UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Computação rigorosa de variedades invariantes

Bernardo Augusto do Prado Rivas

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Bernardo Augusto do Prado Rivas

Computação rigorosa de variedades invariantes

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
Abril de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d631c

do Prado Rivas, Bernardo Augusto
Computação rigorosa de variedades invariantes / Bernardo Augusto do Prado Rivas; orientador Marcio Fuzeto Gameiro. -- São Carlos, 2019.
64 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. sistemas dinâmicos não-lineares. 2. computação rigorosa. I. Fuzeto Gameiro, Marcio, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Bernardo Augusto do Prado Rivas

Rigorous computation of invariant manifolds

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
April 2019

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com apoio da FAPESP através do processo 2016/21170-0, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

RESUMO

RIVAS, B.A.P. **Computação rigorosa de variedades invariantes**. 2019. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho é uma introdução a métodos computacionais rigorosos utilizados no estudo de sistemas dinâmicos não lineares. A priori, é dado um panorama de conceitos teóricos em equações diferenciais e análise funcional essenciais para o desenvolvimento das ferramentas. Em seguida, os métodos e suas aplicações são descritos em detalhes.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos não lineares, computação rigorosa.

ABSTRACT

RIVAS, B.A.P. **Rigorous computation of invariant manifolds**. 2019. 64 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

The present work is an introduction to rigorous computational methods applied in nonlinear dynamical systems. A brief description of the theory on differential equations and functional analysis is given, followed by the methods and its applications in details.

Keywords: nonlinear dynamical systems, rigorous computation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Polinômios de Chebyshev 32
Figura 2 – Solução da EDO 38
Figura 3 – Condição de fase 42
Figura 4 – Soluções periódicas 1 44
Figura 5 – Soluções periódicas 2 44
Figura 6 – Soluções periódicas 3 44
Figura 7 – Soluções periódicas 4 44
Figura 8 – Soluções periódicas 5 45
Figura 9 – 1-Variedades Invariantes 51
Figura 10 – Decaimento dos coeficientes da solução 52
Figura 11 – 2-Variedades Invariantes 60

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de validação das soluções da EDO 38
Tabela 2 – Tabela de validação das órbitas periódicas 43
Tabela 3 – Tabela de validação das variedades 1-dimensionais 59
Tabela 4 – Tabela de validação das variedades 2-dimensionais 61

SUMÁRIO

1 ANÁLISE NUMÉRICA 21
1.1 Método dos Polinômios Radiais 22
1.2 Espaços de Banach e estimativas preliminares 24
1.3 Construção do operador T 25

2 INTEGRAÇÃO DE SOLUÇÕES 29
2.1 Soluções de EDOs 29
2.2 Abordagem numérica 31
2.3 Problema de Valor Inicial 34
2.4 Sistema de Lorenz: Problema de Valor Inicial 36

3 SOLUÇÕES PERIÓDICAS 39
3.1 Soluções periódicas 39
3.2 Abordagem numérica 40
3.3 Seção de Poincaré 41
3.4 Sistema de Lorenz: Órbitas periódicas 42
3.5 Computação Rigorosa 43

4 VARIEDADES INVARIANTES 47
4.1 Variedades estáveis 47
4.2 Abordagem numérica 48
4.3 Sistema de Lorenz: 1D-Variedades estáveis/instáveis 50
4.4 Computação Rigorosa 52
4.4.1 Estimativa Y_0 54
4.4.2 Estimativa Z_0 54
4.4.3 Estimativa Z_1 54
4.4.4 Estimativa Z_2 56
4.4.5 Raio de convergência via Polinômios Radiais 59
4.5 Sistema de Lorenz: 2D-Variedades estáveis/instáveis 59
4.6 Computação Rigorosa 60

REFERÊNCIAS 63

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos não-lineares são capazes de demonstrar comportamentos complexos até mesmo quando a não-linearidade é simples. Mesmo sistemas quadráticos comportam-se de forma inesperada e caótica. Submersos em dúvidas, matemáticos se remetem a experimentos numéricos para obter uma intuição sobre os seus problemas. Nesse aspecto, o aprimoramento da capacidade computacional tem se mostrado primordial.

Entretanto, os erros de aproximação são intrínsecos a abordagem computacional, pois a finitude da operação da máquina impede a precisão operacional. Portanto, é necessária uma abordagem que transcenda os erros numéricos e consiga validar rigorosamente os resultados matemáticos. Essa necessidade instigou pesquisadores a tratarem com rigor a validação numérica e obterem demonstrações assistidas pelo computador.

Enquanto esta dissertação introduz os aspectos teóricos básicos e a prática da validação numérica, o recomendamos o livro (TUCKER, 2011) para mais detalhes. Na obra, W. Tucker discute a análise numérica como se encontra e a abordagem da computação rigorosa. Essencialmente, a ideia é trabalhar com $\pi = [\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$ ao invés de $\pi = 3.1415$. Dessa forma, quando calcularmos $f(\pi)$ obteremos uma gama de valores que já consideram os erros de aproximação da máquina para $f(x)$.

Desenvolvemos também uma base teórica para compreender algumas demonstrações assistidas por computadores em sistemas dinâmicos. Tratamos da validação numérica como uma ferramenta rigorosa na demonstração de resultados matemáticos. A estratégia geral é buscar o zero de um operador $F : X \to X$ definido em espaço de Banach apropriado. Com essa informação, cria-se um operador do tipo Newton $T : X \to X$ cujos pontos fixos estão em correspondência bijetora com os zeros de F. Finalmente, utilizamos aritmética intervalar para demonstrar que T é, de fato, uma contração numa vizinhança fechada dum zero aproximado.

Essa estratégia é recorrente em trabalhos recentes que, inclusive, propõe uma nova forma verificar que o operator T é uma contração. Em geral, o Método de Newton sugere uma sequência que converge para o zero de um operador F. Ao definir

$$T(x) = x - (DF(x))^{-1} F(x), \quad \text{para cada } x \in X, \tag{1}$$

poderíamos utilizar as condições do Teorema de Newton-Kantorovich sob um ponto inicial $x_0 \in X$ e tomar

$$x_n = T(x_{n-1})$$

para cada $n > 0$. Entretanto, quando X for um espaço de dimensão infinita, o cálculo exato de $DF(x_0)$ não é possível. De toda forma, podemos aproximar $(DF(x_0))^{-1}$ por um operador injetivo A e redifinir $T : X \to X$ na forma

$$T(x) = x - AF(x). \tag{2}$$

Se A for uma boa aproximação para o inverso do jacobiano e se obtivermos algumas estimativas similares ao Teorema de Newton-Kantorovich, podemos obter a convergência da sequência. Para encontrar uma vizinhança na qual T possui um único ponto fixo, iremos definir um polinômio $p : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que será chamado de Polinômio Radial.

A estratégia é desenvolvida com detalhes em (HUNGRIA; LESSARD; JAMES, 2016), mas repercute nos trabalhos de (LESSARD; JAMES; HUNGRIA, 2015; LESSARD; REINHARDT, 2014; BERG; LESSARD, 2018; BERG; SHEOMBARSING, 2016; BERG *et al.*, 2011; GAMEIRO; LESSARD, 2017; LESSARD; JAMES; RANSFORD, 2016; BREDEN; LESSARD; JAMES, 2016; BERG; JAMES; REINHARDT, 2016; KALIES; KEPLEY; JAMES, 2018). Superficialmente, podemos dizer que se obtivermos um $r > 0$ tal que $p(r) < 0$, então na bola fechada centrada em x_0 de raio r o operator T satisfaz as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach. É justamente nesse passo que entra a computação rigorosa. Ao invés de computarmos com floating points, usaremos intervalos para assegurar que em $I = [r_{\min}, r_{\max}]$ teremos de fato $p(I) \subset (-\infty, 0)$.

Desenvolveremos o aspecto básico em equações diferenciais ordinárias para a compreensão de três aplicações no Sistema de Lorenz dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \tag{3}$$

com parâmetros alterados de acordo com o objetivo.

A dissertação se divide de forma a

- introduzir o leitor ao aspecto dinâmico de equações diferenciais;
- formalizar o tradução para a linguagem funcional;
- concluir com as provas assistidas conforme descrito.

Para este fim, o Capítulo 1 desenvolve a metodologia necessária e os capítulos 2, 3 e 4 aplicam a metodologia no Sistema de Lorenz.

Para a completa execução do código anexado, é necessário o software MatLab em conjunto com os pacotes Chebfun[1] e IntLab[2]. O primeiro pacote permite a manipulação de

[1] <http://www.chebfun.org/>
[2] <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>

Séries de Chebyshev com maior facilidade, enquanto o segundo é responsável pela aritmética intervalar.

Há códigos de autoria própria e códigos de terceiros inclusos nesse trabalho. Quando usados, a devida fonte é apresentada.

CAPÍTULO

1

ANÁLISE NUMÉRICA

O Método de Newton, também conhecido por Método de Newton- Raphson, é o algoritmo mais popular para encontrar zeros de operadores C^1 Fréchet diferenciáveis $F : X \to Y$ onde X, Y são espaços de Banach[1].

Definição 1. Um operador $F : X \to Y$ é dito ser Fréchet diferenciável em $x \in X$ se existe um operador linear limitado A tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \tag{1.1}$$

Nessas condições, o algoritmo consiste em fixar um ponto inicial $x_0 \in X$ e definir a sequência

$$x_n = x_{n-1} - (DF(x_{n-1}))^{-1} F(x_{n-1}), \quad n > 0. \tag{1.2}$$

Se a escolha de ponto inicial for adequada, a sequência converge para um zero de F. De fato, fazendo $n \to \infty$ com $x_n \to x$, temos

$$x = x - (DF(x))^{-1} F(x) \implies F(x) = 0. \tag{1.3}$$

Entretanto, o método não funciona para uma escolha arbitrária de ponto inicial. Em geral, tanto a escolha do ponto quanto a computação da derivada podem gerar dificuldades.

Mesmo assim, sob certas condições no ponto inicial, Kantorovich (1940) provou que há convergência do método. O objetivo desse trabalho é utilizar uma versão parametrizada do argumento, também conhecida por Método dos Polinômios Radiais, para assegurar critérios de existência e unicidade no panorama de equações diferenciais ordinárias. Para o leitor interessado no trabalho do Kantorovich, recomenda-se (ORTEGA, 1968).

O método dos polinômios radiais foi usado em (GAMEIRO; LESSARD, 2017) para validar a continuação de estados de equilíbrio em equações parciais ordinárias. Desde então

[1] Espaço métrico completo

também foi aplicado em resultados para equações diferenciais ordinárias como integração numérica, soluções periódicas, variedades invariantes, bifurcações e também em contextos de equações diferenciais parciais. A abordagem difere do Newton-Kantorovich clássico por substituir a problemática de obter uma estimativa para $DF(x_0)$ pela de obter aproximações da derivada e sua inversa, denotadas por $A^\dagger, A$ respectivamente.

A construção dos operadores é dependente do problema abordado, pois é analisado tanto o operador quanto o inverso de $DF(x)$. Veremos a abordagem geral a seguir e, mais adiante, como o método é utilizado em demonstrações assistidas pelo computador.

1.1 Método dos Polinômios Radiais

O método depende de um argumento de contração baseado no Ponto Fixo de Banach. Enunciamos abaixo o teorema e em seguida o resultado principal.

Definição 2. Seja (X,d) um espaço métrico e $T : X \to X$ um operador. Dizemos que T é uma contração se existe uma constante $0 \leq k < 1$ tal que

$$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y), \quad \forall x,y \in X. \tag{1.4}$$

e chamamos de ponto fixo os pontos $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Teorema 1. Seja (X,d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então T admite um único ponto fixo.

Demonstração. Fixe $x_0 \in X$ um ponto qualquer. Provaremos que a sequência definida por

$$x_n = T(x_{n-1}), \quad n > 0, \tag{1.5}$$

é convergente. Como estamos em um espaço métrico completo, é suficiente mostrar que a sequência é de Cauchy. O que, por sinal, é bem simples:

$$\begin{aligned}
d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) \\
&\leq k^{m-n-1}d(x_{n+1},x_n) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) \\
&\leq (k^{m-n-1} + \cdots + 1)k^n d(x_1,x_0) \\
&\leq \frac{k^{m-n}-1}{k-1}k^n d(x_1,x_0) \\
&\leq \frac{k^m - k^n}{k-1}d(x_1,x_0) \to 0
\end{aligned}$$

quando $n,m \to \infty$, garantindo a existência. Em particular, o candidato a ponto fixo segue por continuidade

$$x^* = lim_n x_n = lim_n T^n(x) = T(lim_n x_n) = T(x^*) \tag{1.6}$$

Por fim, a unicidade: se supormos que $x, y \in X$ são pontos fixos, teremos

$$d(x,y) = d(T(x), T(y)) \leq kd(x,y),$$

Como $k < 1$, segue que $d(x,y) = 0$, ou seja, $x = y$. □

Teorema 2. Sejam X, Y espaços de Banach e $F : X \to Y$ uma aplicação C^1 Fréchet diferenciável. Considere os operadores lineares $A^\dagger : X \to Y$ e $A : Y \to X$ onde A é injetivo e

$$AF : X \to X. \tag{1.7}$$

Suponha que para um $x_0 \in X$ existam constantes não negativas Y_0, Z_0, Z_1, Z_2 tais que

$$\begin{aligned} \|AF(x_0)\|_X &\leq Y_0 \\ \|I - AA^\dagger\| &\leq Z_0 \\ \|A[DF(x_0) - A^\dagger]\| &\leq Z_1 \\ \|A[DF(b) - DF(x_0)]\| &\leq Z_2 r, \quad \forall b \in \overline{B}_r(x_0) \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde as normas dos operadores é definida de maneira clássica por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|. \tag{1.9}$$

Defina o polinômio radial

$$p(r) = Z_2 r^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r + Y_0. \tag{1.10}$$

Se existir $r_0 > 0$ tal que $p(r_0) < 0$, então $T(x) = x - AF(x)$ é uma contração na bola fechada $\overline{B_{r_0}(x_0)}$.

Demonstração. Note que como A é injetiva, os zeros de F estão em correspondência 1-1 com os pontos fixos de T. Portanto, basta verificar as condições do Teorema do Ponto Fixo de Banach para T que obtemos um zero de F. De fato, note que $p(r_0) < 0$ implica

$$Z_2 r_0^2 - (1 - Z_1 - Z_0)r_0 + Y_0 < 0,$$

ou seja,

$$(Z_2 r_0 + Z_1 + Z_0)r_0 + Y_0 < r_0, \tag{1.11}$$

e, por conseguinte,

$$0 < Z_2 r_0 + Z_1 + Z_0 < 1 - \frac{Y_0}{r_0} < 1.$$

Defina $k = Z_2 r_0 + Z_1 + Z_0$ uma constante entre zero e um. Veremos que T é contração na bola fechada $\overline{B_{r_0}(x_0)}$ com constante k.
De fato, ao diferenciar $T(x) = x - AF(x)$, temos

$$DT(x) = I - ADF(x), \quad \forall x \in X. \tag{1.12}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|DT(x)\| &= \|I - ADF(x)\| \\ &= \|I - AA^\dagger + AA^\dagger - ADF(x_0) + ADF(x_0) - ADF(x)\| \\ &\leq \|I - AA^\dagger\| + \|AA^\dagger - ADF(x_0)\| + \|ADF(x_0) - ADF(x)\| \\ &\leq Z_0 + Z_1 + Z_2 r_0 = k.\end{aligned} \tag{1.13}$$

o que nos dá

$$\sup_{x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}} \|DT(x)\| \leq k \tag{1.14}$$

e a contração segue do Teorema do Valor Médio se provarmos que T leva a bola fechada nela mesmo. De fato, Suponha que $x \in \overline{B_{r_0}(x_0)}$ e faça

$$\begin{aligned}\|T(x) - x_0\| &= \|T(x) - T(x_0) + T(x_0) - x_0\| \\ &\leq \|T(x) - T(x_0)\| + \|T(x_0) - x_0\| \\ &\leq (Z_2 r_0 + Z_1 + Z_0)\|x - x_0\| + \|AF(x_0)\| \\ &\leq (Z_2 r_0 + Z_1 + Z_0) r_0 + Y_0 \leq r_0\end{aligned} \tag{1.15}$$

onde a última desigualdade segue de (1.11). □

Diferente do método clássico, esquivaremos do problema da escolha do ponto inicial $x_0 \in X$ através da escolha de um espaço de Banach apropriado. Em geral, trabalharemos com o espaço das sequências com alto decaimento.

Neste formato, a busca por um ponto inicial é simplificada. Para obtê-lo, basta truncar o operador F inicial e resolvê-lo por métodos numéricos clássicos. Assim, o decaimento dos coeficientes garante que a solução aproximada é um zero numérico razoável para o operador original.

A dificuldade do método proposto é determinar as estimativas analíticas para os limitantes Y, Z necessários. Se os limitantes não forem precisos o suficiente, o polinômio não atingirá valores negativos e não será possível provar a contração. Com o objetivo de facilitar a futura definição das estimativas nas aplicações, faremos um breve resumo dos resultados necessários em espaços de Banach conhecidos.

1.2 Espaços de Banach e estimativas preliminares

A seguir definiremos as normas, as operações e os espaços utilizados ao longo do texto. Em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ defina simplesmente

$$\|x\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.16}$$

$$\|z\| = \|(z_1, \ldots, z_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|, \quad z \in \mathbb{C}^n \tag{1.17}$$

Enquanto nos espaços de sequências limitadas ℓ_∞ definimos a norma por

$$\|a\|_\infty = \|(a_k)_{k\in Z}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|\upsilon_k, \quad a_k \in \mathbb{C}. \tag{1.18}$$

Em geral ℓ será indexado pelos naturais, mas é conveniente definir com índice nos inteiros quando usarmos séries de Fourier. Quando a situação for geral, os índices serão omitidos para evitar a congestão visual. Ademais, se considerarmos um produto desses espaços, definiremos em $X = \mathbb{C}^r \times (\ell)^s$ a norma

$$\|x\|_X = \max_{1\le i\le r,\, 1\le j\le s} \{\|x_i\|, \|x_j\|; x_i \in \mathbb{C}, x_j \in \ell\} \tag{1.19}$$

Definição 3. Dados $a, b \in \ell^1$, defina a convolução discreta, ou produto de Cauchy, por

$$(a * b)_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \in \ell^1. \tag{1.20}$$

Nessas condições, temos

$$\|(a * b)\|_1 \le \|a\|_1 \|b\|_1, \quad \forall a, b \in \ell^1 \tag{1.21}$$

Além, defina o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que para $z \in \mathbb{C}^n$

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} \tag{1.22}$$

de tal forma que duas funções f, g analíticas dadas por séries de potências com coeficientes em ℓ tem seu produto escrito como

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha, \quad g(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} b_\alpha z^\alpha$$

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} (a * b)_\alpha z^\alpha.$$

onde a convolução discreta é generalizada de forma natural por

$$(a * b)_\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} a_\alpha b_{\alpha-\beta} \tag{1.23}$$

com a ordem lexicográfica nos multi-índices.

1.3 Construção do operador T

Suponha que $X = \mathbb{C}^{n_1} \times (\ell)^{n_2}$ e que operador $F : X \to X$ já esteja definido. Vejamos os conceitos básicos para definirmos o operador do tipo Newton no qual provaremos a convergência via o argumento de contração.

Definição 4. Dada uma sequência $a = (a_n)_n \in \ell_\upsilon$, defina o truncamento da sequência de ordem $m > 0$ por

$$a^{(m)} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, 0, 0, 0, \dots). \tag{1.24}$$

Assim, definimos a projeção de Garlekin do operador F por

$$F^{(m)}(z_1, \dots, z_{n_1}, a_1, \dots, a_{n_2}) = \Pi_m F(z_1, \dots, z_{n_1}, a_1^{(m)}, \dots, a_{n_2}^{(m)}) \tag{1.25}$$

onde $\Pi_m : X \to \mathbb{C}^{n_1} \times (\mathbb{C}^m)^{n_2}$.

Ao reduzir o problema para o caso finito, podemos utilizar métodos numéricos clássicos para encontrar zeros aproximados de $F^{(m)}$. A estratégia é que a abordagem escolhida possui um decaimento natural no espaço das soluções, o que faz de uma projeção de ordem grande gerar um bom candidato ao zero de F.

Seja $\overline{x}$ uma aproximação numérica de sua projeção. Então $DF(\overline{x})$ é dado por

$$D_x F(\overline{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1(\overline{x}) & \dots & \partial_{x_{n_1}} F_1(\overline{x}) & D_{x_{n_1+1}} F_1(\overline{x}) & \dots & D_{x_n} F_1(\overline{x}) \\ \partial_{x_1} F_2(\overline{x}) & \dots & \partial_{x_{n_1}} F_2(\overline{x}) & D_{x_{n_1+1}} F_2(\overline{x}) & \dots & D_{x_n} F_2(\overline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_{n_1}(\overline{x}) & \dots & \partial_{x_{n_1}} F_{n_1}(\overline{x}) & D_{x_{n_1+1}} F_{n_1}(\overline{x}) & \dots & D_{x_n} F_{n_1}(\overline{x}) \\ \partial_{x_1} F_{n_1+1}(\overline{x}) & \dots & \partial_{x_{n_1}} F_{n_1+1}(\overline{x}) & D_{x_{n_1+1}} F_{n_1+1}(\overline{x}) & \dots & D_{x_n} F_{n_1+1}(\overline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_n(\overline{x}) & \dots & \partial_{x_{n_1}} F_n(\overline{x}) & D_{x_{n_1+1}} F_n(\overline{x}) & \dots & D_{x_n} F_n(\overline{x}) \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

onde

$$\begin{cases} \partial_{x_i} F_i(\overline{x}) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & 1 \le i, j \le n_1 \\ \partial_{x_i} F_j(\overline{x}) : \mathbb{C} \to \ell, & 1 \le i \le n_1, n_1 < j \le n \\ D_{x_j} F_i(\overline{x}) : \ell \to \mathbb{C}, & 1 \le i \le n_1, n_1 < j \le n \\ D_{x_j} F_j(\overline{x}) : \ell \to \ell & n_1 < i, j \le n \end{cases} \tag{1.27}$$

para espaços de sequências apropriados a cada aplicação, por isso os índices omitidos a priori. Agora definiremos uma aproximação para $DF(\overline{x})$ chamada de pseudoinversa $A^\dagger$, dada por

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A^\dagger_{1,1} & \dots & A^\dagger_{1,n_1} & A^\dagger_{1,n_1+1} & \dots & A^\dagger_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^\dagger_{n_1,1} & \dots & A^\dagger_{n_1,n_1} & A^\dagger_{n_1,n_1+1} & \dots & A^\dagger_{n_1,n} \\ A^\dagger_{n_1+1,1} & \dots & A^\dagger_{n_1+1,n_1} & A^\dagger_{n_1+1,n_1+1} & \dots & A^\dagger_{n_1+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^\dagger_{n,1} & \dots & A^\dagger_{n,n_1} & A^\dagger_{n,n_1+1} & \dots & A^\dagger_{n,n} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

onde

$$\begin{cases} A^{\dagger}_{i,j} = \partial_{x_i} F_j(\overline{x}) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & 1 \leq i, j \leq n_1 \\ A^{\dagger}_{i,j} = \partial_{x_i} F_j(\overline{x}) : \mathbb{C} \to \ell, & 1 \leq i \leq n_1, n_1 < j \leq n \\ A^{\dagger}_{i,j} = D_{x_i} F_j^{(m)}(\overline{x}) : \ell \to \mathbb{C}, & 1 \leq i \leq n_1, n_1 < j \leq n \\ A^{\dagger}_{i,j} = diag\left(D_{x_i} F_j^{(m)}(\overline{x}), \Lambda_{k>m}\right) : \ell \to \ell, & n_1 < i, j \leq n \end{cases} \tag{1.29}$$

com $\Lambda_{k>m}$ sendo um bloco diagonal invertível dependente da aplicação tratada. Em geral, Λ está relacionado com o crescimento da derivada ao longo da diagonal, visto que a derivada é diagonal dominante. Naturalmente, $D_{x_i} F_j^{(m)}(\overline{x})$ deve ser visto como um truncamento do funcional linear.

Assim, se $A^{(m)}_{i,j}$ é uma aproximação numérica de $(D_{x_i} F^{(m)}_{x_j}(\overline{x}))^{-1}$, decompomos A da seguinte maneira

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n_1} & A_{1,n_1+1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_1,1} & \dots & A_{n_1,n_1} & A_{n_1,n_1+1} & \dots & A_{n_1,n} \\ A_{n_1+1,1} & \dots & A_{n_1+1,n_1} & A_{n_1+1,n_1+1} & \dots & A_{n_1+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n_1} & A_{n,n_1+1} & \dots & A_{n,n} \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

com $A_{i,j} = A^{(m)}_{i,j}$ completando a operação com zeros quando necessário. Por exemplo, se $A_{i,j}$ mapeia $\mathbb{C}$ em ℓ, as primeiras m coordenadas são dadas por $A^{(m)}_{i,j}$ e o restante são zeros. Exceto quando $i, j > n_1$, pois teremos

$$A_{i,j} = diag\left(A^{(m)}_{i,j}, (\Lambda_{k>m})^{-1}\right), \quad n_1 < i, j \leq n. \tag{1.31}$$

Definimos, enfim, o operator do tipo Newton dado por

$$T(x) = x - AF(x) \tag{1.32}$$

com A definida como acima. Em cada aplicação, precisaremos provar o seguinte lema, que dependem da construção de A.

Lema 1. Existem estimativas não-negativas Y_0, Z_0, Z_1 e Z_2 que satisfazem o Teorema 2.

Em cada capítulo a seguir abordaremos uma aplicação da metodologia no sistema de Lorenz. No Capítulo 2 provaremos a existência de soluções, no Capítulo 3 provaremos a existência de órbitas periódicas e no Capítulo 4 provaremos a existência de variedades invariantes.

CAPÍTULO

2

INTEGRAÇÃO DE SOLUÇÕES

Esse capítulo introduz os conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias e suas soluções. A seguir, utilizamos o método descrito anteriormente para obter soluções locais usando séries de Chebyshev e obtemos a validação numérica pelo Método dos Polinômios Radiais.

2.1 Soluções de EDOs

Definição 5. Um sistema dinâmico contínuo é uma tripla $(\mathbb{R}^+, X, \varphi)$, onde X é um espaço de Banach e $\varphi : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ é uma função contínua que satisfaz

- $\varphi(0,x) = x$ para todo $x \in \mathbb{X}$, e
- $\varphi(t, \varphi(s,x)) = \varphi(t+s,x)$ para todo $x \in X$ e $t,s \in \mathbb{R}^+$.

Chamamos uma φ definida dessa forma de semi-fluxo ou fluxo, se no domínio tivermos $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}$ respectivamente. Uma equação diferencial ordinária nos leva naturalmente ao estudo dos fluxos definidos no espaço, pois

Definição 6. Dada uma função contínua $f : U \subset \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$, definimos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem por

$$x' = f(t,x) \tag{2.1}$$

onde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Ainda, dizemos que $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 definida num intervalo aberto é uma solução de (2.1) se

$$\gamma'(t) = f(t, \gamma(t)), \quad \text{para todo } t \in I. \tag{2.2}$$

Geometricamente, (2.2) define uma curva cujo vetor tangente em cada ponto é dado por (2.1). Lidaremos, em geral, com funções que independem do tempo t, as quais chamamos de

EDOs autônomas. A seguir enunciamos um dos resultados fundamentais em EDOs discursa sobre a existência e unicidade dessas soluções.

Teorema 3. Suponha que $f : U \to \mathbb{R}^d$ é contínua e localmente Lipschitz em x e considere a EDO dada por

$$x' = f(t,x). \tag{2.3}$$

Então

i) para todo $(t_0,x_0) \in U \subset \mathbb{R}^{d+1}$ existem um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma solução $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ tal que $t_0 \in I$ e $\gamma(t_0) = x_0$.

ii) Se $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ são duas soluções de (2.3) com interseção no domínio não vazia, i.e., $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, então $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.

Em particular, se f for de classe C^k, a solução também será de classe C^k. No exemplo trabalhado, consideraremos a classe das funções analíticas, no sentido de variáveis complexas. Assim, obteremos soluções também analíticas que podem ter suas séries exploradas com melhor convergência.

A prova do teorema consiste justamente no conceito que trabalharemos nos métodos numéricos: criar uma contração num espaço de Banach adequado. A ideia é mostrar que num espaço de soluções especifico, o operador $T : X \to X$ definido por

$$T(\gamma)(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,\gamma(s))ds \tag{2.4}$$

é uma contração. A partir disso, basta tomar a solução constante $\gamma(t) \equiv x_0$ como ponto inicial e iterar a sequência. De fato, uma solução de (2.3) satisfaz a *equação integral* que induz o operador, dada por

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds. \tag{2.5}$$

Note que a solução original é obtida pela diferenciação da equação acima.

No formato acima, basta fazermos uma translação de t_0 para 0 e podemos simplificar a identificação da solução por um mapa $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tal que φ é a solução que passa por $x \in X$ no instante $t = 0$. Por vezes denotamos também por $\varphi_t(x)$ ou $\varphi^t(x)$ essa aplicação que mapeia (t,x) no ponto da trajetória de x que está a t unidades de tempo de x.

Ainda, note que φ define um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^d$, pois

i) $\varphi(0,x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^d$ uma vez que

$$\varphi(0,x) = x(0) + \int_{0}^{0} f(s,x(s))ds = x(0) = x. \tag{2.6}$$

ii) e $\varphi(s+t,x) = \varphi(s,\varphi(t,x))$ já que

$$\begin{aligned}
\varphi(s+t,x) &= x + \int_0^{t+s} f(\xi,x(\xi))d\xi \\
&= x + \int_0^{t} f(\xi,x(\xi))d\xi + \int_t^{t+s} f(\xi,x(\xi))d\xi \\
&= \varphi(t,x) + \int_t^{t+s} f(\xi,x(\xi))d\xi \\
&= \varphi(t,x) + \int_0^{s} f(\xi+t,x(\xi+t))d\xi \\
&= \varphi(t,x) + \int_0^{s} f(\xi+t,\varphi(\xi+t,x))d\xi \\
&= \varphi(t,x) + \int_0^{s} f(\xi',\varphi(\xi',x))d\xi' \\
&= \varphi(s,\varphi(t,x)).
\end{aligned}$$

2.2 Abordagem numérica

Nosso objetivo é, dado um ponto $x \in \mathbb{R}^d$, obter uma aproximação da solução local que passa por x no instante $t = 0$. Pelo resultado apresentado anteriormente, sabemos que existe uma única solução. Para obter uma aproximação inicial, usaremos Séries de Chebyshev.

Definição 7. Os Polinômios de Chebyshev $T_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$ são definidos recursivamente por $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ e

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k > 1. \tag{2.7}$$

Os polinômios apresentam uma série de propriedades úteis para o desenvolvimento numérico. Dentre elas, a direta computação do valor de $T_k(x)$ através de $t = \arccos(x)$, ou seja, $x = \cos(t)$.

Proposição 1. Para cada $n \geq 0$, o n-ésimo polinômio de Chebyshev T_n satisfaz

$$T_k(x) = T_k(\cos(t)) = \cos(kt), \quad \forall t \in [0,\pi]. \tag{2.8}$$

Demonstração. De fato, se $k = 0$

$$T_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0 \cdot t). \tag{2.9}$$

Se $k = 1$, teremos

$$T_1(\cos(t)) = \cos(t) = \cos(1 \cdot t). \tag{2.10}$$

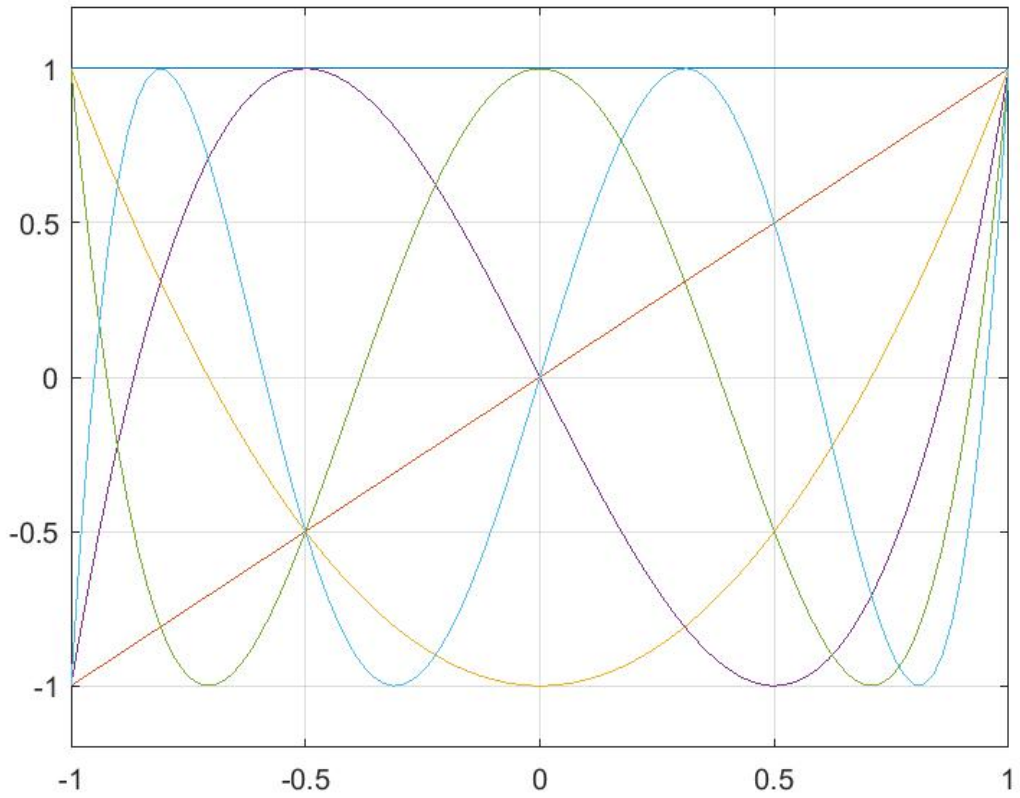

Figura 1 – Cinco primeiros Polinômios de Chebyshev

Suponha verdadeiro até k e teremos o resultado

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(\cos(t)) &= 2\cos(t)(T_k(\cos(t))) - T_{k-1}(\cos(t)) \\
&= 2\cos(t)\cos(kt) - \cos((k-1)t) \\
&= 2\cos(t)\cos(kt) - (\cos(kt)\cos(-t) - \sin(kt)\sin(-t)) \\
&= 2\cos(t)\cos(kt) - \cos(kt)\cos(t) + \sin(kt)\sin(t) \\
&= \cos(kt)\cos(t) - \sin(kt)\sin(t) \\
&= \cos((k+1)t).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

□

Além do mais, os polinômios $\{T_k\}_k$ formam uma base ortogonal para o espaço de funções $L_2([-1,1])$ com o produto interno dado por

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \tag{2.12}$$

De fato, para verificar a ortogonalidade basta fazer

$$\langle T_{k_1}, T_{k_2}\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_{k_1}(x)T_{k_2}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi} \cos(k_1 t)\cos(k_2 t)dt = \begin{cases} 0, & k_1 \neq k_2 \\ \pi, & k_1 = k_2 = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & k_1 = k_2 \neq 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Assim, dada uma função $f \in L_2([-1,1])$, podemos obter facilmente os coeficientes correspondentes através de

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2, & k \geq 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

e teremos que

$$f(x) = \sum_k a_k T_k(x), \quad \forall x \in [-1,1]. \tag{2.15}$$

Outras propriedades notáveis que serão utilizadas adiante são

$$T_k(-1) = (-1)^k \quad \text{e} \quad T_k(1) = 1 \tag{2.16}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e a seguinte recursão

$$\int T_0(t)dt = t = T_1(t) \tag{2.17}$$

$$\int T_1(t)dt = \frac{t^2}{2} = \frac{1}{4}(T_2(t) + T_0(t)) \tag{2.18}$$

$$\int T_k(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(t)}{k-1}\right), \quad k \geq 2. \tag{2.19}$$

Em particular, como trabalharemos com espaços de sequências com decaimento, a seguinte proposição será de grande utilidade.

Proposição 2. Se $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ é uma função real analítica, então sua série de Chebyshev dada por

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k T_k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2}\cos(-kt) + a_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2}\cos(kt) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \cos(kt) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{ikt} \tag{2.20}$$

converge uniformemente em $[-1,1]$. Ainda, existem constantes $C > 0$ e $\upsilon > 1$ tais que

$$|a_k| \leq \frac{C}{\upsilon^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Note que na proposição alteramos a notação para b_k com índices em $\mathbb{Z}$. Para tal, basta tomar $b_k = a_k/2$ quando $k \neq 0$ e temos $a_k T_k(t) = b_{-k}T_k(t) + b_k T_k(t) = b_{-k}\cos(-kt) + b_k \cos(kt)$. A demonstração em si é uma consequência do Teorema de Paley–Wiener e pode ser encontrada em (HORMANDER, 2003).

2.3 Problema de Valor Inicial

Conforme descrito anteriormente, buscamos uma solução do problema de valor inicial dado por uma função analítica $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = p, \quad p \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2.22}$$

que também pode ser vista como uma solução da equação integral dada por

$$\mathscr{F}(x)(t) = p + \int_0^t f(x(s))ds - x(t) = 0. \tag{2.23}$$

Note que após uma reparametrização do tempo, podemos considerar simplesmente o tempo t entre $[-1,1]$. De fato, para $L > 0$ fixado, basta tomar

$$\begin{aligned} \varphi : [-1,1] &\to [0,L] \\ s &\mapsto \frac{L(s+1)}{2}. \end{aligned}$$

Assim, se substituirmos em 2.23, teremos

$$\mathscr{F}(x)(t) = p + \int_{-1}^t f(x(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)ds - x(t) = 0. \tag{2.24}$$

Em suma, se encontrarmos o zero do operador $\mathscr{F}$, encontramos uma solução da equação diferencial ordinária. Como tanto a f quanto a solução são analíticas, segue da Proposição 2 que existem coeficientes de Chebyshev tais que

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k>0} a_k T_k(t) \tag{2.25}$$

$$f(x(t)) = b_0 + 2\sum_{k>0} b_k T_k(t) \tag{2.26}$$

e substituindo em (2.24), temos

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(x)(t) &= x_0 + L\int_{-1}^t b_0 + 2\sum_{k>0} b_k T_k(s)ds - a_0 + 2\sum_{k>0} a_k T_k(t) \\ &= p + L\left(b_0(t+1) + 2b_1\left(\frac{1}{4}(T_2(t)+T_0(t)) - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(a_0 + 2\sum_{k>0} a_k T_k(t)\right) + \\ &2L\sum_{k>1} b_k\left(\frac{1}{2}\left(\frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(t)}{k-1} - \frac{(-1)^k}{k^2-1}\right)\right) \\ &= \left(p - a_0 + L\left(b_0 - \frac{b_1}{2} - 2\sum_{k>1}\frac{(-1)^k}{k^2-1}b_k\right)\right)T_0(t) + 2\sum_{k>0}\left(\frac{L(b_{k-1}-b_{k+1})}{2k} - a_k\right)T_k(t) \\ &= G(p,a,b)_0 T_0(t) + 2\sum_{k>0} G(p,a,b)_k T_k(t). \end{aligned}$$

onde definimos um operador temporário G coordenada a coordenada. Agora defina

$$F(a) = F(p,(a_n),(b_n))_k = \begin{cases} p - a_0 - 2\sum_{n>0}(-1)^n a_n, & k = 0, \\ 2ka_k + Lb_{k+1} - Lb_{k-1}, & k \geq 1. \end{cases} \tag{2.27}$$

e uma observação importante é que podemos simplificar a análise de G através do operador F.

De fato, se temos um zero de F, então pela relação $F(p,a,b)_k = -2kG(p,a,b)_k/L$ com $k \neq 0$ também temos um zero de G. Para $k = 0$, temos

$$p - a_0 + b_0 - \frac{b_1}{2} - 2\sum_{k>1} \frac{(-1)^k}{k^2-1} b_k = p - a_0 - \sum_{k>0} (-1)^k a_k \tag{2.28}$$

uma vez que $2ka_k = Lb_{k-1} - Lb_{k+1}$. Ou seja, os zeros de F estão em correspondência com os zeros de G, e, logo, os de $\mathscr{F}$. A conclusão é que encontrar soluções analíticas do problema de valor inicial dado, é análogo a encontrar soluções no espaço de sequências ℓ que satisfazem o operador dado.

Note que o operador depende unicamente da sequência $a = (a_k)$, pois o ponto inicial p é um parâmetro do operador e $b = (b_k)$ é definido a partir de a.

Na próxima seção vamos definir o operador do tipo Newton $T : X \to X$ dado por $T(x) = x - AF(x)$, $x \in X$ associado a F como descrito no capítulo introdutório.

2.4 Sistema de Lorenz: Problema de Valor Inicial

Considere o sistema de Lorenz dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \tag{2.29}$$

com parâmetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 28$. Caso necessário, multiplicaremos o lado direito por $L > 0$ para reparametrizar o tempo de acordo com o nosso interesse.

Seguindo a abordagem proposta, fixamos um ponto $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ e consideramos as respectivas séries de Chebyshev

$$x(t) = x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(t), \tag{2.30}$$

$$y(t) = y_0 + 2\sum_{k>0} y_k T_k(t), \tag{2.31}$$

$$z(t) = z_0 + 2\sum_{k>0} z_k T_k(t). \tag{2.32}$$

Note que operator de $\mathscr{F}$ terá três coordenadas, dadas por

$$(\mathscr{F}(x,y,z)(t))_1 = p_1 + \sigma \int_{-1}^{t} \left(y_0 + 2\sum_{k>0} y_k T_k(s) \right) - \left(x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(s) \right) ds - \left(x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(t) \right)$$

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}(x,y,z)(t))_2 = p_2 + \int_{-1}^{t} \rho \left(x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(s) \right) - \left(y_0 + 2\sum_{k>0} y_k T_k(s) \right) \\ - \left(x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(s) \right) \left(z_0 + 2\sum_{k>0} z_k T_k(s) \right) ds - \left(y_0 + 2\sum_{k>0} y_k T_k(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathscr{F}(x,y,z)(t))_3 = p_3 + \int_{-1}^{t} \left(x_0 + 2\sum_{k>0} x_k T_k(s) \right) \left(y_0 + 2\sum_{k>0} y_k T_k(s) \right) \\ - \beta \left(z_0 + 2\sum_{k>0} z_k T_k(s) \right) ds - \left(z_0 + 2\sum_{k>0} z_k T_k(t) \right) \end{aligned}$$

que resultarão no operador $F = [F_1, F_2, F_3]$ onde cada F_i corresponde a $\mathscr{F}_i$, para $i = 1, 2, 3$. Os operadores são dados explicitamente por

$$F_1((x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n) = \begin{cases} p_1 - x_0 - 2\sum_{n>0}(-1)^n x_n, & k = 0 \\ 2kx_k + (\sigma(y_{k+1} - x_{k+1}) - \sigma(y_{k-1} - x_{k-1})). \end{cases} \tag{2.33}$$

$$F_2((x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n) = \begin{cases} p_2 - y_0 - 2\sum_{n>0}(-1)^n y_n, & k = 0 \\ 2ky_k + (\rho x_{k+1} - y_{k+1} - (x*z)_{k+1}) - (\rho x_{k-1} - y_{k-1} - (x*z)_{k-1}). \end{cases} \tag{2.34}$$

$$F_3((x_n)_n,(y_n)_n,(z_n)_n) = \begin{cases} p_3 - z_0 - 2\sum_{n>0}(-1)^n z_n, & k=0 \\ 2kz_k + ((x*y)_{k+1} - \beta z_{k+1}) - ((x*y)_{k-1} - \beta z_{k-1}). \end{cases} \tag{2.35}$$

A derivada pode ser dada em blocos por

$$DF = \begin{bmatrix} D_xF_1 & D_yF_1 & 0 \\ D_xF_2 & D_yF_2 & D_zF_2 \\ D_xF_3 & D_yF_3 & D_zF_3 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

onde

$$D_xF_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ \sigma & 2 & -\sigma & 0 & \dots \\ 0 & \sigma & 4 & -\sigma & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad D_yF_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\sigma & 0 & \sigma & 0 & \dots \\ 0 & -\sigma & 0 & \sigma & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$$D_yF_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & -1 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad D_zF_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 & \dots \\ \beta & 2 & -\beta & 0 & \dots \\ 0 & \beta & 4 & -\beta & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

enquanto os outros blocos são definidos coordenada a coordenada por

$$(D_xF_2)_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i=0; \\ z_{i-2\pm j} - z_{i\pm j} - \rho, & \text{se } i=j+1; \\ z_{i-2\pm j} - z_{i\pm j} + \rho, & \text{se } i=j-1; \\ z_{i-2\pm j} - z_{i\pm j}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (D_zF_2)_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i=0; \\ x_{i-2\pm j} - x_{i\pm j}, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

$$(D_xF_3)_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i=0; \\ -y_{i-2\pm j} + y_{i\pm j}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (D_yF_3)_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{se } i=0; \\ -x_{i-2\pm j} + x_{i\pm j}, & \text{caso contrário.} \end{cases},$$

Se $\bar{u} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ é uma aproximação de um zero de F, defina A como a pseudoinversa de $DF(\bar{u})$. A seguir, defina $T : \ell^3 \to \ell^3$ por $T(u) = (u) - AF(u)$.

Para o desenvolvimento desse trabalho, foram determinados três condições inicias dadas por

$$\begin{aligned} p &= (8.102574164767477, 9.551574461919124, 24.429705657930224), \\ q &= (-0.208252089096454, -0.454566900892446, 0) \\ r &= (4.102702069909453, 8.936495309135337, 0.5789130478426856) \end{aligned}$$

onde p se situa próximo a variedade instável do ponto de equilíbrio $(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$, q próximo a variedade instável da origem e r é um ponto qualquer. Nessas condições, para $L=2$ obtemos as seguintes soluções numéricas:

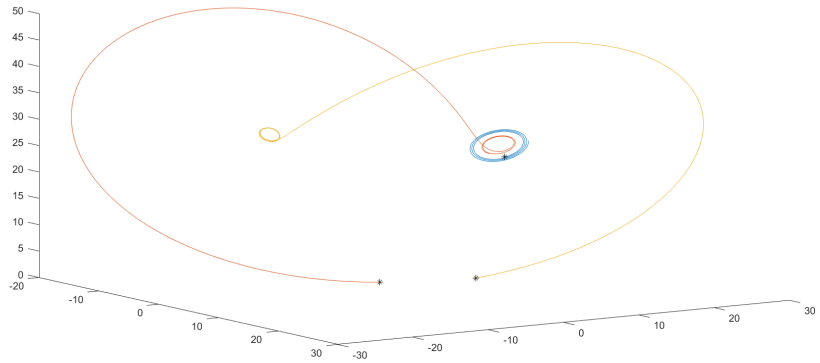

Figura 2 – Fluxo a partir dos pontos destacados.

A seguir, destacamos os raios em que o operator T definido por $T(x) = x - AF(x)$ é uma contração e garante a existência e unicidade da solução.

Ponto de Equilíbrio	m	L	Intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$
p	150	2	$[3.0075 \times 10^{-12}, 0.0011]$
q	300	1	$[1.2832 \times 10^{-11}, 0.00027931]$
r	200	2	$[9.1460 \times 10^{-12}, 0.00094958]$

Tabela 1 – Ordem da aproximação numérica e intervalo dos raios da bola que garante a contração.

A contração foi provada utilizando as estimativas e códigos disponíveis em (LESSARD; REINHARDT, 2014). Vale destacar que o operador é ligeiramente diferente, pois os autores utilizaram $L/2$ ao invés de L. Ou seja, para realizar as provas supracitadas, considere $L = 1, 0.5$ e 1 nos respectivos pontos p, q e r.

CAPÍTULO

3

SOLUÇÕES PERIÓDICAS

Nesse capítulo iremos utilizar os conceitos já apresentados para encontrar soluções periódicas no sistema de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.

3.1 Soluções periódicas

Dizemos que uma solução $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ da equação diferencial ordinária

$$x' = f(t,x) \tag{3.1}$$

é periódica se existe $T > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(t+T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o valor minimal de T em que isso acontece é chamado de *período*.

É natural tratarmos de soluções periódicas, uma vez que se denotarmos o conjunto $S = \gamma(\mathbb{R})$, obtemos um conjunto invariante pelo fluxo. De fato, relembremos que

Definição 8. Um conjunto $S \subset X$ é dito ser invariante se no sistema dado por $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ temos

$$\varphi(t,S) \subset S, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.2}$$

Claramente, se seguirmos a solução ao longo de um ponto fixado $p \in \gamma(\mathbb{R})$ ao longo do tempo, a trajetória permanece contida no caminho fechado.

Se retirarmos de contexto, uma órbita periódica nada mais é do que uma função periódica $f : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ e sobre funções periódicas temos vários resultados promissores. De fato, sabemos que são aproximadas uniformemente por séries de Fourier.

O desenvolvimento, portanto, será análogo ao caso de integração numérica usando Chebyshev. Descreveremos o operador funcional cujos zeros estarão em correspondência com órbitas periódicas da solução e, em seguida, descreveremos uma contração associada.

3.2 Abordagem numérica

Considere uma função periódica $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ decomposta coordenada a coordenada em

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_d(t)), \tag{3.3}$$

com $\gamma_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções reais periódicas. Em séries de Fourier, teremos para cada $j = 1, \ldots, d$ os coeficientes associados

$$\gamma_j(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_j)_k e^{ik\omega t} \tag{3.4}$$

onde $a_j = \{(a_j)_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ é a sequência dos coeficientes e $\omega = 2\pi/T$ é a frequência da solução. Somente essa informação já sugere o operador F que trabalharemos. De fato, para cada γ_j temos

$$\gamma_j'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\omega(a_j)_k e^{ik\omega t} \tag{3.5}$$

e, se $\gamma(t)$ é solução da equação diferencial ordinária dada por

$$x' = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_d(x)) \tag{3.6}$$

então para cada j entre 1 e d temos

$$f_j(\gamma_j(t)) - \gamma_j'(t) = f_j(\gamma_j(t)) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\omega(a_j)_k e^{ik\omega t} = 0 \tag{3.7}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\gamma_j)(t) &= f_j(\gamma_j(t)) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\omega(a_j)_k e^{ik\omega t} && (3.8)\\
&= f_j(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_j)_k e^{ik\omega t}) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\omega(a_j)_k && (3.9)\\
&= \left(\phi_j(a))_k - ik\omega(a_j)_k\right) e^{ik\omega t} && (3.10)
\end{aligned}$$

onde $\phi_j(a)_k$ resulta da ação de f sobre a série de Fourier de γ. Logo, estamos procurando uma solução em $(\ell^1_\upsilon)^d$ para um operador F que busca zeros de $\mathscr{F}$:

$$F(a) = \begin{bmatrix} F_1(a) \\ \vdots \\ F_d(a) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

onde

$$\left(F_j(a)\right)_k = \varphi_j(a)_k - ik\omega(a_j)_k \tag{3.12}$$

Naturalmente, o operador como está escrito define uma matriz "infinita"para a esquerda e para a direita. Seguiremos como já fizemos anteriormente. Defina uma projeção de Garlekin dada por $F^{(m)}$ que projeta a imagem de $a^{(m)}$ num espaço de dimensão finita e obteremos um operador cujo zero estará próximo de um zero do operador F.

Note que essa boa aproximação só é possível devido ao decaimento dos coeficientes de Fourier para funções periódicas. De fato,

Teorema 4 (Teorema de Paley-Wiener)**.** Suponha que $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica analítica. Considere a expansão em Fourier de γ dada por

$$\gamma(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T. \tag{3.13}$$

Se $a = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, então existe $\upsilon > 1$ tal que

$$\sum |a_k| \upsilon^k < \infty. \tag{3.14}$$

A demonstração do teorema é omitida, pois o escopo de análise complexa foge do contexto do trabalho. O leitor interessado pode encontrar a demonstração em (HORMANDER, 2003). Entretanto, o essencial para o desenvolvimento é que existe um espaço de sequências com decaimento dado por $\upsilon > 1$.

3.3 Seção de Poincaré

Essa seção destaca a importância de informações adicionais sobre a órbita periódica no contexto do operador descrito anteriormente. De fato, se Γ descreve uma órbita periódica e obtemos seus coeficientes associados quando $\gamma(0) = p \in \Gamma$, podemos obter coeficientes arbitrariamente próximos fazendo

$$p_n \in \Gamma, \, p_n \to p, \tag{3.15}$$

e obtermos $\gamma_n(0) = p$ com $\gamma(t) = \sum a_n e^{ik\omega t}$ tal que $\gamma_n \to \gamma$ quando $n \to \infty$.

Ou seja, precisamos de uma forma de isolar nossa solução dada pelas sequências dos coeficientes no espaço tal qual se encontra mesmo quando a solução periódica for isolada.

Considere a equação diferencial ordinária

$$x' = f(x), \tag{3.16}$$

sabemos que numa vizinhança de um ponto regular $p \in \mathbb{R}^d$ há uma mudança de variáveis que retifica o fluxo. Este resultado é conhecido como Teorema do Fluxo Tubular. Em poucas palavras, o teorema mostra que numa vizinhança U do ponto p há uma mudança de variáveis $g : U \to V$ que conjuga o fluxo φ dado por f com o fluxo dado por

$$y_1' = 1, \quad y_j' = 0, \forall j > 1. \tag{3.17}$$

Seja $S = U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}) \subset \mathbb{R}^d$ e defina a seção de Poincaré associada

$$\Sigma = g(S). \tag{3.18}$$

Note que $p \in \Sigma$ e como p é ponto periódico temos $\varphi(T, p) = p$, com $T > 0$ período da órbita. Por continuidade, existe uma vizinhança N de p mapeia os pontos na vizinhança V de Σ. Definimos, assim, a função tempo de retorno no domínio N por

$$\tau(x) = \min\{t > 0 : \varphi(t, x) \in \Sigma\} \tag{3.19}$$

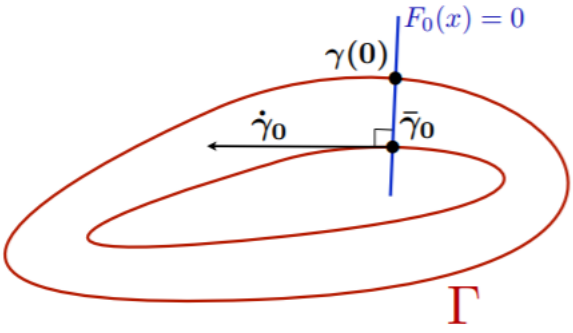

Figura 3 – Ilustração da Condição de Fase. Fonte: (GAMEIRO *et al.*, 2019).

Em particular, a função τ é contínua e tal como $P : N \to \Sigma$

$$P(x) = \varphi(\tau(x), x), \tag{3.20}$$

pois é composição de funções contínuas.

Nesse formato, podemos isolar nossa solução no espaço dos coeficientes usando a ferramenta adicional: basta fixar $p \in \Gamma$ como ponto inicial e definir um operador associado

$$\eta(p, \gamma(t)) = P(T, \gamma(t)) - p, \tag{3.21}$$

onde p é a unica solução. Em termos de soluções numéricas, buscamos por uma solução periódica $\gamma(t)$ tal que

$$\gamma_0'. (\overline{\gamma}_0 - \gamma(0)) = 0, \tag{3.22}$$

para aproximações fixadas γ_0' e $\overline{\gamma}_0$ e defina a equação acima por $F_0(a)$ sob os coeficientes de Fourier de γ

3.4 Sistema de Lorenz: Órbitas periódicas

Considere o sistema de Lorenz dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \tag{3.23}$$

com parâmetros $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ e $\rho = 28$. Vamos definir o operador $F : X \to X$ dado por

$$F(\omega, (a_n), (b_n), (c_n)) = \begin{bmatrix} F_0(\omega, (a_n), (b_n), (c_n)) \\ F_1(\omega, (a_n), (b_n), (c_n)) \\ F_2(\omega, (a_n), (b_n), (c_n)) \\ F_3(\omega, (a_n), (b_n), (c_n)) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

com

$$F_j(\omega,a,b,c) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \overline{\gamma}_{0,i}\gamma'_{0,i} - \sum_{i=1}^{3} \gamma'_{0,i} \sum_{|k|\leq m} (a_i)_k, & j=0 \\ \{ik\omega(a)_k - (\phi_1(a,b,c))_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, & j=1 \\ \{ik\omega(b)_k - (\phi_2(a,b,c))_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, & j=2 \\ \{ik\omega(c)_k - (\phi_3(a,b,c))_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, & j=3 \end{cases} \tag{3.25}$$

onde

$$(\phi_j(a,b,c))_k = \begin{cases} \sigma(b_k - a_k), & j=1 \\ \rho a_k - b_k - (a*c)_k, & j=2 \\ (a*b)_k - \beta c_k, & j=3 \end{cases} \tag{3.26}$$

3.5 Computação Rigorosa

Assim, para os parâmetros descritos, foram validadas as seguintes órbitas periódicas em (GAMEIRO *et al.*, 2019).

Trajetória	Período	m	Intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$
AB	1.5587	80	$[3.0112\times10^{-14}, 0.0078691]$
AAB	2.3059	110	$[6.0866\times10^{-13}, 0.0041978]$
ABB	2.3059	110	$[5.1273\times10^{-13}, 0.0031017]$
AAAB	3.0236	140	$[2.1023\times10^{-12}, 0.0018607]$
AABB	3.0236	140	$[2.6987\times10^{-13}, 0.0015571]$
ABBB	3.7256	170	$[2.016\times10^{-12}, 0.0014146]$
AAAAB	3.8203	170	$[1.6132\times10^{-12}, 0.00089004]$
AAABB	3.8203	170	$[2.6086\times10^{-12}, 0.00059818]$
AABAB	3.8695	170	$[3.5391\times10^{-12}, 0.00064646]$
AABBB	3.8203	170	$[2.1882\times10^{-12}, 0.00055587]$
AAAABABB	6.0824	300	$[2.7194\times10^{-11}, 6.8867\times10^{-5}]$
AABBAABB	8.957	560	$[2.6555\times10^{-11}, 6.4514\times10^{-5}]$
AAAAAABBABBBAAAA	11.9973	870	$[1.2693\times10^{-10}, 3.0684\times10^{-5}]$

Tabela 2 – A trajetória descreve a região em que a órbita periódica passa por, sendo A/B os pontos de equilíbrio não nulos. O período descreve o período da órbita encontrada, a quantidade de coeficientes de Fourier para a aproximação numérica e o Intervalo de validação.

Segue quais foram as órbitas periódicas validadas.

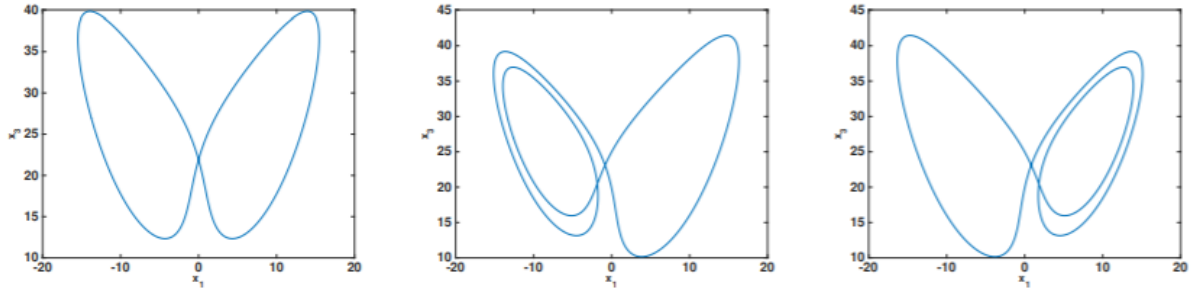

Figura 4 – Esquerda: AB, Centro: AAB, Direita: ABB

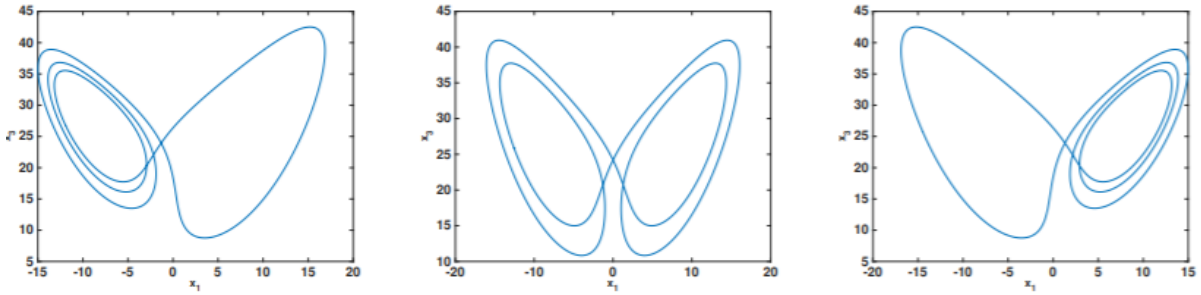

Figura 5 – Esquerda: AAAB, Centro: AABB, Direita: ABBB

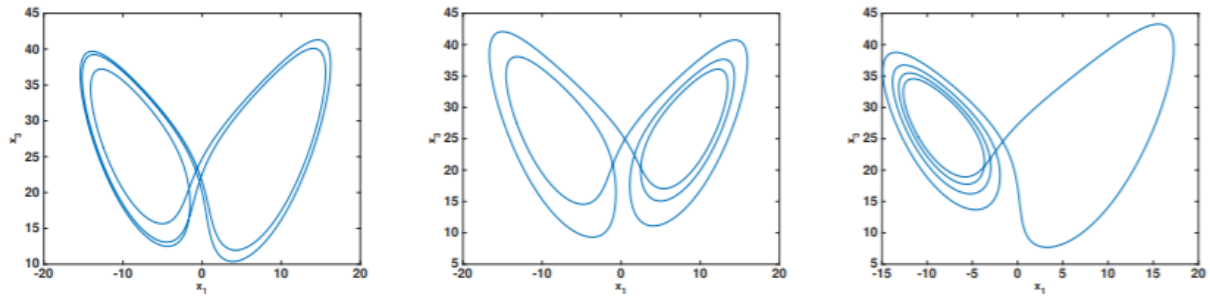

Figura 6 – Esquerda: AABAB, Centro: AABBB, Direita: AAAAB

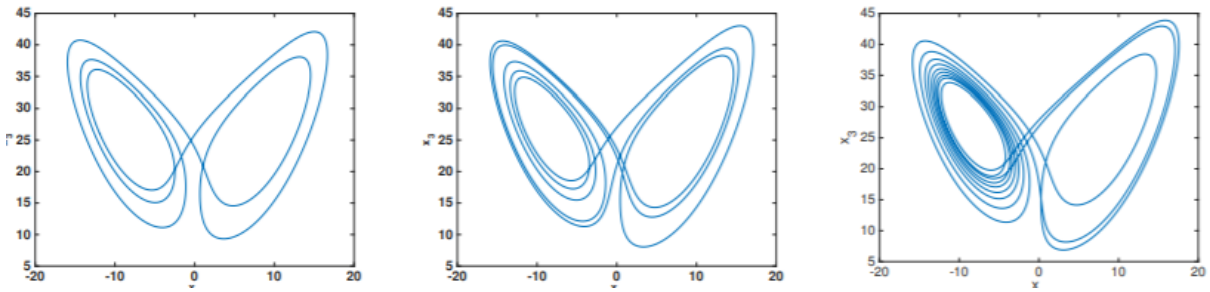

Figura 7 – Esquerda: AAABB, Centro: AAAABABB, Direita: AAAAABAAAABB

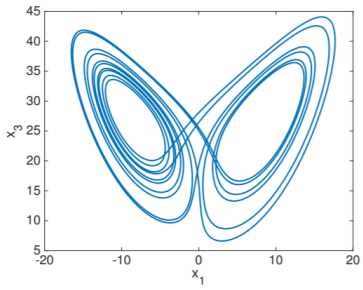

Figura 8 – AAAAAABBABBBAAAA

As figuras acima foram retiradas de (GAMEIRO *et al.*, 2019).

CAPÍTULO

4

VARIEDADES INVARIANTES

O objetivo desse capítulo é determinar a variedade estável de um ponto hiperbólico dada por uma função analítica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ em

$$\dot{y} = f(y). \tag{4.1}$$

4.1 Variedades estáveis

Definição 9. Um ponto de equilibrio $p \in \mathbb{R}^n$, i.e., $f(p) = 0$ é dito ser hiperbólico se todos os autovalores de $Df(p)$ possuem parte real não nula.

Se analisarmos o espectro de $Df(p)$, isso significa que sob pequenas perturbações a parte real dos autovalores não troca de sinal. Ou seja, a estabilidade linear conjugada numa vizinhança de p não se altera.

Definição 10. Chamamos de variedade estável local de um ponto fixo $p \in \mathscr{U}$ com respeito a uma vizinhança $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^n$ de p o conjunto

$$W^s_{loc}(p) = \left\{ x \in \mathscr{U} \mid \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

e apenas variedade estável

$$W^s(p) = \bigcup_{t \geq 0} f(t, W^s_{loc}(p)),$$

em outras palavras,

$$W^s(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p \right\}$$

Em geral, essas variedades podem ser complicadas de determinar. Entretanto, o Teorema de Hartman-Grobman as caracteriza no caso de pontos fixos hiperbólicos. O teorema diz que essas variedades são cópias topologicamente imersas dos respectivos subespaços estáveis/instáveis dados pela linearização do sistema nos pontos hiperbólicos. Em particular, os métodos computacionais estudados neste projeto são fundamentados no seguinte resultado teórico sobre pontos fixos hiperbólicos de equações diferenciais ordinárias.

Teorema 5 (Teorema da Variedade Estável)**.** Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k, $k \geq 1$ e seja $p \in U$ um ponto fixo hiperbólico. Então existe um mergulho $\varphi : V \to U$ de classe C^k definido numa vizinhança $V \subset E^s$ da origem tal que

- $\varphi(0) = p$ e $\varphi(V)$ coincide com uma variedade estável local $W^s_{loc}(p)$ de p;
- $D\varphi(0)E^s = E^s$;
- φ se estende a uma imersão injetiva $\varphi : E^s \to U$ de classe C^k cuja imagem é $W^s(p)$;

onde $E^s = E^s(p)$ é o subespaço gerado pelos autovetores em correspondência com os autovalores com parte real negativa, ou seja, o subespaço estável de $Df(p)$.

A ideia é, portanto, trabalhar com campos vetoriais dados por funções analíticas, assim teremos que numa vizinhança do ponto de equilíbrio hiperbólico, a variedade estável é dada localmente por um mergulho analítico.

4.2 Abordagem numérica

O método utilizado se chama "Método da Parametrização" (CABRE; FONTICH; LLAVE, 2005) e se fundamenta no Teorema da Variedade Estável. De fato, da analiticidade de g é possível concluir que a variedade estável num ponto hiperbólico é uma superfície analítica mergulhada no $\mathbb{R}^n$.

Suponha que $p \in \mathbb{R}^n$ seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de (4.1) e denote por $n_s \leq n$ a dimensão da variedade estável de p. Sejam (λ_k, ξ_k) com $1 \leq k \leq n_s$ os pares de autovalores e autovetores de $Df(p)$ com parte real negativa da linearização em p.

O método da parametrização consiste na busca de uma parametrização local da variedade estável $W^s(p)$ dada por

$$f(\theta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha \theta^\alpha \tag{4.2}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_s})$ é um multi-índice. Como o fluxo é conjugado com o fluxo linear numa vizinhança (Hartman-Grobman), assumimos que f é a parametrização dada pelo teorema, isto é,

$$f(e^{\Lambda t}\theta) = \varphi(t, f(\theta)) \tag{4.3}$$

onde $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_s})$ e φ é o fluxo induzido por f.

Derivando com respeito a t e avaliando em $t = 0$, obtemos a seguinte *equação de invâriancia*

$$Df(\theta)\Lambda\theta = g(f(\theta)), \tag{4.4}$$

a qual acrescentamos as seguintes condições para obtermos um problema bem posto,

$$f(0) = p, \quad Df(0) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n_s}). \tag{4.5}$$

A partir da equação de invâriancia, expandimos ambos os lados em Taylor e igualamos os coeficientes correspondentes a θ^α para obtermos um sistema de infinitas equações. O sistema é truncado e resolvido até um certo grau $|\alpha| = M$, o que nos dá uma aproximação numérica da variedade estável de p. Uma última condição deve ser adicionada para que esse processo seja bem sucedido. Precisamos que os auto-valores de $Df(p)$ sejam não-resonantes.

Definição 11. Um conjunto de auto-valores $\{\lambda_k\}_{1 \leq k \leq n}$ é dito ser resonante se existirem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ tais que $a_1 + \cdots + a_n \geq 2$ e

$$\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_i$$

para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Caso contrário, dizemos que são não-resonantes.

Caso os autovalores sejam resonantes, o sistema obtido por (4.4) pode não ter solução. Supondo a condição de ressonância, podemos resolver o sistema através da fórmula de recorrência

$$a_0 = p, \quad a_{e_i} = \xi_i \, (i = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

$$(Df(p) - (\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n_s}\lambda_{n_s})Id_{n,n})\, a_\alpha = -c_\alpha \tag{4.7}$$

onde c_α é definida em termos dos a_β, β multi-índice com $|\beta| < |\alpha|$ e $Id_{n,n}$ é a matriz identidade de tamanho n. Uma verificação do erro a-posteriori é realizada em (CABRE; FONTICH; LLAVE, 2005) para garantir a qualidade da solução numérica.

Outra abordagem seria tratar a solução do sistema (4.6) como um zero de um operador $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$F(a) = F(a_0, \ldots, a_\alpha) = \begin{pmatrix} a_0 - p \\ a_{e_i} - \xi_i \\ \vdots \\ (\alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n_s}\lambda_{n_s})Id_{n,n})a_\alpha - \phi(a_\alpha) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

e usar métodos numéricos conhecidos para encontrar o seu zero.

4.3 Sistema de Lorenz: 1D-Variedades estáveis/instáveis

Considere o Sistema de Lorenz dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{cases} \tag{4.9}$$

onde $\sigma = 10, \rho = 28$ e $\beta = 8/3$. O objetivo dessa seção é descrever o operador que trabalharemos no sistema. De fato, considerando

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\sigma(x+y) \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Suponha que $p \in \mathbb{R}^3$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico que só possui um único autovalor não-negativo, denotado por $\lambda > 0$. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ o autovetor associado a λ. Procuramos então uma série de potências $P : [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$P(0) = p, \quad P'(0) = v \tag{4.11}$$

que seja uma solução do sistema. Seja

$$P(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^n \tag{4.12}$$

com

$$\alpha_n = (a_n, b_n, c_n), \quad a,b,c \in \ell^1_\upsilon. \tag{4.13}$$

Agora defina as sequências

$$\begin{cases} \phi_1(a,b,c) &= \sigma(b-a) \\ \phi_2(a,b,c) &= \rho a - b - (a*c) \\ \phi_3(a,b,c) &= -\beta c + (a*b) \end{cases} \tag{4.14}$$

e substituindo de acordo com o Método da Parametrização, i.e., fazendo $n\lambda\alpha_n - \phi(\alpha)_n = 0$, obtemos as equações

$$\begin{cases} n\lambda a_n - \sigma b_n + \sigma a_n &= 0 \\ n\lambda b_n - \rho a_n + b_n + (a*c)_n &= 0 \\ n\lambda c_n + \beta c_n - (a*b)_n &= 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Assim, podemos definir o operador $F : \ell \times \ell \times \ell \to \ell \times \ell \times \ell$ simplesmente usando as equações acima. De fato, fazendo

$$F(a,b,c) = \begin{bmatrix} F_1(a,b,c) \\ F_2(a,b,c) \\ F_3(a,b,c) \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

onde

$$(F_1(a,b,c))_k = \begin{cases} a_0 - p_x, & k = 0 \\ a_1 - v_x, & k = 1 \\ n\lambda a_n - \sigma b_n + \sigma a_n, & k > 1 \end{cases} \tag{4.17}$$

$$(F_2(a,b,c))_k = \begin{cases} b_0 - p_y, & k = 0 \\ b_1 - v_y, & k = 1 \\ n\lambda b_n - \rho a_n + b_n + (a * c)_n, & k > 1 \end{cases} \tag{4.18}$$

$$(F_3(a,b,c))_k = \begin{cases} c_0 - p_z, & k = 0 \\ c_1 - v_z, & k = 1 \\ n\lambda c_n + \beta c_n - (a * b)_n, & k > 1 \end{cases} \tag{4.19}$$

cujas projeções de Garlekin são facilmente definidas, basta truncar em certo grau $m > 0$.

Esse formato possibilita determinar as seguintes variedades um-dimensionais dos pontos de equilíbrio na Figura 9 e o perfil das soluções pode ser observado na Figura 10.

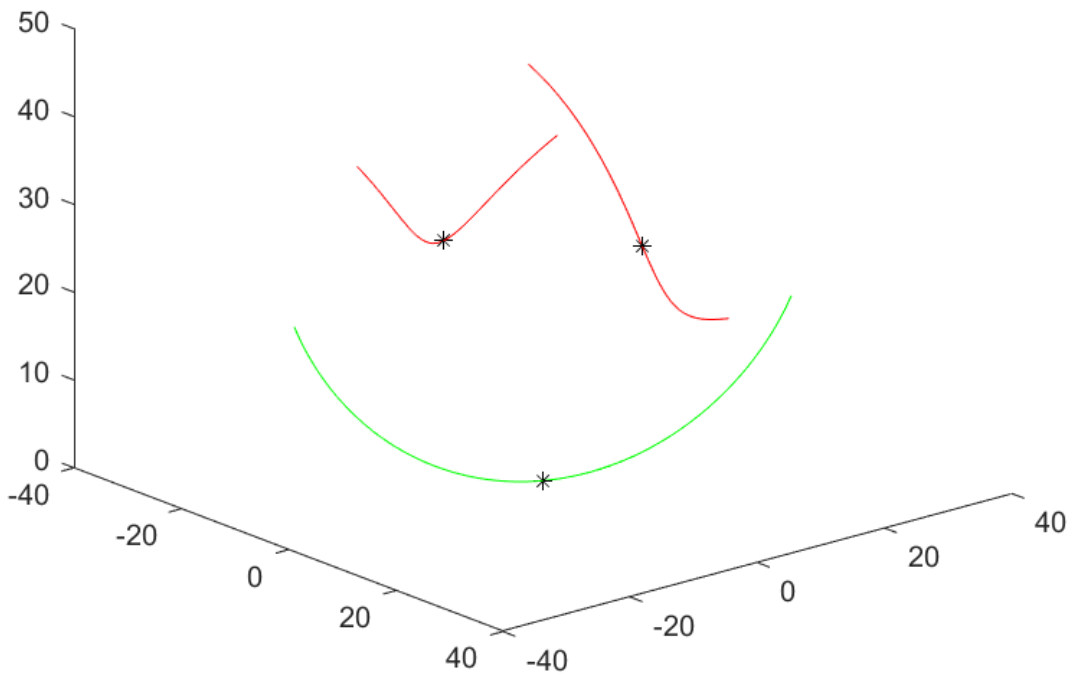

Figura 9 – Variedades estáveis dos pontos de equilíbrio simétricos em vermelho e variedade instável da origem em verde.

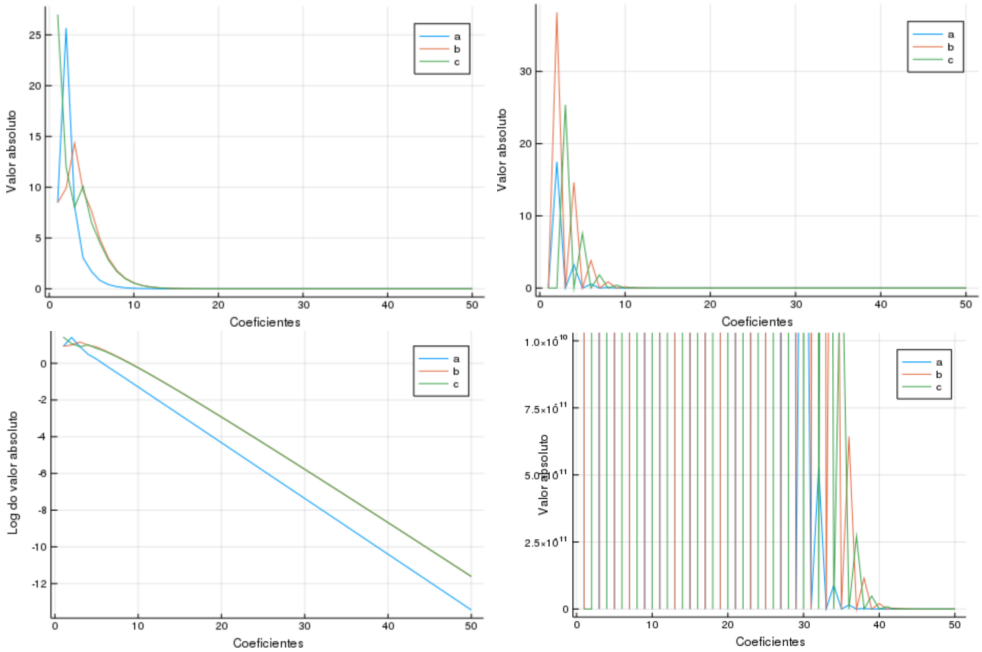

Figura 10 – Gráficos superiores descrevem o decaimento total dos coeficientes de uma variedade estável e instável. Abaixo, um gráfico em escala log e um reescalado respectivamente.

4.4 Computação Rigorosa

Conforme apresentado na introdução, buscamos estimativas que satisfaçam o Teorema 2 que requer Y_0, Z_0, Z_1, Z_2 tais que

$$\begin{aligned} \|AF(\overline{u})\|_X &\leq Y_0 \\ \|I - AA^\dagger\| &\leq Z_0 \\ \|A[DF(\overline{u}) - A^\dagger]\| &\leq Z_1 \\ \|A[DF(b) - DF(\overline{u})]\| &\leq Z_2 r, \quad \forall b \in \overline{B}_r(\overline{u}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

onde $\overline{u} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ é uma aproximação numérica de $F = [F_1, F_2, F_3]$ e A é uma aproximação do inverso da derivada em $\overline{u}$. Nesse formato, temos

$$D_a F_1(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2\lambda + \sigma & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n\lambda + \sigma & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, D_b F_1(a,b,c) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -\sigma & & & \\ & & & -\sigma & & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

$$D_aF_2(a,b,c)=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ c_n & c_{n-1} & \dots & & c_0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, D_bF_2(a,b,c)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2\lambda+1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n\lambda+1 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

$$D_cF_2(a,b,c)=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ a_n & a_{n-1} & \dots & & a_0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, D_aF_3(a,b,c)=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ -b_n & -b_{n-1} & \dots & & -b_0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.23}$$

$$D_bF_3(a,b,c)=\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ -a_2 & -a_1 & -a_0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, D_cF_3(a,b,c)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 2\lambda+\beta & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n\lambda+\beta & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Finalmente, faça

$$DF(a,b,c)=\begin{bmatrix} D_aF_1 & D_bF_1 & D_cF_1 \\ D_aF_2 & D_bF_2 & D_cF_2 \\ D_aF_3 & D_bF_3 & D_cF_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} DF_{1,1} & DF_{1,2} & DF_{1,3} \\ DF_{2,1} & DF_{2,2} & DF_{3,3} \\ DF_{3,1} & DF_{3,2} & DF_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

Dada uma solução numérica para a projeção, defina $A^\dagger$ de maneira análoga aos casos anteriores. Definimos completando com zero quando necessário os seguintes operadores bloco-a-bloco

$$A^\dagger_{i,j}=\begin{cases} \begin{bmatrix} DF_{i,i}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)} & & & \\ & m\lambda & & \\ & & (m+1)\lambda & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, & \text{se } i=j=1,2,3 \\ DF_{i,j}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)}, & \text{se } i\neq j \end{cases} \tag{4.26}$$

e A por

$$A_{i,j} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \left(DF_{i,i}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)}\right)^{-1} & & & \\ & \frac{1}{m\lambda} & & \\ & & \frac{1}{(m+1)\lambda} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, & \text{se } i = j = 1,2,3 \\ \left(DF_{i,j}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)}\right)^{-1}, & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{4.27}$$

Assim, defina com tal A o operador do tipo Newton

$$T(x) = x - AF(x), \tag{4.28}$$

e determine as estimativas que satisfaçam a condição de contração.

4.4.1 Estimativa Y_0

Defina $Y_0 = \max |AF(\overline{u})|$, pois

$$\|AF(\overline{u})\|_\infty = \left\| \left(\sum_i A_{j,i} F_i(\overline{u}) \right)_j \right\|_\infty \tag{4.29}$$

$$\leq \max_j \left| \sum_i A_{j,i} F_i(\overline{u}) \right| = Y_0 \tag{4.30}$$

satisfaz o Teorema 2.

4.4.2 Estimativa Z_0

Defina

$$Z_0 = \left\| \left((I - AA^\dagger)(1,\ldots,1)^T \right)_{1 \leq j \leq m} \right\|_\infty, \tag{4.31}$$

pois o operador se resume a uma ação em parte finita dada por

$$I - AA^\dagger = \begin{bmatrix} I_m - \left(DF_{i,j}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)}\right)^{-1} DF_{i,j}(\overline{a},\overline{b},\overline{c})^{(m)} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Logo, $\|I - AA^\dagger\| \leq Z_0$.

4.4.3 Estimativa Z_1

Defina

$$Z_1 = \frac{\max\left\{\sigma, 1 + \sum|\overline{c}_n| + \sum|\overline{a}_n|, \beta + \sum|\overline{b}_n| + \sum|\overline{a}_n|\right\}}{m|\lambda|}. \tag{4.33}$$

De fato, precisamos que $\|A[DF(\overline{u})-A^{\dagger}]\| \leq Z_1$. Note que

$$DF(\overline{u})-A^{\dagger} = \left[\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & 0 & 0 \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ \hline B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{array}\right] \tag{4.34}$$

onde

$$B_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, B_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, B_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \beta & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

e

$$B_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & c_{m-1} & \dots & c_0 & & \\ 0 & 0 & c_{m-1} & \dots & c_0 & \\ & & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}, B_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & a_{m-1} & \dots & a_0 & & \\ 0 & 0 & a_{m-1} & \dots & a_0 & \\ & & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4.36}$$

$$B_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & -b_{m-1} & \dots & -b_0 & & \\ 0 & 0 & -b_{m-1} & \dots & -b_0 & \\ & & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix} \text{ e } B_{3,2} = -B_{2,3}. \tag{4.37}$$

Se (x,y,z) é uma tripla de sequências em $(\ell_\infty)^3$ na bola unitária em torno da origem, então

$$\begin{aligned} (DF(\overline{u})-A^{\dagger})(x,y,z) &= \left[\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & 0 & 0 \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ \hline B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0,\dots,0,\sigma x_m,\dots) \\ (0,\dots,0,(\overline{c}*x)_m + y_m + (\overline{a}*z)_m,\dots) \\ (0,\dots,0,-(\overline{b}*x)_m - (\overline{a}*y)_m + \beta z_m,\dots) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e temos, portanto,

$$A(DF(\overline{u})-A^{\dagger})[x,y,z]^T = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1,1}x \\ B_{2,1}x + B_{2,2}y + B_{2,3}z \\ B_{3,1}x + B_{3,2}y + B_{3,3}z \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

$$= \begin{bmatrix} (0,\dots,0,\frac{\sigma x_m}{m\lambda},\dots) \\ (0,\dots,0,\frac{(\overline{c}*x)_m + y_m + (\overline{a}*z)_m}{m\lambda},\dots) \\ (0,\dots,0,\frac{-(\overline{b}*x)_m - (\overline{a}*y)_m + \beta z_m}{m\lambda},\dots) \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

Note que

$$\left\|\left(0,\dots,0,\frac{\sigma x_m}{m\lambda},\dots\right)\right\|_\infty \leq \frac{\sigma}{m|\lambda|} \leq Z_1,$$
$$\left\|\left(0,\dots,0,\frac{(\overline{c}*x)_m+y_m+(\overline{a}*z)_m}{m\lambda},\dots\right)\right\|_\infty \leq \frac{1+\sum|\overline{c}_n|+\sum|\overline{a}_n|}{m|\lambda|} \leq Z_1,$$
$$\left\|\left(0,\dots,0,\frac{-(\overline{b}*x)_m-(\overline{a}*y)_m+\beta z_m}{m\lambda},\dots\right)\right\|_\infty \leq \frac{\beta+\sum|\overline{b}_n|+\sum|\overline{a}_n|}{m|\lambda|} \leq Z_1.$$

O que propõe a estimativa inicial, já que a norma de $A[DF(\overline{u})-A^\dagger]$ é menor do que a maior das três quantidades acima.

4.4.4 Estimativa Z_2

Defina

$$\begin{aligned}
Z_2^{(1)} &= \|A_{1,2}\|+\|A_{1,3}\| \\
Z_2^{(2)} &= \max\left\{\|A_{2,2}^{(m)}\|,\frac{1}{m|\lambda|}\right\}+\|A_{2,3}\| \\
Z_2^{(3)} &= \|A_{3,2}\|+\max\left\{\|A_{3,3}^{(m)}\|,\frac{1}{m|\lambda|}\right\}
\end{aligned}$$

e, finalmente,

$$Z_2 = 2\max_i\left\{Z_2^{(i)}\right\} \tag{4.40}$$

De fato, precisamos que $\|A[DF(u)-DF(\overline{u})]\| \leq Z_2 r$ para $u=(a,b,c)$ numa bola de raio r em torno de $\overline{u}=(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$. Note que

$$\begin{aligned}
DF(u)-DF(\overline{u}) &= \begin{bmatrix} DF(u)_{1,1}-DF(\overline{u})_{1,1} & DF(u)_{1,2}-DF(\overline{u})_{1,2} & DF(u)_{1,3}-DF(\overline{u})_{1,3} \\ DF(u)_{2,1}-DF(\overline{u})_{2,1} & DF(u)_{2,2}-DF(\overline{u})_{2,2} & DF(u)_{2,3}-DF(\overline{u})_{2,3} \\ DF(u)_{3,1}-DF(\overline{u})_{3,1} & DF(u)_{3,2}-DF(\overline{u})_{3,2} & DF(u)_{3,3}-DF(\overline{u})_{3,3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ DF(u)_{2,1}-DF(\overline{u})_{2,1} & 0 & DF(u)_{2,3}-DF(\overline{u})_{2,3} \\ DF(u)_{3,1}-DF(\overline{u})_{3,1} & DF(u)_{3,2}-DF(\overline{u})_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_{2,1} & 0 & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Se (x,y,z) é uma tripla de sequências em $(\ell_\infty)^3$ na bola unitária em torno da origem, teremos

$$
\begin{aligned}
(DF(u)-DF(\overline{u}))[x,y,z]^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2,1}x+C_{2,3}z \\ C_{3,1}x+C_{3,2}y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (0,0,(x*(c-\overline{c}))_2,\dots)+(0,0,(z*(a-\overline{a}))_2,\dots) \\ -(0,0,(x*(b-\overline{b}))_2,\dots)-(0,0,(y*(a-\overline{a}))_2,\dots) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
A(DF(u)-DF(\overline{u}))[x,y,z]^T &= \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C_{2,1}x+C_{2,3}z \\ C_{3,1}x+C_{3,2}y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A_{1,2}\,(C_{2,1}x+C_{2,3}z)+A_{1,3}\,(C_{3,1}x+C_{3,2}y) \\ A_{2,2}\,(C_{2,1}x+C_{2,3}z)+A_{2,3}\,(C_{3,1}x+C_{3,2}y) \\ A_{3,2}\,(C_{2,1}x+C_{2,3}z)+A_{3,3}\,(C_{3,1}x+C_{3,2}y) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

onde, para $i=1,3$, teremos

$$
\begin{aligned}
A_{i,2}\,(C_{2,1}x+C_{2,3}z) &= \begin{bmatrix} \left(DF(\overline{u})_{i,2}^{(m)}\right)^{-1} & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x*(c-\overline{c}))_2+(z*(a-\overline{a}))_2 \\ \vdots \\ (x*(c-\overline{c}))_{m-1}+(z*(a-\overline{a}))_{m-1} \\ (x*(c-\overline{c}))_m+(z*(a-\overline{a}))_m \\ \vdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(DF(\overline{u})_{i,2}^{(m)}\right)^{-1} & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x*(c-\overline{c}))_2+(z*(a-\overline{a}))_2 \\ \vdots \\ (x*(c-\overline{c}))_{m-1}+(z*(a-\overline{a}))_{m-1} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

enquanto para $i = 2$,

$$A_{2,2}\left(C_{2,1}x+C_{2,3}z\right) = \begin{bmatrix} \left(DF(\overline{u})_{i,2}^{(m)}\right)^{-1} & & \\ & \frac{1}{m\lambda} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x*(c-\overline{c}))_2+(z*(a-\overline{a}))_2 \\ \vdots \\ (x*(c-\overline{c}))_{m-1}+(z*(a-\overline{a}))_{m-1} \\ (x*(c-\overline{c}))_m+(z*(a-\overline{a}))_m \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(DF(\overline{u})_{i,2}^{(m)}\right)^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x*(c-\overline{c}))_2+(z*(a-\overline{a}))_2 \\ \vdots \\ (x*(c-\overline{c}))_{m-1}+(z*(a-\overline{a}))_{m-1} \\ \frac{(x*(c-\overline{c}))_m+(z*(a-\overline{a}))_m}{m\lambda} \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

O análogo é utilizado em $A_{i,3}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}y\right)$ com $i = 1,2$ e $i = 3$ separadamente. Dessa forma, pelos dois desenvolvimentos anteriores, temos

$$\begin{aligned} \|A_{1,2}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}z\right)+A_{1,3}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}y\right)\|_\infty &\leq \|A_{1,2}\|\|(a-\overline{a})+(c-\overline{c})\|+\|A_{1,3}\|\|(a-\overline{a})+(b-\overline{b})\| \\ &\leq \|A_{1,2}\|2r+\|A_{1,3}\|2r \\ &= 2r\left(\|A_{1,2}\|+\|A_{1,3}\|\right) \\ &\leq Z_2 r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_{2,2}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}z\right)+A_{2,3}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}y\right)\|_\infty &\leq \max\left\{\|A_{2,2}^{(m)}\|, \frac{1}{m|\lambda|}\right\}\|(a-\overline{a})+(c-\overline{c})\| \\ &\quad +\|A_{2,3}\|(a-\overline{a})+(b-\overline{b})\| \\ &\leq M_2 2r+\|A_{2,3}\|2r \\ &= 2r\left(M_2+\|A_{2,3}\|\right) \\ &\leq Z_2 r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A_{3,2}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}z\right)+A_{3,3}\left(C_{3,1}x+C_{3,2}y\right)\|_\infty &\leq \|A_{3,2}\|\|(a-\overline{a})+(c-\overline{c})\| \\ &\quad +\max\left\{\|A_{3,3}^{(m)}\|, \frac{1}{m|\lambda|}\right\}\|(a-\overline{a})+(b-\overline{b})\| \\ &\leq \|A_{3,2}\|2r+M_3 2r \\ &= 2r\left(\|A_{3,2}\|+M_3\right) \\ &\leq Z_2 r \end{aligned}$$

4.4.5 Raio de convergência via Polinômios Radiais

A seguir, destacamos os raios em que o operator T definido é uma contração e garante a existência e unicidade da solução.

Ponto de Equilíbrio	m	Intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$
Origem	50	$[6.7738 \times 10^{-13}, 0.3709227]$
Olho 1	50	$[3.8888 \times 10^{-13}, 0.2550928]$
Olho 2	50	$[4.0001 \times 10^{-13}, 0.1897546]$

Tabela 3 – Ordem da aproximação numérica e raio da bola que garante a contração nos pontos destacados.

4.5 Sistema de Lorenz: 2D-Variedades estáveis/instáveis

Supondo que existam dois autovalores com parte real negativa λ_1, λ_2 e seus autovetores associados v_1, v_2, podemos reescrever o operador descrito acima para uma série de potências

$$P(t_1, t_2) = \sum \alpha_{i,j} t_1^i t_2^j, \tag{4.41}$$

onde $\alpha_{i,j} = (a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j})$ e o operador $F = [F1, F2, F3]$ é dado por

$$F_1(a,b,c)_{i,j} = \begin{cases} a_{0,0} - p_x, & i = j = 0, \\ a_{1,0} - v_{1,x}, & i = 1, j = 0, \\ a_{0,1} - v_{2,x}, & i = 0, j = 1, \\ (n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)\, a_{i,j} - \sigma(b_{i,j} - a_{i,j}), & i + j \geq 2. \end{cases} \tag{4.42}$$

$$F_2(a,b,c)_{i,j} = \begin{cases} b_{0,0} - p_y, & i = j = 0, \\ b_{1,0} - v_{1,y}, & i = 1, j = 0, \\ b_{0,1} - v_{2,y}, & i = 0, j = 1, \\ (n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)\, b_{i,j} - \rho a_{i,j} + b_{i,j} - (a * c)_{i,j}, & i + j \geq 2. \end{cases} \tag{4.43}$$

$$F_3(a,b,c)_{i,j} = \begin{cases} c_{0,0} - p_z, & i = j = 0, \\ c_{1,0} - v_{1,z}, & i = 1, j = 0, \\ c_{0,1} - v_{2,z}, & i = 0, j = 1, \\ (n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2)\, c_{i,j} + \beta(c_{i,j}) - (a * b)_{i,j}, & i + j \geq 2. \end{cases} \tag{4.44}$$

Se fizermos o truncamento e resolvermos até um certo grau $m = 50$ ou $m = 30$, obtemos as seguintes soluções do operador que aparecem na Figura 11.

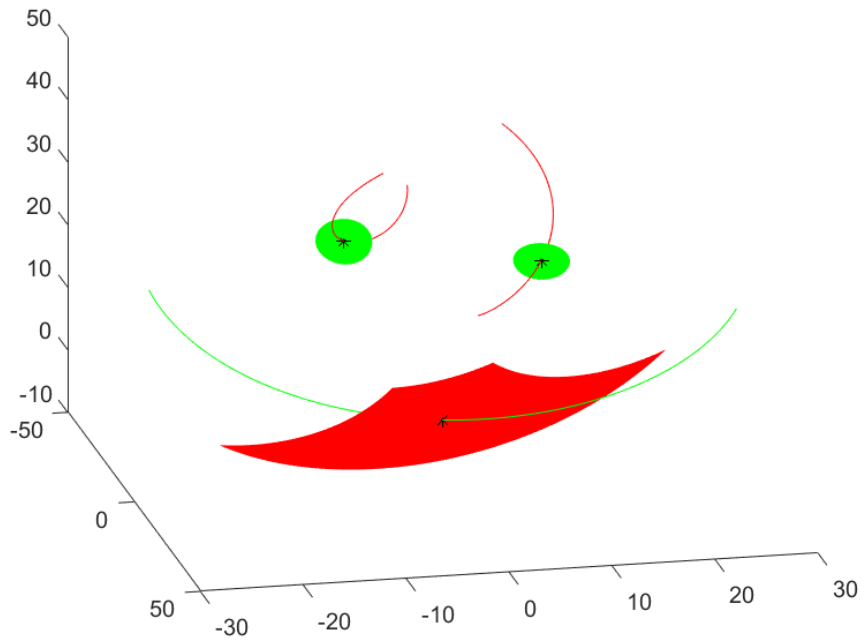

Figura 11 – 2-Variedade estável em vermelho ($m = 50$) e 2-variedades instáveis em verde ($m = 30$).

4.6 Computação Rigorosa

Análogo ao caso 1-dimensional, usaremos o Teorema 2 que requer Y_0, Z_0, Z_1, Z_2 tais que

$$\begin{aligned} \|AF(\overline{u})\|_X &\leq Y_0 \\ \|I - AA^{\dagger}\| &\leq Z_0 \\ \|A[DF(\overline{u}) - A^{\dagger}]\| &\leq Z_1 \\ \|A[DF(b) - DF(\overline{u})]\| &\leq Z_2 r, \quad \forall b \in \overline{B}_r(\overline{u}) \end{aligned} \tag{4.45}$$

onde A é uma aproximação do inverso da derivada na aproximação numérica $\overline{u} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ de $F = [F_1, F_2, F_3]$. Primeiro, é importante reordenar a variável e o operador da seguinte forma para esclarecer as estimativas:

$$a = (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \ldots, a_{n,0}, a_{n-1,1}, \ldots, a_{1,n-1}, a_{0,n}, \ldots), \tag{4.46}$$

e

$$F_1(a,b,c) = \begin{bmatrix} a_{0,0} - p \\ a_{1,0} - v_{1,x} \\ a_{0,1} - v_{2,x} \\ \vdots \\ n\lambda_1 a_{n,0} - \sigma(b_{n,0} - a_{n,0}) \\ ((n-1)\lambda_1 + 1\lambda_2)\, a_{n-1,1} - \sigma(b_{n-1,1} - a_{n-1,1}) \vdots \\ n\lambda_2 a_{0,n} - \sigma(b_{0,n} - a_{0,n}) \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{4.47}$$

Defina

$$Y_0 = \|AF(\overline{u})\|_\infty, \tag{4.48}$$

$$Z_0 = \|(I - AA^\dagger)(1,\ldots,1)^T\|_\infty, \tag{4.49}$$

$$Z_1 = \frac{\max\left\{\sigma, 1 + \sum|\overline{c}_{ij}| + \sum|\overline{a}_{ij}|, \beta + \sum|\overline{c}_{ij}| + \sum|\overline{a}_{ij}|\right\}}{\min_{n_1+n_2=m}|n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2|}, \tag{4.50}$$

$$Z_2 = 2\max\left\{Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, Z_2^{(3)}\right\}, \tag{4.51}$$

onde os $Z_2^{(i)}$ são definidos de forma análoga ao caso 1-dimensional, exceto pela substituição de $1/m|\lambda|$ por

$$\frac{1}{|n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2|}, \quad n_1 + n_2 = m. \tag{4.52}$$

Com essas estimativas, destacamos os raios em que o operator T definido por $T(x) = x - AF(x)$ é uma contração e garante a existência e unicidade da solução.

Ponto de Equilíbrio	m	Intervalo $[r_{\min}, r_{\max}]$
Origem	50	$[2.3223 \times 10^{-09}, 0.0312352]$
Olho 1	30	$[5.0001 \times 10^{-14}, 0.234556]$
Olho 2	30	$[4.7338 \times 10^{-14}, 0.262254]$

Tabela 4 – Ordem da aproximação numérica e raio da bola que garante a contração nos pontos destacados.

REFERÊNCIAS

BERG, J. B. van den; JAMES, J. D. M.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Rigorous numerics for symmetric connecting orbits: Even homoclinics of the gray–scott equation. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 43, n. 4, p. 1557–1594, 2011. Citado na página 18.

BERG, J. B. van den; JAMES, J. D. M.; REINHARDT, C. Computing (un)stable manifolds with validated error bounds: non-resonant and resonant spectra. **Journal of Nonlinear Science**, Springer, v. 26, n. 4, p. 1055–1095, 2016. Citado na página 18.

BERG, J. B. van den; LESSARD, J.-P. (Ed.). **Rigorous Numerics in Dynamics**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2018. Citado na página 18.

BERG, J. B. van den; SHEOMBARSING, R. Rigorous numerics for ordinary differential equations using chebyshev series and domain decomposition. **preprint**, 2016. Citado na página 18.

BREDEN, M.; LESSARD, J.-P.; JAMES, J. D. M. Computation of maximal local (un)stable manifold patches by the parameterization method. **Indagationes Mathematicae**, v. 27, n. 1, p. 340–367, 2016. Citado na página 18.

CABRE, X.; FONTICH, E.; LLAVE, R. D. L. The parameterization method for invariant manifolds iii: overview and applications. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 218, n. 2, p. 444–515, 2005. Citado nas páginas 48 e 49.

GAMEIRO, M.; BERG, J. B. van den; JAMES, J. D. M.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. **Ordinary Differential Equations: A Constructive Approach**. [S.l.: s.n.], 2019. Citado nas páginas 42, 43 e 45.

GAMEIRO, M.; LESSARD, J.-P. A posteriori verification of invariant objects of evolution equations: Periodic orbits in the kuramoto–sivashinsky partial differential equation. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 16, n. 1, p. 687–728, 2017. Citado nas páginas 18 e 21.

HORMANDER, L. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003. Citado nas páginas 33 e 41.

HUNGRIA, A.; LESSARD, J.-P.; JAMES, J. D. M. Rigorous numerics for analytic solutions of differential equations: the radii polynomial approach. **Mathematics of Computation**, v. 85, n. 299, p. 1427–1459, 2016. Citado na página 18.

KALIES, W. D.; KEPLEY, S.; JAMES, J. D. M. Analytic continuation of local (un)stable manifolds with rigorous computer assisted error bounds. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, SIAM, v. 17, n. 1, p. 157–202, 2018. Citado na página 18.

LESSARD, J.-P.; JAMES, J. M.; HUNGRIA, A. Rigorous numerics for analytic solutions of differential equations: The radii polynomial approach. **Mathematics of Computation**, v. 85, 2015. Citado na página 18.

LESSARD, J.-P.; JAMES, J. M.; RANSFORD, J. Automatic differentiation for fourier series and the radii polynomial approach. **Physica D Nonlinear Phenomena**, v. 334, p. 174–186, 2016. Citado na página 18.

LESSARD, J.-P.; REINHARDT, C. Rigorous numerics for nonlinear differential equations using chebyshev series. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 52, n. 1, p. 1–22, 2014. Citado nas páginas 18 e 38.

ORTEGA, J. M. The newton-kantorovich theorem. **Amer. Math. Monthly**, v. 75, p. 658–660, 1968. Citado na página 21.

TUCKER, W. **Validated numerics: a short introduction to rigorous computations**. [S.l.]: Princeton University Press, 2011. Citado na página 17.

ICMC USP
SÃO CARLOS