

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito.....19, 06, 2000

Assinatura:.....*Sadao Massago*

Estrutura “open book” em variedades $(n - 1)$ -conexas de dimensão $2n + 1$

Sadao Massago

orientador: *Osamu Saeki*

co-orientador: *Oziride Manzoli Neto*

São Carlos

Junho de 2000

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e Computação de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - área: Matemática

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primário 57Q45; Secundário 57R40.

Palavras chaves: Nó fibrado, Isotopia de mergulhos, Fibrção de Milnor, Open book, Forma de Seifert racional, Spinnable structure.

Aos meus pais

Akira Masago e Yoko Tsujii Masago

*A razão é como uma lanterna que ilumina o caminho,
o sonho é como as estrelas que encantam o mundo,
e o amor é como as flores que perfumam o campo.*

*Não há um destino numa estrada sem lanternas,
a alegria numa caminhada sem estrelas,
ou doce sabor das carícias sem as flores.*

S.M.

Agradecimentos

Um agradecimento especial aos meus orientadores e grandes amigos Oziride Manzoli Neto e Osamu Saeki pelo incentivo, paciência e compreensão. Seus apoios foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Um agradecimento com muito carinho à Paty (Patricia Teixeira Leite) pela amizade, carinho e compreensão, assim como a Mari (Maristela de Oliveira) e a Lú (Luciane Grossi) que sempre estiveram presentes.

Ao Osamu Saeki, à Célia e aos estudantes do mestrado da Faculdade de Ciência – Universidade de Hiroshima pelo acolhimento e a todos que não me fizeram um simples visitante estrangeiro.

Aos professores Thomas E. Barros, Pedro L. Ap. Malagutti, Lúcia V. Cossi, Waldeck Schützer e outros professores e funcionários do DM/UFSCar, ICMC/USP e da Universidade de Hiroshima pelo acolhimento, incentivo e apóio.

Aos todos amigos que souberam o valor da amizade.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Aos todos que, de uma forma ou outra, contribuíram para o desenvolvimento desta tese.

Abstract

The classification problem of simple fibered knots (or open book structures) on odd dimensional spheres was studied by several authors – *Levine, Durfee, Kato, etc.* – and classification theorems have been obtained. On the other hand, the existence of open book structures on odd dimensional manifolds was studied by several authors – *Winkelnkemper, A'Campo, Lawson, Quinn, and Tamura*. However, the classification of these structures has not been studied until now. In this work, we present a complete classification up to isotopy of simple open book structures on closed $(n-1)$ -connected manifolds of dimension $2n+1$ for $n \geq 4, n \neq 7$, and on $(n-1)$ -connected rational homology $(2n+1)$ -spheres for $n = 3, 7$, using their algebraic invariants.

Resumo

O problema da classificação de nós fibrados simples (ou estruturas “open book”) nas esferas de dimensões ímpares foi estudado por diversos autores – *Levine, Durfee, Kato, etc.* – e teoremas da classificação foram obtidos. Por outro lado, a existência de estruturas “open book” em variedades de dimensões ímpares foi estudada por vários autores – *Winkelkemper, A’Campo, Lawson, Quinn e Tamura.* Porém, a classificação destas estruturas não foi estudada até agora. Neste trabalho, apresentamos uma classificação completa por isotopia das estruturas “open book” simples sobre $(2n + 1)$ -variedades $(n - 1)$ -conexas e fechadas com $n \geq 4, n \neq 7$, e sobre $(2n + 1)$ -esferas homológicas racionais $(n - 1)$ -conexas com $n = 3, 7$, utilizando invariantes algébricos.

Índice

Introdução	xvii
1 Preliminares	1
2 Sistema de invariantes de “open book” simples	11
3 Critério de isotopia	27
4 Realização	43
5 Estrutura fibrada	61
6 Exemplos	73
Tabela de símbolos	87
Bibliografia	89
Glossário	93

Lista de Figuras

1.1	Estrutura local de uma “open book” associada ao mergulho trivial $S^1 \hookrightarrow S^3$	2
1.2	Forma normal do fibrado sobre a esfera S^n	7
1.3	Seção normal determinando o fibrado \mathcal{E}	10
2.1	Relação entre Γ_F e a forma de intersecção de F	17
3.1	Isotopia inicial de c_k para c'_k	30
3.2	Obtendo a isotopia relativa a c_i	31
3.3	Vizinhança de $c_i \cap N(\hat{c}_i)$	35
3.4	Alterando $c_i \cap N(\hat{c}_i)$	35
3.5	A mudança de campo normal pela ação de isotopia Φ	36
3.6	Recortando E ao longo da vizinhança de $F = F'$	40
4.1	O “complexo base” V mergulhado em M	44
4.2	Campo normal sobre γ_i determinando h_i	45
4.3	D^n -fibrado trivial $N(\partial D_j)$	48
4.4	Efetuando uma soma conexa fibrada de h_i e $N(\partial D_j)$	49
4.5	Ajustando a forma de Seifert	49
4.6	Definição de $\Phi(A)$	55
5.1	Cobordismo inversível entre \tilde{F}_1 e \tilde{F}_2	62
5.2	Mergulho de W_1 em $\tilde{E} \times I$	63
5.3	Mergulho de W_1 em $E \times I$	64
5.4	Recortando $E \times I$ ao longo de \hat{W}	65
6.1	Fibração trivial de $D_i - (D_i \cap K_i)$ sobre S^1	74

Introdução

Estudando a teoria das singularidades, mergulhos especiais de $(2n-1)$ -variedades na esfera de dimensão $2n+1$, denominados de *nós fibrados simples* [Mil68], surgem naturalmente. Estes mergulhos foram estudados por diversos autores e teoremas da classificação foram obtidos [Ker65, Lev70, Dur74, Kat74, Sae99].

Uma generalização de nós fibrados simples é denominada estrutura “open book”. Esta estrutura consiste de uma subvariedade fechada altamente conexa K de codimensão 2, denominada “binding”, numa variedade M altamente conexa e fechada, juntamente com uma fibração do complementar $M-K$ de K em M , sobre o círculo S^1 , satisfazendo certas condições (veja Definição 1.1). A fibra associada é denominada *página* e é denotada por F . Quando M , K e F são altamente conexas, a estrutura é denominada *simples* (veja Definição 1.2). Notemos que o caso discutido pelo Milnor [Mil68] é o caso simples.

Como generalização do caso de Milnor, Lê [Lê92] provou que uma estrutura “open book” simples que não seja “nó fibrado simples” surge naturalmente no caso de certas singularidades associadas às funções sobre variedades complexas singulares.

O termo estrutura “open book” foi introduzido formalmente por Winkelkemper [Win73]. Ele provou que, para $n \geq 3$, qualquer $(2n+1)$ -variedade simplesmente conexa e fechada possui uma estrutura “open book”. Independentemente, Tamura provou um resultado similar [Tam73], e Lawson provou que a condição de ser simplesmente conexa não é necessária para $n \geq 3$ [Law78]. Quinn generalizou o resultado de Lawson para $n \geq 2$ e estudou a estrutura “open book” sobre variedades com bordo, obtendo condições necessárias para que uma estrutura “open book” no bordo se estenda para o seu interior [Qui79]. Para 5-variedades simplesmente conexas, A’Campo também obteve um teorema da existência [A’C72] e para 3-variedades Alexander obteve o teorema da existência [Ale23]. Estes teoremas foram obtidos para provar certas propriedades destas variedades,

e os autores não se preocuparam com a classificação destas estruturas. Caso particular da estrutura “open book” simples sobre uma esfera S^{2n+1} com $n \geq 2$ é denominado *nós fibrados simples* e vários autores fizeram estudos detalhados (veja [Dur74, Kat74, Sae99]), obtendo a sua classificação para $n \geq 3$.

Neste trabalho, realizaremos a classificação pela isotopia destas estruturas “open book” simples sobre uma variedade que não é necessariamente uma esfera. Devido ao fato das variedades envolvidas serem altamente conexas, utilizaremos vários conceitos e resultados sobre variedades altamente conexas.

Denotamos por $\mathcal{A}(M)$, o conjunto das classes de equivalência de certas coleções algébricas correspondentes aos invariantes das estruturas “open book” (veja Definições 2.15, 2.18 e 2.19), e definimos uma equivalência de “open book” pela isotopia estruturada como “open book” (veja Definição 2.21). Os resultados mais importantes obtidos neste trabalho podem ser enunciados como segue.

Teorema 4.15 *Seja M uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada com $n \geq 4, n \neq 7$, ou uma $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa com $n = 3, 7$. Então existe uma bijeção entre o conjunto das classes de equivalência das estruturas “open book” simples e orientadas e o conjunto algébrico $\mathcal{A}(M)$.*

Teorema 5.5 *Suponhamos que K é uma $(2n - 1)$ -variedade orientada, $(n - 2)$ -conexa e fechada, mergulhada numa $(2n + 1)$ -variedade orientada, $(n - 1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 4, n \neq 7$, ou numa $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa e orientada com $n = 3, 7$. Então todas as estruturas “open book” simples e orientadas sobre M com “binding” K são estruturalmente isotópicas entre si.*

Teorema 5.7 *Seja K uma $(2n - 1)$ -variedade $(n - 2)$ -conexa e fechada mergulhada numa $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 3$. Então temos o que segue.*

- (1) K é a “binding” de alguma estrutura “open book” (que não é necessariamente simples) sobre M com a página simplesmente conexa se, e somente se, o fibrado normal de K em M é trivial (ou equivalentemente, vizinhança tubular $N(K)$ de K é trivial), $\pi_1(E) \cong \mathbb{Z}$, e $\pi_i(E)$ são finitamente gerados para todo i , onde $E = \overline{M - N(K)}$.

(2) A “open book” acima é simples se, e somente se, $\pi_i(E) = 0$ para $i = 2, 3, \dots, n - 1$.

O Teorema 4.15 classifica todas as estruturas “open book” sobre uma variedade M . O Teorema 5.5 fornece a unicidade da estrutura “open book” com a “binding” pré-fixada. Isto permite considerar os invariantes associados a uma estrutura “open book” como invariantes da classe de isotopia da “binding”. O Teorema 5.7 caracteriza aqueles mergulhos de codimensão 2 que podem ser realizados como “binding” de alguma “open book”. Juntando todos estes resultados, obtemos, por exemplo, uma correspondência biunívoca entre o conjunto das classes de isotopia de mergulhos de codimensão 2 em M que satisfazem as condições do Teorema 5.7 (2) e o conjunto algébrico $\mathcal{A}(M)$.

Este trabalho utiliza vários conceitos e resultados da topologia algébrica. Resultados básicos tais como seqüência de Mayer-Vietoris, teorema de van-Kampen, dualidade de Poincaré-Lefschetz e outros conceitos são assumidos como parte do domínio do leitor. Além disso, a identificação dos grupos de homologia e homotopia via teorema de Hurewicz aparece freqüentemente sem mencionar o teorema.

Alguns resultados sobre fibrados são tratados no capítulo 1 por serem usados em diversas partes do trabalho. Outros resultados serão apresentados na medida do necessário.

Denotamos o interior da variedade X por $\text{Int } X$ e o fecho do subespaço Y por \bar{Y} , assim como o complementar de Y em X por $X - Y$.

É importante observar que uma “open book” e o seu sistema de invariantes “open book” serão denotados por (M, K, φ) e $\mathcal{S}(M, K, \varphi)$ respectivamente (veja Definição 2.23) até o capítulo 4, onde $\varphi : M - K \rightarrow S^1$ é a fibração associada. Mas, a partir do capítulo 5 também serão denotados por (M, K) e $\mathcal{S}(M, K)$ respectivamente para $n \geq 4, n \neq 7$, ou para $n = 3, 7$ quando M é uma $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa, devido ao Teorema 5.5. Quando a variedade ambiental M está óbvia segundo o contexto, o sistema de invariantes também será denotado por $\mathcal{S}(K, \varphi)$.

Também chamamos a atenção de que todo grupo de homologia e cohomologia é com coeficientes nos inteiros, variedades e aplicações entre elas são diferenciáveis de classe C^∞ , e as estruturas “open books” são simples (veja Definição 1.2), a menos que especifiquemos o contrário.

Notemos também que x e y representam pontos, ξ e ζ representam elementos dos módulos e a e b representam cadeias ou ciclos, exceto quando a simbologia não é adequada para o contexto.

Indicaremos um isomorfismo entre objetos algébricos ou um difeomorfismo (que preserva a orientação) entre variedades (orientadas) pelo símbolo “ \cong ”, e a aplicação identidade por “id”.

A organização dos capítulos é como segue.

No capítulo 1, introduzimos o conceito de estrutura “open book” e trataremos de alguns resultados relacionados aos fibrados sobre esferas que servem como uma ferramenta importante no desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 2, definimos e analisamos os invariantes associados a uma estrutura “open book”, que serão utilizados nos próximos capítulos.

No capítulo 3, desenvolvemos o critério de isotopia de estruturas “open book”, utilizando os invariantes algébricos introduzidos no capítulo 2.

No capítulo 4, efetuamos a realização dos invariantes discutidos no capítulo 2, completando o teorema da classificação (Teorema 4.15).

No capítulo 5, analisamos a estrutura “open book” associada ao mergulho de codimensão 2, obtendo dois resultados importantes: condições necessárias e suficientes para a existência (Teorema 5.7), e a unicidade da estrutura “open book” associada (Teorema 5.5), a qual já eram conhecidas para o caso do mergulho de K homeomorfo a S^{2n-1} em S^{2n+1} com $n > 2$ (veja [BL66, Corollary 1.6]), e “open book” sobre esferas S^{2n+1} com $n \geq 3$ (veja [Dur74]), respectivamente. Pelo Teorema 5.5 podemos considerar o invariante associado à estrutura “open book” como sendo um invariante do mergulho de codimensão 2 numa $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada para $n \geq 4, n \neq 7$, ou numa $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa para $n = 3, 7$.

No capítulo 6, veremos vários resultados e exemplos que são conseqüências da teoria desenvolvida, tais como “open book” cuja “rank” de $H_n(F)$ é a menor possível, denominada “open book” *minimal*.

Devido ao fato de envolver muitos símbolos e conceitos, apresentamos uma tabela de símbolos antes e um glossário depois da referência bibliográfica.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se destina à apresentação de conceitos preliminares para o estudo da estrutura “open book”. Recordaremos alguns conceitos relativos às estruturas “open book” sobre variedades fechadas de dimensões ímpares, assim como resultados relacionados com as fibrações sobre esferas.

Definição 1.1 Seja K uma variedade fechada de dimensão $2n - 1$ mergulhada numa variedade fechada M de dimensão $2n + 1$. Suponhamos que existem uma trivialização $\tau : K \times D^2 \rightarrow N(K)$ da vizinhança tubular $N(K)$ de K em M e uma fibração C^∞ $\varphi : M - K \rightarrow S^1$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} K \times (D^2 - \{0\}) & \xrightarrow{\tau} & N(K) - K \\ p \searrow & & \swarrow \varphi \\ & S^1 & \end{array}$$

comuta, onde p denota a projeção canônica. A terna (M, K, φ) é denominada “open book” e a estrutura fibrada indicada pelo par (K, φ) é denominada *estrutura “open book”* sobre M . A Figura 1.1 mostra a estrutura “open book” associada ao mergulho trivial $S^1 \hookrightarrow S^3$, o que apresenta as configurações locais dignas de seu nome. Mais ainda, K é denominada “binding” e o fecho de cada fibra $F_t = \overline{\varphi^{-1}(t)}$, $t \in S^1$, em M é chamado de *página*. Chamamos $F = F_0$ com $0 \in S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de *página típica* da “open book”.

Definição 1.2 Uma estrutura “open book” é *simples* quando M e F são $(n - 1)$ -conexas e K é $(n - 2)$ -conexa, onde F e K são a página e a “binding”, respectivamente.

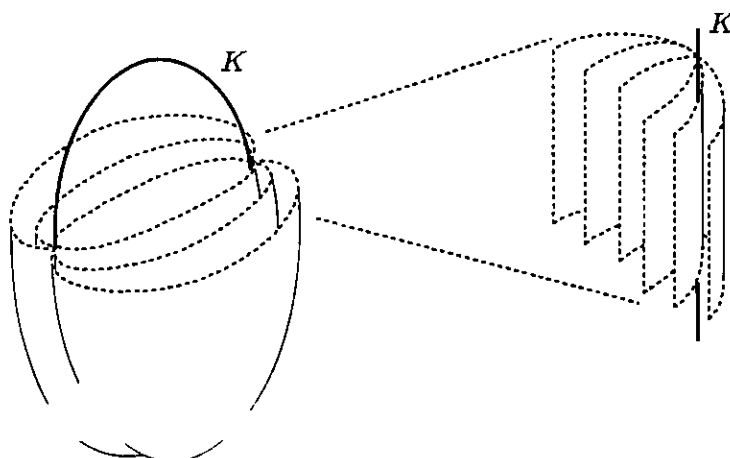


Figura 1.1: Estrutura local de uma “open book” associada ao mergulho trivial $S^1 \hookrightarrow S^3$

Proposição 1.3 *Seja F uma $2n$ -variedade compacta com bordo $K = \partial F \neq \emptyset$. Para $n > 2$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) F é $(n - 1)$ -conexa e K é $(n - 2)$ -conexa;
- (2) F é homotopicamente equivalente a um buquê de esferas de dimensão n ;
- (3) F possui uma decomposição da forma $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$, onde $r = \text{rank } H_n(F)$ e h_i são n -alças coladas de forma simultânea ao longo de um link em ∂D^{2n} .

Demonstração:

(2) se, e somente se, (3):

Quando F é homotopicamente equivalente ao buquê de esferas de dimensão n , os únicos grupos de homologia não triviais de F são $H_0(F)$ e $H_n(F)$. Como F é conexa e $\dim F \geq 6$, existe uma decomposição desejada pelo [Sma62]. Reciprocamente, se F possui uma decomposição em alças da forma $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$, então a retração das alças nas suas almas e a retração do disco D^{2n} em um único ponto determinam uma equivalência de homotopia com um buquê de esferas. Assim, F é homotopicamente equivalente ao buquê de esferas de dimensão n determinado pelas almas das alças.

(3) implica (1):

Suponhamos que uma decomposição em alças de F apresenta apenas n -alças coladas simultaneamente numa 0-alça. Então K é obtida através da aplicação sucessiva da cirurgia esférica ao longo de S^{n-1} , iniciada por $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$. Como $n \geq 3$, a aplicação sucessiva do teorema de van-Kampen implica que K é simplesmente conexa.

Aplicando a dualidade de Poincaré-Lefschetz, temos

$$H_i(F, \partial F) \cong H^{2n-i}(F) = 0$$

para $i = 0, \dots, n-1$ por F ser homotopicamente equivalente ao buquê de n -esferas. Então a seqüência exata

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(F, \partial F) \rightarrow H_i(\partial F) \rightarrow H_i(F) \rightarrow \dots$$

do par $(F, \partial F)$ fornece $H_i(\partial F) = 0$ para $i = 2, \dots, n-2$ e conseqüentemente, $K = \partial F$ é $(n-2)$ -conexa.

(1) implica (3):

Pela dualidade de Poincaré-Lefschetz e o teorema dos coeficientes universais para cohomologia, temos

$$H_i(F) \cong H^{2n-i}(F, \partial F) \cong \text{Hom}(H_{2n-i}(F, \partial F), \mathbf{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{2n-i-1}(F, \partial F), \mathbf{Z}).$$

Por outro lado, pela seqüência exata

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(F) \rightarrow H_i(F, \partial F) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(\partial F) \rightarrow \dots$$

do par $(F, \partial F)$, temos que $H_i(F, \partial F) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ devido ao fato de F ser $(n-1)$ -conexa e $K = \partial F$ ser $(n-2)$ -conexa. Logo $H_i(F) = 0$ para $i = n+1, \dots, 2n-1$.

Como os únicos grupos de homologia não triviais de F são de dimensões 0 e n , e F é conexa com $\dim F \geq 6$, a decomposição em alças obtida em [Sma62] é da forma desejada. Isto prova a Proposição 1.3. ■

Observação 1.4 Pela proposição acima, uma página F de uma “open book” sempre pode ser decomposta como sendo $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$, onde $r = \text{rank } H_n(F)$ e h_i são n -alças, para $n > 2$.

Um exemplo interessante da estrutura “open book” simples é a fibração de Milnor que pode ser obtida como segue. Consideremos o germe de uma função holomorfa $f : \mathbb{C}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$ com um ponto crítico isolado na origem. Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $(S_\varepsilon^{2n+1}, S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0), \varphi)$ é uma “open book” denominada de *fibração de Milnor* associada a f , onde S_ε^{2n+1} denota a esfera de raio ε centrada na origem, $\varphi = f/|f|$ e $S^1 \subset \mathbb{C}$ [Mil68]. Se substituirmos $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ pelo germe de uma variedade singular $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^m, 0)$ de dimensão complexa $n + 1$, temos um resultado similar [Ham71, Lê92].

Definição 1.5 Dizemos que uma “open book” (M, K, φ) é *orientada* se M e S^1 são orientadas, e as páginas possuem orientações compatíveis com a fibração $\varphi : M - K \rightarrow S^1$.

Definição 1.6 Seja F a página típica de uma “open book” orientada (M, K, φ) . Identificamos S^1 com \mathbb{R}/\mathbb{Z} e consideramos $F_t = \overline{\varphi^{-1}(t)}$, $t \in S^1$, com $F_0 = F$. O campo de vetores sobre M obtido como “pull-back” pela fibração $\varphi : M - K \rightarrow S^1$, do campo de vetores canônico sobre S^1 determina uma família de difeomorfismos a um parâmetro $\nu_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $\nu_0 = \text{id} : M \rightarrow M$, $\nu_t|_{F_0} : F_0 \rightarrow F_t$ e $\nu_t|_K = \text{id} : K \rightarrow K$, onde “id” denota a aplicação identidade. O difeomorfismo $h = \nu_1 : F \rightarrow F$ é denominado *aplicação característica* da fibração. Temos que h é determinado unicamente pela fibração φ a menos de isotopia. Chamamos h também de *monodromia* (geométrica) da estrutura “open book”.

Uma estrutura “open book” pode ser obtida também pela seguinte construção.

Definição 1.7 ([Win73, Qui79]) Seja F uma variedade conexa, compacta e orientável de dimensão $2n$ com bordo K , e $h : F \rightarrow F$ um difeomorfismo que preserva a orientação tal que $h|_K = \text{id}$. Então o “mapping torus” de h é definido como sendo $F \times I / \{(x, 1) \sim (h(x), 0)\}$, onde $I = [0, 1]$, e o seu bordo é naturalmente identificado com $K \times S^1$. Grudando $K \times D^2$ a este bordo, usando a identificação natural de $K \times S^1 = \partial(K \times D^2)$ com o “mapping torus” de $h|_K = \text{id}$, obtemos o “mapping torus” relativo

$$M = F \times I / \{(x, 1) \sim (h(x), 0)\} \cup_{K \times S^1} K \times D^2.$$

Tal construção é denominada *construção “open book”* e $(M, K \times \{0\}, \varphi)$ é uma “open book” com monodromia $h : F \rightarrow F$, onde φ é a projeção no segundo fator de $F \times I / \sim$, estendida para $M - (K \times \{0\})$ através da projeção canônica de $K \times (D^2 - \{0\})$ no bordo do segundo fator. Além disso, se F e K são $(n - 1)$ -conexa e $(n - 2)$ -conexa respectivamente, então a estrutura “open book” é simples (veja Observação 1.8). Mais ainda, toda estrutura “open book” pode ser obtida através da construção “open book” e a monodromia $h : F \rightarrow F$ determina unicamente a sua estrutura.

Observação 1.8 Na definição acima, se F e K são $(n - 1)$ -conexa e $(n - 2)$ -conexa respectivamente, então M é $(n - 1)$ -conexa como segue. Como M é conexa, verificaremos para $n \geq 2$.

Denotamos $E = F \times I / \{(x, 1) \sim (h(x), 0)\}$, então $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$ por F ser simplesmente conexa. Também é fácil ver que M é simplesmente conexa usando o teorema de van-Kampen. Por isso, podemos assumir que $n \geq 3$ daqui em diante.

Agora observemos que $E = E_1 \cup E_2$, onde $E_i \cong F \times I, i = 1, 2$, e $E_1 \cap E_2 \cong F \amalg F$ (união disjunta). Consideremos a seqüência exata de Mayer-Vietoris

$$H_i(E_1 \cap E_2) \rightarrow H_i(E_1) \oplus H_i(E_2) \rightarrow H_i(E) \rightarrow H_{i-1}(E_1 \cap E_2)$$

do par (E_1, E_2) . Então $H_i(E) = 0$ para $i = 2, \dots, n - 1$ pelo fato de F ser $(n - 1)$ -conexa e $H_i(E_1 \cap E_2) = H_i(F) \oplus H_i(F)$.

Precisamos verificar que $\pi_i(M) = 0$ para $i = 2, \dots, n - 1$, ou equivalentemente, $H_i(M) = 0$ para $i = 2, \dots, n - 1$. Como K é $(n - 2)$ -conexa, $H_i(M) = 0$ para $i = 3, \dots, n - 2$ pela seqüência exata de Mayer-Vietoris

$$H_i(K \times S^1) \rightarrow H_i(E) \oplus H_i(K \times D^2) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_{i-1}(K \times S^1)$$

do par $(E, K \times D^2)$. Para verificarmos que $H_{n-1}(M) = 0$, observemos que o homomorfismo $H_{n-1}(K \times S^1) \rightarrow H_{n-1}(K \times D^2)$ induzido pela inclusão de $K \times S^1$ em $K \times D^2$ é um epimorfismo. Para verificarmos que $H_2(M) = 0$, observemos que o homomorfismo $H_1(K \times S^1) \rightarrow H_1(E)$ induzido pela inclusão é um monomorfismo.

Isto completa a demonstração do fato de que M é $(n - 1)$ -conexa.

Observação 1.9 A estrutura “open book” também pode ser definida sobre variedades com bordo. Veja [Qui79].

Observação 1.10 A estrutura “open book” é denominada “*spinnable structure*” em [Tam73, Kat74]. No caso especial em que M é a $(2n + 1)$ -esfera [Dur74] ou em que a “binding” é uma $(2n - 1)$ -esfera [Tam93], ela pode ser chamada de *nó fibrado*.

Definição 1.11 Uma estrutura “open book” (M, K, φ) sobre uma $(2n + 1)$ -variedade M com $n \geq 3$ é dita *trivial* quando $H_n(F) = 0$.

É bem conhecido que uma estrutura “open book” trivial sobre S^{2n+1} , $n \geq 3$, existe e é única a menos de isotopia pelo teorema da classificação de nós fibrados simples [Ker65, Lev70, Dur74, Kat74], onde isotopia é a isotopia estruturada como “open book” (veja Definição 2.21). Esta “open book” trivial é aquela cuja “binding” é S^{2n-1} mergulhada trivialmente em S^{2n+1} .

Observação 1.12 É conhecido que toda variedade fechada de dimensão $2n + 1$ com $n \geq 1$ admite pelo menos uma estrutura “open book” [Ale23, Win73, A’C72, Law78, Qui79, Tam93].

Agora deixaremos a estrutura “open book” de lado e veremos alguns resultados sobre o relacionamento entre fibrados em discos sobre a esfera e os grupos de homotopia de $SO(n)$.

Seja \mathcal{E} um espaço fibrado diferenciável sobre a esfera de dimensão n com espaço total E , fibra F , e *grupo estrutural* G , que é considerado como sendo um subgrupo do grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(F)$ de F . Considere o atlas formado pelos discos abertos $\{U_1, U_2\}$ tal que $U_1 \cup U_2 = S^n$ e $U_1 \cap U_2 \cong S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma vizinhança tubular aberta do equador $S^{n-1} \subset S^n$ (veja Figura 1.2)

Definição 1.13 ([Ste51]) O espaço fibrado \mathcal{E} está numa *forma normal* se $g_{21}(x_0) = e$ para algum $x_0 \in S^{n-1} \times \{0\}$, onde $e \in G$ é o elemento neutro e $g_{21} : U_1 \cap U_2 \rightarrow G$ é a transformação de coordenadas de U_1 para U_2 . Quando \mathcal{E} está numa forma normal, $\chi = g_{21}|_{S^{n-1} \times \{0\}} : S^{n-1} \rightarrow G$ é denominada *aplicação característica* de \mathcal{E} .

Intuitivamente, o espaço total E do fibrado \mathcal{E} sobre S^n é obtido como

$$E = U_1 \times F \cup_{S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times F} U_2 \times F,$$

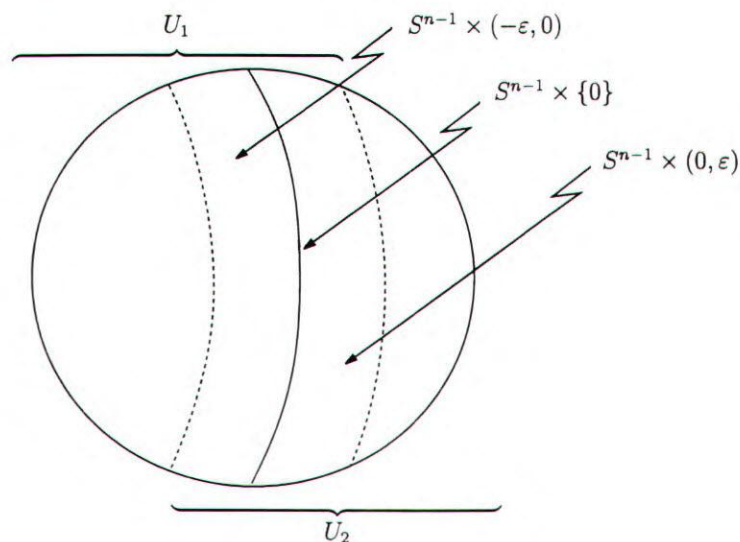


Figura 1.2: Forma normal do fibrado sobre a esfera S^n

onde é identificado

$$(x, t, f) \in S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times F \subset U_1 \times F$$

com

$$(x, t, \chi_x(f)) \in S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times F \subset U_2 \times F.$$

A aplicação característica χ considerada como um elemento de $\pi_{n-1}(G)$ determina e é determinada unicamente pela estrutura fibrada de \mathcal{E} [Ste51].

Um dos mais importantes espaços fibrados em discos sobre esferas é obtido como sendo a vizinhança tubular fechada de uma esfera mergulhada numa variedade diferenciável. Neste caso, a aplicação característica é denominada *invariante tangencial* [Wal63]. Considerando a vizinhança tubular fechada como um fibrado em discos do fibrado normal associado a um mergulho de uma n -esfera ($n \geq 2$) numa m -variedade, temos que o grupo estrutural é $SO(m - n)$ e conseqüentemente, $\chi \in \pi_{n-1}(SO(m - n))$.

É um fato bem conhecido que $SO(n + 1)$ fibra sobre S^n com fibra e grupo estrutural $SO(n)$. A seqüência exata de homotopia associada a esta fibração é

$$\cdots \rightarrow \pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(SO(n+1)) \xrightarrow{p_*} \pi_{n-1}(S^n) \rightarrow \cdots,$$

onde ∂ é o homomorfismo de bordo, $i : SO(n) \rightarrow SO(n + 1)$ é a inclusão definida por $i(A) = A \oplus (1)$, p é a projeção definida por $p(B) = B \cdot e_{n+1}$, e $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ é o

pólo norte da esfera unitária $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$. O homomorfismo de bordo ∂ leva o gerador de $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ à aplicação característica da fibração [Ste51]. O seguinte resultado é bem conhecido.

Lema 1.14 *Para o homomorfismo de bordo $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ como acima com $n \geq 2, n \neq 3, 7$, temos que $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}$ para n par e $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}_2$ para n ímpar ($\partial = 0$ para $n = 3, 7$).*

Para n par $n \geq 2$, temos que $\pi_n(SO(n+1))$ só poderia ser $0, \mathbf{Z}_2$ ou $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ (veja a tabela em [Wal65] e [Ker60]). Logo, pela seqüência exata de homotopia

$$\pi_n(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(SO(n)),$$

temos que $\partial : \pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z} \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é injetora, o que implica que $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}$.

Para n ímpar, $n \neq 3, 7$, a seqüência exata de homotopia

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(SO(n)) \longrightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1)) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^n)$$

tem uma das seguintes formas (veja a tabela apresentada em [Wal65, Proposition 4] e [Ker60]):

$$\begin{cases} \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0, & n \equiv 1 \pmod{8} \\ \mathbf{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0, & n \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}. \end{cases}$$

Conseqüentemente, temos que $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}_2$.

No caso de $n = 3, 7$, ∂ é a aplicação nula, pois $\pi_2(SO(3)) = \pi_6(SO(7)) = 0$ por [Ker60].

Lema 1.15 *Seja E o espaço total de um D^n -fibrado orientado \mathcal{E} sobre S^n associado a um fibrado em n -planos sobre S^n ($n \geq 2$). Note que o seu grupo estrutural é $SO(n)$. Se $\xi \in H_n(E)$ denota a classe representada pela seção nula $S^n \times \{0\}$, então seu número de auto-intersecção $\xi \cdot \xi$ em E coincide com $p_*(\chi) \in \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$, onde $p_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ é o homomorfismo induzido pela projeção $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ associada à fibração $SO(n-1) \rightarrow SO(n) \rightarrow S^{n-1}$, e χ é a aplicação característica do fibrado \mathcal{E} .*

Demonstração: Por [Hir76, Exercício 19 de §5.2], $p_*(\chi)$ coincide com o *número de Euler* do fibrado, que é definido como o número de auto-intersecção da seção nula $S^n \times \{0\}$ [Hir76]. ■

Observação 1.16 Consideremos o homomorfismo $p_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ induzido pela projeção $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ e o homomorfismo de bordo $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ da fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$ como acima com $n \geq 2$. Então $p_* \circ \partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ é a multiplicação por dois para n par e $p_* \circ \partial = 0$ para n ímpar (veja [Ste51, Theorem 23.4]).

Lema 1.17 Consideremos $S^n \times D^{n+1}$ como um fibrado em discos unitários associado a um fibrado em $(n+1)$ -planos trivial sobre S^n e suponha que \mathcal{E} é o D^n -fibrado unitário sobre S^n mergulhado como um sub-fibrado de $S^n \times D^{n+1}$, $n \geq 2$. Então o espaço total E de \mathcal{E} é determinado por uma seção v do fibrado trivial $S^n \times \partial D^{n+1} \rightarrow S^n$, onde v é ortogonal a E em cada fibra $\{*\} \times D^{n+1}$ (veja Figura 1.3). Se $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ denota o homomorfismo de bordo associado à fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$, e $\chi \in \pi_{n-1}(SO(n))$ denota a aplicação característica do fibrado \mathcal{E} , então $\partial v = \chi$, onde v é considerado como um elemento de $\pi_n(S^n) = \pi_n(\partial D^{n+1})$.

Demonstração: Consideremos a forma normal de $S^n \times D^{n+1}$ como na Definição 1.13 tal que \mathcal{E} é trivial sobre U_1 . Então podemos assumir que v é constante sobre U_1 com valores e_{n+1} , onde e_{n+1} é o pólo norte de $S^n = \partial D^{n+1}$. Pela definição,

$$\partial : \pi_n(S^n) \cong \pi_n(SO(n+1), SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$$

aplica cada elemento de $\pi_n(SO(n+1), SO(n)) \cong \pi_n(S^n)$ à sua restrição sobre o bordo [Ste51].

Temos $\partial v = \partial \bar{v}$, onde \bar{v} é o elemento de $\pi_n(SO(n+1), SO(n))$ correspondente ao $v \in \pi_n(S^n)$. Note que \bar{v} é definido como uma aplicação $\bar{v} : U'_2 \rightarrow SO(n+1)$ tal que $\bar{v}(x) = [u_1(x), \dots, u_n(x), v(x)]$, onde $U'_2 = U_2 - (S^{n-1} \times (-\varepsilon, 0)) \cong D^n$ (veja Figura 1.2), $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ é um “ n -frame” ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} ortogonal a $v(x)$, e $[A_1, \dots, A_r]$ denota a matriz com vetores de colunas A_1, \dots, A_r . Além disso, como $v(x) = e_{n+1}$ sobre $\partial U'_2$, temos que $\bar{v}(\partial U'_2) \subset SO(n) \subset SO(n+1)$. Como a aplicação de projeção

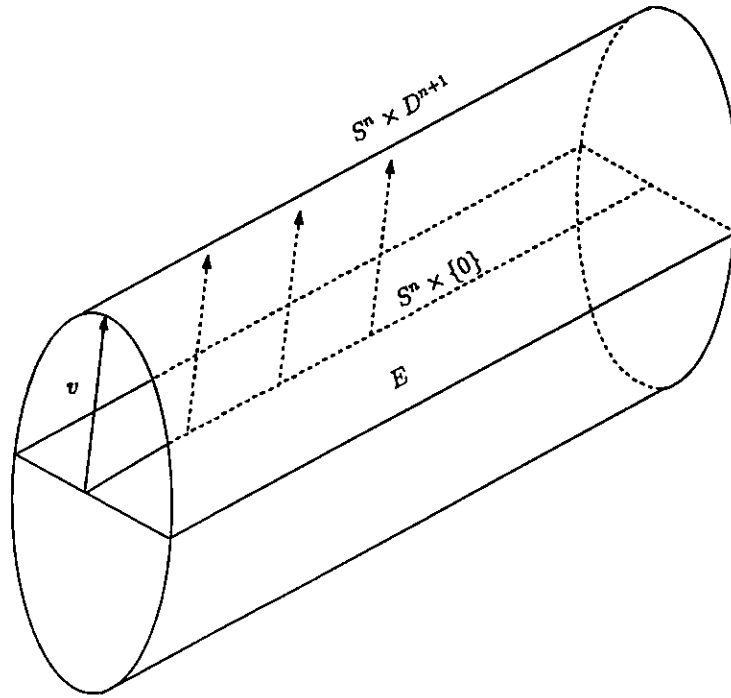


Figura 1.3: Seção normal determinando o fibrado \mathcal{E}

$p: SO(n+1) \rightarrow S^n$ é dada por $p(B) = B \cdot e_{n+1}$, temos que $p \circ \bar{v} = v|_{U'_2}$ e conseqüentemente, \bar{v} é um levantamento de v sobre U'_2 . Como o fibrado está numa forma normal, ele representa v em $\pi_n(SO(n+1), SO(n))$.

Agora, observamos que $h(x) = [u_1(x), \dots, u_n(x)]$ determina uma base da fibra de \mathcal{E} sobre $x \in U'_2$ e conseqüentemente, h fornece uma trivialização de \mathcal{E} sobre U'_2 . Como $v(x) = e_{n+1}$ sobre U_1 , a trivialização de \mathcal{E} sobre U_1 é constante, e a aplicação característica χ (transformação de coordenadas) de \mathcal{E} coincide com $h|_{\partial U'_2}: S^{n-1} \rightarrow SO(n)$. Desde que $v(x) = e_{n+1}$ sobre $\partial U'_2$, temos

$$\partial v = \bar{v}|_{\partial U'_2} = h|_{\partial U'_2} = \chi: S^{n-1} \rightarrow SO(n) \subset SO(n+1).$$

Assim temos $\partial v = \chi$. ■

Capítulo 2

Sistema de invariantes de “open book” simples

Assumiremos daqui em diante que “open book” é simples e orientada, a menos que se afirme o contrário. Neste capítulo, introduziremos alguns invariantes associados a estruturas “open book”, que serão utilizados na classificação, e analisaremos as suas propriedades. Os invariantes a serem analisados são invariantes associados ao mergulho orientado de uma $2n$ -variedade $(n-1)$ -conexa F , numa $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M . Quando F é uma página de uma estrutura “open book” sobre M , existem propriedades extras a serem analisadas.

Os invariantes próprios de F que consideramos neste trabalho são: o grupo de homologia $H_n(F)$, a forma de intersecção Q_F , e o invariante tangencial $\alpha_F : H_n(F) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$. O grupo de homologia $H_n(F)$ descreve quantas n -alças são coladas, a forma de intersecção indica onde são coladas, e o invariante tangencial descreve como são coladas.

Os invariantes associados ao mergulho orientável $F \hookrightarrow M$ são: o homomorfismo $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ induzido pela inclusão $i_F : F \rightarrow M$ e a forma de Seifert racional que iremos definir. O homomorfismo i_{F*} especifica onde são mergulhadas as n -alças de F , e a forma de Seifert especifica a torção de cada n -alça de F e seus enlaçamentos em M .

A seguir, iremos definir e analisar cada um dos invariantes, mas não discutiremos sobre $H_n(F)$ e a forma de intersecção, por serem bem conhecidos.

O invariante tangencial é definido da seguinte forma.

Definição 2.1 ([Wal62]) Cada elemento de $H_n(F)$, onde F é uma $2n$ -variedade $(n-1)$ -conexa e compacta, pode ser representado por uma n -esfera mergulhada em F , determinada unicamente a menos de isotopia, para $n \geq 4$ [Hae61, Wal62]. Definimos a aplicação $\alpha_F : H_n(F) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ de forma que para cada $\xi \in H_n(F) \cong \pi_n(F)$, $\alpha_F(\xi)$ é a aplicação característica do fibrado em discos sobre S^n associado ao fibrado normal do mergulho da n -esfera que representa o elemento ξ . A aplicação α_F é denominada *invariante tangencial* de F . Quando $n = 3$, temos que $\pi_{n-1}(SO(n)) = 0$ pelo fato de recobrimento universal do $SO(3) \cong \mathbf{R}P^3$ ser S^3 , o que permite definir α_F como sendo a aplicação nula. Assim, o invariante tangencial de F está definido para $n \geq 3$.

Observação 2.2 O invariante tangencial no caso acima satisfaz a regra de soma dada por

$$\alpha_F(\xi + \zeta) = \alpha_F(\xi) + \alpha_F(\zeta) + Q_F(\xi, \zeta)\partial t_n,$$

onde $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo do Lema 1.14, t_n é o gerador de $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ representado pela aplicação identidade $S^n \rightarrow S^n$, e Q_F é a forma de intersecção de F (veja [Wal62] ou [Wal63]). Logo, temos as seguintes propriedades.

1. $\alpha_F(0) = 0$.

Considerando $\zeta = 0$ na formula da soma acima, temos

$$\alpha_F(\xi) = \alpha_F(\xi) + \alpha_F(0) + Q_F(\xi, 0)\partial t_n.$$

Como $Q_F(\xi, 0) = 0$, temos que $\alpha_F(0) = 0$.

2. $\alpha_F(-\xi) = -\alpha_F(\xi) + Q_G(\xi, \xi)\partial t_n$.

Agora, seja $\zeta = -\xi$, então temos $\alpha_F(\xi - \xi) = \alpha_F(\xi) + \alpha_F(-\xi) + Q_F(\xi, -\xi)\partial t_n$. Daí, $0 = \alpha_F(0) = \alpha_F(\xi) + \alpha(-\xi) - Q_F(\xi, \xi)\partial t_n$. Logo $\alpha_F(-\xi) = -\alpha_F(\xi) + Q_F(\xi, \xi)\partial t_n \in \pi_{n-1}(SO(n))$.

Assim, o valor de $\alpha_F(\xi)$ e a forma de intersecção determinam os valores de α_F sobre múltiplos de ξ e conseqüentemente, α_F é determinado unicamente pelos seus valores sobre elementos da base de $H_n(F)$, para cada forma de intersecção fixada.

Dada uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 2$, definimos o invariante tangencial $\alpha_M : H_n(M) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1))$ de maneira análoga a α_F , desde que cada elemento de $H_n(M) \cong \pi_n(M)$ pode ser representado por uma n -esfera mergulhada que é determinada unicamente a menos de isotopia, para $n \geq 2$ [Hae61, Wal63].

Observação 2.3 O invariante α_M no caso acima sempre é um homomorfismo de grupos [Wal67].

Observação 2.4 Quando $i_F : F \hookrightarrow M$ é um mergulho, a vizinhança tubular de F em M é difeomorfa a $F \times [0, 1]$ e a relação entre os invariantes tangenciais é dada por $i_* \circ \alpha_F = \alpha_M \circ i_{F*}$, onde $i_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1))$ é o homomorfismo induzido pela inclusão natural de $SO(n)$ em $SO(n+1)$.

Agora, analisaremos os invariantes associados ao mergulho de F em M e verificaremos suas propriedades. Existem propriedades que valem para todo mergulho, assim como aquelas que valem somente quando F é uma página de alguma “open book”. Isto será especificado no enunciado dos resultados.

Lema 2.5 Se F denota a página típica de uma “open book” sobre M , então o homomorfismo $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ induzido pela inclusão $i_F : F \rightarrow M$ é sobrejetora.

Demonstração: Considere a seqüência exata

$$H_n(F) \xrightarrow{i_{F*}} H_n(M) \rightarrow H_n(M, F) \quad (2.1)$$

do par (M, F) . Usando a excisão, temos

$$H_n(M, F) \cong H_n(M, N(F)) \cong H_n(\overline{M - N(F)}, \partial N(F)),$$

onde $N(F) \cong F \times [0, 1]$ é a vizinhança tubular de F em M .

Como uma “open book” pode ser construída pela construção “open book” (veja Definição 1.7), temos que $\overline{M - N(F)} \cong F \times [0, 1]$. Assim, pela dualidade de Poincaré-Lefschetz, temos

$$\begin{aligned} H_n(\overline{M - N(F)}, \partial N(F)) &\cong H^{n+1}(\overline{M - N(F)}) \\ &\cong H^{n+1}(F \times [0, 1]) \\ &\cong H^{n+1}(F) = 0, \end{aligned}$$

pois F é homotopicamente equivalente a um buquê de n -esferas pela Proposição 1.3 por ter $n \geq 3$. Para $n = 1, 2$, observemos que $H^{n+1}(F) = 0$ pela demonstração da Proposição 1.3. Logo a seqüência exata (2.1) implica que i_{F*} é sobrejetora. ■

Para definirmos a forma de Seifert racional, precisamos do conceito de número de enlaçamento racional.

Sejam a e b dois n -ciclos disjuntos numa $(2n+1)$ -variedade orientada M , $(n-1)$ -conexa e fechada, representando elementos de torção em $H_n(M)$. Então ra se anula em $H_n(M)$ e borda alguma $(n+1)$ -cadeia A em M para algum inteiro $r > 0$. Definimos o *número de enlaçamento* de a com b em M como sendo $\text{lk}(a, b) = (1/r)\langle A, b \rangle \in \mathbb{Q}$, onde $\langle A, b \rangle$ representa o número de intersecção de A com b em M . A aplicação lk é denominada “linking pairing”. Para ver que isto está bem definida, note inicialmente que existe um inteiro $s \neq 0$ tal que $sb = 0$. Se A' é uma outra $(n+1)$ -cadeia em M tal que $\partial A' = ra$, então $A \cup (-A')$ é um $(n+1)$ -ciclo em M e

$$0 = \langle A \cup (-A'), 0 \rangle = \langle A \cup (-A'), sb \rangle = s \langle A \cup (-A'), b \rangle.$$

Como $s \neq 0$, temos que $\langle A \cup (-A'), b \rangle = 0$. Mas $a \cap b = \emptyset$ e $\partial A = \partial A' = ra$. Então $0 = \langle A \cup (-A'), b \rangle = \langle A, b \rangle - \langle A', b \rangle$ e conseqüentemente $\text{lk}(a, b)$ não depende da escolha de A . Observemos que o “linking pairing” $\text{lk}(\cdot, \cdot)$ é uma forma $(-1)^{n+1}$ -simétrica, i.e. $\text{lk}(a, b) = (-1)^{n+1} \text{lk}(b, a)$, o que pode ser verificado através do argumento de Wall [Wal67].

Seja $F \subset M$ um mergulho de uma $2n$ -variedade compacta e orientada numa $(2n+1)$ -variedade orientada e fechada M . Como em [Ker65], definimos $\nu^+ : F \rightarrow M - \text{Int } F$ (ou $\nu^- : F \rightarrow M - \text{Int } F$) como sendo uma pequena translação na direção normal positiva (respectivamente negativa) relativamente a F , onde $\text{Int } F$ denota o interior de F . Então ν_*^+ e ν_*^- são homomorfismos de $H_n(F)$ em $H_n(M - \text{Int } F)$.

No caso em que F é uma página de uma “open book”, ν_*^+ e ν_*^- são isomorfismos.

Para definirmos uma generalização da forma de Seifert usual (veja [Dur74, Kat74, Kau74]) para uma “open book” mais geral, precisamos do seguinte conceito.

Definição 2.6 ([KaM79, p. 125]) Seja G um \mathbb{Z} -módulo livre finitamente gerado e $H \subset G$

um submódulo. Definimos

$$R(H) = \{g \in G : rg \in H \text{ para algum } r \in \mathbf{Z} - \{0\}\}$$

e chamamos de *fecho radical* de H em G . Note que $R(H)$ é o menor somando direto de G contendo H .

Definição 2.7 Seja $i_{F^*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ o homomorfismo induzido pela inclusão $i_F : F \hookrightarrow M$ de uma $2n$ -variedade compacta e orientada F mergulhada numa $(2n + 1)$ -variedade M , orientada e fechada. Notemos que $i_{F^*}|_{R(\ker i_{F^*})} : R(\ker i_{F^*}) \rightarrow \tau H_n(M)$ é sobrejetora, onde $\tau H_n(M)$ é a parte de torsão de $H_n(M)$. Se $\xi, \zeta \in R(\ker i_{F^*}) \subset H_n(F)$ são representados pelos n -ciclos a e b em F respectivamente, então $\nu^+(\xi)$ e ζ são representados pelos n -ciclos disjuntos $\nu^+(a)$ e b em M respectivamente que representam elementos de $\tau H_n(M)$. Definimos a forma bilinear

$$\Gamma_F : R(\ker i_{F^*}) \times R(\ker i_{F^*}) \rightarrow \mathbf{Q}$$

por $\Gamma_F(\xi, \zeta) = \text{lk}(\nu^+(a), b)$, onde $\nu^+(a)$ e b são considerados como n -ciclos em M . Esta aplicação é denominada *forma de Seifert racional*, ou simplesmente de forma de Seifert.

Para que a forma de Seifert esteja bem definida, é necessário que ela não dependa da escolha dos n -ciclos que representam as classes de homologia em $R(\ker i_{F^*}) \subset H_n(F)$.

Suponhamos que a e a' são n -ciclos representando os mesmos elementos em $H_n(F)$. Então a e a' são homólogos em F e existe uma $(n + 1)$ -cadeia C em F tal que $\partial C = a - a'$. Agora suponhamos que $r\nu^+(a)$ borda uma $(n + 1)$ -cadeia A em M . Então $r\nu^+(a')$ borda $A - r\nu^+(C)$ e $\text{lk}(\nu^+(a'), b) = (1/r)\langle A - r\nu^+(C), b \rangle$. Como $C \subset F$, temos que $\nu^+(C)$ não intercepta b . Logo $\langle A - r\nu^+(C), b \rangle = \langle A, b \rangle$ e conseqüentemente, $\text{lk}(\nu^+(a), b) = \text{lk}(\nu^+(a'), b)$.

Agora suponhamos que b e b' são n -ciclos em F representando o mesmo elemento em $H_n(F)$. Então b e b' são homólogos em F e existe uma $(n + 1)$ -cadeia D em F tal que $\partial D = b - b'$. Suponhamos que $r\nu^+(a)$ borda uma $(n + 1)$ -cadeia A em M . Escolhendo A apropriadamente, podemos assumir que $A \cap D$ é uma 1-cadeia em F tal que $\partial(A \cap D) = A \cap b - A \cap b'$. Então $\langle A, b \rangle = \langle A, b' \rangle$ em M e conseqüentemente, temos $\text{lk}(\nu^+(a), b) = \text{lk}(\nu^+(a), b')$. Assim, Γ_F não depende da escolha de representantes dos

elementos de $R(\ker i_{F*})$, o que garante que ela está bem definida. Como $\text{lk}(\cdot, \cdot)$ é bilinear $(-1)^{n+1}$ -simétrica, a forma de Seifert também é bilinear $(-1)^{n+1}$ -simétrica.

Observação 2.8 No caso de M ser a $(2n + 1)$ -esfera, temos que $R(\ker i_{F*}) = H_n(F)$ e $\Gamma_F : H_n(F) \times H_n(F) \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Logo, a forma de Seifert racional se reduz à forma de Seifert clássica, e a definição acima é uma generalização para o caso não necessariamente esférico.

Como ν_*^+ e ν_*^- aplicam $R(\ker i_{F*})$ em $R(\ker(i_{M-\text{Int } F})_*)$, onde $i_{M-\text{Int } F} : M - \text{Int } F \rightarrow M$ é a inclusão, podemos provar várias generalizações dos resultados de [Kau74]. Uma delas é a generalização de [Kau74, Lemma 2.1] como segue.

Lema 2.9 *Seja Γ_F a forma de Seifert racional de uma $2n$ -variedade orientada F , mergulhada numa variedade orientada e fechada M de dimensão $2n + 1$. Então*

$$\Gamma_F(\xi, \zeta) + (-1)^n \Gamma_F(\zeta, \xi) = (-1)^n Q_F(\xi, \zeta)$$

para todo $\xi, \zeta \in R(\ker i_{F*})$, onde Q_F denota a forma de intersecção em $H_n(F)$.

Demonstração: A demonstração é a mesma de [Kau74], com pequenos ajustes para o caso em que F não é necessariamente a página de uma “open book”.

Suponhamos que ξ e ζ são representados por n -ciclos a e b em F respectivamente, transversais entre si. Agora, consideremos $a \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, onde $[-\varepsilon, \varepsilon]$ denota um pequeno “intervalo” na direção normal de F orientada de forma compatível com as orientações de F e M (veja Figura 2.1). Então temos que

$$Q_F(a, b) = \langle a, b \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle = (-1)^n \langle a \times [-\varepsilon, \varepsilon], b \rangle,$$

onde Q_F é a forma de intersecção de F e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a intersecção em M . Logo

$$\begin{aligned} Q_F(\xi, \zeta) &= (-1)^n \langle a \times [-\varepsilon, \varepsilon], b \rangle \\ &= (-1)^n \text{lk}(\partial(a \times [-\varepsilon, \varepsilon]), b) \\ &= (-1)^n \text{lk}(a \times \{\varepsilon\} - a \times \{-\varepsilon\}, b) \\ &= (-1)^n \text{lk}(\nu^+(a) + \nu^-(-a), b) \\ &= (-1)^n (\text{lk}(\nu^+(a), b) - \text{lk}(\nu^-(-a), b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^n (\text{lk}(\nu^+(a), b) - \text{lk}(a, \nu^+(b))) \\
 &= (-1)^n (\text{lk}(\nu^+(a), b) - (-1)^{n+1} \text{lk}(\nu^+(b), a)) \\
 &= (-1)^n (\Gamma_F(\xi, \zeta) - (-1)^{n+1} \Gamma_F(\zeta, \xi)) \\
 &= (-1)^n (\Gamma_F(\xi, \zeta) + (-1)^n \Gamma_F(\zeta, \xi)).
 \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do Lema 2.9. ■

A diferença de sinal na identidade do lema acima com o [Kau74, Lemma 2.1] é devido à diferença de definição do número de enlaçamento utilizado neste trabalho [Wal67] e a definição adotada pelo Kauffman [Kau74].

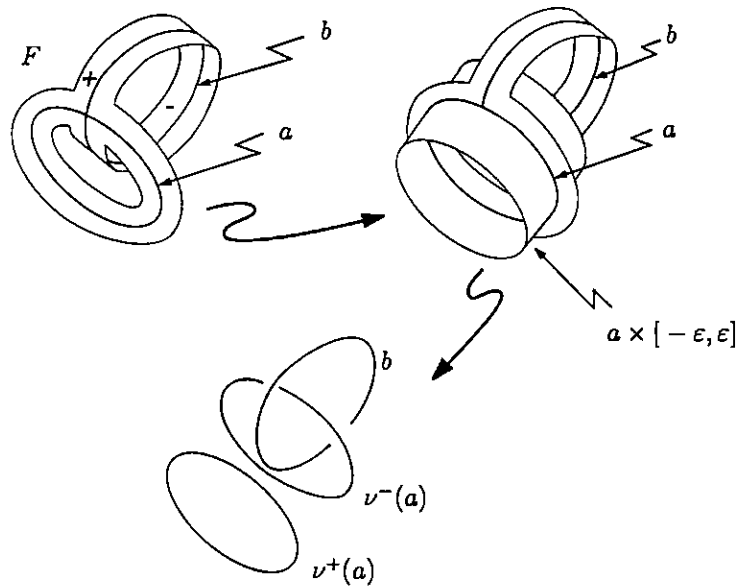


Figura 2.1: Relação entre Γ_F e a forma de intersecção de F

Lema 2.10 *Se Γ_F é a forma de Seifert racional de uma página de uma “open book”, então temos que $\det \Gamma_F = \pm |\tau H_n(M)|^{-1}$, onde $\det \Gamma_F$ é o determinante da forma de Seifert racional Γ_F definida como determinante da matriz associada e $|\tau H_n(M)|$ denota a ordem do grupo $\tau H_n(M)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.6 que provaremos no capítulo 4,

$$\det \bar{\nu}_*^+ = \pm |\tau H_n(M)| \det \Gamma_F,$$

onde

$$\tilde{\nu}_*^+ = \nu_*^+|_{R(\ker i_{F_*})} : R(\ker i_{F_*}) \rightarrow R(\ker(i_{M-\text{Int } F})_*).$$

Como ν_*^+ é um isomorfismo para o caso de “open book” e $(\nu_*^+)^{-1}(R(\ker(i_{M-\text{Int } F})_*)) = R(\ker i_{F_*})$, $\tilde{\nu}_*^+$ também é um isomorfismo. Isto conclui a demonstração. ■

Outras propriedades da forma de Seifert racional envolvem os invariantes de M definidos em [Wal67] que são mais sofisticados do que foram usados no Lema 2.10, e requerem alguns conceitos.

Definição 2.11 Para $n \geq 1$, definimos a forma bilinear $b_M : \tau H_n(M) \times \tau H_n(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ por $b_M(\xi, \zeta) = \text{lk}(a, c) \pmod{1}$, onde a e c são n -ciclos disjuntos em M representando as classes de homologia $\xi, \zeta \in \tau H_n(M)$ respectivamente [Wal67]. Então b_M é uma forma bilinear bem definida.

Observação 2.12 Para n ímpar $n \geq 5, n \neq 7$, temos que $\text{Im } \partial \cong \mathbb{Z}_2$ pela Proposição 1.14, onde $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo associado à fibração $SO(n) \xrightarrow{i} SO(n+1) \xrightarrow{p} S^n$. Como a seqüência exata de homotopia para estes valores de n tem a forma

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_*} 0, & n \equiv 1 \pmod{8}, \\ \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{p_*} 0, & n \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}, \end{cases}$$

(veja [Ker60] e [Wal65]), temos uma extensão bem definida do isomorfismo natural $\text{Im } \partial \cong \mathbb{Z}_2$ que denotamos por $\phi : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tal que $(\phi, i_*) : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \pi_{n-1}(SO(n+1))$ é um isomorfismo (veja [Wal65]). Este epimorfismo ϕ tem aplicações importantes.

Definição 2.13 Para n ímpar, $n \geq 5, n \neq 7$, definimos a forma quadrática

$$q_M : \tau H_n(M) \rightarrow \mathbb{Q}/2\mathbb{Z},$$

inicialmente definida em [Wal67], como segue.

Seja a uma representação esférica de $\xi \in \tau H_n(M)$ determinada unicamente a menos de isotopia e consideremos a vizinhança tubular $N(a)$. Então $\partial N(a)$ é um S^n -fibrado sobre $a \cong S^n$ e uma vizinhança tubular E de uma seção de $\partial N(a) \rightarrow a$ é um D^n -fibrado sobre a .

Denotamos a sua aplicação característica por $\alpha_1 \in \pi_{n-1}(SO(n))$. Para n acima, podemos ajustar esta seção de forma que $\phi(\alpha_1) = 0$ pelo Lema 1.17, onde $\phi : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é o epimorfismo da Observação 2.12. Definimos o $q_M(\xi)$ como sendo o número de enlaçamento racional entre a e a alma de E módulo 2. Então $q_M(\xi)$ está bem definida e q_M é uma forma quadrática associada à forma bilinear $2b_M$, onde b_M é a forma bilinear da Definição 2.11, ou seja

$$q_M(\xi + \zeta) - q_M(\xi) - q_M(\zeta) \equiv 2b_M(\xi, \zeta) \pmod{2}$$

(veja [Wal67]).

A forma de Seifert racional é compatível com os invariantes de M como segue.

Lema 2.14 *Para $n \geq 2, n \neq 3, 7$, a forma de Seifert racional Γ_F satisfaz as seguintes condições.*

- (1) $\Gamma_F(\xi, \zeta) \equiv b_M(i_{F^*}(\xi), i_{F^*}(\zeta)) \pmod{1}$ para todo $\xi, \zeta \in R(\ker i_{F^*})$, onde $b_M : \tau H_n(M) \times \tau H_n(M) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ é a forma bilinear da Definição 2.11.
- (2) Se n for ímpar, então $\Gamma_F(\xi, \xi) \equiv q_M(i_{F^*}(\xi)) + \phi(\alpha_F(\xi)) \pmod{2}$ para todo $\xi \in R(\ker i_{F^*})$, onde $q_M : \tau H_n(M) \rightarrow \mathbf{Q}/2\mathbf{Z}$ é a forma quadrática da Definição 2.13 e $\phi : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é o epimorfismo da Observação 2.12.

Demonstração:

(1) Pela definição da forma de Seifert Γ_F e da forma bilinear b_M , temos naturalmente que

$$\Gamma_F(\xi, \zeta) \equiv b_M(i_{F^*}(\xi), i_{F^*}(\zeta)) \pmod{1}.$$

(2) Seja $a \subset F$ a representação esférica de $\xi \in R(\ker i_{F^*})$, então a translação na direção normal positiva de F determina uma seção de $\partial N(a) \rightarrow a$, onde $N(a)$ é a vizinhança tubular de a em M . Denotamos a imagem desta seção por \tilde{a} e a vizinhança tubular de \tilde{a} em $\partial N(a)$ por E . Como E é paralelo a $N(a) \cap F$, a aplicação característica α_1 de E é igual a $\alpha_F(\xi)$, onde $\alpha_F : H_n(F) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o invariante tangencial de F . Como $\Gamma_F(\xi, \xi)$ é o número de enlaçamento racional entre a e a sua translação na direção normal positiva, $\Gamma_F(\xi, \xi) \equiv q_M(i_{F^*}(\xi)) \pmod{2}$ quando $\phi(\alpha_F(\xi)) = 0$.

Quando $\phi(\alpha_F(\xi)) = \phi(\alpha_1) \neq 0$, precisamos ajustar a seção para que tenhamos $\phi(\alpha_1) = 0$. Note que as seções de $\partial N(a) \rightarrow a$ estão em correspondência biunívoca com os campos de vetores unitários normais a a . Escolhemos um campo normal que difere por t_n do campo normal de F restrito a a , onde t_n é o gerador de $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$, e denotamos a imagem da seção determinada por este novo campo de vetores por a' e a vizinhança tubular de a' em $\partial N(a)$ por E' respectivamente. Então $\partial t_n = \alpha'_1 - \alpha_1$ pelo Lema 1.17, onde α'_1 é a aplicação característica do fibrado E' . Logo, temos que $\phi(\alpha'_1) = \phi(\partial t_n) + \phi(\alpha_1) \in \mathbf{Z}_2$. Agora, observemos que $\phi|_{\text{Im } \partial} : \text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é um isomorfismo (veja Observação 2.12) e $\partial t_n \neq 0$ por ∂ ser uma aplicação não nula para nossos valores de n (veja Lema 1.14), o que implica que $\phi(\partial t_n) \neq 0$ em \mathbf{Z}_2 . Como $\phi(\alpha_1) \neq 0$ pela nossa hipótese, $\phi(\partial t_n) = \phi(\alpha_1)$ e conseqüentemente, $\phi(\alpha'_1) = 0$. Logo $q_M(i_{F_*}(\xi))$ é o número de enlaçamento de a com a' módulo 2.

Como $\text{lk}(a, a')$ e $\text{lk}(a, \bar{a}) = \pm \Gamma_F(\xi, \xi)$ difere por ± 1 , temos que

$$q_M(i_{F_*}(\xi)) \equiv (\Gamma_F(\xi, \xi) + 1) + (\phi(\alpha_F(\xi)) + 1) \pmod{2},$$

o que prova a validade de (2). ■

Definição 2.15 Seja M uma $(2n+1)$ -variedade orientada, $(n-1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$. O sistema de invariantes "open book" relativo a M é o seguinte conjunto algébrico, que denotamos por $\{G, Q_G, \alpha_G, i_G, \Gamma_G\}$:

1. um grupo abeliano livre finitamente gerado G com a forma bilinear $(-1)^n$ -simétrica $Q_G : G \times G \rightarrow \mathbf{Z}$, denominada forma de intersecção,
2. um epimorfismo $i_G : G \rightarrow H_n(M)$,
3. uma aplicação $\alpha_G : G \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$, denominada invariante tangencial, tal que

(a) o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_G} & \pi_{n-1}(SO(n)) \\ i_G \downarrow & & \downarrow i_* \\ H_n(M) & \xrightarrow{\alpha_M} & \pi_{n-1}(SO(n+1)) \end{array}$$

comuta, onde α_M é o invariante tangencial de M e i_* é o homomorfismo induzido pela inclusão natural de $SO(n)$ em $SO(n+1)$,

- (b) $p_*\alpha_G(\xi) = Q_G(\xi, \xi) \in \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ para todo $\xi \in G$, onde $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ é a projeção da fibração $SO(n-1) \rightarrow SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ como no Lema 1.15,
- (c) $\alpha_G(\xi + \zeta) = \alpha_G(\xi) + \alpha_G(\zeta) + Q_G(\xi, \zeta)\partial t_n$ para todo $\xi, \zeta \in G$, onde $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo do Lema 1.14 e t_n é o gerador de $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ induzido pela aplicação identidade de S^n ,

4. uma forma bilinear denominada forma de Seifert racional $\Gamma_G : R(\ker i_G) \times R(\ker i_G) \rightarrow \mathbf{Q}$, onde $R(\ker i_G)$ é o fecho radical de $\ker i_G$, tal que

- (a) $\det \Gamma_G = \pm |\tau H_n(M)|^{-1}$, onde $|\tau H_n(M)|$ denota a ordem da parte de torção de $H_n(M)$ e $\det \Gamma_G$ é o determinante de Γ_G ,
- (b) $\Gamma_G(\xi, \zeta) + (-1)^n \Gamma_G(\zeta, \xi) = (-1)^n Q_G(\xi, \zeta)$ para todo $\xi, \zeta \in R(\ker i_G)$,
- (c) o diagrama

$$\begin{array}{ccc} R(\ker i_G) \times R(\ker i_G) & \xrightarrow{\Gamma_G} & \mathbf{Q} \\ i_G \times i_G \downarrow & & \pi \downarrow \\ \tau H_n(M) \times \tau H_n(M) & \xrightarrow{b_M} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \end{array}$$

é comutativo, onde b_M é a forma bilinear da Definição 2.11 e π é a projeção,

- (d) para n ímpar com $n \geq 5, n \neq 7$,

$$\Gamma_G(\xi, \xi) \equiv q_M(i_G(\xi)) + \phi(\alpha_G(\xi)) \pmod{2}$$

para todo $\xi \in R(\ker i_G)$, onde q_M é a forma quadrática da Definição 2.13 e $\phi : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é o epimorfismo da Observação 2.12.

Então temos que a coleção dos invariantes $\{H_n(F), Q_F, \alpha_F, i_{F*}, \Gamma_F\}$ associados a uma estrutura “open book” sobre M com a página típica F forma um sistema de invariantes “open book” relativo a M , para $n \geq 3$, pois i_{F*} é sobrejetora pelo Lema 2.5, as propriedades de α_G são satisfeitas pela Observação 2.4, Lema 1.15 e Observação 2.2, e as propriedades da forma de Seifert racional são satisfeitas pelos Lemas 2.9, 2.10 e 2.14.

Observação 2.16 No caso de n ser par, o invariante tangencial α_G acima é unicamente determinado pela forma de intersecção Q_G , devido ao ítem 3(b) da Definição 2.15 e ao fato de $p_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ ser injetivo (veja [Ste51]), onde $p : SO(n) \rightarrow S^{n-1}$

é a projeção como no Lema 1.15. Assim, poderemos omitir o invariante tangencial α_G do sistema de invariantes no caso de n par.

Observação 2.17 No caso de M ser uma $(2n + 1)$ -esfera homotópica ($n \geq 3$), existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos sistemas de invariantes "open book" relativo a M e o conjunto de forma de Seifert unimodular, como segue.

Para verificar que o sistema de invariantes é determinado unicamente pela forma de Seifert, notemos que $i_G = 0$ e Q_G é determinada pela forma de Seifert pelo item 4(b) da Definição 2.15 e pelo fato de ter $\ker i_G = G$. Agora verifiquemos que α_G também é determinado pela forma de Seifert.

No caso de n par, Q_G (que é determinada pela forma de Seifert) determina α_G pela Observação 2.16.

Quando n é ímpar, $n = 3, 7$, temos que $\alpha_G = 0$ por ter $\pi_{n-1}(SO(n)) = 0$ (veja [Ker60]).

No caso de n ímpar, $n \neq 3, 7$, notemos que $\alpha_M = 0$ (pois $H_n(M) = 0$) e pelo item 3(a) da Definição 2.15, temos que $\text{Im } \alpha_G \subset \ker i_* = \text{Im } \partial$, onde $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo da fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$. Como a forma de Seifert determina $\phi(\alpha_G(\xi))$ para todo $\xi \in R(\ker i_G) = G$ pelo item 4(d) da Definição 2.15 e por ter $q_M = 0$ (pois $H_n(M) = 0$), e como $\phi|_{\text{Im } \partial} : \text{Im } \partial \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é um isomorfismo (veja Observação 2.12), temos que α_G é determinado pela forma de Seifert.

Agora veremos que a forma de Seifert unimodular Γ_G pode ser completada para formar um sistema de invariantes. Para isso, definimos $i_G = 0$. Como $H_n(M) = 0$, as condições da Definição 2.15 que não envolvem Q_G e α_G são satisfeitas. Agora definimos o Q_G pela fórmula do item 4(b) da Definição 2.15, observando que $R(\ker i_G) = G$. Então Q_G é uma forma $(-1)^n$ -simétrica e as condições da Definição 2.15 que não envolvem α_G são todas satisfeitas.

Finalmente, definiremos o α_G de forma coerente.

Para n par, observemos que $Q_G(\xi, \xi)$ é par por Q_G ser simétrica. Então $Q_G(\xi, \xi) \in 2\mathbf{Z} = \text{Im}(p_* \circ \partial)$ pela Observação 1.16. Por outro lado, $p_*|_{\text{Im } \partial} : \text{Im } \partial \rightarrow 2\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z} \cong \pi_{n-1}(S^{n-1})$ é um isomorfismo. Logo podemos definir $\alpha_G(\xi) = (p_*|_{\text{Im } \partial})^{-1}(Q_G(\xi, \xi))$. Como $\alpha_G(\xi) \in \text{Im } \partial = \ker i_*$, o item 3(a) da Definição 2.15 é satisfeito, e o item 3(b) da Definição 2.15 é satisfeito pela definição de α_G . Agora verificaremos a condição do

item 3(c) da Definição 2.15. Como $p_*|_{\text{Im } \partial} : \text{Im } \partial \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ é injetivo, apliquemos o p_* em ambos os lados da equação e teremos a condição equivalente

$$p_*\alpha_G(\xi + \zeta) = p_*\alpha_G(\xi) + p_*\alpha_G(\zeta) + Q_G(\xi, \zeta)p_*\partial t_n.$$

Pela definição de α_G e do fato de $p_*\circ\partial : \pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z} \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ ser a multiplicação por dois [Ste51], a condição é equivalente a

$$Q_G(\xi + \zeta, \xi + \zeta) = Q_G(\xi, \xi) + Q_G(\zeta, \zeta) + 2Q_G(\xi, \zeta),$$

o que é válido por Q_G ser simétrica para n par.

Quando $n = 3, 7$, temos que $\pi_{n-1}(SO(n)) = 0$ (veja [Ker60]) e conseqüentemente, basta definir $\alpha_G = 0$, o que satisfaz a condição do item 3(a) da Definição 2.15. Como $Q_G(\xi, \xi) = 0$ para n ímpar, o item 3(b) da Definição 2.15 é satisfeito. Como $\partial = 0$ para estes valores de n , o item 3(c) também é satisfeito.

Para n ímpar, $n \neq 3, 7$, observemos que $\phi|_{\text{Im } \partial} : \text{Im } \partial \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é um isomorfismo, onde $\phi : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ é o epimorfismo da Observação 2.12. Definimos $\alpha_G(\xi) = (\phi|_{\text{Im } \partial})^{-1}(\Gamma_G(\xi, \xi) \pmod{2})$, o que satisfaz a relação do item 4(d) da Definição 2.15 por ter $q_M = 0$. Notemos que α_G está bem definido e a condição do item 3(a) da Definição 2.15 é satisfeita por ter $\alpha_G(\xi) \in \text{Im } \partial$ e $H_n(M) = 0$. Como $p_*\circ\partial = 0$ para n ímpar e por Q_G ser anti-simétrica, a condição do item 3(b) da Definição 2.15 é satisfeita. Agora vamos verificar o item 3(c) da Definição 2.15.

Notemos que ambos os lados da equação abordada pertencem a $\text{Im } \partial$. Como $\phi|_{\text{Im } \partial}$ é um isomorfismo e $\partial t_n \equiv 1 \pmod{2}$ para estes valores de n , esta condição é equivalente a

$$\Gamma_G(\xi + \zeta, \xi + \zeta) \equiv \Gamma_G(\xi, \xi) + \Gamma_G(\zeta, \zeta) + Q_G(\xi, \zeta) \pmod{2}.$$

Por Γ_G ser bilinear e pela definição de Q_G , a equação tornará

$$\Gamma_G(\xi, \xi) + \Gamma_G(\xi, \zeta) + \Gamma_G(\zeta, \xi) + \Gamma_G(\zeta, \zeta) \equiv \Gamma_G(\xi, \xi) + \Gamma_G(\zeta, \zeta) - \Gamma_G(\xi, \zeta) + \Gamma_G(\zeta, \xi) \pmod{2},$$

o que é verdade por ser módulo 2. Logo Γ_G se estende para um sistema de invariantes “open book”.

Assim existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos sistemas de invariantes “open book” relativo a M e o conjunto de forma de Seifert unimodular, no caso de M ser uma $(2n + 1)$ -esfera homotópica ($n \geq 3$).

A seguir, definiremos uma relação de equivalência entre dois sistemas de invariantes "open book" e também, uma equivalência entre duas "open books".

Definição 2.18 Suponha que $\{G, Q_G, \alpha_G, i_G, \Gamma_G\}$ forme um sistema de invariantes "open book" relativo a M , e $\{G', Q_{G'}, \alpha_{G'}, i_{G'}, \Gamma_{G'}\}$ forme um outro sistema de invariantes "open book" relativo à mesma variedade M . Então dizemos que os dois sistemas de invariantes são *equivalentes* quando existe um isomorfismo $\Psi : G \rightarrow G'$ mantendo todas as aplicações dos sistemas de invariantes. Isto quer dizer que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(1) Ψ é uma isometria; i.e., $Q_{G'}(\Psi(\xi), \Psi(\zeta)) = Q_G(\xi, \zeta)$ para todo $\xi, \zeta \in G$,

(2) o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Psi} & G' \\ i_G \searrow & & \swarrow i_{G'} \\ & H_n(M) & \end{array}$$

comuta,

(3) Ψ preserva o invariante tangencial; i.e., $\alpha_{G'}(\Psi(\xi)) = \alpha_G(\xi)$ para todo $\xi \in G$,

(4) Ψ preserva a forma de Seifert racional; i.e., $\Gamma_{G'}(\Psi(\xi), \Psi(\zeta)) = \Gamma_G(\xi, \zeta)$ para todo $\xi, \zeta \in R(\ker i_G)$ (notemos que $\Psi(R(\ker i_G)) = R(\ker i_{G'})$ pela condição (2)).

Definição 2.19 O conjunto das classes de equivalência dos sistemas de invariantes "open book" relativos a M será denotado por $\mathcal{A}(M)$.

Observação 2.20 No caso de M ser uma $(2n+1)$ -esfera homotópica ($n \geq 3$), o conjunto $\mathcal{A}(M)$ corresponde ao conjunto das classes de congruência das matrizes unimodulares (veja Observação 2.17). De fato, se $\{G, Q_G, \alpha_G, i_G, \Gamma_G\}$ é equivalente a $\{G', Q_{G'}, \alpha_{G'}, i_{G'}, \Gamma_{G'}\}$, então existe um isomorfismo $\Phi : G \rightarrow G'$ tal que $\Gamma_{G'}(\Phi(\xi), \Phi(\zeta)) = \Gamma_G(\xi, \zeta)$ para todo $\xi, \zeta \in G$ e conseqüentemente, Γ_G e $\Gamma_{G'}$ são congruentes.

Reciprocamente, uma congruência entre as formas de forma de Seifert fornece uma equivalência entre os sistemas de invariantes, pois o sistema de invariantes é determinado unicamente pela sua forma de Seifert (veja Observação 2.17).

Relembramos que duas subvariedades X_1 e X_2 de uma variedade diferenciável M são *ambientalmente isotópicas* se existe uma família diferenciável de difeomorfismos a um parâmetro $\Phi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$, tal que $\Phi_0 = \text{id}_M$ e $\Phi_1(X_1) = X_2$, onde id_M é a aplicação identidade de M . Seja $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ a aplicação diferenciável definida por $\Phi(x, t) = \Phi_t(x)$. Então chamamos Φ de *isotopia ambiental* de X_1 para X_2 . Dizemos que a isotopia $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ é relativa a $N \subset M$ quando $\Phi_t(x) = x$ para todo $x \in N$ e $t \in [0, 1]$.

Definição 2.21 ([Dur74]) Consideremos duas estruturas “open book” (simples) (K_j, φ_j) , $j = 1, 2$, sobre uma $(2n+1)$ -variedade M fechada. Uma *isotopia estruturada* entre (K_1, φ_1) e (K_2, φ_2) é uma isotopia ambiental Φ de K_1 para K_2 tal que $\Phi_1(K_1) = K_2$ e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M - K_1 & \xrightarrow{\Phi_1|_{M-K_1}} & M - K_2 \\ \varphi_1 \searrow & & \swarrow \varphi_2 \\ & S^1 & \end{array}$$

comuta. Quando existe uma isotopia estruturada entre (K_1, φ_1) e (K_2, φ_2) , dizemos que elas são *estruturalmente isotópicas* ou *isotópicas como “open book”*.

Observação 2.22 Se duas estruturas “open book” (K_1, φ_1) e (K_2, φ_2) sobre M são estruturalmente isotópicas pela isotopia Φ , então $\Phi_{1*} : H_n(F_1) \rightarrow H_n(F_2)$ estabelece uma equivalência de seus sistemas de invariantes (veja Definição 2.18) para $n \geq 3$, onde F_1 e F_2 são páginas típicas de (K_1, φ_1) e (K_2, φ_2) respectivamente.

Definição 2.23 Se (M, K, φ) é uma “open book”, denotaremos a classe de equivalência do sistema de invariantes associado por

$$\mathcal{S}(M, K, \varphi) = \{H_n(F), Q_F, \alpha_F, i_{F*}, \Gamma_F\},$$

que representa um elemento de $\mathcal{A}(M)$, onde F é a página típica da (M, K, φ) .

Quando M está óbvia segundo o contexto, o sistema de invariantes poderá ser denotado também por $\mathcal{S}(K, \varphi)$.

Observemos que a aplicação

$$\mathcal{S} : \{\text{estruturas “open book” simples sobre } M\} / \sim \rightarrow \mathcal{A}(M)$$

é uma aplicação bem definida, onde “ \sim ” denota a equivalência pela isotopia estruturada.

Capítulo 3

Critério de isotopia

Neste capítulo, demonstraremos que duas “open books” com sistemas de invariantes equivalentes são estruturalmente isotópicas.

No caso de estruturas “open book” sobre esferas, Durfee [Dur74] e Kato [Kat74] provaram para $n \geq 3$ que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das classes de isotopia de nós fibrados (estruturas “open book”) em S^{2n+1} e o conjunto das classes de congruência das matrizes unimodulares (sistemas de invariantes), obtida pela associação de nó fibrado com o seu matriz de Seifert.

Note que, para $n = 2$, a forma de Seifert não é suficiente para classificar os nós fibrados de forma completa [Sae87].

Nosso objetivo neste capítulo é obter um critério de isotopia para estruturas “open book” sobre uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M que não é necessariamente uma esfera, para $n \geq 4, n \neq 7$, ou sobre uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa para $n = 3, 7$. Observemos que uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M é uma *esfera homológica racional* quando $H_{n+1}(M) = 0$.

O nosso critério de isotopia é enunciado como segue.

Teorema 3.1 *Seja M uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 4, n \neq 7$, ou uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa com $n = 3, 7$. Se duas estruturas “open book” sobre M possuem os sistemas de invariantes equivalentes, então elas são estruturalmente isotópicas.*

A demonstração é longa e requer várias etapas, que serão enunciadas e provadas na forma de lemas.

Lema 3.2 *Seja M uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 4, n \neq 7$, ou uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa com $n = 3, 7$. Se duas estruturas “open book” sobre M possuem os sistemas de invariantes equivalentes, então suas páginas típicas são isotópicas em M por uma isotopia que preserva as orientações delas.*

Demonstração: Sejam F e F' as páginas típicas de duas estruturas “open book” que apresentam sistemas de invariantes equivalentes. Denotamos a forma de Seifert, a forma de intersecção e o invariante tangencial de “open book” associados a F por Γ_F, Q_F e α_F respectivamente, e associados a F' por $\Gamma_{F'}, Q_{F'}$ e $\alpha_{F'}$ respectivamente. Suponhamos que $\Psi : H_n(F) \rightarrow H_n(F')$ é um isomorfismo que estabelece a equivalência entre os dois sistemas de invariantes.

Decompomos $H_n(F)$ como sendo $H_n(F) = R(\ker i_{F*}) \oplus A$, onde $A \cong H_n(F)/R(\ker i_{F*})$, e tomemos uma base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de $H_n(F)$ associada a esta decomposição de forma que $\{e_1, \dots, e_s\}, s \leq r$, forma uma base de A e $\{e_{s+1}, \dots, e_r\}$ forma uma base de $R(\ker i_{F*})$. Tomemos uma base de $H_n(F')$ como sendo $\{e'_1 = \Psi(e_1), \dots, e'_r = \Psi(e_r)\}$.

Usando a Observação 1.4, efetuamos as decomposições em alças $F = D_1^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$ e $F' = D_2^{2n} \cup h'_1 \cup \dots \cup h'_r$ de F e F' respectivamente em M , associadas com as bases acima, onde h_1, \dots, h_r e h'_1, \dots, h'_r são n -alças coladas à 0-alça D_1^{2n} e D_2^{2n} respectivamente de forma simultânea (veja [Sma62]). Denotamos o n -disco que representa a alma de h_i e h'_i por c_i e c'_i respectivamente. Nas decomposições acima, podemos assumir que as 0-alças D_1^{2n} e D_2^{2n} coincidem, incluindo as suas orientações e denotamos ambos por D^{2n} .

Desde que ∂c_i é uma $(n-1)$ -esfera mergulhada em ∂D^{2n} que é uma $(2n-1)$ -esfera com $n > 2$, ele borda um n -disco em ∂D^{2n} por [Hae61]. Empurrando o interior deste n -disco para o interior de D^{2n} , podemos assumir que ∂c_i borda um n -disco em D^{2n} cuja intersecção com ∂D^{2n} é exatamente ∂c_i . Grudando este disco a c_i ao longo de seus bordos e suavizando, obtemos uma n -esfera mergulhada $\bar{c}_i \subset F$ representando a classe de homologia $e_i \in H_n(F)$. Usando o mesmo argumento, obtemos uma n -esfera mergulhada $\bar{c}'_i \subset F'$ representando o elemento $e'_i \in H_n(F')$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Agora usaremos o argumento de Levine [Lev70] para concluir que os links ordenados $\{\partial c_1, \dots, \partial c_r\}$ e $\{\partial c'_1, \dots, \partial c'_r\}$ são isotópicos em ∂D^{2n} como segue. Temos $\text{lk}(\partial c_i, \partial c_j) = Q_F(e_i, e_j)$ e $\text{lk}(\partial c'_i, \partial c'_j) = Q_{F'}(e'_i, e'_j)$ ($i \neq j$), onde lk denota o número de enlaçamento em ∂D^{2n} . Como Ψ preserva as formas de intersecção, temos que $Q_F(e_i, e_j) = Q_{F'}(\Psi(e_i), \Psi(e_j)) = Q_{F'}(e'_i, e'_j)$. Logo $\text{lk}(\partial c_i, \partial c_j) = \text{lk}(\partial c'_i, \partial c'_j)$ para todo $i \neq j$. Mas temos $n > 2$, o que implica que $\{\partial c_1, \dots, \partial c_r\}$ e $\{\partial c'_1, \dots, \partial c'_r\}$ são links isotópicos em ∂D^{2n} . Portanto, assumiremos que $\partial c_i = \partial c'_i$ para todo i .

Antes de continuar a demonstração, precisamos do resultado abaixo.

Lema 3.3 *Existe uma isotopia ambiental de M relativa a D^{2n} , levando c_k a c'_k para todo $k = 1, \dots, r$.*

Demonstração: A isotopia das almas das alças é obtida por indução sobre k .

Suponhamos que c_i é isotópica a c'_i em $M - \text{Int } D^{2n}$ relativamente aos seus bordos para $i = 1, \dots, k-1$. Assim, assumiremos que $c_i = c'_i$ para todo $i < k$. Além disso, podemos assumir que $c_k \cap c'_k = \partial c_k = \partial c'_k$. Estamos tentando mostrar que existe uma isotopia de c_k para c'_k relativa a $D^{2n} \cup c_1 \cup \dots \cup c_{k-1}$.

Inicialmente, observemos que \bar{c}_k e \bar{c}'_k representam a mesma classe de homologia em $H_n(M)$. Assim, $c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k)$ representa uma classe que se anula em $\pi_n(M - \text{Int } D^{2n}) \cong \pi_n(M) \cong H_n(M)$ e conseqüentemente, c_k e c'_k são homotópicos relativamente ao bordo em $M - \text{Int } D^{2n}$. Pelo “engulfing theorem” [HZ66], podemos assumir que $c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k)$ está contido em vizinhança tubular de um ponto. Desta forma, $c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k)$ poderá ser pensado como uma n -esfera mergulhada num $(2n+1)$ -disco contido em $M - \text{Int } D^{2n}$, $n \geq 2$, o que implica que $c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k)$ borda um $(n+1)$ -disco D'_k mergulhado em $M - \text{Int } D^{2n}$.

Através de uma isotopia relativa ao bordo, podemos modificar D'_k de forma que ele intercepta $c_1 \cup \dots \cup c_{k-1}$ transversalmente em um número finito de pontos. Como D'_k é um disco com bordo $c_k \cup -c'_k$, podemos construir uma isotopia $H : D^n \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que

$$\begin{cases} H(D^n \times [0, 1]) = D'_k, \\ H(D^n \times \{0\}) = c_k, \\ H(D^n \times \{1\}) = c'_k, \\ H(x, t) = H(x, 0) \text{ para todo } (x, t) \in \partial D^n \times [0, 1], \end{cases}$$

e $H|_{\text{Int } D^n \times [0,1]} : \text{Int } D^n \times [0,1] \rightarrow M$ é um mergulho.

Modificando H , se necessário, podemos supor que para cada t , $H(D^n \times \{t\})$ intercepta $\cup_{i < k} c_i$ no máximo em um único ponto (veja Figura 3.1). Além disso, podemos modificar de forma que a intersecção de $H(D^n \times \{t\})$ com $\cup_{i < k, i \leq s} c_i$ ocorre apenas para $t \in (0, 1/2)$ e a intersecção com $\cup_{s < i < k} c_i$ ocorre apenas para $t \in (1/2, 1)$. Enumeramos os valores t tais que $H(D^n \times \{t\}) \cap (\cup_{i < k} c_i) \neq \emptyset$ de forma que $0 < t_1 < \dots < t_p < 1/2 < t_{p+1} < \dots < t_q < 1$.

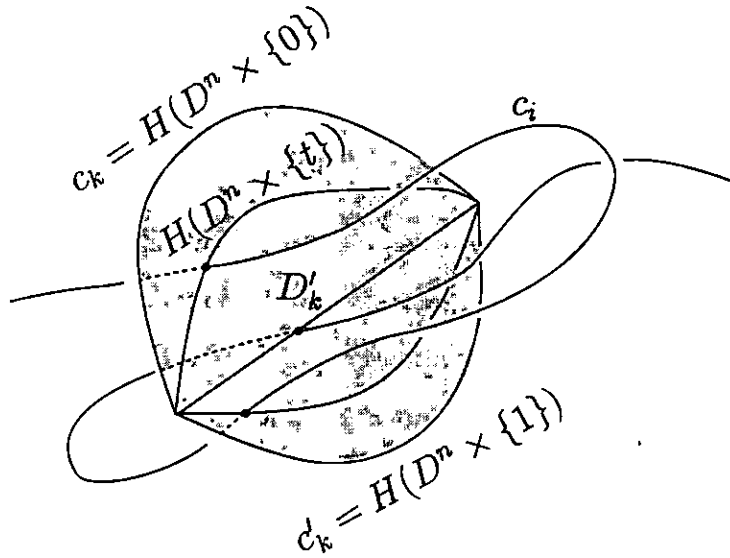


Figura 3.1: Isotopia inicial de c_k para c'_k

Para $n = 3, 7$, estamos assumindo que M é uma $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa e não precisaremos analisar o caso de $i \leq s$. Para outros casos, precisaremos do seguinte resultado.

Lema 3.4 Para $n \geq 4, n \neq 7$, podemos modificar H acima de forma que $H(D^n \times I)$ não intercepta c_i para $i < k, i \leq s$.

Demonstração: Como $i \leq s$, e_i é um elemento da base de A . Logo, $i_{F^*}(e_i)$ é um elemento primitivo de $H_n(M)$, pois $i_{F^*}|_A : A \rightarrow H_n(M)/\tau H_n(M)$ é um isomorfismo pelo Lema 2.5, onde $\tau H_n(M)$ é a parte de torção de $H_n(M)$ e $H_n(M)/\tau H_n(M)$ é a parte livre de $H_n(M)$. Conseqüentemente, pela dualidade de Poincaré, existe $\hat{e}_i \in H_{n+1}(M)$, $1 \leq i \leq s$, tal que $Q_M(\hat{e}_i, i_{F^*}(e_j)) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$), onde $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$, e Q_M denota

a forma de intersecção de M . Como $n \geq 4$, temos que o homomorfismo de Hurewicz $\pi_{n+1}(M) \rightarrow H_{n+1}(M)$ é sobrejetora (veja [Hu59, Chapter X, Theorem 8.1]) e podemos representar \hat{e}_i por uma $(n + 1)$ -esfera mergulhada \hat{c}_i em M [Wal63, Hae61]. Além disso, como $H_n(M - D^{2n}) \cong H_n(M)$ pelo isomorfismo induzido pela aplicação de inclusão, tal \hat{c}_i pode ser escolhida em $M - D^{2n}$, e usando o truque de Whitney [Whi44, Mil65], podemos supor que $\hat{c}_i \cap c_j = \emptyset$ para $i \neq j$ ($1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$) e \hat{c}_i intercepta transversalmente a c_i em um único ponto.

Para cada l com $1 \leq l \leq p$, seja γ_l uma curva mergulhada em c_i que liga o ponto $H(D^n \times \{t_l\}) \cap c_i$ em $D'_k \cap c_i$ com o ponto $\hat{c}_i \cap c_i$, tal que γ_l intercepta $D'_k \cap (\cup_{i < k} c_i)$ em um único ponto do extremo de γ_l . Efetuando a soma conexa de D'_k com \hat{c}_i ao longo de γ_l , usando a orientação adequada para \hat{c}_i , podemos eliminar a intersecção de $H(D^n \times \{t_l\})$ com c_i . Usando o truque de Whitney, podemos eliminar as intersecções de c_k, c'_k com \hat{c}_i ($i < k$). Colocando \hat{c}_i na posição transversal a D'_k através de uma isotopia, podemos supor que D'_k e \hat{c}_i interceptam ao longo de alguns círculos mergulhados. Além disso, podemos assumir que estas intersecções ocorrem em $H(D^n \times (0, t_1/2))$. Como \hat{c}_i é uma $(n + 1)$ -esfera mergulhada que não intercepta $H(D^n \times [t_l - \varepsilon, t_l + \varepsilon])$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos modificar H sobre $D^n \times [t_l - \varepsilon, t_l + \varepsilon]$ de forma que $H(D^n \times [0, 1])$ é a soma conexa descrita acima (veja Figura 3.2).

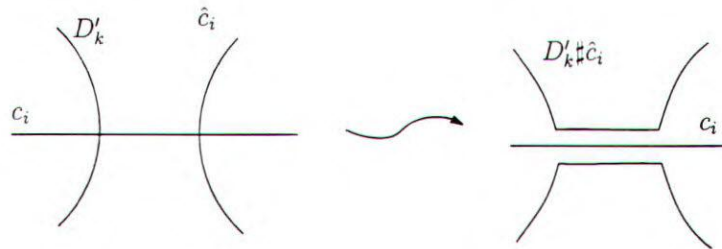


Figura 3.2: Obtendo a isotopia relativa a c_i

Repetindo este processo para $l = 1, \dots, p$, podemos eliminar a intersecção de $H(D^n \times [0, 1])$ com $c_i, i < k, i \leq s$. Isto conclui a demonstração do Lema 3.4. ■

Voltemos para a demonstração do Lema 3.3.

Caso $k \leq s$, já temos a isotopia desejada.

Caso $k > s$, temos que eliminar a intersecção de $H(D^n \times [0, 1])$ com c_j para $s < j < k$.

Para isso, notemos que $e_j, e_k \in R(\ker i_{F^*})$ e $e'_j, e'_k \in R(\ker i_{F'^*})$ pela nossa convenção de índices.

Seja $D''_k = H(D^n \times [1/2, 1])$. Então D''_k continua sendo um $(n+1)$ -disco mergulhado em $M - \text{Int } D^{2n}$. Observemos que $\hat{c}_i \cap c_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e logo $H(D^n \times [0, 1/2])$ continua não interceptando c_j . Assim, o número de intersecção de D''_k com c_j é igual ao número de intersecção de $H(D^n \times [0, 1])$ com c_j , o que é igual ao número de enlaçamentos entre $\partial H(D^n \times [0, 1]) = c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k)$ e \bar{c}_j , onde \bar{c}_j é a n -esfera mergulhada em F correspondente a c_j . Além disso, temos

$$\begin{aligned} \text{lk}(c_k \cup_{\partial c_k} (-c'_k), \bar{c}_j) &= \text{lk}(\bar{c}_k \cup (-\bar{c}'_k), \bar{c}_j) \\ &= \text{lk}(\nu^+ \bar{c}_k, \bar{c}_j) - \text{lk}(\nu'^+ \bar{c}'_k, \bar{c}'_j) \\ &= \Gamma_F(e_k, e_j) - \Gamma_{F'}(e'_k, e'_j) = 0 \end{aligned}$$

pela nossa hipótese, onde $\bar{c}'_j = \bar{c}_j$, \bar{c}_k e \bar{c}'_k são as n -esferas mergulhadas em F e F' correspondentes a c_k e c'_k respectivamente, e ν^+ e ν'^+ são pequenas translações nas direções normais positiva de F e F' respectivamente.

Como o número de intersecção algébrica de D''_k e c_j é nulo, podemos usar o truque de Whitney [Whi44, Mil65] para remover a intersecção de D''_k com c_j para todo j com $s < j < k$, através de uma isotopia de D''_k relativa ao bordo em $(M - D^{2n} \cup c_1 \cup \dots \cup c_{k-1}) \cup \partial c_k$. Como D''_k é um $(n+1)$ -disco, podemos modificar a isotopia H em $D^n \times [1/2, 1]$ de forma que $H(D^n \times [1/2, 1]) = D''_k$.

Assim, temos uma isotopia $H : D^n \times [0, 1] \rightarrow (M - D^{2n} \cup c_1 \cup \dots \cup c_{k-1}) \cup \partial c_k$ de c_k para c'_k relativa a $\partial D^n \times [0, 1]$. Então, pelo teorema da extensão de isotopia [Hir76], existe uma isotopia ambiental de M , relativa a $D^{2n} \cup c_1 \cup \dots \cup c_{k-1}$ levando c_k para c'_k .

A composição sucessiva da isotopia ambiental acima para $k = 1, \dots, r$ nos fornece a isotopia ambiental de M relativa a D^{2n} que leva c_k para c'_k .

Isto completa a demonstração do Lema 3.3. ■

Retomamos a demonstração do Lema 3.2. Agora mostraremos que existe uma isotopia que leva as alças h_i em h'_i para todo i . Como as alças são isotópicas pelo Lema 3.3, podemos assumir que as alças das alças de F e F' coincidem e para cada i , as alças h_i e h'_i são mergulhadas como sub-fibrados no mesmo fibrado em discos que é uma vizinhança

tubular $N(c_i)$ associada ao fibrado vetorial normal de c_i em M . Então h_i e h'_i são determinadas pelos seus campos (unitários) normais positivos v_i e v'_i respectivamente, ao longo de c_i em $N(c_i)$.

Notemos que dois mergulhos h_i e h'_i são isotópicos como sub-fibrados relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$, se e somente se v_i e v'_i são homotópicos relativamente a ∂c_i .

Como v_i e v'_i coincidem ao longo de ∂c_i , podemos grudá-los, obtendo um campo de vetores ϑ_i sobre a n -esfera $c_i \cup_{\partial c_i} (-c_i)$ obtida como união formal. Dada uma trivialização do D^{n+1} -fibrado $N(c_i) \cup_{\partial c_i \times D^{n+1}} (-N(c_i))$, a classe de homotopia de ϑ_i determina e é determinada unicamente por um elemento de $\pi_n(S^n)$. Mais ainda, v_i é homotópico a v'_i relativamente a ∂c_i se e somente se ϑ_i se anula como um elemento de $\pi_n(S^n)$. Como $\alpha_F(e_i) - \alpha_{F'}(e'_i)$ é a aplicação característica do sub-fibrado determinado pelo campo de vetores normais ϑ_i , temos que $\partial \vartheta_i = \alpha_F(e_i) - \alpha_{F'}(e'_i) = 0$, pelo Lema 1.17 e a nossa hipótese.

No caso de n par ($n \geq 4$), temos que $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é injetora pelo Lema 1.14. Então $\vartheta_i = 0$ e conseqüentemente, h_i e h'_i são isotópicas relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$.

No caso de n ímpar, $n \geq 3$, procedemos da seguinte forma.

Inicialmente, observamos que

$$\Gamma_F(e_i, e_i) - \Gamma_{F'}(e'_i, e'_i) = \vartheta_i \in \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

para todo $i > s$ ($e_i \in R(\ker i_{F*})$, $e'_i \in R(\ker i_{F'*})$). Para verificar isto, relembramos que $\Gamma_F(e_i, e_i)$ e $\Gamma_{F'}(e'_i, e'_i)$ são números de enlaçamento de \bar{c}_i e suas translações através de \bar{v}_i e \bar{v}'_i respectivamente, onde \bar{v}_i e \bar{v}'_i são extensões óbvias de v_i e v'_i sobre $\bar{c}_i = \bar{c}'_i$ respectivamente. Como $\vartheta_i \in \pi_n(S^n)$ é a diferença entre esses dois campos de vetores, temos que $\Gamma_F(e_i, e_i) - \Gamma_{F'}(e'_i, e'_i) = \vartheta_i$.

Como as formas de Seifert coincidem pela nossa hipótese, temos que $\vartheta_i = 0$. Assim, os campos de vetores normais v_i e v'_i são homotópicos relativamente ao bordo para $i > s$ e conseqüentemente, a alça h_i é isotópica a h'_i relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$ para estes valores de i .

Para $n = 3, 7$, estamos assumindo que M é uma esfera homológica racional, o que implica que $H_n(F) = R(\ker i_{F*})$, e não precisamos preocupar com o caso de $i \leq s$. Logo,

h_i e h'_i são isotópicas relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$.

Agora resta apenas o caso de n ímpar, $n \neq 3, 7$.

Para provarmos que a alça h_i é isotópica a h'_i relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$ no caso de $i \leq s$, lembramos que $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}_2$, para n ímpar e $n \geq 5, n \neq 7$, onde $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo (veja Lema 1.14).

Como os invariantes tangenciais de F e F' coincidem, temos que $\partial \vartheta_i = 0$. Logo $\vartheta_i \in \pi_n(S^n)$ é um múltiplo de 2. Para completar a demonstração do Lema 3.2, precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.5 *Quando n é ímpar, $n \geq 5, n \neq 7$, para cada $i \leq s$, existe uma isotopia ambiental Φ de M relativa a $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r$ tal que a diferença entre os campos associados a h_i e $\Phi_1(h_i)$, denotada por ϑ_i , representa o elemento 2 em $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$.*

Demonstração: Consideremos esferas mergulhadas c_i e \hat{c}_i representando os elementos $e_i \in H_n(M)$ e o seu dual $\hat{e}_i \in H_{n+1}(M)$ tais que $\hat{c}_i \cap c_j = \emptyset$ para $i \neq j$, $1 \leq j \leq r$ e \hat{c}_i intercepta transversalmente a c_i em um único ponto, como discutido na demonstração do Lema 3.3. Denotamos $c_i \cap \hat{c}_i = \{p\}$.

Consideremos a vizinhança tubular $N(\hat{c}_i)$ associada ao fibrado normal de \hat{c}_i em M , e a fibração $\pi : N(\hat{c}_i) \rightarrow \hat{c}_i$. Considere uma vizinhança $D_p \cong D_1^n \times D^1$ de p em \hat{c}_i . Então podemos identificar $\pi^{-1}(D_p)$ como sendo $\pi^{-1}(D_p) \cong D_1^n \times D^1 \times D_2^n \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, onde D_1^n, D^1 e D_2^n são discos unitários, e podemos supor que $\pi^{-1}(D_p) \supset c_i \cap N(\hat{c}_i)$ de forma que $\pi^{-1}(D_p) = D_1^n \times D^1 \times D_2^n$ e $c_i \cap N(\hat{c}_i) = \{0\} \times \{0\} \times D_2^n$ (veja Figura 3.3).

Agora identificamos D^n com $D_3^n \cup S^{n-1} \times [0, 1] \cup S^{n-1} \times [1, 2]$, onde D_3^n é um disco unitário e $\partial D_3^n = S^{n-1} \times \{0\}$. Definimos o mergulho

$$\eta : D^n = D_3^n \cup S^{n-1} \times [0, 1] \cup S^{n-1} \times [1, 2] \rightarrow D_1^n \times D^1 \times D_2^n = \pi^{-1}(D_p) \subset N(\hat{c}_i)$$

por

$$\begin{cases} \eta(x) = (x, 0, 0) & (x \in D_3^n), \\ \eta(x, t) = (x, 0, tx) & ((x, t) \in S^{n-1} \times [0, 1]), \\ \eta(x, t) = ((2-t)x, 0, x) & ((x, t) \in S^{n-1} \times [1, 2]) \end{cases}$$

seguida de uma suavização. Então η determina um mergulho tal que $\eta(\partial D^n) = \eta(S^{n-1} \times \{2\}) = \{0\} \times \{0\} \times \partial D_2^n$ (veja Figura 3.4).

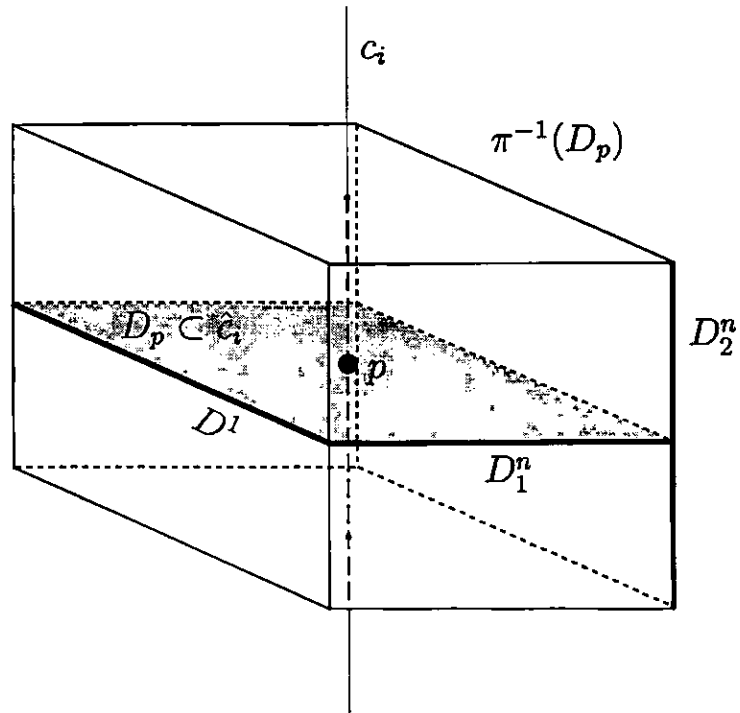


Figura 3.3: Vizinhança de $c_i \cap N(\hat{c}_i)$

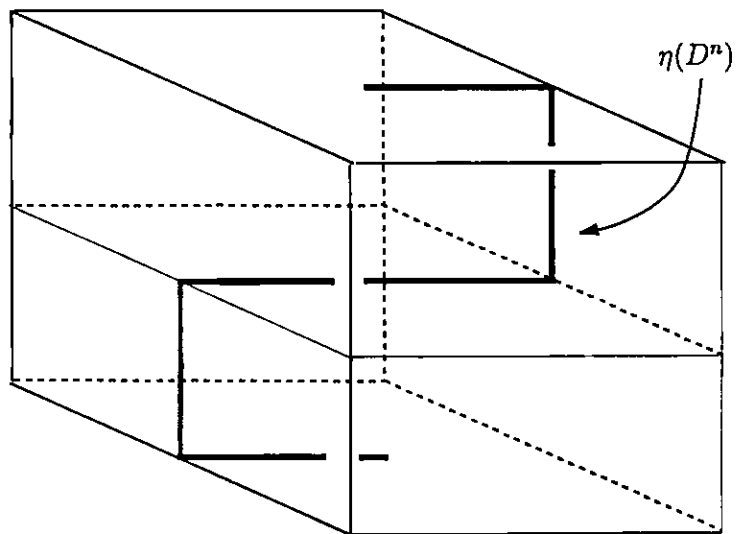


Figura 3.4: Alterando $c_i \cap N(\hat{c}_i)$

Se $d = \overline{c_i - (c_i \cap N(\hat{c}_i))} \cup \eta(D^n)$, então d é difeomorfo a c_i . Além disso c_i e d são isotópicos em M relativamente a $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r$. Assim, assumimos que d é a alma da h_i . Consideremos $\Delta = \eta(D_3^n) = D_1^n \times \{0\} \times \{0\}$, então $\Delta = d \cap \hat{c}_i \subset \hat{c}_i$.

Como Δ é um disco de codimensão 1 em $\hat{c}_i \cong S^{n+1}$, existe uma estrutura “open book” trivial (veja Definição 1.11) tal que Δ é uma página típica. Denotamos a família de difeomorfismos a um parâmetro em \hat{c}_i associada a esta “open book” por $\{\nu_t\}_{t \in [0,1]}$. Então $\nu_t : \hat{c}_i \rightarrow \hat{c}_i$ satisfaz $\nu_0 = \text{id}$ e $\nu_t|_{\partial\Delta} = \text{id}$ para todo t , onde “id” denota a aplicação identidade. Definimos $d_t = \overline{d - \Delta} \cup \nu_t(\Delta)$ para $t \in \mathbb{R}$. Então d_t determina uma isotopia de d em $M - (D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r)$ que pode ser estendida para uma isotopia ambiental $\Phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ relativa a $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r$, pelo teorema da extensão de isotopia [Hir76].

Agora, a isotopia Φ leva a alça h_i com alma d numa alça \tilde{h}_i cuja alma também é d . Consideremos a diferença entre os campos de vetores normais a d determinando \tilde{h}_i e h_i que denotaremos por θ . Então θ é trivial fora de $N(\hat{c}_i) \cap d$ e podemos supor que a diferença existe somente em $S^{n-1} \times [0, 1] = \eta(S^{n-1} \times [0, 1])$. Neste trecho, θ representa a “torção” do campo produzida pela isotopia Φ . Como Φ é obtida como extensão de d_t , observemos que Φ produz uma rotação em torno de $S^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Assim, para absorver a “torção” em $S^{n-1} \times [0, 1]$, $\theta|_{S^{n-1} \times [0,1]}$ efetua uma rotação em torno de $S^{n-1} \times \{t\}$ na medida que $t \in [0, 1]$ aumenta até completar uma volta em $t = 1$ (veja Figura 3.5).

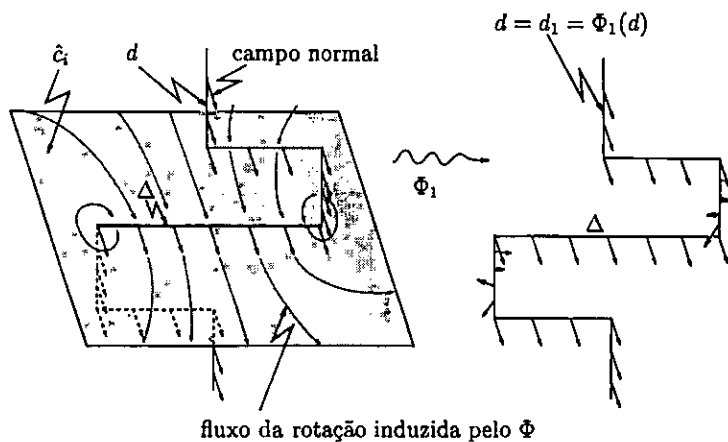


Figura 3.5: A mudança de campo normal pela ação de isotopia Φ

Assim, θ é definido como sendo

$$\theta : D_4^n \cup S^{n-1} \times [0, 1] \cup D_5^n \cong S^n \rightarrow S^n \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\}$$

por

$$\begin{cases} \theta(u) = (0, 1, 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\} & (u \in D_4^n), \\ \theta(v) = (0, 1, 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\} & (v \in D_5^n), \\ \theta(x, t) = (\text{sen}(2\pi t)x, \cos(2\pi t), 0) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\} & ((x, t) \in S^{n-1} \times [0, 1]), \end{cases}$$

onde $S^{n-1} = \partial\Delta$. Observemos que o espaço normal de $S^{n-1} = \partial\Delta \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\}$ em $\hat{c}_i \cong S^{n+1}$ no ponto x é determinado por $(x, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Agora vamos provar o seguinte lema.

Lema 3.6 *O grau da aplicação θ acima é -2 para n ímpar e 0 para n par.*

Demonstração: Notemos que o grau de uma aplicação pode ser determinado como sendo a soma dos índices dos pontos da imagem inversa de um valor regular. Consideremos o ponto

$$q = \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_n, 0, 0 \in S^n \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \{0\}.$$

Então, pela definição de θ , temos que

$$\theta^{-1}(q) = \{p_1, p_2\} \subset S^{n-1} \times [0, 1],$$

$$\text{onde } p_1 = \left(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_n, \frac{1}{4} \right) \text{ e } p_2 = \left(\underbrace{-1, 0, \dots, 0}_n, \frac{3}{4} \right).$$

Agora consideremos

$$\begin{cases} d\theta_{p_1} : T_{p_1} S^n \rightarrow T_q S^n, \\ d\theta_{p_2} : T_{p_2} S^n \rightarrow T_q S^n, \end{cases}$$

onde $d\theta$ denota a aplicação tangente de θ , e TS^n denota o espaço tangente de S^n . Podemos escolher uma orientação em S^n tal que se (x_1, \dots, x_n) e t são coordenadas de $\mathbf{R}^n \times \{0\} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbf{R} \times \{0\}$ respectivamente, então

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{ é a base orientada de } T_{p_1} S^n, \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, -\frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{ é a base orientada de } T_{p_2} S^n, \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t} \right\} \text{ é a base orientada de } T_q S^n, \end{cases}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_1}$ é normal a S^n em p_1 e p_2 . O sinal de $\frac{\partial}{\partial x_n}$ em $T_{p_2}S^n$ é devido ao fato de $(-1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1} \times \{0\}$ ser o ponto anti-podal de $(1, 0, \dots, 0) \in S^{n-1} \times \{0\}$.

Usando as bases acima, temos a forma matricial

$$d\theta_{p_1} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -2\pi \end{pmatrix},$$

onde I_{n-1} é a matriz identidade $(n-1) \times (n-1)$, e conseqüentemente, $\det d\theta_{p_1} = -2\pi$. Logo p_1 é um ponto regular de índice -1 para θ . Da mesma forma, temos a forma matricial

$$d\theta_{p_2} = \begin{pmatrix} -I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix},$$

onde I_{n-2} é a matriz identidade $(n-2) \times (n-2)$, e $\det d\theta_{p_2} = (-1)^{n-2}2\pi$. Logo p_2 é um ponto regular de índice $(-1)^{n-2}$ para θ . Como todos os pontos de $\theta^{-1}(q)$ são regulares, o grau de θ é a soma dos índices dos pontos de $\theta^{-1}(q)$ que é $(-1)^{n-2} - 1$. Assim, concluímos a demonstração do Lema 3.6. ■

Pelo lema acima temos que a isotopia construída altera o campo normal associado por -2 como elemento de $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$, o que significa que também existe uma isotopia que altera por 2 . Isto completa a demonstração do Lema 3.5. ■

Voltamos à demonstração do Lema 3.2 no caso de n ímpar, $n \neq 3, 7$.

Pelas aplicações sucessivas das isotopias relativas a $D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r$ dadas pelo Lema 3.5, podemos ajustar $v_i (1 \leq i \leq s)$ de forma que ϑ_i determinado como diferença entre v_i e v'_i corresponde ao elemento nulo de $\pi_n(S^n)$. Assim, h_i e h'_i são isotópicas em

$$\left(M - (D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{i-1} \cup h_{i+1} \cup \dots \cup h_r) \right) \cup (h_i \cap D^{2n})$$

relativamente a $h_i \cap D^{2n} = h'_i \cap D^{2n}$ para todo $i \leq s$. Isto completa a demonstração do Lema 3.2. ■

Observação 3.7 Na demonstração do Lema 3.2, F e F' não precisam ser páginas de “open book”, desde que sejam homotopicamente equivalentes ao buquê de esferas de dimensão n , e i_{F^*} e $i_{F'^*}$ sejam sobrejetoras. Assim, o lema fornece um critério de isotopia

de dois mergulhos orientados de $2n$ -variedades homotopicamente equivalentes ao buquê de esferas de dimensão n numa $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada, tal que as aplicações de inclusões induzem epimorfismos no nível de homologia.

Lema 3.8 *Duas estruturas “open book” sobre M com páginas típicas isotópicas são estruturalmente isotópicas para $n \geq 3$.*

Demonstração: O argumento de Durfee [Dur74] para nós fibrados simples sobre S^{2n+1} funciona sem problemas para este caso. Devido à importância da sua técnica, repetimos a sua demonstração. Pela hipótese, podemos assumir que as páginas típicas F e F' de duas estruturas “open book” coincidem. Então as “bindings” coincidem e será denotada por K .

Consideremos $E = \overline{M - N(K)}$, onde $N(K)$ é a vizinhança tubular de K em M como na Definição 1.1, e sejam $\varphi_1 : E \rightarrow S^1$ e $\varphi_2 : E \rightarrow S^1$ os fibrados correspondentes às duas estruturas “open book”. Como F e F' coincidem, inclusive com as orientações, tomamos mesmas vizinhanças tubulares de K para as duas fibrações. Observando que a trivialização da vizinhança tubular de K é única a menos de isotopia, por K ser simplesmente conexa, podemos assumir que $\varphi_1|_{\partial E} = \varphi_2|_{\partial E}$. Denotando $F \cap E$ e $F' \cap E$ por F e F' de novo respectivamente para simplificar, temos que $F = \varphi_1^{-1}(0)$ e $F' = \varphi_2^{-1}(0)$. Consideremos a vizinhança fechada $J \subset S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de 0 . Então, pela unicidade da vizinhança tubular de $F = F'$ em E , podemos supor que $N(F) = \varphi_1^{-1}(J) = \varphi_2^{-1}(J)$ e $\varphi_1|_{N(F)} = \varphi_2|_{N(F)} : N(F) \rightarrow J$. Agora consideremos $E' = \overline{E - N(F)}$ e as duas fibrações $\varphi'_1 = \varphi_1|_{E'} : E' \rightarrow \overline{S^1 - J} = [0, 1]$ e $\varphi'_2 = \varphi_2|_{E'} : E' \rightarrow \overline{S^1 - J} = [0, 1]$, então $\varphi'_1|_{\partial E'} = \varphi'_2|_{\partial E'}$ (veja Figura 3.6). Agora observemos que todas as fibrações sobre $[0, 1]$ são triviais, o que implica que existem trivializações $g_1 : E' \rightarrow F \times [0, 1]$ e $g_2 : E' \rightarrow F' \times [0, 1]$ tais que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{g_j} & F \times [0, 1] \\ \varphi'_j \searrow & & \swarrow p \\ & & [0, 1] \end{array}$$

comuta para $j = 1, 2$, onde p denota a projeção canônica no segundo fator. Como $\varphi'_1|_{\partial E'} = \varphi'_2|_{\partial E'}$, podemos supor que $g_1^{-1}|_{F \times \{0\}} = g_2^{-1}|_{F \times \{0\}}$ e $g_1^{-1}|_{\partial F \times [0, 1]} = g_2^{-1}|_{\partial F \times [0, 1]}$.

Logo $g_1 \circ g_2^{-1}$ fornece uma pseudo-isotopia de $F \times I$ que é identidade sobre $(F \times \{0\}) \cup (\partial F \times I)$, onde $I = [0, 1]$ é o intervalo. Como $n \geq 3$, pela versão relativa

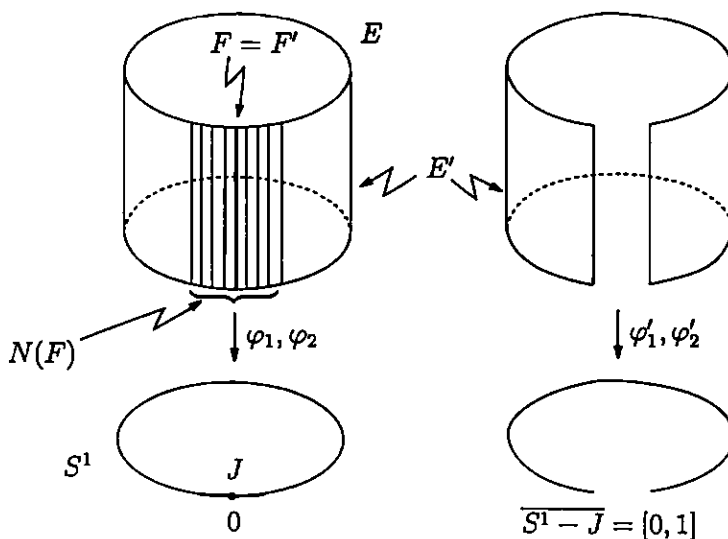


Figura 3.6: Recortando E ao longo da vizinhança de $F = F'$

do teorema do pseudo-isotopia de Cerf [Cer70], ela é isotópica, como pseudo-isotopia relativa ao $(F \times \{0\}) \cup (\partial F \times I)$, a uma isotopia que não é necessariamente identidade sobre $F \times \{1\}$, pois $g_1 \circ g_2^{-1}|_{F \times \{1\}}$ nem sempre é identidade. Isto significa que existe uma isotopia ambiental $H : (F \times [0, 1]) \times [0, 1] \rightarrow F \times [0, 1]$ de $F \times [0, 1]$ tal que $H_0 = \text{id}$, $H_1|_{F \times \{1\}} = g_1 \circ g_2^{-1}$, e $H_t|_{(F \times \{0\}) \cup (\partial F \times [0, 1])}$ é a aplicação identidade para todo $t \in [0, 1]$, onde $H_t : F \times [0, 1] \rightarrow F \times [0, 1]$, $t \in [0, 1]$, é dado por $H_t(x, s) = H((x, s), t)$.

Definimos a aplicação $\mathcal{H} : E' \times I \rightarrow E'$ como sendo $\mathcal{H}(x, t) = g_2^{-1}(H(g_2(x), t))$. Então, $\mathcal{H}_0 = \text{id}$ e $\varphi'_2 \circ \mathcal{H}_1|_{F \times \{1\}} = \varphi'_2 \circ g_2^{-1} \circ g_1 = p \circ g_1 = \varphi'_1$, onde $\mathcal{H}_t : E' \rightarrow E'$, $t \in [0, 1]$, é dado por $\mathcal{H}_t(x) = \mathcal{H}(x, t)$. Além disso, \mathcal{H}_t é identidade sobre $\overline{\partial E' - g_2^{-1}(F \times \{1\})}$. Como $\mathcal{H}_0 = \text{id}$, temos que $\mathcal{H}_t|_{g_2^{-1}(F \times \{1\})}$ é isotópico à identidade para todo t e conseqüentemente podemos estender \mathcal{H} para $E' \cup (F \times [0, 1])$ tais que ele seja identidade sobre o seu bordo e leva $F \times \{\tau\}$ em $F \times \{\tau\}$, onde $F \times [0, 1]$ é a vizinhança colar de $g_2^{-1}(F \times \{1\})$ em $\varphi_2^{-1}(J)$. Logo podemos estender \mathcal{H} para uma isotopia sobre E de forma que seja identidade sobre ∂E , o que permite estender ainda para uma isotopia sobre M . Devido à propriedade do \mathcal{H} original, temos que $\varphi_2 \circ \mathcal{H}_1|_E = \varphi_1$ e conseqüentemente, \mathcal{H} é uma isotopia entre φ_1 e φ_2 . Portanto, as duas estruturas “open book” são estruturalmente isotópicas. Isto completa a demonstração do Lema 3.8. ■

Demonstração do Teorema 3.1: Segue dos Lemas 3.2 e 3.8. ■

Observação 3.9 A condição adicional de M ser uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa para $n = 3, 7$ no Teorema 3.1 é devido aos Lemas 3.5 e 3.6 utilizados na demonstração do Lema 3.2 na qual utiliza a relação entre a forma de Seifert e o invariante tangencial (item 4(d) da Definição 2.15) que não existe para $n = 3, 7$. No caso de $n = 3$, ainda existem problemas de representação esférica dos elementos de $H_{n+1}(M)$ durante a demonstração do Lema 3.4 usado no Lema 3.2.

Não sabemos se o Teorema 3.1 vale para $n = 3, 7$ sem as informações adicionais.

Capítulo 4

Realização

Neste capítulo, provaremos que cada sistema de invariantes “open book” pode ser realizado através de uma estrutura “open book”. Isto quer dizer que, dado um sistema de invariantes $\bar{s} \in \mathcal{A}(M)$, existe uma “open book” (M, K, φ) tal que $\mathcal{S}(M, K, \varphi) = \bar{s}$, onde $\mathcal{S}(M, K, \varphi)$ denota a classe de equivalência do sistema de invariantes “open book” associado a (M, K, φ) (veja Definição 2.23). Esta construção é feita em duas etapas. A primeira delas é a construção de uma subvariedade de codimensão 1 que realiza o sistema de invariantes, e a segunda é a prova de que esta subvariedade é a página de uma estrutura “open book”.

Proposição 4.1 *Seja $\bar{s} = \{G, Q_G, \alpha_G, i_G, \Gamma_G\} \in \mathcal{A}(M)$ um sistema de invariantes “open book” sobre M , onde M é uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$. Então existe um mergulho de uma $2n$ -variedade compacta F em M homotopicamente equivalente ao buquê de n -esferas tal que o sistema de invariantes associados à F seja \bar{s} .*

Demonstração: Seja $\{e_i\}_{i=1}^r$ com $r = \text{rank } G$, uma base de G tal que $\{e_{s+1}, \dots, e_r\}$ seja uma base de $R(\ker i_G)$, $0 \leq s \leq r$. Consideremos o “complexo básico”

$$V' = D^{2n} \cup \gamma'_1 \cup \dots \cup \gamma'_r,$$

onde $\gamma'_i \cong D^n$ é colado a ∂D^{2n} usando os mergulhos $\partial \gamma'_i \hookrightarrow \partial D^{2n}$ de forma que $\partial \gamma'_i \cap \partial \gamma'_j = \emptyset$ e $\text{lk}(\partial \gamma'_i, \partial \gamma'_j) = Q_G(e_i, e_j)$ para $i \neq j$, o que é possível por ter $n \geq 2$.

Como $n \geq 2$, podemos mergulhar V' em $D^{2n+1} \subset M$.

Observemos que cada elemento $i_G(e_i) \in H_n(M) \cong \pi_n(M)$ pode ser representado por uma n -esfera mergulhada em $M - D^{2n+1}$, desde que $n \geq 1$ [Hae61, Wal63].

Agora efetuamos a soma conexa dentro de $M - D^{2n}$, da n -esfera correspondente a $i_G(e_i)$ com o γ'_i do V' , para cada $i = 1, \dots, r$. Denotamos o CW-complexo assim obtido por $V = D^{2n} \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_r$, onde γ_i corresponde a γ'_i em V' (veja Figura 4.1).

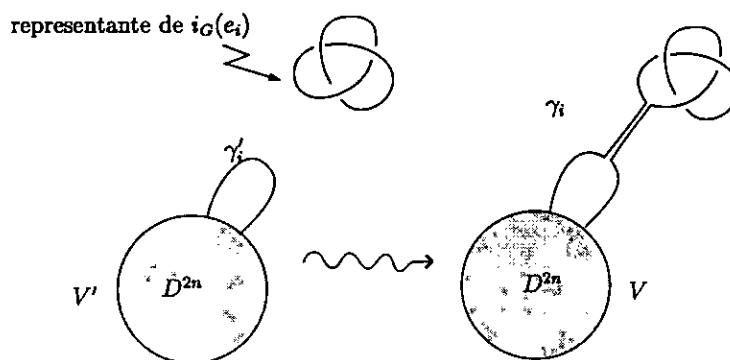


Figura 4.1: O “complexo base” V mergulhado em M

Agora seja v_i um campo de vetores normais não nulos sobre γ_i . Então v_i restrito a $\partial\gamma_i$ representa um elemento de $\pi_{n-1}(S^n) = 0$ e logo, é homotópico ao campo de vetores normais sobre $\partial\gamma_i$ determinado como sendo a restrição do campo de vetores normais não nulos sobre D^{2n} . Assim podemos assumir que v_i é normal a D^{2n} sobre $\partial\gamma_i$. Este campo normal determina uma n -alça $h_i = \gamma_i \times D^n \subset N(\gamma_i)$ cuja alma é γ_i , $i = 1, \dots, r$, onde $N(\gamma_i)$ é a vizinhança tubular de γ_i em M , formando uma $2n$ -variedade $F = D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$ mergulhada em M (veja Figura 4.2). Note que F é homotopicamente equivalente ao buquê de n -esferas e $H_n(F) = G$ pela identificação de $e_i \in G$ com o elemento de $H_n(F)$ correspondente a γ_i . Usando esta identificação, temos que $i_{F*} = i_G : H_n(F) = G \rightarrow H_n(M)$. A partir de agora, assumimos que a forma de Seifert e a forma de intersecção estão representadas matricialmente em relação à base $\{e_i\}_{i=1}^r$ de $G = H_n(F)$.

A matriz de intersecção fora do diagonal coincide com a matriz de enlaçamento de $\{\partial\gamma_i\}_{i=1}^r$. No caso de n ímpar, o diagonal da matriz de intersecção é sempre nulo por ser $(-1)^n$ -simétrica, o que implica que a forma de intersecção de F coincide com Q_G . Quando n é par, observamos que os diagonais das matrizes de intersecção sobre G e $H_n(F)$ são unicamente determinados pelos invariantes tangenciais sobre os elementos da base (item 3(b) da Definição 2.15 e Lema 1.15). Logo, seguiremos para ajuste dos invariantes tangenciais.

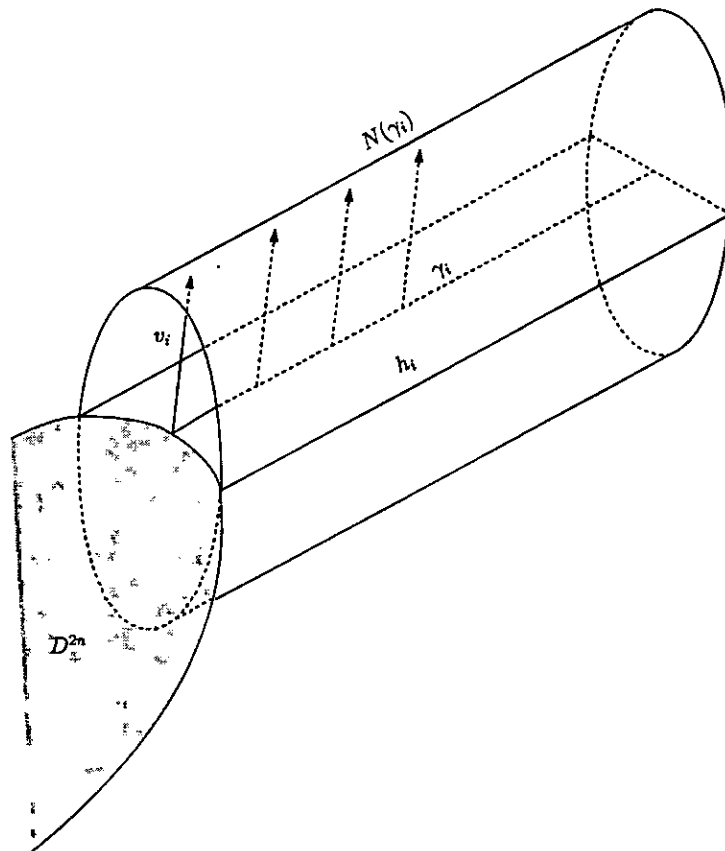


Figura 4.2: Campo normal sobre γ_i determinando h_i

Sem distinguir o caso de n ser par ou ímpar, observemos que a n -alça h_i de F é determinada unicamente pela classe de homotopia do campo de vetores normais v_i sobre a sua alma γ_i , a menos de isotopia. Se substituirmos h_i por \tilde{h}_i , onde \tilde{h}_i é determinada pelo campo de vetores normais \tilde{v}_i sobre γ_i tal que v_i e \tilde{v}_i coincidem sobre $\partial\gamma_i$, então um elemento $\vartheta_i \in \pi_n(S^n)$ é determinado como sendo a diferença entre v_i e \tilde{v}_i . Notemos que, dado $m \in \pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$, sempre podemos obter \tilde{v}_i tal que ϑ_i associado representa m , pois a associação entre as classes de homotopia de seções não nulas de $D^{n+1} \times S^n \rightarrow S^n$ com o $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$ é biunívoca.

Definição 4.2 Um “twist” de h_i por $m \in \mathbf{Z}$ é a substituição de h_i por \tilde{h}_i tal que $\vartheta_i = m$ em $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$.

Como discutimos na demonstração do Lema 3.2 (veja a página 33), $\partial\vartheta_i$ é a diferença entre os invariantes tangenciais associados a h_i e \tilde{h}_i pelo Lema 1.17, onde ∂ é o

homomorfismo de bordo da seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(SO(n+1)) \longrightarrow \cdots$$

associada à fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$.

Como o invariante tangencial α_F de F e o invariante tangencial α_G que é desejado, são compatíveis com o invariante tangencial de M , a diferença $\alpha_G(e_i) - \alpha_F(e_i)$ está em $\ker i_* = \text{Im } \partial$. Então existe um elemento $m \in \pi_n(S^n)$ tal que $\partial m = \alpha_G(e_i) - \alpha_F(e_i)$. Assim, usando um “twist” de h_i por m , podemos anular esta diferença. Logo, podemos assumir que $\alpha_F = \alpha_G$ sobre todos os elementos da base. Como já foi discutido, α_F e α_G determinam os diagonais das formas de intersecção para n par e conseqüentemente, temos $Q_F = Q_G$.

Como α_F e α_G coincidem sobre os elementos da base e $Q_F = Q_G$, a fórmula de adição (Observação 2.2 para α_F e item 3(c) da Definição 2.15 para α_G) implica que $\alpha_F = \alpha_G$ sobre $H_n(F) = G$.

Pelos argumentos acima, podemos supor que F realiza todos os invariantes exceto a forma de Seifert. Inicialmente, ajustaremos o diagonal da matriz de Seifert. No caso de n par, temos que $2\Gamma_G(e_i, e_i) = Q_G(e_i, e_i)$ (item 4(b) da Definição 2.15) e $2\Gamma_F(e_i, e_i) = Q_F(e_i, e_i)$ (Lema 2.9) para $s < i \leq r$. Como $Q_G = Q_F$, o diagonal da matriz de Seifert de F coincide com o de G .

Quando $n = 3, 7$, observemos que

$$\Gamma_G(e_i, e_i) - \Gamma_F(e_i, e_i) \equiv b_M(e_i, e_i) - b_M(e_i, e_i) \equiv 0 \pmod{1}$$

para $s < i \leq r$, devido ao item 4(c) da Definição 2.15 e o item (1) do Lema 2.14. Conseqüentemente, $\Gamma_G(e_i, e_i)$ e $\Gamma_F(e_i, e_i)$ difere por um inteiro e logo, podemos ajustar usando “twist” associado a esta diferença. Como $\pi_{n-1}(SO(n)) = 0$ para $n = 3, 7$ (veja Lema 1.14), sempre teremos $\alpha_G = 0 = \alpha_F$ e conseqüentemente, o invariante tangencial não é alterado.

Quando n é ímpar ($n \geq 5, n \neq 7$), observemos que $R(\ker i_G) = R(\ker i_{F_*})$ pela identificação $i_{F_*} = i_G$. Temos que $q_M(i_G(e_i)) = \Gamma_G(e_i, e_i) + \phi(\alpha_G(e_i)) \pmod{2}$ (item 4(d) da Definição 2.15) e o $q_M(i_{F_*}(e_i)) = \Gamma_F(e_i, e_i) + \phi(\alpha_F(e_i)) \pmod{2}$ (item (2) do Lema 2.14) para $s < i \leq r$ por $n \geq 5, n \neq 7$. Como os invariantes tangenciais coincidem,

temos que

$$\Gamma_G(e_i, e_i) - \Gamma_F(e_i, e_i) \equiv 0 \pmod{2}$$

e conseqüentemente, $\Gamma_G(e_i, e_i) - \Gamma_F(e_i, e_i) = 2m$ para $m \in \mathbf{Z}$. Agora efetuemos um “twist” da alça h_i de F correspondente a e_i por $2m$. Como $\Gamma_F(e_i, e_i)$ é o número de enlaçamento entre a translação do n -ciclo E_i que representa o e_i na direção normal positiva de F com o E_i , o “twist” por $2m$ efetua uma mudança de $2m$ em $\Gamma_F(e_i, e_i)$ por alterar o campo normal exatamente por $2m$. Assim, após o “twist”, podemos assumir que $\Gamma_G(e_i, e_i) = \Gamma_F(e_i, e_i)$. Notemos que a alteração no $\alpha_F(e_i)$ pelo “twist” acima é $\partial(2m) = 2(\partial m) = 0$ em $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}_2$ por n ser ímpar, $n \geq 5, n \neq 7$ (veja Lemas 1.14 e 1.17). Assim, o invariante tangencial não será alterado durante este processo.

Desta forma, podemos assumir que o diagonal da matriz de Seifert de F e G coincidem, independente de n ser par ou ímpar. Para completar o ajuste da forma de Seifert, usamos o método de Kervaire [Ker65] como segue.

Pelo item 4(c) da Definição 2.15 e o item (1) do Lema 2.14, temos que $\Gamma_G - \Gamma_F$ é uma matriz inteira (com diagonal nulo). Agora, pelo item 4(b) da Definição 2.15 e Lema 2.9, temos que

$$(\Gamma_G - \Gamma_F) + (-1)^n \cdot {}^t(\Gamma_G - \Gamma_F) = (-1)^n(Q_G - Q_F) = 0,$$

onde tA denota a matriz transposta de A . Logo, $\Gamma_G - \Gamma_F = (-1)^{n+1}X + {}^tX$ para alguma matriz inteira $X = (x_{ij})_{s+1 \leq i, j \leq r}$ tal que $x_{ii} = 0$.

Como $n \geq 3$, $\partial\gamma_i$ é um nó trivial em ∂D^{2n} , onde D^{2n} é a 0-alça na decomposição

$$F = D^{2n} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r.$$

Logo $\partial\gamma_i$ borda um n -disco em ∂D^{2n} . Colando este n -disco a γ_i ao longo de seus bordos, obtemos um n -ciclo em F representando o elemento $e_i \in H_n(F)$. Denotemos este n -ciclo por $\tilde{\gamma}_i$.

Daqui em diante, consideremos $s < i, j \leq r$. Seja D_j um pequeno $(n+1)$ -disco em M transversal ao γ_j , interceptando em um único ponto no interior. Tomemos o D_j suficientemente pequeno de forma que D_j não intercepte γ_i para $i \neq j$ e também que tenha $D_i \cap D_j = \emptyset$ ($i \neq j$). Orientemos o D_j de forma que $\text{lk}(\tilde{\gamma}_i, \partial D_j) = \delta_{ij}$, $s < i, j \leq r$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Agora consideremos um D^n -fibrado trivial $N(\partial D_j) \cong \partial D_j \times D^n$ que é uma vizinhança tubular de ∂D_j num $2n$ -disco contendo D_j no seu interior. Podemos escolher $N(\partial D_j)$ de forma que não intercepta a F (veja Figura 4.3).

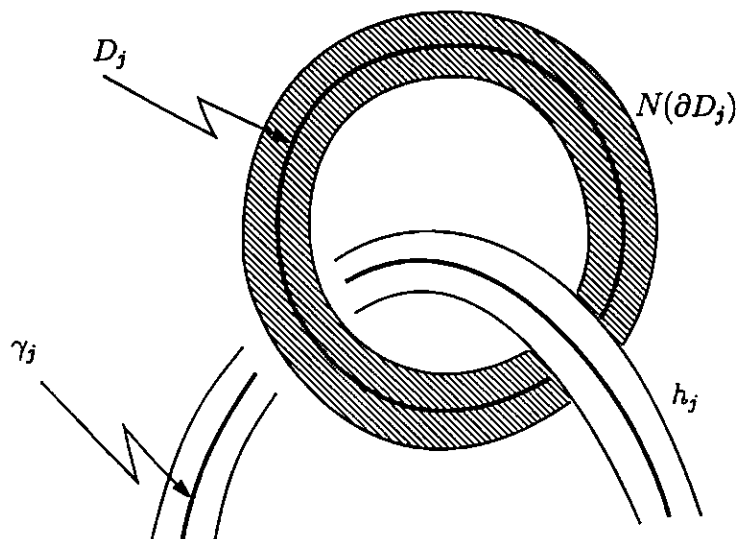


Figura 4.3: D^n -fibrado trivial $N(\partial D_j)$

Agora consideremos o $h_i = \gamma_i \times D^n$ e efetuamos uma *soma conexa fibrada* ambiental de $N(\partial D_j)$ e $h_i \cong \gamma_i \times D^n$ como segue.

Sejam $D'_j \subset \partial D_j$ e $D''_i \subset \gamma_i$ pequenos n -discos tais que as fibrações $N(\partial D_j)$ e h_i restritas a tais discos sejam triviais. Substituímos o $h_i = \gamma_i \times D^n$ por

$$(\gamma_i - \text{Int } D''_i) \times D^n \cup (\partial D_j - \text{Int } D'_j) \times D^n,$$

onde a união é feita da seguinte forma. Consideremos a vizinhança tubular $[0, 1] \times D^n \times D^n$ de uma curva mergulhada que liga os pontos centrais de D'_j e D''_i e suponhamos que $\{0\} \times D^n \times \{0\} = D'_j$ e $\{1\} \times D^n \times \{0\} = D''_i$ respectivamente. Agora identificamos $\{0\} \times S^{n-1} \times D^n$ e $\{1\} \times S^{n-1} \times D^n$ de $[0, 1] \times S^n \times D^n$ com $\partial D'_j \times D^n$ e $\partial D''_i \times D^n$ respectivamente (veja Figura 4.4).

Com esta soma conexa fibrada, o n -ciclo associado à nova alça correspondente a e_i será $\bar{\gamma}_i \# \partial D_j$ (veja Figura 4.5).

Quando $x_{ij} > 1$, efetuamos x_{ij} vezes a soma conexa acima, mas tomemos cuidado de utilizar D_j trasladado de forma que não intercepte o anterior. Se $x_{ij} < 0$, utilizemos o

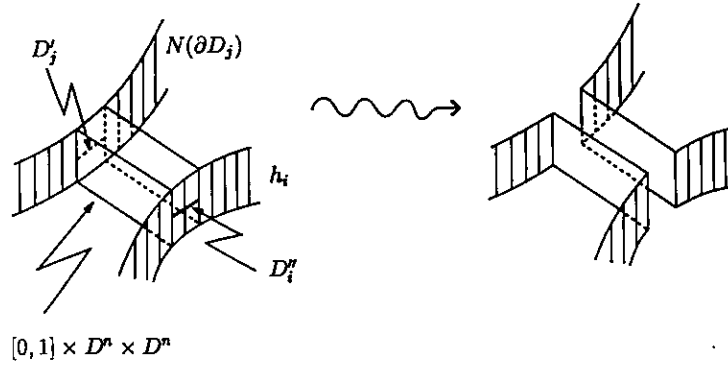


Figura 4.4: Efetuando uma soma conexa fibrada de h_i e $N(\partial D_j)$

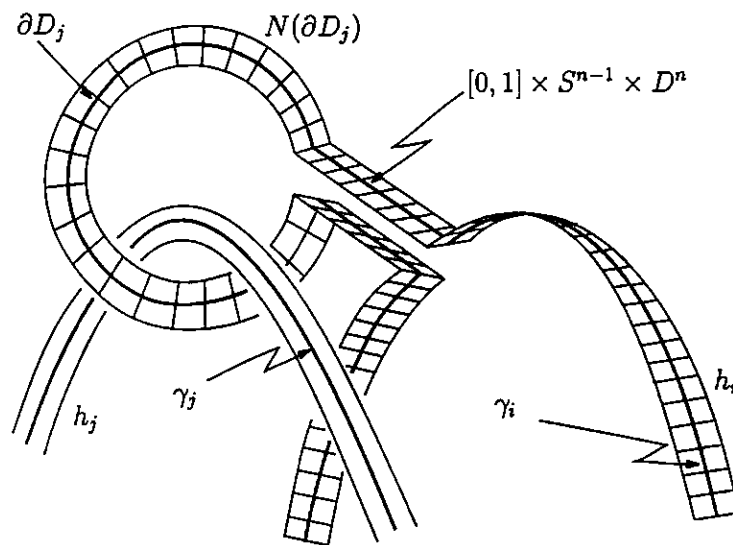


Figura 4.5: Ajustando a forma de Seifert

$-D_j$ em vez de D_j , e efetuamos a soma conexa $|x_{ij}|$ vezes. Quando $x_{ij} = 0$, nenhuma alteração será efetuada.

Com isso, o n -ciclo associado à alma da nova alça \tilde{h}_i correspondente a e_i é

$$\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}_i \#_{j=s+1}^r x_{ij} \partial D_j.$$

Denotamos a variedade resultante por \tilde{F} , então para $s+1 \leq i, j \leq r$, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{F}}(e_i, e_j) &= \text{lk}(\nu^+ \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) \\ &= \text{lk} \left(\nu^+ \left(\tilde{\gamma}_i \#_{k=s+1}^r x_{ik} \partial D_k \right), \tilde{\gamma}_j \#_{l=s+1}^r x_{jl} \partial D_l \right) \\ &= \text{lk}(\nu^+ \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) + \sum_{l=s+1}^r x_{jl} \text{lk}(\nu^+ \tilde{\gamma}_i, \partial D_l) + \sum_{k=s+1}^r x_{ik} \text{lk}(\nu^+ \partial D_k, \tilde{\gamma}_j) \\ &\quad + \sum_{k=s+1}^r \sum_{l=s+1}^r x_{ik} x_{jl} \text{lk}(\nu^+ \partial D_k, \partial D_l). \end{aligned}$$

Desde que D_k são escolhidos suficientemente pequenos, temos $\text{lk}(\partial D_k, \partial D_l) = 0$ e como $\text{lk}(\tilde{\gamma}_i, \partial D_k) = \delta_{ik}$, temos que

$$\Gamma_{\tilde{F}}(e_i, e_j) = \text{lk}(\nu^+ \tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j) + x_{ji} + (-1)^{n+1} x_{ij} = \Gamma_F(e_i, e_j) + (-1)^{n+1} x_{ij} + x_{ji} = \Gamma_G(e_i, e_j).$$

Observemos que i_{F^*} , a forma de intersecção, e a estrutura fibrada de h_i são mantidos por esta operação, o que significa que a forma de Seifert é o único invariante que será modificado. Logo \tilde{F} realiza todos os invariantes desejados. ■

Agora provaremos que um mergulho de uma $2n$ -variedade homotopicamente equivalente a um buquê de n -esferas que realiza um sistema de invariantes “open book” é realizado como uma página de uma estrutura “open book”.

Definição 4.3 [Qui79] Seja $F \subset M$ um mergulho de $2n$ -variedade F com bordo numa $(2n+1)$ -variedade M tal que o fibrado normal de F em M é trivial, então a vizinhança tubular relativa $N(F)$ de F pode ser pensada como $F \times I \subset M$. Dizemos que $F \subset M$ é uma *página homotópica* se as inclusões de $F \times \{0\}$ e $F \times \{1\}$ em $\overline{M - F \times I}$ induzem isomorfismos nos grupos de homotopia.

Nosso objetivo é provar que F construída na Proposição 4.1 é uma página homotópica.

Denotamos $W = \overline{M - F \times I}$ para simplificar, onde $F \times I$ é uma vizinhança tubular relativa de F em M . Notemos que a inclusão de $F \times \{1\}$ em W pode ser identificada (homotopicamente) com a pequena translação na direção normal positiva de F , que será denotada por $\nu^+ : F \rightarrow M - \text{Int } F$. Da mesma forma, a inclusão de $F \times \{0\}$ em W pode ser identificada com a translação na direção negativa, denotada por $\nu^- : F \rightarrow M - \text{Int } F$.

Pela nossa construção, F é obtida, colando simultaneamente algumas n -alças numa 0-alça, e como $n \geq 3$, temos que ∂F é $(n - 2)$ -conexo pela Proposição 1.3.

Lema 4.4 *Seja F um mergulho de $2n$ -variedade compacta, $(n - 1)$ -conexa com bordo $\partial F \neq \emptyset$, $(n - 2)$ -conexo numa $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M , tal que $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ é sobrejetora, com $n \geq 3$. Então $W = \overline{M - F \times I}$ é $(n - 1)$ -conexa e $H_*(W) \cong H_*(F)$.*

Demonstração: Como $n \geq 3$, pela condição sobre F e ∂F , e pelo teorema de van-Kampen, temos $\pi_1(\partial(F \times I)) = \{1\}$. Como M é simplesmente conexa, o teorema de van-Kampen implica que W também é simplesmente conexa. Assim, é suficiente provarmos que $H_i(W) = 0$ para $i \geq 2, i \neq n$, e $H_n(W) \cong H_n(F)$.

Consideremos a seqüência exata

$$\cdots \rightarrow H_{i+1}(M, W) \rightarrow H_i(W) \rightarrow H_i(M) \rightarrow \cdots$$

do par (M, W) e observemos que $H_{i+1}(M, W) \cong H_{i+1}(F \times I, \partial(F \times I)) \cong H_i(F, \partial F)$ pelo teorema da excisão e de Künneth. Assim, a seqüência torna-se

$$\cdots \rightarrow H_i(F, \partial F) \rightarrow H_i(W) \rightarrow H_i(M) \rightarrow \cdots$$

e temos que $H_i(W) = 0$ para $i = 2, \dots, n - 1$, pois $H_i(F, \partial F) = 0 = H_i(M)$ para estes valores de i . Conseqüentemente, W é $(n - 1)$ -conexa.

A seqüência exata do par $(M, F \times I)$ é

$$\cdots \rightarrow H_i(F \times I) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(M, F \times I) \rightarrow H_{i-1}(F \times I) \rightarrow \cdots$$

e como $H_i(M, F \times I) \cong H_i(W, \partial W)$ pelo teorema da excisão, a seqüência torna-se

$$\cdots \rightarrow H_i(F \times I) \rightarrow H_i(M) \rightarrow H_i(W, \partial W) \rightarrow H_{i-1}(F \times I) \rightarrow \cdots$$

e temos que $H_i(W, \partial W) = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$ devido a alta conexidade de F e M .

Para dimensão n , a seqüência acima torna-se

$$\dots \rightarrow H_n(F \times I) \rightarrow H_n(M) \rightarrow H_n(W, \partial W) \rightarrow 0.$$

Como $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ é sobrejetora pela nossa hipótese, temos que $H_n(W, \partial W) = 0$.

Agora, pela dualidade de Poincaré-Lefschetz e o teorema dos coeficientes universais para cohomologia [GH81, Teorema 23.28], temos

$$\begin{aligned} H_i(W) &\cong H^{2n+1-i}(W, \partial W) \\ &\cong \text{Hom}(H_{2n+1-i}(W, \partial W), \mathbf{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{2n-i}(W, \partial W), \mathbf{Z}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $i > n$, pois $H_{2n+1-i}(W, \partial W) = 0$ para esses valores de i .

Para $i = n$, temos

$$\begin{aligned} H_n(W) &\cong H^{n+1}(W, \partial W) \\ &\cong \text{Hom}(H_{n+1}(W, \partial W), \mathbf{Z}) \oplus \text{Ext}(H_n(W, \partial W), \mathbf{Z}) \\ &\cong \text{Hom}(H_{n+1}(W, \partial W), \mathbf{Z}) \end{aligned}$$

e logo $H_n(W)$ é livre sobre \mathbf{Z} .

Como $H_n(W)$ e $H_n(F)$ são \mathbf{Z} -módulos livres, eles são isomorfos se, e somente se, seus “ranks” forem iguais.

Consideremos a seqüência exata

$$0 \rightarrow H_{n+1}(F \times I, \partial(F \times I)) \rightarrow H_n(\partial(F \times I)) \rightarrow H_n(F \times I) \rightarrow 0$$

associada ao par $(F \times I, \partial(F \times I))$ e

$$0 \rightarrow H_{n+1}(W, \partial W) \rightarrow H_n(\partial W) \rightarrow H_n(W) \rightarrow 0$$

associada ao par $(W, \partial W)$. Usando a dualidade de Poincaré-Lefschetz, e o fato de que $H_n(F)$ e $H_n(W)$ são \mathbf{Z} -módulos livres, temos que

$$\begin{cases} H_n(\partial(F \times I)) \cong H_n(F) \oplus H^n(F), \\ H_n(\partial W) \cong H_n(W) \oplus H^n(W). \end{cases}$$

Como $\partial(F \times I) = \partial W$, temos que

$$H_n(F) \oplus H_n(F) \cong H_n(F) \oplus H^n(F) \cong H_n(W) \oplus H^n(W) \cong H_n(W) \oplus H_n(W).$$

Então, $\text{rank } H_n(F) = \text{rank } H_n(W)$ como desejado. \blacksquare

Agora denotamos $R = R(\ker i_{F*})$ e $R' = R(\ker i_{W*})$, onde $R(\ker i_{F*})$ e $R(\ker i_{W*})$ são os fechos radicais de $\ker i_{F*}$ e $\ker i_{W*}$ respectivamente (veja Definição 2.6), e $i_F : F \rightarrow M$ e $i_W : W \rightarrow M$ são as inclusões. Como $i_W \circ \nu^+ : F \rightarrow M$ e $i_F : F \rightarrow M$ são isotópicos, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(F) & \xrightarrow{i_{F*}} & H_n(M) \longrightarrow 0 \\ \nu_*^+ \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ H_n(W) & \xrightarrow{i_{W*}} & H_n(M) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (4.1)$$

Então $\nu_*^+(\ker i_{F*}) \subset \ker i_{W*}$, o que implica que $\nu_*^+(R) \subset R'$. Logo, os homomorfismos $\bar{\nu}_*^+ : H_n(F)/R \rightarrow H_n(W)/R'$ e $\bar{\nu}_*^+ = \nu_*^+|_R : R \rightarrow R'$ induzidos por $\nu_*^+ : H_n(F) \rightarrow H_n(W)$ são bem definidos. Além disso, ν_*^+ é um isomorfismo se, e somente se, $\bar{\nu}_*^+$ e $\bar{\nu}_*^+$ são isomorfismos.

Lema 4.5 *Seja F um mergulho de $2n$ -variedade compacta, $(n-1)$ -conexa com bordo $\partial F \neq \emptyset$, $(n-2)$ -conexo numa $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M , tal que $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ é sobrejetora, com $n \geq 3$. Então, $\bar{\nu}_*^+ : H_n(F) \rightarrow H_n(W)$ é um isomorfismo.*

Demonstração: Pelo teorema da excisão e dualidade de Poincaré-Lefschetz, temos que

$$H_n(M, W) \cong H_n(F \times I, \partial(F \times I)) \cong H^{n+1}(F \times I) \cong H^{n+1}(F) = 0.$$

Então a seqüência exata do par (M, W) fornece uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(M) \longrightarrow H_{n+1}(F \times I, \partial(F \times I)) \xrightarrow{\partial} H_n(W) \xrightarrow{i_{W*}} H_n(M) \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

e conseqüentemente, i_{W*} é sobrejetora.

Pelo Diagrama (4.1) e o fato de $\nu_*^+(R) \subset R'$, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(F)/R & \xrightarrow{\bar{i}_{F*}} & H_n(M)/\tau H_n(M) \\ \nu_*^+ \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ H_n(W)/R' & \xrightarrow{\bar{i}_{W*}} & H_n(M)/\tau H_n(M) \end{array}$$

é comutativo, onde \bar{i}_{F*} e \bar{i}_{W*} são os homomorfismos quocientes de i_{F*} e i_{W*} , respectivamente. Como i_{F*} e i_{W*} são sobrejetoras, \bar{i}_{F*} e \bar{i}_{W*} são isomorfismos. Logo ν_*^+ também é um isomorfismo. ■

Lema 4.6 *Seja F um mergulho de $2n$ -variedade compacta, $(n-1)$ -conexa com bordo $\partial F \neq \emptyset$, $(n-2)$ -conexo numa $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M , tal que $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ é sobrejetora, com $n \geq 3$. Então temos que $\det \bar{\nu}_*^+ = \pm |\tau H_n(M)| \det \Gamma_F$, onde $\det \bar{\nu}_*^+$ e $\det \Gamma_F$ são determinantes de $\bar{\nu}_*^+$ e Γ_F respectivamente, e $|\tau H_n(M)|$ é a ordem de $\tau H_n(M)$.*

Demonstração: Para provarmos este lema, precisamos de algumas construções.

Definimos o homomorfismo

$$\psi : H_n(F, \partial F) \rightarrow H_{n+1}(N(F), \partial N(F)) \cong H_n(F, \partial F) \otimes H_1(I, \partial I)$$

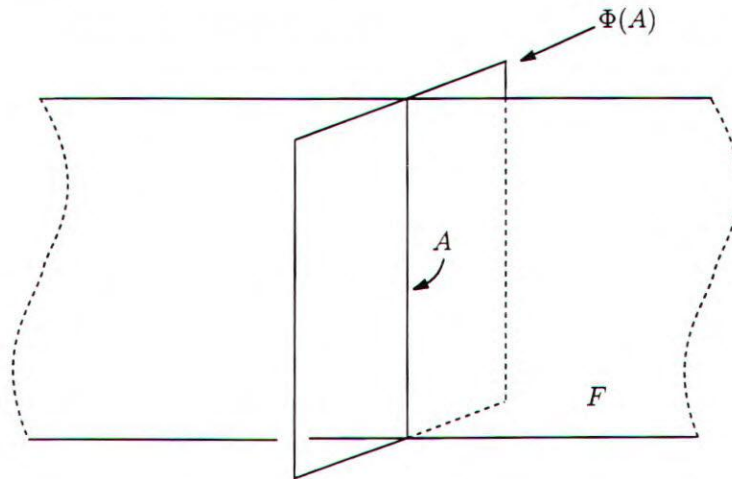
por $\psi(A) = A \otimes [(I, \partial I)]$, onde $N(F)$ é a vizinhança tubular de F em M , $I = [0, 1]$ é o intervalo e $[(I, \partial I)] \in H_n(I, \partial I) \cong \mathbf{Z}$ é o gerador canônico. Seja $\Phi = \partial \circ \psi$ (veja Figura 4.6), onde $\partial : H_{n+1}(N(F), \partial N(F)) \rightarrow H_n(W)$ é o homomorfismo de bordo da seqüência (4.2) na demonstração do Lema 4.5.

Então, $\Phi(H_n(F, \partial F)) \subset \ker i_{W*}$ e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(F, \partial F) & & \\ \psi \downarrow & \searrow \Phi & \\ H_{n+1}(N(F), \partial N(F)) & \xrightarrow{\partial} & \ker i_{W*}. \end{array}$$

Note que ψ é um isomorfismo. Temos também que ∂ é sobrejetora pela seqüência exata (4.2) e logo, Φ é sobrejetora.

Para prosseguirmos com a demonstração, usamos o conceito de sub-módulos ortogonais.

Figura 4.6: Definição de $\Phi(A)$

Definição 4.7 Consideremos \mathbf{Z} -módulos livres finitamente gerados $A = A_1 \oplus A_2$ e B com uma forma bilinear $\xi : A \times B \rightarrow \mathbf{Z}$. Definimos um sub-módulo de B , denominado *ortogonal de A_i* relativa a ξ como sendo

$$A_i^\perp = \{b \in B : \xi(a, b) = 0 \text{ para todo } a \in A_i\}.$$

Então temos o seguinte

Lema 4.8 Se $\xi : A \times B \rightarrow \mathbf{Z}$ é uma forma bilinear unimodular, onde $A = A_1 \oplus A_2$ e B são \mathbf{Z} -módulos livres finitamente gerados de mesmo “rank” r , então temos que $B = A_1^\perp \oplus A_2^\perp$.

Demonstração: Como ξ é unimodular, existem bases $\{a_i\}_{i=1}^r$ e $\{b_i\}_{i=1}^r$ de A e B respectivamente, tais que

$$\begin{cases} \{a_1, \dots, a_s\} \text{ é a base de } A_1, \\ \{a_{s+1}, \dots, a_r\} \text{ é a base de } A_2, \\ \xi(a_i, b_j) = \delta_{ij}, \end{cases}$$

onde $s = \text{rank } A_1$, $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Então temos que $\{b_1, \dots, b_s\}$ e $\{b_{s+1}, \dots, b_r\}$ são bases de A_2^\perp e A_1^\perp respectivamente devido a sua definição. Conseqüentemente, temos que $B = A_1^\perp \oplus A_2^\perp$. ■

Observação 4.9 Observemos que $\text{rank } A_1^\perp = \text{rank } A_2$ e $\text{rank } A_2^\perp = \text{rank } A_1$ respectivamente.

Voltamos para a demonstração do Lema 4.6.

Como $R \subset H_n(F)$ é um somando direto e a forma de intersecção

$$H_n(F) \times H_n(F, \partial F) \rightarrow \mathbf{Z}$$

é unimodular pela dualidade de Poincaré-Lefschetz,

$$R^\perp = \{a \in H_n(F, \partial F) : b \cdot a = 0 \text{ para todo } b \in R \subset H_n(F)\}$$

é um somando direto de $H_n(F, \partial F)$ pelo Lema 4.8 acima, onde $b \cdot a$ denota a intersecção de b com a .

Lema 4.10 $R^\perp \supset \ker \Phi$.

Demonstração: Consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(M) & \xrightarrow{\delta} & H_n(F, \partial F) & & \\ \parallel & & \psi \downarrow & \searrow \Phi & \\ H_{n+1}(M) & \xrightarrow{\delta'} & H_{n+1}(N(F), \partial N(F)) & \xrightarrow{\partial} & \ker i_{W*}, \end{array}$$

onde $H_{n+1}(M) \xrightarrow{\delta} H_n(F, \partial F)$ e $H_{n+1}(M) \xrightarrow{\delta'} H_n(N(F), \partial N(F))$ são definidos pela dualidade de Poincaré-Lefschetz e pelos homomorfismos $H^n(M) \xrightarrow{i_F^*} H^n(F)$ e $H^n(M) \xrightarrow{i_{N(F)}^*} H^n(N(F))$ induzidos pelas inclusões $i_F : F \rightarrow M$ e $i_{N(F)} : N(F) \rightarrow M$, respectivamente. Observemos que a última seqüência do diagrama acima é a seqüência exata (4.2).

Como ψ é um isomorfismo e a última seqüência do diagrama é exata, temos que $\ker \Phi = \text{Im } \delta$.

Logo, para todo $b \in \ker \Phi$, existe $b' \in H_{n+1}(M)$ tal que $b = \delta(b')$. Assim, para todo $a \in R$ arbitrário, temos que

$$a \cdot b = a \cdot \delta(b') = i_{F*}(a) \cdot b' = 0,$$

onde primeiras duas intersecções são em F e a última intersecção é em M . A última igualdade vale por $i_{F*}(a)$ ser uma torção em $H_n(M)$.

Assim $b \in R^\perp$ e conseqüentemente $\ker \Phi \subset R^\perp$. ■

Lema 4.11 Temos $R^\perp = \ker \Phi$ e $\bar{\Phi} : H_n(F, \partial F)/R^\perp \rightarrow \ker i_{W^*}$ induzido por Φ é um isomorfismo.

Demonstração: Como $\Phi : H_n(F, \partial F) \rightarrow \ker i_{W^*}$ é sobrejetora, $\bar{\Phi} : H_n(F, \partial F)/\ker \Phi \rightarrow \ker i_{W^*}$ induzido por Φ é um isomorfismo. Então basta mostrar que $R^\perp = \ker \Phi$.

Pelo Lema 4.10 acima, temos um epimorfismo $p : H_n(F, \partial F)/\ker \Phi \rightarrow H_n(F, \partial F)/R^\perp$ definido como projeção natural. Agora consideremos $p \circ \bar{\Phi}^{-1} : \ker i_{W^*} \rightarrow H_n(F, \partial F)/R^\perp$ que é um epimorfismo.

Observemos que $\text{rank}(\ker i_{W^*}) = \text{rank}(\ker i_{F^*})$ devido ao Lema 4.4 e o Diagrama (4.1). Então

$$\text{rank}(\ker i_{W^*}) = \text{rank } R = \text{rank}(H_n(F, \partial F)/R^\perp),$$

onde a última igualdade é devido à Observação 4.9.

Como $\ker i_{W^*}$ e $H_n(F, \partial F)/R^\perp$ são \mathbf{Z} -módulos livres e um epimorfismo entre dois \mathbf{Z} -módulos livres finitamente gerados de mesmo “rank” é um isomorfismo, temos que $p \circ \bar{\Phi}^{-1}$ é um isomorfismo e conseqüentemente, p é um isomorfismo. Logo temos que $\ker \Phi = R^\perp$, o que implica que $H_n(F, \partial F)/\ker \Phi = H_n(F, \partial F)/R^\perp$. ■

Agora, retornamos para a situação do Lema 4.8. Definimos $\xi_1 : A_1 \times (B/A_1^\perp) \rightarrow \mathbf{Z}$ por $\xi_1(a, [b]) = \xi(a, b)$, onde $[b]$ é a classe de equivalência de b , então temos que ξ_1 é uma forma bilinear bem definida, pela definição de A_1^\perp .

Lema 4.12 ξ_1 é unimodular.

Demonstração: Pela demonstração do Lema 4.8, temos que $B/A_1^\perp \cong A_2^\perp$ e existem uma base $\{[b_1], \dots, [b_s]\}$ de B/A_1^\perp e outra $\{a_1, \dots, a_s\}$ de A_1 respectivamente de forma que $\xi_1(a_i, [b_j]) = \xi(a_i, b_j) = \delta_{ij}$ (veja a demonstração do Lema 4.8). Isto conclui a demonstração do Lema 4.12. ■

Agora retornaremos para a demonstração do Lema 4.6.

Considere o sub-módulo $\ker i_{W^*}$ do \mathbf{Z} -módulo livre finitamente gerado $R(\ker i_{W^*})$. Pelo [KaM79, Theorem 8.1.1], existe uma base $\{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{r-s}\}$ de $R' = R(\ker i_{W^*})$ tal que $\{\tilde{A}_i = r_i \tilde{a}_i\}_{i=1}^{r-s}$ é uma base de $\ker i_{W^*}$, obtida pela diagonalização da matriz associada a L da seqüência exata

$$0 \longrightarrow \ker i_{W^*} \xrightarrow{L} R(\ker i_{W^*}) \longrightarrow R(\ker i_{W^*})/\ker i_{W^*} \longrightarrow 0,$$

onde $r - s = \text{rank}(\ker i_{F*}) = \text{rank}(\ker i_{W*})$ e r_1, \dots, r_{r-s} são inteiros positivos.

Como $\bar{\Phi}^{-1} : \ker i_{W*} \rightarrow H_n(F, \partial F)/R^\perp$ é um isomorfismo, a base $\{A_i = \bar{\Phi}^{-1}(\tilde{A}_i)\}_{i=1}^{r-s}$ de $H_n(F, \partial F)/R^\perp$ está bem definida. Como R e $H_n(F, \partial F)/R^\perp$ estão relacionados pela dualidade (Lema 4.12), podemos escolher uma base $\{a_i\}_{i=1}^{r-s}$ de R , que é dual à base $\{A_i\}_{i=1}^{r-s}$ de $H_n(F, \partial F)/R^\perp$.

Para analisarmos a matriz de $\tilde{\nu}_*^+ : R \rightarrow R'$ dada nestas bases especiais, observemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_F(a_i, a_j) &= \text{lk}(\tilde{\nu}_*^+ a_i, a_j) = \text{lk}\left(\sum_{k=1}^{r-s} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \tilde{a}_k, a_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r-s} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \text{lk}(\tilde{a}_k, a_j) = \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{r_k} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \text{lk}(\tilde{A}_k, a_j), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\nu}_*^+ a_i = \sum_{k=1}^{r-s} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \tilde{a}_k$ com $[\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \in \mathbf{Z}$. Pela definição de lk , a última expressão torna-se

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{r_k} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \text{lk}(\tilde{A}_k, a_j) &= \pm \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{r_k} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \text{lk}(\bar{\Phi}(A_k), a_j) \\ &= \pm \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{r_k} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} a_j \cdot A_k \\ &= \pm \sum_{k=1}^{r-s} \frac{1}{r_k} [\tilde{\nu}_*^+]_{ki} \delta_{jk} = \pm \frac{1}{r_j} [\tilde{\nu}_*^+]_{ji}, \end{aligned}$$

onde $a_j \in R \subset H_n(F)$, $A_k \in H_n(F, \partial F)/R^\perp$, a intersecção é induzida pelo Lema 4.12, e $a_j \cdot A_k = \delta_{jk} \in \mathbf{Z}$ pela escolha da base dual.

Observando que $|\tau H_n(M)| = r_1 \cdots r_{r-s}$ por $\tau H_n(M) \cong R(\ker i_{F*})/\ker i_{F*} \cong R(\ker i_{W*})/\ker i_{W*}$, temos

$$\det \Gamma_F = \frac{\pm 1}{r_1 \cdots r_{r-s}} \det \tilde{\nu}_*^+ = \frac{\pm 1}{|\tau H_n(M)|} \det \tilde{\nu}_*^+.$$

Isto conclui a demonstração do Lema 4.6. ■

Proposição 4.13 *Seja F um mergulho de $2n$ -variedade compacta, $(n-1)$ -conexa com bordo $\partial F \neq \emptyset$, $(n-2)$ -conexo numa $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M , tal que $i_{F*} : H_n(F) \rightarrow H_n(M)$ é sobrejetora, com $n \geq 3$. Se $\det \Gamma_F = |\tau H_n(M)|^{-1}$, então F é uma página de alguma estrutura “open book” sobre M .*

Demonstração: Pelos Lemas 4.5 e 4.6, $\nu_*^+ : H_n(F) \rightarrow H_n(W)$ é um isomorfismo e um argumento análogo mostra que $\nu_*^- : H_n(F) \rightarrow H_n(W)$ também é um isomorfismo, onde $W = \overline{M - F \times [0, 1]}$. Como W é homotopicamente equivalente a um buquê de n -esferas pelo Lema 4.4, o Teorema de Whitehead [Spa66, Capítulo 7, Seção 5, Teorema 9], ν^+ e ν^- induzem equivalências de homotopia. Então $F \subset M$ é uma página homotópica. Como $n \geq 3$, o teorema do h -cobordismo ([Sma62]) implica que $W = \overline{M - F \times I} \cong F \times I$ e conseqüentemente F é uma página de alguma estrutura “open book”. ■

A proposição acima juntamente com o item 4(a) da Definição 2.15 e a Proposição 4.1 fornece o seguinte resultado.

Teorema 4.14 *Seja M uma $(2n + 1)$ -variedade orientada, $(n - 1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$. Então, para cada sistema de invariantes “open book” $\bar{s} \in \mathcal{A}(M)$, existe uma “open book” (M, K, φ) sobre M tal que $\mathcal{S}(M, K, \varphi) = \bar{s}$, onde $\mathcal{S}(M, K, \varphi)$ é a classe de equivalência do sistema de invariantes associados a (M, K, φ) .*

O conjunto $\mathcal{A}(M)$ é o conjunto das classes de equivalência dos sistemas de invariantes “open book” associados a M (veja Definição 2.19). Lembramos que a aplicação $\mathcal{S} : \overline{(M, K, \varphi)} \mapsto \mathcal{S}(M, K, \varphi)$ é bem definida, onde $\overline{(M, K, \varphi)}$ representa a classe de equivalência por isotopia estruturada de (M, K, φ) (veja Observação 2.22). Assim, os Teoremas 4.14 e 3.1 fornecem o seguinte teorema que apresentamos na introdução.

Teorema 4.15 *Seja M uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada com $n \geq 4$, $n \neq 7$, ou uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa com $n = 3, 7$. Então a aplicação $\mathcal{S} : \overline{(M, K, \varphi)} \mapsto \mathcal{S}(M, K, \varphi) \in \mathcal{A}(M)$ estabelece uma bijeção entre o conjunto das classes de equivalência de “open book” simples sobre M e $\mathcal{A}(M)$.*

Observação 4.16 No caso em que $M \cong S^{2n+1}$ com $n \geq 3$, o resultado acima é bem conhecido, onde $\mathcal{A}(M)$ pode ser identificado com o conjunto das classes de congruência das matrizes unimodulares (veja Observações 2.17 e 2.20, e [Dur74, Kat74]). No entanto, o resultado não vale para $n = 2$, mesmo que $M \cong S^{2n+1}$ (veja [Sae87]).

Capítulo 5

Estrutura fibrada

Neste capítulo, analisaremos as estruturas de fibração de “open books” quando “binding” é pré-fixada, obtendo dois resultados importantes. O primeiro deles garante a unicidade da estrutura fibrada, o que implica que o sistema de invariantes “open book” é um invariante do mergulho orientado de “binding”, e o segundo especifica as condições necessárias e suficientes para que um mergulho de codimensão 2 seja “binding” de uma “open book”.

Lema 5.1 *Considere duas estruturas “open book” simples com “binding” comum K , definidas numa $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 3$, com páginas típicas F_1 e F_2 respectivamente. Então existe um difeomorfismo que preserva a orientação $\Phi : M \rightarrow M$ levando F_1 no F_2 , tal que $\Phi \circ \nu_1^+ = \nu_2^+ \circ \Phi|_{F_1}$ e $\Phi_* : H_n(M) \rightarrow H_n(M)$ é a identidade, onde $\nu_1^+ : F_1 \rightarrow M - \text{Int } F_1$ e $\nu_2^+ : F_2 \rightarrow M - \text{Int } F_2$ são pequenas translações nas direções normais positivas de F_1 e F_2 respectivamente.*

Demonstração: O difeomorfismo Φ pode ser obtido pelo argumento similar ao [Sae99, Lemmas 2.4 e 2.5] como segue.

Seja $E = \overline{M - N(K)}$, onde $N(K)$ é a vizinhança tubular de K em M , e denotemos as fibrações $E \rightarrow S^1$ associadas às duas estruturas “open book” por φ_1 e φ_2 , e as páginas típicas por $F_1 = \varphi_1^{-1}(0)$ e $F_2 = \varphi_2^{-1}(0)$ respectivamente, onde $0 \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Agora, $H^1(K) = 0$ e a trivialização de $N(K)$ é unicamente determinada a menos de homotopia. Então podemos assumir que $\varphi_1|_{\partial N(K)} = \varphi_2|_{\partial N(K)}$. Consideremos o recobrimento universal \tilde{E} de E . Pela unicidade do recobrimento universal, $\tilde{E} = F_1 \times \mathbb{R}$ é difeomorfo a $F_2 \times \mathbb{R}$.

Logo, existe um difeomorfismo $g : F_2 \times \mathbf{R} \rightarrow F_1 \times \mathbf{R}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_2 \times \mathbf{R} & \xrightarrow{g} & \tilde{E} = F_1 \times \mathbf{R} \\ \rho_2 \searrow & & \swarrow \rho_1 \\ & E & \end{array} \quad (5.1)$$

comuta, onde ρ_1 e ρ_2 são projeções do recobrimento universal associadas a φ_1 e φ_2 respectivamente. Como F_2 é compacta, podemos assumir que $\tilde{F}_2 = g(F_2 \times \{0\}) \subset F_1 \times (0, r)$ para algum inteiro positivo r . Então $\tilde{F}_1 = F_1 \times \{0\}$ e \tilde{F}_2 bordam uma variedade compacta $W_1 \subset F_1 \times [0, r]$, e \tilde{F}_2 e $F_1 \times \{r\}$ bordam uma outra variedade compacta $W_2 \subset F_1 \times [0, r]$. Como φ_1 coincide com φ_2 no bordo de E , W_1 e W_2 formam um cobordismo inversível relativo ao bordo (veja [Sie68]). Logo, W_1 é um h -cobordismo relativo ao bordo [Kin78, fact 3] (veja Figura 5.1) e conseqüentemente, W_1 é simplesmente conexa.

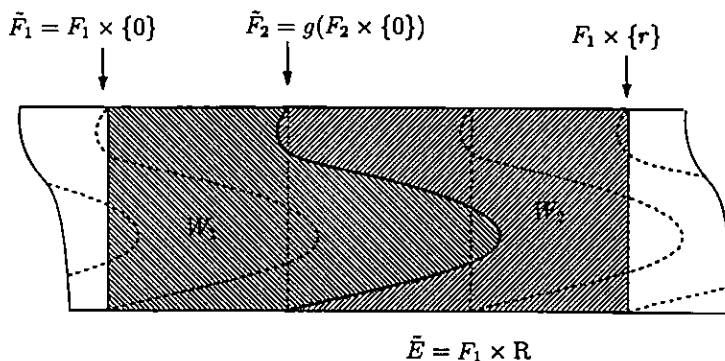


Figura 5.1: Cobordismo inversível entre \tilde{F}_1 e \tilde{F}_2

Para obtermos um mergulho de W_1 em $E \times I$ com $I = [0, 1]$, usamos a construção de Wall ([Wal70, p. 140], [Lau76], [Sae99, Lemma 2.5]) como segue. Para simplificar, identifiquemos \tilde{E} com $F_1 \times \mathbf{R}$. Seja $p_2 : \tilde{E} = F_1 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a projeção no segundo fator, e consideremos o mergulho $(i, p_2/r) : W_1 \rightarrow \tilde{E} \times I$, onde $i : W_1 \rightarrow \tilde{E}$ é a aplicação de inclusão, $(p_2/r)(x) = p_2(x)/r$, e $I = [0, 1]$ é o intervalo unitário. Colando uma subvariedade compacta de $\tilde{F}_2 \times I$ bordada por $(i, p_2/r)(\tilde{F}_2)$ e $\tilde{F}_2 \times \{1\}$ e suavizando, obtemos um mergulho $\tilde{e} : W_1 \rightarrow \tilde{E} \times I$. Denotamos a imagem deste mergulho por W . Então W é uma subvariedade cujos bordos relativos ao $\partial \tilde{E} \times I$ são $\tilde{F}_1 \times \{0\}$ e

$\tilde{F}_2 \times \{1\}$, i.e. $\overline{\partial \tilde{E} \times I} = \tilde{F}_1 \times \{0\} \cup \tilde{F}_2 \times \{1\}$ (veja Figura 5.2). Usando a projeção $\rho_1 \times \text{id} : \tilde{E} \times I \rightarrow E \times I$, onde ρ_1 é a projeção dada no Diagrama (5.1), definimos a aplicação

$$\bar{e} = (\rho_1 \times \text{id}) \circ \tilde{e} : W_1 \rightarrow E \times I.$$

Pode ser verificado facilmente que é um mergulho, cuja imagem é $\hat{W} = (\rho_1 \times \text{id})(W)$, bordada por $F_1 \times \{0\}$ e $F_2 \times \{1\}$ relativamente ao $\partial E \times I$, i.e. $\overline{\partial \hat{W}} - \partial E \times I = F_1 \times \{0\} \cup F_2 \times \{1\}$ (veja Figura 5.3).

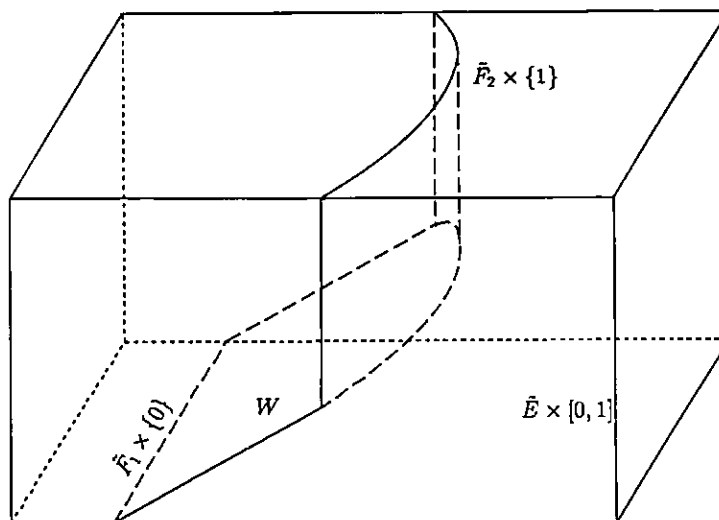


Figura 5.2: Mergulho de W_1 em $\tilde{E} \times I$

A seguir, identificamos W_1 , W e $\hat{W} = (\rho_1 \times \text{id})(W_1)$ através dos seus respectivos mergulhos. Então, podemos supor que $W = W_1$ e ele está mergulhado simultaneamente em $\tilde{E} \times I$ e em $E \times I$ (veja [Wal70, pp.140-141]).

Temos que $W \subset \tilde{E} \times I$ tal que

$$\begin{cases} W \cap (\tilde{E} \times \{0\}) = \tilde{F}_1 \times \{0\}, \\ W \cap (\tilde{E} \times \{1\}) = \tilde{F}_2 \times \{1\} \end{cases}$$

e W é um h -cobordismo entre $\tilde{F}_1 \times \{0\}$ e $\tilde{F}_2 \times \{1\}$ relativo ao bordo. Como $n \geq 3$ e $\tilde{F}_1 \cong F_1$, $\tilde{F}_2 \cong F_2$ são simplesmente conexas, temos o seguinte.

Lema 5.2 *Se $n \geq 3$, W é um h -cobordismo entre F_1 e F_2 relativo ao bordo, e conseqüentemente, $W \cong F_1 \times I$.*

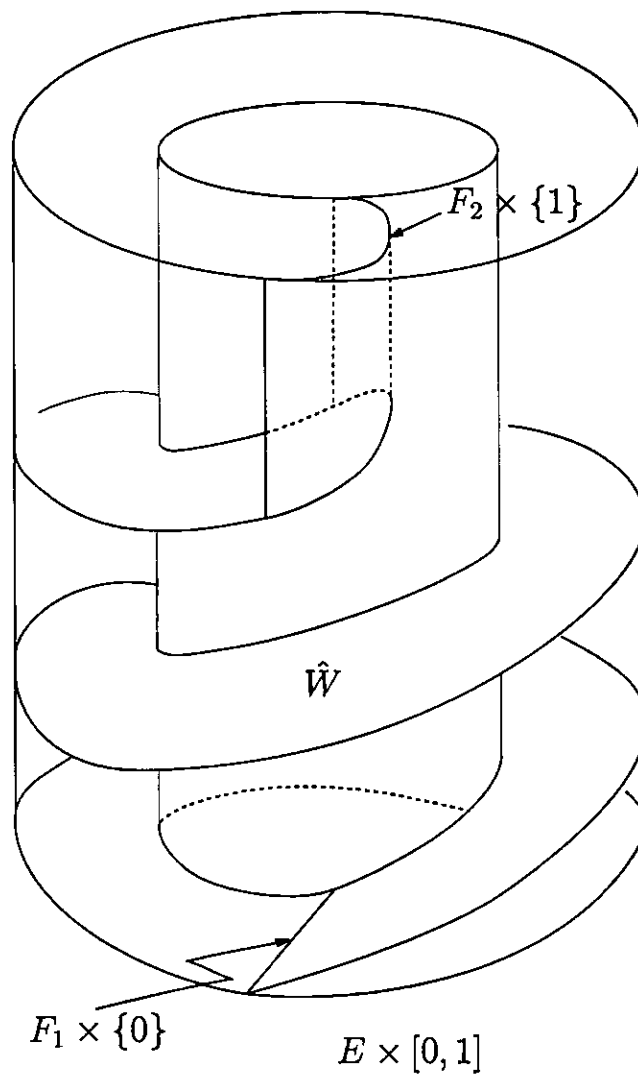


Figura 5.3: Mergulho de W_1 em $E \times I$

Recortando $E \times I$ ao longo de $\hat{W} = (\rho_1 \times \text{id})(W)$, obtemos uma $(2n + 2)$ -variedade compacta que denotaremos por X . Considerando a translação no espaço de recobrimento $\tau : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$, a variedade compacta em $\tilde{E} \times I$ bordada por W e $W' = (\tau \times \text{id})(W)$ pode ser identificada com X pela projeção do recobrimento $\rho_1 \times \text{id} : \tilde{E} \times I \rightarrow E \times I$ (veja Figura 5.4).

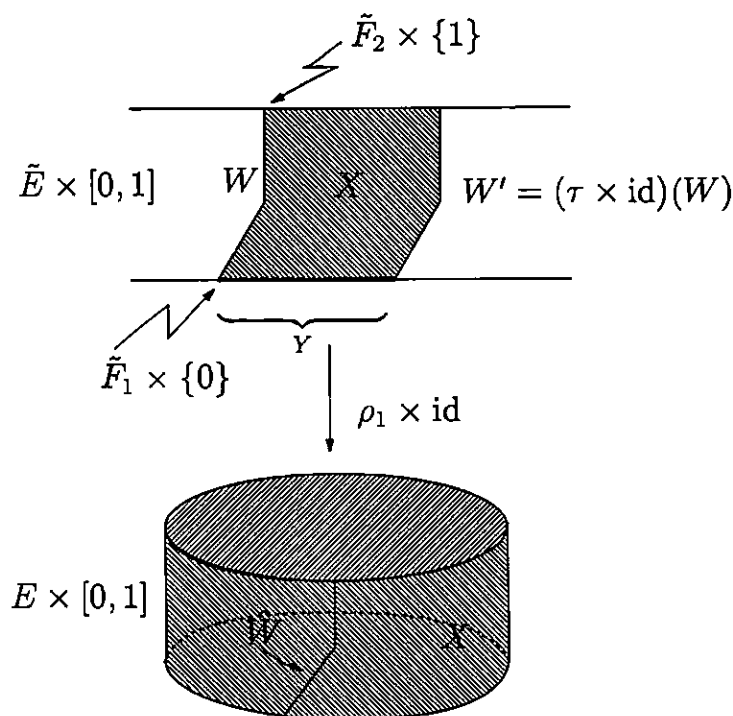


Figura 5.4: Recortando $E \times I$ ao longo de \hat{W}

Lema 5.3 X é um h -cobordismo entre W e W' relativo ao bordo.

Demonstração: Recortando $\tilde{E} \times I$ ao longo de W , teremos duas variedades, cuja intersecção é W . Como W e $\tilde{E} \times I$ são simplesmente conexas, estas duas variedades devem ser simplesmente conexas pelo teorema de van-Kampen. Tomemos aquele que contém W' e recortando ao longo de W' , teremos duas novas variedades, onde uma delas é X . Como W' é simplesmente conexa, ambas variedades resultantes devem ser simplesmente conexas, o que implica que X é simplesmente conexa (veja Figura 5.4).

Como W , W' e X são simplesmente conexas, basta provarmos que $H_*(X, W) = 0$. Para isso, consideremos $\tilde{E} = F_1 \times \mathbb{R}$, e seja $Y = (F_1 \times I) \times \{0\}$. Então a inclusão

$W \hookrightarrow W \cup Y \cup W'$ é uma equivalência de homotopia e conseqüentemente,

$$H_*(X, W) \cong H_*(X, W \cup Y \cup W') \cong H_*(E \times I, \hat{W} \cup (E \times \{0\}))$$

pela excisão. Como $E \times \{0\} \hookrightarrow \hat{W} \cup (E \times \{0\})$ é uma equivalência de homotopia, temos que

$$H_*(X, W) \cong H_*(E \times I, \hat{W} \cup (E \times \{0\})) \cong H_*(E \times I, E \times \{0\}) = 0.$$

Analogamente, temos $H_*(X, W') = 0$. Como $n \geq 3$, (X, W, W') é um h -cobordismo relativo ao bordo [Mil65]. ■

Assim, existe um difeomorfismo $\Theta : W \times I \rightarrow X$ tal que $\Theta|_{W \times \{0\}} = \text{id} : W \times \{0\} \rightarrow W$. Consideremos o difeomorfismo $\Theta_1 = \Theta|_{W \times \{1\}} : W \rightarrow W'$. Então $\tilde{\Phi} = \Theta_1^{-1} \circ ((\tau \times \text{id})|_W) : W \rightarrow W$ é um difeomorfismo e temos

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}(F_1) = F_1, \\ \tilde{\Phi}(F_2) = F_2, \end{cases}$$

onde os bordos $\tilde{F}_1 \times \{0\}$ e $\tilde{F}_2 \times \{1\}$ de W são identificados naturalmente com F_1 e F_2 , respectivamente.

Por X ser um h -cobordismo relativo ao bordo, temos que

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}|_{F_1} = h_1, \\ \tilde{\Phi}|_{F_2} = h_2, \end{cases}$$

onde h_1 e h_2 são monodromias de φ_1 e φ_2 respectivamente. Por outro lado, pelo Lema 5.2, existe um difeomorfismo $\lambda : F_1 \times I \rightarrow W$ tal que $\lambda|_{F_1 \times \{0\}} = \text{id}$. Consideremos o difeomorfismo $\lambda_1 = \lambda|_{F_1 \times \{1\}} : F_1 \rightarrow F_2$ induzido por ele. Então, h_1 e $\lambda_1^{-1} \circ h_2 \circ \lambda_1$ são pseudo-isotópicos relativamente aos seus bordos, pela pseudo-isotopia $\lambda^{-1} \circ \tilde{\Phi} \circ \lambda$.

Agora definimos o difeomorfismo

$$\Phi' : E = F_1 \times I / (x, 1) \sim (h_1(x), 0) \rightarrow E = F_2 \times I / (y, 1) \sim (h_2(y), 0)$$

por

$$\Phi' = (\lambda_1 \times \text{id}) \circ \lambda^{-1} \circ \tilde{\Phi}^{-1} \circ \lambda.$$

Então temos que

$$\Phi'(x, 1) = (\lambda_1 \times \text{id}) \circ \lambda^{-1} \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\lambda_1(x), 1)$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda_1 \times \text{id}) \circ \lambda^{-1} (h_2^{-1} \circ \lambda_1(x), 1) \\
&= (\lambda_1 \times \text{id}) (\lambda_1^{-1} \circ h_2^{-1} \circ \lambda_1(x), 1) \\
&= (h_2^{-1} \circ \lambda_1(x), 1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Phi'(h_1(x), 0) &= (\lambda_1 \times \text{id}) \circ \lambda^{-1} \circ \tilde{\Phi}^{-1}(h_1(x), 0) \\
&= (\lambda_1 \times \text{id})(x, 0) \\
&= (\lambda_1(x), 0).
\end{aligned}$$

Logo Φ' está bem definida e é um difeomorfismo que preserva a orientação. Além disso temos o seguinte lema.

Lema 5.4 $\Phi'_* : H_n(E) \rightarrow H_n(E)$ é a identidade.

Demonstração: Como $\overline{E - N(F_1)} \cong F_1 \times I$, onde $I = [0, 1]$ e $N(F_1)$ é a vizinhança tubular de F_1 em E , temos que $H_n(E, F_1) \cong H^{n+1}(E - F_1 \times I) \cong H^{n+1}(F_1) = 0$ pela dualidade de Poncaré-Lefschetz. Então pela seqüência exata

$$H_n(F_1) \xrightarrow{i'_{F_1*}} H_n(E) \rightarrow H_n(E, F_1)$$

do par (E, F_1) , temos que $i'_{F_1*} : H_n(F_1) \rightarrow H_n(E)$ é sobrejetora, onde $i'_{F_1} : F_1 \rightarrow E$ é a inclusão dada por $i'_{F_1}(x) = x \times \{1\}$, onde $x \times \{1\}$ é um ponto em $F_1 \times \{1\} \subset E = F_1 \times I / (x, 1) \sim (h_1(x), 0)$.

Logo, todo $\xi \in H_*(E)$ pode ser representado por um n -ciclo $a \times \{1\} \subset E = F_1 \times I / (x, 1) \sim (h_1(x), 0)$.

Denotando a classe de homologia de $a \times \{1\}$ em $H_n(E)$ por $[a \times \{1\}]$, teremos

$$\Phi'_*(\xi) = \Phi'_*([a \times \{1\}]) = [\Phi'(a \times \{1\})] = [h_2^{-1} \circ \lambda_1(a) \times \{1\}].$$

Como h_2 é isotópico à identidade de F_2 em E pelos difeomorfismos a um parâmetro determinados pela estrutura “open book”, temos que $\Phi'_*(\xi) = [\lambda_1(a) \times \{1\}]$.

Agora, observemos que $\rho_{2*} : H_n(\tilde{E}) = H_n(F_2) \rightarrow H_n(E)$ é sobrejetora e $\lambda_1(a)$ é isotópico a a em \tilde{E} . Então eles são isotópicos em E e conseqüentemente, $[\lambda_1(a) \times \{1\}] = [a \times \{1\}]$. Logo, $\Phi'_*(\xi) = [a \times \{1\}] = \xi$. Isto prova o lema. ■

Como $\Phi' : E \rightarrow E$ é identidade sobre ∂E , existe uma extensão natural $\Phi : M \rightarrow M$ que preserva a orientação tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(E) & \xrightarrow{\Phi'_*} & H_n(E) \\ i_{E*} \downarrow & & i_{E*} \downarrow \\ H_n(M) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(M) \end{array}$$

comuta, onde $i_E : E \rightarrow M$ é a inclusão. Observando que $K = \partial F_1$ é $(n-2)$ -conexa, temos

$$H_n(M, E) \cong H_n(K \times D^2, \partial(K \times D^2)) \cong H^{n+1}(K \times D^2) \cong H^{n+1}(K) = H_{n-2}(K) = 0$$

pelo teorema da excisão e dualidade de Poincaré-Lefschetz. Então pela seqüência exata de homologia do par (M, E) , temos

$$\dots \longrightarrow H_n(E) \xrightarrow{i_{E*}} H_n(M) \longrightarrow 0$$

e i_{E*} é sobrejetora. Logo, pelo Lema 5.4 e a comutatividade do diagrama acima, $\Phi_* : H_n(M) \rightarrow H_n(M)$ é a identidade.

Isto conclui a demonstração do Lema 5.1. ■

Teorema 5.5 *Suponhamos que K é uma $(2n-1)$ -variedade orientada, $(n-2)$ -conexa e fechada, mergulhada numa $(2n+1)$ -variedade orientada, $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 4, n \neq 7$, ou numa $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa e orientada com $n = 3, 7$. Então todas as estruturas “open book” simples e orientadas sobre M com “binding” K são estruturalmente isotópicas entre si.*

Demonstração: Sejam (K, φ_1) e (K, φ_2) as estruturas “open book” em questão e denotamos a forma de Seifert e a página típica de (K, φ_1) por Γ_1 e F_1 respectivamente, e a forma de Seifert e a página típica de (K, φ_2) por Γ_2 e F_2 respectivamente. Vamos mostrar que o isomorfismo $H_n(F_1) \rightarrow H_n(F_2)$ induzido por $\Phi|_{F_1} : F_1 \rightarrow F_2$ induz uma equivalência entre os dois sistemas de invariantes “open book”, onde Φ é o difeomorfismo do Lema 5.1.

Pela definição de Φ' no Lema 5.1, temos que $\Phi'|_{F_1} : F_1 \times \{0\} \rightarrow F_2 \times \{0\}$ é um difeomorfismo que preserva a orientação. Então $\Phi|_{F_1} : F_1 \rightarrow F_2$ é um difeomorfismo, e induz um isomorfismo $(\Phi|_{F_1})_* : H_n(F_1) \rightarrow H_n(F_2)$ que preserva o invariante tangencial e a forma de intersecção.

Pelo fato de Φ_* ser identidade sobre $H_n(M)$, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_1) & \xrightarrow{(\Phi|_{F_1})_*} & H_n(F_2) \\ i_{F_1*} \searrow & & \swarrow i_{F_2*} \\ & H_n(M) & \end{array}$$

onde $i_{F_j} : F_j \rightarrow M, j = 1, 2$, é a aplicação de inclusão. Relembramos que $\Phi \circ \nu_1^+ = \nu_2^+ \circ \Phi|_{F_1}$, onde ν_1^+ e ν_2^+ são pequenas translações nas direções normais positivas de F_1 e F_2 respectivamente. Então $\text{lk}(\nu_2^+(\Phi(\xi)), \Phi(\zeta)) = \text{lk}(\Phi(\nu_1^+(\xi)), \Phi(\zeta))$ para todos n -ciclos ξ e ζ em F_1 representando elementos de $R(\ker i_{F_1*})$. Se $r\nu_1^+(\xi)$ borda uma $(n+1)$ -cadeia $\tilde{\xi}$ em M , então $r\Phi(\nu_1^+(\xi))$ borda $\Phi(\tilde{\xi})$ e conseqüentemente, temos que $\text{lk}(\Phi(\nu_1^+(\xi)), \Phi(\zeta)) = \text{lk}(\nu_1^+(\xi), \zeta)$, pois Φ preserva a orientação. Assim, $\Gamma_2((\Phi|_{F_1})_*(\xi), (\Phi|_{F_1})_*(\zeta)) = \Gamma_1(\xi, \zeta)$ para ξ e ζ em $R(\ker i_{F_1*})$.

Desta forma, $(\Phi|_{F_1})_*$ determina uma equivalência entre os sistemas de invariantes “open book” associados a (K, φ_1) e (K, φ_2) . Logo, pelo Teorema 3.1, duas estruturas “open book” são estruturalmente isotópicas. Isto conclui a demonstração do Teorema 5.5.

■

Observação 5.6 Pelo Teorema 5.5, a estrutura de fibração de uma “open book” sobre uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada com $n \geq 4, n \neq 7$, ou sobre uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa com $n = 3, 7$, é determinada unicamente pela classe de isotopia orientada de sua “binding” K mergulhada em M . Então, o sistema de invariantes “open book” é um invariante do mergulho da “binding”.

Como o mergulho determina a estrutura “open book”, eventualmente denotaremos a “open book” (M, K, φ) simplesmente por (M, K) , para $n \geq 4, n \neq 7$, ou $n = 3, 7$ e M é uma esfera homológica racional.

Teorema 5.7 *Seja K uma $(2n-1)$ -variedade $(n-2)$ -conexa e fechada mergulhada numa $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 3$. Então temos o que segue.*

- (1) K é a “binding” de alguma estrutura “open book” (que não é necessariamente simples) sobre M com a página F simplesmente conexa se, e somente se, o fibrado normal de K em M é trivial (ou equivalentemente, a vizinhança tubular $N(K)$

de K é trivial), $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$, e $\pi_i(E)$ são finitamente gerados para todo i , onde $E = \overline{M - N(K)}$.

(2) A “open book” acima é simples se, e somente se, $\pi_i(E) = 0$ para $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Demonstração:

(1): Suponhamos que K é a “binding” de uma “open book” (não necessariamente simples) com a página típica F simplesmente conexa. Então $N(K)$ é trivial pela definição de estruturas “open book”.

Pela seqüência exata de homotopia

$$\dots \rightarrow \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \dots$$

associada à fibração $E \rightarrow S^1$, e pelo fato de F ser simplesmente conexa, temos que $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$.

Agora, notemos que a seqüência acima nos fornece $\pi_i(E) \cong \pi_i(F)$ para $i > 1$. Como F é simplesmente conexa, o Corolário 16 de [Spa66, Capítulo 9, Seção 6] implica que $\pi_i(F)$ são finitamente gerados para todo i . Logo, $\pi_i(E)$ são finitamente gerados para todo i .

Suponhamos agora que $N(K)$ é trivial, $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$ e $\pi_i(E)$ são finitamente gerados para todo i . Provaremos que existe uma estrutura “open book” (não necessariamente simples) com as páginas simplesmente conexas.

Como $N(K)$ é trivial, $\partial E = \partial N(K)$ pode ser identificado com $K \times S^1$ e logo temos uma fibração trivial $\partial E \rightarrow S^1$ definida como projeção no segundo fator. Vamos verificar que esta fibração estende para E , usando o teorema da fibração de Browder-Levine [BL66]. Para isso, precisamos de alguns conceitos envolvidos como segue.

Seja E uma variedade compacta com bordo e suponhamos que exista uma fibração orientável $f : \partial E \rightarrow S^1$ e consideremos $v \in H^1(S^1)$ o gerador correspondente à classe de orientação de S^1 . Então, a classe $\vartheta(f) = f^*(v) \in H^1(\partial E)$ é definida. Por outro lado, a aplicação de inclusão $i : \partial E \rightarrow E$ induz uma aplicação de restrição $i^* : H^1(E) \rightarrow H^1(\partial E)$. Então temos o seguinte.

Teorema 5.8 (Browder-Levine [BL66]) *Se E é uma m -variedade compacta com $m > 5$, $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$, $\pi_i(E)$ são finitamente gerados para todo $i \geq 2$, e se existe uma classe não nula $\vartheta \in H^1(E)$ tal que $i^*\vartheta = \vartheta(f)$, então f se estende a uma fibração $\tilde{f} : E \rightarrow S^1$.*

Na nossa situação, já foram verificadas todas as condições do teorema de Browder-Levine, exceto a existência de ϑ , onde $f : \partial E = K \times S^1 \rightarrow S^1$ é a projeção no segundo fator de $\partial E = K \times S^1$. Como K é simplesmente conexa, temos que $H^1(K) = 0$. Logo, segue do teorema de Künneth que $H^1(K \times S^1) \cong H^1(S^1)$ pela inclusão trivial de S^1 em $K \times S^1$. Então $f^* : H^1(S^1) \rightarrow H^1(K \times S^1)$ é um isomorfismo e $\vartheta(f) = f^*(v)$ é um gerador de $H^1(K \times S^1) \cong \mathbf{Z}$. Assim, se $i^* : H^1(E) \rightarrow H^1(\partial E)$ induzido pela inclusão $i : \partial E \rightarrow E$ é sobrejetora, então existe um elemento não nulo $\vartheta \in H^1(E)$ tal que $i^*\vartheta = \vartheta(f)$.

Consideremos a seqüência exata de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^1(E) \xrightarrow{i^*} H^1(\partial E) \rightarrow H^2(E, \partial E) \rightarrow \dots$$

associada ao par $(E, \partial E)$. Como temos $H^2(E, \partial E) \cong H_{2n-1}(E)$ pela dualidade de Poincaré-Lefschetz, a seqüência torna-se

$$\dots \rightarrow H^1(E) \xrightarrow{i^*} H^1(\partial E) \rightarrow H_{2n-1}(E) \rightarrow \dots$$

Assim, i^* é sobrejetora, se $H_{2n-1}(E) = 0$. A seqüência exata de Mayer-Vietoris associada a $\{E, N(K)\}$ é

$$\dots \rightarrow H_{2n}(M) \rightarrow H_{2n-1}(\partial E) \rightarrow H_{2n-1}(E) \oplus H_{2n-1}(N(K)) \rightarrow H_{2n-1}(M) \rightarrow \dots$$

Temos que $H_{2n}(M) = H_{2n-1}(M) = 0$ pela nossa condição de conexidade, e também temos que $H_{2n-1}(N(K)) \cong H_{2n-1}(K)$ pois $N(K) \cong K \times D^2$. Então a seqüência torna-se

$$0 \rightarrow H_{2n-1}(\partial E) \rightarrow H_{2n-1}(E) \oplus H_{2n-1}(K) \rightarrow 0.$$

Temos $H_{2n-1}(\partial E) \cong H_{2n-1}(K \times S^1) \cong H^1(K \times S^1) \cong H^1(S^1) \cong \mathbf{Z}$, e $H_{2n-1}(K) \cong \mathbf{Z}$ pelo fato de K ser fechada e orientável. Então a seqüência se reduz a

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_{2n-1}(E) \oplus \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Isto implica que $H_{2n-1}(E) = 0$ e conseqüentemente, i^* é sobrejetora. Assim, existe um ϑ desejado e pelo teorema de Browder-Levine, a fibração $f : \partial E \rightarrow S^1$ se estende como sendo a fibração $\tilde{f} : E \rightarrow S^1$.

Para verificarmos que a página é simplesmente conexa, observamos que a seqüência exata de homotopia associada à fibração $F \rightarrow E \rightarrow S^1$

$$\dots \rightarrow \pi_2(S^1) \rightarrow \pi_1(F) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(S^1)$$

se reduz a

$$0 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \xrightarrow{\tilde{f}_*} \pi_1(S^1). \quad (5.2)$$

Observamos também que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial E) \cong \pi_1(K \times S^1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(E) \\ & f_* \searrow & \swarrow \tilde{f}_* \\ & & \pi_1(S^1) \end{array}$$

comuta. Como f_* é sobrejetora por f ser projeção no segundo fator, \tilde{f}_* também é sobrejetora. Mas $\pi_1(E) \cong \mathbf{Z}$. Então \tilde{f}_* é um isomorfismo, o que implica que $\pi_1(F) = \{1\}$ pela seqüência exata (5.2).

Para verificarmos que F é conexa, observemos que a seqüência exata de homotopia da fibração $F \rightarrow E \rightarrow S^1$ no nível zero é

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \xrightarrow{\tilde{f}_*} \mathbf{Z} \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow 0$$

desde que E é conexa. Como \tilde{f}_* é um isomorfismo, temos que $\pi_0(F) = 0$, o que implica que F é conexa.

(2): Consideremos a seqüência exata de homotopia associada à fibração $F \rightarrow E \rightarrow S^1$

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(S^1) \rightarrow \pi_i(F) \rightarrow \pi_i(E) \rightarrow \cdots$$

Isto implica que $\pi_i(F) \cong \pi_i(E)$ para $i = 2, \dots, n-1$. Como F é simplesmente conexa, ela é $(n-1)$ -conexa se, e somente se, $\pi_i(E) = 0$ para $i = 2, \dots, n-1$. Como K é $(n-2)$ -conexa, isto conclui a demonstração.

Isto completa a demonstração do Teorema 5.7. ■

Pelos Teoremas 4.15, 5.5 e 5.7 temos o seguinte.

Corolário 5.9 *Seja M uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa, fechada e orientada com $n \geq 4, n \neq 7$, ou uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa e orientada com $n = 3, 7$. Então existe uma bijeção entre $\mathcal{A}(M)$ e o conjunto das classes de isotopia orientada das subvariedades de codimensão 2 que satisfazem as condições do Teorema 5.7 (1) e (2).*

Capítulo 6

Exemplos

Neste capítulo, apresentaremos o conceito e a existência da “open book” minimal, e também apresentaremos alguns resultados e exemplos que podem ser obtidos pelo teorema da classificação da estrutura “open book” (Teorema 4.15).

Dadas duas estruturas “open books”, podemos obter uma nova estrutura “open book” através do método denominado de *soma conexa* “open book” definido como segue.

Definição 6.1 Seja K_i a “binding” orientada e conexa de uma estrutura “open book” (não necessariamente simples) sobre uma $(2n+1)$ -variedade orientada M_i , $i = 1, 2$. Então a vizinhança tubular suficientemente pequena de um ponto de K_i , tomada em M_i , é um $(2n+1)$ -disco D_i . Além disso, $D_i - (D_i \cap K_i)$ fibra trivialmente sobre S^1 pela fibração da estrutura “open book” (veja Figura 6.1). Efetuamos uma soma conexa $M_1 \# M_2 = (M_1 - \text{Int } D_1) \cup (M_2 - \text{Int } D_2)$ obtida pela identificação natural entre ∂D_1 e ∂D_2 (usando as orientações opostas de ∂D_1 e ∂D_2 , e de $\partial D_1 \cap K_1$ e $\partial D_2 \cap K_2$) respeitando as fibrações no bordo dos discos, e colamos $K_1 - (\text{Int } D_1 \cap K_1)$ com $K_2 - (\text{Int } D_2 \cap K_2)$ ao longo dos seus bordos. Então a variedade $M_1 \# M_2$ apresenta uma estrutura “open book” com a “binding” $K_1 \# K_2$ e a página $F_1 \natural F_2$. Esta nova estrutura “open book” é denominada *soma conexa* “open book” ou simplesmente de *soma conexa* quando não há ambigüidade, e denotemos por $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ ou simplesmente por $M_1 \#_b M_2$. Notemos que a estrutura “open book” resultante não depende da escolha dos pontos sobre K_i , por K_i serem conexas.

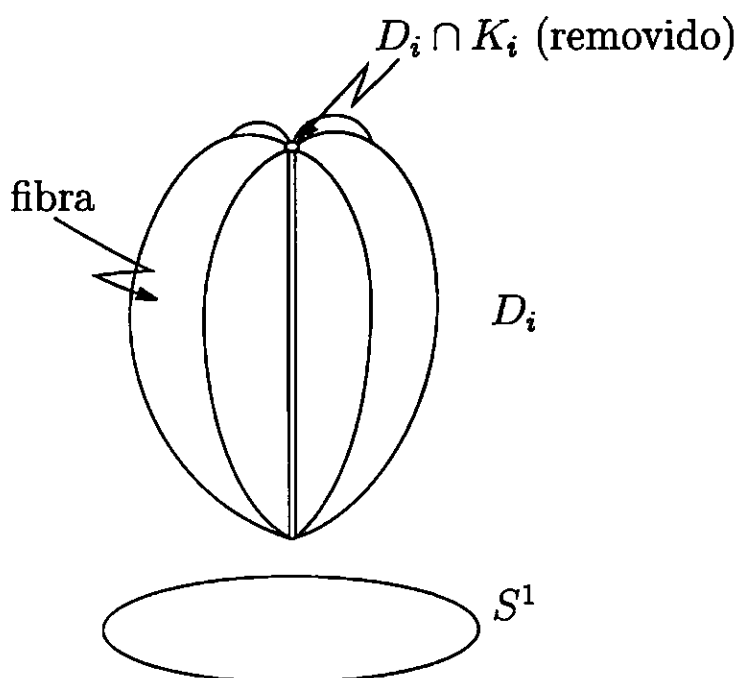


Figura 6.1: Fibração trivial de $D_i - (D_i \cap K_i)$ sobre S^1

Observação 6.2 Se (M_i, K_i) são “open book” simples, então $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ também é uma “open book” simples.

No nosso caso, sempre assumiremos que as estruturas “open book” envolvidas na soma conexa “open book” são simples.

Agora consideremos \mathcal{A}_{2n+1} , a reunião de todos $\mathcal{A}(M)$ tais que M é uma $(2n + 1)$ -variedade orientada, $(n - 1)$ -conexa e fechada. Então podemos definir a soma em \mathcal{A}_{2n+1} como segue.

Definição 6.3 Sejam $s_1, s_2 \in \mathcal{A}_{2n+1}$. Então $s_1 \in \mathcal{A}(M_1)$ e $s_2 \in \mathcal{A}(M_2)$ para algumas $(2n + 1)$ -variedades orientadas, $(n - 1)$ -conexas e fechadas, M_1 e M_2 . Sejam $\{G_1, Q_{G_1}, \alpha_{G_1}, i_{G_1}, \Gamma_{G_1}\}$ e $\{G_2, Q_{G_2}, \alpha_{G_2}, i_{G_2}, \Gamma_{G_2}\}$ as representantes de s_1 e s_2 respectivamente. Então definimos a soma como sendo

$$s_1 + s_2 = [\{G_1 \oplus G_2, Q_{G_1} \oplus Q_{G_2}, \alpha_{G_1} + \alpha_{G_2}, i_{G_1} \oplus i_{G_2}, \Gamma_{G_1} \oplus \Gamma_{G_2}\}],$$

onde $[s]$ denota a classe de equivalência de s , $G_1 \oplus G_2$, $Q_{G_1} \oplus Q_{G_2}$ são somas diretas, $\Gamma_{G_1} \oplus \Gamma_{G_2}$ é a soma direta em relação a $R(\ker(i_{G_1} \oplus i_{G_2})) = R(\ker i_{G_1}) \oplus R(\ker i_{G_2})$,

$i_{G_1} \oplus i_{G_2} : G_1 \oplus G_2 \rightarrow H_n(M_1) \oplus H_n(M_2)$ é definido de forma canônica, e $\alpha_{G_1} + \alpha_{G_2} : G_1 \oplus G_2 \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é definido por $(\alpha_{G_1} + \alpha_{G_2})(\xi \oplus \zeta) = \alpha_{G_1}(\xi) + \alpha_{G_2}(\zeta)$ para todo $\xi \in G_1$ e $\zeta \in G_2$.

Podemos observar que a operação não depende da escolha de representantes. Logo a operação acima está bem definida e temos o seguinte resultado.

Proposição 6.4 *Sejam M_1 e M_2 $(2n + 1)$ -variedades $(n - 1)$ -conexas e fechadas. Se (M_1, K_1) e (M_2, K_2) são “open book” sobre M_1 e M_2 respectivamente, então temos que $\mathcal{S}((M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)) = \mathcal{S}(M_1, K_1) + \mathcal{S}(M_2, K_2)$, onde $\mathcal{S}(M, K)$ denota a classe de equivalência do sistema de invariantes “open book” associado ao (M, K) .*

Demonstração: Denotamos as páginas típicas de (M_1, K_1) e (M_2, K_2) por F_1 e F_2 respectivamente. Então a página típica de $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ é $F_1 \natural F_2$ cujo grupo de homologia na dimensão n decompõe naturalmente como sendo $H_n(F_1) \oplus H_n(F_2)$, e exceto o invariante tangencial, $\mathcal{S}((M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2))$ decompõe como soma direta dos invariantes de (M_1, K_1) e (M_2, K_2) . Logo $\mathcal{S}((M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)) = \mathcal{S}(M_1, K_1) + \mathcal{S}(M_2, K_2)$ se, e somente se, $\alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi + \zeta) = \alpha_{F_1}(\xi) + \alpha_{F_2}(\zeta)$ para todo $\xi \in H_n(F_1)$ e $\zeta \in H_n(F_2)$.

O invariante tangencial $\alpha_{F_1 \natural F_2}$ não é um homomorfismo, mas por ser invariante tangencial de uma $2n$ -variedade $(n - 1)$ -conexa, temos que

$$\alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi + \zeta) = \alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi) + \alpha_{F_1 \natural F_2}(\zeta) + Q_{F_1 \natural F_2}(\xi, \zeta) \partial t_n,$$

onde t_n é o gerador de $\pi_n(S^n)$ e $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo do Lema 1.14 pelo [Wal65]. Como $Q_{F_1 \natural F_2}(\xi, \zeta) = 0$ para todo $\xi \in H_n(F_1)$ e $\zeta \in H_n(F_2)$, temos que $\alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi + \zeta) = \alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi) + \alpha_{F_1 \natural F_2}(\zeta)$. Pela definição do invariante tangencial, $\alpha_{F_1 \natural F_2}(\xi) = \alpha_{F_1}(\xi)$ para $\xi \in H_n(F_1)$ e $\alpha_{F_1 \natural F_2}(\zeta) = \alpha_{F_2}(\zeta)$ para $\zeta \in H_n(F_2)$, o que conclui a demonstração. ■

Agora veremos alguns resultados sobre a “open book” trivial (veja Definição 1.11).

Lema 6.5 *Se (M, K, φ) é trivial com $n \geq 3$, então*

- (1) M é uma $(2n + 1)$ -esfera homotópica,
- (2) $F \cong D^{2n}$ e $K = \partial F \cong S^{2n-1}$, onde F é a página típica de (M, K, φ) .

Demonstração: (1) Pelo Lema 2.5 temos que $H_n(M) = 0$. Usando a dualidade de Poincaré e o teorema dos coeficientes universais, temos que $H_{n+1}(M) \cong H^n(M) \cong \text{Hom}(H_n(M), \mathbf{Z}) = 0$. Logo, $H_*(M) \cong H_*(S^{2n+1})$ e como $\pi_1(M) = \{1\}$, temos que M é uma esfera homotópica.

(2) Devido à nossa hipótese, $H_*(F) \cong H_*(D^{2n+1})$, $\pi_1(F) = \{1\}$ e $\pi_1(\partial F) = \pi_1(K) = \{1\}$. Logo $F \cong D^{2n}$ e $\partial F \cong S^{2n-1}$ pela resolução da conjectura de Poincaré generalizada (veja [Sma61] e [Mil65]). ■

Proposição 6.6 *Seja M uma $(2n+1)$ -esfera homotópica com $n \geq 3$. Então existe uma única estrutura “open book” trivial sobre M a menos de isotopia estruturada.*

Demonstração: O resultado segue do Teorema 4.15. ■

Observação 6.7 Consideremos uma “open book” (simples) (M, K) sobre uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 3$. Suponhamos que (S^{2n+1}, K_0) é uma “open book” trivial (veja Definição 1.11). Como a estrutura “open book” trivial é aquela associada ao mergulho trivial de S^{2n-1} , a soma conexa “open book” por (S^{2n+1}, K_0) não altera a estrutura “open book”. Logo $(M, K) \#_b (S^{2n+1}, K_0)$ é sempre estruturalmente isotópica à (M, K) .

Se trocarmos S^{2n+1} por uma $(2n+1)$ -esfera homotópica na observação acima, precisará das condições adicionais como segue.

Observação 6.8 Consideremos uma “open book” (simples) (M, K) sobre uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 4, n \neq 7$, ou sobre uma $(2n+1)$ -esfera homológica racional $(n-1)$ -conexa M com $n = 3, 7$. Suponhamos que (M_0, K_0) é uma “open book” trivial, onde M_0 é uma $(2n+1)$ -esfera homotópica que não é necessariamente difeomorfa à S^{2n+1} (veja Definição 1.11 e Lema 6.5). Então temos que $\mathcal{S}(M, K) = \mathcal{S}((M, K) \#_b (M_0, K_0))$.

Logo, se $M \cong M \# M_0$ por um difeomorfismo que preserva a orientação e que induz a aplicação identidade em $H_n(M) = H_n(M \# M_0)$, então (M, K) e $(M, K) \#_b (M_0, K_0)$ são estruturalmente isotópicas pelo Teorema 3.1.

Definição 6.9 Uma estrutura “open book” (M, K) é dita *decomponível no sentido fraco* quando $M \cong M_1 \# M_2$ e (M, K) é estruturalmente isotópica a $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ para algumas “open books” não triviais (M_i, K_i) , $i = 1, 2$.

O seguinte lema decorre da definição acima.

Lema 6.10 *Suponhamos que (M, K) é uma estrutura “open book” decomponível no sentido fraco sobre uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M com $n \geq 3$. Então $S(M, K) = \{G_1, Q_{G_1}, \alpha_{G_1}, i_{G_1}, \Gamma_{G_1}\} + \{G_2, Q_{G_2}, \alpha_{G_2}, i_{G_2}, \Gamma_{G_2}\}$ para algum $\{G_1, Q_{G_1}, \alpha_{G_1}, i_{G_1}, \Gamma_{G_1}\}$ e $\{G_2, Q_{G_2}, \alpha_{G_2}, i_{G_2}, \Gamma_{G_2}\} \in \mathcal{A}_{2n+1}$ tais que $G_1 \neq 0$, $G_2 \neq 0$ e $H_n(M) = \text{Im } i_{G_1} \oplus \text{Im } i_{G_2}$.*

A próxima proposição é uma consequência imediata do teorema da classificação (Teorema 4.15).

Proposição 6.11 *Seja $M = M_1 \# M_2$ e suponhamos que (M, K) é uma “open book”, onde M, M_1 e M_2 são $(2n + 1)$ -variedades $(n - 1)$ -conexas e fechadas, com $n \geq 4, n \neq 7$, ou M, M_1 e M_2 são $(2n + 1)$ -esferas homológicas racionais $(n - 1)$ -conexas com $n = 3, 7$. Então (M, K) é a soma conexa “open book” $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ de algumas “open books” (M_1, K_1) e (M_2, K_2) se, e somente se, o sistema de invariantes “open book” decompõe como uma soma direta relativa à decomposição $H_n(M) = H_n(M_1) \oplus H_n(M_2)$.*

Na proposição acima, supomos que $M = M_1 \# M_2$ desde início. Mesmo que não tenha esta hipótese, se tiver a condição adicional $\alpha_M = 0$, temos o seguinte.

Proposição 6.12 *Seja (M, K) uma “open book” simples sobre uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada tal que $\alpha_M = 0$ e $n \geq 4, n \neq 7$. Se $S(M, K) = \{G_1, Q_{G_1}, \alpha_{G_1}, i_{G_1}, \Gamma_{G_1}\} + \{G_2, Q_{G_2}, \alpha_{G_2}, i_{G_2}, \Gamma_{G_2}\}$ para algum $\{G_1, Q_{G_1}, \alpha_{G_1}, i_{G_1}, \Gamma_{G_1}\}$ e $\{G_2, Q_{G_2}, \alpha_{G_2}, i_{G_2}, \Gamma_{G_2}\} \in \mathcal{A}_{2n+1}$ tais que $G_1 \neq 0$, $G_2 \neq 0$ e $H_n(M) = H_1 \oplus H_2$, onde $H_1 = \text{Im } i_{G_1}$ e $H_2 = \text{Im } i_{G_2}$, então existem “open book” simples não triviais (M_1, K_1) e (M_2, K_2) tais que (M, K) seja estruturalmente isotópica a $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$. Em outras palavras, (M, K) é decomponível no sentido fraco.*

Demonstração: Pelo item 4(c) da Definição 2.15, a decomposição $H_n(M) = H_1 \oplus H_2$ é uma decomposição ortogonal relativa a $b_M : \tau H_n(M) \times \tau H_n(M) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Logo,

pelo [Wal67, Corollary, p. 285], existe a decomposição $M - \text{Int } D^{2n+1} = M'_1 \natural M'_2$ tal que $H_n(M'_i) = H_i, i = 1, 2$. Como $\alpha_M = 0$ pela hipótese, temos que $\alpha_{M'_1} = \alpha_{M'_2} = 0$. Então, pelo [Wal67, Theorem 8, p. 285], $\partial M'_1 \cong S^{2n} \cong \partial M'_2$. Assim, podemos considerar $M_1 = M'_1 \cup D^{2n+1}$ e $M_2 = M'_2 \cup D^{2n+1}$, onde as uniões são feitas pela identificação dos bordos, e temos que $M = M_1 \# M_2$.

Logo, pela nossa hipótese e pela Proposição 6.11, (M, K) é a soma conexa de (M_1, K_1) e (M_2, K_2) para algumas “open books” (M_1, K_1) e (M_2, K_2) . ■

Observação 6.13 (1) Se M for uma esfera homotópica, ou mais geralmente, se M for estavelmente paralelizável, então $\alpha_M = 0$.

(2) A condição $\alpha_M = 0$ na proposição acima foi usada para garantir que $\alpha_{M'_1} = \alpha_{M'_2} = 0$, o que implica que $\partial M'_1$ e $\partial M'_2$ são difeomorfos a S^{2n} . Caso não tenha esta condição, $\alpha_{M'_1}$ ou $\alpha_{M'_2}$ pode ser não trivial, o que implica que $\partial M'_1$ ou $\partial M'_2$ pode ser uma esfera exótica.

(3) Na Proposição 6.12, a decomposição $(M_1, K_1) \#_b (M_2, K_2)$ não é única em geral. Pois, se $M = M_1 \# M_2$ e Σ é uma esfera homotópica de dimensão $2n + 1$, então temos que $M = (M_1 \# \Sigma) \# (M_2 \# (-\Sigma))$.

Definição 6.14 Uma estrutura “open book” (M, K) é *decomponível no sentido forte* quando for estruturalmente isotópica à soma conexa $(M, K_1) \# (S^{2n+1}, K_2)$ para algumas “open books” não triviais (M, K_1) e (S^{2n+1}, K_2) .

Definição 6.15 Quando uma “open book” não é decomponível no sentido forte (fraco), dizemos que ela é *indecomponível no sentido forte (fraco)*.

Definição 6.16 Seja F a página típica de uma estrutura “open book” simples (K, φ) sobre uma $(2n + 1)$ -variedade M . Se $\text{rank } H_n(F)$ é igual ao número mínimo de geradores de $H_n(M)$ sobre \mathbf{Z} , então dizemos que (K, φ) é *minimal* por ter o menor “rank” possível de $H_n(F)$.

Teorema 6.17 Se M é uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada tal que $\tau H_n(M) = 0$, então existe uma estrutura “open book” simples minimal sobre M , para $n \geq 3$.

Demonstração: Devido ao Teorema 4.14 basta construir um sistema de invariantes “open book” com “rank” minimal.

Como $H_n(M)$ é livre, tomamos $G = H_n(M)$ e $i_G = \text{id}$. Notemos que $R(\ker i_G) = 0$, o que implica que a forma de Seifert é sempre nula. Assim, os invariantes restantes para o sistema de invariantes “open book” associado a M são α_G e a forma de intersecção Q_G .

Para construir estes invariantes, notemos que α_M é um homomorfismo (veja Observação 2.3).

Seja $\{e_1, \dots, e_r\}$ a base de $G = H_n(M)$ e escolhamos arbitrariamente o valor de $\alpha_G(e_j)$ de forma que $i_*\alpha_G(e_j) = \alpha_M(e_j)$. Isto é possível, pois $i_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1))$ é um epimorfismo devido à seqüência exata $\pi_{n-1}(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(SO(n+1)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^n)$ associada à fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$ e o fato de que $\pi_{n-1}(S^n) = 0$.

Quando n é ímpar, $\alpha_G(e_j) \in \pi_{n-1}(SO(n)) \cong 0$ ou \mathbf{Z}_2 ou $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ (veja [Wal65]) e $p_*\alpha_G(e_j) = 0 \in \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$, onde $p_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ é o homomorfismo da Observação 1.16 que anula para n ímpar.

Quando n é par, $p_*\alpha_G(e_j) \in \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbf{Z}$ pode assumir qualquer valor.

Então definimos a forma de intersecção por

$$Q_G(e_j, e_k) = \begin{cases} p_*\alpha_G(e_j) \in \mathbf{Z} & (j = k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases}$$

Observemos que ela é $(-1)^n$ -simétrica.

Agora definimos os valores de $\alpha_G : G \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ por

$$\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) = \sum_{j=1}^r \left(k_j \alpha_G(e_j) + \frac{k_j(k_j - 1)}{2} Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right) \in \pi_{n-1}(SO(n)),$$

onde $r = \text{rank } G$, t_n é o gerador de $\pi_n(S^n)$ induzido pela aplicação identidade $S^n \rightarrow S^n$ (veja Observação 2.2) e ∂ é o homomorfismo de bordo da seqüência exata

$$\pi_n(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(SO(n)) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(SO(n+1))$$

(veja Lema 1.14).

Para que $\{G, Q_G, \alpha_G, i_G, \Gamma_G\}$ seja um sistema de invariantes “open book” relativo a M , é suficiente provarmos o seguinte.

Lema 6.18 α_G satisfaz as condições dos itens 3(a), 3(b) e 3(c) da Definição 2.15.

Demonstração: 3(a). Verificaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha_G} & \pi_{n-1}(SO(n)) \\ \parallel & & \downarrow i_* \\ H_n(M) & \xrightarrow{\alpha_M} & \pi_{n-1}(SO(n+1)) \end{array}$$

comuta. Temos que

$$\begin{aligned} i_*\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) &= \sum_{j=1}^r k_j i_*\alpha_G(e_j) && (\text{por } i_*\partial t_n = 0) \\ &= \sum_{j=1}^r k_j \alpha_M(e_j) && (\text{pela definição de } \alpha_G(e_j)) \\ &= \alpha_M \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) && (\text{por } \alpha_M \text{ ser um homomorfismo}) \end{aligned}$$

e conseqüentemente, temos $i_* \circ \alpha_G = \alpha_M$ sobre $H_n(M)$.

3(b). Temos que $p_*\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) = Q_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j, \sum_{j=1}^r k_j e_j \right)$ para n par, pois

$$\begin{aligned} p_*\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) &= \sum_{j=1}^r \left(k_j p_*\alpha_G(e_j) + \frac{k_j(k_j-1)}{2} Q_G(e_j, e_j) p_*\partial t_n \right) \\ &= \sum_{j=1}^r \left(k_j Q_G(e_j, e_j) + k_j(k_j-1) Q_G(e_j, e_j) \right) \\ &\quad (\text{como } p_*\partial t_n = 2 \text{ por [Ste51, §23.4]}) \\ &= \sum_{j=1}^r k_j^2 Q_G(e_j, e_j) \\ &= Q_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j, \sum_{j=1}^r k_j e_j \right) \quad (\text{pela escolha de } Q_G). \end{aligned}$$

Para n ímpar, como $p_* \circ \alpha_G$ e Q_G são nulas, temos que

$$p_*\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) = 0 = Q_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j, \sum_{j=1}^r k_j e_j \right).$$

3(c). Finalmente, verificaremos que $\alpha_G(\xi + \zeta) = \alpha_G(\xi) + \alpha_G(\zeta) + Q_G(\xi, \zeta)\partial t_n$ para todo $\xi, \zeta \in G$. Temos

$$\begin{aligned} \alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j + \sum_{j=1}^r l_j e_j \right) &= \alpha_G \left(\sum_{j=1}^r (k_j + l_j) e_j \right) && (6.1) \\ &= \sum_{j=1}^r \left((k_j + l_j) \alpha_G(e_j) + \frac{(k_j + l_j)(k_j + l_j - 1)}{2} Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} &\alpha_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j \right) + \alpha_G \left(\sum_{j=1}^r l_j e_j \right) + Q_G \left(\sum_{j=1}^r k_j e_j, \sum_{j=1}^r l_j e_j \right) \partial t_n \\ &= \sum_{j=1}^r \left(k_j \alpha_G(e_j) + \frac{k_j(k_j-1)}{2} Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^r \left(l_j \alpha_G(e_j) + \frac{l_j(l_j-1)}{2} Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right) + \left(\sum_{j=1}^r k_j l_j Q_G(e_j, e_j) \right) \partial t_n \\
& \quad \text{(pela escolha de } \alpha_G \text{ e } Q_G) \\
& = \sum_{j=1}^r \left((k_j + l_j) \alpha_G(e_j) + \left(\frac{k_j(k_j-1)}{2} + \frac{l_j(l_j-1)}{2} + k_j l_j \right) Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right). \\
& = \sum_{j=1}^r \left((k_j + l_j) \alpha_G(e_j) + \frac{(k_j + l_j)(k_j + l_j - 1)}{2} Q_G(e_j, e_j) \partial t_n \right),
\end{aligned}$$

o qual coincide com a equação (6.1). Isto conclui a verificação das propriedades mencionadas. ■

Assim, obtemos um sistema de invariantes “open book” relativo a M . Pelo teorema da realização (Teorema 4.14), existe uma “open book” associada. Isto conclui a demonstração do Teorema 6.17. ■

Acreditamos que a condição $\tau H_n(M) = 0$ não é necessária para Teorema 6.17, mas ainda não conseguimos uma demonstração.

Conjectura 6.19 *Se M é uma $(2n+1)$ -variedade $(n-1)$ -conexa e fechada, então existe uma estrutura “open book” minimal sobre M , para $n \geq 3$.*

Observação 6.20 Notemos que a única estrutura “open book” minimal sobre S^{n+1} com $n \geq 3$ é a trivial. No entanto, sobre uma variedade mais geral, não há garantia da unicidade da “open book” minimal, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 6.21 “Open book” minimal não é necessariamente única.

Consideremos $M = S^n \times S^{n+1}$, $n \geq 4$, $n \neq 7$. Como $H_n(M) \cong \mathbf{Z}$, a forma de Seifert da “open book” minimal é trivial e conseqüentemente, “open book” minimal é determinada unicamente pela sua forma de intersecção e pelo invariante tangencial. Notemos que o invariante tangencial α_G é compatível com o invariante tangencial α_M de M se, e somente se, $\text{Im } \alpha_G \subset \ker i_* = \text{Im } \partial$, pois $\alpha_M = 0$, onde $i_* : \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n+1))$ é induzido pela inclusão e $\partial : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ é o homomorfismo de bordo associado à seqüência exata de homotopia da fibração $SO(n) \rightarrow SO(n+1) \rightarrow S^n$.

Para n par, $\text{Im } \partial \cong \mathbf{Z}$ pelo Lema 1.14 e podemos escolher um α_G correspondente a cada inteiro. Como α_G determina unicamente a forma de intersecção, temos que o conjunto

das classes de equivalência das estruturas “open book” minimal sobre $S^n \times S^{n+1}$ está em correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros, devido ao teorema da classificação (Teorema 4.15).

Para n ímpar, $\text{Im } \partial \cong \mathbb{Z}_2$ pelo Lema 1.14. Então existem exatamente duas escolhas de α_G , e a forma de intersecção é sempre nula. Assim, existem exatamente duas classes de equivalência da estrutura “open book” minimal sobre $S^n \times S^{n+1}$.

Observação 6.22 Notemos que uma “open book” minimal é indecomponível no sentido forte (não necessariamente indecomponível no sentido fraco). De fato, se existe uma decomposição $(M, K) = (M, K_1) \#_b (S^{2n+1}, K_2)$ com $H_n(F_1) \neq 0$ e $H_n(F_2) \neq 0$, onde F_1 é a página de (M, K_1) e F_2 é a página de (S^{2n+1}, K_2) , então existe uma “open book” (M, K_1) com página típica F_1 tal que $\text{rank } H_n(F_1) < \text{rank } H_n(F)$, onde F é a página de (M, K) . Conseqüentemente, (M, K) não pode ser minimal.

Assim, o Teorema 6.17 implica que existe pelo menos uma estrutura “open book” indecomponível no sentido forte, sobre qualquer $(2n+1)$ -variedade M , $(n-1)$ -conexa e fechada tal que $\tau H_n(M) = 0$, quando $n \geq 3$.

Pela discussão acima, Conjectura 6.19 implica a seguinte conjectura.

Conjectura 6.23 *Seja M uma $(2n+1)$ variedade $(n-1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$. Então existe uma estrutura “open book” indecomponível no sentido forte.*

Uma “open book” indecomponível no sentido forte nem sempre é minimal, como veremos no exemplo abaixo.

Exemplo 6.24 “Open book” indecomponível no sentido forte nem sempre é minimal.

Consideremos $S^n \times S^{n+1}$ com n ímpar, $n \geq 3$ e $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então $R(\ker i_G) \cong \mathbb{Z}$, e a forma de Seifert é $\Gamma_G = \pm 1$ (veja ítem 4(a) da Definição 2.15). Neste caso, a forma de Seifert determina somente a auto-intersecção de um dos geradores, que é obviamente nula, pois n é ímpar. Então podemos definir a forma de intersecção de forma que não seja trivial (não nula). Agora definimos o invariante tangencial α_G . Seja $\{e_1, e_2\}$ a base de G tal que e_2 é a base de $R(\ker i_G)$. Definimos o $\alpha_G : G \rightarrow \pi_{n-1}(SO(n))$ por

$$\alpha_G(ke_1 + le_2) = (k + l + klQ_G(e_1, e_2))\partial t_n \in \pi_{n-1}(SO(n)).$$

Como $\alpha_{S^n \times S^{n+1}} = 0$, a condição do ítem 3(a) da Definição 2.15 é satisfeita.

Para a condição do ítem 3(b) da Definição 2.15, notemos que

$$p_* \alpha_G(ke_1 + le_2) = (k + l + klQ_G(e_1, e_2))p_* \partial t_n = 0$$

por n ser ímpar, e $Q_G(ke_1 + le_2, ke_1 + le_2) = 0$ também pelo fato de n ser ímpar, o que verifica a condição.

Agora veremos a condição do ítem 3(c) da Definição 2.15. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha_G((ke_1 + le_2) + (k'e_1 + l'e_2)) &= \alpha_G((k + k')e_1 + (l + l')e_2) \\ &= (k + k' + l + l' + (k + k')(l + l')Q_G(e_1, e_2)) \partial t_n \end{aligned}$$

e por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} &\alpha_G(ke_1 + le_2) + \alpha_G(k'e_1 + l'e_2) + Q_G(ke_1 + le_2, k'e_1 + l'e_2) \partial t_n \\ &= (k + l + klQ_G(e_1, e_2)) \partial t_n + (k' + l' + k'l'Q_G(e_1, e_2)) \partial t_n + (kl' - lk')Q_G(e_1, e_2) \partial t_n, \end{aligned}$$

o qual coincide com a expressão obtida para $\alpha_G((ke_1 + le_2) + (k'e_1 + l'e_2))$, pois ∂t_n é de ordem 2.

Finalmente, quanto à condição do ítem 4(d) da Definição 2.15, temos

$$\Gamma_G(le_2, le_2) = l^2 \Gamma_G(e_2, e_2) = \pm l^2$$

e

$$q_M(i_G(le_2)) + \phi(\alpha_G(le_2)) = q_M(0) + \phi(l \partial t_n) = l \phi(\partial t_n) = l \pmod{2},$$

o que verifica a identidade.

Agora considere a estrutura “open book” associada ao sistema de invariantes acima, via Teorema 4.14. Este “open book” não é minimal e é indecomponível no sentido forte. De fato, se for decomponível, a forma de intersecção é dada pela forma diagonal e desde que n é ímpar, ela se anula, o que contradiz a nossa hipótese. Assim, construímos “open books” indecomponíveis no sentido forte que não são minimais.

No caso de M ser a esfera, é fácil ver que existem open “book” indecomponíveis que não são minimais, devido ao fato da existência de matriz de Seifert que não decompõe como soma direta e o teorema da classificação de nós fibrados simples [Lev70, Dur74, Kat74].

“Open books” minimais sobre variedades decomponíveis podem ser indecomponíveis no sentido fraco como no exemplo a seguir.

Exemplo 6.25 “Open book” minimal sobre variedades decomponíveis pode ser indecomponível no sentido fraco.

Consideremos $M = (S^n \times S^{n+1}) \# (S^n \times S^{n+1})$, $n \geq 3$. Como $H_n(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, a forma de Seifert da “open book” minimal é trivial e conseqüentemente, “open book” minimal é determinada unicamente pela sua forma de intersecção e pelo invariante tangencial. Seja $\{e_1, e_2\}$ a base de $G = H_n(M)$. Agora definimos a forma de intersecção Q_G tal que a sua matriz na base $\{e_1, e_2\}$ seja

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

quando n é ímpar e

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quando n é par.

Agora definimos o α_G por $\alpha_G(ke_1 + le_2) = klQ_G(e_1, e_2)\partial t_n = kl\partial t_n$. Então podemos verificar que a forma de intersecção e o invariante tangencial satisfazem as condições da Definição 2.15, usando cálculos similares aos do exemplo anterior. Consideremos a “open book” obtida pela realização destes invariantes que será minimal. Então ela é indecomponível (mesmo no sentido fraco), pois a forma de intersecção não decompõe como soma direta.

Agora veremos que a quantidade das estruturas “open book” sobre uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$ tal que $H_n(M)$ é livre de torção, é maior ou igual à quantidade de estruturas “open book” sobre a esfera S^{2n+1} .

Proposição 6.26 *Seja (M, K) uma “open book” minimal sobre uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada tal que $\tau H_n(M) = 0$ e seja N uma $(2n + 1)$ -esfera homológica racional $(n - 1)$ -conexa. Suponhamos que (N, K_1) e (N, K_2) são duas “open books” tais que $(M, K) \#_b (N, K_1)$ e $(M, K) \#_b (N, K_2)$ são estruturalmente isotópicas e $n \geq 3$. Então (N, K_1) e (N, K_2) são estruturalmente isotópicas.*

Demonstração:

Seja F a página típica de (M, K) , e F_1 e F_2 as páginas típicas de (N, K_1) e (N, K_2) respectivamente. Então a página típica de $(M, K) \#_b (N, K_j)$ é a soma conexa ao longo do

bordo $F \natural F_j$, $j = 1, 2$, e temos uma decomposição natural $H_n(F \natural F_j) = H_n(F) \oplus H_n(F_j)$. Para esta decomposição, temos que $R(\ker i_{F \natural F_j}) = H_n(F_j)$, $j = 1, 2$, desde que F é uma página típica de uma “open book” minimal, $H_n(M)$ é livre de torção, e $H_n(N) \subset H_n(M \natural N)$ é exatamente a parte de torção, onde $i_{F \natural F_j} : F \natural F_j \rightarrow M$, $j = 1, 2$, são aplicações de inclusão.

Seja $\Phi : (M \natural N) \times [0, 1] \rightarrow M \natural N$ a isotopia estruturada que determina uma equivalência entre $(M, K) \#_b(N, K_1)$ e $(M, K) \#_b(N, K_2)$, então $\Phi_{1*} : H_n(F \natural F_1) \rightarrow H_n(F \natural F_2)$ é um isomorfismo que determina a equivalência entre os sistemas de invariantes “open book” de $(M, K) \#_b(N, K_1)$ e $(M, K) \#_b(N, K_2)$ (veja Observação 2.22). Como Φ determina um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(F \natural F_1) & \xrightarrow{\Phi_{1*}} & H_n(F \natural F_2) \\ i_{F \natural F_1} \searrow & & \swarrow i_{F \natural F_2} \\ & H_n(M) & \end{array}$$

Φ_{1*} aplica $\ker i_{F \natural F_1}$ em $\ker i_{F \natural F_2}$ e induz um isomorfismo $\bar{\Phi} : H_n(F_1) \rightarrow H_n(F_2)$.

Como Φ_{1*} preserva o sistema de invariantes “open book” e $\bar{\Phi}$ é sua restrição, ele também preserva o sistema de invariantes “open book”, determinando uma equivalência entre os sistemas de invariantes de (N, K_1) e (N, K_2) . Então (N, K_1) é estruturalmente isotópica a (N, K_2) pelo Teorema 3.1. ■

Corolário 6.27 *Seja (M, K) uma “open book” minimal sobre uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M tal que $\tau H_n(M) = 0$. Suponhamos que (S^{2n+1}, K_1) e (S^{2n+1}, K_2) são duas “open books” tais que $(M, K) \#_b(S^{2n+1}, K_1)$ e $(M, K) \#_b(S^{2n+1}, K_2)$ são estruturalmente isotópicas e $n \geq 3$. Então (S^{2n+1}, K_1) e (S^{2n+1}, K_2) são estruturalmente isotópicas.*

Corolário 6.28 *Seja M uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada tal que $H_n(M)$ é livre de torção, com $n \geq 3$. Então existe uma aplicação injetora do conjunto das classes de equivalência das estruturas “open book” sobre S^{2n+1} , no conjunto das classes de equivalência das estruturas “open book” sobre M , definida por $(S^{2n+1}, K') \mapsto (M, K) \#_b(S^{2n+1}, K')$, onde (M, K) é uma “open book” minimal de M .*

Demonstração: Como existe pelo menos uma estrutura “open book” minimal pelo Teorema 6.17, o resultado segue do Corolário 6.27. ■

Conseqüentemente, dada qualquer $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada M tal que $\tau H_n(M) = 0$ com $n \geq 3$, a quantidade de estruturas “open book” é maior ou igual à quantidade das estruturas “open book” sobre a esfera da mesma dimensão.

Quando $H_n(M)$ apresenta a parte de torção, não sabemos a validade do resultado acima.

Conjectura 6.29 *Seja M uma $(2n + 1)$ -variedade $(n - 1)$ -conexa e fechada com $n \geq 3$. Então existe uma aplicação injetora do conjunto das classes de equivalência das estruturas “open book” sobre S^{2n+1} , no conjunto das classes de equivalência das estruturas “open book” sobre M , definida por $(S^{2n+1}, K') \mapsto (M, K) \#_b (S^{2n+1}, K')$, onde (M, K) é uma “open book” minimal de M .*

Tabela de Símbolos

$\mathcal{A}(M)$	conjunto das classes de equivalência dos sistemas de invariantes “open book” relativos à variedade M
b_M	“torsion linking pairing” da variedade M
$\text{Ext}(G, \mathbf{Z})$	$\text{Ext}^1(G, \mathbf{Z})$ sobre o \mathbf{Z} -módulo G
h	monodromia geométrica
$H^*(X)$	cohomologia do espaço topológico X com coeficientes em \mathbf{Z}
$H_*(X)$	homologia do espaço topológico X com coeficientes em \mathbf{Z}
I	intervalo $[0, 1]$
id	aplicação identidade
$\text{Im } f$	imagem da aplicação f
$\text{Int } X$	interior da variedade X
$\ker g$	núcleo do homomorfismo g
lk	número de enlaçamento
$N(X)$	vizinhança tubular da subvariedade X
Q_X	forma de intersecção da $2n$ -variedade X sobre $H_n(X)$
Q_G	forma de intersecção sobre o módulo G
q_M	forma quadrática de Wall da variedade M
\mathbf{Q}	corpo dos números racionais
\mathbf{R}	corpo dos números reais
$R(M)$	fecho radical do sub-módulo M
$SO(n)$	grupo das rotações em \mathbf{R}^n
τM	parte de torção do \mathbf{Z} -módulo M
\mathbf{Z}	anel dos inteiros

\mathbf{Z}_n	anel $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
\sharp_b	soma conexa “open book”
\tilde{E}	recobrimento universal do espaço topológico E
(M, K, φ)	estrutura “open book” sobre a variedade M
(M, K)	estrutura “open book” sobre a variedade M
$S(M, K)$	sistema de invariantes “open book” de (M, K)
$S(K, \varphi)$	sistema de invariantes “open book” de (K, φ)
$S(M, K, \varphi)$	sistema de invariantes “open book” de (M, K, φ)
\hat{x}	elemento dual de x no \mathbf{Z} -módulo, homologia ou cohomologia
R^\perp	subespaço ortogonal do sub-módulo R
$x \cdot y$	número de intersecção entre as classes de homologia x e y
$X \amalg Y$	união disjunta dos conjuntos X e Y
$X - Y$	complemento do sub-conjunto $Y \cap X$ no conjunto X
\bar{X}	fecho do espaço topológico X
$f _X$	restrição da aplicação f em X
α_G	invariante tangencial do módulo G
α_X	invariante tangencial da variedade X
χ	aplicação característica de um espaço fibrado sobre uma esfera
∂X	bordo da variedade X
∂	operador de bordo na homologia ou homotopia
Γ_G	forma de Seifert racional do módulo G
Γ_F	forma de Seifert racional do mergulho da variedade F
ν^+	translação (pequena) na direção normal positiva da página de “open book”
ν^-	translação (pequena) na direção normal negativa da página de “open book”
$\pi_*(X)$	grupo de homotopia do espaço topológico X

Bibliografia

- [A'C72] N. A'Campo, *Feuilletages de codimension 1 sur les variétés simplement connexes de dimension 5*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 514–525.
- [Ale23] J. W. Alexander, *A lemma on system of knotted curves*, Proc. Math. Acad. Sci. U. S. A. **9** (1923), 93–95.
- [BL66] W. Browder and J. Levine, *Fibering manifolds over a circle*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 153–160.
- [Cer70] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publ. Math. de l'Inst. des Hautes Études Sci. **39** (1970), 185–353.
- [Dur74] A. H. Durfee, *Fibered knots and algebraic singularities*, Topology **13** (1974), 47–59.
- [GH81] M. J. Greenberg and J. R. Harper, *Algebraic topology (a first course)*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 58, The Benjamin/Cumming Publishing Company, Inc. 1981.
- [Hae61] A. Haefliger, *Differentiable imbeddings*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 109–112.
- [Ham71] H. A. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, Math. Ann. **191** (1971), 235–252.
- [Hir76] M. W. Hirsch, *Differential topology*, GTM (Graduate Texts in Mathematics), vol. 33, Springer-Verlag, 1976.

- [HZ66] M. W. Hirsch and E. C. Zeeman, *Engulfing*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 113–115.
- [Hu59] Sze-tsen Hu, *Homotopy theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. VIII, Academic Press, 1959.
- [KaM79] M. I. Kargapolov and J. I. Merzljakov, *Fundamentals of the theory of groups*, GTM (Graduate Texts in Mathematics), vol. 62, Springer-Verlag, 1979.
- [Kat74] M. Kato, *Classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold*, J. Math. Soc. Japan **26** (1974), 454–463.
- [Kau74] L. H. Kauffman, *Branched coverings, open books and knot periodicity*, Topology **13** (1974), 143–160.
- [Ker60] M. A. Kervaire, *Some nonstable homotopy groups of Lie groups*, Illinois J. Math. **4** (1960), 161–169.
- [Ker65] M. A. Kervaire, *Les nœuds de dimensions supérieures*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 225–271.
- [Kin78] H. C. King, *Topological type of isolated critical points*, Ann. of Math. **107** (1978), 385–397.
- [Lau76] F. Laudenbach, *Submersions sur le cercle*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), 417–431.
- [Law78] T. Lawson, *Open book decompositions for odd dimensional manifolds*, Topology **17** (1978), 189–192.
- [Lê92] Lê Dũng Tráng, *Complex analytic functions with isolated singularities*, J. of Algebraic Geometry **1** (1992), 83–100.
- [Lev70] J. Levine, *An algebraic classification of some knots of codimension two*, Comment. Math. Helv. **45** (1970), 185–198.
- [Mil65] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Mathematical Notes, vol. 1, Princeton Univ. Press, 1965.

- [Mil68] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. Math. Stud., vol. 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [Qui79] F. Quinn, *Open book decompositions, and the bordism of automorphisms*, Topology **18** (1979), 55–73.
- [Sae87] O. Saeki, *On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), 587–601.
- [Sae99] O. Saeki, *Theory of fibered 3-knots in S^5 and its applications*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), 691–756.
- [Sie68] L. C. Siebenmann, *Pseudo-annuli and invertible cobordism*, Arch. der Math. **19** (1968), 528–535.
- [Sma61] S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four*, Ann. of Math. **74** (1961), 391–406.
- [Sma62] S. Smale, *On the structure of manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 387–399.
- [Spa66] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [Ste51] N. Steenrod, *Topology of fibre bundles*, Princeton Univ. Press, 1951.
- [Tam73] I. Tamura, *Foliations and spinnable structures on manifolds*, Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 197–214.
- [Tam93] I. Tamura, *Fundamental theorems in global knot theory*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **40** (1993), 561–606.
- [Wal62] C. T. C. Wall, *Classification of $(n - 1)$ -connected $2n$ -manifolds*, Ann. of Math. **75** (1962), 163–189.
- [Wal63] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology - I: Classification of handlebodies*, Topology **2** (1963), 253–261.
- [Wal65] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology - III: Application to special cases*, Topology **3** (1965), 291–304.

-
- [Wal67] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology - VI: Classification of $(s - 1)$ -connected $(2s + 1)$ -manifolds*, *Topology* **6** (1967), 273–296.
- [Wal70] C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Academic Press, 1970.
- [Whi44] H. Whitney, *The self-intersection of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, *Ann. of Math.* **45** (1944), 220–246.
- [Win73] H. E. Winkelnkemper, *Manifolds as open books*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **79** (1973), 45–51.

Glossário

- "n-frame", 9
- "engulfing theorem", 29
- "linking pairing", 14
- "mapping torus", 4
 - relativo, 4
- "open book", 1
 - "binding", xvii, 1
 - teorema da caracterização, 69
 - construção, 4
 - decomponível no sentido forte, 78
 - decomponível no sentido fraco, 77
 - estrutura, xvii, 1
 - estruturalmente isotópica, 25
 - família de difeomorfismos a um parâmetro, 4
 - indecomponível no sentido forte, 78
 - indecomponível no sentido fraco, 78
 - isotopia estruturada, 25
 - minimal, xx, 78
 - teorema da existência, 78
 - orientada, 4
 - página, xvii, 1
 - página típica, 1
 - simples, xvii, 1
 - sistema de invariantes, 20, 22, 25
 - conjunto de, 24
 - equivalentes, 24
 - soma, 75
 - sobre variedades com bordo, 5
 - soma conexa, 73
 - teorema da classificação, 59
 - teorema da existência, 6
 - teorema da unicidade, 68
 - trivial, 6, 75
 - teorema da caracterização, 75
 - "rank", 52
 - "spinnable structure", 6
 - "twist" de alça, 45
 - aplicação característica, 4, 6, 8
 - atlas, 6
 - buquê de esferas, 2
 - decomposição em alças, 2, 3
 - epimorfismo $\phi: \pi_{n-1}(SO(n)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, 18
 - esfera homológica racional, 27
 - espaço fibrado sobre a esfera, 6
 - fecho radical, 15
 - fibração de Milnor, 4
 - fibrado
 - forma normal, 6
 - forma bilinear b_M , 18, 21

forma de intersecção, 20

forma de Seifert

determinante, 17

propriedades, 21

racional, 15, 21

forma quadrática q_M , 18

invariante tangencial, 7, 12, 20

compatibilidade, 13

propriedades, 20

regra da soma, 12

isotópica

ambientalmente, 25

isotopia

ambiental, 25

teorema da extensão, 31

monodromia, 4

nó fibrado, 6

número de enlaçamento, 14

número de Euler, 9

pseudo-isotopia, 39

soma conexa fibrada, 48

sub-módulo

ortogonal, 55

translação, 14

truque de Whitney, 31