
Do número de Milnor ao número de Milnor de Lê

Camila Mariana Ruiz

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Do número de Milnor ao número de Milnor de Lê

Camila Mariana Ruiz

Orientador: Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

**USP – São Carlos
Julho de 2011**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R934n Ruiz, Camila Mariana
Do número de Milnor ao número de Milnor de Lê /
Camila Mariana Ruiz; orientador Nivaldo de Góes
Grulha Júnior -- São Carlos, 2011.
90 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Buquê de esferas. 2. Estratificação. 3. Número
de Milnor. 4. Número de Milnor de Lê. 5. Variedades
Singulares . I. de Góes Grulha Júnior, Nivaldo,
orient. II. Título.

À minha mãe Eliana e à minha avó Rosa.

Às minhas tias Elizabete e Elza.

“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem. O que Deus quer é ver a gente aprendendo a ser capaz de ficar alegre a mais, no meio da alegria, e ainda mais alegre ainda no meio da tristeza! Só assim de repente, na horinha em que se quer, de propósito — por coragem. Será? Era o que eu às vezes achava. Ao clarear do dia.”

João Guimarães Rosa , Grande Sertão: Veredas.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, por caminhar comigo.

À minha família, sem a qual eu nada seria.

Ao Felipe, pelo carinho e bom humor de sempre e pelo apoio nos momentos mais difíceis. Obrigada Fe.

Ao Nivaldo, meu querido orientador e amigo, pela enorme paciência, humildade, dedicação e pelo apoio de sempre.

À querida professora Cidinha, por ter sido uma professora de Cálculo I tão motivante e por ter me orientado durante a graduação.

Ao professor Carlos Biasi, pela amizade e por suas aulas inesquecíveis.

Ao professor Jean-Paul Brasselet, que mesmo em uma visita tão rápida ao Brasil e com tantos compromissos, encontrou tempo para responder as minhas perguntas com atenção e paciência.

Ao professor Lê Dung Tráng, que foi muito atencioso ao responder minhas dúvidas tão prontamente.

À Thaís pela amizade e pela ajuda de todos os dias.

A todos os meus amigos que se tornaram minha família aqui em São Carlos;

Aos professores e funcionários do ICMC que direta ou indiretamente contribuíram para mais esta conquista.

Aos meus professores do colégio, Adevaldo e Arnaldo, pelo comprometimento com seus alunos e paixão pela educação.

À Fapesp e à Capes pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um breve compêndio sobre o estudo topológico das fibras de Milnor. Abordamos o caso clássico, estudado por J. Milnor, e a generalização apresentada por Lê D. T. para o caso de germes de funções analíticas definidas em variedades singulares. Nestas duas situações, os resultados principais tratam de germes de funções com singularidades isoladas.

Abstract

In this work, we present a brief compendium about the topological study of J. Milnor fibers. We address the classic case, studied by Milnor, and the generalization presented by Lê D. T. for the case of germs of analytic functions defined on singular varieties. In both situations, the main results deal with germs of functions with isolated singularities.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Variedades diferenciáveis	15
1.2 Homotopia	19
1.3 Homotopia de pares e homotopia relativa	22
1.4 Grupos de Homotopia	23
1.4.1 O Grupo Fundamental	23
1.5 Homologia singular	24
1.6 Complexos CW	29
1.7 Fibrções, Fibrados e Fibrados Vetoriais	30
1.8 Teoria de singularidades	32
1.9 Variedades algébricas e espaços analíticos complexos	33
1.10 Estratificação de Whitney	36
1.11 Teoria de Morse	38
2 O Teorema da Fibrção	41
3 A Topologia das Fibras	61
4 A Topologia das Fibras para o caso de um ponto crítico isolado	71

5	Funções Analíticas Complexas com Singularidades Isoladas	79
5.1	Funções com singularidades isoladas	79
5.2	Morsificação	82
5.3	Link Complexo e Profundidade	84
5.3.1	O Link Complexo	84
5.3.2	Profundidade homotópica retificada	85
5.4	O número de Milnor de Lê	87

Introdução

Em [19] J. Milnor estudou a topologia dos pontos singulares de uma hipersuperfície complexa. Ele obteve um resultado impressionante sobre pontos singulares isolados, a saber, seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função analítica complexa, se 0 for um ponto crítico isolado de um representante (suficientemente pequeno) do germe, então definida a função $\phi : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow S^1$, dada por $\phi = f/|f|$, em que f é polinomial complexa não nula com $f(0) = 0$ e $K = S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$, $(\phi, S_\varepsilon \setminus K, S^1)$ é um fibrado diferenciável tal que as fibras de f em uma vizinhança da origem, chamadas fibras de Milnor de f em 0, tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão real igual à dimensão complexa da fibra. O número de esferas do buquê, normalmente denotado por $\mu(f)$, é chamado de número de Milnor. O número de Milnor é um importante invariante de um germe de função analítica com ponto crítico isolado.

Este invariante fornece várias informações sobre a geometria de f , e está relacionado a outros ramos da matemática, por exemplo, no caso em que f tem ponto crítico isolado na origem, os seguintes invariantes, que coincidem a menos de sinal:

- a) O número de Milnor de f em 0, denotado por $\mu(f)$;
- b) O número de pontos de Morse de uma Morsificação de f ;
- c) O índice de Poincaré-Hopf do campo gradiente de f conjugado $\overline{\nabla}f$.

Desta maneira, os estudos desenvolvidos por J. Milnor em [19] passaram a desempenhar um papel fundamental para a teoria de singularidades, não só do ponto de vista topológico, mas também do ponto de vista algébrico e geométrico.

H. Hamm em sua tese de doutorado [7] mostrou que um resultado semelhante aos obtidos por J. Milnor também é válido para interseções completas com singularidade isolada. Em [15], Lê D. T. mostrou que a fibra de Milnor da restrição de uma forma linear genérica sobre uma interseção completa, possivelmente com singularidades não isoladas, tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão média.

Em [12], Lê D. T. observou que o resultado de [15] mencionado acima implica um resultado similar ao de J. Milnor, que $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma função analítica complexa com uma singularidade isolada definido sobre $(X, 0)$, um germe de interseção completa, tem fibras de Milnor com o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão real igual à dimensão complexa da fibra.

Finalmente em [13], Lê D. T. buscou um conjunto maior de espaços em que um resultado semelhante ao de Milnor se verifica. Estes foram denominados espaços de Milnor, e comportam os espaços nos quais a profundidade homotópica retificada é máxima, isto é, igual à dimensão do espaço. Neste caso, Lê D. T. provou que a fibra genérica da função f definida em um espaço de Milnor tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas. E definimos então o número de esferas do buquê como sendo o número de Milnor de Lê, denotado por $\mu_L(f)$.

Um dos objetivos desta dissertação é apresentar parte dos estudos de Milnor descritos em [19], como a construção da fibração de Milnor e o estudo topológico das fibras desta fibração. Pretendemos expor também, a generalização dos resultados de Milnor apresentada por Lê D. T. em [13] para germes de funções holomorfas com singularidade isolada definidas em variedades singulares.

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do texto.

Nos Capítulos 2 a 4 foram desenvolvidos os estudos referentes ao Teorema da Fibração de Milnor: no Capítulo 2 apresentamos o Teorema da Fibração que prova que uma determinada aplicação ϕ é um fibrado diferenciável localmente trivial. Conhecendo o fibrado fornecido pela aplicação ϕ , no Capítulo 3 nos dedicamos ao estudo da topologia das fibras F_θ desta fibração. Já no Capítulo 4, consideramos a hipótese adicional de uma função f com singularidade isolada na origem de \mathbb{C}^{n+1} e, mais uma vez estudamos a topologia das

fibras da fibração ϕ neste caso. Isto conclui nossa exposição sobre parte dos resultados de J. Milnor apresentados em [19].

Por fim, no Capítulo 5, apresentamos os principais resultados do trabalho [13] de Lê D. T. mencionado anteriormente, que expõe uma generalização dos resultados de J. Milnor para germes de funções holomorfas com singularidade isolada definidas sobre variedades singulares.

Preliminares

1.1 Variedades diferenciáveis

Definição 1.1.1. Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou uma carta em M é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ de um subconjunto aberto $U \subset M$ sobre um aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 1.1.2. Um atlas \mathcal{U} m -dimensional de um espaço topológico M é uma família de sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$, tal que os domínios dos sistemas de coordenadas cubram M .

Definição 1.1.3. Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então o homeomorfismo

$$\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é chamado mudança de coordenadas.

Observação 1.1.1. *Seja a mudança de coordenadas $\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1}$, então $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} = \phi_{\psi\varphi}$ é também uma mudança de coordenadas.*

Definição 1.1.4. Um atlas \mathcal{U} em um espaço topológico M é diferenciável de classe C^k , se todas as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi\psi}$ forem aplicações diferenciáveis de classe C^k .

Observação 1.1.2. *Da Observação 1.1.1 e da Definição 1.1.4 segue que em um atlas diferenciável \mathcal{U} todas as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi\psi}$ são difeomorfismos.*

Definição 1.1.5. Uma variedade diferenciável m -dimensional, de classe C^k , é um par (M, \mathcal{U}) , em que M é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e \mathcal{U} é um atlas m -dimensional de classe C^k .

Como vimos na Observação 1.1.2 em um atlas diferenciável \mathcal{U} todas as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi\psi}$ são difeomorfismos. É exatamente esta propriedade que nos permite transportar todas as noções de Cálculo Diferencial do \mathbb{R}^m para as variedade diferenciáveis.

Seja M uma variedade de classe C^k e seja p um ponto de M . Indicamos por C_p o conjunto de todos os caminhos $\lambda : I \rightarrow M$, definidos num intervalo aberto I , contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0. Diremos que dois caminhos $\lambda, \mu \in C_p$ são equivalentes, e escreveremos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, tal que $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$. Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismo, a igualdade $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ será verdadeira para todo sistema de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $p \in U$. Resulta daí que a relação acima é uma relação de equivalência.

O vetor velocidade λ' de um caminho $\lambda \in C_p$ é, por definição, a classe de equivalência de λ . Ou seja, $\lambda' = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}$.

Definição 1.1.6. Definimos o espaço tangente à variedade M no ponto p como sendo o conjunto quociente C_p / \sim . Denotaremos o espaço tangente à variedade M no ponto p por $T_p M$.

Podemos mostrar que o espaço tangente a uma variedade diferenciável M em um ponto $p \in M$ é um espaço vetorial de mesma dimensão que M .

Dada uma variedade diferenciável m -dimensional M , podemos obter uma nova variedade $2m$ -dimensional a partir de uma “união” dos espaços tangentes $T_p M$, em todos os pontos $p \in M$.

Definição 1.1.7. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m . O conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

de todos os espaços tangente T_pM , com $p \in M$, “colados” de uma maneira natural é chamado de fibrado tangente de M .

Proposição 1.1.3. Dada uma variedade diferenciável m -dimensional M , o fibrado tangente TM tem naturalmente a estrutura de uma variedade $2m$ -dimensional.

Informalmente, o fibrado tangente de uma variedade é obtido por considerar-se todos os espaços tangentes, e reuní-los em um conjunto diferenciável e sem sobreposição, como ilustra a Figura 1.1 onde a variedade em questão é o círculo unitário em \mathbb{R}^2 .

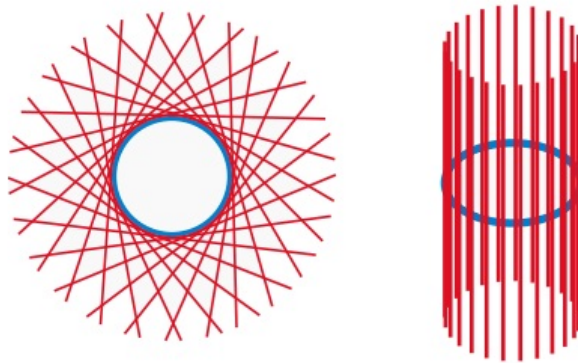


Figura 1.1: Representação do fibrado tangente de S^1

Agora, que já vimos a definição de espaço vetorial tangente, podemos definir o conceito de diferenciabilidade de uma aplicação $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciáveis, utilizando nosso conhecimento prévio a cerca das aplicações diferenciáveis definidas em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m com valores em \mathbb{R}^n .

Definição 1.1.8. Sejam M, N variedades diferenciáveis e uma aplicação $f : M \rightarrow N$, dizemos que f é diferenciável em $p \in M$ se existem cartas $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$ para M com $p \in U_1$ e $\psi : U_2 \rightarrow V_2$ para N com $f(U_1) \subset U_2$ tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável em $\varphi(p)$. Diremos simplesmente que f é diferenciável se ela o for em todos os pontos de M . E chamaremos f uma aplicação de classe C^k quando $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ for de classe C^k .

Podemos provar que a definição acima não depende das escolhas das parametrizações φ e ψ , sendo então coerente.

Nem sempre é fácil verificar se um espaço topológico M é uma variedade diferenciável, porém, existe um importante resultado relacionado ao conceito de *valor regular* que nos ajuda a decidir se M é uma variedade diferenciável.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 V_1 & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & V_2
 \end{array}$$

Definição 1.1.9. Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, N uma variedade diferenciável n -dimensional e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que:

- (1) f é uma *imersão* em p se a aplicação derivada df_p é injetiva (portanto $n \geq m$) em $p \in M$. Isto é, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a m ;
- (2) f é uma *submersão* em p se a aplicação derivada df_p é sobrejetora (portanto $m \geq n$) em $p \in M$. Isto é, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a n .

Se em $p \in M$ a aplicação $f : M \rightarrow N$ for uma submersão, p é dito *ponto regular* de f . Um ponto $q \in N$ é chamado *valor regular* de f se sua imagem inversa $f^{-1}(q)$ só contém pontos regulares.

Se em $p \in M$ a aplicação $f : M \rightarrow N$ não é submersão e nem imersão, então p é dito *ponto singular* de f e $f(p)$ é o valor singular de f .

Teorema 1.1.4. Sejam N uma variedade diferenciável n -dimensional, P uma variedade diferenciável p -dimensional, $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e $p \in P$ um valor regular de f . Então, $f^{-1}(p) = M$ é uma subvariedade $(n - p)$ -dimensional de N e dado $q \in M$, temos $T_q M = \text{Ker}(df_q)$, onde df_q representa a aplicação derivada de f no ponto q .

Sejam M, N variedades diferenciáveis, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e um ponto $p \in N$ vimos, no Teorema 1.1.4, que uma condição suficiente para que $f^{-1}(p)$ seja uma subvariedade de M é que p seja um valor regular de f . Deste fato é natural que façamos a seguinte pergunta: dada $S \subset N$ uma subvariedade de N , em que condições a imagem inversa $f^{-1}(S)$ é uma subvariedade de M ? Uma resposta a esta questão é dada pela noção de *transversalidade*. Trata-se de uma generalização natural do conceito de valor regular.

Definição 1.1.10. Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, N uma variedade diferenciável n -dimensional, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $P \subset N$ uma subvariedade p -dimensional de N , dizemos que f é *transversal a P no ponto $q \in f^{-1}(P)$* quando

$$df_q(T_qM) + T_{f(q)}P = T_{f(q)}N$$

ou seja, quando a imagem de df_q junto com o espaço tangente a P em $f(q)$ geram todo $T_{f(q)}N$. Dizemos ainda que f é transversal a P se, para todo ponto $q \in f^{-1}(P)$ f é transversal a P em q .

Teorema 1.1.5. Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, N uma variedade diferenciável n -dimensional, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e $P \subset N$ uma subvariedade p -dimensional de N . Se a aplicação f é transversal a subvariedade P então, ou bem $f^{-1}(P) = \emptyset$ ou bem $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade $(m - n + p)$ -dimensional de M .

Corolário 1.1.6. Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão, então para toda variedade $P \subset N$ ou bem $f^{-1}(P) = \emptyset$ ou bem $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade de M .

1.2 Homotopia

Nesta seção introduzimos noções básicas sobre homotopia, procurando ilustrá-las com alguns exemplos.

Definição 1.2.1. Sejam X e Y espaços topológicos, dizemos que duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua

$$H : X \times I \rightarrow Y, \quad \text{com } I = [0, 1]$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Chamaremos a aplicação H de homotopia entre f e g e escreveremos $f \simeq g$.

Exemplo 1.2.1. Sejam E um espaço vetorial normado, $Y \subset E$ um espaço topológico com a topologia induzida de E e X um espaço topológico qualquer. Dadas aplicações contínuas

$f, g : X \rightarrow Y$, suponhamos que, para todo $x \in X$, o segmento de reta $[f(x), g(x)]$ esteja contido em Y . Então, $f \simeq g$.

De fato, denotando o intervalo $[0, 1]$ por I , basta definirmos $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ para obtermos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$ entre f e g .

Em particular, dada uma aplicação constante

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

toda aplicação contínua $g : X \rightarrow E$ é homotópica a f .

Exemplo 1.2.2. Seja S^n a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} , dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, isto é, se $f(x)$ e $g(x)$ nunca são pontos antípodas, então $f \simeq g$.

Proposição 1.2.3. Sejam X e Y espaços topológicos. A relação de homotopia $f \simeq g$ é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de X em Y .

Proposição 1.2.4. Sejam X, Y e Z espaços topológicos, consideremos aplicações $f, f' : X \rightarrow Y$ e $g, g' : Y \rightarrow Z$ aplicações contínuas. Se $f \simeq f'$ e $g \simeq g'$, então $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

Demonstração: Seja $I = [0, 1]$, denotemos por $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e f' e por $K : Y \times I \rightarrow Z$ uma homotopia entre g e g' . Definindo $L : X \times I \rightarrow Z$ por $L(x, t) = K(H(x, t), t)$, temos que L é uma homotopia entre $g \circ f$ e $g' \circ f'$. ■

Existe uma estreita relação entre homotopia e o problema de estender continuamente a todo o espaço uma aplicação contínua definida num subconjunto fechado desse espaço. Um exemplo disto pode ser visto na seguinte proposição.

Proposição 1.2.5. Sejam X um espaço topológico e $\overline{B}_1(0)$ a bola fechada de centro 0 e raio 1 de \mathbb{R}^{n+1} . Uma aplicação contínua $f : S^n \rightarrow X$ estende-se continuamente à $\overline{B}_1(0)$ se, e somente se, é homotópica a uma constante.

Demonstração: Denotemos por I o intervalo $[0, 1]$ e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : S^n \times I &\longrightarrow \overline{B}_1(0) \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)x \end{aligned}$$

que é contínua, sobrejetora e igual a 0 em $S^n \times 1$. Se $\tilde{f} : \overline{B}_1(0) \rightarrow X$ é uma extensão contínua de $f : S^n \rightarrow X$, então

$$H = \tilde{f} \circ \varphi : S^n \times I \rightarrow X$$

é uma homotopia entre \tilde{f} e a aplicação constante $g : S^n \rightarrow X$, definida por $g(x) = \tilde{f}(0)$. Reciprocamente, suponhamos que $H : S^n \times I \rightarrow X$ seja uma homotopia entre f e uma aplicação constante $g : S^n \rightarrow X$, dada por $g(x) = p$, para todo $x \in S^n$. Seja a aplicação $\tilde{f} : S^n \rightarrow X$ definida da seguinte maneira,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right), & \text{se } x \neq 0 \\ p, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Assim, \tilde{f} é contínua e $\tilde{f}|_{S^n} = f$. ■

Definição 1.2.2. Sejam X e Y espaços topológicos, dizemos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma *equivalência homotópica* quando existe uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id : X \rightarrow X$ e $f \circ g \simeq id : Y \rightarrow Y$. Neste caso, g chama-se uma *equivalência inversa* de f e os espaços X e Y dizem-se ter o mesmo *tipo de homotopia*.

Exemplo 1.2.6. Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, seja $\overline{B}_\varepsilon(a)$ a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$ em \mathbb{R}^n . Então, $\overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ e a esfera unitária S^{n-1} têm o mesmo tipo de homotopia.

De fato, sejam

$$\rho = \rho_{a,\varepsilon} : \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \rightarrow S^{n-1} \quad \text{e} \quad j = j_{a,\varepsilon} : S^{n-1} \rightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

as aplicações definidas por

$$\rho(x) = \frac{x - a}{\|x - a\|} \quad \text{e} \quad j(y) = a + \varepsilon y,$$

assim, $\rho \circ j = id : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. Além disso, considerando a aplicação contínua $F : \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \times I \rightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ dada por

$$F(x, t) = (1 - t) \left(a + \varepsilon \frac{x - a}{\|x - a\|} \right) + tx.$$

temos $j \circ \rho \simeq id : \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \rightarrow \overline{B}_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Fazendo $\varepsilon = \infty$ no Exemplo 1.2.6, obtemos $B = \mathbb{R}^n$. Continuamos tendo $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ e S^{n-1} do mesmo tipo de homotopia, a equivalência homotópica

$$\rho = \rho_{a, \infty} : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow S^{n-1}$$

define-se do mesmo modo, mas sua inversa $j = j_{a, \infty} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ é definida por $j(y) = a + y$.

Definição 1.2.3. Um espaço topológico X é dito contrátil quando ele tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto.

1.3 Homotopia de pares e homotopia relativa

Definição 1.3.1. Diremos que (X, A) é um par de espaços topológicos quando A for um subespaço de X . Dados os pares (X, A) e (Y, B) , uma aplicação contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ é uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Definição 1.3.2. Dadas as aplicações contínuas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, uma homotopia de pares entre f e g é uma aplicação contínua

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Deve-se portanto ter $H_t(A) \subset B, \forall t \in I$.

Observação 1.3.1. O caso em que B se reduz a um ponto y_0 é frequentemente usado, este ponto é chamado de ponto básico do espaço Y . Neste caso, durante uma homotopia entre

duas aplicações $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, y_0)$, a aplicação H_t deve ser constante no subespaço A .

Definição 1.3.3. Dadas as aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$. Diremos que f é homotópica a g relativamente a um subespaço $A \subset X$, e escreve-se

$$f \simeq g(\text{rel.}A)$$

quando existe uma homotopia H entre f e g tal que $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

1.4 Grupos de Homotopia

1.4.1 O Grupo Fundamental

Uma referência para este assunto é [17].

Definição 1.4.1. Um caminho em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $a : J \rightarrow X$, em que J é um intervalo compacto $J = [s_0, s_1]$. Vamos trabalhar sempre com caminhos definidos no intervalo $I = [0, 1]$.

Definição 1.4.2. Diremos que $a, b : I \rightarrow X$ são caminhos homotópicos quando tivermos $a \simeq b(\text{rel.}\partial I)$.

Definição 1.4.3. Sejam $a, b : I \rightarrow X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$. Definimos o produto ab como sendo:

$$ab(s) = \begin{cases} a(2s), & \text{se } 0 \leq s \leq 1/2; \\ b(2s - 1), & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Proposição 1.4.1. *Sejam $a, b, c : I \rightarrow X$ caminhos tais que $a(1) = b(0)$ e $b(1) = c(0)$. Sejam $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ e $\gamma = [c]$ suas respectivas classes de homotopia, $x = a(0)$, $y = a(1)$, e_x, e_y os caminhos constantes sobre estes pontos e $\varepsilon_x = [e_x]$, $\varepsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopia destes caminhos. Então:*

1. $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_x$;
2. $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_y$;
3. $\varepsilon_x\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon_y$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

Assim, o conjunto das classes de homotopia (com extremos fixos) dos caminhos em um espaço topológico X , munido da lei de composição dada na Definição 1.4.3 chama-se grupóide fundamental de X .

Definição 1.4.4. O subconjunto $\pi_1(X, x_0)$ do grupóide fundamental formado pelas classes de homotopia de caminhos fechados com ponto base em x_0 constitui um grupo, chamado grupo fundamental de X , com base no ponto x_0 . O elemento neutro deste grupo é a classe de homotopia $\varepsilon = \varepsilon_0$ do caminho constante no ponto x_0 .

Observação 1.4.2 (Grupos de Homotopia de ordem n). Um tema importantíssimo para o desenvolvimento do trabalho apresentado ao longo desta dissertação é o de grupos de homotopia de ordem n . A definição do n -ésimo grupo de homotopia de um espaço, $\pi_n(X, x_0)$, é estritamente análoga à definição de grupo fundamental. Nós substituímos o intervalo $I = [0, 1]$ pelo n -cubo I^n consistindo dos pontos $t = (t_1, \dots, t_n)$ em \mathbb{R}^n tais que $0 \leq t_i \leq 1$ com $i = 1, \dots, n$. Uma ótima referência para este assunto é [26].

O seguinte conceito de q -conexidade será fundamental para nossos estudos no Capítulo 5.

Definição 1.4.5. (veja [26]) Diremos que um espaço X é q -conexo ($q \geq 0$) se ele for conexo por caminhos e $\pi_i(X) = 0$ para $i = 1, \dots, q$.

Definição 1.4.6. Diremos que um par de espaços topológicos (X, Y) é q -conexo ($q \geq 0$) se ele for conexo por caminhos e $\pi_i(X, Y) = 0$ para $i = 1, \dots, q$.

1.5 Homologia singular

Há diversas maneiras de tratar-se a teoria de homologia sobre espaços topológicos. Em particular, as homologias singular e simplicial que coincidem em espaços triangularizáveis

e variedades compactas. Como ao longo desta exposição trabalharemos com complexos CW , que são trianguláveis, optamos aqui por estudar a abordagem da homologia singular. Faremos o estudo dos R -módulos de homologia singular com coeficientes em um anel R comutativo com identidade. Uma referência para este assunto é [21].

Simplexos em \mathbb{R}^n

Definição 1.5.1. Dados $(p + 1)$ pontos em \mathbb{R}^n , $p \leq n$, dizemos que $\{X_0, \dots, X_p\}$ é uma coleção **geometricamente independente** se os vetores $\vec{v}_1 = X_1 - X_0, \vec{v}_2 = X_2 - X_0, \dots, \vec{v}_p = X_p - X_0$ são linearmente independentes.

Definição 1.5.2. Seja $\{X_0, \dots, X_p\} \subset \mathbb{R}^n$ uma coleção geometricamente independente de \mathbb{R}^n , $p \leq n$. O p -**simplexo** S gerado por X_0, \dots, X_p é a envoltória convexa:

$$S = EC(\{X_0, \dots, X_p\}).$$

Os pontos X_i são chamados **vértices** do p -simplexo S .

Teorema 1.5.1. (Teorema das coordenadas baricêntricas) Sejam $\{X_0, \dots, X_p\}$ uma coleção de $(p + 1)$ pontos geometricamente independentes em \mathbb{R}^n , com $p \leq n$. Considere o seguinte conjunto:

$$A_p = \{t_0X_0 + \dots + t_pX_p; 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0}^p t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

- (i) $A_p = EC(\{X_0, \dots, X_p\}) = p$ -simplexo gerado por X_0, \dots, X_p ;
- (ii) Se $\sum_{i=0}^p t_i X_i = \sum_{i=0}^p s_i X_i$, $0 \leq t_i, s_i \leq 1$ com $\sum_{i=0}^p t_i = \sum_{i=0}^p s_i = 1$, então $t_i = s_i$ para todo $i = 0, \dots, p$, ou seja: todo elemento de A_p se escreve de maneira única como combinação linear dos pontos $\{X_0, \dots, X_p\}$.

Observação 1.5.2. Concluimos que escolhida uma ordenação $\{X_0, \dots, X_p\}$ para $(p + 1)$ pontos geometricamente independentes em \mathbb{R}^n , com $p \leq n$, cada ponto $X \in EC(\{X_0, \dots, X_p\})$ é univocamente determinado por uma $(p + 1)$ -upla (t_0, t_1, \dots, t_p) , com $0 \leq t_i \leq 1$ e $\sum_{i=0}^p t_i = 1$ denominada as **coordenadas baricêntricas do ponto X** .

Definição 1.5.3. Sejam $X_0 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $X_1 = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, X_p = e_{p+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$. O p -simplexo $EC(\{X_0, \dots, X_p\})$, nesse caso, é denominado **p -simplexo padrão** e será denotado por $\Delta_p \in \mathbb{R}^{p+1}$

Homologia singular de um espaço topológico X com coeficientes em um anel R

Fixemos R um anel comutativo com a identidade 1_R e consideremos $\Delta_p \subset \mathbb{R}^{p+1}$ o p -simplexo padrão munido da topologia induzida de subespaço em \mathbb{R}^{p+1} (munido da topologia usual).

Definição 1.5.4. Para cada espaço topológico X , um **p -simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$.

Denotaremos por

$$C_p(X) = \{\sigma : \Delta_p \rightarrow X; \sigma \text{ é contínua}\}$$

o conjunto de todos os p -simplexos singulares de X .

Definição 1.5.5. Para cada $p \geq 0$, definimos o R -módulo livre cuja base é o conjunto de todos os p -simplexos singulares de X :

$$S_p(C_p(X), R) = \{f : C_p(X) \rightarrow R; f(\sigma) \neq 0, \text{ apenas para um n finito de elementos } \sigma\}.$$

Um elemento típico de $S_p(C_p(X), R)$ é uma **combinação linear formal** $\alpha_1\sigma_1 + \dots + \alpha_r\sigma_r$, onde $\alpha_i \in R$ e $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$ é um p -simplexo singular de X .

$$\sum_{i=0}^r \alpha_i \sigma_i \longleftrightarrow f : C_p(X) \rightarrow R$$

$$\sigma \quad \mapsto \quad f(\sigma) = \begin{cases} \alpha_i; & \text{se } \sigma = \sigma_i \text{ } i = 1, \dots, r \\ 0, & \text{se } \sigma \neq \sigma_i \end{cases}$$

Os elementos de $S_p(C_p(X); R)$ são chamados **p -cadeias singulares de X com coeficientes em R** .

A seguir, definiremos o complexo de cadeias $\{S_p(X; R); \partial\}_{p \geq 0}$. Para isso, convencionaremos que $\{S_p(X; R)\} = \{0\}$ para todo $p < 0$.

Os operadores face

Definição 1.5.6. Seja $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ um p -simplexo singular de X . Considere a inclusão

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{p-1} & \xrightarrow{\varepsilon_i} & \Delta_p \\ (t_0, \dots, t_i, \dots, t_{p-1}) & \hookrightarrow & (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}), \end{array}$$

que insere o zero na i -ésima posição. Para cada $i = 1, \dots, p$ definimos a **i -ésima face de σ** como sendo o $(p-1)$ -simplexo singular de X dado pela composição

$$\sigma \circ \varepsilon_i : \Delta_{p-1} \rightarrow X,$$

que é contínua e denotada por $\partial_i \sigma : \Delta_{p-1} \rightarrow X$.

Assim, para cada $i = 1, \dots, p$ e para cada p -simplexo singular $\sigma \in C_p(X)$, associamos a sua i -ésima face $\partial_i \sigma \in C_{p-1}(X)$. Isso define uma função

$$\begin{array}{ccc} \partial_i : C_p(X) & \longrightarrow & C_{p-1}(X) \subset S_{p-1}(X; R) \\ \sigma & \longmapsto & \partial_i \sigma \end{array}$$

para todo $i = 1, \dots, p$, e desde que $C_p(X)$ é base para o R -módulo livre $S_p(X; R)$, ∂_i se estende por linearidade a um único R -homomorfismo $\partial_i : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$, chamado **operador face**. O R -homomorfismo $\partial : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$ dado pela soma alternada dos operadores face

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^p \partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i$$

é chamado **operador bordo**.

Teorema 1.5.3. O operador $\partial : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$, definido por $\sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i$, é tal que $\partial \circ \partial = 0$.

Definição 1.5.7. Fixado um anel comutativo com identidade R para cada espaço topológico X , criamos um complexo de cadeias $S_*(X; R) = \{S_p(X; R), \partial\}_{p \geq 0}$, ou seja,

$$S_*(X; R) : \cdots \xrightarrow{\partial} S_p(X; R) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X; R) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_1(X; R) \xrightarrow{\partial} S_0(X; R) \xrightarrow{\partial} 0,$$

usaremos as seguintes terminologias:

$Z_p(S_*(X; R)) \doteq Z_p(X; R) = \text{Ker}(\partial)$ o submódulo dos p -ciclos,

$B_p(S_*(X; R)) \doteq B_p(X; R) = \text{Im}(\partial)$ o submódulo dos p -bordos e

$H_p(S_*(X; R)) \doteq H_p(X; R) = \frac{Z_p(X; R)}{B_p(X; R)}$ o p -ésimo R -módulo de homologia de X com coeficientes em R .

Um elemento típico de $H_p(X; R)$ é da forma

$$\mu = z_p + B_p(X; R),$$

onde $z_p \in Z_p(X; R)$ é um p -ciclo; μ é chamada **classe de homologia de X com coeficientes em R** , representada pelo p -ciclo z_p .

Construção do R -homomorfismo induzido em homologia

Dada uma função contínua $f : X \rightarrow Y$, queremos definir um R -homomorfismo $f_* : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$ para cada $p \geq 0$. Para isso, precisamos definir uma aplicação de cadeias

$$f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$$

para cada $p \geq 0$, entre os complexos de cadeias $S_*(X; R)$ e $S_*(Y; R)$.

Observemos que, dado um p -simplexo singular de X , $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$, a composição

$$f \circ \sigma : \Delta_p \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

é um p -simplexo singular de Y e determina uma função

$$\begin{aligned} C_p(X) &\longrightarrow C_p(Y) \subset S_p(Y; R) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

para cada $p \geq 0$. Desde que $C_p(X)$ é base para o R -módulo livre $S_p(X; R)$ e $C_p(Y) \subset S_p(Y; R)$ tal função se estende por linearidade a um único R -homomorfismo $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$, definido por

$$f_{\#}(\alpha_1\sigma_1 + \dots + \alpha_r\sigma_r) = \alpha_1(f \circ \sigma_1) + \dots + \alpha_r(f \circ \sigma_r).$$

Teorema 1.5.4. O R -homomorfismo $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$ é uma aplicação de cadeias.

Portanto, $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$ induz um bem definido R -homomorfismo $f_* : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$, dado por

$$f_*(z_p) + B_p(X; R) = f_{\#}(z_p) + B_p(Y; R),$$

onde

$$f_{\#}(z_p) = f_{\#}(\alpha_1\sigma_1 + \dots + \alpha_r\sigma_r) = \alpha_1(f \circ \sigma_1) + \dots + \alpha_r(f \circ \sigma_r).$$

O seguinte resultado será fundamental para nossos estudos no Capítulo 4, como referência para este assunto sugerimos [10].

Teorema 1.5.5 (Teorema de Hurewicz). *Se um par (X, A) for $(n - 1)$ -conexo, $n \geq 2$, com A simplesmente conexo e não vazio, então $H_i(X, A) = 0$ para $i < n$ e $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$.*

1.6 Complexos CW

De maneira informal, um complexo CW é construído a partir de blocos básicos denominados células. A definição precisa descreve como as células podem ser “topologicamente

coladas". Uma célula aberta n -dimensional é um espaço topológico homeomorfo a uma bola aberta n -dimensional.

Um complexo CW é um espaço topológico de Hausdorff X junto com uma partição de X em células abertas (de várias dimensões) tais que: Para cada célula aberta n -dimensional C em X , existe uma aplicação contínua f da bola aberta n -dimensional em X , que aplica esta bola aberta homeomorficamente sobre C e a imagem do bordo da bola aberta, isto é, a imagem do bordo da célula aberta C , intersecta apenas um número finito de outras células. Um conjunto de X é fechado (em X) se, e somente se, ele intersecta o fecho de cada célula segundo um conjunto fechado.

Indicamos como referências para este assunto [3] e [24].

1.7 Fibrações, Fibrados e Fibrados Vetoriais

Apresentamos nesta seção conceitos básicos sobre fibrações, fibrados e fibrados vetoriais. Para um estudo mais completo sugerimos [26].

Definição 1.7.1 (Fibrado). *Sejam E, B, F espaços topológicos. Um fibrado ξ sobre B , com fibra F é uma terna $\xi = (E, p, F)$ satisfazendo as condições:*

1. $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua e sobrejetora chamada projeção;
2. para cada $b \in B$, existem um aberto $U_b \subset B$, $b \in U_b$, e um homeomorfismo ϕ_b , $\phi_b : U_b \times F \rightarrow p^{-1}(U_b)$ tal que $p \circ \phi_b = \Pi_1$, em que Π_1 é a projeção na primeira coordenada (condição de trivialidade local).

Neste caso, denominamos E o espaço total do fibrado e B o espaço base. Note que, para cada $b \in B$, a fibra $p^{-1}(b)$ é homeomorfa a F .

Definição 1.7.2 (Fibrado diferenciável). *Sejam E, B, F variedades diferenciáveis. Um fibrado diferenciável ξ sobre B , com fibra F é uma terna $\xi = (E, p, F)$ satisfazendo as condições:*

1. $p : E \rightarrow B$ é uma submersão sobrejetora;

2. para cada $b \in B$, existem um aberto $U_b \subset B$, $b \in U_b$, e um difeomorfismo ϕ_b , $\phi_b : U_b \times F \rightarrow p^{-1}(U_b)$ tal que $p \circ \phi_b = \Pi_1$, em que Π_1 é a projeção na primeira coordenada (condição de trivialidade local).

Neste caso, para cada $b \in B$, a fibra $p^{-1}(b)$ é difeomorfa a F .

Definição 1.7.3. Um fibrado vetorial (real ou complexo) ξ sobre B é uma terna, formada por:

1. Um espaço topológico $E = E(\xi)$ chamado espaço total,
2. uma aplicação (contínua) $\pi : E \rightarrow B$ sobrejetora chamada projeção,
3. para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

E deve satisfazer à seguinte condição:

Condição de trivialidade local: Para cada ponto $b \in B$ deve existir uma vizinhança $U \subset B$, um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo

$$h : U \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

tal que, para cada $b \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b, x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial \mathbb{K}^n e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$.

O par (U, h) será chamado sistema de coordenadas local para ξ em b . Se pudermos escolher U igual ao espaço base, então ξ será chamado de fibrado trivial.

O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado de fibra sobre b , e pode ser denotado por F_b ou por $F_b(\xi)$. Observemos que F_b nunca é vazio, entretanto pode ser formado por apenas um ponto.

O conceito de fibrado vetorial diferenciável pode ser definido pedindo apenas que B e E sejam variedades diferenciáveis, que π seja uma aplicação suave e que para cada $b \in B$ exista um sistema de coordenadas locais (U, h) com $b \in U$ tal que h seja um difeomorfismo.

Consideremos agora dois fibrados vetoriais ξ e ν sobre o mesmo espaço base B .

Definição 1.7.4. Dizemos que ξ é isomorfo à ν , escrevemos $\xi \cong \nu$, se existir um homeomorfismo

$$f : E(\xi) \rightarrow E(\nu)$$

entre os espaços totais que aplique cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o espaço vetorial correspondente $F_b(\nu)$.

Definição 1.7.5. Uma seção de um fibrado vetorial ξ com base B é uma função contínua

$$s : B \rightarrow E(\xi)$$

a qual leva b dentro de sua fibra correspondente $F_b(\xi)$. Uma seção do fibrado tangente à uma variedade suave M é usualmente chamada de campo de vetores de M .

Definição 1.7.6. Uma fibração é uma generalização da noção de fibrado. O conceito de fibração é como o de um fibrado, exceto pelo fato que as fibras não precisam ser homeomorfas, ao contrário, é pedido apenas que elas tenham o mesmo tipo de homotopia.

Observação 1.7.1. É importante observar que ao longo de nossa exposição sobre o Teorema da Fibrção de Milnor provaremos que uma aplicação ϕ é um fibrado diferenciável localmente trivial, embora o nome do teorema mencione a palavra “fibrção”. Esta denominação ocorre pois um dos fatores mais importantes deste resultado é a demonstração de que as fibras desta fibração (fibras de Milnor) tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas.

1.8 Teoria de singularidades

Nesta seção, apresentamos as definições e principais resultados da teoria de singularidades que serão usados para o desenvolvimento deste trabalho. Para o leitor interessado recomendamos [1, 19].

Um dos nossos objetivos é estudar localmente funções analíticas $f : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$. Para isso, introduzimos uma relação de equivalência no espaço das funções analíticas definidas num aberto contendo a origem de \mathbb{C}^n , da seguinte forma:

Definição 1.8.1. Dizemos que a função $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é equivalente à função $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, se existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, com $0 \in U$, tal que $f|_U \equiv g|_U$. As classes de equivalência são chamadas de germes, denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, ou simplesmente, por f . A coleção de todos esses germes de funções citados acima é denotada por \mathcal{O}_n . Observemos que \mathcal{O}_n é um anel noetheriano local cujo ideal maximal é dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$.

Definição 1.8.2. Denotamos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ e por $\mathcal{O}_{n,p}^0$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Proposição 1.8.1. $\mathcal{O}_{n,p}$ é um \mathcal{O}_n -módulo livre de posto p .

1.9 Variedades algébricas e espaços analíticos complexos

Nesta seção trabalharemos com o caso complexo.

Variedades algébricas

O n -espaço afim sobre \mathbb{C} , denotado por \mathbb{A}^n é o conjunto de todas as n -uplas de elementos de \mathbb{C} . Um ponto $p \in \mathbb{A}^n$ é dado por $p = (a_1, \dots, a_n)$, com $a_i \in \mathbb{C}$, e a_i a i -ésima coordenada de p .

Seja $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre \mathbb{C} . Podemos interpretar os elementos de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ como funções do espaço afim \mathbb{A}^n sobre \mathbb{C} , com $f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$, onde $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e $p \in \mathbb{A}^n$. Desta forma, faz sentido falar no conjunto de zeros de f , que denotaremos por $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n; f(p) = 0\}$. De uma forma mais geral, se T for um subconjunto de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, podemos definir o conjunto de zeros de T como sendo o conjunto de zeros comuns a todos os elementos de T . Denotaremos esse conjunto da seguinte forma,

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n; f(p) = 0 \forall f \in T\}.$$

Claramente se I for o ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ gerado por T então $Z(T) = Z(I)$. Mais ainda, como $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano, qualquer ideal I tem um número finito

de geradores f_1, \dots, f_r , logo $Z(T)$ pode se expressar como o conjunto de zeros comuns de um número finito de polinômios f_1, \dots, f_r .

Definição 1.9.1. Um subconjunto Y de \mathbb{A}^n é chamado conjunto algébrico se existe um subconjunto $T \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $Y = Z(T)$.

Proposição 1.9.1. A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A intersecção de uma família arbitrária de conjuntos algébricos também é um conjunto algébrico.

Para a demonstração deste resultado e referência básica para o assunto ver [9].

Definição 1.9.2. Os conjuntos algébricos são os conjuntos fechados de uma topologia de \mathbb{A}^n , denominada topologia de Zariski.

Definição 1.9.3. Dizemos que $Y \subset X$, um subconjunto não vazio Y contido em X é irredutível se o mesmo não pode se expressar como uma união $Y = Y_1 \cup Y_2$, onde Y_1, Y_2 são fechados em Y .

Definição 1.9.4. Uma variedade algébrica afim é um subconjunto irredutível de \mathbb{A}^n (com a topologia induzida).

Espaços analíticos complexos

Analogamente ao caso de polinômios, podemos também estudar o conjunto de zeros de uma ou mais funções analíticas. Estes são os chamados espaços analíticos.

Primeiramente consideremos a seguinte definição:

Definição 1.9.5. Consideremos o conjunto de pares (V_α, U_α) , onde U_α é uma vizinhança aberta da origem em \mathbb{C}^n e V_α subconjuntos de U_α . Dois tais pares (V_1, U_1) e (V_2, U_2) são equivalentes se existe uma vizinhança $W \subset U_1 \cap U_2$ da origem tal que $V_1 \cap W = V_2 \cap W$. Uma classe de equivalência destes pares é chamada germe na origem em \mathbb{C}^n .

Se $f \in \mathcal{O}_n$, a classe de equivalência do conjunto $\{x : f(x) = 0\}$, onde f é um representante do germe f , é denotada por $\mathcal{V}(f)$; se f_1 e f_2 são dois representantes de um mesmo germe, então os conjuntos $\mathcal{V}(f_1)$ e $\mathcal{V}(f_2)$ são iguais.

Definição 1.9.6. Um germe de espaço analítico $(V, 0)$ em torno da origem é o germe do subconjunto

$$V = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_r) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r),$$

para $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Definimos o ideal de um germe de espaço analítico V por

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathcal{O}_n : V \subset f^{-1}(0)\}.$$

Dizemos que um germe de espaço analítico V é irredutível quando para quaisquer germes V_1 e V_2 tais que $V = V_1 \cup V_2$ então $V = V_1$ ou $V = V_2$, neste caso dizemos que V é uma variedade analítica.

O nosso objetivo é estudar a natureza de tais espaços analíticos na vizinhança de algum ponto fixado em \mathbb{C}^n , o qual sem perda de generalidade consideraremos a origem. Para isso precisamos definir formalmente o conceito de germe de um espaço analítico complexo (veja [6]).

Proposição 1.9.2. Seja V um germe de espaço analítico, então existem um inteiro positivo p e V_1, \dots, V_p variedades irredutíveis, com V_i não contida em V_j , para todo $i \neq j$, tais que $V = V_1 \cup \dots \cup V_p$. Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de V .

Definição 1.9.7. Dizemos que um germe de espaço analítico V é equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis tem a mesma dimensão.

Chamamos de germe de espaço analítico em x , um germe de conjunto V em x tal que, para alguma vizinhança U de x , o germe $V \cap U$ pode ser descrito por $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, para alguns $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Definição 1.9.8. Dizemos que um germe $V = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ é reduzido se a \mathbb{C} -álgebra $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$ não possui elementos nilpotentes.

Dizemos que um ponto z de um germe de espaço analítico V é um ponto regular ou suave se para alguma vizinhança U de z , o germe $U \cap V$ pode ser descrito como o conjunto

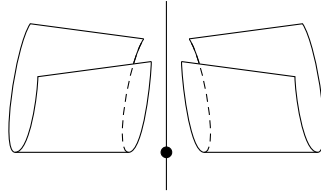
dos zeros de um número finito de germes de funções analíticas que possuem z como ponto regular. Um ponto de V não regular é chamado de ponto singular de V .

Teorema 1.9.3 (Hilbert's Nullstellensatz - versão local,[4]). Seja I um ideal de \mathcal{O}_n . Então $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \text{Rad}(I)$, onde $\text{Rad}(I)$ é o ideal radical de I , ou seja, o ideal $\{f \in \mathcal{O}_n : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n \in I\}$.

1.10 Estratificação de Whitney

Introduziremos aqui a noção de estratificação de Whitney, introduzida por Whitney [28] e amplamente utilizada desde então. Uma referência para este assunto é [1].

Definição 1.10.1. *Sejam M uma variedade suave e $V \subset M$. Uma estratificação localmente finita de V é uma partição de V em subvariedades de M (chamadas de estratos) tais que, para todo ponto de V existe uma vizinhança em M que encontra apenas um número finito de estratos.*



Definição 1.10.2. *Dizemos que a estratificação $\{V_\alpha\}$ de V satisfaz à condição de fronteira, se para dois estratos V_α e V_β , tais que $V_\alpha \cap \overline{V_\beta} \neq \emptyset$ então $V_\alpha \subset \overline{V_\beta}$.*

Condições de Whitney

Definição 1.10.3. *A estratificação $\{V_\alpha\}$ satisfaz às condições de Whitney se para todo par (V_α, V_β) de estratos, tais que V_β esteja no fecho de V_α e para todo ponto y de V_β temos:*

a) *Para toda seqüência de pontos x_i de V_α convergindo para y , tal que o limite*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(V_\alpha) = T$$

existe na Grassmanniana correspondente, então T contém $T_y(V_\beta)$.

b) Se além disso temos uma seqüência y_i de pontos de V_β com limite y e tal que o limite de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$$

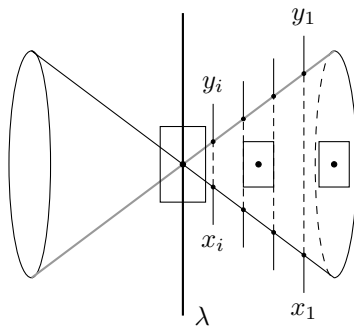
existe no espaço projetivo, então T contém λ .

Estas são as chamadas condição (a) e condição (b) de Whitney.

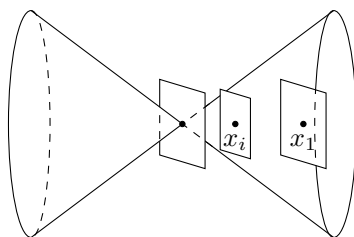
Whitney mostrou em seu trabalho [28] que toda variedade analítica complexa admite uma estratificação satisfazendo essas duas condições.

Uma estratificação que satisfaz às condições de Whitney e à condição de fronteira é chamada de estratificação de Whitney, ou estratificação Whitney regular.

Exemplo 1.10.1. Consideremos como primeiro exemplo o cone C com vértice na origem, e a estratificação $\{V_1, V_2\}$, onde V_1 é uma geratriz do cone e $V_2 = C \setminus V_1$. Neste caso, as condições (a) e (b) de Whitney não são satisfeitas. Para ver isto, basta considerar uma seqüência $\{x_i\}$ de pontos de C , situados todos sobre uma geratriz L do cone que não seja V_1 , cujo limite seja a origem, de tal modo que o segmento $\overline{x_i y_i}$ tenha sempre a mesma direção λ .



A condição (a) não é satisfeita, já que o limite dos espaços tangentes $T_{x_i}L$ não contém o espaço $T_0(V_1)$, a verificação de que a condição (b) também não é satisfeita vem do fato que λ não está contida no limite dos espaços tangentes $T_{x_i}L$.



Exemplo 1.10.2. Consideremos agora a variedade V em \mathbb{C}^3 dada pelo conjunto de zeros de $y^2 + x^3 - t^2x^2 = 0$.

Se tomarmos o eixo da coordenada t como um estrato V_1 e a parte regular da variedade V_{reg} como sendo outro estrato, temos que a estratificação $\{V_1, V_2\}$ satisfaz a condição (a), mas não a condição (b). Porém se acrescentarmos um estrato de dimensão zero, a origem de \mathbb{C}^3 , teremos as duas condições de Whitney satisfeitas.

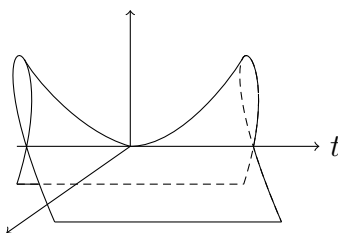


Figura 1.2: Variedade Singular.

1.11 Teoria de Morse

Apresentamos aqui os principais conceitos da teoria de Morse utilizada neste trabalho. Como referência sugerimos [18].

Seja M uma variedade diferenciável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável C^∞ .

Definição 1.11.1. Um ponto $p \in M$ será um ponto crítico de f se a derivada de f no ponto p for nula. Um ponto crítico será chamado não degenerado, se a matriz hessiana de f em p for não singular, isto é, se esta matriz tiver determinante não nulo. Os pontos críticos não degenerados são ditos pontos de Morse de f .

Definição 1.11.2. A matriz hessiana define uma aplicação bilinear H no espaço tangente T_pM . O índice desta aplicação é definido como sendo a dimensão do maior subespaço V de T_pM no qual H é definida negativa e é chamado índice de Morse de f em p .

Definição 1.11.3. Dizemos que uma aplicação f é uma função de Morse se todas os seus pontos críticos são não degenerados, isto é se todos os pontos críticos forem pontos de Morse.

Lema 1.11.1 (Lema de Morse). Seja p um ponto crítico não degenerado de f . Então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) em uma vizinhança U de p em M tal que neste sistema de coordenadas $p = (0, \dots, 0)$ e

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2,$$

para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in U$, em que λ é o índice de Morse de f em p .

O Teorema da Fibração

As principais referências para este Capítulo são [19, 22].

Definição 2.0.4. *O gradiente de uma função analítica $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ em um ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ é a $(n+1)$ -upla*

$$\mathbf{grad} f(z) = \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}(z) \right),$$

em que a j -ésima componente é o complexo conjugado de $\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)$.

Seja $p : I \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho diferenciável. A derivada direcional de f no ponto $p(t)$, na direção do vetor $\frac{dp}{dt}(t)$ é dada por:

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = df(p(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t).$$

Em termos dos elementos da matriz $\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right)_{1 \times (n+1)}$ de $df(z)$ e dos elementos da matriz $(v_1 \dots v_{n+1})$ de $\frac{dp}{dt}(t)$, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \cdot v_j = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno hermitiano

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto \sum_{j=1}^{n+1} a_j \bar{b}_j. \end{aligned}$$

Assim, definição de $\mathbf{grad} f(z)$ é escolhida de maneira que a regra da cadeia para a derivada de f ao longo de um caminho $z = p(t)$ é da forma

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle.$$

Em outras palavras, a derivada direcional de f na direção de um vetor v , em um ponto z , pode ser expressa pelo produto interno

$$df(z) \cdot v = \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle.$$

Agora, seja K a interseção dos zeros de f com a esfera $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|z\| = \varepsilon\}$. Considere a aplicação $\phi : S_\varepsilon \setminus K \longrightarrow S^1$ definida por

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Note que $S_\varepsilon \setminus K$ é uma variedade diferenciável real de dimensão $2n + 1$.

O próximo lema fornece uma caracterização dos pontos críticos de ϕ .

Lema 2.0.2. *Os pontos críticos de ϕ são os pontos $z \in S_\varepsilon \setminus K$ para os quais o vetor $i \mathbf{grad} \log f(z)$ é um múltiplo real de z .*

Antes de demonstrarmos o Lema 2.0.2, faremos as seguintes observações:

Observação 2.0.3. *Para $z \in S_\varepsilon \setminus K$, isto é $f(z) \neq 0$, podemos escrever $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$ e escolher, localmente, uma determinação para $\log f(z)$ e $\theta(z)$. Nesta caso,*

$$i\theta(z) = \log\left(\frac{f(z)}{|f(z)|}\right) = \log f(z) - \log |f(z)|,$$

o que implica que

$$\theta(z) = \mathbf{Re}(-i \log f(z)).$$

Ao longo deste trabalho vamos considerar sempre uma determinação local para o logaritmo e para a função θ .

Observação 2.0.4. Embora a função $\log f(z)$ possa ser definida apenas localmente, seu gradiente pode ser estendido naturalmente para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus f^{-1}(0)$. Basta notar que

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \left(\overline{\frac{\partial}{\partial z_1} \log f(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial z_{n+1}} \log f(z)} \right) = \left(\frac{1}{f(z)} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}}(z), \dots, \frac{1}{f(z)} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}}(z) \right).$$

Ou seja,

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(z)}{f(z)}.$$

Observação 2.0.5. O espaço vetorial hermitiano \mathbb{C}^{n+1} pode ser pensado como um espaço vetorial euclidiano de dimensão $2n + 2$, basta tomar o produto interno de $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ como sendo $\mathbf{Re} \langle z, z' \rangle$.

De fato, consideremos o isomorfismo $\gamma : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ definido por

$$\gamma(a_1 + ib_1, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1}) = (a_1, b_1, \dots, a_{n+1}, b_{n+1}).$$

Sejam $z = (a_1 + ib_1, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1})$ e $z' = (a'_1 + ib'_1, \dots, a'_{n+1} + ib'_{n+1})$. Então:

$$\mathbf{Re} \langle z, z' \rangle = \mathbf{Re} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (a_j + ib_j) \cdot (a'_j - ib'_j) \right) = \sum_{j=1}^{n+1} (a_j a'_j + b_j b'_j) = (\gamma(z), \gamma(z')),$$

em que $(,)$ denota o produto interno usual em \mathbb{R}^{2n+2} .

Podemos demonstrar agora o Lema 2.0.2.

Demonstração do Lema 2.0.2. Como $\dim T_{\phi(z)} S^1 = 1$, a derivada

$$d\phi(z) : T_z(S_\varepsilon \setminus K) \rightarrow T_{\phi(z)} S^1$$

não será sobrejetora, isto é, z será ponto crítico de ϕ , se, e somente se, $d\phi(z)$ for a aplicação nula.

Escrevendo $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$, sabemos, pela Observação 2.0.3, que $\theta(z) = \mathbf{Re}(-i \log f(z))$.

Derivando-se a função θ ao longo de uma curva $z = p(t)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) &= \mathbf{Re}(-i \frac{d}{dt}(\log f(p(t)))) \\
&= \mathbf{Re}(\frac{-i}{f(p(t))} \frac{d}{dt}(f \circ p)(t)) \\
&= \mathbf{Re}(\frac{-i}{f(p(t))} \langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \rangle) \\
&= \mathbf{Re} \langle \frac{dp}{dt}(t), i \mathbf{grad} \log f(p(t)) \rangle.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada direcional de θ , no ponto $z = p(t)$, na direção do vetor $v = \frac{dp}{dt}(t)$, é dada por

$$d\theta(z) \cdot v = \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle.$$

Agora, se o vetor $i \mathbf{grad} \log f(z)$ for um múltiplo real de z (isto é, se este vetor for normal a S_ε), pela Observação 2.0.5, para todo vetor v tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ em z , a derivada direcional $\mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle$ será nula. Como

$$\phi(z) = e^{i\theta(z)} \Rightarrow d\phi(z) = \phi(z)d\theta(z),$$

segue que, para todo $v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K)$,

$$d\phi(z) \cdot v = \phi(z)d\theta(z) \cdot v = 0.$$

Por outro lado, se os vetores z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$ forem linearmente independentes sobre os reais, então existirá um vetor v em nosso espaço euclidiano de maneira que

$$\begin{cases} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle \neq 0. \end{cases}$$

De fato, se $\mathbf{Re} \langle i \mathbf{grad} \log f(z), z \rangle = 0$, basta escolher

$$v = i \mathbf{grad} \log f(z),$$

que é não nulo, pois estamos considerando $i \mathbf{grad} \log f(z)$ e z linearmente independentes sobre \mathbb{R} .

Se, por outro lado, $\mathbf{Re} \langle i \mathbf{grad} \log f(z), z \rangle \neq 0$, tomamos

$$v = i \mathbf{grad} \log f(z) - \frac{\mathbf{Re} \langle i \mathbf{grad} \log f(z), z \rangle z}{\mathbf{Re} \langle z, z \rangle}.$$

Neste caso, é fácil ver que $\mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0$. Também, calculando $\mathbf{Re} \langle v, v \rangle$, obtemos $\mathbf{Re} \langle v, v \rangle = \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle$. Portanto, $\mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle \neq 0$, já que o vetor v escolhido é não nulo.

Agora, pela Observação 2.0.5, $\mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0$ implica que $v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K)$. Além disso, $d\theta(z) \cdot v = \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle \neq 0$, isto é, $d\phi(z) \cdot v = \phi(z)d\theta(z) \cdot v \neq 0$. Portanto, z não é ponto crítico de ϕ . Isto conclui a demonstração do lema. \square

A partir deste ponto, vamos supor que $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função polinomial não nula que se anula na origem de \mathbb{C}^{n+1} . Queremos provar que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação $\phi : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow S^1$ não admite pontos críticos.

Vamos denotar por V a hipersuperfície $f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Lema 2.0.6. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ com $\|z\| \leq \varepsilon$ e z no domínio de $i \mathbf{grad} \log f$, os vetores z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$ são linearmente independentes sobre os reais.*

Vamos demonstrar um resultado um pouco mais forte:

Lema 2.0.7. *Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula que se anula na origem. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$ com $\|z\| \leq \varepsilon_0$ e z no domínio de $i \mathbf{grad} \log f$, os vetores z e $\mathbf{grad} \log f(z)$ são linearmente independentes sobre os complexos ou*

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z,$$

em que λ é um número complexo não nulo, cujo argumento ($\arg \lambda$) em valor absoluto é menor que, digamos, $\pi/4$. Em outras palavras, λ está no quadrante aberto de \mathbb{C} simétrico em relação ao semi-eixo real positivo.

Observe que, desta maneira, a prova do Lema 2.0.6 segue diretamente do Lema 2.0.7:

Primeiramente, se z e $\mathbf{grad} \log f(z)$ forem linearmente independentes sobre os complexos, também o serão z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$. Porém, se $\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z$ com $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

e $|\arg \lambda| < \pi/4$, então λ não será imaginário puro e, portanto, $i \mathbf{grad} \log f(z) = (i\lambda)z$ com $i\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

A demonstração do Lema 2.0.7 dependerá do Lema de Seleção da Curva e do Lema 2.0.9 apresentados a seguir.

Lema 2.0.8 (Lema de Seleção da Curva [19]). *Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico real, e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto definido por um número finito de desigualdades:*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\},$$

isto é, um conjunto semi algébrico. Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, se $0'$ pertence ao fecho de $U \cap V$, então existe uma curva analítica real

$$p : [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

satisfazendo $p(0) = 0'$ e $p(t) \in U \cap V$ para todo $t > 0$.

Lema 2.0.9. *Seja $p : [0, \delta') \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho analítico real com $p(0) = 0$, tal que, para cada $t > 0$, o número $f(p(t))$ é não nulo e o vetor $\mathbf{grad} \log f(p(t))$ é um múltiplo complexo de $p(t)$, isto é,*

$$\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t), \quad \lambda(t) \in \mathbb{C}.$$

Então $\arg \lambda(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$.

Em outras palavras, $\lambda(t)$ é não nulo para valores positivos de t suficientemente pequenos e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i \arg \lambda(t)} = 1.$$

Demonstração. Como $p(t)$, $f(p(t))$ e $\mathbf{grad} f(p(t))$ são funções analíticas reais, podemos considerar suas expansões em séries de Taylor em torno da origem:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 t^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + a_2 t^{\alpha+2} + \dots, & a_i &\in \mathbb{C}^{n+1}; \\ f(p(t)) &= b_0 t^\beta + b_1 t^{\beta+1} + b_2 t^{\beta+2} + \dots, & b_i &\in \mathbb{C}; \\ \mathbf{grad} f(p(t)) &= c_0 t^\gamma + c_1 t^{\gamma+1} + c_2 t^{\gamma+2} + \dots, & c_i &\in \mathbb{C}^{n+1}; \end{aligned}$$

em que a_0 , b_0 e c_0 são não nulos.

A identidade $\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle$ nos mostra que $\mathbf{grad} f(p(t))$ não pode ser identicamente nulo, caso contrário, teríamos $\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = 0$, o que implicaria $f \circ p$ constante em uma vizinhança de $t = 0$. Como $f(p(0)) = f(0) = 0$, $f(p(t))$ seria nula nesta vizinhança, contrariando a hipótese do lema.

Observe também que os expoentes α , β e γ são inteiros positivos com $\alpha \geq 1$ (pois $p(0) = 0$) e $\beta \geq 1$ (pois $f(0) = 0$). Além disso, as séries são todas convergentes para, digamos, $|t| < \varepsilon'$.

Por hipótese, para cada $t > 0$, temos $\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$, então

$$\mathbf{grad} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)\overline{f(p(t))}.$$

Como as componentes dos vetores $\mathbf{grad} f(p(t))$ e $p(t)\overline{f(p(t))}$ são funções analíticas reais, comparando as componentes correspondentes, podemos escrever $\lambda(t)$ como um quociente de funções analíticas reais, admitindo portanto, expansão em série de Laurent. Considerando-se as expansões de Taylor na igualdade $\mathbf{grad} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)\overline{f(p(t))}$, obtemos:

$$c_0 t^\gamma + \dots = \lambda(t)(a_0 \overline{b_0} t^{\alpha+\beta} + \dots).$$

Assim, o desenvolvimento em série de Laurent de λ é da forma:

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots),$$

com $c_0 = \lambda_0 a_0 \overline{b_0}$. Substituindo-se a equação na expansão em série de potências da identidade

$$\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle,$$

temos

$$\beta b_0 t^{\beta-1} + \dots = \left\langle \alpha a_0 t^{\alpha-1} + \dots, \lambda_0 a_0 \overline{b_0} t^\gamma + \dots \right\rangle = \alpha \|a_0\|^2 \overline{\lambda_0} b_0 t^{\alpha-1+\gamma} + \dots$$

Comparando-se os coeficientes principais, segue que $\beta = \alpha \|a_0\|^2 \bar{\lambda}_0$. Isto é, λ_0 é um número real positivo.

Para calcularmos $\lim(\lambda(t)/|\lambda(t)|)$ é necessário assegurar que $\lambda(t) \neq 0$ para $t \neq 0$ em alguma vizinhança de zero. Esta condição será satisfeita devido à igualdade

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots).$$

De fato, como $(1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)$ é contínua e tem limite 1 quando $t \rightarrow 0$, dado $\varepsilon'' > 0$ suficientemente pequeno, existe uma vizinhança de $t = 0$ na qual $(1 + k_1 t + \dots) > \varepsilon''$. Logo,

$$\lambda(t) = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots) > \varepsilon'' \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}$$

para $t \neq 0$ nesta vizinhança. Mas, como $\lambda_0 > 0$, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)}{|\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}| (1 + k_1 t + k_2 t^2 + \dots)} = 1.$$

□

Demonstração do Lema 2.0.7. Suponha primeiramente que existam pontos $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$, arbitrariamente próximos da origem, e escalares $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z \neq 0$ e $|\arg \lambda| > \pi/4$. Isto é, suponha que λ pertença ao semi-plano aberto

$$\mathbf{Re}((1 + i)\lambda) < 0,$$

ou ao semi-plano aberto

$$\mathbf{Re}((1 - i)\lambda) < 0.$$

Queremos expressar estas condições por meio de equações e inequações polinomiais, para aplicarmos então o Lema de Seleção da Curva.

Seja W o conjunto de todos os $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ para os quais os vetores $\mathbf{grad} f(z)$ e z são linearmente dependentes sobre \mathbb{C} . Então, $z \in W$ se, e somente se,

$$z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}} = z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}}, \quad j, k = 1, \dots, n + 1.$$

De fato, se para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ tivermos

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z)} \right) = \lambda(z_1, \dots, z_{n+1}),$$

segue que

$$z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)} = \lambda z_k z_j = z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)}, \quad j, k = 1, \dots, n+1.$$

Por outro lado, se $z \neq 0$, então $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ com $z_s \neq 0$, para algum s . Assim, podemos escrever

$$\frac{z_j}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}(z)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)}, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

logo,

$$\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z)} \right) = \left(\frac{z_1}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}(z)}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}(z)} \right) = \frac{1}{z_s} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_s}(z)} (z_1, \dots, z_{n+1}).$$

Ou seja, $\mathbf{grad} f(z)$ e z são linearmente dependentes sobre \mathbb{C} . (Note que, se $z = 0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, então z pertence trivialmente a W .)

Escrevendo $z_j = x_j + iy_j$ e tomando as partes real e imaginária das equações

$$z_j \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}(z)} = z_k \overline{\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)},$$

obtemos (lembrando que f é polinomial) uma coleção de equações polinomiais nas variáveis reais x_j e y_j . Isto mostra que $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é um conjunto algébrico real.

Notemos que um ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$ pertence a W se, e somente se,

$$\frac{\mathbf{grad} f(z)}{\overline{f(z)}} = \lambda z,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, isto é,

$$\mathbf{grad} f(z) = \lambda \overline{f(z)} z.$$

Tomando o produto interno por $\overline{f(z)} z$, obtemos

$$\left\langle \mathbf{grad} f(z), \overline{f(z)} z \right\rangle = \lambda \|\overline{f(z)} z\|^2.$$

Em outras palavras, o número λ multiplicado por um número real positivo é igual a $\lambda'(z) = \langle \mathbf{grad} f(z), \overline{f(z)}z \rangle$, e portanto,

$$\arg \lambda = \arg \lambda'.$$

Note que λ' é uma função polinomial, a valores complexos, nas variáveis reais x_j e y_j .

Agora, denotemos por U_+ (respectivamente U_-) o conjunto aberto constituído de todos os $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ que satisfazem a desigualdade

$$\mathbf{Re}((1+i)\lambda'(z)) < 0$$

(respectivamente $\mathbf{Re}((1-i)\lambda'(z)) < 0$).

Observe que se $z \in V$, isto é $f(z) = 0$, então $\lambda'(z) = 0$ e z não pertence a U_+ nem a U_- . Ou seja, $U_+ \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$ e $U_- \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$.

Escrevendo cada componente z_j de z como $z_j = x_j + iy_j$ em $\lambda'(z) = \langle \mathbf{grad} f(z), \overline{f(z)}z \rangle$ e substituindo-as nas expressões para U_+ e U_- , verifica-se que estes são conjuntos semi-algébricos reais.

A hipótese de existirem $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$ arbitrariamente próximos da origem, com $\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z \neq 0$ e $|\arg \lambda| > \pi/4$ é então equivalente a

$$z \in W \cap (U_+ \cup U_-) = (W \cap U_+) \cup (W \cap U_-)$$

e

$$0 \in \overline{W \cap (U_+ \cup U_-)} = \overline{W \cap U_+} \cup \overline{W \cap U_-},$$

em que barra denota o fecho do conjunto.

Portanto, pelo Lema de Seleção da Curva, deve existir um caminho analítico real

$$p : [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1},$$

com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in W \cap U_+$, ou $p(t) \in W \cap U_-$, para todo $t > 0$. Em qualquer dos casos, obtemos

$$\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t), \text{ com } |\arg \lambda(t)| > \pi/4, \text{ para todo } t > 0.$$

O que não pode ocorrer, pois $p(t) \in (U_+ \cup U_-)$ implica $p(t) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus V$, para t não nulo, de onde segue que $f(p(t)) \neq 0$, para todo $t \neq 0$. Então poderíamos aplicar o Lema 2.0.9 para obtermos uma contradição.

Esta contradição não completa a demonstração: permanece a possibilidade de existirem pontos $z \in \mathbb{C}^{n+1} - V$, arbitrariamente próximos da origem, satisfazendo

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z, \text{ com } \lambda = 0 \text{ ou } |\arg \lambda| = \pi/4.$$

Neste caso, definimos o conjunto algébrico real

$$\tilde{W} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; (\mathbf{Re}((1+i)\lambda'(z))) \cdot (\mathbf{Re}((1-i)\lambda(z))) = 0\}$$

e o conjunto semi-algébrico real

$$U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \|f(z)\|^2 > 0\}.$$

Estamos supondo que $z \in (W \cap \tilde{W}) \cap U$ e $0 \in \overline{(W \cap \tilde{W}) \cap U}$. Novamente, pelo Lema de Seleção da Curva, deve existir um caminho real analítico $p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in (W \cap \tilde{W}) \cap U$, para todo $t > 0$.

Agora, $p(t) \in W$ implica que $\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ e $p(t) \in \tilde{W}$ implica que $\lambda(t) = \lambda'(t) = 0$ ou $|\arg \lambda(t)| = |\arg \lambda'(t)| = \pi/4$, $t > 0$. Como também temos $p(t) \in U$, então $f(p(t)) \neq 0$, para $t > 0$, e podemos aplicar o Lema 2.0.9 para novamente obtermos uma contradição. \square

Agora, usando o Lema 2.0.2 obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.0.10. *Nas condições do Lema 2.0.7, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, a aplicação $\phi : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow S^1$ não terá pontos críticos.*

Assim, para cada $e^{i\theta} \in S^1$, o espaço

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon - K$$

é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$.

Definição 2.0.5. *O número ε_0 acima é chamado raio de Milnor de ϕ . A variedade F_θ , é dita fibra de Milnor da aplicação ϕ .*

Para demonstrarmos que ϕ é de fato a projeção de uma fibração localmente trivial, faremos um uso mais refinado do Lema 2.0.7, de modo a controlar cuidadosamente o comportamento de $\phi(z)$ quando z tende ao conjunto K , onde ϕ não está definida.

Lema 2.0.11. *Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, então existe um campo de vetores diferenciável, $v(z)$, tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ tal que, para cada z em $S_\varepsilon \setminus K$, o produto interno hermitiano*

$$\langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle$$

é não nulo e tem argumento em valor absoluto menor que $\pi/4$.

Demonstração. Iniciaremos a demonstração construindo campos de vetores em $S_\varepsilon \setminus K$ localmente: dado um ponto z_a em $S_\varepsilon \setminus K$, exibiremos um campo $v_a(z)$ ao longo de uma vizinhança U_a de z_a de maneira que as propriedades do teorema sejam satisfeitas. Em seguida, usaremos uma partição da unidade para obtermos $v(z)$.

Seja $z_a \in S_\varepsilon \setminus K$, consideremos os casos:

Caso 1: Suponha z_a e $i \mathbf{grad} \log f(z_a)$ linearmente independentes sobre \mathbb{C} .

Então, as equações

$$\begin{aligned} \langle v, z_a \rangle &= 0, \\ \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

aditem soluções simultâneas v , pois, substituindo $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$, $z_a = (z_1^a, \dots, z_{n+1}^a)$ e $i \mathbf{grad} \log f(z_a) = (u_1, \dots, u_{n+1})$ nas identidades, obtemos um sistema de duas equações lineares com $n + 1$ variáveis.

Em particular, existe uma única solução simultânea no espaço gerado pelos vetores z_a e $i \mathbf{grad} \log f(z_a)$. Isto é, uma única solução da forma

$$v = \alpha z_a + \beta i \mathbf{grad} \log f(z_a), \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

De fato, como z_a e $i \mathbf{grad} \log f(z_a)$ são linearmente independentes sobre \mathbb{C} , o determinante de Gram [23],

$$\det G = \begin{vmatrix} \langle z_a, z_a \rangle & \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), z_a \rangle \\ \langle z_a, i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle & \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle \end{vmatrix}$$

é não nulo. Logo, o sistema linear, nas variáveis α e β ,

$$\begin{cases} \langle v, z_a \rangle = \alpha \langle z_a, z_a \rangle + \beta \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), z_a \rangle = 0 \\ \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle = \alpha \langle z_a, i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle + \beta \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), i \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle = 1 \end{cases}$$

tem uma única solução dada por

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-1}{\det G} \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), z_a \rangle \\ \beta &= \frac{1}{\det G} \langle z_a, z_a \rangle \end{aligned}$$

portanto,

$$v = \frac{1}{\det G} [\langle z_a, z_a \rangle i \mathbf{grad} \log f(z_a) - \langle i \mathbf{grad} \log f(z_a), z_a \rangle z_a].$$

Agora, observe que a função $h : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(z) = \det G(z) = \|z\|^2 \|i \mathbf{grad} \log f(z)\|^2 - |\langle z, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle|^2$$

é uma função C^∞ . Então, como $h(z_a) \neq 0$, existe uma vizinhança U_a^1 de z_a tal que $h(z) \neq 0$ para todo z em U_a^1 . Além disso, a função $g : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \|z\|^2 i \mathbf{grad} \log f(z) - \langle i \mathbf{grad} \log f(z), z \rangle z$$

é C^∞ e não nula em z_a . Logo, existe uma vizinhança U_a^2 de z_a tal que $g(z) \neq 0$, para todo z em U_a^2 . Assim, podemos definir

$$v_a(z) = \frac{\|z\|^2 \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z) - \langle \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z), z \rangle z}{\|z\|^2 \|\mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z)\|^2 - |\langle z, \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z) \rangle|^2},$$

para todo $z \in U_a = U_a^1 \cap U_a^2$.

Por construção, para todo $z \in U_a$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle v_a(z), z \rangle &= 0, \\ \langle v_a(z), \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z) \rangle &= 1. \end{aligned}$$

A primeira equação garante que $\mathbf{Re} \langle v_a(z), z \rangle = 0$, isto é, que $v_a(z)$ é tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ em z .

Caso 2: Se $\mathbf{grad} \log f(z_a)$ for igual a λz_a , $\lambda \in \mathbb{C}$, então basta tomar

$$v = iz_a.$$

Assim, $\mathbf{Re} \langle iz_a, z_a \rangle = 0$ e, pelo Lema 2.0.7, o número

$$\langle iz_a, \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z_a) \rangle = \bar{\lambda} \|z_a\|^2$$

tem argumento em valor absoluto menor que $\pi/4$. Usando a continuidade da função

$$z \mapsto |\arg \langle iz, \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z) \rangle|$$

conseguimos uma vizinhança U_a de z_a tal que

$$|\arg \langle iz, \mathbf{i} \mathbf{grad} \log f(z) \rangle| < \pi/4$$

para todo z em U_a . Definimos então,

$$v_a(z) = iz, \quad \forall z \in U_a.$$

Desta maneira, cobrimos $S_\varepsilon \setminus K$ por abertos U_a em cada qual está definido um campo de vetores tangentes satisfazendo as propriedades requeridas. Finalmente, utilizando-se uma partição diferenciável da unidade, obtemos um campo de vetores global $v(z)$. Tal campo será tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ pois, para cada z , $v(z)$ é dado por uma combinação linear com coeficientes reais (fornecidos pela partição) de vetores tangentes. Precisamos porém, garantir que as "colagens" destes campos locais mantêm a propriedade

$$|\arg \langle v(z), i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle| < \pi/4.$$

É o que faremos na proposição seguinte.

Proposição 2.0.12. *Sejam $u, v_{a_1}, \dots, v_{a_n}$ vetores de \mathbb{C}^{n+1} tais que*

$$|\arg \langle v_{a_i}, u \rangle| < \pi/4, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então para toda combinação linear não nula, $v = \alpha_1 v_{a_1} + \dots + \alpha_n v_{a_n}$, com coeficientes reais, temos $|\arg \langle v, u \rangle| < \pi/4$.

Demonstração. Mostraremos que o resultado é válido para $v = \alpha_1 v_{a_1} + \alpha_2 v_{a_2}$, o caso geral segue por indução. Considere

$$\begin{aligned} \beta &= \arg \langle v, u \rangle, \\ \beta_1 &= \arg \langle \alpha_1 v_{a_1}, u \rangle = \arg \langle v_{a_1}, u \rangle, \\ \beta_2 &= \arg \langle \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle = \arg \langle v_{a_2}, u \rangle. \end{aligned}$$

Por hipótese, $|\beta_1| < \pi/4$ e $|\beta_2| < \pi/4$. Queremos mostrar que $|\beta| < \pi/4$. Agora,

$$\begin{aligned} |\langle \alpha_1 v_{a_1}, u \rangle| \cos \beta_1 + |\langle \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle| \cos \beta_2 &= \operatorname{Re} \langle \alpha_1 v_{a_1}, u \rangle + \operatorname{Re} \langle \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle \\ &= \operatorname{Re} \langle \alpha_1 v_{a_1} + \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle \\ &= |\langle \alpha_1 v_{a_1} + \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle| \cos \beta. \end{aligned}$$

Mas,

$$|\langle \alpha_1 v_{a_1} + \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle| \cos \beta \leq |\langle \alpha_1 v_{a_1}, u \rangle| \cos \beta + |\langle \alpha_2 v_{a_2}, u \rangle| \cos \beta.$$

Logo,

$$|\langle \alpha_1 v_{\alpha_1}, u \rangle| (\cos \beta_1 - \cos \beta) + |\langle \alpha_2 v_{\alpha_2}, u \rangle| (\cos \beta_2 - \cos \beta) \leq 0. \quad (2.0.1)$$

Agora, suponha que $|\beta| \geq \pi/4$. Então $\cos \beta$ pertence ao intervalo $[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Como

$$\cos \beta_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos \beta_2 > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

segue que

$$(\cos \beta_1 - \cos \beta) > 0 \quad \text{e} \quad (\cos \beta_2 - \cos \beta) > 0,$$

o que contradiz a Equação 2.0.1. Portanto, $|\beta| < \frac{\pi}{4}$. \square

Isto conclui a demonstração do Lema 2.0.11. \square

Considere agora a normalização do campo $v(z)$:

$$w(z) = v(z) / \mathbf{Re} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle.$$

Note que $w(z)$ também é diferenciável e tangente à $S_\varepsilon \setminus K$. Além disso, w satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} \langle w(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle &= 1 \\ |\mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \log f(z) \rangle| &< 1 \end{aligned}$$

De fato, pelo Lema 2.0.11,

$$\mathbf{Re} \langle w(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle = \frac{\mathbf{Re} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle}{\mathbf{Re} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle} = 1$$

$$\mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \log f(z) \rangle = \left| \frac{\mathbf{Re} \langle v(z), \mathbf{grad} \log f(z) \rangle}{\mathbf{Re} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle} \right| = \left| \frac{\mathbf{Im} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle}{\mathbf{Re} \langle v(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle} \right| < 1.$$

Em seguida, trabalharemos com as trajetórias da equação diferencial

$$\frac{dz}{dt} = w(z).$$

Lema 2.0.13. *Dado $z_0 \in S_\varepsilon \setminus K$, existe um único caminho diferenciável*

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon - K$$

que satisfaz a equação diferencial $\frac{dp}{dt}(t) = w(p(t))$, com condição inicial $p(0) = z_0$.

Demonstração. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução de uma equação diferencial, tal solução existe localmente e pode ser estendida a um intervalo maximal aberto de \mathbb{R} . Como $S_\varepsilon \setminus K$ não é compacto, para que seja possível estender a solução a toda reta real, deve-se assegurar que $p(t)$ não tende a K quando t tende a algum limite finito t_0 . Isto é, devemos garantir que $|f(p(t))|$ não tende a zero, ou equivalentemente, que $\mathbf{Re} \log f(p(t))$ não tende a $-\infty$, pois $\log |f(p(t))| = \mathbf{Re} \log f(p(t))$. Mas, a derivada

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{Re} \log(f \circ p)(t)) = \mathbf{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} \log f(p(t)) \right\rangle = \mathbf{Re} \langle w(p(t)), \mathbf{grad} \log f(p(t)) \rangle$$

tem valor absoluto menor que 1. Portanto, $\mathbf{Re} \log f(p(t))$ é limitada em cada vizinhança finita de t . □

Escrevendo $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$, segue da demonstração do Lema 2.0.2 e das propriedades do campo $w(z)$ que

$$\frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) = \mathbf{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i \mathbf{grad} \log f(p(t)) \right\rangle$$

é identicamente 1, para todo $z = p(t)$ que é solução de $\frac{dz}{dt} = w(t)$. Portanto,

$$\theta(p(t)) = t + \text{constante} = t + \theta(p(0)).$$

Em outras palavras, ϕ projeta cada solução $p(t)$ em um caminho que percorre S^1 no sentido anti-horário com velocidade unitária.

Observação 2.0.14. *Se $p(t)$ é um caminho na variedade F_θ , então*

$$0 = \frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) = \mathbf{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), i \mathbf{grad} \log f(p(t)) \right\rangle.$$

Isto nos diz que, segundo o produto interno real usual, o vetor $i \mathbf{grad} \log f(p(t))$ é ortogonal a F_θ em $z = p(t)$. Mas, então, a propriedade $\mathbf{Re} \langle w(z), i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle = 1$ diz que $w(z)$ tem componente não nula no espaço normal a F_θ em z , ou seja, as curvas integrais de $w(z)$ são transversais às variedades F_θ .

A observação acima, juntamente com a descrição do comportamento da função θ ao longo de cada curva integral do campo $w(z)$, $\theta(p(t)) = t + \theta(p(0))$, sugerem como deve ser feita a “colagem” das fibras para obtermos a trivialização.

Consideremos o fluxo sobre $S_\varepsilon \setminus K$, gerado pelo campo w , isto é:

$$\begin{aligned} h : (S_\varepsilon \setminus K) \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_\varepsilon \setminus K \\ (z, t) &\longmapsto p_z(t), \end{aligned}$$

em que $p_z : \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon \setminus K$ é a única curva integral com $p_z(0) = z$. Note que $h_t : S_\varepsilon \setminus K \longrightarrow S_\varepsilon \setminus K$ dado por $h_t(z) = p_z(t)$ é um difeomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato, para cada $t \in \mathbb{R}$, a aplicação h_t é diferenciável. Além disso, para t_1 e t_2 em \mathbb{R} , temos

$$\begin{aligned} \phi(h_{t_1+t_2}(z)) &= e^{i\theta(h_{t_1+t_2}(z))} = e^{i\theta(p_z(t_1+t_2))} \\ &= e^{i(\theta(z)+t_1+t_2)} = e^{i((\theta(z)+t_2)+t_1)} \\ &= e^{i(\theta(p_z(t_2))+t_1)} = e^{i\theta(p_{p_z(t_2)}(t_1))} \\ &= e^{i\theta(h_{t_1}(p_z(t_2)))} = e^{i\theta(h_{t_1}(h_{t_2}(z)))} \\ &= e^{i\theta(h_{t_1} \circ h_{t_2}(z))} = \phi(h_{t_1} \circ h_{t_2}(z)). \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com uma determinação local de $\theta(z)$ então $\phi(z)$ é injetora. Portanto,

$$h_{t_1} \circ h_{t_2}(z) = h_{t_1+t_2}(z).$$

Em particular, $h_t^{-1}(z) = h_{-t}(z)$, de onde segue que h_t é um difeomorfismo.

Observe também que cada fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é levada sobre a fibra $F_{\theta+t}$ por cada h_t . De fato, se $z \in F_\theta$, então

$$\phi(h_t(z)) = \phi(p_z(t)) = e^{i\theta(p_z(t))} = e^{i(t+\theta(p_z(0)))} = e^{i(t+\theta(z))} = e^{i(t+\theta)},$$

de onde segue que $h_t(z) \in F_{\theta+t}$. Como h_t é difeomorfismo, segue a afirmação.

Após este longo trabalho, podemos enfim demonstrar o Teorema da Fibrção:

Teorema 2.0.15 (O Teorema da Fibrção). *Seja ε_0 um raio de Milnor da aplicação ϕ . Para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, o espaço $S_\varepsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 , com projeção $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.*

Demonstração. Dado $e^{i\theta} \in S^1$, seja U_θ um intervalo aberto em S^1 da forma

$$U_\theta = \{e^{it} \in S^1 : t \in J_\theta = (\theta - a, \theta + a), 0 < a < \theta + \pi\},$$

e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\theta : U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{it}, z) &\longmapsto h_{t-\theta}(z). \end{aligned}$$

Então,

$$(\phi \circ \psi_\theta)(e^{it}, z) = \phi(h_{t-\theta}(z)) = \phi(p_z(t - \theta)) = e^{i[(t-\theta)+\theta(p_z(0))]} = e^{i(t-\theta+\theta(z))} = e^{it},$$

pois $z \in F_\theta$, isto é, $\theta(z) = \theta$. Em outras palavras, ϕ é uma projeção.

Precisamos mostrar ainda que ψ_θ é um difeomorfismo. Que ψ_θ é diferenciável, segue da composição de aplicações diferenciáveis:

$$\begin{aligned} U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow J_\theta \times F_\theta \longrightarrow F_\theta \times (-a, a) \longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{it}, z) &\longmapsto (t, z) \longmapsto (z, t - \theta) \longmapsto h(z, t - \theta), \end{aligned}$$

pois $\psi_\theta(e^{it}, z) = h(z, t - \theta)$.

Considerando a aplicação $g : \phi^{-1}(U_\theta) \longrightarrow U_\theta \times F_\theta$, dada por

$$g(z) = (\phi(z), h_{\theta-\arg \phi(z)}(z)) = (e^{i\theta(z)}, h_{\theta-\theta(z)}(z)),$$

obtemos,

$$\psi_\theta(g(z)) = \psi_\theta(e^{i\theta(z)}, h_{\theta-\theta(z)}(z)) = h_{\theta(z)-\theta}(h_{\theta-\theta(z)}(z)) = h_0(z) = p_z(0) = z.$$

Isto é,

$$\psi_\theta \circ g = Id_{\phi^{-1}(U_\theta)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(\psi_\theta(e^{it}, z)) &= g(h_{t-\theta}(z)) \\ &= (\phi(h_{t-\theta}(z)), h_{\theta-\arg \phi(h_{t-\theta}(z))}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{it}, h_{\theta-t}(h_{t-\theta}(z))) \\ &= (e^{it}, h_0(z)) = (e^{it}, z). \end{aligned}$$

Isto é,

$$g \circ \psi_\theta = Id_{U_\theta \times F_\theta}.$$

Portanto, $g = \psi_\theta^{-1}$. Para mostrarmos que ψ_θ^{-1} é diferenciável, basta considerar a aplicação

$$z \longrightarrow (z, \arg \phi(z)) \longrightarrow (z, \theta - \arg \phi(z)) \longrightarrow h(z, \theta - \arg \phi(z)) = h_{\theta-\arg(z)}(z),$$

que é uma composição de aplicações diferenciáveis. Logo, as componentes $\phi(z)$ e $h_{\theta-\arg \phi(z)}(z)$ de $g(z)$ são diferenciáveis. Portanto, $g = \psi_\theta^{-1}$ é diferenciável.

□

A Topologia das Fibras

Continuaremos a estudar a fibração localmente trivial, obtida no capítulo anterior,

$$\phi : S_\varepsilon \setminus K \longrightarrow S^1$$

associada a uma função polinomial complexa não nula $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ que se anula na origem. Pelo Corolário 2.0.10, cada fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é uma variedade suave de dimensão real $2n$. O principal resultado apresentado neste capítulo refere-se à topologia destas variedades e está descrito no seguinte teorema:

Teorema 3.0.16. *Cada fibra F_θ tem o tipo de homotopia de um complexo CW finito de dimensão n .*

A demonstração do Teorema 3.0.16 dependerá de um estudo da teoria de Morse associada à função real diferenciável, $|f|$, restrita a F_θ . Neste caso, será mostrado que o índice de Morse de $|f|$ em um ponto crítico é $\geq n$. Deste modo, nosso primeiro passo será identificar os pontos críticos desta aplicação.

Considere a aplicação diferenciável $a_\theta : F_\theta \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$a_\theta(z) = \log |f(z)|.$$

Como a derivada da função real logaritmo é um isomorfismo, os pontos críticos da função a_θ são os mesmos de $|f|$ restrita a F_θ . É conveniente trabalharmos com a função a_θ ao invés de $|f|$ devido à caracterização da derivada direcional, dada no capítulo anterior, que envolve a função $\log f(z)$.

Lema 3.0.17. *Os pontos críticos de $a_\theta(z) = \log |f(z)|$ em F_θ são os pontos $z \in F_\theta$ para os quais o vetor $\mathbf{grad} \log f(z)$ é um múltiplo complexo de z .*

Demonstração. Escrevendo $f(z) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ e considerando a equação

$$\log f(z) = \log(|f(z)|e^{i \arg f(z)}) = \log |f(z)| + i \arg f(z),$$

obtemos

$$\mathbf{Re} \log f(z) = \log |f(z)|.$$

Derivando-se a função $\log |f(z)| = \mathbf{Re} \log f(z)$ ao longo de uma curva $z = p(t)$ em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus V$, observamos que a derivada direcional na direção $v = \frac{dp}{dt}(t)$ é descrita por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Re} \log f(p(t)) = \mathbf{Re} \langle v, \mathbf{grad} \log f(p(t)) \rangle,$$

basta aplicar a regra da cadeia e lembrar que $\frac{d}{dt}(f \circ p)(t) = df(p(t)) \cdot \frac{dp}{dt}(t)$ e

$$\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \frac{\mathbf{grad} f(p(t))}{f \circ p(t)}.$$

Assim, z será ponto crítico desta aplicação, restrita a F_θ , se, e somente se, o vetor $\mathbf{grad} \log f(z)$ for normal a F_θ em z . (Aqui, “normal” significa ortogonal a todo vetor tangente, segundo o produto interno real).

Mas, segundo o produto interno real, z é normal a S_ε e, portanto, a F_θ . Também, pela Observação 2.0.14, o vetor $i \mathbf{grad} \log f(z)$ é normal a F_θ em z . Como F_θ tem codimensão real 2 e os vetores z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$ são linearmente independentes sobre \mathbb{R} (Lema 2.0.6), conclui-se que os vetores z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$ geram o espaço normal a F_θ em z . Deste

modo, z será ponto crítico de a_θ se, e somente se, existirem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 i \mathbf{grad} \log f(z),$$

isto é,

$$\mathbf{grad} \log f(z) = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_2 i} z.$$

□

Observação 3.0.18. *O espaço tangente à F_θ em um ponto crítico z de a_θ é, de fato, o subespaço vetorial complexo de \mathbb{C}^{n+1} constituído de todos os vetores $v \in \mathbb{C}^{n+1}$ tais que $\langle v, z \rangle = 0$. Isto segue do fato que, se $i \mathbf{grad} \log f(z)$ for um múltiplo complexo de z , então um vetor v será real ortogonal a ambos z e $i \mathbf{grad} \log f(z)$ se, e somente se, ele for complexo ortogonal a z . Com efeito, temos:*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \log f(z) \rangle = 0 \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Re} \langle v, (\lambda_1 + i\lambda_2)z \rangle = 0; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Re} \langle v, \lambda_1 z \rangle + \mathbf{Re} \langle v, i\lambda_2 z \rangle = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Re} \langle v, i\lambda_2 z \rangle = 0; \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0 \\ \mathbf{Im} \langle v, z \rangle = 0, \end{array} \right. \text{ , isto é, } \langle v, z \rangle = 0. \end{aligned}$$

Estudaremos agora, a Hessiana de a_θ em um ponto crítico, de modo a computar seu índice de Morse. Usaremos a seguinte interpretação da Hessiana: Dado um vetor v tangente a F_θ em um ponto crítico z , escolheremos um caminho diferenciável $p: \mathbb{R} \rightarrow F_\theta$ com vetor velocidade $\frac{dp}{dt} = v$ em $p(0) = z$. Então a derivada segunda

$$\ddot{a}_\theta(t) = \frac{d^2}{dt^2} a_\theta(p(t))$$

em $t=0$ poderá ser expressa como uma função quadrática. Tal função quadrática será a Hessiana de a_θ .

Lema 3.0.19. *Com a notação anterior, a derivada segunda de $a_\theta(p(t))$ em $t = 0$ é dada por uma expressão da forma*

$$\ddot{a}_\theta = \sum \mathbf{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c\|v\|^2,$$

em que (b_{jk}) é uma matriz de números complexos e c é um número real positivo.

Demonstração. Note primeiramente, que o caminho $p(t)$ está contido na variedade F_θ . Portanto, $\frac{f}{|f|} = e^{i\theta}$ é constante ao longo deste caminho. Derivando-se a identidade

$$a_\theta(p(t)) = \log |f(p(t))| = \log f(p(t)) - i\theta,$$

obtemos

$$\dot{a}_\theta = \frac{d}{dt} \log f = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \log f}{\partial z_j} \right) \frac{dp_j}{dt}.$$

Derivando-se mais uma vez,

$$\ddot{a}_\theta = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \log f}{\partial z_j} \right) \frac{d^2 p_j}{dt^2} + \sum_{j,k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k} \right) \frac{dp_j}{dt} \frac{dp_k}{dt}.$$

Escolhendo $t = 0$, $\mathbf{grad} \log f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (pelo Lema 3.0.17), e usando a notação

$$D_{jk} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial z_j \partial z_k},$$

podemos reescrever

$$\ddot{a}_\theta = \langle \ddot{p}, \lambda z \rangle + \sum_{j,k=1}^{n+1} D_{jk} v_j v_k,$$

em que o lado esquerdo da equação é real, pois é a segunda derivada de uma função real. Agora, multiplicando-se os dois lados da equação por λ e tomando-se a parte real, obtemos:

$$\ddot{a}_\theta \mathbf{Re}(\lambda) = |\lambda|^2 \mathbf{Re} \langle \ddot{p}, z \rangle + \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(\lambda D_{jk} v_j v_k).$$

Substituindo-se a identidade $\mathbf{Re} \langle \ddot{p}, z \rangle = -\|v\|^2$, obtida derivando-se $\langle p(t), p(t) \rangle = \varepsilon^2$ duas vezes, encontramos

$$\ddot{a}_\theta \mathbf{Re}(\lambda) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(\lambda D_{j,k} v_j v_k) - \|\lambda v\|^2.$$

Pelo Lema 2.0.7 temos $\mathbf{Re}(\lambda) > 0$. Então, dividindo-se a equação por $\mathbf{Re}(\lambda)$, concluímos a demonstração. \square

Podemos avaliar agora o índice de Morse da função a_θ .

Lema 3.0.20. *O índice de Morse de $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto crítico é $\geq n$.*

Demonstração. Como vimos no Capítulo 1, o índice de Morse, I , da função quadrática

$$H(v) = \mathbf{Re} \left(\sum_{j,k=1}^{n+1} b_{jk} v_j v_k \right) - c \|v\|^2,$$

com v variando em $T_z F_\theta$, é definido como sendo a dimensão máxima dentre os subespaços vetoriais de $T_z F_\theta$, nos quais H é definida negativa.

Se $H(v) \geq 0$ para algum vetor v , não nulo, então $H(iv) < 0$, pois o primeiro termo na expressão para $H(v)$ muda de sinal, enquanto o segundo termo permanece negativo. Note que, pela Observação 3.0.18, o vetor iv também está em $T_z F_\theta$.

Consideremos a decomposição do espaço tangente $T_z F_\theta$ em uma soma direta real

$$T_z F_\theta = T_0 \oplus T_1,$$

na qual a Hessiana é definida negativa em T_0 e definida semi-positiva em T_1 . Deste modo, a dimensão de T_0 é igual ao índice de Morse, I , de H .

Por outro lado, H também é definida negativa em iT_1 . Logo,

$$I \geq \dim(iT_1) = \dim T_1 = \dim T_z F_\theta - \dim T_0 = 2n - I.$$

Portanto, $I \geq n$. \square

O próximo passo é verificar que os pontos críticos situam-se todos em um subconjunto compacto de F_θ .

Lema 3.0.21. *Existe uma constante real $\eta_\theta > 0$ tal que, se $z \in F_\theta$ for ponto crítico de a_θ , então $|f(z)| \geq \eta_\theta$. Isto é, os pontos críticos de a_θ estão todos no subconjunto compacto*

$$C_\theta = \{z \in F_\theta; |f(z)| \geq \eta_\theta\}.$$

Demonstração. Suponha que existam pontos críticos z de $a_\theta = \log |f|$, com $|f(z)|$ arbitrariamente próximos de zero. Então estes pontos críticos têm um ponto limite z_0 no conjunto compacto S_ε , de maneira que $|f(z)| \rightarrow |f(z_0)| = 0$. Assim, se encontrarmos uma curva diferenciável $p : (0, \delta) \rightarrow F_\theta$, com $p(t) \rightarrow z_0$ quando $t \rightarrow 0$, ao longo da qual $|f|$ não pode tender a zero, chegaremos a uma contradição.

Seja

$$W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{grad} f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Vimos na demonstração do Lema 2.0.7 que W é um conjunto algébrico real.

Considere também,

$$B_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re}(ie^{-i\theta} f(z)) = 0\},$$

que é um conjunto algébrico real, já que f é polinomial. Considere por fim, o conjunto semi-algébrico real

$$U_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Im}(ie^{-i\theta} f(z)) > 0\}.$$

Observe que, $z \in U_\theta \cap B_\theta$ se, e somente se, $\arg f(z) = \theta$.

Estamos supondo então, que existem pontos z arbitrariamente próximos de z_0 com

$$z \in ((S_\varepsilon \cap W \cap B_\theta) \cap U_\theta) \subset F_\theta.$$

Como S_ε também é um conjunto algébrico real, pelo Lema de Seleção de Curva, existe uma curva diferenciável $p : (0, \delta) \rightarrow F_\theta$, com $p(t) \in W \cap B_\theta \cap U_\theta$ e com $p(t) \rightarrow z_0$ quando $t \rightarrow 0$. Então, usando o fato de $p(t)$ pertencer a W e o Lema 3.0.17, observamos que $p(t)$ é constituído de pontos críticos de a_θ . Deste modo, a função a_θ , e portanto $|f|$, é constante

ao longo desta curva. Como $p(t) \in F_\theta$, $|f(p(t))|$ deve ser constante não nula. De onde segue a contradição.

Mostremos por fim que o conjunto C_θ é, de fato, compacto. Considere o subconjunto fechado de \mathbb{C}^{n+1}

$$A_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; |f(z)| \geq \eta_\theta\}.$$

Então,

$$A_\theta \cap (S_\varepsilon \setminus K) = A_\theta \cap S_\varepsilon \quad \text{e} \quad C_\theta = A_\theta \cap F_\theta.$$

Como $\phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$ é fechado em $S_\varepsilon \setminus K$, então $F_\theta = F \cap (S_\varepsilon \setminus K)$, para algum F fechado em \mathbb{C}^{n+1} . Assim,

$$C_\theta = A_\theta \cap F_\theta = A_\theta \cap F \cap (S_\varepsilon \setminus K) = A_\theta \cap F \cap S_\varepsilon,$$

ou seja, C_θ é um subconjunto fechado de S_ε que é compacto em \mathbb{C}^{n+1} , portanto C_θ é compacto em S_ε e, conseqüentemente, em F_θ . \square

Lema 3.0.22. *Existe uma aplicação diferenciável*

$$s_\theta : F_\theta \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que os pontos críticos de s_θ são não degenerados, com índice de Morse $\geq n$ e tal que

$$s_\theta(z) = |f(z)|,$$

para $|f(z)|$ suficientemente próximo de zero.

Demonstração. Segue do fato que as funções de Morse formam um aberto denso em $C^\infty(F_\theta, \mathbb{R})$ com a topologia de Whitney: Segundo Morse [20], Teorema 8.7, pág. 178, podemos escolher uma função s_θ que coincida com $|f|$ exceto em uma vizinhança compacta do conjunto crítico, de maneira que s_θ tenha apenas pontos críticos não degenerados e suas derivadas primeira e segunda se aproximem uniformemente das derivadas primeira e segunda de $|f|$ sobre qualquer vizinhança compacta de F_θ . Como todos os pontos críticos

de $|f|$ têm índice $\geq n$, segue que se a aproximação for suficientemente próxima, os pontos críticos de s_θ também terão índice $\geq n$ (veja [18], 22.4). Isto completa a demonstração. \square

Observação 3.0.23. *Como os pontos críticos de s_θ são não degenerados, eles são isolados. Além disso, os pontos críticos de s_θ estão contidos em um compacto. Portanto, s_θ tem somente um número finito de pontos críticos.*

Agora podemos provar o Teorema 3.0.16.

Demonstração do Teorema 3.0.16. Para aplicarmos a teoria de Morse na sua forma usual, é necessário considerar uma aplicação não degenerada $g_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade: o conjunto dos z em F_θ com $g_\theta(z) \leq c$ é compacto, para toda constante real c . Em outras palavras, a aplicação g_θ deve ser própria e limitada inferiormente.

Afirmamos que a função

$$g_\theta(z) = -\log s_\theta(z)$$

satisfaz esta condição. Ou seja,

$$g_\theta^{-1}(-\infty, c] = s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty)$$

é compacto para cada c .

De fato, seja M_θ uma vizinhança compacta dos pontos críticos de $|f|$, fornecida pelo Lema 3.0.22, fora da qual $|f| = s_\theta$. Com um argumento análogo ao dado para garantir a compacidade de C_θ no Lema 3.0.21, concluímos que o conjunto

$$\{z \in F_\theta; |f(z)| \geq e^{-c}\}$$

é compacto para cada c . Como $s_\theta(z) = |f(z)|$ fora de M_θ , segue que:

$$s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty) \subset (|f|/F_\theta)^{-1}[e^{-c}, \infty) \cup M_\theta,$$

para cada c , ou seja, $s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty)$ é um fechado em F_θ contido em um subconjunto compacto de F_θ , portanto é compacto em F_θ .

Como o índice de Morse I de s_θ ou de $\log s_\theta$ em um ponto crítico z é maior ou igual a n , o índice de Morse de $-\log s_\theta$ é

$$\tilde{I}_\theta = \dim T_z F_\theta - I = 2n - I \leq n.$$

Agora, de acordo com o principal teorema da teoria de Morse [18], a variedade F_θ tem o tipo de homotopia de um complexo CW de dimensão $\leq n$, obtido pela adjunção de uma célula de dimensão \tilde{I}_θ para cada ponto crítico de índice $\tilde{I}_\theta \leq n$. Como existe apenas um número finito de pontos críticos, o complexo CW é finito. Isto demonstra o teorema. \square

A Topologia das Fibras para o caso de um ponto crítico isolado

Neste capítulo consideraremos a hipótese adicional de que a função polinomial complexa $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ não tem pontos críticos em uma vizinhança da origem, exceto possivelmente na própria origem. Isto é, a origem será um ponto não singular ou um ponto singular isolado da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$. Vamos supor também que $n \geq 1$.

Seja S_ε contida em uma vizinhança da origem, nas condições acima. Então, o vetor $\mathbf{grad} f(z)$ é não nulo para todo $z \neq 0$ nessa vizinhança, em particular para $z \in S_\varepsilon$.

Lema 4.0.24. *Os pontos críticos de $f|_{S_\varepsilon}$ são os pontos z em S_ε para os quais o vetor $\mathbf{grad} f(z)$ é um múltiplo complexo de z .*

Demonstração. Como $T_z S_\varepsilon$ é um espaço vetorial real, consideramos a identificação natural de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 e teremos $z \in S_\varepsilon$ ponto crítico de $f|_{S_\varepsilon}$ se, e somente se, o núcleo da derivada

$$\begin{aligned} d(f|_{S_\varepsilon})(z) = df(z)|_{T_z S_\varepsilon} : T_z S_\varepsilon &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\longmapsto \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle \end{aligned}$$

tem dimensão maior ou igual a $2n$, já que $T_z S_\varepsilon$ tem dimensão $2n + 1$. (Note que se considerássemos $n=0$, então todo z em S_ε seria crítico de $f|_{S_\varepsilon}$.)

Suponhamos que z e $\mathbf{grad} f(z)$ sejam linearmente independentes sobre \mathbb{C} . Afirmamos que z não é crítico de $f|_{S_\varepsilon}$. De fato, se z e $\mathbf{grad} f(z)$ são linearmente independentes sobre \mathbb{C} então o sistema

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle = 0 \\ \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle = 1 \end{cases}$$

tem solução $v \neq 0$. A primeira equação fornece $\mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0$, ou seja, $v \in T_z S_\varepsilon$. Mas, $\langle iv, z \rangle = i \langle v, z \rangle = 0$. Portanto, iv também pertence a $T_z S_\varepsilon$ e $\langle iv, \mathbf{grad} f(z) \rangle = i$, pela segunda equação. Como os vetores v e iv são linearmente independentes sobre \mathbb{R} , então o núcleo de $d(f|_{S_\varepsilon})(z)$ tem dimensão menor ou igual a $(2n+1) - 2 = 2n - 1$, de modo que z não é crítico.

Por outro lado, se $\mathbf{grad} f(z) = \lambda z$, para algum λ em \mathbb{C} . Então,

$$\begin{aligned} \ker(d(f|_{S_\varepsilon})(z)) &= \{v \in T_z S_\varepsilon; \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle = \langle v, \lambda z \rangle = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re} \langle v, z \rangle = 0, \langle v, \lambda z \rangle = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{C}^{n+1}; \langle v, z \rangle = 0\}, \end{aligned}$$

que é um espaço vetorial real de dimensão $2n$. Logo, z é crítico. Isto completa a demonstração. \square

Lema 4.0.25. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $K = S_\varepsilon \cap V$ não contém pontos críticos de $f|_{S_\varepsilon}$.*

Demonstração. A demonstração é baseada no Lema de Seleção da Curva 2.0.8.

Sejam os conjuntos algébricos reais

$$V = f^{-1}(0) \quad \text{e} \quad W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{grad} f(z) = \lambda z, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

e seja U o conjunto semi-algébrico real,

$$U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \langle z, z \rangle = \|z\|^2 > 0\} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Suponhamos, por absurdo, que para todo $\varepsilon > 0$ exista $z \in V$, crítico de $f|_{S_\varepsilon}$. Então $0 \in \overline{V \cap W \cap U}$ e, portanto, pelo Lema de Seleção da Curva, existe uma curva analítica

real

$$p : [0, \delta') \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

com $p(0) = 0$ e $p(t) \in V \cap W \cap U$ para $t > 0$.

Agora, como $p(t) \in V$, temos $f(p(t)) = 0$ para $t \in [0, \delta')$, de onde segue que

$$\left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle = \frac{d}{dt}(f \circ p)(t) \equiv 0.$$

De $p(t) \in W$, temos $\mathbf{grad} f(p(t)) = \lambda p(t)$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Mas, então,

$$0 = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \lambda p(t) \right\rangle,$$

logo,

$$0 = 2 \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp}{dt}(t), p(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} \|p(t)\|^2.$$

Em outras palavras, $p(t)$ é constante e, como $p(0) = 0$, devemos ter $p(t) \equiv 0$, contrariando o fato de, por construção, $p(t)$ pertencer a U , para $t > 0$. Esta contradição demonstra o Lema 4.0.25. \square

Lema 4.0.26. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o fecho em S_ε de cada fibra F_θ é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$, com bordo. O interior dessa variedade é F_θ e o bordo é precisamente K .*

Demonstração. Devemos verificar, primeiramente, que os pontos de K pertencem ao fecho de F_θ em S_ε .

Dado $z_0 \in K$, como z_0 não é crítico de $f|_{S_\varepsilon}$, existem, pela forma local das submersões, coordenadas reais u_1, \dots, u_{2n+1} em uma vizinhança U' de z_0 tal que

$$f(z) = u_1(z) + iu_2(z),$$

para todo z em U' . Assim, se U'' é uma vizinhança qualquer de z_0 em S_ε , para todo z em $U = U' \cap U''$, $f(z)$ também se escreve como $f(z) = u_1(z) + iu_2(z)$. Observe que U não está inteiramente contido em K , já que z_0 não é crítico de $f|_{S_\varepsilon}$, e como

$0 = f(z_0) = u_1(z_0) + iu_2(z_0)$, a vizinhança U contém pontos z tais que

$$(u_1(z))^2 + (u_2(z))^2 \neq 0 \quad \text{e} \quad \arg(u_1(z) + iu_2(z)) = \theta,$$

para cada θ . Segue então que $z_0 \in \overline{F_\theta}$.

Para concluir a demonstração observemos que

$$\overline{F_\theta} \cap U = (F_\theta \cup K) \cap U = (F_\theta \cup \{z; u_1(z) = u_2(z) = 0\}) \cap U$$

e que um ponto z pertence a $F_\theta \cap U$ se, e somente se, $\arg(u_1(z) + iu_2(z)) = \theta$ (portanto $u_1(z) \neq 0$ ou $u_2(z) \neq 0$). Em outras palavras, os pontos de $F_\theta \cap U$ não pertencem ao bordo de $\overline{F_\theta} \cap U$. Como todo ponto de K admite uma tal vizinhança U , segue o resultado. \square

Corolário 4.0.27. *A variedade compacta com bordo, $\overline{F_\theta}$, está mergulhada em S_ε de tal modo que tem o mesmo tipo de homotopia que seu complemento $S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$.*

Demonstração. Como $\overline{F_\theta}$ é uma subvariedade de S_ε , a inclusão $i : \overline{F_\theta} \rightarrow S_\varepsilon$ é um mergulho. Agora, o Teorema da Fibração 2.0.15 fornece a fibração localmente trivial $\phi : S_\varepsilon \setminus K \rightarrow S^1$. Segue que a restrição

$$\phi : S_\varepsilon \setminus (K \cup \phi^{-1}(e^{i\theta})) \rightarrow S^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$$

é uma fibração localmente trivial. Mas, $S^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$ é contrátil. Portanto, a fibração é (globalmente) trivial, ou seja,

$$S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta} = S_\varepsilon \setminus (K \cup F_\theta) \quad \text{é difeomorfo a} \quad (S^1 \setminus \{e^{i\theta}\}) \times F_{\theta'},$$

em que $F_{\theta'}$ é qualquer fibra diferente de F_θ . Usando novamente a contratibilidade de $S^1 \setminus \{e^{i\theta}\}$, $S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$ tem $F_{\theta'}$ como um retrato por deformação. Como as fibras são difeomorfas, temos

$$S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta} \sim F_{\theta'} \sim F_\theta.$$

em que \sim significa "tem o mesmo tipo de homotopia que".

Como o interior de $\overline{F_\theta}$ é justamente F_θ , segue que F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que $\overline{F_\theta}$. \square

Corolário 4.0.28. *A homologia de F_θ está concentrada nas dimensões 0 e n . Além disso, $H_0(F_\theta) \cong \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.0.16 temos $H_q(F_\theta) = 0$ para $q > n$. Também,

$$H_q(F_\theta) \cong H_q(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}),$$

já que F_θ é difeomorfa a um retrato por deformação de $S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}$. Portanto, basta considerarmos $H_q(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta})$. O Teorema da dualidade de Alexander (veja [21] pág. 424) fornece um isomorfismo

$$H^{2n+1-q}(\overline{F_\theta}) \cong H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}).$$

Assim, da sequência exata de homologia do par $(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta})$,

$$\dots \longrightarrow H_q(S_\varepsilon) \longrightarrow H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \longrightarrow H_{q-1}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \longrightarrow H_{q-1}(S_\varepsilon) \longrightarrow \dots$$

temos, para $2 \leq q \leq n$,

$$H_{q-1}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \cong H_q(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \cong H^{2n+1-q}(\overline{F_\theta}).$$

Agora, pelo Teorema 3.0.16, para $2n + 1 - q > n$, temos

$$H^{2n+1-q}(\overline{F_\theta}) = 0.$$

Portanto,

$$H_{q-1}(F_\theta) \cong H_{q-1}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) = 0,$$

para $q < n + 1$.

Além disso,

$$\dots \longrightarrow H_{2n+1}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \longrightarrow H_{2n+1}(S_\varepsilon) \longrightarrow H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \longrightarrow H_{2n}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \longrightarrow,$$

com $H_{2n+1}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) = 0$, $H_{2n+1}(S_\varepsilon) = \mathbb{Z}$ e $H_{2n}(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) = 0$. Portanto,

$$H^0(\overline{F_\theta}) \cong H_{2n+1}(S_\varepsilon, S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \cong \mathbb{Z},$$

ou seja, F_θ é conexa. □

Lema 4.0.29. *A fibra F_θ é $(n - 1)$ -conexa.*

Demonstração. Pelo corolário anterior, temos $H_i(F_\theta) = 0$ para $1 \leq i < n$. Então, se mostrarmos que F_θ é simplesmente conexa para $n \geq 2$, o resultado seguirá do Teorema de Hurewicz [25]. Agora, também pelo corolário anterior, F_θ é conexa e, como é localmente conexa por caminhos, segue que é conexa por caminhos. Assim, é suficiente mostrarmos que $\pi_1(F_\theta) = 0$ para $n \geq 2$.

Consideremos a função

$$-s_\theta : \overline{F_\theta} \longrightarrow \mathbb{R},$$

em que s_θ é a função de Morse obtida no Lema 3.0.22. Então, $-s_\theta$ é uma função de Morse em $\overline{F_\theta}$ cujos pontos críticos têm índice $I \leq n$. Notando que o índice I de $-s_\theta$ associado ao menor valor crítico é zero, concluimos que $\overline{F_\theta}$ é obtida de um disco D_0^{2n} pela adjunção de células de dimensão menor ou igual a n . Agora, $S_\varepsilon \setminus D_0^{2n}$ é contrátil e, portanto, simplesmente conexo. Também, a adjunção de uma célula e_λ de dimensão $\lambda < n$ a D_0^{2n} , não altera o grupo fundamental de $S_\varepsilon \setminus (D_0^{2n} \cup e_\lambda)$, desde que $\lambda \leq (\dim S_\varepsilon) - 3 = 2n - 2$. Portanto, desde que $\lambda \leq n \leq 2n - 2$ (ou seja, $n \geq 2$), temos

$$\pi_1(S_\varepsilon \setminus (D_0^{2n} \cup e_\lambda)) \cong \pi_1(S_\varepsilon \setminus D_0^{2n}) = 0.$$

Mas, $\overline{F_\theta}$ é obtido de D_0^{2n} após a adjunção de um número finito de células. Portanto,

$$0 = \pi_1(S_\varepsilon \setminus D_0^{2n}) \cong \pi_1(\overline{F_\theta}).$$

Usando o Corolário 4.0.27 obtemos

$$0 = \pi_1(\overline{F_\theta}) \cong \pi_1(S_\varepsilon \setminus \overline{F_\theta}) \cong \pi_1(F_\theta).$$

Isto completa a demonstração. □

Teorema 4.0.30. *Cada fibra F_θ tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas:*

$$S^n \vee S^n \vee \dots \vee S^n.$$

Demonstração. Como consequência do Teorema 3.0.16, $H_n(F_\theta)$ é um grupo abeliano livre. Portanto, se $n \geq 2$, usando o Teorema de Hurewicz [26], temos que

$$\pi_n(F_\theta) \cong H_n(F_\theta).$$

Assim, cada gerador do grupo livre $\pi_n(F_\theta)$ é representado por uma aplicação contínua $(S^n, p_0) \rightarrow (F_\theta, p_1)$ (representante da classe de homotopia) de maneira que estas aplicações determinam $(S^n \vee \dots \vee S^n, p_0) \rightarrow (F_\theta, p_1)$, uma aplicação contínua que leva o ponto base p_0 no ponto base p_1 e que leva as esferas (S^n, p_0) do buquê nos geradores de $\pi_n(F_\theta, p_1)$. Uma tal aplicação induz um isomorfismo entre as homologias de tais espaços:

$$H_n(S^n \vee \dots \vee S^n) \cong H_n(F_\theta).$$

O Teorema de Whitehead ([25] 7.5.9) garante que a aplicação acima é uma equivalência de homotopia, já que F_θ e $S^n \vee \dots \vee S^n$ são simplesmente conexos.

Se $n=1$, temos o caso clássico. Neste caso, $\overline{F_\theta}$ é uma superfície conexa compacta orientável e com bordo. Pela classificação dessas variedades de dimensão 2 [11], segue que $\overline{F_\theta}$ tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas S^1 . □

Definição 4.0.6. *O número de esferas do buquê mencionado no Teorema 4.0.30 é denominado número de Milnor da aplicação f .*

Observação 4.0.31. *Os Teoremas 2.0.15 e 4.0.30 compõem o resultado que é popularmente conhecido como o Teorema da Fibração de Milnor.*

Funções Analíticas Complexas com Singularidades Isoladas

Em [13], Lê D. T. investigou os espaços nos quais é válido um resultado similar ao resultado de Milnor que apresentamos nos capítulos anteriores. Ele estudou alguns espaços nos quais é possível obter uma generalização do Teorema da Fibração de Milnor para o caso de funções definidas em variedades singulares, de modo a caracterizar a topologia de uma fibra genérica na vizinhança do ponto singular.

Neste capítulo, nos propormos a apresentar os principais resultados de [13]. Por se tratar de um artigo denso demonstraremos o teorema 5.1.3 e apenas mencionaremos as principais ferramentas utilizadas nas demonstrações dos resultados 5.2.1 e 5.4.1.

As principais referências para este Capítulo são [13, 14, 2].

5.1 Funções com singularidades isoladas

Começaremos a seção com as definições de fibrado cotangente e espaço conormal, ferramentas essenciais para nossos estudos ao longo deste capítulo.

Definição 5.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m . O conjunto*

$$T^*(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times (T_p M)^*$$

de todas as formas lineares $(T_p M)^$ definidas nos espaços tangente $T_p M$, com $p \in M$, “colados” de uma maneira natural é chamado de fibrado cotangente de M .*

Definição 5.1.2. *Seja $U \subset M$. O espaço conormal de U em M é o subespaço*

$$T_U^*(M)$$

do espaço cotangente $T^(M)$ das formas lineares que se anulam em $T_p U, \forall p \in U$.*

Introduziremos a seguir o conceito de germe de funções analíticas complexas com singularidade isolada definido sobre um germe de espaço analítico complexo na origem, $(X, 0)$, com uma estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$. Trabalharemos sempre com representantes X equidimensionais e mergulhados em algum espaço \mathbb{C}^n .

Definição 5.1.3. *Uma função analítica complexa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre um espaço analítico complexo X , munido de uma estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$, terá uma singularidade isolada em $0 \in X$ relativa a esta estratificação de Whitney, se existir uma vizinhança U de 0 em X tal que, para todo estrato X_i para o qual $X_i \cap U \neq \emptyset$, a restrição de f a $X_i \cap U \setminus \{0\}$ tem posto 1.*

Esta definição é equivalente à seguinte proposição:

Proposição 5.1.1. *Uma função analítica complexa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ terá uma singularidade isolada na origem, $0 \in X$, relativa à estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$, se existir uma vizinhança U de 0 em X e uma extensão F a uma vizinhança aberta \mathcal{U} de 0 em \mathbb{C}^n da restrição $f|_U$, tal que a interseção da imagem $\mathbf{Im} dF$ no fibrado cotangente $T^*(\mathcal{U})$ da diferencial $dF : \mathcal{U} \rightarrow T^*(\mathcal{U})$ de F e a união dos espaços conormais $\cup_i T_{X_i \cap \mathcal{U}}^*(\mathcal{U})$ for igual ao ponto $(0, dF_0)$:*

$$\{(0, dF_0)\} = \mathbf{Im} dF \cap \left(\bigcup_i T_{X_i \cap \mathcal{U}}^*(\mathcal{U}) \right).$$

Teorema 5.1.2 (Teorema de Bertini-Sard, [27]). *Se $\{X_i\}_i$ for uma estratificação de Whitney de X , para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a esfera $\partial B_\varepsilon(0)$ será transversal aos estratos X_i .*

Uma consequência do Primeiro Teorema de Isotopia de Thom-Mather (ver [1]) juntamente com o Teorema de Bertini-Sard nos fornece o seguinte resultado:

Teorema 5.1.3. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica complexa com singularidade isolada na origem de X , relativa à estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$. Existe uma vizinhança U de 0 em X tal que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo ε , $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$, existe $\eta_\varepsilon > 0$ tal que, para todo η , $\eta_\varepsilon \geq \eta > 0$, a função f induz uma aplicação $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ de $B_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0)))$ sobre $D_\eta(f(0))$,*

$$\varphi_{\varepsilon,\eta} : B_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0))) \rightarrow D_\eta(f(0)),$$

que é uma fibração localmente trivial sobre o disco menos um ponto

$$D_\eta^*(f(0)) := D_\eta(f(0)) \setminus \{f(0)\}.$$

Demonstração. As interseções não vazias dos estratos de $\{X_i\}_i$ com a vizinhança U fornecem uma estratificação de Whitney de $U \cap X$.

Seja U suficientemente pequeno, de maneira que as restrições de f aos estratos de $U \cap X$ tenham posto 1, exceto possivelmente em 0 . Então, a fibra $U \cap f^{-1}(f(0))$ é estratificada por $\{0\}$ e pelas interseções não vazias dos estratos de $\{X_i\}_i$ com $U \cap f^{-1}(f(0))$ menos $\{0\}$. Vamos nos referir a estas estratificações de $U \cap X$ e $U \cap f^{-1}(f(0))$ como as estratificações induzidas por $\{X_i\}_i$.

Seja $\overline{B}_\varepsilon(0)$ a bola fechada em \mathbb{C}^n centrada em 0 com raio ε . Se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno, digamos $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$, para algum ε_0 , então o Teorema de Bertini-Sard mostra que a esfera $S_\varepsilon(0)$ que limita $\overline{B}_\varepsilon(0)$ intersepta transversalmente os estratos de $\{X_i\}_i$ e os estratos de $U \cap f^{-1}(f(0))$ induzidos por $\{X_i\}_i$.

A estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$ de X induz uma estratificação de Whitney sobre $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap X$ cujos estratos são as interseções não vazias dos estratos de $\{X_i\}_i$ com a bola aberta $B_\varepsilon(0)$ e com a esfera $S_\varepsilon(0)$, respectivamente.

Novamente pelo Teorema de Bertini-Sard citado acima, para cada ponto de $S_\varepsilon(0) \cap f^{-1}(f(0))$, existe uma vizinhança na qual as restrições de f aos estratos de $S_\varepsilon(0) \cap X$ tem posto real 2. Como a interseção $S_\varepsilon(0) \cap X$ é compacta, existe η_ε tal que, para todo η satisfazendo $\eta_\varepsilon \geq \eta > 0$, as restrições de f aos estratos de $S_\varepsilon(0) \cap X$ tem posto real 2 nos pontos de $f^{-1}(D_\eta(f(0)))$. A aplicação $\overline{\varphi}_{\varepsilon,\eta}$, de $\overline{B}_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0)))$ sobre $D_\eta(f(0))$,

$$\overline{\varphi}_{\varepsilon,\eta} : \overline{B}_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0))) \longrightarrow D_\eta(f(0)),$$

induzida por f é portanto estratificada.

Como a aplicação $\overline{\varphi}_{\varepsilon,\eta}$ é própria, pelo Primeiro Teorema de Isotopia de Thom-Mather, ela é uma fibração contínua localmente trivial sobre o disco menos um ponto $D_\eta^*(f(0)) := D_\eta(f(0)) \setminus \{f(0)\}$.

Por outro lado, as restrições de f aos estratos de $S_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0)))$ tem posto máximo, e o Primeiro Teorema de Isotopia de Thom-Mather novamente nos diz que f induz uma fibração de $S_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0)))$ sobre o disco $D_\eta(f(0))$. Sobre o disco furado, $D_\eta^*(f(0))$, ela é uma subfiação de $\overline{\varphi}_{\varepsilon,\eta}$. Portanto, a restrição $\varphi_{\varepsilon,\eta}$ de $\overline{\varphi}_{\varepsilon,\eta}$ a $B_\varepsilon(0) \cap X \cap f^{-1}(D_\eta(f(0)))$ é também uma fibração contínua localmente trivial sobre o disco furado $D_\eta^*(f(x))$. \square

5.2 Morsificação

Nesta seção vamos considerar uma função analítica complexa $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre uma vizinhança aberta \mathcal{U} de 0 em \mathbb{C}^n , e um germe de espaço analítico complexo fechado X em \mathcal{U} . Denotaremos por f a restrição de F a X .

Assumiremos que $\{X_i\}_i$ é uma estratificação de Whitney analítica complexa de X e que f tem uma singularidade isolada em 0 relativa à esta estratificação. Definimos:

Definição 5.2.1. *Diremos que 0 é um ponto de Morse complexo de f relativo à estratificação de Whitney $\{X_i\}_i$, se a imagem, $\mathbf{Im}dF$, da diferencial dF intersepta a união dos espaços conormais $\cup_i T_{X_i \cap \mathcal{U}}^*(\mathcal{U})$ transversalmente em $T^*(\mathcal{U})$, no ponto $(0, dF_0)$.*

Em particular, se o ponto 0 for um ponto de Morse complexo de f relativo à estratificação $\{X_i\}_i$, $(0, dF_0)$ não está contido no espaço conormal de \mathcal{U} do fecho de qualquer estrato \overline{X}_i de $\{X_i\}_i$, para $i \neq i_0$. Isto é,

$$(0, dF_0) \notin \bigcup_{i \neq i_0} T_{\overline{X}_i \cap \mathcal{U}}^*(\mathcal{U}).$$

Portanto, ou dF_0 tem posto 1 e o núcleo, $\ker dF_0$, é tangente ao estrato X_{i_0} no ponto isolado 0 e não é um limite de hiperplanos tangentes aos fechos \overline{X}_i dos estratos X_i de $\{X_i\}_i$, para $i \neq i_0$, ou dF_0 tem posto 0, isto é, $dF_0 = 0$, e necessariamente, em $(0, dF_0) = (0, 0)$, o espaço conormal $T_{X_{i_0} \cap \mathcal{U}}^*(\mathcal{U})$ é a seção zero do fibrado cotangente e X_{i_0} é uma vizinhança de 0 em \mathbb{C}^n . Neste caso, F tem um ponto quadrático ordinário em 0.

Usando a notação acima temos o seguinte teorema:

Teorema 5.2.1. *Existe um subconjunto aberto e denso Ω do espaço das formas lineares complexas de \mathbb{C}^n tais que, para cada forma linear $l \in \Omega$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo ε satisfazendo $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$, existe $\tau_\varepsilon > 0$ tal que, para todo t com $\tau_\varepsilon \geq |t| > 0$, a restrição a X da função $F + tl$ tem apenas pontos de Morse complexos em $B_\varepsilon(0) \cap X$.*

Na prova deste teorema, em [13] o autor define uma aplicação basicamente definida entre espaços cotangentes, usa fortemente o Teorema de Preparação de Weirstrass, resultados sobre recobrimento ramificado e que a imagem da interseção de $\mathbf{Im} dF$ com a união dos conormais aos estratos de X é um ponto isolado.

Este teorema representa um resultado muito importante para a teoria de singularidades. Ele diz que, dada uma função analítica complexa com singularidade isolada como acima, é possível aproximá-la por funções analíticas complexas que admitem apenas singularidades do tipo Morse. Intuitivamente falando, uma singularidade do tipo Morse é uma singularidade “estável” no sentido de que é impossível “dividí-la” em mais singularidades.

5.3 Link Complexo e Profundidade

5.3.1 O Link Complexo

No estudo de estratificações de Whitney analíticas complexas, M. Goresky e R. MacPherson introduziram o conceito de link complexo de um estrato de Whitney e mostraram que o link complexo é o elemento chave para uma teoria de Morse em espaços analíticos complexos [2]. Este espaço contém várias informações sobre o comportamento de X em torno de um ponto x escolhido, que em nosso caso será sempre a origem.

Seja $0 \in X \subset \mathbb{C}^n$, representante de um germe de espaço analítico complexo $(X, 0)$.

Definição 5.3.1. Para $l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ função linear genérica e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos o link complexo de X em 0 como o espaço

$$\mathcal{L}_0 := B_\varepsilon(0) \cap X \cap l^{-1}(t)$$

em que $t \neq l(0)$ está suficientemente próximo de $l(0)$.

Teorema 5.3.1 ([2, 16]). Existe um aberto de Zariski Ω no espaço das formas lineares complexas de \mathbb{C}^n tal que, para todo $l \in \Omega$, existe $\varepsilon_l > 0$ de modo que, para qualquer ε , $\varepsilon_l > \varepsilon > 0$, existe um $\tau_{\varepsilon,l}$ tal que, para qualquer t com $\tau_{\varepsilon,l} > |t| > 0$, o tipo de homotopia do link complexo

$$\mathcal{L}_0 := B_\varepsilon(0) \cap X \cap l^{-1}(l(0) + t)$$

é um invariante analítico do germe $(X, 0)$.

Considere $(X, 0)$ um germe de espaço analítico complexo e X um representante suficientemente pequeno, Whitney estratificado como anteriormente, e 0 um ponto de X . Seja X_0 o estrato que contém 0 e N um subespaço afim de \mathbb{C}^n passando por 0, de codimensão igual à dimensão do estrato X_0 e transversal ao estrato em 0. Ou seja, N é tal que $N \cap X_0 = \{0\}$.

Definição 5.3.2. *O link complexo do conjunto $X \cap N$ em 0 é chamado de link complexo do estrato X_0 em X e é denotado por \mathcal{L}_{X_0} .*

Teorema 5.3.2 ([2, 16]). *O tipo de homotopia do link complexo do estrato é um invariante analítico do germe $(X, 0)$ e não depende da escolha do ponto x no estrato.*

Definição 5.3.3. *Nas condições anteriores, para ε suficientemente pequeno, o espaço $X \cap N \cap B_\varepsilon(0)$ é chamado de uma fatia normal \mathcal{N}_0 em X de X_0 em 0 , e o par $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ é chamado de dados normais de Morse do estrato X_0 em X .*

5.3.2 Profundidade homotópica retificada

Nosso interesse na profundidade homotópica retificada (rhd) vem do fato que medindo a rhd para espaços analíticos complexos obtemos informações sobre seus dados normais de Morse.

A seguinte definição é atribuída à Grothendieck [5].

Definição 5.3.4. *Sejam $(X, 0)$ germe de um espaço analítico complexo, X um representante suficientemente pequeno do germe e Y um subconjunto analítico fechado de X . Diremos que X tem profundidade homotópica $hd_Y(X) \geq n$ ao longo de Y se, para qualquer $y \in Y$, existir um sistema fundamental de vizinhanças $\{U_\alpha\}_\alpha$ de y em X tal que os pares $(U_\alpha, U_\alpha - Y)$ sejam $(n - 1)$ -conexos.*

O número inteiro $hd_Y(X)$ é definido como sendo o supremo do conjunto dos inteiros n como na definição acima.

Definição 5.3.5. *Sejam $(X, 0)$ e X como anteriormente, x um ponto de X e $Y \subset X$ um subespaço analítico complexo de X . Assuma que $x \in Y$. Dizemos que o espaço X (ou o germe $(X, 0)$) tem profundidade homotópica $hd_Y(X, 0) \geq n$ ao longo de Y no ponto x se existe uma vizinhança aberta U de x em X tal que a profundidade homotópica $hd_{Y \cap U}(X \cap U)$ de $(X \cap U)$ ao longo de $Y \cap U$ seja maior ou igual a n .*

Lema 5.3.3. *Seja $\{X_i\}$ uma estratificação de Whitney de X . A função $hd_{X_i}(X, 0)$ é constante ao longo dos estratos X_i de X .*

Podemos agora, definir a noção de profundidade homotópica retificada.

Definição 5.3.6. Dizemos que a profundidade homotópica retificada $\text{rhd}(X, x)$ de X em um ponto x é maior ou igual a n se, para qualquer subespaço analítico fechado Y de X , existe uma vizinhança U de x em X tal que a profundidade homotópica de $X \cap U$ ao longo de $Y \cap U$ seja maior ou igual a $n - \dim Y$.

O inteiro $\text{rhd}(X, x)$ é o supremo do conjunto de inteiros n como na definição anterior.

Observação 5.3.4. Note que $\text{rhd}(X, x) \leq \dim(X)$. De fato, se $Y = X$ e U é uma boa vizinhança (ver [8]) de x em X , o par $(U, U - X)$ não é 0-conexo, pois $U - X = \emptyset$.

Os links complexos de uma estratificação de Whitney complexa fornecem uma boa caracterização para profundidade homotópica retificada:

Teorema 5.3.5. Seja $(X, 0)$ germe de um espaço analítico complexo, X um representante suficientemente pequeno do germe e $x \in X$. Seja $\{X_i\}$ uma estratificação de Whitney de X . As seguintes condições são equivalentes:

1. $\text{rhd}(X, x) \geq n$;
2. Para qualquer estrato X_i de $\{X_i\}$ que contenha o ponto x em seu fecho, os dados normais de Morse $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ de X_i em X é $(n - \dim X_i - 1)$ -conexo.

Observação 5.3.6. Este teorema é muito útil quando tomamos uma estratificação de Whitney simples do espaço X . Por exemplo, suponha que X tenha uma singularidade isolada em 0. Então, $\text{rhd}(X, 0) \geq n$ se, e somente se, o link complexo de $\{0\}$ em X for $(n - 2)$ -conexo. De fato, a condição (c) do Teorema 1.4 de [8] mostra que $\text{rhd}(X, 0) \geq n$ se, e somente se, existe um sistema fundamental de vizinhanças $\{U_\alpha\}_\alpha$ de 0 em X tal que $(U_\alpha, U_\alpha - \{0\})$ é $(n - 1)$ -conexo. Como estas vizinhanças podem ser substituídas por boas vizinhanças (veja [8]), pode-se considerar o sistemas fundamental de boas vizinhanças de x em X dado por $B_\varepsilon(0) \cap X$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Nesta situação, pela estrutura cônica local da singularidade, o par $(B_\varepsilon(0) \cap X, B_\varepsilon(0) \cap X - \{0\})$ é $(n - 1)$ -conexo se, e somente se, o link algébrico $S_\varepsilon(x) \cap X$ da singularidade x em X é $(n - 2)$ -conexo.

Imediatamente, obtemos o corolário:

Corolário 5.3.7. *Seja $(X, 0)$ germe de um espaço analítico complexo, X um representante suficientemente pequeno do germe e $x \in X$. Seja $\{X_i\}$ uma estratificação de Whitney de X . As seguintes condições são equivalentes:*

1. $\text{rhd}(X, x) = \dim X$;
2. *Para qualquer estrato X_i de $\{X_i\}$ que contenha o ponto x em seu fecho, o link complexo \mathcal{L} de X_i em X tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão real igual à dimensão complexa de \mathcal{L} .*

Observação 5.3.8. *Para simplificar, quando um link complexo \mathcal{L} de X_i em X tiver o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão real igual à dimensão complexa de \mathcal{L} , diremos que \mathcal{L} tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão média.*

5.4 O número de Milnor de Lê

Concluimos este trabalho com a generalização do resultado de Milnor, apresentada por Lê D. T. em [13], sobre as fibras de funções analíticas complexas com singularidades isoladas.

Teorema 5.4.1. *[13, 14] Sejam $(X, 0)$ um germe de espaço analítico complexo e X um representante do germe suficientemente pequeno. Considere uma função analítica complexa f definida em X e suponha que ela tenha uma singularidade isolada em 0 . Então, se $\text{rhd}(X, 0) = \dim X$, uma fibra genérica de f em 0 tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas de dimensão real $\dim X - 1$.*

A principal ferramenta na demonstração do teorema anterior é a teoria de Morse estratificada de M. Goresky e R. MacPherson [2]. Além disso, os conceitos de transversalidade e q -conexidade são fortemente utilizados.

Definição 5.4.1. *Sejam $(X, 0)$ um germe de espaço analítico complexo, X um representante do germe suficientemente pequeno e f uma função analítica complexa definida em X , com singularidade isolada em 0 . O número de esferas do buquê mencionado no Teorema 5.4.1 é denominado número de Milnor de Lê de f .*

Definição 5.4.2. *Estes espaços sobre os quais Lê D. T. pôde construir tal resultado, isto é, os espaços nos quais $\text{rhd}(X, 0) = \dim X$ foram denominados Espaços de Milnor.*

Referências Bibliográficas

- [1] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis, and E. J. N. Looijenga. *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [2] M. Goresky and R. MacPherson. *Stratified Morse theory*, volume 14 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [3] M. J. Greenberg. *Lectures on algebraic topology*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.
- [4] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [5] A. Grothendieck. *Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968. Augmenté d'un exposé par Michèle Raynaud, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1962, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2.
- [6] R. C. Gunning and H. Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
- [7] H. Hamm. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. *Math. Ann.*, 191:235–252, 1971.
- [8] H. A. Hamm and D. T. Lê. Rectified homotopical depth and Grothendieck conjectures. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 311–351. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [9] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [10] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [11] M. W. Hirsch. *Differential topology*. Springer-Verlag, New York, 1976. Graduate Texts in Mathematics, No. 33.

- [12] D. T. Lê. Le concept de singularité isolée de fonction analytique. In *Complex analytic singularities*, volume 8 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 215–227. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [13] D. T. Lê. Complex analytic functions with isolated singularities. *J. Algebraic Geom.*, 1(1):83–99, 1992.
- [14] D. T. Lê. Hypersurfaces and polar curves. Preprint 2010.
- [15] D. T. Lê. Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 288(4):A283–A285, 1979.
- [16] D. T. Lê and B. Teisser. Cycles évanouissants, sections planes et conditions de whitney. 40:65–103, 1983.
- [17] E.L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada do C.N.Pq., 1977.
- [18] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [19] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1968.
- [20] M. Morse. *The calculus of variations in the large*. Colloquium Publications - American Mathematical Society. American Mathematical Society, 1978.
- [21] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [22] V. M. Nascimento. A Fibrção de Milnor. Master’s thesis, Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 1990.
- [23] B. Nils. The Gramian and K-Volume in N-Space: Some Classical Results in Linear Algebra. *Journal of Young Investigators*, 2, 1999.
- [24] G. Prando. O Teorema da Fibrção de Milnor e a Topologia das Fibras. Master’s thesis, Universidade Federal do Espírito Santo - Centro de Ciências e Exatas, 2011.
- [25] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [26] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Mathematical Series, vol. 14. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.
- [27] J. L. Verdier. Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard. *Invent. Math.*, 36:295–312, 1976.
- [28] H. Whitney. Tangents to an analytic variety. *Ann. of Math. (2)*, 81:496–549, 1965.