplus_{\sigma \in X_p} \mathbb{Z}_\sigma, M\right) = \prod_{\sigma \in X_p} \mathcal{H}om(\mathbb{Z}_\sigma, M) = \prod_{\sigma \in X_p} M_\sigma,$$

onde X_p é o conjunto constituído pelas p -células de X . Consideraremos $\mathbb{Z}_\sigma$ sendo um G_σ -módulo chamado de “módulo orientação” associado a σ , de forma que $\mathbb{Z}_\sigma$ é um grupo cíclico infinito cujos dois geradores correspondem às duas orientações de σ . Um elemento $g \in G_\sigma$ age sobre $\mathbb{Z}_\sigma$ como multiplicação por $+1$ se g preserva a orientação de σ , e por -1 caso contrário. O G_σ -módulo $M_\sigma = \mathcal{H}om(\mathbb{Z}_\sigma, M)$ é aditivamente isomorfo a M , com a G_σ -ação “torcida” por χ_σ , onde $\chi_\sigma : G_\sigma \rightarrow \{\pm 1\}$ é a aplicação que leva g em $+1$ se ele preserva a orientação de σ , e em -1 caso contrário. Portanto, $g \cdot m = \chi_\sigma(g)m$.

Assim, pelo corolário 1.1.11, obtemos a seguinte estrutura de G -módulo para $C^p(X; M)$:

$$C^p(X; M) = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \text{Coind}_{G_\sigma}^G M_\sigma.$$

Logo,

$$H^q(G; C^p(X, M)) = H^q\left(G; \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \text{Coind}_{G_\sigma}^G M_\sigma\right) = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} H^q(G; \text{Coind}_{G_\sigma}^G M_\sigma).$$

O conjunto Σ_p é formado por representantes das órbitas das p -células pela G -ação sobre X .

Aplicando o lema de Shapiro temos que

$$H^q(G; C^p(X, M)) \approx \prod_{\sigma \in \Sigma_p} H^q(G_\sigma; M_\sigma). \quad (2.9)$$

Com isso, temos a seguinte expressão para (2.6):

$$E_1^{p,q} = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} H^q(G_\sigma; M_\sigma) \implies H_G^{p+q}(X; M). \quad (2.10)$$

Se G é um grupo finito podemos obter uma expressão análoga para co-homologia de Tate:

$$\widehat{H}^q(G; C^p(X, M)) = \widehat{H}^q \left(G; \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \text{Coind}_{G_\sigma}^G M_\sigma \right) = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \widehat{H}^q(G; \text{Coind}_{G_\sigma}^G M_\sigma).$$

A última igualdade segue da definição da co-homologia de Tate e do fato que $\text{Hom}(-, \prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \text{Hom}(-, A_i)$.

Novamente, pelo lema de Shapiro para co-homologia de Tate temos

$$\widehat{H}^q(G; C^p(X, M)) \approx \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \widehat{H}^q(G_\sigma; M_\sigma). \quad (2.11)$$

Portanto, se assumirmos que X é um G -complexo de dimensão finita temos a seguinte expressão para (2.8):

$$E_1^{p,q} = \prod_{\sigma \in \Sigma_p} \widehat{H}^q(G_\sigma; M_\sigma) \implies \widehat{H}_G^{p+q}(X; M). \quad (2.12)$$

2.5.2 Descrição do diferencial d_1

Aqui daremos uma fórmula para o diferencial d_1 utilizando a expressão (2.10) para os módulos $E_1^{p,q}$, quando X é um G -complexo e M um G -módulo.

Sejam τ uma p -célula e σ uma $(p+1)$ -célula de X , a aplicação $\delta_{\tau\sigma} : M_\tau \rightarrow M_\sigma$ denotará a (τ, σ) -componente do operador co-bordo $\delta : C^p(X; M) \rightarrow C^{p+1}(X; M)$. Denotaremos a intersecção $G_\tau \cap G_\sigma$ por $G_{\tau\sigma}$.

Temos que $\delta_{\tau\sigma} : M_\tau \rightarrow M_\sigma$ e a inclusão $G_{\tau\sigma} \hookrightarrow G_\tau$ induzem uma aplicação

$$u_{\tau\sigma} : H^*(G_\tau; M_\tau) \rightarrow H^*(G_{\tau\sigma}; M_\sigma).$$

Agora, consideremos os conjuntos $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau = \{\sigma \in X_{p+1}; \delta_{\tau\sigma} \neq 0\}$ e $\mathcal{F}_\sigma = \{\tau \in X_p; \partial_{\sigma\tau} \neq 0\}$. Temos que $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau$ é G_τ -equivariante, e que $\mathcal{F}_\sigma$ é G_σ -equivariante. Mais ainda, $\mathcal{F}_\sigma$ é finito.

Proposição 2.5.1. *Seja X um G -complexo. Considere τ uma p -célula e σ uma $(p+1)$ -célula de X . Então,*

$$\delta_{\tau\sigma} = 0 \iff \partial_{\sigma\tau} = 0.$$

A aplicação $\partial_{\sigma\tau} : M_\sigma \rightarrow M_\tau$ é a (σ, τ) -componente de $\partial : C_{p+1}(X; M) \rightarrow C_p(X; M)$.

Demonstração. Temos

$$\delta_{\tau\sigma} : M_\tau \hookrightarrow \prod_{\tau} M_\tau \xrightarrow{\delta} \prod_{\sigma} M_\sigma \twoheadrightarrow M_\sigma \quad \text{e} \quad \partial_{\sigma\tau} : M_\sigma \hookrightarrow \bigoplus_{\sigma} M_\sigma \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\tau} M_\tau \twoheadrightarrow M_\tau.$$

Note que $\delta = \text{Hom}(\partial^{\mathbb{Z}}, M)$ e $\partial = \partial^{\mathbb{Z}} \otimes M$, $\partial^{\mathbb{Z}}$ é o operador bordo do complexo de cadeia $C_*(X; \mathbb{Z})$, e denotamos $\partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}$ sua (σ, τ) -componente. Então,

$$\delta_{\tau\sigma}(m) = \phi_m \circ \partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}(1) = \partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}(1) \cdot \phi_m(1) = \partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}(1) \cdot m, \text{ para todo } m \in M_\tau,$$

e

$$\partial_{\sigma\tau}(m) = (\partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}} \otimes M)(1 \otimes m) = \partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}(1) \otimes m = \partial_{\sigma\tau}^{\mathbb{Z}}(1) \cdot m, \text{ para todo } m \in M_\sigma.$$

Portanto, segue o resultado. $\square$

Temos o seguinte corolário da proposição 2.5.1.

Corolário 2.5.2. *Sejam τ uma p -célula e σ uma $(p+1)$ -célula de X . Temos que $\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}_\tau$ se, e somente se, $\tau \in \mathcal{F}_\sigma$.*

Lema 2.5.3. *Sejam X um G -conjunto e S um subconjunto G -equivariante de X . Se S é finito, então para todo $x \in S$*

$$(G : G_x) < \infty,$$

onde G_x é o subgrupo de isotropia de x .

Demonstração. Temos que $(G : G_x) = \#G(x)$, onde $G(x)$ denota a órbita de x . Como S é G -equivariante, se $x \in S$, então $G(x) \subset S$. Logo,

$$(G : G_x) = \#G(x) \leq \#S < \infty.$$

$\square$

Como $(G_\tau : G_{\tau\sigma}) < \infty$ para $\sigma \in \mathcal{F}_\tau$, pelos corolário 2.5.2 e lema 2.5.3 temos que existe uma aplicação transfer

$$t_{\tau\sigma} : H^*(G_{\tau\sigma}; M_\sigma) \rightarrow H^*(G_\sigma; M_\sigma).$$

Note que σ pode não estar no conjunto de representantes Σ_{p+1} , para isso tomaremos σ_0 um representante pertencente a G -órbita de σ . Escolhamos $g_\sigma \in G$ tal que $g_\sigma\sigma = \sigma_0$. A ação de g_σ sobre $C^p(X; M)$ fornece um isomorfismo $M_\sigma \rightarrow M_{\sigma_0}$ compatível com o isomorfismo conjugação $G_{\sigma_0} \rightarrow G_\sigma$ dado por $g \mapsto g_\sigma^{-1}gg_\sigma$. Note que o isomorfismo é dado por $m \in M_\sigma \mapsto g_\sigma m$, e que $g_\sigma(gm) = (g_\sigma gg_\sigma^{-1})(g_\sigma m)$. Então, existe um isomorfismo induzido

$$v_\sigma : H^*(G_\sigma; M_\sigma) \rightarrow H^*(G_{\sigma_0}; M_{\sigma_0}).$$

Desta forma, dados $\tau \in \Sigma_{p+1}$ e $\sigma \in \Sigma_p$ construímos uma aplicação

$$\psi_{\tau\sigma} : H^*(G_\tau; M_\tau) \rightarrow H^*(G_\sigma; M_\sigma).$$

Consideremos $\tilde{\mathcal{F}}'_\tau$ um conjunto de representante de $\tilde{\mathcal{F}}_\tau / G_\tau$.

Proposição 2.5.4. *Para cada representante $\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}'_\tau$, existe um número finito de elementos de $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ que pertencem a G órbita de σ , $G(\sigma)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista um número infinito de elementos de $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ que pertençam a $G(\sigma)$, digamos σ_i com $i \in \mathbb{Z}$. Temos que $\sigma_i = g_i \sigma$, para algum $g_i \in G \setminus G_\tau$. Note que τ está no bordo de cada σ_i , pois $\sigma_i \in \tilde{\mathcal{F}}_\tau$. Como $\sigma = g_i^{-1} \sigma_i$ e a ação é celular, temos que para todo $i \in \mathbb{Z}$, $g_i^{-1} \tau$ está no bordo de σ . Afirmamos que para cada par (i, j) , com $i \neq j$, $g_i^{-1} \tau \neq g_j^{-1} \tau$. Se $g_i^{-1} \tau = g_j^{-1} \tau$ para algum par (i, j) , teríamos que $g_j g_i^{-1} \in G_\tau$, logo $\sigma_i = \sigma_j$. Desta forma, temos que existe um número infinito de células $g_i^{-1} \tau$ no bordo de σ . Absurdo! $\square$

Pela proposição acima, podemos definir a aplicação

$$\psi_\tau : H^*(G_\tau; M_\tau) \rightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma_{p+1}} H^*(G_\sigma; M_\sigma),$$

definida por

$$\psi_\tau = \prod_{\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}'_\tau} v_\sigma t_{\tau\sigma} u_{\tau\sigma}.$$

Finalmente, como para cada $\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}'_\tau$ temos um número finito de células τ que contribuem para o fator correspondente a σ , pois $\mathcal{F}_\sigma$ é finito, podemos definir a aplicação

$$\psi : \prod_{\tau \in \Sigma_p} H^*(G_\tau; M_\tau) \rightarrow \prod_{\sigma \in \Sigma_{p+1}} H^*(G_\sigma; M_\sigma),$$

de forma que sua restrição a cada fator é a aplicação ψ_τ .

Teorema 2.5.5. *A aplicação ψ construída é, a menos de sinal, o diferencial d_1 .*

Demonstração. O que precisamos mostrar é que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\tau \in \Sigma_p} H^*(G_\tau; M_\tau) & \xrightarrow{\psi} & \prod_{\sigma \in \Sigma_{p+1}} H^*(G_\sigma; M_\sigma) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ H^*(G; C^p(X, M)) & \xrightarrow{H^*(G, \delta)} & H^*(G; C^{p+1}(X, M)). \end{array}$$

Os isomorfismos verticais são os isomorfismos obtidos em (2.9). Verificaremos a comutatividade deste diagrama através do diagrama correspondente sobre complexos de co-cadeia. Seja F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, e denotaremos também por ψ a aplicação sobre os complexos de co-cadeia que induz ψ , e mostraremos que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\tau \in \Sigma_p} \mathcal{H}om_{G_\tau}(F, M_\tau) & \xrightarrow{\psi} & \prod_{\sigma \in \Sigma_{p+1}} \mathcal{H}om_{G_\sigma}(F, M_\sigma) \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 \\ \mathcal{H}om_G(F, C^p(X, M)) & \xrightarrow{\mathcal{H}om_G(F, \delta)} & \mathcal{H}om_G(F, C^{p+1}(X, M)). \end{array}$$

As aplicações ϕ_1 e ϕ_2 são os isomorfismos de co-cadeias que aparecem na demonstração do lema de Shapiro e que induzem os isomorfismos em (2.9), ver a prova em [4].

Para $f \in \mathcal{H}om_{G_\tau}(F, M_\tau)$ temos

$$u_{\tau\sigma}(f) = \delta_{\tau\sigma} \circ f.$$

Pela definição C de III.9 de [4],

$$t_{\tau\sigma}u_{\tau\sigma}(f) = \sum_{g \in G_\tau/G_{\tau\sigma}} g \cdot (\delta_{\tau\sigma} \circ f). \quad (2.13)$$

Note que para qualquer $x \in F$

$$g \cdot (\delta_{\tau\sigma} \circ f)(x) = g(\delta_{\tau\sigma} \circ f)(g^{-1}x) = gg^{-1}(\delta_{\tau,g\sigma} \circ f(x)) = (\delta_{\tau,g\sigma} \circ f)(x),$$

pois f é uma G_τ -aplicação e δ é uma G -aplicação. Assim $g \cdot (\delta_{\tau\sigma} \circ f) = \delta_{\tau,g\sigma} \circ f$, e obtemos a seguinte expressão para (2.13)

$$t_{\tau\sigma}u_{\tau\sigma}(f) = \sum_{g \in G_\tau/G_{\tau\sigma}} \delta_{\tau,g\sigma} \circ f.$$

Logo,

$$\psi(f) = \prod_{\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}'_\tau} \sum_{g \in G_\tau/G_{\tau\sigma}} g_\sigma(\delta_{\tau,g\sigma} \circ f).$$

Aplicando ϕ_2 e usando a relação que $g \cdot h = h$ em $\mathcal{H}om_G(\cdot, \cdot)$, temos que

$$\phi_2\psi(f) = \prod_{\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}'_\tau} \sum_{g \in G_\tau/G_{\tau\sigma}} \delta_{\tau,g\sigma} \circ f = \prod_{\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}_\tau} \delta_{\tau\sigma} \circ f.$$

Por outro lado, $\mathcal{H}om_G(F, \delta)\phi_1(f) = \mathcal{H}om_G(F, \delta)(f) = \prod_{\sigma \in \tilde{\mathcal{F}}_\tau} \delta_{\tau\sigma} \circ f$, logo o diagrama é comutativo, e (2.2) nos dá que ψ é o diferencial d_1 a menos de sinal. $\square$

3

Co-homologia dos pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$ -ações semilivres sobre $X \sim_p S^n \times S^n$

Neste capítulo investigamos a dimensão da co-homologia do espaço dos pontos fixos $X^{\mathbb{Z}_p}$, com X sendo um espaço cuja estrutura de anel de co-homologia é a mesma de $S^n \times S^n$ módulo p , $n > 0$ e p primo, ou seja, $H^*(X; \mathbb{Z}_p) = H^*(S^n \times S^n; \mathbb{Z}_p)$ e usaremos a seguinte notação para este espaço: $X \sim_p S^n \times S^n$. Para isso faremos uso da estrutura multiplicativa da primeira seqüência espectral. A técnica aqui usada se mostrará útil, também, no capítulo seguinte, no qual estudaremos ações sobre espaços com mesmo anel de co-homologia do produto de três esferas, de mesma dimensão, módulo p . Os resultados obtidos são semelhantes aos resultados de [19] quando tomamos $m = n$. Porém, obtemos resultados com hipóteses mais fracas do que as usadas em [19]. Apresentamos aqui uma versão para Co-homologia equivariante de Tate da Fórmula de Künneth.

3.1 Co-homologia do espaço dos pontos fixos X^G

Nesta secção calculamos a dimensão da co-homologia do espaço dos pontos fixos duma $\mathbb{Z}_p$ -ação, com p primo, sobre um espaço X .

Antes de iniciar os estudos sobre a co-homologia, apresentamos a Fórmula de Künneth para o caso da co-homologia equivariante de Tate.

Teorema 3.1.1. *Sejam R um domínio de ideais principais, G um grupo finito que atua trivialmente sobre um espaço X de dimensão finita. Se M é um G -módulo, então existe uma seqüência*

exata

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} \widehat{H}^p(G; M) \otimes_R H^q(X; R) \rightarrow \widehat{H}_G^n(X; M) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1^R \left(\widehat{H}^p(G; M), H^q(X; R) \right) \rightarrow 0,$$

que cinde.

Demonstração. Considere $\widehat{F}$ uma resolução completa de G . Como G é finito podemos tomar $\widehat{F}$ de forma que cada F_n seja livre e finitamente gerado, por exemplo usando a resolução “bar”. Seja $C_*(X; R)$ o complexo de cadeias celular de X sobre R . Por simplicidade, denotaremos C_*^R ao invés de $C_*(X; R)$.

Afirmção: $\mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X; M))$ é isomorfo a $\mathcal{H}\text{om}_R(\widehat{F}_G^R \otimes_R C_*, M)$, onde $\widehat{F}_G^R = \widehat{F} \otimes_G R$. De fato, para quaisquer i e j ,

$$\text{Hom}_G(F_i, C^j(X; M)) = \text{Hom}_G(F_i, \text{Hom}_R(C_j, M)) \cong \text{Hom}_R(F_i \otimes_G C_j, M). \quad (3.1)$$

Como G age trivialmente sobre X , a ação de G induzida sobre C_* é trivial, logo

$$F_i \otimes_G C_j \cong (F_i)_G \otimes C_j, \quad (3.2)$$

ver [4], seção VII.5, página 169. Note que $(F_i)_G \otimes C_j = (F_i \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes C_j$ que é isomorfo a $(F_i \otimes_G R) \otimes_R C_j$, denotaremos $(F_i \otimes_G R)$ por $(F_i)_G^R$. Logo,

$$\text{Hom}_G(F_i, C^j(X; M)) \cong \text{Hom}_R((F_i)_G^R \otimes_R C_j, M). \quad (3.3)$$

Assim,

$$\mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X; M))^n \cong \prod_{i+j=n} \text{Hom}_G(F_i, C^j(X; M)) \cong \prod_{i+j=n} \text{Hom}_R((F_i)_G^R \otimes_R C_j, M), \quad (3.4)$$

mas

$$\prod_{i+j=n} \text{Hom}_R((F_i)_G^R \otimes_R C_j, M) \cong \text{Hom}_R \left(\sum_{i+j=n} [(F_i)_G^R \otimes_R C_j], M \right). \quad (3.5)$$

Portanto, $\mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, C^*(X; M)) \cong \mathcal{H}\text{om}_R(\widehat{F}_G^R \otimes_R C_*, M)$.

A fim de usar o teorema 1.1.7, consideremos $C = \widehat{F}_G^R$, $C' = C_*$, $M = M$ e $M' = R$. Note que tanto $\widehat{F}_G^R$ quanto C_* são R -módulos livres, e que $\text{Tor}_1^R(M, R) = 0$. Mais ainda, $H(C_*)$ é do tipo finito, pois X é finito, e claro, R é R -livre. Logo, para cada n existe uma seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H^p(\widehat{F}_G^R; M) \otimes_R H^q(X; R) \rightarrow \widehat{H}_G^n(X; M) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n+1} \text{Tor}_1^R(H^p(\widehat{F}_G^R; M), H^q(X; R)) \rightarrow 0,$$

que cinde. O resultado segue, pois $H^*(\widehat{F}_G^R; M) = H^*(\mathcal{H}\text{om}_R(\widehat{F}_G^R, M))$, e $\mathcal{H}\text{om}_R(\widehat{F}_G^R, M) \cong \mathcal{H}\text{om}_G(\widehat{F}, M)$, logo $H^*(\widehat{F}_G^R; M) = \widehat{H}^*(G; M)$. $\square$

A proposição a seguir nos fornece uma condição suficiente para que um subcomplexo possua a mesma co-homologia equivariante do CW-complexo ([4], proposição VII.10.1).

Proposição 3.1.2. *Sejam G um grupo finito e Y um G -subcomplexo equivariante de X tal que o grupo de isotropia G_σ é trivial para toda célula σ de X que não está em Y . Então a inclusão $Y \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $\hat{H}_G^*(X; M) \rightarrow \hat{H}_G^*(Y; M)$, para todo G -módulo M .*

Demonstração. Considere a seqüência espectral dada pela equação (2.10). Por hipótese, temos que $\hat{H}^*(G_\sigma; M) = 0$ para σ uma célula de $X \setminus Y$. Logo, a inclusão $Y \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo desejado. $\square$

Pela equação (2.7), temos a seqüência espectral

$$E_2^{i,j} = \hat{H}^i(\mathbb{Z}_p; H^j(X; \mathbb{Z}_p)) \implies \hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^{i+j}(X; \mathbb{Z}_p). \quad (3.6)$$

Como a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $X^{\mathbb{Z}_p}$ é trivial, temos pela Fórmula de Künneth para coeficiente num corpo teorema 3.1.1,

$$\hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) \simeq \hat{H}^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p). \quad (3.7)$$

Pela proposição 3.1.2, temos o isomorfismo,

$$\hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^*(X; \mathbb{Z}_p) \approx \hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p). \quad (3.8)$$

Mas $\hat{H}^i(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, por (3.7) e (3.8)

$$\hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^i(X; \mathbb{Z}_p) \simeq \bigoplus_{k \geq 0} H^k(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}. \quad (3.9)$$

Assim,

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = \dim_{\mathbb{Z}_p} \hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^i(X; \mathbb{Z}_p) = \sum_{j+k=i} \dim_{\mathbb{Z}_p} E_\infty^{j,k}, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

A última igualdade vem do fato que os termos $E_\infty^{j,k}$, $j + k = i$, são os quocientes da filtração de $\hat{H}_{\mathbb{Z}_p}^i(X; \mathbb{Z}_p)$ e por termos como coeficientes um corpo, ver secção 1.2.

3.2 Ações semilivres de $\mathbb{Z}_p$ sobre $X \sim_p S^n \times S^n$

Seja X um espaço e G um grupo finito que atua em X por uma ação semilivre. Estamos interessados no caso em que o espaço dos pontos fixos é não-vazio. Apresentamos resultados

sobre a dimensão da co-homologia do espaço dos pontos fixos duma $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre um espaço X , que possui o mesmo anel de co-homologia de $S^n \times S^n \bmod p$, com p primo e $n > 0$, ou seja, $H^*(X; \mathbb{Z}_p) = H^*(S^n \times S^n; \mathbb{Z}_p)$. Será denotado $X \sim_p S^n \times S^n$ o espaço X com tal propriedade.

Inicialmente mostramos um resultado sobre os diferenciais.

Lema 3.2.1. *Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -complexo conexo por caminhos, p primo, tal que $X^{\mathbb{Z}_p}$ é um sub-complexo de X não-vazio. Então, temos que os diferenciais $d_r^{*,r-1}$, da primeira seqüência espectral, (2.1), são todos nulos para $r \geq 2$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X^G$ uma 0-célula. Temos que a inclusão $f : \{x_0\} \hookrightarrow X$ é uma aplicação G -equivariante, pois para qualquer $g \in G$ temos que

$$f(g \cdot x_0) = f(x_0) = x_0 = g \cdot x_0 = g \cdot f(x_0).$$

A aplicação f induz uma aplicação $\bar{f} : C^*(X; M) \rightarrow C^*(\{x_0\}; M)$, e por f ser G -equivariante temos que, se $\phi \in \text{Hom}_G(F_p, C^*(X; M))$, então $\bar{f} \circ \phi \in \text{Hom}_G(\{x_0\}, M)$. É fácil ver que esta correspondência é uma G -aplicação que preserva as filtrações

$$F^p \mathcal{H}\text{om}_G(F, C^*(X, M)) \rightarrow F^p \mathcal{H}\text{om}_G(F, C^*(\{x_0\}, M)),$$

ou seja, a induzida de f é compatível com as filtrações. Logo, f induz uma aplicação entre as seqüências espectrais de X e $\{x_0\}$,

$$f_r : E_r(X) \rightarrow E_r(\{x_0\}).$$

Como a aplicação f induz um isomorfismo $f^0 : H^0(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^0(\{x_0\}; \mathbb{Z}_p)$ sobre a co-homologia em dimensão 0, ela também induz um isomorfismo sobre os termos E_2 das seqüências espectrais, $f_2^{*,0} : E_2^{*,0}(X) \rightarrow E_2^{*,0}(\{x_0\})$. Pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_2^{i,1}(X) & \xrightarrow{f^*} & E_2^{i,1}(\{x_0\}) \\ d_2 \downarrow & & \downarrow d_2 \\ E_2^{i+2,0}(X) & \xrightarrow{f_2^{*,0}} & E_r^{i+2,0}(\{x_0\}), \end{array}$$

temos que d_2 é nulo, pois $f_2^{*,0}$ é um isomorfismo. Logo $E_3^{*,0}(X) = E_2^{*,0}(X)$, assim $f_3^{*,0} : E_3^{*,0}(X) \rightarrow E_3^{*,0}(\{x_0\})$ é um isomorfismo, e novamente pelo diagrama, temos que $d_3(X)$ é nulo. Portanto, pelo processo de indução temos que d_r são nulos para $r \geq 2$. $\square$

Passaremos a analisar a primeira seqüência espectral duma determinada ação. Para isso utilizaremos a estrutura de produto da seqüência espectral e dividiremos nos casos em que a ação de $\mathbb{Z}_p$ induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial ou não-trivial

3.2.1 $\mathbb{Z}_p$ -ação trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$

Aqui consideramos as ações de $\mathbb{Z}_p$ sobre X tais que induzem sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$ a ação trivial. Neste caso, a estrutura multiplicativa de E_2 é dada pela estrutura multiplicativa do produto tensorial $\widehat{H}^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \otimes H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, devido a fórmula de Künneth.

Seja t_i o gerador de $\widehat{H}^i(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$, então a estrutura multiplicativa de $\widehat{H}^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ é dada por:

$$t_i t_j = \begin{cases} t_{i+j} & , \text{ se } p = 2; \\ t_{i+j} & , \text{ se } p \text{ é ímpar e } ij \text{ é par;} \\ 0 & , \text{ se } p, i \text{ e } j \text{ são ímpares,} \end{cases} \quad (3.11)$$

e $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é a $\mathbb{Z}_p$ -álgebra gerada por u e v de graus n , tais que $u^2 = v^2 = 0$ e $uv \neq 0$.

Proposição 3.2.2. *Considere $\mathbb{Z}_n$ o grupo cíclico de ordem $n > 1$, gerado por t , agindo trivialmente sobre $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$. Temos que*

$$\widehat{H}^i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Tomemos como resolução completa de $\mathbb{Z}_p$ a resolução $\widehat{F}$ dada por

$$\cdots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n](e_{-2}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n](e_{-1}) \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n](e_0) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n](e_1) \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n](e_2) \xrightarrow{\Sigma} \cdots .$$

Aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_n}(-, \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n)$, fazendo a identificação

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n], \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$$

e usando o fato da ação ser trivial obtemos o seguinte complexo de co-cadeia

$$\cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_{-1}, b_{-1}) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_0, b_0) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_1, b_1) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_2, b_2) \xleftarrow{0} \cdots .$$

Portanto, $\widehat{H}^i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. □

Devido a esta proposição e de posse da estrutura multiplicativa da sequência espectral, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3. *Seja X um espaço, tal que $X \sim_p S^n \times S^n$. Suponha que a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X induza a $\mathbb{Z}_p$ -ação trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$. Então, $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 4$.*

Demonstração. Como os termos E_2^{ij} não-nulos são os termos em que $j = 0, n$ e $2n$, temos que os diferenciais possivelmente não-nulos são d_{n+1} sobre as linhas n e $2n$, e os diferenciais d_{2n+1} sobre a linha $2n$. Pelo lema 3.2.1 temos que os diferenciais d_{n+1} sobre a linha n são nulos, e os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos.

Como $E_{n+1} = E_2$, pela estrutura multiplicativa de E_2 temos que qualquer elemento da linha $2n$ é um produto de dois elementos da linha n . Assim, pela proposição 1.2.6 temos que os diferenciais d_{n+1} sobre a linha $2n$ são nulos.

Portanto, a sequência espectral colapsa no termo E_2 , e pela proposição 3.2.2, temos que $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 4$. $\square$

3.2.2 $\mathbb{Z}_p$ -ação não-trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$

Aqui nosso objetivo é calcular a dimensão de $H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p)$ como $\mathbb{Z}_p$ -espaço vetorial. Pela sequência espectral (3.6) é preciso saber $\hat{H}^i(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)$.

Pelo fato de que $H_\theta^*(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos para duas ações conjugadas, precisamos saber quantas classes de conjugação de subgrupos de ordem p existem em $\mathrm{SL}(2, p)$. Como a ordem de $\mathrm{SL}(2, p)$ é $p(p-1)(p+1)$, ver [15] (teorema VII.13, secção VII.17), temos que os p -subgrupos de Sylow são cíclicos de ordem p . Assim, todos os subgrupos de ordem p em $\mathrm{SL}(2, p)$ são conjugados.

Será mostrado que se a $\mathbb{Z}_p$ -ação é não-trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ temos resultados distintos para $p = 2$ e p primo ímpar.

O lema a seguir diz respeito a co-homologia de $\mathbb{Z}_2$ com coeficientes sobre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ quando temos uma ação não-trivial.

Lema 3.2.4. *Seja θ uma $\mathbb{Z}_2$ -ação sobre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ não-trivial, então*

$$\hat{H}_\theta^j(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 0, \text{ para todo } j.$$

Demonstração. Como as três ações não-triviais de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ são todas conjugadas basta calcularmos para uma única ação. Para o cálculo usaremos a ação que troca as coordenadas, ou seja, $\theta(t)(x, y) = (y, x)$, com t o gerador de $\mathbb{Z}_p$. Consideremos a resolução completa de $\mathbb{Z}_2$,

$$\dots \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_{-2}) \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_{-1}) \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_0) \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_1) \xrightarrow{t+1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_2) \dots,$$

e aplicando o functor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(-, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$, obtemos o seguinte complexo de co-cadeias:

$$\dots \leftarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \leftarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \leftarrow \dots$$

com os co-bordos sendo a aplicação $(x, y) \mapsto (x + y, x + y)$, com núcleo e imagem $\{(0, 0), (1, 1)\}$. Portanto, $\hat{H}^j(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. $\square$

Teorema 3.2.5. *Dado X um $\mathbb{Z}_2$ -espaço tal que $X \sim_2 S^n \times S^n$, $n > 0$. Se a $\mathbb{Z}_2$ -ação induzida sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ for não-trivial, então $X^{\mathbb{Z}_2}$ é uma esfera de co-homologia mod 2.*

Demonstração. Temos que $E_2^{ij} \neq 0$, se $j \neq 0, 2n$, pois o lema 3.2.4 nos diz que $E_2^{i,n} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Logo, os únicos diferenciais possivelmente não-nulos são os d_{2n+1} sobre a linha $2n$. Porém, pelo lema 3.3.1, temos que eles também são nulos. Assim, a sequência espectral colapsa em E_2 . Portanto, $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^{\mathbb{Z}_2}; \mathbb{Z}_2) = 2$, ou seja, $X^{\mathbb{Z}_2}$ é uma esfera de co-homologia mod 2. $\square$

Para os casos em que p é um primo ímpar, temos em [19], que se n é par, então $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$. Por isso, até o fim desta secção assumimos que n é ímpar.

A estrutura multiplicativa do complexo duplo, que preserva a filtração, induz um produto sobre E_r , $r > 0$, da sequência espectral. Para obtermos a estrutura multiplicativa para o termo E_2 precisamos definir a resolução a ser adotada, bem como a aproximação da diagonal associada a ela. Seguindo [5] capítulo XII, secção 7, temos a seguinte resolução completa para $\mathbb{Z}_p$:

$$\hat{F} : \cdots \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p](e_{-1}) \xleftarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p](e_0) \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p](e_1) \xleftarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p](e_2) \xleftarrow{1-t} \cdots, \quad (3.12)$$

e a seguinte aproximação da diagonal $\Delta : \hat{F} \rightarrow \hat{F} \hat{\otimes} \hat{F}$, determinada por suas componentes $\Delta_{i,j} : F_{i+j} \rightarrow F_i \otimes F_j$, dadas por:

$$\Delta_{i,j}(e_{i+j}) = \begin{cases} e_i \otimes e_j & , \text{ se } i \text{ é par} \\ e_i \otimes t e_j & , \text{ se } i \text{ é ímpar e } j \text{ é par} \\ \sum_{0 \leq k < l \leq p-1} (t^k e_i \otimes t^l e_j) & , \text{ se } i \text{ e } j \text{ são ímpares} \end{cases} \quad (3.13)$$

Sejam a e b os geradores de $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$. Como as ações não-triviais são todas conjugadas, tomaremos a ação tal que $T(a) = a$ e $T(b) = a + b$, e calcularemos a estrutura multiplicativa de E_2 .

Lema 3.2.6. *Seja θ uma $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, com p primo ímpar. Se θ é uma ação não-trivial, então $\hat{H}_\theta^i(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração. Temos pela filtração e definição dos termos E_r que E_2^{kn} são dados por:

$$E_2^{kn} = \ker \delta|_{C^{kn}} = \mathbb{Z}_p \langle a \rangle, \text{ para } k \text{ par}; \quad (3.14)$$

$$E_2^{kn} = \frac{\ker \delta|_{C^{kn}}}{\text{Im } \delta|_{C^{k-1,n}}} = \frac{\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p}{\langle a \rangle} \simeq \mathbb{Z}_p \langle \bar{b} \rangle, \text{ para } k \text{ ímpar}. \quad (3.15)$$

e considerando ações não-triviais de $\mathbb{Z}_p$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, obtemos que

$$E_2^{ij} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & , \text{ para } j = 0, n, 2n \\ 0 & , \text{ c.c.,} \end{cases}$$

□

Agora, estamos aptos a calcular a estrutura multiplicativa de E_2 . Para s par, denotamos por α_s o gerador de E_2^{sn} cujo representante é a , e se s for ímpar denotamos por β_s o gerador de E_2^{sn} cujo representante é b , conforme a prova do lema acima. Denotaremos por $t_s \otimes 1$ o gerador de E_2^{s0} e por $t_s \otimes ab$ o gerador de $E_2^{s,2n}$.

A aplicação φ_a^i é o elemento de $\text{Hom}_G(F_i, C^n)$, tal que $\varphi_a^i(e_i) = a$, da mesma maneira definimos φ_b^i . A seguir, apresentamos os cálculos do produto na seqüência espectral entre elementos de graus complementares n . Como os diferenciais d_r , com $1 < r \leq n$, são todos nulos temos que $E_2 = E_3 = \dots = E_{n+1}$, e assim temos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.7. *A estrutura multiplicativa de E_{n+1} , é dada por:*

$$(t_r \otimes 1)\alpha_s = \alpha_s(t_r \otimes 1) = \begin{cases} 0 & , r \text{ ímpar} \\ \alpha_{r+s} & , r \text{ par} \end{cases}, \quad (3.16)$$

$$(t_r \otimes 1)\beta_s = \beta_s(t_r \otimes 1) = \begin{cases} -\alpha_{r+s} & , r \text{ ímpar} \\ \beta_{s+t} & , r \text{ par} \end{cases}, \quad (3.17)$$

$$\alpha_r \alpha_s = \alpha_s \alpha_r = 0, \quad (3.18)$$

$$\alpha_r \beta_s = -\beta_r \alpha_s = t_{r+s} \otimes ab, \quad (3.19)$$

$$\beta_r \beta_s = \beta_s \beta_r = \begin{cases} t_{r+s} \otimes ba & , p = 3 \\ 0 & , p > 3 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Demonstração. Temos que

- i e j pares

$$\left[\bigcup \circ (\varphi_a \times \varphi_a) \circ \Delta \right] (e_{i+j}) = \left[\bigcup \circ (\varphi_a \times \varphi_a) \right] (e_i \otimes e_j) = \bigcup (a \otimes a) = a^2 = 0$$

- i par e j ímpar

$$\left[\bigcup \circ (\varphi_a \times \varphi_b) \circ \Delta \right] (e_{i+j}) = \left[\bigcup \circ (\varphi_a \times \varphi_b) \right] (e_i \otimes e_j) = \bigcup (a \otimes b) = ab$$

- i ímpar e j par

$$\left[\bigcup \circ (\varphi_b \times \varphi_a) \circ \Delta \right] (e_{i+j}) = \left[\bigcup \circ (\varphi_b \times \varphi_a) \right] (e_i \otimes e_j) = \bigcup (b \otimes a) = ba = -ab$$

- i e j ímpares

$$\begin{aligned} \left[\bigcup \circ (\varphi_b \times \varphi_b) \circ \Delta \right] (e_{i+j}) &= \left[\bigcup \circ (\varphi_b \times \varphi_b) \right] (\Sigma(e_i \otimes e_j)) = \bigcup \left(\sum_{0 \leq k < l \leq p-1} t^k b \otimes t^l b \right) = \\ &= \bigcup \left(\sum_{0 \leq k < l \leq p-1} [(ka + b) \otimes (la + b)] \right) = \sum_{0 \leq k < l \leq p-1} (kab + lba) = \left[\sum_{0 \leq k < l \leq p-1} (k - l) \right] ab = \\ &= \left[- \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(i+1)i}{2} \right] ab = \left[- \frac{p(p-1)(p+1)}{6} \right] ab. \end{aligned}$$

Note que $\frac{3(2)(4)}{6} \equiv 1 \pmod{3}$, e $\frac{p(p-1)(p+1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}$, para $p > 3$. $\square$

Se $\mathbb{Z}_p$ atua num espaço X existe uma relação clássica entre as características de Euler do espaço e de seu subespaço dos pontos fixos. Esta relação é dada por, ver [7],

$$\chi(X) \equiv \chi(X^{\mathbb{Z}_p}) \pmod{p}. \quad (3.21)$$

Por haver diferença entre a estrutura multiplicativa de E_2 quando $p = 3$, e quando $p > 3$, analisamos os casos separadamente nas seguintes proposições.

Teorema 3.2.8. *Seja X um espaço tal que $X \sim_3 S^n \times S^n$, com $n > 0$ ímpar. Suponha que a $\mathbb{Z}_3$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ seja não-trivial. Então, $\dim_{\mathbb{Z}_3} H^*(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3) = 3$, e as dimensões em que a co-homologia não é nula são pares.*

Demonstração. Pelo lema 3.2.1, e pelas equações (3.16)-(3.20), concluímos que os diferenciais d_r , $r > 2$, são todos nulos, logo $\dim_{\mathbb{Z}_3} H^*(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3) = 3$. Sejam n_i , $i = 0, 1, 2$ tais que $H^{n_i}(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3)$ é não-nulo. Como $H^0(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3) \neq 0$, vamos considerar $n_0 = 0$.

Como n é ímpar, $\chi(X) = 0$. Por outro lado,

$$\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) = \begin{cases} -1, & \text{se } n_1 n_2 \text{ é ímpar,} \\ 1, & \text{se } n_1 + n_2 \text{ é ímpar,} \\ 3, & \text{se } n_1 \text{ e } n_2 \text{ são pares,} \end{cases} \quad (3.22)$$

por (3.21), concluímos que n_1 e n_2 são pares. $\square$

Finalmente, os casos em que $p > 3$ primo.

Teorema 3.2.9. *Seja X um espaço com a mesma co-homologia de $S^n \times S^n \mod p$, com $p > 3$ e $n > 0$ ímpar, onde a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ não-trivial. Então, $X^{\mathbb{Z}_p}$ é uma esfera de co-homologia $\mod p$, de dimensão ímpar.*

Demonstração. Primeiramente, pelo lema 3.2.1 os diferenciais d_{n+1} , sobre a linha n , e os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos. De acordo com a estrutura multiplicativa e a propriedade de derivação dos diferenciais, temos que os diferenciais $d_{n+1}^{i, 2n}$ são nulos quando i é ímpar (ver 3.19). No entanto, os diferenciais $d_{n+1}^{i, 2n}$ não são todos nulos, pois se isso acontecesse teríamos que $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 3$, e assim $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = -1, 1$ ou 3 , o que contradiz (3.21), pois $-1, 1, 3 \not\equiv 0 \mod p$. Por outro lado, a situação em que para algum i par, $d_{n+1}^{i, 2n}$ é um isomorfismo e $d_{n+1}^{i+2, 2n}$ é nulo contradiz a expressão (3.9). Logo, temos que os diferenciais $d_{n+1}^{i, 2n}$, com i par são todos isomorfismos. Assim, $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 2$. Portanto, $X^{\mathbb{Z}_p}$ é uma esfera de co-homologia $\mod p$. Seja n_1 a dimensão da esfera. Logo,

$$\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = \begin{cases} 0, & \text{se } n_1 \text{ é ímpar,} \\ 2, & \text{se } n_1 \text{ é par.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Por (3.21) n_1 tem de ser ímpar, pois $\chi(X) = 0$. $\square$

4

Co-homologia dos espaço dos pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$ -ações semilivres sobre $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$

Neste capítulo será estudada a dimensão da co-homologia do espaço dos pontos fixos $X^{\mathbb{Z}_p}$, tal que $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$, com $n > 0$ e p primo, e ação semilivre. A técnica empregada aqui é basicamente a mesma do capítulo anterior.

A maior diferença com relação ao capítulo anterior é a existência, em alguns casos, de mais de uma $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida não-trivial, a menos de conjugação, sobre $H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p)$. Isso exige um certo cuidado no tratamento dos diferenciais.

4.1 Ação de $\mathbb{Z}_p$ induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ trivial

Nesta seção será analisado o caso em que a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial.

Proposição 4.1.1. *Considere $\mathbb{Z}_n$ o grupo cíclico de ordem $n > 1$, gerado por t , agindo trivialmente sobre $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$. Temos que*

$$\hat{H}^i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n,$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Tomemos como resolução completa de $\mathbb{Z}_p$ a resolução $\hat{F}$ dada por

$$\cdots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[Z_n](e_{-2}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[Z_n](e_{-1}) \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[Z_n](e_0) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[Z_n](e_1) \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[Z_n](e_2) \xrightarrow{\Sigma} \cdots$$

Aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_n}(-, \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n)$, fazendo a identificação

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}[Z_n], \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$$

e usando o fato da ação ser trivial obtemos o seguinte complexo de co-cadeia

$$\cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_0, b_0, c_0) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_1, b_1, c_1) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}_n(a_2, b_2, c_2) \xleftarrow{0} \cdots$$

Portanto, $\widehat{H}^i(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Pela equação (3.6), temos a seqüência espectral

$$E_2^{i,j} = \widehat{H}^i(\mathbb{Z}_p; H^j(X; \mathbb{Z}_p)) \implies \widehat{H}_{\mathbb{Z}_p}^{i+j}(X; \mathbb{Z}_p). \quad (4.1)$$

Como $H^j(X; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ para $i = 0, 3n$ e $H^j(X; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ para $i = n, 2n$, temos que

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p & , \text{ se } j = 0, 3n \\ \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p & , \text{ se } j = n, 2n \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

da seqüência espectral da equação (4.1).

Teorema 4.1.2. *Considere o espaço $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$, com p primo e $n > 0$. Se a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é a trivial, então $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 8$.*

Demonstração. Como os termos $E_2^{i,j}$ não-nulos são os termos em que $j = 0, n, 2n$ e $3n$, temos que os diferenciais possivelmente não-nulos são d_{n+1} sobre as linhas $n, 2n$ e $3n$; d_{2n+1} sobre as linhas $2n$ e $3n$; e d_{3n+1} sobre as linhas $3n$. Pelo lema 3.2.1 temos que d_{n+1} sobre a linha n e d_{2n+1} sobre a linha $2n$ são nulos, e os diferenciais d_{3n+1} são todos nulos.

Como $E_{n+1} = E_2$, pela estrutura multiplicativa de E_2 temos que qualquer elemento não-nulo situado na linha $2n$ é um produto de dois elementos não-nulos situados na linha n . Assim, pela proposição 1.2.6 temos que os diferenciais d_{n+1} sobre a linha $2n$ são nulos. Temos, também, que um elemento qualquer não-nulo da linha $3n$ é produto de elementos das linhas n e $2n$, assim, novamente pelo lema 3.2.1 obtemos que os diferenciais d_{n+1} e d_{2n+1} sobre a linha $3n$ são nulos.

Portanto, a seqüência espectral colapsa no termo E_2 , e assim, pela proposição, temos que 4.1.1, $\dim_{\mathbb{Z}_p} H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 8$. $\square$

A relação entre as características de Euler de X e $X^{\mathbb{Z}_p}$ dada pela equação (3.21) nos permite refinar a informação do teorema acima.

Corolário 4.1.3 (n par e $p = 3$). *Nas condições do teorema 4.1.2 com n par e $p = 3$, temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) = 8, 2$ ou -4 .*

Corolário 4.1.4 (n ímpar e $p = 3$). *Nas condições do teorema 4.1.2 com n ímpar e $p = 3$, temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) = 6, 0$ ou -6 .*

Corolário 4.1.5 (n par e $p > 3$). *Nas condições do teorema 4.1.2 com n par e $p > 3$, temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 8$.*

Corolário 4.1.6 (n ímpar e $p > 3$). *Nas condições do teorema 4.1.2 com n ímpar e $p > 3$, temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 0$.*

4.2 Ações algébricas não-triviais de $\mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$

Para estudarmos o comportamento das ações não-triviais de $\mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ precisamos saber quantas ações distintas, a menos de conjugação, existem. Ou seja, precisamos saber quais são os elementos de ordem p em $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$, o número de classes de conjugação dos subgrupos de ordem p , e quais são.

Temos que $|\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_p)| = p^3(p^2 - 1)(p^3 - 1)$, ver [15] (teorema VII.13, secção VII.17). Logo, os p -subgrupos de Sylow de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$ têm ordem p^3 . Como os p -subgrupos de Sylow são todos conjugados basta analisarmos um desses subgrupos. Um dos p -subgrupos de Sylow de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$ é o subgrupo das matrizes triangulares superiores, $\mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}_p)$, que é isomorfo a $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_p$ com a ação $\theta : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p)$ dada por

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para trabalharmos em $\mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}_p)$ usaremos a seguinte notação: para $1 \leq i < j \leq 3$,

$$E_{ij}(\alpha) = (a_{kl}), \text{ com } a_{kl} = \begin{cases} \alpha, & \text{se } k \neq l \text{ e } (k, l) = (i, j) \\ 1, & \text{se } k = l \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Denotaremos simplesmente por E_{ij} quando $\alpha = 1$. Temos que

$$\mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}_p) = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_p = (\langle E_{12} \rangle \times \langle E_{13} \rangle) \rtimes_{\theta} \langle E_{23} \rangle.$$

Temos que $\mathrm{UT}_3(\mathbb{Z}_2)$ é formado por 5 elementos de ordem 2 e 2 elementos de ordem 4, além da matriz identidade, contendo 3 classes de conjugação de subgrupos de ordem 2, sendo uma delas o subgrupo normal $\langle E_{13} \rangle$. Pode-se tomar

$$\{\langle E_{12} \rangle, \langle E_{13} \rangle, \langle E_{23} \rangle\}$$

como conjunto de representantes destas classes de conjugação.

Para p primo ímpar, $\text{UT}_3(\mathbb{Z}_p)$ possui somente elementos de ordem p , e possui $p + 2$ classes de conjugação de subgrupos de ordem p , sendo $p + 1$ com p subgrupos e uma formada pelo subgrupo normal $\langle E_{13} \rangle$. Um conjunto de representantes dessas classes de conjugação é:

$$\{\langle E_{12} \rangle, \langle E_{13} \rangle, \langle E_{23} \rangle, \langle E_{12} + E_{23}(\theta) \rangle, \theta \in \mathbb{Z}_p^*\}$$

O número de classes de conjugação de subgrupos de ordem p em $\text{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$ é o número de ações não-triviais de $\mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

Temos que as classes de conjugação de subgrupos de ordem p representadas por $\langle E_{12} \rangle$, $\langle E_{13} \rangle$ e $\langle E_{23} \rangle$ passam a ser uma única classe de conjugação em $\text{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$. Por outro lado, quando p é um primo ímpar as classes de conjugação de subgrupos de ordem p representadas por $\langle E_{12} + E_{23}(\theta) \rangle$, $\theta \in \mathbb{Z}_p^*$, formam a outra classe de conjugação em $\text{SL}_3(\mathbb{Z}_p)$.

Assim, existe uma única $\mathbb{Z}_2$ -ação não-trivial, a menos de conjugação, sobre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. No entanto, para p um primo ímpar, temos duas ações não-triviais distintas, a menos de conjugação, de $\mathbb{Z}_p$ sobre $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.

4.3 Ações de $\mathbb{Z}_p$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, com p primo

Proposição 4.3.1. *Seja X um espaço com o mesmo anel de co-homologia que $S^n \times S^n \times S^n \mod p$, $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$. Se n é par e $p > 3$, p primo, então toda $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial.*

Demonstração. Analisaremos a ação definida sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$, uma vez que ela determina, pelo produto, a ação sobre $H^{2n}(X; \mathbb{Z}_p)$. Sejam x , y e z os geradores de $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$ e considere

$$\theta = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

a matriz que define a ação do gerador t de $\mathbb{Z}_p$ sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$, por isso, denotaremos $t \cdot w$ por $\theta(w)$, com $w \in H^n(X; \mathbb{Z}_p)$.

Por n ser par temos que $xy = yx$, $xz = zx$ e $yz = zy$, com isso $\theta(x^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2[ab(xy) + ac(xz) + bc(yz)]$. Por outro lado, $\theta(x^2) = 0$, pois $x^2 = 0$, e como p é ímpar, $ab(xy) + ac(xz) + bc(yz) = 0$. Portanto, $ab = ac = bc = 0$. De forma análoga para y^2 e z^2 , obtemos $de = df = ef = 0$ e $gh = gi = hi = 0$. O que nos diz que cada coluna possui duas

entradas nulas, pois p é primo. Como $|\theta|^p = 1$, temos que $|\theta| = 1$, logo uma única das três possibilidades acontece: ou $aei \neq 0$, ou $bfg \neq 0$, ou $cdh \neq 0$. Mais ainda, o produto não-nulo é igual a 1.

Suponha que $aei = 1$. Como $\theta^p = I_3$, temos que $a = e = i = 1$, portanto $\theta = I_3$, ou seja, a ação é trivial. Agora se $bfg = 1$, ou $cdh = 1$, então $\theta^k = I_3$ se, e somente se, k é múltiplo de 3. Portanto, se $p > 3$ primo, a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial.

□

Quando n é par e $p = 3$ existe ação não-trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$. A proposição seguinte nos informa que a ação tem de ser uma 'troca total' de coordenadas.

Proposição 4.3.2. *Seja $X \sim_p S^n \times S^n \times S^n$. Se n é par, a matriz que define uma ação não-trivial de $\mathbb{Z}_3$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ é da forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

tal que $\alpha\beta\gamma = 1$.

Demonstração. Conseqüência da demonstração de 4.3.1.

□

4.4 $\mathbb{Z}_2$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$

Sejam $\theta^{(n)}$ e $\theta^{(2n)}$ as matrizes referentes a ação θ sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ e $H^{2n}(X; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente. Como existe uma única ação não-trivial, a menos de conjugação, escolheremos como representante das ações não-triviais a ação tal que

$$\theta^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \theta^{(2n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que θ é compatível com a estrutura de anel de $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$.

Consideremos, a seguinte resolução completa de $\mathbb{Z}_2$:

$$\widehat{F}: \quad \cdots \xleftarrow{1+t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_{-2}) \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_{-1}) \xleftarrow{1+t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_0) \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_1) \xleftarrow{1+t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_2) \xleftarrow{1-t} \cdots$$

Aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(-, H^n(X; \mathbb{Z}_2))$ a $\widehat{F}$, e usando a seguinte notação

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_i), H^n(X; \mathbb{Z}_2)) \approx \mathbb{Z}_2(a_i, b_i, c_i)$$

obtemos a seqüência

$$\cdots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_2(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) \xrightarrow{1+t} \mathbb{Z}_2(a_0, b_0, c_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_2(a_1, b_1, c_1) \xrightarrow{1+t} \mathbb{Z}_2(a_2, b_2, c_2) \xrightarrow{1-t} \cdots$$

Temos que $1 - t = 1 + t$, pois $p = 2$. Assim,

$$(1 - t)(x, y, z) = (1 + t)(x, y, z) = (y, 0, 0),$$

e temos $\ker(1 - t) = \ker(1 + t) = \mathbb{Z}_2(a, c)$ e $\text{Im}(1 - t) = \text{Im}(1 + t) = \mathbb{Z}_2(a)$. Portanto,

$$E_2^{i,n} = \mathbb{Z}_2(c_i).$$

Agora, aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(-, H^{2n}(X; \mathbb{Z}_2))$ e tomando a notação

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2](e_i), H^{2n}(X; \mathbb{Z}_2)) \approx \mathbb{Z}_2(a'_i, b'_i, c'_i),$$

onde $a' = bc$, $b' = ac$ e $c' = ab$. Obtemos a seqüência

$$\cdots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_2(a'_{-1}, b'_{-1}, c'_{-1}) \xrightarrow{1+t} \mathbb{Z}_2(a'_0, b'_0, c'_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_2(a'_1, b'_1, c'_1) \xrightarrow{1+t} \mathbb{Z}_2(a'_2, b'_2, c'_2) \xrightarrow{1-t} \cdots$$

Aqui,

$$(1 - t)(x', y', z') = (1 + t)(x', y', z') = (0, x', 0),$$

e temos $\ker(1 - t) = \ker(1 + t) = \mathbb{Z}_2(b', c')$ e $\text{Im}(1 - t) = \text{Im}(1 + t) = \mathbb{Z}_2(b')$. Logo,

$$E_2^{i,2n} = \mathbb{Z}_2(c'_i).$$

Assim,

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2(t_i^{(0)}) & , \text{ if } j = 0, \\ \mathbb{Z}_2(c_i) & , \text{ if } j = n, \\ \mathbb{Z}_2(c'_i) & , \text{ if } j = 2n, \\ \mathbb{Z}_2(t_i^{(3n)}) & , \text{ if } j = 3n, \\ 0 & , \text{ c.c. } \end{cases}$$

Com a seguinte estrutura multiplicativa:

$$\begin{aligned} c_i c_j &= c_j c_i = 0 \\ c'_i c_j &= c_j c'_i = t_{i+j}^{(3n)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pelo lema 3.2.1 os diferenciais $d_{n+1}^{k,n}$ e $d_{2n+1}^{k,2n}$ são nulos. Como $c_i c'_j = c'_j c_i = t_{i+j}^{(3n)}$, pela proposição 1.2.6 temos que os diferenciais $d_{n+1}^{k,3n}$ e $d_{2n+1}^{k,3n}$ são nulos. No entanto, $c_i c_j = c_j c_i = 0$, logo não podemos garantir que os diferenciais $d_{n+1}^{k,2n}$ são nulos, por meios do produto e da propriedade de derivação. Então

$$d_{n+1}^{k,2n}(c_k) = \gamma_k c_{k+n+1}.$$

A equação (3.9) fornece os seguinte lema:

Lema 4.4.1. *Se $\gamma_k = \gamma_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, então $\gamma_{k+2} = \gamma_k$.*

Por outro lado, pela relação entre as características de Euler de X e $X^{\mathbb{Z}_2}$ temos:

Lema 4.4.2. *Para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma_k = \gamma_{k+1}$.*

Portanto, os diferenciais ou são todos nulos, ou são todos isomorfismos.

Proposição 4.4.3. *Se os diferenciais são todos nulos, então $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^{\mathbb{Z}_2}; \mathbb{Z}_2) = 4$.*

Proposição 4.4.4. *Se os diferenciais são todos isomorfismos, então $X^{\mathbb{Z}_2}$ é uma esfera de co-homologia mod 2.*

4.5 $\mathbb{Z}_3$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$, com n par

De acordo com a proposição 4.3.2, as ações não-triviais de $\mathbb{Z}_3$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ são todas conjugadas a ação dada pela matriz

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sejam $\theta^{(n)}$ e $\theta^{(2n)}$ as matrizes referentes a ação θ sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ e $H^{2n}(X; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente. Temos que tanto $\theta^{(n)}$, quanto $\theta^{(2n)}$ são representadas pela matriz θ , ou seja

$$\theta^{(n)}(a) = c; \theta^{(n)}(b) = a; \theta^{(n)}(c) = b \quad \text{e} \quad \theta^{(2n)}(a') = c'; \theta^{(2n)}(b') = a'; \theta^{(2n)}(c') = b'$$

Temos a resolução completa de $\mathbb{Z}_3$

$$\widehat{F}: \dots \xleftarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3](e_{-2}) \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3](e_{-1}) \xleftarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3](e_0) \xleftarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3](e_1) \xleftarrow{\Sigma} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_3](e_2) \xleftarrow{1-t} \dots$$

O símbolo Σ , daqui em diante, denotará a multiplicação por $1 + t + t^2 + \dots + t^{p-1}$. No caso em questão é a multiplicação por $1 + t + t^2$.

Aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_3}(-, H^n(X; \mathbb{Z}_3))$ à $\widehat{F}$, obtemos

$$\dots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_3(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_3(a_0, b_0, c_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_3(a_1, b_1, c_1) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_3(a_2, b_2, c_2) \xrightarrow{1-t} \dots$$

Temos que

$$(1-t)(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x), \quad \text{e} \quad \Sigma(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

Assim,

$$E_2^{i,n} = \begin{cases} \frac{\ker(1-t)}{\text{Im } \Sigma} = \frac{\mathbb{Z}_3(a+b+c)}{\mathbb{Z}_3(a+b+c)} \approx 0 & , \text{ se } i \text{ for par} \\ \frac{\ker \Sigma}{\text{Im}(1-t)} = \frac{\mathbb{Z}_3(a-c, b-c)}{\mathbb{Z}_3(a-c, b-c)} \approx 0 & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Portanto, $E_2^{i,n} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Agora, aplicando o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_3}(-, H^{2n}(X; \mathbb{Z}_3))$ à $\widehat{F}$, obtemos

$$\dots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_3(a'_{-1}, b'_{-1}, c'_{-1}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_3(a'_0, b'_0, c'_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_3(a'_1, b'_1, c'_1) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_3(a'_2, b'_2, c'_2) \xrightarrow{1-t} \dots$$

Como a ação sobre $H^{2n}(X; \mathbb{Z}_3)$ é representada pela mesma matriz da ação sobre $H^n(X; \mathbb{Z}_3)$, temos que $E_2^{i,2n} = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Assim, os módulos E_2 são

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_3 & , \text{ se } j = 0, 3n \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}.$$

Pela estrutura de E_2 , temos que os diferenciais possivelmente não-nulos são os diferenciais d_{3n+1} , mas o lema 3.2.1 nos diz que também o são. Portanto, a seqüência espectral colapsa em E_2 , e isto fornece o seguinte resultado:

Proposição 4.5.1. *Se n é par, e $\mathbb{Z}_3$ age não-trivialmente sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$, então $X^{\mathbb{Z}_3}$ é uma esfera de co-homologia mod 3, de dimensão par.*

Demonstração. O parágrafo anterior prova que $X^{\mathbb{Z}_3}$ é uma esfera de co-homologia mod 3. O fato da dimensão ser par vem dos fatos de que $\chi(X) = 8$ e $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) \equiv \chi(X) \pmod{3}$. $\square$

4.6 $\mathbb{Z}_p$ -ações não-triviais sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, com n e p ímpares

Pela secção 4.2 temos que existem duas ações distintas, a menos de conjugação, representadas pelas matrizes

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Com isso, analisaremos separadamente cada caso.

4.6.1 Estudo da ação θ_1

Da mesma forma que nos casos anteriores obtemos a seguinte seqüência semi-exata ao aplicar o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-; H^n(X; \mathbb{Z}_p))$ à $\widehat{F}$:

$$\cdots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_p(a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_p(a_0, b_0, c_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_p(a_1, b_1, c_1) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_p(a_2, b_2, c_2) \xrightarrow{1-t} \cdots \quad (4.3)$$

Por θ_1 ,

$$\theta_1^{(n)}(a) = a; \theta^{(n)}(b) = a + b; \theta^{(n)}(c) = c,$$

que fornece

$$(1-t)(x, y, z) = (-y, 0, 0), \quad \text{e} \quad \Sigma(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

logo,

$$E_2^{i,n} = \begin{cases} \frac{\ker(1-t)}{\text{Im } \Sigma} = \frac{\mathbb{Z}_p(a, c)}{0} \approx \mathbb{Z}_p(a, c) & , \text{ se } i \text{ for par} \\ \frac{\ker \Sigma}{\text{Im}(1-t)} = \frac{\mathbb{Z}_p(a, b, c)}{\mathbb{Z}_p(a)} \approx \mathbb{Z}_p(b, c) & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Agora, ao aplicar o functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(-; H^{2n}(X; \mathbb{Z}_p))$ a $\widehat{F}$, temos:

$$\cdots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_p(a'_{-1}, b'_{-1}, c'_{-1}) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_p(a'_0, b'_0, c'_0) \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}_p(a'_1, b'_1, c'_1) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}_p(a'_2, b'_2, c'_2) \xrightarrow{1-t} \cdots \quad (4.4)$$

Por θ_1 ,

$$\theta_1^{(2n)}(a') = a' + b'; \theta^{(2n)}(b') = b'; \theta^{(2n)}(c') = c',$$

que fornece

$$(1-t)(x', y', z') = (0, -x, 0), \quad \text{e} \quad \Sigma(x', y', z') = (0, 0, 0),$$

logo,

$$E_2^{i,2n} = \begin{cases} \frac{\ker(1-t)}{\text{Im } \Sigma} = \frac{\mathbb{Z}_p(b', c')}{0} \approx \mathbb{Z}_p(b', c') & , \text{ se } i \text{ for par} \\ \frac{\ker \Sigma}{\text{Im}(1-t)} = \frac{\mathbb{Z}_p(a', b', c')}{\mathbb{Z}_p(b')} \approx \mathbb{Z}_p(a', c') & , \text{ se } i \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Finalmente, como $H^0(X; \mathbb{Z}_p)$ e $H^{3n}(X; \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_p$, e a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{Z}_p$ é trivial, temos $E_2^{i,j} = \mathbb{Z}_p$ quando $j = 0$ e $3n$. Denotaremos por $t_i^{(j)}$ o gerador de $E_2^{i,j}$ para $j = 0$ e $3n$. Assim

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p(t_i^{(j)}) & , \text{ se } j = 0 \text{ e } 3n \\ \mathbb{Z}_p(a_i, c_i) & , \text{ se } j = n \text{ e } i \text{ for par} \\ \mathbb{Z}_p(b_i, c_i) & , \text{ se } j = n \text{ e } i \text{ for ímpar} \\ \mathbb{Z}_p(b'_i, c'_i) & , \text{ se } j = 2n \text{ e } i \text{ for par} \\ \mathbb{Z}_p(a'_i, c'_i) & , \text{ se } j = 2n \text{ e } i \text{ for ímpar} \\ 0 & , \text{ c.c} \end{cases}. \quad (4.5)$$

Pelo lema 3.2.1 temos que os diferenciais d_{n+1} possivelmente não-nulos estão sobre as linhas $j = 2n$ e $3n$. A fim de utilizar a proposição 1.2.6, para determinar se os diferenciais d_{n+1} são nulos sobre as linhas $j = 2n$ e $3n$ precisamos analisar o produto em E_2 . Primeiramente, verificaremos os produtos que 'chegam' em $E_2^{*,2n}$.

$$a_i a_j = 0; \quad (4.6)$$

$$a_i b_j = -b_j a_i = -c'_{i+j}; \quad (4.7)$$

$$c_i c_j = 0; \quad (4.8)$$

$$a_i c_j = -c_j a_i = \begin{cases} b'_{i+j} & , \text{ se } j \text{ é par} \\ 0 & , \text{ se } j \text{ é ímpar} \end{cases}; \quad (4.9)$$

$$b_i b_j = \begin{cases} -c'_{i+j} & , \text{ se } p = 3 \\ 0 & , \text{ se } p > 3 \end{cases}; \quad (4.10)$$

$$b_i c_j = -c_j b_i = \begin{cases} a'_{i+j} & , \text{ se } j \text{ é par} \\ b'_{i+j} & , \text{ se } j \text{ é ímpar e } p = 3 \\ 0 & , \text{ se } j \text{ é ímpar e } p > 3 \end{cases}. \quad (4.11)$$

Logo, obtemos

$$d_{n+1}(a'_i) = 0, \quad \text{ver 4.11;} \quad (4.12)$$

$$d_{n+1}(b'_i) = 0, \quad \text{ver 4.9 e 4.11;} \quad (4.13)$$

$$d_{n+1}(c'_i) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ é par e } p = 3, \text{ ver 4.10} \\ 0 & , \text{ se } i \text{ é ímpar, ver 4.7} \end{cases}. \quad (4.14)$$

Note que para $d_{n+1}(c'_i)$ quando i é par e $p > 3$ não há uma situação conclusiva. Por isso, temos

$$d_{n+1}(c'_i) = \alpha a_{i+n+1} + \gamma c_{i+n+1}, \quad \text{com } \alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_p. \quad (4.15)$$

Ao calcularmos os produtos que 'chegam' em $E_2^{*,3n}$ obtemos:

$$a_i a'_j = a'_j a_i = t_{i+j}^{(3n)}; \quad (4.16)$$

$$a_i b'_j = b'_j a_i = 0; \quad (4.17)$$

$$a'_i b_j = -b_j a'_i = \begin{cases} t_{i+j}^{(3n)} & , p = 3 \\ 0 & , p > 3 \end{cases}; \quad (4.18)$$

$$a_i c'_j = c'_j a_i = 0; \quad (4.19)$$

$$a'_i c_j = c_j a'_i = 0; \quad (4.20)$$

$$b_i b'_j = b'_j b_i = -t_{i+j}^{(3n)}; \quad (4.21)$$

$$b_i c'_j = c'_j b_i = 0; \quad (4.22)$$

$$b'_i c_j = c_j b'_i = 0; \quad (4.23)$$

$$c_i c'_j = c'_j c_i = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ e } j \text{ são ímpares} \\ t_{i+j}^{(3n)} & , \text{ c.c.} \end{cases}. \quad (4.24)$$

Novamente, pela proposição 1.2.6 temos que

$$d_{n+1}(t_i^{(3n)}) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \text{ é ímpar, ver equações 4.16, 4.21 e 4.24} \\ 0 & , \text{ se } i \text{ é par e } p = 3, \text{ ver equação 4.18} \end{cases}. \quad (4.25)$$

Note que para $d_{n+1}(t_i^{(3n)})$ quando i é par e $p > 3$, não podemos concluir, pois apesar de $t_k^{(3n)}$, com k par, ser produto de $c_i c'_j$, ver equação 4.24, é preciso que j seja par, e não sabemos o que dá $d_{n+1}(c'_j)$ para j par. Porém, pela proposição 1.2.6 e pelas equações 4.24 e 4.15 temos que

$$d_{n+1}(t_i^{(3n)}) = d_{n+1}(c_0 c'_i) = c_0(\alpha a_{i+n+1} + \gamma c_{i+n+1}) = -\alpha b'_{i+n+1}. \quad (4.26)$$

Temos, então, que para o caso $p = 3$ a seqüência espectral colapsa em E_2 , o que nos fornece o seguinte resultado:

Proposição 4.6.1. *Suponha que a $\mathbb{Z}_3$ -ação sobre X induza uma $\mathbb{Z}_3$ -ação não-trivial conjugada a θ_1 sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$. Temos que*

$$\dim_{\mathbb{Z}_3} H^*(X^{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_3) = 6.$$

Mais ainda, $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) = 0$ ou 6.

Mostraremos que a equação 4.15 pode ser melhorada.

Proposição 4.6.2. *Seja $p > 3$ primo, temos que $d_{n+1}(c'_i) = \gamma c_{i+n+1}$ quando i é par.*

Demonstração. Se $\alpha \neq 0$ temos que $E_{2n+1}^{i,n} = E_{n+2}^{i,n} \approx \mathbb{Z}_p$ e $E_{2n+1}^{i,2n} = E_{n+2}^{i,2n} \approx 0$. Pela equação 4.26 $d_{n+1}(t_i^{(3n)}) \neq 0$. Como os diferenciais restantes são todos nulos, a seqüência espectral colapsa em E_{n+2} . Logo,

$$\text{rk } H^{3n} = \text{rk}(E_{n+2}^{0,3n} \oplus E_{n+2}^{n,2n} \oplus E_{n+2}^{2n,n} \oplus E_{n+2}^{3n,0}) = \text{rk}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = 5$$

e

$$\text{rk } H^{3n+1} = \text{rk}(E_{n+2}^{1,3n} \oplus E_{n+2}^{n+1,2n} \oplus E_{n+2}^{2n+1,n} \oplus E_{n+2}^{3n+1,0}) = \text{rk}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p) = 4.$$

O que contradiz a expressão 3.9, que nos diz que $H^{3n} \approx H^{3n+1}$. Portanto, $\alpha = 0$. $\square$

Proposição 4.6.3. *Seja $p > 3$, se $d_{n+1}(c'_i) = \gamma c_{i+n+1}$, com $\gamma \neq 0$, quando i é par, então $p = 5$ e $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 5$. Mais ainda, $\chi(X_{\mathbb{Z}_5}) = 5$.*

Demonstração. Como $\gamma \neq 0$ temos que $E_{2n+1}^{i,n} = E_{n+2}^{i,n} \approx \mathbb{Z}_p(a_i)$ e $E_{2n+1}^{i,2n} = E_{n+2}^{i,2n} \approx \mathbb{Z}_p(b'_i)$. Pela equação 4.26 $d_{n+1}(t_i^{(3n)}) = 0$. Como o restantes dos diferenciais são todos nulos, a seqüência espectral colapsa em E_{n+2} . Logo,

$$\text{rk } H^{3n} = \text{rk } E_{n+2}^{0,3n} \oplus E_{n+2}^{n,2n} \oplus E_{n+2}^{2n,n} \oplus E_{n+2}^{3n,0} = \text{rk } \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p = 5.$$

Portanto, pela expressão 3.9, $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 5$. Como $\chi(X) \equiv \chi(X^{\mathbb{Z}_p}) \pmod{p}$, temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_5}) = 5$. $\square$

Proposição 4.6.4. *Seja $p > 3$, se $d_{n+1}(c'_i) = 0$ quando i é par, então $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 6$. Mais ainda, $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 0$.*

Demonstração. Como $d_{n+1}(c'_i) = 0$, a seqüência espectral colapsa no termo E_2 . Assim, temos que $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 6$. O fato $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 0$ é devido a relação entre as características de Euler $\chi(X) \equiv \chi(X^{\mathbb{Z}_p}) \pmod{p}$. $\square$

4.6.2 Estudo da ação θ_2

Aqui serão consideradas as $\mathbb{Z}_p$ -ações induzidas sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ conjugadas à θ_2 .

Novamente, obtemos a equação 4.3. Note que

$$\theta_2^{(n)}(a) = a; \theta_2^{(n)}(b) = a + b; \theta_2^{(n)}(c) = b + c.$$

Assim, $(1 - t)(x, y, z) = (-y, -z, 0)$, com $\ker(1 - t) = \mathbb{Z}_p(a)$ e $\text{Im}(1 - t) = \mathbb{Z}_p(a, b)$.

Já, a aplicação Σ apresenta resultados distintos para $p = 3$ e $p > 3$. Lembre que Σ é a multiplicação por $1 + t + \dots + t^{p-1}$.

Para $p = 3$, $\Sigma(x, y, z) = (z, 0, 0)$, com $\ker \Sigma = \mathbb{Z}_p(a, b)$ e $\text{Im} \Sigma = \mathbb{Z}_p(a)$. Enquanto para $p > 3$, Σ é a aplicação nula, logo $\ker \Sigma = \mathbb{Z}_p(a, b, c)$ e $\text{Im} \Sigma = 0$.

Com isso,

$$E_2^{i,n} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } p = 3 \\ \frac{\ker(1 - t)}{\text{Im} \Sigma} = \frac{\mathbb{Z}_p(a)}{0} \approx \mathbb{Z}_p(a) & , \text{ se } i \text{ for par, e } p > 3 \\ \frac{\ker \Sigma}{\text{Im}(1 - t)} = \frac{\mathbb{Z}_p(a, b, c)}{\mathbb{Z}_p(a, b)} \approx \mathbb{Z}_p(c) & , \text{ se } i \text{ for ímpar, e } p > 3 \end{cases}.$$

Para o cálculo dos módulos $E_2^{i,2n}$, usamos a equação 4.4, e consideramos a ação

$$\theta_2^{(2n)}(a') = a' + b' + c'; \theta_2^{(2n)}(b') = b' + c'; \theta_2^{(2n)}(c') = c'.$$

Temos que $(1 - t)(x, y, z) = (0, -x, -x - y)$, com $\ker(1 - t) = \mathbb{Z}_p(c')$ e $\text{Im}(1 - t) = \mathbb{Z}_p(b', c')$.

Assim, como no cálculo dos módulos $E_2^{i,n}$, temos diferença entre o caso em que $p = 3$ e $p > 3$. Para $p = 3$, $\Sigma(x', y', z') = (0, 0, x')$, com $\ker \Sigma = \mathbb{Z}_p(b', c')$ e $\text{Im} \Sigma = \mathbb{Z}_p(c')$. Enquanto para $p > 3$ Σ é a aplicação nula.

Com isso,

$$E_2^{i,2n} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } p = 3 \\ \frac{\ker(1 - t)}{\text{Im} \Sigma} = \frac{\mathbb{Z}_p(c')}{0} \approx \mathbb{Z}_p(c') & , \text{ se } i \text{ for par, e } p > 3 \\ \frac{\ker \Sigma}{\text{Im}(1 - t)} = \frac{\mathbb{Z}_p(a', b', c')}{\mathbb{Z}_p(b', c')} \approx \mathbb{Z}_p(a') & , \text{ se } i \text{ for ímpar, e } p > 3 \end{cases}.$$

Finalmente, como $H^0(X; \mathbb{Z}_p)$ e $H^{3n}(X; \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_p$ e a $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre $\mathbb{Z}_p$ é trivial, os termos $E_2^{i,j} = \mathbb{Z}_p$ quando $j = 0$ e $3n$. Denotaremos $t_i^{(j)}$ o gerador de $E_2^{i,j}$ para $j = 0$ e $3n$.

Resumindo todos os casos

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p(t_i^{(j)}) & , \text{ se } j = 0 \text{ e } 3n; \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}, \text{ para } p = 3. \quad (4.27)$$

$$E_2^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p(t_i^{(j)}) & , \text{ se } j = 0 \text{ e } 3n \\ \mathbb{Z}_p(a_i) & , \text{ se } j = n \text{ e } i \text{ for par} \\ \mathbb{Z}_p(c_i) & , \text{ se } j = n \text{ e } i \text{ for ímpar} \\ \mathbb{Z}_p(c'_i) & , \text{ se } j = 2n \text{ e } i \text{ for par} \\ \mathbb{Z}_p(a'_i) & , \text{ se } j = 2n \text{ e } i \text{ for ímpar} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}, \text{ para } p > 3. \quad (4.28)$$

Com esta ação temos o seguinte resultado:

Teorema 4.6.5. *Se n é ímpar, e a ação de $\mathbb{Z}_3$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_3)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 , então $X^{\mathbb{Z}_3}$ é uma esfera de co-homologia mod 3, e tem dimensão ímpar.*

Demonstração. Pela equação 4.27 e pelo lema 3.2.1 temos que a seqüência espectral colapsa no termo E_2 . Portanto, $X^{\mathbb{Z}_3}$ é uma esfera de co-homologia mod 3. Como $\chi(X) = 0$, pois n é ímpar, $\chi(X^{\mathbb{Z}_3}) \equiv 0 \pmod{3}$. Assim $X^{\mathbb{Z}_3}$ tem de ter dimensão ímpar. $\square$

Quando $p \geq 5$ temos a seguinte estrutura multiplicativa sobre o termo E_2 da seqüência espectral :

$$a_i a_j = 0; \quad (4.29)$$

$$a_i c_j = c_j a_i = 0; \quad (4.30)$$

$$c_i c_j = \begin{cases} 3c'_{i+j} & , p = 5 \\ 0 & , p > 5 \end{cases}. \quad (4.31)$$

$$a_i a'_j = a'_j a_i = t_{i+j}^{(3n)}; \quad (4.32)$$

$$a_i c'_j = c'_j a_i = 0; \quad (4.33)$$

$$c_i a'_j = a'_j c_i = 0; \quad (4.34)$$

$$c_i c'_j = c'_j c_i = t_{i+j}^{(3n)}; \quad (4.35)$$

Se $p = 5$ temos, pela equação 4.31, que $d_{n+1}^{i,3n} = 0$ para i ímpar e, pelas equações 4.32 e 4.35, $d_{n+1}^{i,2n} = 0$ para i par. Tomemos $d_{n+1}(a'_i) = \alpha c_{i+n+1}$ e $d_{n+1}(t_i^{(3n)}) = \beta c'_{i+n+1}$. Os casos em que $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, e $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ não ocorrem, pois em ambos os casos $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_5}) = 3$ o que não é possível pela equação 3.21. Assim, consideremos os casos que $\alpha, \beta \neq 0$ ou $\alpha = \beta = 0$.

Teorema 4.6.6. *Seja n um inteiro ímpar. Suponha a $\mathbb{Z}_5$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_5)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 . Se $\alpha = \beta = 0$, então os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos e $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_5}) = 4$.*

Demonstração. Temos que os diferenciais d_{n+1} são todos nulos. Assim, $E_{n+1} \simeq E_{2n+1}$. Pela estrutura multiplicativa, equações 4.32 e 4.35, temos que os diferenciais $d_{2n+1}^{i,3n}$ são nulos para i ímpar. Se os diferenciais $d_{2n+1}^{i,3n}$ fossem isomorfismos teríamos, mais uma vez, que $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_5}) = 3$ o que contradiz a equação 3.21. Logo, os diferenciais d_{2n+1} tem de ser todos nulos e, portanto, $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_5}) = 4$. Mais ainda, $\chi(X^{\mathbb{Z}_5}) = 0$. $\square$

Teorema 4.6.7. *Seja n um inteiro ímpar. Suponha a $\mathbb{Z}_5$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_5)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 . Se $\alpha, \beta \neq 0$, então os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos e $X^{\mathbb{Z}_5}$ é uma esfera de co-homologia mod 5 de dimensão ímpar.*

Demonstração. Temos que os diferenciais $d_{n+1}^{i,2n}$ para i ímpar e $d_{n+1}^{i,3n}$ para i par são isomorfismos. Assim,

$$E_{2n+1}^{i,j} \simeq E_{n+2}^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p(t_i^{(j)}) & , \text{ se } i \text{ é par e } j = 3n \\ \mathbb{Z}_p(a_i) & , \text{ se } i \text{ é ímpar e } j = n \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad (4.36)$$

Temos que os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos, pois $E_{2n+1}^{i,n} = 0$ para i ímpar e pelo produto $d_{2n+1}^{i,3n}$ é nulo. Portanto, $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_5}) = 2$ e a dimensão da esfera de co-homologia vem da equação 3.21. $\square$

Quando $p \geq 7$, a estrutura multiplicativa da seqüência espectral não nos permite, de forma imediata, reconhecer os diferenciais nulos. Assim, temos que $d_{n+1}(t_i^{(3n)}) = \alpha c'_{i+n+1}$, $d_{n+1}(a'_i) = \beta c_{i+n+1}$ e $d_{n+1}(c'_i) = \gamma a_{i+n+1}$. Como $d_{n+1}^2 = 0$, $\alpha\gamma = 0$, logo ou α ou γ tem de ser zero. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = \gamma = 0$ chegamos que $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 3$ o que contradiz a equação 3.21.

Teorema 4.6.8. *Seja n um inteiro ímpar. Suponha a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 . Se $\alpha, \beta \neq 0$ e $\gamma = 0$, temos que $X^{\mathbb{Z}_p}$ é uma esfera de co-homologia módulo p de dimensão ímpar.*

Demonstração. Esta demonstração é idêntica a do teorema 4.6.7. $\square$

No caso em que $\alpha = \gamma = 0$ e $\beta \neq 0$ temos que $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 3$ o que, mais uma vez, contradiz a equação 3.21.

Teorema 4.6.9. *Seja n um inteiro ímpar. Suponha a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 . Se $\alpha = \beta\gamma = 0$, então os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos e $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 4$. Mais ainda, $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 0$.*

Demonstração. Como todos o diferenciais d_{n+1} são todos nulos temos que $E_{n+2} \simeq E_{2n+1}$. Os únicos diferenciais possivelmente não-nulos são so diferenciais $d_{2n+1}^{i,3n}$ com i par, mas isso acontecesse teríamos, novamente, que $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 3$. Assim, temos que, também, todos os diferenciais d_{2n+1} são nulos. Portanto, $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 4$, e pela equação 3.21 temos que $\chi(X^{\mathbb{Z}_p}) = 0$. $\square$

Teorema 4.6.10. *Seja n um inteiro ímpar. Suponha a $\mathbb{Z}_p$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é não-trivial e conjugada a θ_2 . Se $\alpha = 0$ e $\gamma \neq 0$, então $X^{\mathbb{Z}_p}$ é uma esfera de co-homologia módulo p de dimensão ímpar.*

Demonstração. Se $\beta \neq 0$, temos que os módulos $E_{n+2}^{*,2n} \simeq E_{2n+1}^{*,2n}$ e $E_{n+2}^{*,n} \simeq E_{2n+1}^{*,n}$ são todos triviais. Logo, os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos e $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 2$, portanto, uma esfera d co-homologia módulo p . Se $\beta = 0$, temos que os diferenciais $d_{2n+1}^{i,3n}$ são isomorfismos, pois caso contrário $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 3$ o que contradiz a equação 3.21. Logo, $\text{rk } H^*(X^{\mathbb{Z}_p}; \mathbb{Z}_p) = 2$, portanto, uma esfera d co-homologia módulo p . O fato da dimensão ser ímpar vem da equação 3.21. $\square$

5

Espaço dos pontos fixos de ações semilivres de p -grupos sobre um espaço $X \sim_p S^n \times S^m$

O Teorema de Smith, ver [4], assegura que o conjunto dos pontos fixos duma ação de $\mathbb{Z}_p$ sobre uma esfera de co-homologia módulo p é uma esfera de co-homologia módulo p , desde que este conjunto seja não-vazio. É conhecido que o resultado acima pode ser estendido para uma ação dum p -grupo finito arbitrário (ver exercício 2 da secção VII.10 em [4]), como mostraremos adiante. Este resultado motivou-nos a considerar a possibilidade de estender os teoremas VII.8.1 e VII.9.1 de [3] para a ação dum p -grupo finito arbitrário. Os teoremas citados acima são:

Teorema 5.0.1 ([3], VII.8.1). *Suponha que $G = \mathbb{Z}_2$ age sobre o espaço 'finístico' $X \sim_2 S^n \times S^m$, $n \leq m$. Se o espaço dos pontos fixos $F \neq \emptyset$, então uma das seguintes possibilidades deve ocorrer:*

- (1) $F \sim_2 S^q \times S^r$, $0 \leq q \leq n$, $0 \leq r \leq m$;
- (2) $F \sim_2 P^2(q) \# -P^2(q)$, $n \geq q = 1, 2, 4$ ou 8 ;
- (3) $F \sim_2 P^3(q)$, $n > q$;
- (4) $F \sim_2 Pto. + P^2(q)$, $n > q$;
- (5) $F \sim_2 S^q + S^r$, $0 \leq q \leq m$, $0 \leq r \leq m$;
- (6) $F \sim_2 S^q$.

Teorema 5.0.2 ([3], VII.9.1). *Seja p um primo ímpar e suponha que $G = \mathbb{Z}_p$ age sobre o espaço 'finístico' $X \sim_p S^n \times S^m$, $n \leq m$. Assuma que $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ é finitamente gerado. Se $F \neq \emptyset$, então uma das seguintes possibilidades deve ocorrer:*

- (1) $F \sim_p S^q \times S^r$, $n - q \geq 0$ par, $m - r \geq 0$ par;
- (2) $F \sim_p P^3(q)$, n, m, q pares $q < n$;
- (3) $F \sim_p Pto. + P^2(q)$, n, m, q pares $q < n$;
- (4) $F \sim_p S^q + S^r$, ou n, m, q, r todos pares e $n \geq q, m \geq r$; ou n par $m \geq q, r$ todos ímpares; ou m par $n \geq q, r$ todos ímpares;
- (5) $F \sim_p S^q$, n par, m, q ímpares;
- (6) $F \sim_p Pto. + S^q$, $n = m$ ímpar, q par, $q < n$, e $p = 3$;
- (7) $F \sim_p P^2(q)$, $n = m$ ímpar, q par, $q < n$, e $p = 3$.

Mais ainda, se $X = S^n \times S^m$, então $n = m = 1, 3$ ou 7 nos casos (6) e (7).

Portanto, gostaríamos de saber se para toda ação dum p -grupo finito arbitrário sobre um espaço $X \sim_p S^n \times S^m$, seu espaço dos pontos fixos tem o mesmo tipo de homotopia módulo p de um dos espaços listados nos teoremas acima. Mostraremos que isto é verdadeiro.

5.1 A ação de p -grupos finitos

Inicialmente mostraremos a generalização do Teorema de Smith para um p -grupo finito arbitrário, fato este que aparece como exercício em [4] (exercício 2 da secção VII.10). Em seguida, mostraremos que a extensão que pretendemos para ações de p -grupos finitos em espaços com o mesmo anel de co-homologia que o produto de duas esferas, módulo p , é equivalente a mostrarmos um resultado semelhante para os pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$ -ações nos espaços que estão listados.

Proposição 5.1.1. *Seja X um G -complexo de dimensão finita, onde G é um p -grupo. Assuma que X^H é um subcomplexo de X para todo $H \subseteq G$.*

- (a) *Se $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ é finitamente gerado, então $H^*(X^G; \mathbb{Z}_p)$ também o é.*
- (b) *Se X é acíclico mod p , então X^G também o é.*
- (c) *Se X é uma esfera de co-homologia mod p , então X^G também o é, desde que $X^G \neq \emptyset$.*

Demonstração. Note que, se $N \triangleleft G$ temos que

$$X^G = (X^N)^{G/N}. \quad (5.1)$$

Agora, suponhamos que $|G| = p^n$. Sabemos que $|Z(G)| \neq 1$, logo podemos tomar um subgrupo $N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$ contido em $Z(G)$ e normal a G . Assim, o quociente $G_1 = G/N_0$ tem ordem p^{n-1} . Da mesma forma, temos que $|Z(G_1)| \neq 1$, logo existe um subgrupo $N_1 \simeq \mathbb{Z}_p$ contido em $Z(G_1)$, tal que o quociente $G_2 = G_1/N_1$ tem ordem p^{n-2} . Este processo juntamente com a equação 5.1 nos leva a seguinte expressão

$$X^G = ((\dots (((X^{N_0})^{N_1})^{N_2}) \dots)^{N_{n-2}})^{G_{n-1}}, \quad (5.2)$$

onde $N_0 \simeq N_1 \simeq N_2 \simeq \dots \simeq N_{n-2} \simeq G_{n-1} \simeq \mathbb{Z}_p$. Assim, aplicando o Teorema de Smith em cada passo obtemos o resultado. $\square$

Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço, p primo, e consideremos a família $\mathcal{F}_p(X)$ de espaço dos pontos fixos $X_{\mathbb{Z}_p}$ para alguma $\mathbb{Z}_p$ -ação sobre X . O lema a seguir nos dá uma condição suficiente para garantir que os teoremas acima possam ser estendidos para p -grupos finitos arbitrários.

Lema 5.1.2. *Sejam G um p -grupo finito arbitrário, com p primo, e X um G -complexo tal que para cada subgrupo H de G , X^H é um subcomplexo não-vazio de X . Se para cada F pertencente a $\mathcal{F}_p(X)$ o espaço dos pontos fixos $F^{\mathbb{Z}_p}$ também pertencer a $\mathcal{F}_p(X)$, então X^G pertence a $\mathcal{F}_p(X)$.*

Demonstração. Da demonstração da proposição 5.1.1 temos que

$$X^G = ((\dots (((X^{N_0})^{N_1})^{N_2}) \dots)^{N_{n-2}})^{N_{n-1}}, \quad (5.3)$$

com cada $N_i \simeq \mathbb{Z}_p$, $i = 0, \dots, n-1$. Pela própria definição $F_1 = X^{N_0}$ pertence $\mathcal{F}_p(X)$, e por hipótese $F_2 = F_1^{N_1}$ pertence a $\mathcal{F}_p(X)$. Considerando $F_{i+1} = F_i^{N_i}$ recursivamente para $i = 0, \dots, n-1$, temos $F_n = X^G$ pertence a $\mathcal{F}_p(X)$. $\square$

Agora, de posse do lema acima podemos generalizar os teoremas citados na introdução do capítulo, 5.0.1 e 5.0.2, alterando a hipótese de $\mathbb{Z}_p$ -ação para uma ação de p -grupos finitos arbitrários. Com isso, passaremos a estudar as possibilidades de espaços de pontos fixos de $\mathbb{Z}_p$ -ações semilivres sobre cada um dos espaços listados de tais teoremas. Ou seja, verificaremos se o espaço de pontos fixos duma $\mathbb{Z}_p$ -ação semilivre sobre cada um dos espaços listados pertence a mesma lista. No caso $F \sim_p S^q \times S^r$ é imediato, pois são os próprios espaços das hipóteses dos teoremas. O caso em que $F \sim_p S^q$ é verdadeiro pelo Teorema de Smith.

Nos lemas que seguem, abordaremos os demais casos, exceto quando $F \sim_2 P^2(q) \# -P^2(q)$.

Lema 5.1.3. *Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço tal que $X \sim_p P^3(q)$, então $X^G \sim_p P^3(q')$, ou $X^G \sim_p S^{n'} + S^{m'}$, ou $X^G \sim_p 1\text{ponto} + P^2(q'')$. Logo, o espaço dos pontos fixos está listado nos teoremas.*

Demonstração. Pelo teorema VII.3.1 de [3] o espaço dos pontos fixos é uma união disjuntas de espaços $F_i \sim_p P^{h_i}(n_i)$, tais que $\sum(h_i + 1) = 4$ e $n_i < q$. Logo, o número de componentes é no máximo dois. Se o espaço for conexo temos que ele será $F \sim_p P^3(q')$, com $q' < q$, que pertence a lista. Agora, se for constituído por duas componentes temos que $F \sim_p P^1(n_1) + P^1(n_2) = S^{n_1-1} + S^{n_2-1}$, ou $F \sim_p P^0(n_1) + P^2(n_2) = Pto. + P^2(n_2)$, e ambos estão nas listas. $\square$

Lema 5.1.4. *Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço, com a ação de $\mathbb{Z}_p$ semilivre, tal que $X \sim_p S^q + S^r$, então $X^{\mathbb{Z}_p} \sim_p S^{q'} + S^{r'}$, $q' < q$ e $r' < r$. Logo, o espaço dos pontos fixos está listado nos teoremas.*

Demonstração. Como a ação é semilivre temos que a ação deve ficar restrita a ação em cada esfera separadamente, assim basta aplicarmos o Teorema de Smith em cada esfera, o que nos fornece outras duas esferas disjuntas. $\square$

Lema 5.1.5. *Seja X um $\mathbb{Z}_3$ -espaço tal que $X \sim_3 P^2(q)$, então $X^G \sim_3 P^2(q')$, ou $X^G \sim_3 Pto. + S^{n'}$. Logo, o espaço dos pontos fixos está listado no teorema 5.0.2.*

Demonstração. Assim como no lema 5.1.3 usamos o teorema VII.3.1 de [3] para obtermos que o espaço dos pontos fixos é uma união disjuntas de espaços $F_i \sim_3 P^{h_i}(n_i)$ tais que $\sum(h_i + 1) = 3$ e $n_i < q$, logo o número de componentes é no máximo dois. Se o espaço for conexo temos que ele será $F \sim_3 P^2(q')$, com $q' < q$, caso contrário temos que $F \sim_3 P^0(n_1) + P^1(n_2) = Pto. + S^{n_2-1}$, em todos os casos o espaço dos pontos fixos está na lista. $\square$

Lema 5.1.6. *Seja X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço, com a ação de $\mathbb{Z}_p$ semilivre, tal que $X \sim_p Pto. + P^2(q)$, então $X^{\mathbb{Z}_p} \sim_p Pto. + P^2(q')$ com $q' < q$, ou $F \sim_p S^0 + S^{q'}$ com $q' < q$. Logo, o espaço dos pontos fixos está listado nos teoremas.*

Demonstração. Como a ação é celular temos que o Pto. não pode ser levado pela ação sobre o espaço projetivo. Logo, pelo lema 5.1.5 temos que $F \sim_p Pto + P^2(q')$ com $q' < q$, ou $F \sim_p Pto_1 + Pto_2 + P^1(q') = S^0 + S^{q'-1}$. $\square$

Lema 5.1.7. *Seja X um $\mathbb{Z}_3$ -espaço, com a ação de $\mathbb{Z}_3$ semilivre, tal que $X \sim_p Pto. + S^q$, então $X^{\mathbb{Z}_p} \sim_p Pto. + S^{q'}$ com $q' < q$. Logo, o espaço dos pontos fixos está listado no teorema 5.0.2.*

Demonstração. Assim como no lema o fato da ação ser celular nos garante que o ponto não pode ser levado sobre a esfera. Assim, basta aplicarmos o Teorema de Smith sobre a esfera, ou seja $X^{\mathbb{Z}_p} \sim_p Pto. + S^{q'}$ com $q' < q$. $\square$

5.2 O espaço dos pontos fixos de ações de $\mathbb{Z}_2$ sobre

$$X \sim_2 P^2(q)\# - P^2(q)$$

Nesta secção serão utilizados conceitos contidos em [4].

Seja X um $\mathbb{Z}_2$ -espaço tal que $X \sim_2 P^2(n)\# - P^2(n)$. Temos a seguinte seqüência espectral $E_2^{p,q} = \hat{H}^p(\mathbb{Z}_2; H^j(X; \mathbb{Z}_2)) \Rightarrow \hat{H}_G^{p+q}(X^G; \mathbb{Z}_2)$. Temos que o anel $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ é gerado por a e b de graus n , com $a^2 = -b^2 \neq 0$ e $ab = 0$. Note que o sinal ‘-’ é irrelevante, pois estamos trabalhando sobre $\mathbb{Z}_2$.

A seguir apresentamos dois resultados sobre o espaço dos pontos fixos relacionados com o tipo de ação de $\mathbb{Z}_2$ induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$.

Proposição 5.2.1. *Seja X um $\mathbb{Z}_2$ -complexo tal que $X \sim_2 P^2(q)\# - P^2(q)$ e a ação seja semilivre. Se $\mathbb{Z}_2$ induzir a ação trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, então $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^G; \mathbb{Z}_2) = 4$. Logo, $X^{\mathbb{Z}_2}$ está listado em 5.0.1*

Demonstração. Como a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre $X^{\mathbb{Z}_2}$ é trivial, temos que

$$E_2^{i,j} = \hat{H}^i(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^j(X; \mathbb{Z}_2).$$

Logo, a estrutura multiplicativa de E_2 é dada pela estrutura multiplicativa do produto tensorial. Denotamos por

$$t_r \otimes a \quad \text{e} \quad t_r \otimes b$$

os geradores de E_2^{rn} , com isso temos a seguinte estrutura multiplicativa:

$$(t_r \otimes a)(t_s \otimes a) = (t_s \otimes a)(t_r \otimes a) = t_{r+s} \otimes a^2,$$

$$(t_r \otimes b)(t_s \otimes b) = (t_s \otimes b)(t_r \otimes b) = t_{r+s} \otimes b^2 \quad \text{e}$$

$$(t_r \otimes a)(t_s \otimes b) = (t_s \otimes b)(t_r \otimes a) = 0.$$

Como para qualquer r , $t_r \otimes a^2 = (t_0 \otimes a)(t_r \otimes a)$, e usando a propriedade de que os diferenciais são derivações temos que os diferenciais d_{2n+1} são todos nulos. Logo, a seqüência espectral colapsa em E_2 . Portanto, $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^G; \mathbb{Z}_2) = 4$. Pela análise feita na demonstração de 5.0.1 (ver [3], teorema VII.8.1), temos que os espaços dos pontos fixos X^G da proposição acima estão listados em 5.0.1. $\square$

Se a ação induzida de $\mathbb{Z}_2$ sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ for não-trivial temos a seguinte proposição:

Proposição 5.2.2. *Seja X um $\mathbb{Z}_2$ -complexo, tal que $X \sim_2 P^2(q) \# -P^2(q)$ e a ação é semilivre. Se $\mathbb{Z}_2$ induzir uma ação não-trivial sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, então $X^{\mathbb{Z}_2}$ é uma esfera de co-homologia módulo 2. Logo, $X^{\mathbb{Z}_2}$ pertence a lista do teorema 5.0.1.*

Demonstração. Como a $\mathbb{Z}_2$ -ação sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ é não-trivial, pelo lema 3.2.4 temos:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \quad j = 0, 2n \\ 0 & , \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

Como $d_{2n+1} = 0$, a seqüência espectral colapsa em E_2 , assim $\dim_{\mathbb{Z}_2} H^*(X^G; \mathbb{Z}_2) = 2$. Logo, X^G é uma esfera de co-homologia módulo 2. $\square$

A proposição acima pode ser ligeiramente melhorada. Mais especificamente, será dada uma limitação para dimensão da esfera de co-homologia. A técnica aqui usada é a mesma contida em [3].

Proposição 5.2.3. *Considere uma ação semi-livre de $\mathbb{Z}_2$ sobre um espaço X , com $X^G \neq \emptyset$ e $X \sim_2 P^2(q) \# -P^2(q)$, de forma que a $\mathbb{Z}_2$ -ação induzida sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$ é não-trivial. Temos que X^G é uma esfera de co-homologia módulo 2 de dimensão no máximo $2q - 1$.*

Demonstração. Seja inicialmente $q = 2$. Consideremos a seqüência espectral

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(B_G; \check{H}^q(X, x; \mathbb{Z}_2)) \implies \check{H}^{p+q}(X_G, x_G; \mathbb{Z}_2),$$

onde $x \in F$.

Como a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre $H^*(X, x; \mathbb{Z}_2)$ é não-trivial, temos que

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & , \quad p \geq 0 \text{ e } q = 4 \\ 0 & , \quad \text{c.c} \end{cases}$$

Logo, a seqüência espectral colapsa em E_2 , e com isso

$$H^{4+i}(X_G, x_G) = H^i(B_G; H^4(X, x; \mathbb{Z}_2)) = H^i(B_G) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H^4(X, x; \mathbb{Z}_2).$$

Seja $\alpha = 1 \otimes a^2$. Seja $j : B_G \times (F, x) = (F_G, x_G) \rightarrow (X_G, x_G)$ e considere j^* . Tomemos

$$j^*(\alpha) = 1 \otimes c_4 + t \otimes c_3 + t^2 \otimes c_2 + t^3 \otimes c_1 + t^4 \otimes c_0.$$

Como $H^i(X, x; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $i > 4$, temos, por (1.5), que j^* é um isomorfismo para $k > 4$.

Com isso, temos $H^i(F) = 0$ para $i > 5$.

Se F é desconexo, então $F = S^0$. Agora, se F é conexo temos que $H^i(F, x) = 0$, para todo $i > 0$ exceto para um único $0 < i \leq 4$. Assim

$$j^*(\alpha) = t^k \otimes c, \quad c \in H^{4-k}(F, x) \neq 0.$$

Se $k = 0$, temos que

$$j^*(\alpha) = 1 \otimes c, \quad c \in H^4(F, x).$$

Desta forma teríamos o seguinte isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} H^4(X, x) & \longrightarrow & H^4(F, x) \\ a^2 & \longmapsto & c \end{array}.$$

Mas $H^2(X, x) \ni a \mapsto 0 \in H^2(F, x)$, logo $a^2 = 0$. Portanto, $F \neq S^4$.

Os casos $q = 4$ e 8 , são completamente análogos ao caso $q = 2$, e por isso omitiremos. $\square$

Os resultados acima esgotam os casos a serem analisados. Diante do que foi apresentado, até aqui, neste capítulo concluímos que

Teorema 5.2.4. *Seja G um p -grupo finito arbitrário. Se X é um G -espaço tal que $X \sim_p S^n \times S^m$, com $n \leq m$ e p primo, então X^G é um dos espaços listados nos teoremas 5.0.1 e 5.0.2, respectivamente se $p = 2$, ou p ímpar.*

Finalizamos este capítulo com alguns exemplos de situações previstas na proposição 5.2.3.

Veremos $\mathbb{C}P^2$ como a colagem duma célula, e^4 , de dimensão 4 sobre a esfera S^2 ,

$$\mathbb{C}P^2 = S^2 \sqcup_{\varphi} e^4,$$

a aplicação de colagem $\varphi : S^3 \rightarrow S^2$ é a fibração de Hopf.

Temos que

$$\mathbb{C}P^2 \# -\mathbb{C}P^2 = \left(\mathbb{C}P^2 \setminus D_{\frac{1}{2}}^4 \right) \sqcup_{\psi} \left(\mathbb{C}P^2 \setminus D_{\frac{1}{2}}^4 \right),$$

a aplicação $\psi : S_{\frac{1}{2}}^3 \rightarrow S_{\frac{1}{2}}^3$ tem grau -1 .

Como a fibração de Hopf é sobrejetiva, basta sabermos como se dá a colagem da soma conexa sobre a célula e^4 . Assim podemos ver $\mathbb{C}P^2 \# -\mathbb{C}P^2 = \left(\frac{S^3 \times [1/2, 1]}{\sim} \right)_1 \sqcup_{\psi} \left(\frac{S^3 \times [1/2, 1]}{\sim} \right)_2$, aqui a relação de equivalência é dada por:

$$(X; t) \sim (Y; t') \Leftrightarrow (t = t' = 1) \text{ e } \varphi(X) = \varphi(Y), \text{ ou } t = t' \text{ e } X = Y.$$

Exemplo 1. Consideremos a aplicação de colagem ψ tal que $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, x_2, x_3, x_4)$. Seja θ a involução sobre $\mathbb{C}P^2 \# -\mathbb{C}P^2$, com

$$\theta(x_1, x_2, x_3, x_4; t)_i = (-x_1, -x_2, x_3, x_4; t)_j \quad i \neq j.$$

Verifica-se que $\theta\psi = \psi\theta$, para $t = 1/2$, e que $[\theta(X)] = [\theta(\lambda X)]$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Nesta situação obtemos

$$X_\theta^G = \{(x_1, 0, x_3, x_4; 1/2); x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} = S^2.$$

Exemplo 2. Consideremos a aplicação de colagem $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, x_2, -x_3, -x_4)$. Temos que $\theta\psi = \psi\theta$, para $t = 1/2$, e que $[\theta(X)] = [\theta(\lambda X)]$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, e obtemos

$$X_\theta^G = \{(x_1, 0, 0, 0; 1/2); |x_1| = 1\} = \{\pm 1\} = S^0.$$

Nos dois exemplos anteriores o espaço considerado foi exatamente $\mathbb{C}P^2 \# -\mathbb{C}P^2$. Agora, como o módulo dos coeficientes é $\mathbb{Z}_2$ temos que

$$H^*(\mathbb{C}P^2 \# -\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}_2) \simeq H^*(\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}_2)$$

como anel. Em vista disso, os dois exemplos a seguir são com o espaço $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Exemplo 3. Consideremos a aplicação de colagem ψ tal que $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Seja θ a involução sobre $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, com

$$\theta(x_1, x_2, x_3, x_4; t)_i = (-x_1, -x_2, x_3, x_4; t)_j \quad i \neq j.$$

Verifica-se que $\theta\psi = \psi\theta$, para $t = 1/2$, e que $[\theta(X)] = [\theta(\lambda X)]$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Nesta situação obtemos

$$X_\theta^G = \{(0, 0, x_3, x_4; 1/2); x_3^2 + x_4^2 = 1\} = S^1.$$

Exemplo 4. Consideremos a aplicação de colagem ψ sendo $\psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, -x_4)$. Temos que $\theta\psi = \psi\theta$, para $t = 1/2$, e que $[\theta(X)] = [\theta(\lambda X)]$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, e obtemos

$$X_\theta^G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4; 1/2); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\} = S^3.$$

Estes quatro exemplos mostram que todas as esferas previstas na proposição 5.2.3 podem ser realizadas.

6

Co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos da forma $F \rtimes \mathbb{Z}$, com F finito

O objetivo deste capítulo é calcular a co-homologia dum conjunto de grupos virtualmente cíclicos e investigar sua periodicidade (fraca), seção 6.1, caso exista. Os grupos virtualmente cíclicos, por definição, são grupos G tais que existe uma seqüência exata curta

$$1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1,$$

onde Q é um grupo finito. Foi mostrado por Wall, (ver [16], [25] e [14]) que estes grupos têm uma das seguintes formas: (I) $F \rtimes \mathbb{Z}$, com F finito; (II) $G_1 *_F G_2$, com F algum subgrupo normal finito de índice dois com relação a ambos os grupos. Estes grupos têm interesses em vários ramos na Matemática como por exemplo teoria de tranças e K -teoria algébrica, (ver [14] e [6]), como também no estudo dos espaços de órbita. Este último caso explicaremos na seção 1. Neste capítulo, inicialmente, faremos uma breve exposição do problema do cálculo dos tipos de homotopia de espaços de órbita de ações dum grupo G em esferas de homotopia. Nosso interesse consiste em estudar os grupos virtualmente cíclicos que venham a atuar livremente sobre uma esfera de homotopia. Se F é um subgrupo finito dum desses grupos, então claramente F atua livremente sobre uma esfera de homotopia. Portanto, F é um grupo finito periódico, logo está classificado pela tabela de Suzuki-Zassenhaus (Teorema IV.6.15 [2]). Motivado por isso, descreveremos a co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos da forma $F \rtimes \mathbb{Z}$, com F pertencente as duas primeiras famílias pertencente a esta tabela.

6.1 Tipos de homotopia de espaços de órbita

Dado Σ^{2n-1} um CW-Complexo de dimensão $2n - 1$ que tem o tipo de homotopia duma esfera de dimensão $2n - 1$ e G um grupo finito que atua livremente em Σ^{2n-1} , então podemos formar o espaço de órbita denotado por Σ^{2n-1}/G . Um problema relevante que tem sido considerado ao longo de vários anos é o de classificar os tipos de homotopia do espaço de órbita Σ^{2n-1}/G para todas as possíveis ações livres de G em Σ^{2n-1} . Uma descrição deste conjunto foi obtida através do teorema 1.8 em [21] e teorema 2.2 em [22] e pode ser descrito da seguinte forma: o conjunto dos tipos de homotopia de espaços de órbita obtidos por todas as G -ações celulares e livres sobre um CW-complexo $(2n - 1)$ -dimensional do tipo de homotopia da esfera de dimensão $2n - 1$ está em correspondência 1-1 com as órbitas que contém um gerador em $H^{2n}(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{|G|}$ com relação a ação de $\pm \text{Aut}(G)$. A parte deste resultado que diz que se pode associar a cada espaço de órbita uma classe de equivalência de geradores pode ser obtido através do sistema de Postnikov.

Considerando que os grupos finitos que atuam numa esfera de homotopia são classificados, o resultado acima foi utilizado para calcular o número de tipos de homotopia para os grupos finitos G que atuam livremente numa esfera de homotopia. Estes resultados foram obtidos nos trabalhos [8, 9, 10, 12, 13, 11].

O problema acima pode ser estudado em outros contextos. Um deles é considerar ações de grupos finitos em um CW-complexo X , de dimensão finita, o qual tem o mesmo tipo de homotopia duma esfera de dimensão $2n - 1$. Este caso foi resolvido recentemente, e é semelhante ao caso acima. Um outro caso é estudar ações em esfera de homotopia por grupos discretos infinitos. Um teorema de Swan diz que qualquer grupo finito que tem co-homologia periódica age livremente sobre um complexo finito que tem o mesmo tipo de homotopia que S^n . Recentemente, em 2001, Adem e Smith ([1]), estudaram uma extensão deste teorema de Swan. Motivado pelo trabalho acima diremos que um grupo G tem co-homologia periódica fraca se existir d tal que $H^n(G) \approx H^{n+d}(G)$, para $n > n_0$, para algum n_0 . No corolário 1.3 em [1] temos que um grupo discreto Γ atua livre e propriamente em $\mathbb{R}^n \times S^m$ se, e somente se, Γ é um grupo enumerável com co-homologia periódica (no sentido [1]). Em função deste resultado temos duas questões naturais, que consiste em classificar os grupos Γ virtualmente cíclicos com co-homologia periódica e classificar os espaços de órbita, a menos de homotopia, para estes grupos. Abordaremos em parte a primeira questão e deixamos a segunda questão como um problema a ser estudado. No entanto, observamos que uma possível maneira de atacarmos este problema seria via sistema de

Postnikov da forma a seguir.

Seja G um grupo que atua sobre uma esfera de homotopia $\Sigma(n)$, onde $\Sigma(n)$ tem o mesmo tipo de homotopia da esfera S^n . Assumiremos que $\Sigma(n)$ é um CW -complexo de dimensão finita, podendo ser infinito e ter dimensão diferente de n . Considere o espaço de órbita que denotaremos por X . Assumiremos que n é ímpar; caso contrário, o grupo tem que ser o $\mathbb{Z}_2$ ([4] secção VII.10, exercício 3). Então, para analisar o tipo de homotopia de X podemos ver inicialmente o que acontece com o segundo estágio da torre de Postnikov de X . Para isto precisamos saber quais são os dois primeiros grupos de homotopia de X não-nulos. Pela definição de X segue que o grupo fundamental é $\pi_1(X) = G$. Como o revestimento universal é $\Sigma(n)$ temos que o primeiro grupo de homotopia não-nulo depois do grupo fundamental é $\pi_n(X) = \pi_n(\Sigma(n)) = \mathbb{Z}$. Para completar a análise do segundo estágio de Postnikov, precisamos saber qual é a ação de G nos grupos de homotopia de X , que é equivalente a saber a ação de G nos grupos de homotopia de $\Sigma(n)$ dada pela ação de G em $\Sigma(n)$. Portanto, temos o segundo estágio do sistema de Postnikov para espaço não-simplesmente conexo, [17], é dado por

$$\begin{array}{c} X_2 \\ \downarrow \\ K(G, 1) \longrightarrow \hat{K}(\mathbb{Z}, n+1), \end{array}$$

onde a aplicação $K(G, 1) \rightarrow \hat{K}(\mathbb{Z}, n+1)$ é o primeiro invariante do sistema de Postnikov e representa, portanto, uma classe de co-homologia $\theta_1 \in H^{n+1}(G, \tilde{\mathbb{Z}})$ (co-homologia com coeficientes possivelmente não-triviais). Em muitas situações este sistema de coeficiente é trivial, e portanto, o conhecimento de $H^*(G, \mathbb{Z})$ é útil na análise deste problema. Observe que em se tratando de grupos finitos esta maneira foi utilizada com completo sucesso para as caracterizações das ações. Isto motiva o cálculo da co-homologia dos grupos virtualmente cíclicos.

6.2 Co-homologia de $F \rtimes \mathbb{Z}$

Para o cálculo de co-homologia dum grupo dado por uma extensão temos como ferramenta a seqüência espectral de Hochschild-Serre, que diz que podemos obter a co-homologia de dada extensão pelo teorema a seguir, que nos informa como obter a co-homologia dum grupo G através das co-homologias dum subgrupo H e do quociente G/H .

Teorema 6.2.1 (Hochschild-Serre). *Para qualquer extensão de grupos $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 0$*

e qualquer G -módulo M , existe uma seqüência espectral da forma

$$E_2^{p,q} = H^p(Q; H^q(H; M)) \implies H^{p+q}(G; M). \quad (6.1)$$

Como mencionado no início do capítulo, o foco inicial é o cálculo da co-homologia do grupo $F \rtimes \mathbb{Z}$, que é uma extensão de grupos,

$$0 \rightarrow F \rightarrow F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Proposição 6.2.2. *Considere o grupo $F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$, temos para cada n a seqüência exata*

$$0 \rightarrow H^n(F; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \rightarrow H^n(F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(F; \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} \rightarrow 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Hochschild-Serre obtemos a seqüência espectral associada à esta extensão:

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}; H^q(F; \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}),$$

com a $\mathbb{Z}$ -ação sobre $H^q(F; \mathbb{Z})$ induzida pela ação de $\mathbb{Z}$ sobre F .

Como

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (6.2)$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$, temos que $H^n(\mathbb{Z}; M) = 0$ para $n \neq 0, 1$, e qualquer grupo abeliano M . Assim, $E_2^{ij} = 0$ para $i \neq 0, 1$. Note que este fato nos dá que a seqüência espectral colapsa no termo E_2 . Assim, para todo n existe a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow E_2^{1,n-1} \rightarrow H^n(F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow E_2^{0,n} \rightarrow 0. \quad (6.3)$$

Por outro lado,

$$E_2^{0,n} = H^0(\mathbb{Z}; H^n(F; \mathbb{Z})) = H^n(F; \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}}, \quad (6.4)$$

$$E_2^{1,n-1} = H^1(\mathbb{Z}; H^{n-1}(F; \mathbb{Z})) = H^{n-1}(F; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}. \quad (6.5)$$

Então, das equações (6.4) e (6.5) temos o resultado. $\square$

A proposição acima nos diz que para calcular a co-homologia de $F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ é preciso conhecermos a co-homologia de F e a $\mathbb{Z}$ -ação induzida sobre ela.

6.3 Co-homologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b$

Nesta secção será calculada a co-homologia dos grupos da forma $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b$, com $\alpha(1_b)(1_a) = r1_a$ e $(a, (r-1)b) = 1$. Mais ainda, seja d a ordem de r no grupo multiplicativo das unidades de $\mathbb{Z}_a$, $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_a)$, temos que b/d deve ser divisível por cada fator primo de d , ver [26]. Este grupo é caracterizado por todos seus subgrupos de Sylow serem cíclicos.

Denotaremos por 1_a e 1_b os geradores dos grupos aditivos $\mathbb{Z}_a$ e $\mathbb{Z}_b$, respectivamente. Por simplicidade, denotaremos apenas por α o automorfismo $\alpha(1_b)$.

Pelas propriedades de ação temos que $\alpha(i1_a) = \alpha(1_a)^i = r^i$. Como consequência $r^b \equiv 1(a)$, uma vez que a ordem de $\alpha = \alpha(1_b)$ divide a ordem de 1_b , que é b .

Pelo Teorema de Hochschild-Serre, obtemos a sequência espectral

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}_b; H^q(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}),$$

onde a $\mathbb{Z}_b$ -ação sobre $H^q(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ é induzida pela α .

Suponha, por um instante que 1_b age sobre $\mathbb{Z}_a$ pela multiplicação por s , e seja $\delta = (s-1, a)$. Como

$$H^j(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}_a) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\delta} & , \text{ se } j = 0; \\ 0 & , \text{ se } j > 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad H^n(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0; \\ \mathbb{Z}_b & , \text{ se } n > 0 \text{ par}; \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

com a $\mathbb{Z}_b$ -ação trivial sobre $\mathbb{Z}$, temos que $E_2^{p,q}$ é possivelmente não-nulo se p e q são pares e $pq = 0$.

Logo, a sequência espectral colapsa no termo E_2 , e obtemos que $H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e para n ímpar $H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = 0$. Para n par temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow E_2^{n,0} \rightarrow H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rightarrow E_2^{0,n} \rightarrow 0. \quad (6.6)$$

Temos que a $\mathbb{Z}_b$ -ação sobre $H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ é trivial. Como a estrutura multiplicativa de $H^*(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ é

$$\frac{\mathbb{Z}[x_2]}{\langle ax_2 = 0 \rangle},$$

tal que o grau de x_2 é 2, obtemos que a $\mathbb{Z}_b$ -ação sobre $H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ é a multiplicação por r^j .

Com isso,

$$E^{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } p = q = 0; \\ \mathbb{Z}_{\delta_i} & , \text{ se } p = 0 \text{ e } q = 2j, \text{ com } i \equiv j \pmod{d}; \\ \mathbb{Z}_b & , \text{ se } p > 0 \text{ par e } q = 0; \\ 0 & , \text{ c.c. } , \end{cases}$$

com $i = 0, 1, \dots, d-1$ e $\delta_i = (r^i - 1, a)$. Lembre que $(r-1, a) = 1$, assim $\mathbb{Z}_{\delta_1} = 0$. Como $r^d - 1 \equiv 0 \pmod{a}$, convencionaremos que $(0, a) = a$, assim $\mathbb{Z}_{\delta_d} = \mathbb{Z}_a$.

Desta forma, a sequência exata curta em (6.6), para cada $n = 2i$ para $i > 0$, fica da seguinte forma:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{\delta_i} \rightarrow H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rightarrow \mathbb{Z}_b \rightarrow 0.$$

Como $H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})$ é um grupo finito abeliano, temos que

$$H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0 \\ \mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b \approx \mathbb{Z}_{\delta_i b} & , \text{ se } n = 2j, \text{ com } i \equiv j \pmod{d} \text{ e } 0 \leq i \leq d \\ 0 & , \text{ se } n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (6.7)$$

Portanto, os grupos da forma $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b$ têm período $2d$.

6.4 Co-homologia de $(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$

Pela seção 6.2, temos que para cada n existe a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow E_2^{1,n-1} \rightarrow H^n(F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow E_2^{0,n} \rightarrow 0.$$

Como $H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = 0$ para n ímpar, temos que

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} E_2^{0n} & , \text{ se } n \text{ é par;} \\ E_2^{1,n-1} & , \text{ se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (6.8)$$

Ou seja,

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & , \text{ se } n \text{ é par;} \\ H^{n-1}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} & , \text{ se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (6.9)$$

Lema 6.4.1. *Sejam G é um grupo cíclico com gerador g e θ é uma G -ação sobre $\mathbb{Z}_a$, com $a > 0$, tal que $\theta(g)$ é a multiplicação por k , com $(k, a) = 1$, então*

$$(\mathbb{Z}_a)^G \cong (\mathbb{Z}_a)_G \cong \mathbb{Z}_a, \quad (6.10)$$

com $\alpha = (r - 1, m)$.

Como $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_{\delta_i}) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_b)$, pois $(\delta_i, b) = 1$, temos que

$$(\mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b)^{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})^{\mathbb{Z}} \oplus (\mathbb{Z}_b)^{\mathbb{Z}} \quad \text{e} \quad (\mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b)_{\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}_{\delta_i})_{\mathbb{Z}} \oplus (\mathbb{Z}_b)_{\mathbb{Z}}.$$

Assim,

$$H^{2j}((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = H^{2j+1}((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}), \quad (6.11)$$

para todo $j \geq 0$.

É fácil verificar que a ação de $\mathbb{Z}$ sobre $H^0((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ é a ação trivial. Com isso, $H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ para $n = 0, 1$.

Nos casos em que $n > 1$ é preciso analisar a $\mathbb{Z}$ -ação sobre

$$H^{2j}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b, \quad \text{com } i \equiv j \pmod{d}.$$

Como $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{\delta_i} \oplus \mathbb{Z}_b) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}_{\delta_i}) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_b)$, pois $(\delta_i, b) = 1$, é preciso saber como é a $\mathbb{Z}$ -ação sobre cada somando $H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$ e $H^{2j}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$.

Consideremos $\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b)$, dada por

$$\theta(1)(1_a) = c_a 1_a \quad \text{e} \quad \theta(1)(1_b) = c 1_a + c_b 1_b.$$

Aqui, c_a , c_b e c são escolhidos conforme [10].

Denotaremos por θ_a a aplicação $\theta(1)|_{\mathbb{Z}_a} : \mathbb{Z}_a \rightarrow \mathbb{Z}_a$, e por θ_b a aplicação $\overline{\theta(1)} : \mathbb{Z}_b \rightarrow \mathbb{Z}_b$ induzida ao quociente. Com isso, temos

$$\theta_a(1_a) = c_a 1_a \quad \text{e} \quad \theta_b(1_b) = c_b 1_b.$$

De posse dessas aplicações, podemos calcular as $\mathbb{Z}$ -ações sobre os termos $H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2i}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$ e $H^{2i}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$, através da aplicação induzida $H^*(\theta_b; \theta_a^*)$, com a aplicação θ_a^* sendo a induzida por θ_a sobre $H^*(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$.

Obtemos que a $\mathbb{Z}$ -ação sobre $H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$ é a multiplicação por c_a^j sobre $\mathbb{Z}_{\delta_i}$, com $i \equiv j \pmod{d}$, e a $\mathbb{Z}$ -ação sobre $H^{2j}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}))$ é a multiplicação por c_b^j em $\mathbb{Z}_b$.

Consideremos $A_j = (c_a^j - 1, \delta_i)$, com $i \equiv j \pmod{d}$, e $B_j = (c_b^j - 1, b)$. Pelo lema 6.4.1 e equação (6.11), temos

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1 ; \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} & , \text{ se } n = 2j, 2j + 1, j > 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Lembramos que G tem co-homologia periódica fraca de período d , se $H^n(G) \approx H^{n+d}(G)$, para $n > n_0$, para algum n_0 . Se G tem co-homologia periódica, de período d , diremos simplesmente que G é periódico, com período d .

Para o enunciado do teorema a seguir, usaremos as seguintes considerações: Sejam d a ordem de α em $\text{Aut}(\mathbb{Z}_a)$, d_{c_a} a ordem de c_a em $\text{Aut}(\mathbb{Z}_a)$ e d_{c_b} a ordem de c_b em $\text{Aut}(\mathbb{Z}_b)$. Este resultado diz respeito a periodicidade do grupo $(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$.

Teorema 6.4.2. *Considere o grupo $(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$. Temos que $(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ é periódico fraco com período $2[d, d_{c_a}, d_{c_b}]$, e $n_0 = 1$. Aqui, $[d, d_{c_a}, d_{c_b}]$ é o mínimo múltiplo comum entre d , d_{c_a} e d_{c_b} .*

Demonstração. Note que, por (6.12), $n_0 = 1$. Temos que o período deve ser múltiplo de d , d_{c_a} e d_{c_b} , logo é múltiplo de $[d, d_{c_a}, d_{c_b}]$. Porém, $H^{2k}((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = H^{2k+1}((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z})$, para todo $k \geq 0$, assim o período é $2[d, d_{c_a}, d_{c_b}]$. $\square$

6.5 Exemplos

Esta secção é dedicada ao cálculo da co-homologia de alguns grupos com a seguinte forma $(\mathbb{Z}_{35} \rtimes_r \mathbb{Z}_{36}) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ com escolhas diferentes de r e θ .

As possibilidades para r são: 4, 9, 19 e 24 com $d = 6$; e 34 com $d = 2$. Para escolha de c_a temos as seguintes possibilidade e suas respectivas ordens, d_{c_a} , no grupo $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{35})$:

$$\begin{aligned} c_a &= 1, \text{ com } d_{c_a} = 1; \\ c_a &= 6, 29, 34, \text{ com } d_{c_a} = 2; \\ c_a &= 11, 16, \text{ com } d_{c_a} = 3; \\ c_a &= 8, 13, 22, 27, \text{ com } d_{c_a} = 4; \\ c_a &= 4, 9, 19, 24, 26, 31, \text{ com } d_{c_a} = 6; \\ c_a &= 2, 3, 12, 17, 18, 23, 32, 33, \text{ com } d_{c_a} = 12. \end{aligned}$$

Como a escolha c_b depende de d , na verdade de r , pois r determina d , os exemplos serão divididos de acordo com d , de [10] temos que $c_b = 1 + md$, $m \geq 0$.

6.5.1 Casos com $d = 6$

Tomaremos $r = 4$ nos exemplos com $d = 6$. Assim temos que o período de $\mathbb{Z}_{35} \rtimes_4 \mathbb{Z}_{36}$ é 12. As opções de c_b são: 1, com $d_{c_b} = 1$; 19, com $d_{c_b} = 2$; 13 e 25, com $d_{c_b} = 3$; 7 e 31, com $d_{c_b} = 6$.

Note que $r^2 = 16$, $r^3 \equiv 29$, $r^4 \equiv 11$ e $r^5 \equiv 9$ em $\mathbb{Z}_{35}$. Assim $\delta_2 = 5$, $\delta_3 = 7$, $\delta_4 = 5$ e $\delta_5 = 1$.

Exemplo 1: $c_a = 8$ e $c_b = 13$

Neste caso temos que os A'_i s e os B'_i s são:

$$\begin{array}{lll}
 A_1 = (c_a - 1, \delta_1) = 1 & A_5 = (c_a - 1, \delta_5) = 1 & A_9 = (c_a - 1, \delta_3) = 7 \\
 A_2 = (c_a^2 - 1, \delta_2) = 1 & A_6 = (c_a^2 - 1, \delta_6) = 7 & A_{10} = (c_a^2 - 1, \delta_4) = 1 \\
 A_3 = (c_a^3 - 1, \delta_3) = 1 & A_7 = (c_a^3 - 1, \delta_1) = 1 & A_{11} = (c_a^3 - 1, \delta_5) = 1 \\
 A_4 = (c_a^4 - 1, \delta_4) = 5 & A_8 = (c_a^4 - 1, \delta_2) = 5 & A_{12} = (c_a^4 - 1, \delta_6) = 35.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 B_1 = (c_b - 1, b) = 12 & B_2 = (c_b^2 - 1, b) = 12 & B_3 = (c_b^3 - 1, b) = 36.
 \end{array}$$

O que nos dá que

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 2, 3 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 4, 5 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 6, 7 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 8, 9 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 10, 11 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 12, 13 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 14, 15 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 16, 17 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 18, 19 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 20, 21 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 22, 23 \pmod{24} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 24, 25 \pmod{24} \end{cases} \quad (6.13)$$

Exemplo 2: $c_a = 6$ e $c_b = 19$

Neste caso temos que os A'_i s e os B'_i s são:

$$\begin{array}{lll} A_1 = (5, 1) = 1 & A_3 = (5, 7) = 1 & A_5 = (5, 1) = 1 \\ A_2 = (1, 5) = 1 & A_4 = (1, 5) = 1 & A_6 = (0, 35) = 35. \end{array}$$

$$B_1 = (18, 36) = 18$$

$$B_2 = (0, 36) = 36.$$

O que nos dá que

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z}_{18} & , \text{ se } n \equiv 2, 3 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 4, 5 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{18} & , \text{ se } n \equiv 6, 7 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 8, 9 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{18} & , \text{ se } n \equiv 10, 11 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 12, 13 \pmod{12}. \end{cases} \quad (6.14)$$

6.5.2 Casos com $d = 2$

Para o caso $d = 2$, a única possibilidade é $r = 34$. O período de $\mathbb{Z}_{35} \rtimes_{34} \mathbb{Z}_{36}$ é 4. Com $d = 2$, as opções de c_b são: 1, com $d_{c_b} = 1$; 17, 19 e 35, com $d_{c_b} = 2$; 13 e 25, com $d_{c_b} = 3$; 5, 7, 11, 23, 29 e 31, com $d_{c_b} = 6$.

Exemplo 3: $c_a = 6$ e $c_b = 13$

Neste caso temos que os A'_i s e os B'_i s são:

$$A_1 = (5, 1) = 1$$

$$A_2 = (0, 35) = 35.$$

$$B_1 = (12, 36) = 12$$

$$B_2 = (24, 36) = 12$$

$$B_3 = (0, 36) = 36.$$

O que nos dá que

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 2, 3 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 4, 5 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 6, 7 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 8, 9 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{12} & , \text{ se } n \equiv 10, 11 \pmod{12} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 12, 13 \pmod{12}. \end{cases} \quad (6.15)$$

Exemplo 4: $c_a = 6$ e $c_b = 19$

Neste caso temos que os A'_i s e os B'_i s são:

$$A_1 = (5, 1) = 1$$

$$A_2 = (0, 35) = 35.$$

$$B_1 = (12, 36) = 12$$

$$B_2 = (24, 36) = 12$$

$$B_3 = (0, 36) = 36.$$

O que nos dá que

$$H^n((\mathbb{Z}_a \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}_b) \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1 \\ \mathbb{Z}_{18} & , \text{ se } n \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_{35} \oplus \mathbb{Z}_{36} & , \text{ se } n \equiv 4, 5 \pmod{4}. \end{cases} \quad (6.16)$$

6.6 Co-homologia de $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$

Temos que $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$ é uma extensão de grupos, a saber,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_a \rightarrow \mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}) \rightarrow \mathbb{Z}_b \times Q_{2^i} \rightarrow 0.$$

Aplicando o Teorema de Hochschild-Serre temos a seguinte seqüência espectral :

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; H^q(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z}) \quad (6.17)$$

Como $H^*(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[x_2]}{\langle ax_2 \rangle}$, com x_2 elemento de grau 2, temos que

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}) & , \text{ se } q = 0; \\ 0 & , \text{ se } q \text{ é ímpar}; \\ H^p(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}_a) & , \text{ se } q \text{ é par}. \end{cases} \quad (6.18)$$

Na seqüência será calculada a co-homologia de $\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}$ com coeficientes $\mathbb{Z} = H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ e $\mathbb{Z}_a = H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$, com $j > 0$.

Proposição 6.6.1. *Seja b um inteiro positivo ímpar, temos que*

$$H^n(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0; \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é ímpar}; \\ \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i} & , \text{ se } n \equiv 0 \pmod{4}, \text{ para } p > 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Demonstração. Podemos ver $\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}$ como uma extensão dos grupos $\mathbb{Z}_b$ e Q_{2^i} , com a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_b$ trivial. Assim, aplicando o Teorema de Hochschild-Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(Q_{2^i}; H^q(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}),$$

logo,

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})) = H^p(Q_{2^i}; \mathbb{Z}) & , \text{ se } q = 0; \\ 0 & , \text{ se } q \text{ é ímpar}; \\ H^p(Q_{2^i}; H^q(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})) = H^p(Q_{2^i}; \mathbb{Z}_b) & , \text{ se } q \text{ é par.} \end{cases} \quad (6.20)$$

Como a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_b$ é trivial, implica que a Q_{2^i} -ação induzida sobre $H^*(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z})$ é também trivial. Pela seção XII.7 de [5], e por b ser ímpar, temos que

$$H^p(Q_{2^i}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } p = 0; \\ 0 & , \text{ se } p \text{ é ímpar}; \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } p \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_{2^i} & , \text{ se } p \equiv 0 \pmod{4}, \text{ para } p > 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

e

$$H^p(Q_{2^i}; \mathbb{Z}_b) = \begin{cases} \mathbb{Z}_b & , \text{ se } p = 0; \\ 0 & , \text{ c.c..} \end{cases} \quad (6.22)$$

Logo, a sequência espectral colapsa no termo E_2 , e portanto,

$$H^n(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0; \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é ímpar}; \\ \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i} & , \text{ se } n \equiv 0 \pmod{4}, \text{ para } p > 0. \end{cases}$$

□

Proposição 6.6.2. *Seja a um inteiro positivo ímpar tal que $(a, b) = 1$. Considere $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ uma ação de $\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}$ sobre $\mathbb{Z}_a$, tal que o gerador de $\mathbb{Z}_b$ age pela multiplicação por r , x age pela multiplicação por r_x e y age pela multiplicação por r_y . Então,*

$$H^n(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}_a) = H^n(Q_{2^i}; \mathbb{Z}_{\delta_j}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} & , \text{ se } n = 0 \text{ e } j \text{ é ímpar}; \\ \mathbb{Z}_{\delta_j} & , \text{ se } n = 0 \text{ e } j \text{ é par}; \\ 0 & , \text{ c.c..} \end{cases} \quad (6.23)$$

com $\delta_j = (r^j - 1, a)$ e $\varepsilon_j = (\delta_j, r_x^j - 1, r_y^j - 1)$.

Demonstração. Novamente, veremos o grupo $\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}$ como uma extensão dos grupos $\mathbb{Z}_b$ e Q_{2^i} , com a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_b$ trivial, só que tomaremos $H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ como coeficiente ao invés de $\mathbb{Z}$, ao aplicarmos o Teorema de Hochschild-Serre. Logo, obtemos a seguinte sequência espectral :

$$E_2^{p,q} = H^p(Q_{2^i}; H^q(\mathbb{Z}_b; \mathbb{Z}_a)) \implies H^{p+q}(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}_a), \text{ com } \mathbb{Z}_a = H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z}).$$

Temos que a ação de $\mathbb{Z}_b$ sobre $H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$ é a multiplicação por r^j . A ação de Q_{2^i} é dada por: $\beta_2^j(x)$ é multiplicação por r_x^j ; e $\beta_2^j(y)$ é a multiplicação por r_y^j , lembrando que $\beta_2^2(x) = \beta_2^2(y) = 1$.

Assim,

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(Q_{2^i}; \mathbb{Z}_{\delta_j}) & , \text{ se } q = 0; \\ 0 & , \text{ c.c.}, \end{cases} \quad (6.24)$$

com $\delta_j = (a, r^j - 1)$. Logo, a sequência espectral colapsa no termo E_2 , e como $(\delta_j, 2^i) = 1$, obtemos:

$$H^n(\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}; \mathbb{Z}_a) = H^n(Q_{2^i}; \mathbb{Z}_{\delta_j}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} & , \text{ se } n = 0 \text{ e } j \text{ é ímpar;} \\ \mathbb{Z}_{\delta_j} & , \text{ se } n = 0 \text{ e } j \text{ é par;} \\ 0 & , \text{ c.c.} \end{cases} \quad (6.25)$$

com $\varepsilon_j = (\delta_j, r_x^j - 1, r_y^j - 1)$. □

Finalizando esta seção, note que pela equação (6.18) a sequência espectral (6.17) colapsa no termo E_2 , e pelas proposições 6.6.1 e 6.6.2, temos o resultado:

Proposição 6.6.3.

$$H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0; \\ 0 & , \text{ se } n \text{ é ímpar;} \\ \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_{\delta_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i} & , \text{ se } n \equiv 0 \pmod{4}, n > 0, \end{cases} \quad (6.26)$$

com $\varepsilon_j = (\delta_j, r_x^j - 1, r_y^j - 1)$. Seja d a ordem de r em $\text{Aut}(\mathbb{Z}_a)$. Se d é par, então $H^{2d} = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i}$, e o grupo $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$ é periódico de período $2d$; e se d é ímpar, então $H^{2d} = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2$ e $H^{4d} = \mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i}$, e o grupo $\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})$ é periódico de período $4d$.

6.7 Co-homologia de $[\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$

Assim como na seção 6.4, pela seção 6.2 temos que para cada n existe a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow E_2^{1,n-1} \rightarrow H^n(F \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow E_2^{0,n} \rightarrow 0.$$

Como $H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z}) = 0$ para n ímpar, temos que

$$H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \begin{cases} H^n(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}} & , \text{ se } n \text{ é par;} \\ H^{n-1}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} & , \text{ se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (6.27)$$

Verifica-se que a ação de $\mathbb{Z}$ sobre $H^0(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ é a ação trivial. Com isso, $H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ para $n = 0, 1$.

Para a análise quando $n > 1$, precisamos saber como é a $\mathbb{Z}$ -ação induzida pela θ sobre

$$H^{2j}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } j \text{ é ímpar,} \\ \mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i} & , \text{ se } j \text{ é par, com } j > 0. \end{cases}$$

Com $\varepsilon_j = \delta_j$ se j é par. Temos os seguintes isomorfismos:

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_2^2) \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_b) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_2^2)$$

e

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}_{\varepsilon_j} \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \mathbb{Z}_{2^i}) \simeq \text{Aut}(\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_b) \oplus \text{Aut}(\mathbb{Z}_{2^i}),$$

pois $(\varepsilon_j, b, 2) = 1$. Logo, nós precisamos saber como são as $\mathbb{Z}$ -ações induzidas sobre cada somando $H^0(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$, $H^0(Q_{2^i}; H^{2j}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$ e $H^{2j}(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$.

Consideremos $\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}))$, dada por

$$\theta(1)(1_a) = c_a 1_a; \theta(1)(1_b) = c 1_a + c_b 1_b; \theta(1)(x) = c_x 1_a + x^k; \theta(1)(y) = c_y 1_a + x^l y.$$

Aqui, c_a , c_b , c , c_x e c_y são escolhidos conforme [10].

Denotaremos por θ_a a aplicação $\theta(1)|_{\mathbb{Z}_a} : \mathbb{Z}_a \rightarrow \mathbb{Z}_a$, por $\theta_b = \overline{\theta(1)}|_{\mathbb{Z}_b} : \mathbb{Z}_b \rightarrow \mathbb{Z}_b$ sendo a aplicação $\overline{\theta(1)} : \mathbb{Z}_b \times Q_{2^i} \rightarrow \mathbb{Z}_b \times Q_{2^i}$ induzida ao quociente de $\theta(1)$, e denotaremos por $\theta_Q = \overline{\overline{\theta(1)}} : Q_{2^i} \rightarrow Q_{2^i}$ a aplicação induzida ao quociente de $\overline{\theta(1)}$. Com isso, temos

$$\theta_a(1_a) = c_a 1_a; \theta_b(1_b) = c_b 1_b; \theta_Q(x) = x^k; \theta_Q(y) = x^l y.$$

Agora, utilizando a aplicação induzida $H^*(\theta_Q; H^*(\theta_b; \theta_a^*))$, sendo θ_a^* a aplicação induzida por θ_a sobre $H^*(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})$, podemos calcular as $\mathbb{Z}$ -ações sobre os termos $H^0(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$, $H^0(Q_{2^i}; H^{2j}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$ e $H^{2j}(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$.

Obtemos que a $\mathbb{Z}$ -ação sobre $H^0(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^{2j}(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$ é a multiplicação por c_a^j sobre $\mathbb{Z}_{\varepsilon_j}$ e a $\mathbb{Z}$ -ação sobre $H^0(Q_{2^i}; H^{2j}(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$ é a multiplicação por c_b^j sobre $\mathbb{Z}_b$.

Como $\text{Aut}(Q_8)$ não segue o mesmo padrão que $\text{Aut}(Q_{2^i})$, com $i > 3$, faremos a análise da $\mathbb{Z}$ -ação induzida sobre $H^{2j}(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$ separadamente para Q_8 e Q_{2^i} , com $i > 3$.

Lema 6.7.1. *Seja $Q_{2^i} = \langle x, y | x^{2^{i-2}} = y^2, xyx = y \rangle$, com $i > 3$, o grupo dos quatérnios generalizado. Considere θ a $\mathbb{Z}$ -ação sobre Q_{2^i} dada por $\theta(1)(x) = x^k$, com k ímpar; e $\theta(1)(y) = x^l y$, com $l = 0, 1, \dots, 2^{i-1} - 1$. Temos que a $\mathbb{Z}$ -ação $\theta^{(2)}$ induzida pela θ sobre $H^2(Q_{2^i})$ é, ou a ação trivial, ou a ação dada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Demonstração. Temos que $H^2(Q_{2^i}) \cong H_1(Q_{2^i}) \cong (Q_{2^i})_{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, com geradores $\alpha_2 = \bar{x}$ e $\alpha'_2 = \bar{y}$. Como $\theta(1)(x) = x^k$, com k ímpar, temos que $\theta^{(2)}(1)(\alpha_2) = \alpha_2$, pois $k \equiv 1 \pmod{2}$; e como $\theta(1)(y) = x^l y$, temos que $\theta^{(2)}(1)(\alpha'_2) = \alpha_2 + \alpha'_2$, se l é ímpar e $\theta^{(2)}(1)(\alpha'_2) = \alpha'_2$, se l é par. Disto, segue o resultado. $\square$

Por [10] e [20] temos que $\mathbb{Z}$ -ação induzida sobre $H^{2j}(Q_{2^i}; H^0(\mathbb{Z}_b; H^0(\mathbb{Z}_a; \mathbb{Z})))$, com j par, é a multiplicação por k^j . Com isso obtemos o seguinte resultado.

Proposição 6.7.2. *Considere Q_{2^i} e θ a $\mathbb{Z}$ -ação sobre Q_{2^i} , como no lema anterior. Temos que a $\mathbb{Z}$ -ação $\theta^{(4m+2)}$ induzida pela θ sobre $H^{4m+2}(Q_{2^i})$ coincide com $\theta^{(2)}$ induzida sobre $H^2(Q_{2^i})$.*

Demonstração. Por [23] e [24], $H^*(Q_{2^i})$ tem a seguinte estrutura de álgebra

$$\frac{\mathbb{Z}[\alpha_2, \alpha'_2, \beta_4]}{\langle 2\alpha'_2 = 2\alpha_2 = 0, \alpha_2^2 = 2^i \beta_4 = 0, \alpha'^2_2 = \alpha_2 \alpha'_2 = 2^{i-1} \beta_4 \rangle}.$$

Da estrutura multiplicativa temos que os geradores de $H^{4m+2}(Q_{2^i})$ são $\beta_4 \alpha_2$ e $\beta_4 \alpha'_2$. Considerando a ação não-trivial sobre $H^2(Q_{2^i})$, temos

$$\theta^{(4m+2)}(1)(\beta_4 \alpha_2) = k^{2m} \beta_4 (\alpha_2 + \alpha'_2) = \beta_4 k^{2m} \alpha_2 + \beta_4 k^{2m} \alpha'_2,$$

e

$$\theta^{(4m+2)}(1)(\beta_4 \alpha'_2) = k^{2m} \beta_4 \alpha'_2 = \beta_4 k^{2m} \alpha'_2.$$

Note que k^{2m} é ímpar, assim temos $\theta^{4m+2}(1)(\beta_4 \alpha_2) = \beta_4 \alpha_2 + \beta_4 \alpha'_2$ e $\theta^{4m+2}(1)(\beta_4 \alpha'_2) = \beta_4 \alpha'_2$, que fornece a mesma matriz que a fornecida em $H^2(Q_{2^i})$.

Se a $\mathbb{Z}$ -ação induzida sobre $H^2(Q_{2^i})$ é a trivial, é claro que a ação induzida sobre $H^{4m+2}(Q_{2^i})$ também é a trivial. $\square$

Lema 6.7.3. *Considere $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} = \langle i, j | i^2 = j^2, j i j = i \rangle$. Todas as $\mathbb{Z}$ -ações sobre $H^2(Q_8) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ podem ser realizadas por uma $\mathbb{Z}$ -ação sobre Q_8 .*

Demonstração. A demonstração do lema 6.7.1 nos fornece que os geradores de $H^2(Q_8) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ são $\alpha_2 = \bar{i}$ e $\alpha'_2 = \bar{j}$. Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz que representa alguma $\mathbb{Z}$ -ação sobre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Para realização desta ação por uma $\mathbb{Z}$ -ação sobre Q_8 basta tomarmos a ação θ tal que $\theta(1)(i) = i^a j^c$ e $\theta(1)(j) = i^b j^d$. Note que as entradas são todas ou 0 ou 1. $\square$

Como qualquer ação sobre Q_8 induz a ação trivial sobre $H^4(Q_8)$, temos o resultado análogo a proposição 6.7.4

Proposição 6.7.4. *Seja θ uma $\mathbb{Z}$ -ação sobre Q_8 . Temos que a $\mathbb{Z}$ -ação $\theta^{(4m+2)}$ induzida pela θ sobre $H^{4m+2}(Q_8)$ coincide com a induzida $\theta^{(2)}$ sobre $H^2(Q_8)$.*

Demonstração. Assim como na prova do lema 6.7.1 temos que os geradores de $H^2(Q_8)$ são $\alpha_2 = \bar{i}$ e $\alpha'_2 = \bar{j}$ e seja β_4 o gerador de $H^4(Q_8)$. Como a ação sobre $H^{4m}(Q_8)$ é a trivial, temos

$$\theta^{(4m+2)}(1)(\beta_4 \alpha_2) = \beta_4 \theta^{(2)}(1)(\alpha_2) \text{ e } \theta^{(4m+2)}(1)(\beta_4 \alpha'_2) = \beta_4 \theta^{(2)}(1)(\alpha'_2).$$

Logo, segue o resultado. $\square$

Consideremos $A_j = (c_a^j - 1, \varepsilon_j)$, $B_j = (c_b^j - 1, b)$ e $C_j = (k^j - 1, 2^i)$, e lembremos que $\theta(1)(x) = x^k$ e $\theta(1)(y) = x^l y$. Do que foi feito nesta secção temos as seguintes proposições.

Proposição 6.7.5. *Se $i > 3$ e l é par, então*

$$H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_{C_j}, & \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ par}, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Proposição 6.7.6. *Se $i > 3$ e l é ímpar, então*

$$H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_{C_j}, & \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ par}, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Proposição 6.7.7. *Se $i = 3$ e a ação $\theta^{(2)}$ induzida sobre $H^2(Q_8)$ é trivial, então*

$$H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_8)] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_8 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ par}, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_2^2 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Proposição 6.7.8. *Se $i = 3$ e a ação $\theta^{(2)}$ induzida sobre $H^2(Q_8)$ é não-trivial, então*

$$H^n([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_8)] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ se } n = 0, 1, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_8 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ par}, \\ \mathbb{Z}_{A_j} \oplus \mathbb{Z}_{B_j} \oplus \mathbb{Z}_2 & , \text{ se } n = 2j, 2j+1, \text{ com } j \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Dos resultados obtidos concluímos.

Teorema 6.7.9. *A co-homologia do grupo $[\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$, com $i \geq 3$, com coeficientes em $\mathbb{Z}$, isto é, $H^*([\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z})$ é dada pelas proposições 6.7.5, 6.7.6, 6.7.7 e 6.7.8.*

Temos os seguintes corolários do teorema acima:

Corolário 6.7.10. *Seja d_k a ordem de k em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{2^i})$. Temos que $[\mathbb{Z}_a \rtimes_{\beta} (\mathbb{Z}_b \times Q_{2^i})] \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ é fracamente periódico. Se a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_a$ é trivial, então o período é $4[d, d_{c_a}, d_{c_b}, d_k]$; se a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_a$ é não-trivial, então o período é $4[2d, d_{c_a}, d_{c_b}, d_k]$. Os valores d , d_{c_a} e d_{c_b} são como no teorema 6.4.2.*

Demonstração. O período deve ser múltiplo de d_{c_a} , d_{c_b} , d_k e da ordem de ε_j em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_a)$. Se a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_a$ é trivial, temos que $\varepsilon_j = \delta_j$, logo a ordem de ε_j em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_a)$ é d . Se a Q_{2^i} -ação sobre $\mathbb{Z}_a$ é não-trivial, temos que $r_x^j - 1$ e $r_y^j - 1$, pelo menos um, é diferente de zero se j for ímpar, porém se j é par ambos são zero. Com isso, temos que a ordem de ε_j em $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_a)$ é $2d$. Pelas proposições 6.7.5, 6.7.6, 6.7.7 e 6.7.8 o corolário. $\square$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] A. Adem and J. H. Smith. Periodic complexes and groups actions. *Annals of Mathematics*, 154:407–435, 2001.
- [2] Alejandro Adem and R. James Milgram. *Cohomology of finite groups*. Springer, 2004.
- [3] Glen E. Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Academic Press, 1972.
- [4] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*. Springer-Verlag, 1982.
- [5] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.
- [6] F. T. Farrell and L. Jones. Isomorphism conjectures in algebraic K-theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 6:249–297, 1993.
- [7] E. E. Floyd. On periodic maps and the Euler characteristic of associated spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72:138–147, 1952.
- [8] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - a numerical bound for homotopy types. *Hiroshima Mathematics Journal*, 31:107–116, 2001.
- [9] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - homotopy types and self-equivalences. *Progress in Mathematics*, 215:153–165, 2003.
- [10] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - homotopy types and self-equivalences for the groups $\mathbb{Z}/a \rtimes \mathbb{Z}/b$ and $\mathbb{Z}/a \rtimes (\mathbb{Z}/b \times \mathbb{Q}_{2^i})$. *Topology and its Applications*, 146-147:451–470, 2005.

-
- [11] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - homotopy types and self-equivalences for the groups $\mathbb{Z}/a \rtimes (\mathbb{Z}/b \times T_i^*)$ and $\mathbb{Z}/a \rtimes (\mathbb{Z}/b \times O_n^*)$. *Journal of homotopy and related subjects*, 1(1):29–45, 2006.
- [12] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - homotopy types and self-equivalences for the group $(\mathbb{Z}/a \rtimes \mathbb{Z}/b) \times SL_2(\mathbb{F}_p)$. *Canadian Mathematics Bulletin*, 50:206–214, 2007.
- [13] Marek Golasinski and Daciberg Lima Gonçalves. Spherical space forms - homotopy types and self-equivalences for the groups $\mathbb{Z}/a \rtimes (\mathbb{Z}/b \times TL_2(\mathbb{F}_p))$. *Submetido*, 2008.
- [14] Daciberg Lima Gonçalves and John Guaschi. Classification of the virtually cyclic subgroups of the pure braid groups of the projective plane. *Submetido*, 2007.
- [15] Morris Newman. *Integral matrices*. Academic Press, 1972.
- [16] D. S. Passman. *The algebraic structure of group rings*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., 1985.
- [17] C. A. Robinson. Periodic resolutions for finite groups. *Illinois J. Math.*, 16:234–242, 1972.
- [18] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, 1991.
- [19] J. C. Su. Periodic transformations on the product of two spheres. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112:369–380, 1964.
- [20] Richard G. Swan. Periodic resolutions for finite groups. *Annals of Mathematics*, 72(2):267–291, 1960.
- [21] C. B. Thomas. The oriented homotopy type of compact 3-manifolds. *Proc. London Math. Soc.*, 19:31–44, 1969.
- [22] C. B. Thomas and C. T. C. Wall. The topological spherical space form problem I. *Compositio Mathematica*, 23:101–114, 1971.
- [23] Satoshi Tomoda. *Cohomology Rings of Certain 4-Periodic Finite Groups*. PhD thesis, University of Calgary, 2005.
- [24] Satoshi Tomoda and Peter Zvengrowski. Remarks on the cohomology of finite fundamental groups of 3-manifolds. *Geometry & Topology Monographs*, 14:519–556, 2008.

-
- [25] C. T. C. Wall. Poincaré complexes I. *Annals of Mathematics*, 86:213–245, 1967.
- [26] Joseph A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. Publish or Perish, Inc., 1977.