Teoremas de (H,G) -coincidências para variedades
e classificação global de singularidades isoladas
em dimensões $(6,3)$

Taciana Oliveira Souza

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Teoremas de (H,G) -coincidências para variedades e classificação global de singularidades isoladas em dimensões $(6,3)$

Taciana Oliveira Souza

***Orientadora:* Profa. Dra. Denise de Mattos**

***Co-orientador:* Prof. Dr. Louis Funar**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação - ICMC-USP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutor em
Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*.

USP – São Carlos
Maio de 2013

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S719t Souza, Taciana Oliveira
Teoremas de (H,G) -coincidências para variedades
e classificação global de singularidades isoladas em
dimensões $(6,3)$ / Taciana Oliveira Souza;
orientadora Denise de Mattos; co-orientador Louis
Funar. -- São Carlos, 2013.
90 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Teorema de Borsuk-Ulam. 2. (H,G) -
coincidência. 3. Fibrados. 4. Singularidades
isoladas. 5. Fibrção de Milnor real. I. de Mattos,
Denise, orient. II. Funar, Louis, co-orient. III.
Título.

*“Adieu, dit le renard. Voici mon secret. Il est très simple:
on ne voit bien qu’avec le coeur. L’essentiel est invisible
pour les yeux.”*

Le Petit Prince

Antoine de Saint-Exupéry

*Aos meus pais
Maria da Graça e
Silvio (in memoriam)*

Agradecimentos

No final desta jornada gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todos que me ajudaram a realizar este sonho.

A Deus, Pai amoroso, que me sustentou nos momentos difíceis, guiando e abençoando meus passos.

Aos meus pais, Maria da Graça e Silvio, que sempre me incentivaram a estudar, pela vida e pelas lições de amor e humildade.

À minha orientadora Profa. Dra. Denise de Mattos, pelos conhecimentos transmitidos, por sua orientação dedicada, pela paciência e amizade.

Aos Professores Doutores Edivaldo Lopes dos Santos e Raimundo Nonato Araújo dos Santos, por todas as contribuições que foram, sem dúvida, essências para a conclusão deste trabalho.

Ao meu co-orientador Prof. Dr. Louis Funar, pela oportunidade de viver um ano na França, estudando no Instituto Fourier na Universidade de Grenoble I, essa oportunidade contribuiu imensamente para o meu amadurecimento.

À Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, pela amizade, incentivos e pelos dias agradáveis que a sua companhia em Grenoble me proporcionou.

Ao meu querido Aldicio, por seu amor, dedicação e apoio.

Aos meus amigos de pós-graduação, pela convivência que produziu inúmeros momentos agradáveis. Em especial, à Ana Paula pela grande amizade.

Ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP como um todo, professores e funcionários, pela oportunidade e apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho é constituído por duas partes. Na primeira parte, obtivemos algumas generalizações do clássico Teorema de Borsuk-Ulam em termos de (H, G) -coincidências. Na segunda parte, estendemos a caracterização dos germes de aplicações triviais, em codimensão 3, pelas fibrações de Milnor iniciada por Church e Lamotke em [11]. Usamos essa caracterização na classificação global de singularidades isoladas em dimensões $(6, 3)$.

Abstract

This work consists of two parts. In the first part, we obtain some generalizations of the classical Borsuk-Ulam Theorem in terms of (H, G) -coincidences. In the second part, we extend the characterization of trivial map germs, in codimension 3, by the Milnor fibrations started by Church and Lamotke in [11]. We use this characterization in the global classification of isolated singularities in dimensions $(6, 3)$.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	9
1.1 Fibrados	9
1.1.1 G -Fibrados principais	12
1.1.2 Espaços Classificantes	14
1.1.3 Fibrados vetoriais	15
1.1.4 Fibrações	16
1.2 Potências e Quadrados de Steenrod	17
1.3 Transversalidade	19
1.4 O Teorema da Fibração de Ehresmann	20
2 Teoremas de (H, G)-coincidências para variedades	21
2.1 O $\mathbb{Z}_p$ -índice de um espaço X	24
2.2 As classes de Wu	24
2.3 As classes de Wu do produto de variedades	26
2.4 Demonstração dos teoremas principais	31
2.4.1 Demonstração do Teorema 2.1 e suas consequências . . .	33
2.4.2 Demonstração do Teorema 2.3	36
3 Estimando a dimensão do conjunto das $(H, \mathbb{Z}_{p^k})$-coincidências	39
3.1 Versões Bourgin-Yang do Teorema de Borsuk-Ulam para $G = \mathbb{Z}_{p^k}$	42
3.2 Demonstração dos teoremas principais	43
4 Caracterização de aplicações triviais pelas fibras reais de Milnor	47

4.1	Fibrações de Milnor	47
4.2	Resultados sobre a topologia das variedades 3-dimensionais . . .	54
4.3	A demonstração do resultado principal	57
4.3.1	O caso $(6, 3)$	58
4.3.2	O caso $(8, 5)$	59
4.4	Classificação de singularidades com link conexo no caso $(6, 3)$. .	60
5	Apêndice	65
5.1	Teoria de (co)homologia com coeficientes em um feixe	65
5.2	Cohomologia com coeficientes em um feixe	74
5.3	Produtos cup e cross	75
5.3.1	Homomorfismo induzido em cohomologia	78
5.3.2	Produto cup	79
5.3.3	Produto cross	81
5.4	A seqüência exata de Künneth	82
5.5	A cohomologia de Čech	84
	Bibliografia	87

Introdução

Este trabalho é constituído por duas partes. Na primeira parte, formada pelos Capítulos 2 e 3, obtemos generalizações do clássico teorema de *Borsuk-Ulam*, em termos de (H, G) -coincidências. Na segunda parte, formada pelo Capítulo 4, caracterizamos germes de aplicações polinomiais triviais, em codimensão 3, pelas *fibrações de Milnor*. A seguir, apresentamos cada uma das partes que compõem o trabalho.

Teoremas de (H, G) -coincidências para variedades

O clássico Teorema de Borsuk-Ulam [6] afirma que toda função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma esfera n -dimensional S^n para um espaço Euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$, colapsa ao menos um par de pontos antípodas, isto é, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Este resultado foi primeiro conjecturado por Stanislaw Ulam e provado por Karol Borsuk, em 1933. Desde então, várias e diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste célebre teorema têm sido publicadas.

No Capítulo 2, consideramos formulações do Teorema de Borsuk-Ulam para variedades em termos das chamadas (H, G) -coincidências, como segue. Sejam G um grupo finito agindo livremente sobre um espaço topológico X e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos X e Y . Se H é um subgrupo de G , então H age à esquerda sobre cada órbita Gx de $x \in X$ como segue: se $y \in Gx$ e $y = gx$, onde $g \in G$, então $h \cdot y = gh^{-1}x$. Um ponto $x \in X$ é chamado um ponto de (H, G) -coincidência de f (como introduzido por Gonçalves, Pergher e Jaworowski em [20]) se f aplica cada órbita da ação de H sobre a G -órbita de x em um único ponto. É claro que, se H é o subgrupo trivial, então todo ponto de X é um ponto de (H, G) -coincidência de f . Se $H = G$,

essa é a definição usual de G -coincidência, ou seja, $f(x) = f(gx)$, para todo $g \in G$. Denotamos por $A(f, H, G)$ o conjunto dos pontos de (H, G) -coincidência de f e observamos que quando $H = G$, $A(f, H, G) = A(f)$ é o conjunto das G -coincidências de f .

Teoremas do tipo Borsuk-Ulam consistem em estimar a dimensão cohomológica do conjunto $A(f, H, G)$. Duas principais direções consideradas deste problema são quando o espaço Y é uma variedade ou um CW-complexo.

Na primeira direção, estão os trabalhos de Borsuk [6] (o teorema clássico de Borsuk-Ulam, para $H = G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^n$ e $Y = \mathbb{R}^n$), Conner e Floyd [12] (para $H = G = \mathbb{Z}_2$ e Y uma n -variedade), Munkholm [37] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$), Nakaoka [38] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, X sob certas condições (co)homológicas e Y uma m -variedade) e a seguinte versão mais geral provada por Volovikov [46], usando o índice de um $\mathbb{Z}_p$ -espaço livre X ($\text{ind } X$, vide Definição 2.5).

Teorema A. [46, Teorema 1.2] *Sejam X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço livre paracompacto Hausdorff com $\text{ind } X \geq n$, e $f : X \rightarrow M$ uma função contínua de X em uma variedade m -dimensional conexa M (orientável se $p > 2$). Assuma que:*

- (1) $f^*(V_i) = 0$, para $i \geq 1$, onde V_i denotam as classes de Wu de M ; e
- (2) $n > m(p - 1)$.

Então, $\text{ind } A(f) \geq n - m(p - 1) > 0$.

Na segunda direção, estão os trabalhos de Izydorek e Jaworowski [27] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e Y um CW-complexo), Gonçalves e Pergher [19] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e Y um CW-complexo) e para um subgrupo próprio não trivial H de G , Gonçalves, Jaworowski e Pergher [20] (para $H = \mathbb{Z}_p$ subgrupo de um grupo finito G , X uma esfera de homotopia e Y um CW-complexo) e Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov [21] (para H subgrupo de um grupo finito G , X sob certas condições (co)homológicas e Y um CW-complexo).

Considerando $Y = M$ uma variedade e H um subgrupo próprio não trivial de um grupo finito G , demonstramos a seguinte formulação do Teorema de Borsuk-Ulam para variedades em termos de (H, G) -coincidências.

Teorema 2.1. *Sejam X um espaço paracompacto Hausdorff, G um grupo finito agindo livremente sobre X e H um subgrupo cíclico de G com ordem igual a um número primo p . Seja $f : X \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa, (orientável, se $p > 2$), tal que $f^*(V_i) = 0$, onde V_i denotam as classes de Wu de M , para $i \geq 1$. Suponhamos que $\text{ind } X \geq n > m(|G| - r)$, onde $r = \frac{|G|}{p}$. Então,*

$$\text{ind } A(f, H, G) \geq n - m(|G| - r) > 0.$$

Consequentemente,

$$\text{cohom.dim } A(f, H, G) \geq n - m(|G| - r) > 0.$$

O Teorema 2.1 generaliza, em termos de (H, G) -coincidências, o Teorema A obtido por Volovikov em [46]. Para o caso $n = m(|G| - r)$ e p um primo ímpar, se consideramos X uma n -esfera de homologia $\mod p$ no Teorema 2.1 (neste caso, a função contínua f pode ser arbitrária), de [38, Teorema 8] temos $A(f, H, G) \neq \emptyset$. Além disso, o Teorema 2.1 é uma versão para variedades do resultado principal devido a Gonçalves, Jaworowski e Pergher em [20].

Finalmente, demonstramos a seguinte versão, para variedades, do teorema não simétrico para (H, G) -coincidências obtido em [33, Teorema 1.1].

Teorema 2.3. *Sejam X um espaço compacto Hausdorff, G um grupo finito agindo livremente sobre S^n , H um subgrupo cíclico de G com ordem igual a um número primo p e $\varphi : X \rightarrow S^n$ uma aplicação essencial¹. Seja $f : X \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$), tal que $f^*(V_i) = 0$, onde V_i denotam as classes de Wu de M , para $i \geq 1$. Suponhamos que $n > m(|G| - r)$. Então,*

$$\text{cohom.dim } A_\varphi(f, H, G) \geq n - m(|G| - r),$$

onde $r = \frac{|G|}{p}$ e $A_\varphi(f, H, G)$ denota o conjunto dos pontos de (H, G) -coincidência de f relativo à aplicação essencial $\varphi : X \rightarrow S^n$ (vide Definição 2.15).

¹Uma função contínua $\varphi : X \rightarrow S^n$ é chamada uma aplicação essencial se φ induz homomorfismo não nulo

No Capítulo 3, consideramos uma representação ortogonal complexa (real) V do grupo $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, com primo $p > 2$ ($p = 2$) e $k \geq 1$, e uma função contínua $f : S(V) \rightarrow W'$ de uma esfera $S(V)$ em um espaço vetorial real W' . Estimamos a dimensão topológica do conjunto $A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k})$ das $(\mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k})$ -coincidências de f , para todo $1 \leq i \leq k$. Mais precisamente, demonstramos os seguintes

Teorema 3.3. *Sejam V uma representação ortogonal complexa do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, $p > 2$ primo, $k \geq 1$, tal que $V^G = \{0\}$ e W' um espaço vetorial real. Seja $f : S(V) \rightarrow W'$ uma função contínua.*

(1) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{k-1}}$, então para todo $1 \leq i \leq k$,*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) \geq 2 \left(\frac{d(V) - 1}{p^{k-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW'.$$

(2) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}}$, para algum $1 \leq i \leq k$, então*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) \geq 2 \left(\frac{d(V) - 1}{p^{i-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW'.$$

Teorema 3.4. *Sejam V uma representação ortogonal real do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{2^k}$, $k \geq 1$, tal que $V^G = \{0\}$ e W' um espaço vetorial real. Seja $f : S(V) \rightarrow W'$ uma função contínua.*

(1) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,2^{k-1}}$, então para todo $1 \leq i \leq k$,*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{2^i}, \mathbb{Z}_{2^k}) \geq \left(\frac{d(V) - 1}{2^{k-1}} \right) - (2^k - 2^{k-i})dW'.$$

(2) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,2^{i-1}}$, para algum $1 \leq i \leq k$, então*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{2^i}, \mathbb{Z}_{2^k}) \geq \left(\frac{d(V) - 1}{2^{i-1}} \right) - (2^k - 2^{k-i})dW'.$$

As demonstrações dos Teoremas 3.3 e 3.4 são baseadas em resultados recentes obtidos em [32].

Caracterização de aplicações triviais

No livro “Singular Points of Complex Hypersurfaces”, [35], John Willard Milnor estudou pontos singulares de hipersuperfícies complexas introduzindo um fibrado localmente trivial, conhecido como a *fibração de Milnor*, associado ao ponto singular. Ele demonstrou que existem tais fibrados localmente triviais associados a germes de funções holomorfas e também a germes de aplicações analíticas reais. Estamos especialmente interessados no caso real, no qual Milnor considerou uma aplicação polinomial real $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $n \geq p \geq 2$, com uma singularidade isolada na origem. O seguinte resultado encontra-se em [35, Teorema 11.2, pg. 97].

Teorema. *Existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para cada $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ existe η , com $0 < \eta \ll \epsilon$, satisfazendo a condição de que a aplicação*

$$f|_1 : f^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap B_\epsilon^n \rightarrow S_\eta^{p-1} \quad (1)$$

é a projeção suave de um fibrado localmente trivial, onde B_ϵ^n denota a bola fechada n -dimensional centrada na origem.

Em [35, pg. 100] Milnor fez a seguinte pergunta:

“Para quais dimensões $n \geq p \geq 2$ existem exemplos não triviais?”

Milnor não especificou precisamente o significado de uma “aplicação ser trivial”. Mas, em um certo sentido, ele propôs chamar uma aplicação polinomial f , com uma singularidade isolada na origem, “trivial” se a fibra F_f da sua fibração associada (1) é difeomorfa ao disco fechado $(n - p)$ -dimensional. Considerando esse conceito como uma definição, Church e Lamotke em [11], responderam a questão proposta por Milnor do seguinte modo.

Teorema. (a) *Para $0 \leq n - p \leq 2$, exemplos não triviais ocorrem precisamente para os pares de dimensões $(n, p) = (2, 2)$, $(4, 3)$ e $(4, 2)$.*

(b) *Para $n - p \geq 4$, exemplos não triviais ocorrem para todos os pares de dimensões (n, p) .*

(c) *Para $n - p = 3$, exemplos não triviais ocorrem para os pares $(5, 2)$ e $(8, 5)$.*

Além disso, se a conjectura de Poincaré (3-dimensional) for falsa, então existem exemplos não triviais para todos os pares de dimensões (n, p) . Se a conjectura de Poincaré for verdadeira, então todos os exemplos são triviais, exceto para os pares de dimensões $(5, 2)$, $(8, 5)$ e, possivelmente, para o par $(6, 3)$.

No Capítulo 4, com o auxílio de ferramentas da Topologia Algébrica, em especial, para a análise da topologia das variedades 3-dimensionais, em conjunto com a teoria de Singularidades, estendemos a caracterização de germes de aplicações polinomiais triviais iniciada por Church e Lamotke em [11], quando a fibra da fibração de Milnor tem dimensão três. Mais precisamente, demonstramos o seguinte

Teorema 4.8. [42, Teorema 1.6] *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem. Suponhamos que $n - p = 3$.*

(a) *Se o par é $(n, p) = (6, 3)$, então são equivalentes:*

- (i) *f é trivial;*
- (ii) $\deg_0(\nabla f_1) = 0$;
- (iii) *O link K_ϵ é conexo.*

(b) *Se o par é $(n, p) = (8, 5)$, então são equivalentes:*

- (i) *f é trivial;*
- (ii) $\deg_0(\nabla f_1) = 0$;
- (i) *O link K_ϵ é não vazio.*

(c) *Se o par é $(n, p) = (5, 2)$, então são equivalentes:*

- (i) *f é trivial;*
- (ii) $\pi_1(F_f) = 0$, *isto é, a fibra real de Milnor F_f é simplesmente conexa.*

Observação: A prova do caso $(5, 2)$ não será apresentada aqui, desde que um estudo detalhado deste caso está sendo desenvolvido no trabalho de doutorado em andamento de M. A. B. Hohlenwerger.

Finalmente, consideramos aplicações suaves $f : M^6 \rightarrow N^3$, entre variedades suaves e compactas de dimensões 6 e 3, respectivamente. Denotamos por $\varphi(M, N)$ o número mínimo de pontos críticos de tais aplicações. Quando existe uma aplicação $M^6 \rightarrow N^3$ com uma quantidade finita de pontos, todos conelike e com link conexo, o item (a) do Teorema 4.8 é uma das ferramentas que usamos na Proposição 4.23 para estimar $\varphi(M, N)$ e caracterizar a variedade M .

Os Capítulos 1 e 5 introduzem os conceitos e resultados preliminares necessários para o desenvolvimento e a compreensão de todo o texto.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos os conceitos e resultados preliminares necessários para o desenvolvimento e a compreensão dos capítulos seguintes.

1.1 Fibrados

Definição de fibrado: Um fibrado é uma quádrupla $\xi = (E, p, B, F)$, onde E , B e F são espaços topológicos e $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua e sobrejetora que satisfaz a “condição de trivialidade local” descrita abaixo.

Existe uma cobertura de B por abertos U_α , denominados *vizinhanças coordenadas*, e associado a cada aberto na cobertura temos um homeomorfismo

$$\phi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F,$$

o qual chamamos uma *aplicação coordenada*, tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times F \\ & \searrow p & \downarrow \pi_\alpha \\ & & U_\alpha \end{array} \quad (1.1)$$

ou seja, $\pi_\alpha \circ \phi_\alpha = p$, onde π_α é a projeção sobre U_α . Assim, localmente o espaço E “se parece” com um espaço produto.

O espaço E é chamado espaço total, B é chamado espaço base e F a fibra. A

comutatividade do diagrama (1.1) significa que ϕ_α leva cada fibra $p^{-1}(b)$ homeomorficamente sobre a cópia $\{b\} \times F$ de F , assim a denominação do espaço F como fibra se justifica.

A aplicação p é chamada aplicação fibrada ou projeção. O conjunto de todos os pares $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$ de vizinhanças coordenadas e suas aplicações coordenadas associadas é chamado uma *trivialização local* do fibrado. Geralmente letras gregas como $\xi, \eta, \omega \dots$ são usadas para denotar fibrados. Também é comum denotar um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ simplesmente por $p : E \rightarrow B$.

Exemplos de fibrados:

- 1) *O fibrado produto*: $\pi : B \times F \rightarrow B$, onde π denota a projeção sobre B .
- 2) *O fibrado restrição*: Considere um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ e um subconjunto $A \subset B$, então $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ é um fibrado, chamado *fibrado restrição* de E sobre A , o qual denotamos por $\xi|_A$.
- 3) *O produto de fibrados*: Considere dois fibrados $\xi_i = (E_i, p_i, B_i, F_i)$, $i = 1, 2$, então $p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ é um fibrado com fibra $F_1 \times F_2$, o qual denotamos por $\xi_1 \times \xi_2$.
- 4) *A soma direta de fibrados*: Considere dois fibrados $\xi_i = (E_i, p_i, B, F_i)$, $i = 1, 2$, com mesmo espaço base B . A restrição do fibrado $\xi_1 \times \xi_2$ sobre a diagonal $\{(b, b) \in B \times B\}$, a qual é homeomorfa a B , é um fibrado chamado *soma direta*, o qual denotamos por

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = (E_1 \oplus E_2, p_1 \oplus p_2, B, F_1 \oplus F_2).$$

A soma direta de fibrados é também denominada *a soma Whitney*.

- 5) *O fibrado induzido*: Sejam $\xi = (E, p, B, F)$ um fibrado e $f : B^* \rightarrow B$ uma aplicação contínua. O *fibrado induzido* de ξ por f , o qual denotamos por $f^*(\xi)$, tem como espaço base B^* e seu espaço total é definido como sendo o sub-espaço

$$f^*(E) = \{(b^*, x) \in B^* \times E : f(b^*) = p(x)\}.$$

A aplicação fibrada é dada pela projeção

$$p^* : f^*(E) \rightarrow B^*, \quad p^*(b^*, x) = b^*.$$

O fibrado induzido de ξ por f , $f^*(\xi) = (f^*(E), p^*, B^*, F)$ também é chamado o *pullback* de ξ por f .

Morfismo fibrado: Sejam $p : E \rightarrow B$ e $p' : E' \rightarrow B'$ dois fibrados com fibras F e F' , respectivamente. Um *morfismo fibrado* $(u, f) : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ é um par de aplicações contínuas $u : E \rightarrow E'$ e $f : B \rightarrow B'$ que satisfazem $p' \circ u = f \circ p$, isto é, o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array} \quad (1.2)$$

Um morfismo fibrado sobre B , $u : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B)$, também chamado um *B-morfismo*, é uma aplicação contínua $u : E \rightarrow E'$ tal que $p' \circ u = p$, isto é, o diagrama (1.2) é comutativo, considerando $f = id_B$ a identidade sobre B .

Isomorfismo fibrado: Um morfismo fibrado $(u, f) : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ é um *isomorfismo fibrado* se, e somente se, existe um morfismo fibrado

$$(u', f') : (E', p', B') \rightarrow (E, p, B)$$

tal que $f' \circ f = id_B$, $f \circ f' = id_{B'}$, $u' \circ u = id_E$ e $u \circ u' = id_{E'}$. Quando $B = B'$ dizemos que os fibrados são *B-isomorfos*.

Fibrado trivial: Um fibrado $\xi = (E, p, B, F)$ é chamado *trivial* se ξ é *B-isomorfo* ao fibrado produto $\pi : B \times F \rightarrow B$.

Fibrados localmente isomorfos: Dizemos que dois fibrados ξ e η sobre B são *localmente isomorfos* se, para cada $b \in B$ existe uma vizinhança aberta U de b tal que os fibrados $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são *U-isomorfos*. A relação de ser localmente isomorfo é uma relação de equivalência na classe de todos os fibrados sobre B .

Fibrado localmente trivial: Um fibrado ξ sobre B com fibra F é *localmente trivial* se ξ é localmente isomorfo ao fibrado produto $\pi : B \times F \rightarrow B$.

1.1.1 G -Fibrados principais

Um *grupo topológico* é um espaço de Hausdorff G junto com uma multiplicação contínua $G \times G \rightarrow G$, usualmente denotada pela justaposição $(g, l) \mapsto gl$, que torna G um grupo e tal que a função $g \mapsto g^{-1}$ de G em G é contínua. O elemento identidade de G será denotado por e (vide [7]).

Uma *ação à esquerda* de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , também chamada uma G -*ação à esquerda* de G sobre X , é uma função contínua $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ satisfazendo as seguintes condições,

(i) $g(lx) = (gl)x$, para todo $x \in X$ e para todo $g, l \in G$.

(ii) $ex = x$, para todo $x \in X$.

De maneira análoga define-se uma G -*ação à direita* $X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto xg$, de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X .

Um G -*espaço à esquerda* é um espaço de Hausdorff X junto com uma G -*ação à esquerda* de um grupo topológico G sobre X . Se X é um G -espaço à esquerda, podemos definir uma G -*ação à direita* $X \times G \rightarrow X$ de G sobre X por $(x, g) \mapsto xg = g^{-1}x$. Na verdade, existe uma correspondência bijetiva entre estruturas de G -espaços à esquerda e à direita, assim nos referimos a um G -espaço à esquerda (à direita) apenas como um G -espaço. Se X é um G -espaço, então o subespaço $Gx = [x] = \{gx \in X : g \in G\}$ é chamado a *órbita do ponto x pela ação de G* . Para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, as órbitas Gx e Gy são iguais ou são disjuntas. Denotaremos por X/G o conjunto de todas as órbitas Gx pela ação de G sobre X . Seja $\pi_X : X \rightarrow X/G$ a projeção canônica definida por $x \mapsto Gx$. O espaço quociente X/G , munido da topologia quociente induzida por π_X , é chamado o *espaço de órbitas de X pela ação de G* . Além disso, o G -espaço X determina um fibrado $\xi_X = (X, \pi_X, X/G)$.

Definição de G -fibrado: Um fibrado $\xi = (X, p, B)$, sobre um espaço base B , é chamado um G -*fibrado* se ξ é isomorfo a ξ_X , para alguma estrutura de G -espaço sobre X , por um isomorfismo $(id_X, f) : (X, \pi_X, X/G) \rightarrow (X, p, B)$, onde

$id_X : X \rightarrow X$ é a aplicação indentidade e $f : X/G \rightarrow B$ é um homeomorfismo.

Dizemos que um G -espaço X é *livre* se a ação de G sobre X tem a propriedade que $gx = x$ implica que $g = e$.

Dado um G -espaço livre X , denotamos por

$$X^* = \{(x, gx) : x \in X, g \in G\} \subset X \times X.$$

Existe uma função $\tau : X^* \rightarrow G$, chamada *função transferência*, a qual satisfaz $\tau(x, y)x = y$, para todo $(x, y) \in X^*$.

Definição de G -fibrado principal: Um G -espaço X é chamado um *G -espaço principal* se X é um G -espaço livre com uma função transferência $\tau : X^* \rightarrow G$ contínua. Um G -fibrado $\xi = (X, p, B)$, sobre um espaço base B , é chamado um *G -fibrado principal* se o seu espaço total X é um G -espaço principal.

Se $\xi = (X, p, B)$ é um G -fibrado principal, sobre um espaço base B , então ξ é um fibrado cuja fibra é o grupo G e usaremos a notação $\xi = (X, p, B, G)$ (Vide [26], Proposição 2.6, pg. 43). Em particular, se X for um G -espaço principal, $\xi_X = (X, \pi_X, X/G, G)$ é um G -fibrado principal.

Uma função contínua $h : X \rightarrow Y$ entre G -espaços X e Y é chamada uma *aplicação G -equivariante*, ou um G -morfismo, se $h(gx) = gh(x)$, para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$. Uma aplicação G -equivariante $h : X \rightarrow Y$ induz, por passagem ao quociente, uma função contínua entre os espaços de órbitas

$$\begin{aligned} \bar{h} : X/G &\rightarrow Y/G \\ Gx = [x] &\mapsto Gh(x) = [h(x)], \end{aligned}$$

chamada *aplicação induzida por h* , onde Gx e $Gh(x)$ denotam as órbitas dos pontos x e $h(x)$, respectivamente, pela ação de G .

Morfismo principal: Um morfismo fibrado $(u, f) : (X, p, B, G) \rightarrow (X', p', B', G)$ entre dois G -fibrados principais é chamado um *morfismo principal* se a função contínua $u : X \rightarrow X'$ é uma aplicação G -equivariante. Quando $B' = B$ e $f = id_B$ é a identidade sobre B , então (u, id_B) será denotado simplesmente

por $u : X \rightarrow X'$ e será chamado um *B-morfismo principal*.

Observação 1.1. A composição de morfismos principais é um morfismo principal. O mesmo resultado é válido no caso de *B*-morfismos principais.

Isomorfismo principal: Sejam $\xi = (X, p, B, G)$ e $\xi' = (X', p', B', G)$ dois *G*-fibrados principais. Um morfismo principal $(u, f) : (X, p, B, G) \rightarrow (X', p', B', G)$ que é também um isomorfismo fibrado é chamado um *isomorfismo principal* e dizemos que ξ e ξ' são *G*-fibrados principais isomorfos. Quando $B' = B$ e $f = id_B$, dizemos que $u : X \rightarrow X'$ é um *B-isomorfismo principal* e que ξ e ξ' são *G*-fibrados principais *B-isomorfos*.

1.1.2 Espaços Classificantes

Uma construção direta do espaço classificante BG , para qualquer grupo topológico G , foi dada primeiramente por Milnor em [36]. Dado qualquer grupo topológico G , existe um espaço BG , chamado **espaço classificante** do grupo G , e um *G*-fibrado principal $p_G : EG \rightarrow BG$, chamado o ***G*-fibrado principal universal** e denotado por $\omega_G = (EG, p_G, BG)$, onde EG é um espaço contrátil, tal que para qualquer espaço paracompacto Hausdorff B existe uma bijeção entre o conjunto $[B, BG]$ das classes de homotopia de aplicações de B em BG e as classes de isomorfismos de *G*-fibrados principais sobre B . Essa bijeção é definida associando-se a cada classe de homotopia em $[B, BG]$, a qual é representada por uma função contínua $f : B \rightarrow BG$, o fibrado pullback $f^*(\omega_G)$ (para detalhes, vide [16, Capítulo 14, § 14.4] e [14, Capítulo 4, §4.7]).

Os dois teoremas a seguir estão demonstrados em [26, Capítulo 4, Teoremas 12.2 e 12.4].

Teorema 1.2. Para cada *G*-fibrado principal $\xi = (X, p, B, G)$ sobre um espaço paracompacto Hausdorff B , existe uma função contínua $c : B \rightarrow BG$ tal que ξ e o fibrado pullback $c^*(\omega_G)$ são *G*-fibrados principais *B-isomorfos*. A função contínua $c : B \rightarrow BG$ é chamada uma **aplicação classificante** para o *G*-fibrado principal ξ .

Teorema 1.3. Sejam $c_0, c_1 : B \rightarrow BG$ duas funções contínuas tais que $c_0^*(\omega_G)$ e $c_1^*(\omega_G)$ são *G*-fibrados principais *B-isomorfos*. Então, c_0 e c_1 são homotópicas.

Observação 1.4. Segue do Teorema 1.3 que uma aplicação classificante é única, a menos de homotopia.

Quando consideramos um grupo de Lie compacto G , o seguinte teorema é válido e foi provado por Bredon [7, Capítulo II, Teorema 5.8], no caso em que X é um espaço completamente regular.

Teorema 1.5. *Seja X um espaço paracompacto Hausdorff, com uma ação livre de um grupo de Lie compacto G . Então, $\xi_X = (X, \pi_X, X/G, G)$ é um G -fibrado principal.*

Observação 1.6. Sejam X e Y espaços paracompactos Hausdorff com uma ação livre de um grupo de Lie compacto G . Consideremos os G -fibrados principais ξ_X e ξ_Y , de acordo com o Teorema 1.5, e $c : X/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para ξ_X . Então, pelo Teorema 1.2, ξ_X e $c^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais X/G -isomorfos. Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação G -equivariante, que assim induz uma função contínua $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$ entre os espaços de órbitas. Se $l : Y/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para ξ_Y , então $l \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$ também classifica ξ_X e, portanto, c e $l \circ \bar{f}$ são homotópicas. De fato, pelo Teorema 1.2 os G -fibrados principais ξ_Y e $l^*(\omega_G)$ são Y/G -isomorfos. Desde que $f : X \rightarrow Y$ é G -equivariante, temos de [26, Capítulo 4, Teorema 4.2] (vide [15, Capítulo 1, Proposição 8.6]) que os G -fibrados principais ξ_X e $\bar{f}^*(\xi_Y)$ são X/G -isomorfos. Por outro lado, desde que ξ_Y e $l^*(\omega_G)$ são Y/G -isomorfos, segue de [26, Capítulo 4, §10] que $\bar{f}^*(\xi_Y)$ e $\bar{f}^*(l^*(\omega_G))$ são isomorfos. Além disso, de acordo com [26, Capítulo 2, Proposição 5.7] os G -fibrados principais $\bar{f}^*(l^*(\omega_G))$ e $(l \circ \bar{f})^*(\omega_G)$ são X/G -isomorfos e portanto os G -fibrados principais ξ_X e $(l \circ \bar{f})^*(\omega_G)$ são X/G -isomorfos. Assim, pelo Teorema 1.2, $l \circ \bar{f}$ é uma aplicação classificante para ξ_X .

1.1.3 Fibrados vetoriais

Os fibrados vetoriais constituem uma classe especial de fibrados cujas fibras são espaços vetoriais. Mais precisamente, um **fibrado vetorial real n -dimensional** é um fibrado $\xi = (E, p, B, \mathbb{R}^n)$ tal que para cada $b \in B$, $p^{-1}(b)$ possui uma estrutura de $\mathbb{R}$ -espaço vetorial n -dimensional e para uma trivialização

local qualquer (U_α, ϕ_α) de ξ , as restrições

$$\phi_\alpha|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

são isomorfismos de espaços vetoriais, para cada $b \in U_\alpha$.

Exemplos de fibrados vetoriais:

- (1) Seja M uma m -dimensional variedade diferenciável. O **fibrado tangente** de M , denotado por TM , é o m -dimensional fibrado vetorial cujo espaço total é a união disjunta dos espaços tangentes em todos os pontos de M :

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M = \{(p, v) : v \in T_p M\},$$

onde $T_p M$ denota o espaço tangente a M em p . A projeção do fibrado tangente, $\pi : TM \rightarrow M$, envia cada vetor v em $T_p M$ para o ponto p no qual ele é tangente, isto é, $\pi(p, v) = p$. Para qualquer m -dimensional variedade diferenciável M , o fibrado tangente TM é uma $2m$ -dimensional variedade diferenciável (vide [30, Capítulo 3, Lemas 3.12 e 3.13]).

- (2) Seja Z uma n -dimensional subvariedade de uma m -dimensional variedade diferenciável M . O espaço normal a Z em um ponto $p \in Z$, denotado por $N_p Z$, é o subespaço de $T_p M$ consistindo de todos os vetores v que são ortogonais a $T_p Z$. O **fibrado normal** a Z em M é definido como sendo o $(m - n)$ -dimensional fibrado vetorial cujo espaço total é a união disjunta dos espaços normais em todos os pontos de Z :

$$NZ := \coprod_{p \in Z} N_p Z := \{(p, v) : p \in Z, v \in T_p M \text{ e } v \perp T_p Z\}.$$

1.1.4 Fibrações

Propriedade do levantamento de homotopia: Dizemos que uma função contínua $p : E \rightarrow B$, entre espaços topológicos E e B , tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a um espaço topológico X se, dado uma homotopia $g_t : X \rightarrow B$ e uma função contínua $\tilde{g}_0 : X \rightarrow E$ que é um levan-

tamento de g_0 , isto é, $p \circ \tilde{g}_0 = g_0$, então existe uma homotopia $\tilde{g}_t : X \rightarrow E$ que levanta g_t , isto é, $p \circ \tilde{g}_t = g_t$.

Definição de fibração: Uma *fibração* é uma função contínua $p : E \rightarrow B$ que tem a propriedade do levantamento de homotopia com relação a qualquer espaço topológico X .

Proposição 1.7. [48, Capítulo 1, §7, Teorema 7.13, pg.33] *Seja $p : E \rightarrow B$ a projeção de um fibrado e suponha que o espaço base B seja paracompacto. Então, $p : E \rightarrow B$ é uma fibração.*

Observação 1.8. Como consequência da Proposição 1.7, todo fibrado cujo espaço base é uma variedade será uma fibração. Assim, quando trabalhamos com fibrados sobre variedades é comum o uso do termo fibração no lugar de fibrado.

1.2 Potências e Quadrados de Steenrod

Nesta seção apresentamos as *operações de Steenrod* que são os homomorfismos chamados quadrados Sq^k e potências P^k de Steenrod. Os termos “quadrado” e “potência” surgem do fato de que Sq^k e P^k estão relacionados às aplicações $\alpha \mapsto \alpha^2 = \alpha \smile \alpha$ e $\alpha \mapsto \alpha^p = \alpha \smile \cdots \smile \alpha$ (produto cup), respectivamente. Apresentamos estes homomorfismos de modo axiomático, desde que a maioria das aplicações das operações de Steenrod não dependem das construções desses homomorfismos, mas somente de suas propriedades básicas. As construções desses homomorfismos e demonstrações das propriedades, para cohomologia singular, podem ser encontradas em [24, Capítulo 1, § 1.2 e § 1.5] e [43, Capítulo 1, pg.1-2 e Capítulo 6, pg.76-78]. Contudo, nosso interesse se concentra nas operações de Steenrod definidas em cohomologia com suporte compacto.

Para todos os inteiros $k \geq 0$ e $n \geq 0$, os quadrados e potências de Steenrod estão definidos para pares de espaços (X, A) :

$$Sq^k : H^n(X, A; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n+k}(X, A; \mathbb{Z}_2);$$

$$P^k : H^n(X, A; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{n+2k(p-1)}(X, A; \mathbb{Z}_p), \text{ para números primos } p > 2.$$

Assumindo que X é um espaço localmente compacto, os quadrados e potências induzem homomorfismos:

$$\begin{aligned} Sq^k &: H_c^n(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^{n+k}(X; \mathbb{Z}_2); \\ P^k &: H_c^n(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_c^{n+2k(p-1)}(X; \mathbb{Z}_p), \text{ para números primos } p > 2. \end{aligned}$$

na cohomologia com suporte compacto de X . Em [8, Capítulo II, § 21] Bredon apresentou os quadrados e as potências de Steenrod no contexto da Teoria de Feixes e demonstrou várias de suas propriedades. Desde que podemos considerar a cohomologia com suporte compacto derivada da Teoria de Feixes, temos demonstradas em [8, Capítulo II, § 21] as principais propriedades das operações de Steenrod, as quais são listadas a seguir.

Os quadrados de Steenrod satisfazem às seguintes propriedades:

- (1) $Sq^0 = id$ é o homomorfismo identidade.
- (2) Se $n = k$, então Sq^n é o produto cup: $Sq^n(x) = x^2$.
- (3) Se $n < k$, então Sq^k é o homomorfismo nulo.
- (4) A fórmula de Cartan para produtos cross e cup:

$$\begin{aligned} Sq^k(x \times y) &= \sum_{s=0}^k Sq^s(x) \times Sq^{k-s}(y); \\ Sq^k(x \smile y) &= \sum_{s=0}^k Sq^s(x) \smile Sq^{k-s}(y). \end{aligned}$$

- (5) $Sq^k(x + x') = Sq^k(x) + Sq^k(x')$.
- (6) Naturalidade: se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria, então¹

$$Sq^k(f^*(x)) = f^*(Sq^k(x)).$$

As potências de Steenrod satisfazem propriedades análogas àquelas dos quadrados de Steenrod, como segue:

- (1) $P^0 = id$ é o homomorfismo identidade.

¹Vide [8, Capítulo II, § 21, pg.169]

- (2) Se $n = 2k$, então $P^k(x) = x^p$, para qualquer classe de cohomologia $x \in H_c^n(X; \mathbb{Z}_p)$, $p > 2$ primo.
- (3) Se $n < 2k$, então P^k é o homomorfismo nulo sobre a cohomologia $H_c^n(X; \mathbb{Z}_p)$.
- (4) A fórmula de Cartan para produtos cross e cup:

$$P^k(x \times y) = \sum_{s=0}^k P^s(x) \times P^{k-s}(y);$$

$$P^k(x \smile y) = \sum_{s=0}^k P^s(x) \smile P^{k-s}(y).$$

- (5) $P^k(x + x') = P^k(x) + P^k(x')$.
- (6) Naturalidade: se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação própria, então²

$$P^k(f^*(x)) = f^*(P^k(x)).$$

1.3 Transversalidade

Dizemos que uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$ entre variedades suaves é *transversal* a uma subvariedade $Z \subset Y$ se a seguinte identidade é satisfeita

$$\text{Imagem}(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y,$$

para cada ponto $x \in f^{-1}(Z)$, onde df_x denota a derivada de f em x e $T_{f(x)}Z$, $T_{f(x)}Y$ são os espaços tangentes a Z e Y , respectivamente, no ponto $f(x)$.

Teorema 1.9. (O teorema da transversalidade [23, Capítulo 1, § 5, pg.28])
 Se uma aplicação suave $f : X \rightarrow Y$ é transversal a uma subvariedade $Z \subset Y$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X . Além disso,

$$\dim X - \dim f^{-1}(Z) = \dim Y - \dim Z,$$

isto é, a codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual a codimensão de Z em Y .

A mais importante situação no conceito de transversalidade diz respeito à transversalidade da aplicação inclusão $i : X \hookrightarrow Y$ de uma subvariedade $X \subset Y$

²Vide [8, Capítulo II, § 21, pg.169].

com outra subvariedade $Z \subset Y$. Neste caso, a derivada $di_x : T_x X \rightarrow T_x Y$ é a aplicação inclusão e $x \in i^{-1}(Z)$ significa que $x \in Z \cap X$. Então, i é transversal a Z se, e somente se,

$$T_x X + T_x Z = T_x Y,$$

para cada ponto $x \in Z \cap X$. Quando i é transversal a Z , dizemos que as subvariedades X e Z *se interceptam transversalmente*.

Observação 1.10. O Teorema 1.9 nos diz que a interseção transversal de duas subvariedades Z e X é ainda uma subvariedade. Além disso,

$$\text{codim}(X \cap Z) = \text{codim } X + \text{codim } Z.$$

1.4 O Teorema da Fibração de Ehresmann

O resultado a seguir, conhecido como o Teorema da Fibração de Ehresmann, é um resultado fundamental em Topologia Diferencial e sua demonstração pode ser encontrada em [10].

Teorema 1.11. [10, Capítulo 8, Teorema 8.12] *Seja $f : E \rightarrow M$ uma submersão própria entre variedades suaves. Então, f é uma fibração localmente trivial, ou seja, se $p \in M$ e se $F = f^{-1}(p)$, então existe uma vizinhança U de p em M e um difeomorfismo $\phi : U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi} & f^{-1}(U) \\ & \searrow \pi & \downarrow f|_{f^{-1}(U)} \\ & & U \end{array} \quad (1.3)$$

onde $\pi : U \times F \rightarrow U$ é a projeção sobre U .

Observação 1.12. O Teorema da Fibração de Ehresmann também é válido para variedades com bordo.

Capítulo 2

Teoremas de (H, G) -coincidências para variedades

O clássico Teorema de Borsuk-Ulam [6] afirma que toda função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma esfera n -dimensional S^n para um espaço Euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$, colapsa ao menos um par de pontos antípodas, isto é, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Este resultado foi primeiro conjecturado por Stanislaw Ulam e provado por Karol Borsuk, em 1933. Desde então, várias e diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste célebre teorema têm sido publicadas.

Neste capítulo, consideramos formulações do Teorema de Borsuk-Ulam para variedades em termos das chamadas (H, G) -coincidências, como segue.

Sejam G um grupo finito agindo livremente sobre um espaço topológico X e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua entre espaços topológicos X e Y . Se H é um subgrupo de G , então H age à esquerda sobre cada órbita Gx de $x \in X$ como segue: se $y \in Gx$ e $y = gx$, onde $g \in G$, então $h \cdot y = gh^{-1}x$. Um ponto $x \in X$ é chamado um ponto de (H, G) -coincidência de f (como introduzido por Gonçalves, Pergher e Jaworowski em [20]) se f aplica cada órbita da ação de H sobre a G -órbita de x em um único ponto. É claro que, se H é o subgrupo trivial, então todo ponto de X é um ponto de (H, G) -coincidência de f . Se $H = G$, essa é a definição usual de G -coincidência, ou seja, $f(x) = f(gx)$, para todo $g \in G$. Denotamos por $A(f, H, G)$ o conjunto dos pontos de (H, G) -

coincidência de f e observamos que quando $H = G$, $A(f, H, G) = A(f)$ é o conjunto das G -coincidências de f .

Teoremas do tipo Borsuk-Ulam consistem em estimar a dimensão cohomológica do conjunto $A(f, H, G)$. Duas principais direções consideradas deste problema são quando o espaço Y é uma variedade ou um CW-complexo.

Na primeira direção, estão os trabalhos de Borsuk [6] (o teorema clássico de Borsuk-Ulam, para $H = G = \mathbb{Z}_2$, $X = S^n$ e $Y = \mathbb{R}^n$), Conner e Floyd [12] (para $H = G = \mathbb{Z}_2$ e Y uma n -variedade), Munkholm [37] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$), Nakaoka [38] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, X sob certas condições (co)homológicas e Y uma m -variedade) e a seguinte versão mais geral provada por Volovikov [46], usando o índice de um $\mathbb{Z}_p$ -espaço livre X ($\text{ind } X$, vide Definição 2.5).

Teorema A. [46, Teorema 1.2] *Sejam X um $\mathbb{Z}_p$ -espaço livre paracompacto Hausdorff com $\text{ind } X \geq n$, e $f : X \rightarrow M$ uma função contínua de X em uma variedade m -dimensional conexa M (orientável se $p > 2$). Assuma que:*

- (1) $f^*(V_i) = 0$, para $i \geq 1$, onde V_i denotam as classes de Wu de M ; e
- (2) $n > m(p - 1)$.

Então, $\text{ind } A(f) \geq n - m(p - 1) > 0$.

Na segunda direção, estão os trabalhos de Izydorek e Jaworowski [27] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e Y um CW-complexo), Gonçalves e Pergher [19] (para $H = G = \mathbb{Z}_p$, $X = S^n$ e Y um CW-complexo) e para um subgrupo próprio não trivial H de G , Gonçalves, Jaworowski e Pergher [20] (para $H = \mathbb{Z}_p$ subgrupo de um grupo finito G , X uma esfera de homotopia e Y um CW-complexo) e Gonçalves, Jaworowski, Pergher e Volovikov [21] (para H subgrupo de um grupo finito G , X sob certas condições (co)homológicas e Y um CW-complexo).

Neste capítulo, considerando $Y = M$ uma variedade e H um subgrupo próprio não trivial de um grupo finito G , demonstramos a seguinte formulação do Teorema de Borsuk-Ulam para variedades em termos de (H, G) -coincidências.

Teorema 2.1. *Sejam X um espaço paracompacto Hausdorff, G um grupo finito agindo livremente sobre X e H um subgrupo cíclico de G com ordem igual a um*

número primo p . Seja $f : X \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa, (orientável, se $p > 2$), tal que $f^*(V_i) = 0$, onde V_i denotam as classes de Wu de M , para $i \geq 1$. Suponhamos que $\text{ind } X \geq n > m(|G| - r)$, onde $r = \frac{|G|}{p}$. Então,

$$\text{ind } A(f, H, G) \geq n - m(|G| - r) > 0.$$

Consequentemente,

$$\text{cohom.dim } A(f, H, G) \geq n - m(|G| - r) > 0.$$

Observação 2.2. Observamos que se $H = G = \mathbb{Z}_p$, então $m(|G| - r) = m(p - 1)$ e, portanto, o Teorema 2.1 generaliza, em termos de (H, G) -coincidências, o Teorema A obtido por Volovikov em [46]. Para o caso $n = m(|G| - r)$ e p um primo ímpar, se consideramos X uma n -esfera de homologia $\text{mod } p$ no Teorema 2.1 (neste caso, a função contínua f pode ser arbitrária), de [38, Teorema 8] temos $A(f, H, G) \neq \emptyset$. Além disso, o Teorema 2.1 é uma versão para variedades do resultado principal devido a Gonçalves, Jaworowski e Pergher em [20].

Finalmente, demonstramos a seguinte versão, para variedades, do teorema não simétrico para (H, G) -coincidências obtido em [33, Teorema 1.1].

Teorema 2.3. *Sejam X um espaço compacto Hausdorff, G um grupo finito agindo livremente sobre S^n , H um subgrupo cíclico de G com ordem igual a um número primo p e $\varphi : X \rightarrow S^n$ uma aplicação essencial¹. Seja $f : X \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$), tal que $f^*(V_i) = 0$, onde V_i denotam as classes de Wu de M , para $i \geq 1$. Suponhamos que $n > m(|G| - r)$. Então,*

$$\text{cohom.dim } A_\varphi(f, H, G) \geq n - m(|G| - r),$$

onde $r = \frac{|G|}{p}$ e $A_\varphi(f, H, G)$ denota o conjunto dos pontos de (H, G) -coincidência de f relativo à aplicação essencial $\varphi : X \rightarrow S^n$ (vide Definição 2.15).

¹Uma função contínua $\varphi : X \rightarrow S^n$ é chamada uma aplicação essencial se φ induz homomorfismo não nulo $\varphi^* : H^n(S^n; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_p)$.

Em todo este capítulo, os símbolos H^* e H_c^* denotam a cohomologia de Alexander-Čech e, respectivamente, a cohomologia de Alexander-Čech com suporte compacto, com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$, (onde p é um número primo), no sentido de [8].

Introduzimos a seguir algumas definições e resultados necessários para a demonstração dos teoremas principais enunciados anteriormente.

2.1 O $\mathbb{Z}_p$ -índice de um espaço X

Suponhamos que o grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ atue livremente sobre um espaço para-compacto Hausdorff X , onde p é um número primo, e consideremos $X/\mathbb{Z}_p$ o espaço de órbitas de X pela ação de $\mathbb{Z}_p$. Então, pelo Teorema 1.5, $X \rightarrow X/\mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$ -fibrado principal e podemos considerar uma aplicação classificante $c : X/\mathbb{Z}_p \rightarrow B\mathbb{Z}_p$.

Observação 2.4. De acordo com o Teorema 1.3, se $\hat{c}$ é uma outra aplicação classificante para o $\mathbb{Z}_p$ -fibrado principal $X \rightarrow X/\mathbb{Z}_p$, então existe uma homotopia entre c e $\hat{c}$.

Definição 2.5. Dizemos que o $\mathbb{Z}_p$ -índice de X é maior ou igual a l , se o homomorfismo

$$c^* : H^l(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^l(X/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$$

é não trivial. Dizemos que o $\mathbb{Z}_p$ -índice de X é igual a l se ele é maior ou igual a l e, além disso, $c^* : H^i(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(X/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ é trivial, para todo $i \geq l + 1$. Denotamos o $\mathbb{Z}_p$ -índice de X por $\text{ind } X$.

Observação 2.6. O $\mathbb{Z}_p$ -índice de X foi usado por Yang em [47], e também por Conner e Floyd em [12], para demonstrar generalizações do teorema de Borsuk-Ulam.

2.2 As classes de W_u

Seja M uma variedade topológica m -dimensional conexa e orientável. Consideramos, para todo $k \geq 0$, os homomorfismos *potências e quadrados de*

Steenrod em cohomologia com suporte compacto:

$$\begin{aligned} P^k &: H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_c^m(M; \mathbb{Z}_p), \\ Sq^k &: H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^m(M; \mathbb{Z}_2), \end{aligned}$$

os quais satisfazem as propriedades listadas na Seção 1.2. As classes de Wu são definidas para $p > 2$, como segue. Pela fórmula dos coeficientes universais,

$$H^{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}(H_{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p)$$

e, pelo Teorema da Dualidade de Poincaré,

$$H_{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) \cong H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p).$$

$$\text{Logo,} \quad H^{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}(H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p), \mathbb{Z}_p). \quad (2.1)$$

Este isomorfismo leva $V \mapsto \bar{V}$, com $\bar{V}(x) = \langle V \smile x, [M] \rangle$, $\forall x \in H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p)$, onde $\langle \ , \ \rangle : H_c^m(M; \mathbb{Z}_p) \times H_m^c(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p$ denota o produto de Kronecker e $[M]$ é o gerador de $H_m^c(M; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, chamado a classe fundamental de M . Considere o homomorfismo

$$h : H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathbb{Z}_p,$$

definido por $h(x) = \langle P^k(x), [M] \rangle$, $\forall x \in H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p)$. Então, de (2.1) existe um único elemento $V_k \in H^{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p)$ tal que $h = \bar{V}_k$, ou seja, existe uma única classe de cohomologia $V_k \in H^{2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p)$ tal que

$$\langle P^k(x), [M] \rangle = \langle V_k \smile x, [M] \rangle, \forall x \in H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p). \quad (2.2)$$

O elemento V_k é chamado a k -ésima classe de Wu de M , definida para todo $k \geq 0$. De modo similar, as classes de Wu de M são definidas para $p = 2$. Neste caso são usados os homomorfismos *quadrados de Steenrod*.

Portanto, as classes de Wu satisfazem a seguinte condição, para todo $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} P^k(x) &= V_k \smile x, \forall x \in H_c^{m-2k(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p), \text{ se } p > 2, \\ Sq^k(x) &= V_k \smile x, \forall x \in H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

2.3 As classes de Wu do produto de variedades

Sejam W e M variedades topológicas conexas de dimensões w e m , respectivamente, onde $w \geq m$, ambas orientáveis. No que segue, exibimos uma caracterização das classes de Wu do produto cartesiano de W e M .

Lema 2.7. *Sejam W e M variedades topológicas conexas de dimensões w e m , respectivamente, onde $w \geq m$, ambas orientáveis. Então, a k -ésima classe de Wu de $W \times M$, é dada por:*

$$v_k = \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s} \quad (2.3)$$

onde U_s e V_{k-s} são as s -ésima e $(k-s)$ -ésima classes de Wu de W e M , respectivamente, e

$$\begin{cases} (-1)^{\Lambda(s)} = (-1)^{(w-s)(k-s)} \equiv 1 \pmod{2}, & \text{se } p = 2, \\ (-1)^{\Lambda(s)} = (-1)^{(w-2s(p-1))(k-s)}, & \text{se } p > 2. \end{cases}$$

Inicialmente, precisaremos do seguinte resultado para demonstrar o Lema 2.7.

Lema 2.8. *Sejam W e M variedades topológicas e R um anel comutativo com unidade. Se $u_1 \in H^p(W; R)$, $v_1 \in H^r(M; R)$, $u_2 \in H_c^q(W; R)$ e $v_2 \in H_c^s(M; R)$, então*

$$(u_1 \times v_1) \smile (u_2 \times v_2) = (-1)^{qr} (u_1 \smile u_2) \times (v_1 \smile v_2).$$

Demonstração: Denotamos por $\pi : W \times M \rightarrow W$ e $p : W \times M \rightarrow M$ as projeções naturais. Temos

$$u_1 \times v_1 = \pi^*(u_1) \smile p^*(v_1) \in H^{p+r}(W \times M; R \hat{\otimes} R),$$

$$u_2 \times v_2 = \pi^*(u_2) \smile p^*(v_2) \in H_c^{q+s}(W \times M; R \hat{\otimes} R) \text{ (vide definição em (5.7)).}$$

Assim, de acordo com [8, Capítulo II, Proposição 7.3 e Corolário 7.2], temos:

$$(u_1 \times v_1) \smile (u_2 \times v_2) = (-1)^{qr} (\pi^*(u_1) \smile \pi^*(u_2)) \smile (p^*(v_1) \smile p^*(v_2)).$$

Por [8, Capítulo II, Seção 8.2] , podemos concluir que

$$\begin{aligned} (u_1 \times v_1) \smile (u_2 \times v_2) &= (-1)^{qr} \pi^*(u_1 \smile u_2) \smile p^*(v_1 \smile v_2) \\ &= (-1)^{qr} (u_1 \smile u_2) \times (v_1 \smile v_2). \end{aligned} \quad (2.4)$$

■

Demonstração do Lema 2.7. Mostraremos primeiramente que para $p = 2$,

$$Sq^k(x) = \left(\sum_{s=0}^k U_s \times V_{k-s} \right) \smile x, \quad \text{para todo } x \in H_c^{(w+m)-k}(W \times M; \mathbb{Z}_2),$$

onde $U_s \in H^s(W; \mathbb{Z}_2)$ e $V_{k-s} \in H^{k-s}(M; \mathbb{Z}_2)$ são as s -ésima e a $(k-s)$ -ésima classes de Wu de W e M , respectivamente. Assim, por unicidade $v_k = \sum_{s=0}^k U_s \times V_{k-s}$ é a k -ésima classe de Wu de $W \times M$. De fato, pela fórmula de Künneth (vide Corolário 5.28),

$$H_c^{(w+m)-k}(W \times M; \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{\beta=0}^{(w+m)-k} H_c^\beta(W; \mathbb{Z}_2) \otimes H_c^{(w+m)-k-\beta}(M; \mathbb{Z}_2).$$

Portanto, para cada $x \in H_c^{(w+m)-k}(M \times W; \mathbb{Z}_2)$ podemos escrever

$$x = \sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} x_\beta \times y_{(w+m)-k-\beta},$$

onde $x_\beta \in H_c^\beta(W; \mathbb{Z}_2)$ e $y_{(w+m)-k-\beta} \in H_c^{(w+m)-k-\beta}(M; \mathbb{Z}_2)$.

Assim, aplicando o k -ésimo quadrado de Steenrod Sq^k em x e usando a fórmula

de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned}
 Sq^k(x) &= \sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} Sq^k(x_\beta \times y_{(w+m)-k-\beta}) \\
 &= \sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} \left(\sum_{s=0}^k Sq^s(x_\beta) \times Sq^{k-s}(y_{(w+m)-k-\beta}) \right) \\
 &= \sum_{s=0}^k \left(\sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} Sq^s(x_\beta) \times Sq^{k-s}(y_{(w+m)-k-\beta}) \right). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Agora, consideramos $\beta \neq w - s$, para cada s fixado, com $0 \leq s \leq k$.

Se $\beta > w - s$, então $\beta + s > w$ e temos,

$$Sq^s(x_\beta) \in H_c^{\beta+s}(W; \mathbb{Z}_2) = 0. \tag{2.6}$$

Se $\beta < w - s$, então $m < w + m - \beta - s$ e temos,

$$Sq^{k-s}(y_{(w+m)-k-\beta}) \in H_c^{(w+m)-\beta-s}(M; \mathbb{Z}_2) = 0. \tag{2.7}$$

Portanto, por (2.5), (2.6) e (2.7), usando que

$$Sq^s(x_{w-s}) = U_s \smile x_{w-s} \quad \text{e} \quad Sq^{k-s}(y_{m-(k-s)}) = V_{k-s} \smile y_{m-(k-s)},$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
 Sq^k(x) &= \sum_{s=0}^k Sq^s(x_{w-s}) \times Sq^{k-s}(y_{m-(k-s)}) \\
 &= \sum_{s=0}^k (U_s \smile x_{w-s}) \times (V_{k-s} \smile y_{m-(k-s)}).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 2.8, temos

$$\begin{aligned} v_k \smile x &= \left(\sum_{s=0}^k U_s \times V_{k-s} \right) \smile \left(\sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} x_\beta \times y_{(w+m)-k-\beta} \right) \\ &= \sum_{s=0}^k \sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} (U_s \times V_{k-s}) \smile (x_\beta \times y_{(w+m)-k-\beta}) \\ &= \sum_{s=0}^k \sum_{\beta=0}^{(w+m)-k} (U_s \smile x_\beta) \times (V_{k-s} \smile y_{(w+m)-k-\beta}). \end{aligned}$$

Novamente, para cada s fixado, com $0 \leq s \leq k$, consideramos $\beta \neq w - s$.

Se $\beta > w - s$, então $U_s \smile x_\beta \in H_c^{\beta+s}(W; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Se $\beta < w - s$, então $V_{k-s} \smile y_{(w+m)-k-\beta} \in H_c^{(w+m)-\beta-s}(M; \mathbb{Z}_2) = 0$. Portanto,

$$v_k \smile x = \sum_{s=0}^k (U_s \smile x_{w-s}) \times (V_{k-s} \smile y_{m-k-\beta}).$$

Agora, de maneira análoga, mostraremos que para $p > 2$,

$$P^k(x) = \left(\sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s} \right) \smile x, \quad \text{para todo } x \in H_c^{(w+m)-2k(p-1)}(W \times M; \mathbb{Z}_p),$$

onde $U_s \in H^{2s(p-1)}(W; \mathbb{Z}_p)$ e $V_{k-s} \in H^{2(k-s)(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p)$ são, respectivamente, as s -ésima e a $(k-s)$ -ésima classes de Wu de W e M . Então, por unicidade, concluimos que a classe $v_k = \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s}$ é a k -ésima classe de Wu de $W \times M$. De fato, pela fórmula de Künneth,

$$H_c^{(w+m)-2k(p-1)}(W \times M; \mathbb{Z}_p) \cong \bigoplus_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} H_c^\beta(W; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^{(w+m)-2k(p-1)-\beta}(M; \mathbb{Z}_p).$$

Portanto, para cada $x \in H_c^{(w+m)-2k(p-1)}(W \times M; \mathbb{Z}_p)$ podemos escrever

$$x = \sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} x_\beta \times y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta},$$

onde $x_\beta \in H_c^\beta(W; \mathbb{Z}_p)$ e $y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta} \in H_c^{(w+m)-2k(p-1)-\beta}(M; \mathbb{Z}_p)$.

Assim, aplicando a k -ésima potência de Steenrod P^k em x e usando a fórmula de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned}
 P^k(x) &= \sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} P^k(x_\beta \times y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}) \\
 &= \sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} \left(\sum_{s=0}^k P^s(x_\beta) \times P^{k-s}(y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}) \right) \\
 &= \sum_{s=0}^k \left(\sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} P^s(x_\beta) \times P^{k-s}(y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}) \right). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Consideramos $\beta \neq w - 2s(p-1)$, para cada s fixado, com $0 \leq s \leq k$.

Se $\beta > w - 2s(p-1)$, então $\beta + 2s(p-1) > w$ e temos

$$P^s(x_\beta) \in H_c^{\beta+2s(p-1)}(W; \mathbb{Z}_p) = 0. \tag{2.9}$$

Se $\beta < w - 2s(p-1)$, então $m < w + m - \beta - 2s(p-1)$ e temos

$$P^{k-s}(y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}) \in H_c^{(w+m)-\beta-2s(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) = 0. \tag{2.10}$$

Portanto, por (2.8), (2.9) e (2.10), usando que

$$\begin{aligned}
 P^s(x_{w-2s(p-1)}) &= U_s \smile x_{w-2s(p-1)} \quad \mathbf{e} \\
 P^{k-s}(y_{m-2(k-s)(p-1)}) &= V_{k-s} \smile y_{m-2(k-s)(p-1)},
 \end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
 P^k(x) &= \sum_{s=0}^k P^s(x_{w-2s(p-1)}) \times P^{k-s}(y_{m-2(k-s)(p-1)}) \\
 &= \sum_{s=0}^k (U_s \smile x_{w-2s(p-1)}) \times (V_{k-s} \smile y_{m-2(k-s)(p-1)}).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 2.8, temos

$$\begin{aligned}
 v_k \smile x &= \left(\sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s} \right) \smile \left(\sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} x_\beta \times y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta} \right) \\
 &= \sum_{s=0}^k \sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} ((-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s}) \smile (x_\beta \times y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}) \\
 &= \sum_{s=0}^k \sum_{\beta=0}^{(w+m)-2k(p-1)} (-1)^{\Lambda(s)+\Gamma(s)} (U_s \smile x_\beta) \times (V_{k-s} \smile y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta}),
 \end{aligned}$$

onde $\Gamma(s) = (k-s)\beta$.

Para cada s fixado, com $0 \leq s \leq k$, consideramos $\beta \neq w - 2s(p-1)$.

Se $\beta > w - 2s(p-1)$, então

$$U_s \smile x_\beta \in H_c^{\beta+2s(p-1)}(W; \mathbb{Z}_p) = 0.$$

Se $\beta < w - 2s(p-1)$, então

$$V_{k-s} \smile y_{(w+m)-2k(p-1)-\beta} \in H_c^{(w+m)-\beta-2s(p-1)}(M; \mathbb{Z}_p) = 0.$$

Note que, para $\beta = w - 2s(p-1)$, temos $\Gamma(s) = \Lambda(s)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 v_k \smile x &= \sum_{s=0}^k (-1)^{2\Lambda(s)} (U_s \smile x_{w-2s(p-1)}) \times (V_{k-s} \smile y_{m-2(k-s)(p-1)}) \\
 &= \sum_{s=0}^k (U_s \smile x_{w-2s(p-1)}) \times (V_{k-s} \smile y_{m-2(k-s)(p-1)}).
 \end{aligned}$$

■

2.4 Demonstração dos teoremas principais

Sejam G um grupo finito o qual age livremente sobre um espaço paracompacto Hausdorff X , H um subgrupo cíclico de G de ordem prima p e $f : X \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$). Denotamos por $a_1, \dots, a_r$ um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de G/H , onde $r = \frac{|G|}{p}$. Definimos, para cada $i = 1, \dots, r$,

$g_i : X \rightarrow X$ por $g_i(x) = a_i x$. Consideramos a aplicação $F : X \rightarrow M^r$ definida por

$$F = (f_1 \times \cdots \times f_r) \circ d, \quad (2.11)$$

onde $d : X \rightarrow X^r$ é a aplicação diagonal e $f_i = f \circ g_i$. Demonstramos o seguinte

Lema 2.9. *Se $f^*(V_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde V_k são as classe de W_u de M então o homomorfismo F^* induzido por F em cohomologia é tal que $F^*(v_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde v_k são as classes de W_u de M^r .*

Demonstração: É suficiente demonstrar que

$$(f_1 \times \cdots \times f_r)^*(v_k) = 0,$$

para todo $k \geq 1$. A demonstração seguirá por indução sobre r . Se $r = 1$, então $F = f_1$ e $f_1^*(V_k) = g_1^* \circ f^*(V_k) = 0$. Agora, denotamos por

$$p_1 : M^{r-1} \times M \rightarrow M^{r-1}, \quad p_2 : M^{r-1} \times M \rightarrow M,$$

$$q_1 : X^{r-1} \times X \rightarrow X^{r-1}, \quad q_2 : X^{r-1} \times X \rightarrow X$$

as projeções naturais.

Se $r = 2$, temos $v_k = \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} V_s \times V_{k-s}$, então

$$(f_1 \times f_2)^*(v_k) = \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} (f_1 \times f_2)^*(V_s \times V_{k-s}).$$

Desde que $V_s \times V_{k-s} = p_1^*(V_s) \cup p_2^*(V_{k-s})$, segue que

$$\begin{aligned} (f_1 \times f_2)^*(v_k) &= \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} (f_1 \times f_2)^*(p_1^*(V_s)) \cup (f_1 \times f_2)^*(p_2^*(V_{k-s})) \\ &= \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} q_1^* \circ f_1^*(V_s) \cup q_2^* \circ f_2^*(V_{k-s}) = 0. \end{aligned}$$

Se $r > 2$, temos

$$\begin{aligned} (f_1 \times \cdots \times f_{r-1}) \circ q_1 &= p_1 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) \\ f_r \circ q_2 &= p_2 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.7, $v_k = \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s}$, e assumindo indutivamente que

$$(f_1 \times \cdots \times f_{r-1})^*(U_s) = 0,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} (f_1 \times \cdots \times f_r)^*(v_k) &= (f_1 \times \cdots \times f_r)^* \left(\sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} U_s \times V_{k-s} \right) \\ &= \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} (f_1 \times \cdots \times f_r)^*(p_1^*(U_s)) \smile (f_1 \times \cdots \times f_r)^*(p_2^*(V_{k-s})) \\ &= \sum_{s=0}^k (-1)^{\Lambda(s)} q_1^* \circ (f_1 \times \cdots \times f_{r-1})^*(U_s) \smile q_2^* \circ f_r^*(V_{k-s}) = 0. \end{aligned}$$

■

2.4.1 Demonstração do Teorema 2.1 e suas consequências

Nesta seção, apresentamos a demonstração do Teorema 2.1 e suas consequências. Desde que estamos interessados em estimar a dimensão cohomológica do conjunto das (H, G) -coincidências, começamos essa seção com a definição de dimensão cohomológica, a qual pode ser encontrada em [39, pg. 571].

Definição 2.10. *Seja Λ um anel qualquer. Definimos a dimensão cohomológica de um espaço topológico X , e denotamos por $\text{cohom.dim } X$, como o supremo, finito ou infinito, dos inteiros q tais que existe um feixe $\mathcal{A}$ de Λ -módulos sobre X , com $H^q(X; \mathcal{A}) \neq 0$.*

Se um grupo de Lie compacto age livremente sobre X , então existe uma relação entre a dimensão cohomológica de X e a dimensão cohomológica do espaço de órbitas, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 2.11. [39, Proposição A.11, pg. 572] *Sejam G um grupo de Lie compacto e X um G -espaço paracompacto. Então,*

$$\text{cohom.dim } X/G \leq \text{cohom.dim } X.$$

Demonstração do Teorema 2.1: Consideramos a aplicação $F : X \rightarrow M^r$ definida em (2.11). Temos

$$A(f, H, G) \supset A_F = \{x \in X : F(x) = F(hx), \forall h \in H\}.$$

De fato, se x é um ponto no conjunto A_F , então

$$(f(a_1x), \dots, f(a_rx)) = (f(a_1hx), \dots, f(a_rhx)),$$

para todo $h \in H$. Assim, $f(a_ix) = f(a_ihx)$, para todo $h \in H$ e $i = 1, \dots, r$. De acordo com a definição da ação de H sobre a órbita Gx , temos

$$h^{-1} \cdot a_ix := a_i(h^{-1})^{-1}x = a_ihx \in a_iHx, \quad \text{para } i = 1, \dots, r. \quad (2.12)$$

Assim, f colapsa cada órbita Ha_ix determinada pela ação de H sobre a_ix , para $i = 1, \dots, r$ e, portanto, $x \in A(f, H, G)$.

Agora, observamos que $H \cong \mathbb{Z}_p$ age livremente sobre X pela ação restrição, e por hipótese $\text{ind } X \geq n > mr(p-1)$. Pelo Lema 2.9, $F^*(v_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde v_k são as classes de Wu de M^r . Assim, de acordo com o Teorema A [46, Teorema 1.2],

$$\text{ind } A_F \geq n - mr(p-1) = n - m(|G| - r).$$

Consideramos a aplicação inclusão $i : A_F \hookrightarrow A(f, H, G)$, que é equivariante e, assim, induz uma aplicação $\bar{i} : A_F/H \rightarrow A(f, H, G)/H$ entre os espaços de órbitas. Portanto, se $c : A(f, H, G)/H \rightarrow B\mathbb{Z}_p$ é qualquer aplicação classificante, temos que $c \circ \bar{i} : A_F/H \rightarrow B\mathbb{Z}_p$ é uma aplicação classificante. Logo,

$$\text{ind } A(f, H, G) \geq \text{ind } A_F \geq n - m(|G| - r).$$

Em particular, $H^{n-m(|G|-r)}(A(f, H, G)/\mathbb{Z}_p) \neq 0$. Assim, de acordo com a Definição 2.10 e a Proposição 2.11,

$$\text{cohom.dim } A(f, H, G) \geq \text{cohom.dim } A(f, H, G)/\mathbb{Z}_p \geq n - m(|G| - r). \quad \blacksquare$$

Corolário 2.12. *Sejam X um espaço paracompacto Hausdorff e G grupo finito agindo livremente sobre X . Sejam p um número primo que divide $|G|$ e M uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$). Suponhamos que $\text{ind } X \geq n > m(|G| - r)$, onde $r = \frac{|G|}{p}$. Então, para uma função contínua $f : X \rightarrow M$ tal que $f^*(V_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde V_k são as classes de W_u de M , existe um subgrupo não trivial H de G , tal que*

$$\text{cohom.dim } A(f, H, G) \geq n - m(|G| - r).$$

Demonstração: Consideramos p um número primo que divide $|G|$. Pelo Teorema de Cauchy, existe um subgrupo cíclico não trivial H de G com ordem p . Então, aplicamos o Teorema 2.1. ■

Observação 2.13. Observamos que se $f^* : H^i(M; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(X; \mathbb{Z}_p)$ é trivial, para todo $i \geq 1$, e se p é o menor número primo dividindo $|G|$, então temos $r = \frac{|G|}{p} \geq \frac{|G|}{q}$, onde q pode ser qualquer outro número primo dividindo $|G|$. Assim, $n > m(|G| - \frac{|G|}{q})$. Portanto, para cada número primo q dividindo $|G|$, existe um subgrupo cíclico H_q de G com ordem q , tal que

$$\text{ind } A(f, H_q, G) \geq n - m\left(|G| - \frac{|G|}{q}\right).$$

O teorema a seguir é uma versão para variedades do teorema principal em [20].

Teorema 2.14. *Sejam G um grupo finito agindo livremente sobre a esfera n -dimensional S^n e H um subgrupo cíclico de G de ordem igual a um número primo p . Seja $f : S^n \rightarrow M$ uma função contínua, onde M é uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$). Se $n > m(|G| - r)$, onde $r = \frac{|G|}{p}$, então*

$$\text{cohom.dim}(A(f, H, G)) \geq n - m(|G| - r).$$

Demonstração: Temos $f^*(V_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, pois $n > m(|G| - r) \geq m$. Além disso, $\text{ind } S^n = n$ e assim podemos aplicar o Teorema 2.1. ■

2.4.2 Demonstração do Teorema 2.3

Agora, consideramos X um espaço compacto Hausdorff e $\varphi : X \rightarrow S^n$ uma aplicação essencial. Suponhamos que G seja um grupo finito de ordem s , agindo livremente sobre S^n , e seja H um subgrupo de G com ordem igual a um número primo p . Seja $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ uma enumeração fixada dos elementos de G , onde g_1 é a identidade de G . Um espaço não vazio X_φ pode ser associado à aplicação essencial $\varphi : X \rightarrow S^n$, como segue:

$$X_\varphi = \{(x_1, \dots, x_s) \in X^s : g_i \varphi(x_1) = \varphi(x_i), i = 1, \dots, s\},$$

onde X^s denota o produto cartesiano de s cópias de X . O conjunto X_φ é compacto, pois é um subconjunto fechado do espaço compacto X^s . Definimos uma G -ação sobre X_φ , da seguinte forma: para cada $g_i \in G$ e para cada $(x_1, \dots, x_s) \in X_\varphi$,

$$g_i(x_1, \dots, x_s) = (x_{\sigma_{g_i}(1)}, \dots, x_{\sigma_{g_i}(s)}),$$

onde a permutação σ_{g_i} é definida por:

$$\sigma_{g_i}(k) = j, \quad \text{sempre que } g_k g_i = g_j.$$

Observamos que se $x = (x_1, \dots, x_s) \in X_\varphi$ então $x_i \neq x_j$, para qualquer $i \neq j$ e, portanto, G age livremente sobre X_φ .

Em [33], os autores provaram o seguinte

Teorema B. [33, Teorema 3.1] *Sejam X um espaço compacto Hausdorff e $\varphi : X \rightarrow S^n$ uma aplicação essencial. Então, o $\mathbb{Z}_p$ -índice de X_φ é igual a n .*

Consideramos $f : X \rightarrow M$ contínua, onde M é um espaço topológico e definimos a função $\tilde{f} : X_\varphi \rightarrow M$ por $\tilde{f}(x_1, \dots, x_s) = f(x_1)$.

Definição 2.15. *O conjunto $A_\varphi(f, H, G)$ dos pontos de (H, G) -coincidência de f relativo a φ é definido por*

$$A_\varphi(f, H, G) = A(\tilde{f}, H, G).$$

Demonstração do Teorema 2.3: Seja $\tilde{f} : X_\varphi \rightarrow M$ definida por $\tilde{f}(x_1, \dots, x_r) = f(x_1)$, isto é, $\tilde{f} = f \circ \pi_1$, onde π_1 é a projeção natural sobre a primeira coordenada. Por hipótese, $f^*(V_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde V_k são as classe de Wu de M , assim temos $\tilde{f}^*(V_k) = \pi_1^*(f^*(V_k)) = 0$, para todo $k \geq 1$. Além disso, o $\mathbb{Z}_p$ -índice de X_φ é igual a n , de acordo com o Teorema B [33, Teorema 3.1]. Desta forma, X_φ e $\tilde{f}$ satisfazem as hipóteses do Teorema 2.1 e, portanto, o $\mathbb{Z}_p$ -índice do conjunto $A(\tilde{f}, H, G)$ é maior que ou igual a $n - m(|G| - r)$. Desde que, por definição, $A_\varphi(f, H, G) = A(\tilde{f}, H, G)$, concluimos que

$$\text{cohom.dim } A_\varphi(f, H, G) \geq n - m(|G| - r).$$

■

Por um argumento similar àquele usado na demonstração do Corolário 2.12 temos o seguinte corolário do Teorema 2.3.

Corolário 2.16. *Sejam X um espaço compacto Hausdorff e G um grupo finito agindo livremente sobre a esfera S^n . Sejam p um número primo dividindo $|G|$ e M uma variedade m -dimensional conexa (orientável, se $p > 2$). Suponhamos que $n > m(|G| - r)$, onde $r = \frac{|G|}{p}$. Então, para uma função contínua $f : X \rightarrow M$ tal que $f^*(V_k) = 0$, para todo $k \geq 1$, onde V_k são as classes de Wu de M , existe um subgrupo não trivial H de G tal que*

$$\text{cohom.dim } A_\varphi(f, H, G) \geq n - m(|G| - r).$$

■

Capítulo 3

Estimando a dimensão do conjunto das $(H, \mathbb{Z}_{p^k})$ -coincidências

Seja $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ o grupo cíclico com ordem igual a uma potência de um número primo p , onde $k \geq 1$. Neste capítulo, estimamos a dimensão topológica (dimensão de cobertura) do conjunto das (H, G) -coincidências de uma função contínua $f : S(V) \rightarrow W'$ de uma esfera $S(V)$ de uma representação ortogonal V de G em um espaço vetorial real W' . Em todo este capítulo, $\dim(X)$ denotará a dimensão de cobertura de um espaço topológico X (vide Observação 5.29).

Inicialmente, revisitamos a definição de uma representação de um grupo topológico (para maiores detalhes, vide [15]).

Definição 3.1. Uma *representação* complexa (real) de um grupo topológico G sobre um espaço vetorial complexo (real) V de dimensão finita, é uma ação contínua $\rho : G \times V \rightarrow V$, tal que para cada $g \in G$, a translação à esquerda $L_g : V \rightarrow V$, $L_g(v) = gv$, é uma aplicação linear. Chamamos V ou o par (V, ρ) um **espaço de representação**. A representação é chamada ortogonal se a aplicação linear translação L_g é ortogonal, para cada $g \in G$.

Assim, representações são simetrias de alguns dos mais básicos objetos em Geometria e Álgebra, a saber, os espaços vetoriais.

Definição 3.2. Se um grupo G age sobre um espaço de representação V por transformações ortogonais L_g , então a esfera unitária $S(V)$ de V é invariante e

tem uma ação induzida de G . Um G -espaço desse tipo é chamado uma **esfera de representação**.

Se V é uma representação real de um grupo compacto G , então sempre existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre V tal que $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$, para todo $g \in G$ e $v, w \in V$. Então, a esfera unitária $S(V) = \{v \in V : \langle v, v \rangle = 1\}$ é uma esfera de representação.

Agora, seja $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ o grupo cíclico com ordem igual a uma potência de um número primo p , com $k \geq 1$. Para duas potências fixadas $1 \leq m \leq n \leq p^{k-1}$ de p , consideramos o conjunto

$$\mathcal{A}_{m,n} := \{G/H : H \subset G; m \leq |H| \leq n\}, \quad (3.1)$$

onde $|H|$ é a cardinalidade de H . Denotamos por $\mathcal{A}_X$ o conjunto de todas as G -órbitas de um espaço X (a menos de um homeomorfismo, e assim a menos de um isomorfismo de G -conjuntos finitos).

Seja V uma representação ortogonal de $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, p primo, $k \geq 1$, tal que o conjunto dos pontos fixos de G é trivial, isto é,

$$V^G = \{v \in V : g^j v = v; g \in G \text{ gerador fixado e } 1 \leq j \leq p^k\} = \{0\}.$$

Para $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, com p ímpar, toda representação ortogonal irredutível e não trivial tem dimensão igual a um número par e admite uma estrutura complexa (vide [41]), assim V também admite uma estrutura complexa. Denotamos por

$$d(V) = \dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$$

o invariante numérico inteiro de V . Se $G = \mathbb{Z}_{2^k}$ e V é uma representação ortogonal real de G , então denotamos

$$d(V) = \dim_{\mathbb{R}} V.$$

Dados W' um espaço vetorial real e uma função contínua $f : S(V) \rightarrow W'$, estimamos a dimensão do conjunto $A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k})$ das $(\mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k})$ -coincidências de

f , para todo $1 \leq i \leq k$, como segue.

Teorema 3.3. *Sejam V uma representação ortogonal complexa do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, $p > 2$ primo, $k \geq 1$, tal que $V^G = \{0\}$ e W' um espaço vetorial real. Seja $f : S(V) \rightarrow W'$ uma função contínua.*

(1) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{k-1}}$, então para todo $1 \leq i \leq k$,*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) \geq 2 \left(\frac{d(V) - 1}{p^{k-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW'.$$

(2) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}}$, para algum $1 \leq i \leq k$, então*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) \geq 2 \left(\frac{d(V) - 1}{p^{i-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW'.$$

Teorema 3.4. *Sejam V uma representação ortogonal real do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{2^k}$, $k \geq 1$, tal que $V^G = \{0\}$ e W' um espaço vetorial real. Seja $f : S(V) \rightarrow W'$ uma função contínua.*

(1) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,2^{k-1}}$, então para todo $1 \leq i \leq k$,*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{2^i}, \mathbb{Z}_{2^k}) \geq \left(\frac{d(V) - 1}{2^{k-1}} \right) - (2^k - 2^{k-i})dW'.$$

(2) *Se $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,2^{i-1}}$, para algum $1 \leq i \leq k$, então*

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{2^i}, \mathbb{Z}_{2^k}) \geq \left(\frac{d(V) - 1}{2^{i-1}} \right) - (2^k - 2^{k-i})dW'.$$

Observação 3.5. Observamos que os Teoremas 3.3 e 3.4 possuem algumas características peculiares que os diferem dos resultados clássicos sobre (H, G) -coincidências. A primeira característica que destacamos é que a ação de G sobre $S(V)$ não é necessariamente livre. A segunda é que os teoremas fornecem uma estimativa para a dimensão do conjunto das (H, G) -coincidências de uma função contínua $f : S(V) \rightarrow W'$, para todos os subgrupos $H = \mathbb{Z}_{p^i}$ de $G = \mathbb{Z}_{p^k}$. No caso em que a ação do grupo $G = \mathbb{Z}_{p^k}$ sobre $S(V)$ é livre, então todas as órbitas sobre a esfera são homeomorfas a G e, deste modo, $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,1}$. Assim,

a hipótese do Teorema 3.3 (2) (respectivamente, Teorema 3.4 (2)) é satisfeita para $i = 1$ e, portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \dim A(f, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^k}) &\geq 2(d(V) - 1) - (p^k - p^{k-1})dW' \\ &= \dim_{\mathbb{R}} S(V) - 1 - (|G| - r)dW', \end{aligned} \quad (3.2)$$

para $p > 2$, onde $r = \frac{|G|}{p}$. E, no caso em que $p = 2$, temos

$$\begin{aligned} \dim A(f, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_{2^k}) &\geq (d(V) - 1) - (2^k - 2^{k-1})dW' \\ &= \dim_{\mathbb{R}} S(V) - (|G| - r)dW'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim, considerando $W' = \mathbb{R}^m$ e comparando as estimativas em (3.2) e (3.3) com aquelas obtidas no Teorema 2.1, percebemos que para o caso $p > 2$, elas diferem apenas em 1 e, para o caso $p = 2$, elas são exatamente as mesmas.

A demonstração dos Teoremas 3.3 e 3.4 são baseadas em resultados recentes obtidos em [32], os quais descreveremos na próxima seção.

3.1 Versões Bourgin-Yang do Teorema de Borsuk-

Ulam para $G = \mathbb{Z}_{p^k}$

Recentemente, em [32], os autores demonstraram a seguinte versão Bourgin-Yang do Teorema de Borsuk-Ulam para uma representação ortogonal complexa de $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, onde p é primo e $k \geq 1$.

Teorema 3.6. [32, Teorema 3.6] *Sejam V, W duas representações ortogonais complexas do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, p primo, $k \geq 1$, tais que $V^G = W^G = \{0\}$. Seja $f : S(V) \xrightarrow{G} W$ uma aplicação equivariante e $Z_f := f^{-1}(0) = \{v \in S(V) : f(v) = 0\}$. Suponha $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{m,n}$ e $\mathcal{A}_{S(W)} \subset \mathcal{A}_{m,n}$. Então,*

$$\dim(Z_f) \geq 2 \left(\binom{(d(V) - 1)m}{n} - d(W) \right).$$

Eles também demonstraram a seguinte versão Bourgin-Yang do Teorema de Borsuk-Ulam para representações ortogonais reais de $G = \mathbb{Z}_{2^k}$, onde $k \geq 1$.

Teorema 3.7. [32, Teorema 3.9] *Sejam V, W representações ortogonais reais do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{2^k}$, $k \geq 1$, tais que $V^G = W^G = \{0\}$. Seja $f : S(V) \xrightarrow{G} W$ uma aplicação equivariante e $Z_f = f^{-1}(0)$. Suponha que $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{m,n}$ e $\mathcal{A}_{S(W)} \subset \mathcal{A}_{m,n}$. Então,*

$$\dim(Z_f) \geq \left(\frac{(d(V) - 1)m}{n} \right) - d(W).$$

3.2 Demonstração dos teoremas principais

Demonstração do Teorema 3.3: Seja i fixado, com $1 \leq i \leq k$ e consideramos o espaço vetorial real $\bigoplus_{j=1}^{p^k} W'$, o qual é a soma direta de p^k cópias de W' . O espaço $\bigoplus_{j=1}^{p^k} W'$ admite uma ação do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, definida por

$$g(w_1, w_2, \dots, w_{p^k}) = (w_2, \dots, w_{p^k}, w_1),$$

para um gerador fixado $g \in G$ e para cada $(w_1, \dots, w_{p^k}) \in \bigoplus_{j=1}^{p^k} W'$.

Denotamos por $\Delta(W'^{p^{k-i}})$ a diagonal de $\bigoplus_{j=1}^{p^k} W' = W'^{p^{k-i}} \oplus \dots \oplus W'^{p^{k-i}}$. Temos

$$\bigoplus_{j=1}^{p^k} W' = \Delta(W'^{p^{k-i}}) \oplus (\Delta(W'^{p^{k-i}}))^\perp,$$

onde $\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp$ denota o complemento ortogonal de $\Delta(W'^{p^{k-i}})$. Desde que $\Delta(W'^{p^{k-i}})$ é um $(p^{k-i} \dim W')$ -dimensional G -subespaço de $\bigoplus_{i=1}^{p^k} W'$, observamos que $\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp$ é uma $((p^k - p^{k-i}) \dim W')$ -dimensional G -sub-representação de $\bigoplus_{i=1}^{p^k} W'$, para a qual o conjunto dos pontos fixos é $(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)^G = \{0\}$.

Agora, denotamos por $a_1, \dots, a_r$ um conjunto de representantes das classes laterais à esquerda de $G/\mathbb{Z}_{p^i}$, onde $r = p^{k-i}$.

Considere a aplicação $F : S(V) \rightarrow \Delta(W'^{p^{k-i}}) \oplus (\Delta(W'^{p^{k-i}}))^\perp$, definida por:

$$F(x) = (f(a_1x), \dots, f(a_rx), f(a_1hx), \dots, f(a_rhx), \dots, f(a_1h^{p^i-1}x), \dots, f(a_rh^{p^i-1}x)),$$

para um gerador fixado $h \in \mathbb{Z}_{p^i}$. A projeção ortogonal linear ao longo da diago-

nal $\Delta(W'^{p^{k-i}})$ define uma aplicação G -equivariante

$$\rho : \Delta(W'^{p^{k-i}}) \oplus \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp \rightarrow \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp.$$

Denotamos por l a seguinte composição:

$$S(V) \xrightarrow{F} \Delta(W'^{p^{k-i}}) \oplus \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp \xrightarrow{\rho} \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp, \quad (3.4)$$

com $Z_l = l^{-1}(0) = (\rho \circ F)^{-1}(0) = F^{-1}(\Delta(W'^{p^{k-i}})) = A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k})$.

Para um gerador fixado $g \in G$, podemos considerar

$$h = g^{p^{k-i}}, \quad a_1 = e, a_2 = g, \dots, a_r = g^{p^{k-i}-1}.$$

Então, l é uma aplicação G -equivariante e, além disso,

$$\mathcal{A}_{S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}} \subset \mathcal{A}_{1,p^{k-1}}. \quad (3.5)$$

Para verificar a validade da inclusão $\mathcal{A}_{S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}}$, basta verificar que a cardinalidade da órbita $\mathbb{Z}_{p^k}w$ pertence ao conjunto $\{p^k, p^{k-1}, \dots, p^{k-i+1}\}$, para qualquer $w = (w_1, \dots, w_{p^k}) \in S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)$. A prova seguirá por contradição. Recordamos que, de acordo com [7, Capítulo 1, §4, Proposição 4.1], a cardinalidade da órbita $\mathbb{Z}_{p^k}w$ pertence ao conjunto $\{p^k, p^{k-1}, \dots, p, p^0 = 1\}$. Seja $w = (w_1, \dots, w_{p^k}) \in S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)$ e suponhamos que

$$|\mathbb{Z}_{p^k}w| \in \{p^{k-i}, p^{k-i-1}, \dots, p^0 = 1\},$$

digamos $|\mathbb{Z}_{p^k}w| = p^j$, para algum $0 \leq j \leq k-i$. Assim, para o gerador g de $\mathbb{Z}_{p^k}$ fixado, temos

$$\begin{aligned} w = g^{p^j}w &= g^{p^j}(w_1, \dots, w_{p^j}, \dots, w_{(p^{k-j}-1)p^j+1}, \dots, w_{p^k}) \\ &= (w_{p^j+1}, \dots, w_{2p^j}, \dots, w_{(p^{k-j}-1)p^j+1}, \dots, w_{p^k}, w_1, \dots, w_{p^j}) \end{aligned}$$

e, deste modo,

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{p^j+1} = \cdots = w_{(p^{k-j}-1)p^j+1}, \\ w_2 &= w_{p^j+2} = \cdots = w_{(p^{k-j}-1)p^j+2}, \\ &\vdots \\ w_{p^j} &= w_{2p^j} = \cdots = w_{p^k}, \end{aligned}$$

ou seja, $w \in \Delta(W'^{p^j})$. Como temos as inclusões das diagonais:

$$\Delta(W') \subset \Delta(W'^p) \subset \cdots \subset \Delta(W'^{p^{k-i-1}}) \subset \Delta(W'^{p^{k-i}})$$

e $j \in \{0, 1, \dots, k-i\}$, concluimos que

$$w \in \Delta(W'^{p^j}) \subset \Delta(W'^{p^{k-i}}),$$

o que é uma contradição, desde que

$$\Delta(W'^{p^{k-i}}) \cap S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp) = \emptyset.$$

Note que, pela hipótese no item (1), temos $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{k-1}}$ e como de (3.5), $\mathcal{A}_{S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{k-1}}$, segue do Teorema 3.6, aplicado para a função G -equivariante l dada em (3.4), que:

$$\begin{aligned} \dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) = \dim(Z_l) &\geq 2 \left(\left(\frac{d(V)-1}{p^{k-1}} \right) - d\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp \right) \\ &= 2 \left(\frac{d(V)-1}{p^{k-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW', \end{aligned}$$

desde que $d\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp = \dim_{\mathbb{C}} \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp$.

De maneira análoga, pela hipótese no item (2), temos $\mathcal{A}_{S(V)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}}$, para algum $1 \leq i \leq k$, e usando a inclusão $\mathcal{A}_{S(\Delta(W'^{p^{k-i}})^\perp)} \subset \mathcal{A}_{1,p^{i-1}}$, dada em (3.5), do Teorema 3.6 concluimos que

$$\dim A(f, \mathbb{Z}_{p^i}, \mathbb{Z}_{p^k}) = \dim(Z_l) \geq 2 \left(\frac{d(V)-1}{p^{i-1}} \right) - (p^k - p^{k-i})dW'. \quad \blacksquare$$

Demonstração do Teorema 3.4: Para $G = \mathbb{Z}_{2^k}$, $k \geq 1$, seguimos os mesmos passos da demonstração do Teorema 3.3, mas nesse caso aplicamos o Teorema 3.7 para obter o resultado. ■

Capítulo 4

Caracterização de aplicações triviais pelas fibras reais de Milnor

Neste capítulo estendemos a caracterização, pelas fibrações reais de Milnor, de germes de aplicações triviais iniciada por Church e Lamotke em [11]. Nossa caracterização recobre todos os casos onde a dimensão da fibra real de Milnor é igual a 3.

4.1 Fibrações de Milnor

No livro “Singular Points of Complex Hypersurfaces”, [35], John Willard Milnor estudou pontos singulares de hipersuperfícies complexas introduzindo um fibrado localmente trivial, conhecido como a *fibração de Milnor*, associado ao ponto singular. Ele demonstrou que existem tais fibrados localmente triviais associados a germes de funções holomorfas e também a germes de aplicações analíticas reais.

Mais precisamente, no contexto complexo, Milnor mostrou que dado um representante de um germe de uma função holomorfa $\psi : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, com $\psi(0) = 0$, existe um número real $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, tal que para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$

$$\frac{\psi}{\|\psi\|} : S_\epsilon^{2n+1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^1 \quad (4.1)$$

é a projeção suave de um fibrado localmente trivial, onde

$$K_\epsilon = \psi^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{2n+1}$$

é chamado o *link* da singularidade na origem. É bem conhecido que, no contexto complexo e para $n \geq 1$, o link K_ϵ nunca é vazio. Denotemos por

$$F_\theta = \left(\frac{\psi}{\|\psi\|} \right)^{-1} (e^{i\theta})$$

a fibra da fibração (4.1), onde $e^{i\theta} \in S^1$. Usando ferramentas da teoria de Morse, Milnor mostrou que F_θ é uma variedade real $2n$ -dimensional paralelizável (isto é, o fibrado tangente TF_θ da fibra é trivial) e tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito de dimensão n . Além disso, seu fecho topológico é dado por $\overline{F_\theta} = F_\theta \cup K_\epsilon$, e o link K_ϵ é $(n-2)$ -conexo, isto é, $\pi_i(K_\epsilon) = 0$, para todo $0 \leq i \leq n-2$. Assim, para $n = 2$ o link é conexo e para $n \geq 3$ o link é simplesmente conexo.

No caso em que a origem $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ é um ponto singular isolado de ψ , Milnor apresentou mais detalhes sobre a topologia da fibra e do link. Ele demonstrou que a fibra F_θ tem o tipo de homotopia de um buquê de esferas n -dimensionais $S^n \vee \dots \vee S^n$ (μ – cópias), onde o número μ de esferas no buquê é dado pelo grau topológico da aplicação

$$\frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|} : S_\epsilon^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1},$$

o qual será denotado por

$$\deg_0 \left(\frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|} \right).$$

Então, a característica de Euler-Poincaré da fibra é dada por

$$\chi(F_\theta) = 1 + (-1)^n \mu.$$

Desde que a *característica de Euler-Poincaré* de um espaço topológico X é definida pela fórmula $\sum_q (-1)^q \beta_q$, quando essa soma é finita, onde β_q é o posto

de $H_q(X; \mathbb{Z})$, chamado o q -ésimo número de Betti¹ do espaço X , temos

$$H_q(S^n \vee \cdots \vee S^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \\ \mathbb{Z}^\mu = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq 0, n. \end{cases}$$

Milnor também mostrou que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a variedade

$$(\psi^{-1}(0) - \{0\}) \cap B_{\epsilon_0}^{2n+2}$$

intercepta transversalmente todas as esferas S_ϵ^{2n+1} , $0 < \epsilon < \epsilon_0$, e portanto, pelo Teorema de Transversalidade (Teorema 1.9), o espaço K_ϵ é uma variedade suave $(2n - 1)$ -dimensional. Além disso, para cada θ , o espaço $\overline{F}_\theta = F_\theta \cup K_\epsilon$ é uma variedade compacta cujo bordo é o link K_ϵ .

No contexto real, Milnor considerou uma aplicação polinomial

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \text{ tal que } f(0) = 0, \quad n \geq p \geq 2.$$

Ele assumiu que, em alguma vizinhança aberta U da origem $0 \in \mathbb{R}^n$,

$$\Sigma(f) \cap U \subseteq \{0\}, \quad \text{com } \Sigma(f) = \{x \in U : Jf(x) \text{ não tem posto máximo}\},$$

onde $Jf(x)$ denota o Jacobiano de f em x . Isso significa que a origem é um ponto singular isolado da aplicação f .

O próximo resultado segue de [35, Teorema 11.2, pg. 97].

Teorema 4.1. *Existe $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para qualquer $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ existe η , com $0 < \eta \ll \epsilon$, satisfazendo a condição de que a aplicação*

$$f|_1 : f^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap B_\epsilon^n \rightarrow S_\eta^{p-1} \tag{4.2}$$

é a projeção suave de um fibrado localmente trivial, onde B_ϵ^n denota a bola fechada n -dimensional centrada na origem.

Segue de (4.2) que a fibra é uma variedade suave compacta $(n-p)$ -dimensional,

¹Para detalhes, vide [22, Capítulo 20].

cujo bordo é dado por $(f|)^{-1}(y) \cap S_\epsilon^{n-1}$. Além disso, esta fibração induz o seguinte fibrado suave

$$f| : f^{-1}(S_\eta^{p-1}) \cap \overset{\circ}{B}_\epsilon^n \rightarrow S_\eta^{p-1}, \quad (4.3)$$

onde $\overset{\circ}{B}_\epsilon^n$ denota o interior da bola fechada n -dimensional B_ϵ^n . Neste caso, a fibra é uma variedade aberta.

Se o link $K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{n-1}$ é não vazio, então ele é difeomorfo ao bordo da fibra da fibração (4.2). De fato, de acordo com [35, Corolário 2.9, pg. 17], existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que o link $K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{n-1}$ é uma variedade suave $(n - p - 1)$ -dimensional. A origem $0 \in \mathbb{R}^p$ é um valor regular da restrição $f|_{S_\epsilon^{n-1}} : S_\epsilon^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ (vide [35, pg. 97]). Assim existe η , com $0 < \eta \ll \epsilon$, tal que a bola B_η^p centrada na origem consiste somente de valores regulares. Então, de acordo com o Teorema de Ehresmann (Teorema 1.11), a aplicação

$$f| : f^{-1}(B_\eta^p) \cap S_\epsilon^{n-1} \rightarrow B_\eta^p \quad (4.4)$$

é a projeção de um fibrado suave e temos $T = f^{-1}(B_\eta^p) \cap S_\epsilon^{n-1}$ difeomorfo a $K_\epsilon \times B_\eta^p$, desde que o espaço base do fibrado é contrátil. Milnor demonstrou que o espaço total da fibração (4.4) é difeomorfo ao complemento $S_\epsilon^{n-1} \setminus \overset{\circ}{T}$ de uma vizinhança tubular aberta do link. Observamos que a fibra $F_y = B_\epsilon^n \cap f^{-1}(y)$ da fibração (4.2) é uma variedade compacta com bordo $\partial F_y = S_\epsilon^n \cap f^{-1}(y)$, a qual é difeomorfa ao link K_ϵ , desde que ∂F_y é a fibra da fibração (4.4).

Ainda como uma aplicação do Teorema de Ehresmann para variedades com bordo, temos que a aplicação

$$f| : f^{-1}(B_\eta^p - \{0\}) \cap B_\epsilon^n \rightarrow B_\eta^p - \{0\}, \quad (4.5)$$

é uma projeção suave de um fibrado localmente trivial, onde $B_\eta^p - \{0\}$ denota a bola fechada p -dimensional, em $\mathbb{R}^p$ de raio η , menos a origem. Portanto, desde que a inclusão $S_\eta^{p-1} \subset B_\eta^p - \{0\}$ é uma equivalência de homotopia então, a menos de homotopia, as informações topológicas contidas nas fibrações (4.2) e (4.5) são as mesmas. Podemos dizer o mesmo sobre as fibras das fibrações (4.2) e (4.3), pois uma variedade com bordo não vazio é homotopicamente

equivalente ao seu interior. Por estas razões, podemos nos concentrar no estudo da topologia da fibra da fibração (4.2).

Milnor ainda observou que o complemento $S_\epsilon^{n-1} \setminus K_\epsilon$ também fibra sobre S^{p-1} . Entretanto, diferentemente do que acontece no caso complexo, a aplicação

$$\frac{f}{\|f\|} : S_\epsilon^{n-1} \setminus K_\epsilon \rightarrow S^{p-1}$$

não é a projeção de um fibrado. Essa construção direta não funciona, por exemplo, no caso

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)).$$

Uma importante informação sobre a conexidade da fibra real de Milnor é dada na próxima Proposição, a qual segue de [35, Lema 11.4, pg. 100-101].

Proposição 4.2. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem, $n \geq p \geq 2$. Se o link K_ϵ é não vazio, então a fibra F_f da fibração em (4.2) é $(p-2)$ -conexa.*

Demonstração: Segue dos dois primeiros parágrafos da demonstração do Lema 11.4 em [35]. ■

Observação 4.3. Nos últimos anos, as fibrações reais de Milnor foram estendidas em várias direções no sentido de singularidades isoladas e não-isoladas. Alguns resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [5, 44, 40] e em suas referências.

Recentemente, no artigo *Topology of real Milnor fiber for isolated singularities* [4], utilizando ferramentas da teoria de Singularidades, teoria de Morse e da Geometria Diferencial, R. Araújo dos Santos, D. Dreibeibris and N. Dutertre demonstraram uma extensão da fórmula de Khinshiasvili, (vide [28]), para a característica de Euler-Poincaré de uma singularidade isolada de um germe de uma aplicação polinomial

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0), \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)), \quad n \geq p \geq 2. \quad (4.6)$$

Denotemos por F_f a fibra da fibração de Milnor associada (4.2). O principal resultado em [4] é o seguinte

Teorema 4.4. [4, Proposição 3.3] *Seja f um germe de uma aplicação polinomial, como em (4.6).*

- a) *Se n é par, então $\chi(F_f) = 1 - \deg_0(\nabla f_1)$, onde $\deg_0(\nabla f_1)$ denota o grau topológico da aplicação*

$$\frac{\nabla f_1}{\|\nabla f_1\|} : S_\epsilon^{n-1} \rightarrow S_1^{n-1}.$$

Além disso, $\deg_0(\nabla f_1) = \deg_0(\nabla f_2) = \dots = \deg_0(\nabla f_p)$.

- b) *Se n é ímpar, então $\chi(F_f) = 1$. Além disso, $\deg_0(\nabla f_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, p$.*

Em [35, pg. 100] Milnor fez a seguinte pergunta:

“Para quais dimensões $n \geq p \geq 2$ existem exemplos não triviais?”

Na verdade, Milnor não especificou precisamente o significado de uma “aplicação ser trivial”. Mas, em um certo sentido, ele propôs chamar uma aplicação polinomial f , com uma singularidade isolada na origem, “trivial” se a fibra F_f da sua fibração associada (4.2) é difeomorfa ao disco fechado $(n-p)$ -dimensional.

Utilizando esse conceito como uma definição, Church e Lamotke em [11], usando resultados de Looijenga, [31], responderam a questão proposta por Milnor, como segue.

Teorema 4.5. [11, pg. 149-150] (a) *Para $0 \leq n-p \leq 2$, exemplos não triviais ocorrem precisamente para os pares de dimensões $(n, p) = (2, 2)$, $(4, 3)$ e $(4, 2)$.*

(b) *Para $n-p \geq 4$, exemplos não triviais ocorrem para todos os pares de dimensões (n, p) .*

(c) *Para $n-p = 3$, exemplos não triviais ocorrem para os pares $(5, 2)$ e $(8, 5)$. Além disso, se a conjectura de Poincaré (3-dimensional) for falsa, então existem exemplos não triviais para todos os pares de dimensões (n, p) . Se a conjectura de Poincaré for verdadeira, então todos os exemplos são triviais, exceto para os pares de dimensões $(5, 2)$, $(8, 5)$ e, possivelmente, para o par $(6, 3)$.*

Além disso, em [11, pg. 151], os autores demonstraram uma caracterização

alternativa de um germe de uma aplicação trivial utilizando o “branch set” B_f de uma aplicação f , a saber, o conjunto onde o germe não é localmente topologicamente equivalente a uma projeção.

Proposição 4.6. [11, pg. 151] *Para $n - p \neq 4, 5$, f é trivial se, e somente se, $0 \notin B_f$.*

Também em [11], os autores determinaram os pares de dimensões (n, p) para os quais a origem 0 é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$, ou seja, localmente, o conjunto $f^{-1}(0) = \{0\}$. Isto é equivalente ao link $K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^{n-1}$ ser vazio.

Lema 4.7. [11, Lema 1, pg. 151] *Se 0 é um ponto isolado de $f^{-1}(0)$, então $n = p$, ou $(n, p) = (4, 3), (8, 5), (16, 9)$. Se $n = p$, a singularidade é trivial, exceto se $p = 2$. Os outros casos nunca são triviais.*

Desde que a conjectura de Poincaré é verdadeira, segue do Teorema 4.5 que para a dimensão $n - p = 3$, a aplicação singular f pode ser não trivial somente para os pares de dimensões

$$(n, p) = (6, 3), (8, 5), (5, 2). \quad (4.7)$$

O objetivo neste capítulo é dar condições sob as quais um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem é trivial nos três casos listados em (4.7), usando a Conjectura de Poincaré, ferramentas da Topologia Algébrica e da teoria de Singularidades e a fórmula para a característica de Euler-Poincaré da fibra real de Milnor dada no Teorema 4.4 e provada em [4].

O teorema principal deste capítulo, enunciado a seguir, recobre todos os casos onde a dimensão da fibra de Milnor é $n - p = 3$.

Teorema 4.8. [42, Teorema 1.6] *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem. Suponhamos que $n - p = 3$.*

(a) *Se o par é $(n, p) = (6, 3)$, então são equivalentes:*

(i) *f é trivial;*

- (ii) $\deg_0(\nabla f_1) = 0$;
 - (iii) O link K_ϵ é conexo.
- (b) Se o par é $(n, p) = (8, 5)$, então são equivalentes:
- (i) f é trivial;
 - (ii) $\deg_0(\nabla f_1) = 0$;
 - (i) O link K_ϵ é não vazio.
- (c) Se o par é $(n, p) = (5, 2)$, então são equivalentes:
- (i) f é trivial;
 - (ii) $\pi_1(F_f) = 0$, isto é, a fibra real de Milnor F_f é simplesmente conexa.

Observação 4.9. A prova do caso $(5, 2)$ não será apresentada aqui, desde que um estudo detalhado deste caso está sendo desenvolvido no trabalho de doutorado em andamento de M. A. B. Hohlenwerger.

Destacamos que em [4] os autores demonstraram certas fórmulas, a fim de descrever geometricamente e topologicamente a fibra real de Milnor e uma caracterização do germe trivial para o par $(4, 2)$. Para isto, eles utilizaram uma condição análoga à do Teorema 4.8 (a) (vide [4, Corolário 4.5]). Eles demonstraram que uma singularidade isolada de um germe de uma aplicação polinomial

$$f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

é trivial se, e somente se, $\deg_0(\nabla f_1) = 0$.

4.2 Resultados sobre a topologia das variedades 3-dimensionais

Nesta seção estabelecemos alguns resultados clássicos da Topologia Algébrica a fim de provar o resultado principal deste capítulo (Teorema 4.8). Nos concentramos sobre os resultados relacionados à topologia das variedades compactas 3-dimensionais.

O resultado a seguir é um fato bem conhecido em Topologia Algébrica.

Teorema 4.10. [45, Capítulo 6, Teorema 6.38, pg. 180] *Se M é uma variedade topológica n -dimensional compacta com bordo ∂M , então a característica de Euler do bordo de M é par. Mais precisamente,*

$$\chi(\partial M) = \begin{cases} 2\chi(M), & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Proposição 4.11. *Se M é uma variedade topológica n -dimensional compacta, conexa e orientável, com bordo não-vazio, então $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$, para $i \geq n$.*

Demonstração: O interior $\overset{\circ}{M}$ de M é uma variedade n -dimensional não compacta, conexa, sem bordo e a inclusão $\iota : \overset{\circ}{M} \hookrightarrow M$ é uma equivalência de homotopia, então por [25, Proposição 3.29, pg.239], temos

$$H_i(M; \mathbb{Z}) \cong H_i(\overset{\circ}{M}; \mathbb{Z}) = 0,$$

para todo $i \geq n$. ■

Lema 4.12. *Seja M uma variedade topológica 3-dimensional, compacta, conexa e orientável com bordo ∂M . Se $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$, então ∂M é uma união disjunta de esferas de dimensão 2.*

Demonstração: Considere o seguinte trecho da seqüência exata em cohomologia do par $(M, \partial M)$:

$$\cdots \rightarrow H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow \cdots \quad (4.8)$$

A variedade M é compacta e orientável, então pelo Teorema da Dualidade de Poincaré-Lefschetz (vide [45, Teorema 6.25, pg. 171]) temos

$$H^2(M, \partial M; \mathbb{Z}) \cong H_1(M; \mathbb{Z}) = 0.$$

Por outro lado, $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ e, portanto, de (4.8) segue que $H^1(\partial M; \mathbb{Z}) = 0$ e usando a Dualidade de Poincaré para a variedade

2-dimensional fechada e orientável ∂M temos

$$0 = H^1(\partial M; \mathbb{Z}) \cong H_1(\partial M; \mathbb{Z}).$$

Pela classificação das variedades 2-dimensionais compactas, concluímos que a variedade ∂M é uma união disjunta de esferas de dimensão 2. ■

Lema 4.13. *Seja M uma variedade topológica 3-dimensional, compacta, conexa e orientável com bordo ∂M . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) M é contrátil.
- (ii) M é simplesmente conexa e tem a homologia de um ponto.
- (iii) M é simplesmente conexa e ∂M é uma esfera 2-dimensional.
- (iv) M é difeomorfa ao disco 3-dimensional.

Demonstração: Para (i) $\Leftrightarrow$ (ii), de acordo com [9, Corolário 10.11, pg. 479] um CW-complexo conexo K é contrátil se, e somente se, $\pi_1(K) = 0$ e $\tilde{H}_j(K; \mathbb{Z}) = 0$ para todo j , onde $\tilde{H}_j$ denotam os grupos de homologia reduzidos. Então, aplicamos esse resultado à variedade M pois, de acordo com [25, Corolário A.12, pg. 529], toda variedade compacta tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo.

Para (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), M é simplesmente conexa, então pelo Lema 4.12, o bordo ∂M é uma união disjunta de esferas de dimensão 2. Portanto, se M tem a homologia de um ponto, temos $\chi(M) = 1$, e pelo Teorema 4.10

$$\chi(\partial M) = 2\chi(M) = 2,$$

ou seja, ∂M é uma esfera 2-dimensional.

Reciprocamente, M é simplesmente conexa (em particular $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$) e pela Proposição 4.11, $H_j(M; \mathbb{Z}) = 0$ para $j \geq 3$. Então, é suficiente mostrar que $H_2(M; \mathbb{Z}) = 0$. De fato, temos $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$, e pela Dualidade de Poincaré-Lefschetz

$$0 \cong H^1(M; \mathbb{Z}) \cong H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}).$$

Agora, por [45, Teorema 6.24, pg. 169], existe uma única classe fundamental $z \in H_3(M, \partial M; \mathbb{Z})$ tal que $\Delta(z)$  uma classe fundamental de ∂M , onde $\Delta : H_3(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\partial M; \mathbb{Z})$  o homomorfismo conectante. Por hipótese, ∂M  uma esfera 2-dimensional, então Δ  sobrejetiva, e considerando a seqncia exata longa do par $(M, \partial M)$

$$H_3(M, \partial M) \xrightarrow{\Delta} H_2(\partial M) \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_2(M, \partial M) = 0,$$

temos $H_2(M; \mathbb{Z}) = 0$.

Para (i) $\Leftrightarrow$ (iv), seja $N = M \cup_{\partial M} M$ o “dobro” de M e sejam M_1 e M_2 duas cópias de M em N . Temos N uma variedade 3-dimensional, fechada e orientável. Por [25, Proposio 3.42, pg. 253] podemos considerar U a união de M_1 com uma vizinhança colar de M_2 . Do mesmo modo, podemos considerar V a união de M_2 com uma vizinhança colar de M_1 . Mas como, U , V e $U \cap V$ são espaços conexos por caminhos, eles são homotopicamente equivalentes a M_1 , M_2 e ∂M , respectivamente, e ∂M  simplesmente conexo. Assim, pelo Teorema de Van-Kampen (vide [45, Corolário 4.27, pg. 116]), temos

$$\pi_1(N) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2).$$

Por hipótese, $M_1 = M_2 = M$ são contráteis, então $\pi_1(N) = 0$. Portanto, pela conjectura de Poincaré, a variedade N  difeomorfa  esfera 3-dimensional e, portanto, a variedade M  difeomorfa ao disco 3-dimensional. A recíproca  evidente. ■

4.3 A demonstraco do resultado principal

Nesta seção, assumiremos que $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$,  um germe de uma aplicao polinomial com uma singularidade isolada na origem e $n - p = 3$. A demonstraco do Teorema 4.8 será dividida em duas partes. A primeira parte refere-se ao par $(6, 3)$. Recordamos que, neste caso, segue do Lema 4.7 que o link K_ϵ , o qual  difeomorfo ao bordo da fibra de Milnor ∂F_f ,  não vazio.

4.3.1 O caso $(6, 3)$

Seja $f : (\mathbb{R}^6, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ com uma singularidade isolada na origem.

Demonstração do Teorema 4.8. Item (a). Se f é trivial, a fibra F_f é difeomorfa ao disco 3-dimensional, então a característica de Euler da fibra F_f satisfaz $\chi(F_f) = 1$. Mas, $\chi(F_f) = 1 - \deg_0 \nabla f_1$, de acordo com o Teorema 4.4 (a), portanto $\deg_0 \nabla f_1 = 0$. Reciprocamente, temos $p = 3$, então a fibra F_f é simplesmente conexa, assim $H_1(F_f; \mathbb{Z}) = 0$. De acordo com o Lema 4.12, o bordo da fibra ∂F_f , o qual é difeomorfo ao link K_ϵ , é uma união disjunta de esferas 2-dimensionais. Mas, se $\deg_0 \nabla f_1 = 0$, então $\chi(F_f) = 1$ e

$$\chi(K_\epsilon) = \chi(\partial F_f) = 2\chi(F_f) = 2.$$

Portanto, o link K_ϵ é difeomorfo a uma esfera 2-dimensional e, pelo Lema 4.13, temos F_f difeomorfa ao disco 3-dimensional.

A implicação $(i) \Rightarrow (iii)$ é evidente. De fato, se f é trivial, então ∂F_f é difeomorfo à esfera 2-dimensional, portanto K_ϵ é conexo. Para a recíproca, temos o link conexo e sabemos que K_ϵ deve ser difeomorfo a uma cópia de uma esfera e pelo Lema 4.13 (iii), F_f é difeomorfa ao disco 3-dimensional. ■

Observação 4.14. A afirmação (a)(iii) do Teorema 4.8 não caracteriza, em geral, a trivialidade. Por exemplo, no caso do par $(4, 2)$ se consideramos $f(x, y) = x^2 + y^3$, o link é o “nó toroidal $(2, 3)$ ” (figura 4.1), o qual é conexo e a fibra aberta é difeomorfa ao espaço obtido removendo-se um disco aberto do toro.

Proposição 4.15. *Seja $f : (\mathbb{R}^6, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem. Então, a característica de Euler-Poincaré da fibra $\chi(F_f)$ é precisamente o número de esferas do seu bordo ∂F_f .*

Demonstração: A fibra F_f é uma variedade 3-dimensional simplesmente conexa, compacta e com bordo igual a d -cópias disjuntas de esferas 2-dimensionais. Então, cada esfera do bordo ∂F_f contribui com 2 para a sua característica de

Euler. Assim,

$$2d = \chi(\partial F_f) = 2\chi(F_f).$$

Portanto, $\chi(F_f) = d$. ■

Figura 4.1: nó toroidal (2,3)

4.3.2 O caso (8, 5)

Seja $f : (\mathbb{R}^8, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^5, 0)$ um germe de uma aplicação polinomial com uma singularidade isolada na origem. Pelo Lema 4.7, temos que para o par $(8, 5)$ o link K_ϵ pode ser vazio. É claro que, para o propósito de caracterização de aplicações triviais, uma condição necessária é que o link seja não vazio.

Demonstração do Teorema 4.8. Item (b). Por um argumento similar àquele utilizado na demonstração do Teorema 4.8 item (a), a condição $\deg_0(\nabla f_1) = 0$ caracteriza igualmente a trivialidade de f .

A implicação $(i) \Rightarrow (iii)$ é evidente. Para a implicação inversa, o link $K_\epsilon \neq \emptyset$ e $p = 5$, então fibra de Milnor F_f é uma 3-dimensional variedade orientável compacta com bordo e 3-conexa (portanto, simplesmente conexa). Pelo Teorema de Hurewicz, F_f deve ter a mesma homologia de um ponto, então pelo Lema 4.13 a fibra F_f é difeomorfa ao disco 3-dimensional. ■

4.4 Classificação de singularidades com link conexo no caso $(6, 3)$

Nesta seção, consideramos aplicações suaves $f : M^6 \rightarrow N^3$, com $\partial M = f^{-1}(\partial N)$, tal que f não tem pontos críticos no bordo ∂M , onde M e N são variedades suaves e compactas. Denotamos por $\varphi(M, N)$ o número mínimo de pontos críticos de tais aplicações. Em coordenadas locais ao redor de um ponto singular (e valor singular), consideramos o link da singularidade

$$K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^5,$$

onde S_ϵ^5 é uma esfera de raio ϵ suficientemente pequeno.

Apresentamos a seguir definições e fatos necessários para estabelecer a Proposição 4.23, que é o resultado principal desta seção.

Definição 4.16. Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação suave entre variedades suaves M^m e N^n , com um número finito de pontos críticos e $V = f^{-1}(f(x))$, onde x é um ponto crítico. De acordo com King (vide [29]) o ponto singular x é chamado *cone-like* se ele admite uma vizinhança cone em V , isto é, existe alguma variedade fechada $L \subset V \setminus \{x\}$ e uma vizinhança E de x em V que é homeomorfa ao cone $C(L) = L \times (0, 1]/L \times \{1\}$ sobre L .

Definição 4.17. Uma variedade diferenciável k -dimensional, compacta e orientada K é chamada uma k -esfera, se ela é homeomorfa à k -esfera padrão S^k . Duas k -esferas K_1 e K_2 são equivalentes se existe um difeomorfismo $h : K_1 \rightarrow K_2$ preservando orientação. Uma k -esfera que não é equivalente à esfera padrão S^k é chamada uma esfera exótica.

Definição 4.18. Uma função contínua $g : X \rightarrow Y$, entre espaços topológicos X e Y , é *localmente topologicamente equivalente*, em $x \in X$, a uma função contínua $g' : X' \rightarrow Y'$, em $x' \in X'$, se existem vizinhanças abertas U de x , U' de x' , V de $g(x)$ e V' de $g'(x')$, e homeomorfismos $\alpha : U \rightarrow U'$ e $\beta : V \rightarrow V'$ tais que $\beta \circ g|_U = g'|_{U'} \circ \alpha$.

Definição 4.19. Sejam W^m uma m -variedade e $g_1, \dots, g_k$, $k \leq m$, funções contínuas a valores reais definidas em uma vizinhança de um ponto $P \in W$. Dizemos que $g_1, \dots, g_k$ são topologicamente independentes em P , se existem funções contínuas $g_{k+1}, \dots, g_m$ também definidas em uma vizinhança de P , tais que $x \mapsto (g_1(x), \dots, g_m(x))$ aplica alguma vizinhança de P homeomorficamente sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Claramente, se $g_1, \dots, g_k$ são topologicamente independentes em P , então também o serão em todos os pontos de uma vizinhança de P .

Proposição 4.20. [17, Capítulo 8, Proposição 1.7, pg. 249] *Seja N um subconjunto de uma variedade W^{n+k} a qual, localmente, é o conjunto de soluções de k equações independentes. Isto significa que, para todo $P \in N$, existe uma vizinhança V^P em W e funções $g_1^P, \dots, g_k^P : V^P \rightarrow \mathbb{R}$ que são topologicamente independentes em P e tais que*

$$N \cap V^P = \{x \in V^P : g_1^P(x) = \dots = g_k^P(x) = 0\}.$$

Então, N é uma n -variedade.

Definição 4.21. Um subconjunto N de uma variedade W como na Proposição 4.20, é chamado uma *subvariedade localmente flat*.

Definição 4.22. Seja K um espaço topológico compacto com uma dada estrutura de homotopia simples, ou seja, K tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo finito, com a equivalência de homotopia especificada². Dada uma variedade topológica V , uma vizinhança regular R de K em V é uma subvariedade compacta localmente flat de V , de codimensão zero, que é uma vizinhança topológica de K , tal que a inclusão $K \hookrightarrow R$ é uma equivalência de homotopia simples³, e K é um retrato por deformação forte de R . Exigimos também que $\partial R \subset R \setminus K$ induza um isomorfismo sobre os grupos fundamentais para toda componente.

Como uma aplicação do Teorema 4.8 temos o seguinte resultado.

²A menos de torção, no sentido de [13, Capítulo 4, §22, pg. 72]

³Uma equivalência de homotopia simples $f : K \rightarrow L$, de um par CW (K, L) , é uma aplicação que é homotópica a uma deformação, no sentido de [13, Capítulo 2, §4 pg. 15].

Proposição 4.23. *Se existe uma aplicação suave $f : M^6 \rightarrow N^3$, com uma quantidade finita de pontos críticos todos cone-like e com link conexo, então $\varphi(M, N) \in \{0, 1\}$, e $\varphi(M, N) = 1$ precisamente quando as seguintes condições são satisfeitas:*

- (1) *A variedade M é difeomorfa a soma conexa $\hat{N} \sharp \Sigma^6$, onde Σ^6 é uma esfera exótica e $\hat{N}$ é uma variedade 6-dimensional que fibra sobre a variedade N .*
- (2) *M não fibra sobre N .*

A Proposição 4.23 é uma consequência do Lema 4.24 e da Proposição 4.25 apresentados a seguir.

Lema 4.24. *Se existe uma aplicação suave $f : M^6 \rightarrow N^3$, com uma quantidade finita de pontos críticos todos cone-like e com link conexo, então M é homeomorfa a uma fibração de base N .*

A demonstração do Lema 4.24 segue exatamente todos os passos da demonstração da Proposição 1.1 em [3] mas, para conveniência do leitor, apresentamos a prova com detalhes.

Demonstração: Por uma arbitrariamente pequena isotopia suave de f , tornamos $f^{-1}(0)$ transversal a S_ϵ^5 . De fato, temos as inclusões

$$j_0 : f^{-1}(0) \hookrightarrow M^6 \quad \text{e} \quad i : S_\epsilon^5 \hookrightarrow M^6.$$

Por [9, Capítulo 2, §15, Corolário 15.4, pg. 115], existe uma “arbitrariamente pequena” isotopia de j_0 para um mergulho suave $j_1 : f^{-1}(0) \hookrightarrow M^6$, tal que i é transversal a j_1 , isto é, sempre que $j_1(y) = i(x) = x$, então

$$di_x(T_x S_\epsilon^5) + (dj_1)_y(T_y f^{-1}(0)) = T_x M^6.$$

Desde que a derivada de j_1 em y $(dj_1)_y$ é uma transformação linear injetiva, pois j_1 é um mergulho, identificamos $(dj_1)_y(T_y f^{-1}(0))$ com $T_y f^{-1}(0)$. Assim, podemos dizer que $f^{-1}(0)$ é transversal a S_ϵ^5 . Então, o link $K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^5$ é uma subvariedade suave 3-dimensional de S_ϵ^5 com fibrado normal trivial.

Assim, o resultado principal em [1] garante que $K_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon^5$ é o link de uma aplicação polinomial real $p : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com singularidade isolada na

origem, isto é, $(S_\epsilon^5, K_\epsilon)$ é difeomorfo a $(S_\epsilon^5, p^{-1}(0) \cap S_\epsilon^5)$. Por hipótese, o link é conexo, e segue do Teorema 4.8 item (a) que p deve ser trivial e, portanto, de acordo com Church e Lamotke, [11], p é uma fibração topológica. A aplicação polinomial p não necessariamente é equivalente a f , mas este problema pode ser contornado se consideramos uma extensão $\hat{f}$ de f para a bola B_ϵ^6 , como segue: $\hat{f}(x) = \|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Então, $\hat{f}$ é uma função suave e não tem outro ponto crítico senão a origem, e seu ponto crítico (topológico) é cone-like. Além disso, $\hat{f}$ coincide com f fora de B_ϵ^6 . Vamos demonstrar que $\hat{f}$ e p são localmente topologicamente equivalentes, e portanto $\hat{f}$ é uma submersão topológica. Assim, substituindo f com a correspondente $\hat{f}$ ao redor de cada ponto crítico, obtemos uma submersão topológica.

O resultado é uma consequência da classificação de singularidades isoladas cone-like, provada por King em [29]. Sem muitos detalhes, descrevemos a classificação de King: *duas singularidades isoladas cone-like são equivalentes se seus links são invertíveis cobordantes e suas fibrações tipo-Milnor são equivalentes*.

Além disso, o link K_ϵ da aplicação polinomial p é difeomorfo a uma esfera 2-dimensional trivialmente mergulhada em S_ϵ^5 . Assim, qualquer variedade invertível cobordante (e portanto h -cobordante) a K_ϵ é também homeomorfa (e assim difeomorfa) a uma esfera, pela conjectura de Poincaré. Seja W^5 o complemento em S_ϵ^5 de uma vizinhança regular do link. A fibração tipo-Milnor definida por King é uma fibração $W^5 \rightarrow S^2$. Em particular, a fibra F deve ser uma bola de homotopia e assim difeomorfa a uma bola 3-dimensional, novamente pela conjectura de Poincaré. Então, quaisquer duas fibrações como acima são “fiberwise” homeomorfas e segue de King [29] que $\hat{f}$ e p são localmente topologicamente equivalentes, o que conclui a prova do lema. ■

Do Lema 4.24, concluímos que uma aplicação suave com uma quantidade finita de pontos críticos todos cone-like, com link conexo, deve ser uma submersão topológica.

Proposição 4.25. [2, Proposição 5.1] *Suponhamos que exista uma submersão topológica $f : M^6 \rightarrow N^3$ com uma quantidade finita de pontos críticos. Então,*

$\varphi(M, N) \in \{0, 1\}$ e $\varphi(M, N) = 1$, precisamente quando M é difeomorfa a uma soma conexa de uma fibração $\hat{N}$, sobre N , com uma esfera exótica, e M não fibra sobre N .

Observação 4.26. No caso $(8, 5)$, para variedades fechadas e orientáveis M^8 e N^5 com $\varphi(M, N)$ finito, existe uma completa classificação global feita por Funar em [18, Teorema 1.4, pg. 824-825]. Neste caso, a técnica é diferente, Funar trabalha com modelos locais, os quais são cones sobre as fibrações Hopf, determinando quais são as possíveis variedades obtidas por “colando junto” esses modelos locais. Ainda em [18, §2.7, pg. 839-840] encontramos uma classificação local das singularidades isoladas cone-like no caso $(6, 3)$. Entretanto novas técnicas são necessárias para obter uma classificação global de singularidades cone-like com link não conexo no caso $(6, 3)$.

Capítulo 5

Apêndice

A *Teoria de feixes* é uma importante ferramenta em Topologia Algébrica, fornecendo um método comum para definir e comparar várias teorias de cohomologia definidas sobre espaços topológicos gerais. Neste apêndice, abordamos de modo sucinto a teoria de feixes e prefeixes, com foco na construção dos grupos de cohomologia de um espaço topológico com coeficientes em um feixe, visando a apresentação da Fórmula de Künneth para a cohomologia com suporte compacto.

A referência básica para este capítulo é o livro *Sheaf Theory* [8].

5.1 Teoria de (co)homologia com coeficientes em um feixe

Definição 5.1. Um **prefeixe** A (de grupos abelianos) sobre um espaço topológico X é uma função que associa, a cada conjunto aberto U de X , um grupo abeliano $A(U)$ e que associa, para cada par $U \subset V$ de conjuntos abertos de X , um homomorfismo $r_{U,V} : A(V) \rightarrow A(U)$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $r_{U,U} = id_{A(U)} : A(U) \rightarrow A(U)$;
- (ii) Se $U \subset V \subset W$, então $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W} : A(W) \rightarrow A(U)$.

Os elementos de $A(U)$ são chamados **seções de A sobre U** e os homomorfismos $r_{U,V}$ são chamados **restrições**. Se $s \in A(V)$ e $U \subset V$ usamos a notação $s|_U$ para $r_{U,V}(s)$ e este elemento é chamado a **restrição de s a U** .

Exemplo 5.2. Seja G um grupo abeliano. Dado qualquer espaço topológico X , o **prefeixe constante** A sobre X é definido, para todo aberto U de X , por $A(U) = G$, com restrições $r_{U,V} = id_G$ a identidade sobre G , para todo $U \subset V$.

Um prefeixe sobre um espaço topológico X é um funtor contravariante, da categoria dos subconjuntos abertos de X e inclusões, na categoria dos grupos abelianos e homomorfismos de grupos abelianos. Assim, um morfismo entre prefeixes é simplesmente uma transformação natural. Mais especificamente, temos a seguinte

Definição 5.3. Dado um espaço topológico X , sejam A e B prefeixes sobre X . Um homomorfismo de prefeixes $h : A \rightarrow B$ é uma coleção de homomorfismos $h_U : A(U) \rightarrow B(U)$ que comutam com restrições, ou seja, para todo $U \subset V$:

$$r_{U,V}^B \circ h_V = h_U \circ r_{U,V}^A,$$

onde $r_{U,V}^B : B(V) \rightarrow B(U)$ e $r_{U,V}^A : A(V) \rightarrow A(U)$.

A seguir apresentaremos a definição formal de um feixe.

Definição 5.4. Um **feixe** (de grupos abelianos) sobre um espaço topológico X é um par $(\mathcal{A}, \pi)$, onde:

- (i) $\mathcal{A}$ é um espaço topológico;
- (ii) $\pi : \mathcal{A} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local sobre X ;
- (iii) Para cada $x \in X$, o conjunto $\mathcal{A}_x = \pi^{-1}(x)$, é um grupo abeliano, chamado a **fibra** de $\mathcal{A}$ em x ;
- (iv) As operações de grupo são contínuas, no seguinte sentido. Seja $\mathcal{A} \triangle \mathcal{A} = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$. Então, a função $\mathcal{A} \triangle \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, associando $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha - \beta$ é contínua.

Com frequência, nos referimos a um feixe $(\mathcal{A}, \pi)$ apenas por $\mathcal{A}$, quando a função π for conhecida.

Observação 5.5. De modo similar, podemos definir um feixe de anéis, ou um módulo (feixe de módulos) sobre um feixe de anéis. Para um feixe $\mathcal{R}$ de grupos

abelianos ser um feixe de anéis, cada fibra deve ter uma estrutura de anel, e a função $\mathcal{R} \triangle \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, dada por $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, deve ser contínua. Se cada fibra $\mathcal{R}_x$ possui uma unidade e se a função, que associa cada $x \in X$ à unidade $1_x \in \mathcal{R}_x$, for contínua, dizemos que $\mathcal{R}$ é um feixe de anéis com unidade.

Se $\mathcal{R}$ é um feixe de anéis e se $\mathcal{A}$ é um feixe para o qual cada fibra $\mathcal{A}_x$ tem uma estrutura de $\mathcal{R}_x$ -módulo, então $\mathcal{A}$ é chamado um $\mathcal{R}$ -módulo, se a função $\mathcal{R} \triangle \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ definida por $(\rho, \alpha) \mapsto \rho\alpha$ é contínua, onde $\mathcal{R} \triangle \mathcal{A} = \{(\rho, \alpha) \in \mathcal{R} \times \mathcal{A} : \pi(\rho) = \pi(\alpha)\}$.

Definição 5.6. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes sobre um espaço topológico X . Um homomorfismo de feixes $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma função contínua tal que $h(\mathcal{A}_x) \subset \mathcal{B}_x$, para todo $x \in X$, e as restrições $h_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{B}_x$, de h às fibras são homomorfismos, para todo $x \in X$.

Definição 5.7. Sejam $(\mathcal{A}, \pi)$ um feixe sobre um espaço topológico X e um subespaço $Y \subset X$. Uma **seção** de $\mathcal{A}$ sobre Y é uma função contínua $s : Y \rightarrow \mathcal{A}$, tal que a composição $\pi \circ s$ é a identidade sobre Y .

Observação 5.8. Todo ponto $x \in X$ admite uma seção s sobre alguma vizinhança U de x , pela Definição 5.4(ii). Segue que $s - s$ é uma seção sobre U , a qual associa o valor 0 em cada fibra. Isso mostra que a seção $0 : X \rightarrow \mathcal{A}$ é, de fato, uma seção, chamada a **seção nula**. Dessa forma, para qualquer subespaço $Y \subset X$, o conjunto $\mathcal{A}(Y)$ das seções sobre Y é um grupo abeliano, com elemento neutro sendo a restrição da seção nula $0 : X \rightarrow \mathcal{A}$ a Y . A restrição $\mathcal{A}(Y) \rightarrow \mathcal{A}(Y')$, para qualquer $Y' \subset Y$, é um homomorfismo. Assim, a correspondência $U \rightarrow \mathcal{A}(U)$, para subconjuntos abertos $U \subset X$, define um prefeixe sobre X . Este prefeixe é chamado **o prefeixe das seções de $\mathcal{A}$** . Outra notação comum para o grupo de todas as seções de $\mathcal{A}$ é

$$\Gamma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(X).$$

Exemplo 5.9. São exemplos de feixes:

(a) **O feixe constante:** Seja G um grupo abeliano. O feixe constante sobre

um espaço topológico X , com fibra G , é o feixe $X \times G$ (considerando G com a topologia discreta). Denotamos o feixe constante por G .

- (b) **O feixe gerado por um prefeixe:** Seja X um espaço topológico e A um prefeixe sobre X . Fixado $x \in X$, considere o conjunto $\mathfrak{M}$ de todos os elementos $s \in A(U)$, para todos os conjuntos abertos $U \subset X$, com $x \in U$. Definimos sobre $\mathfrak{M}$ a seguinte relação de equivalência: dizemos que dois elementos $s \in A(U)$ e $t \in A(V)$ de $\mathfrak{M}$ são equivalentes se existe um aberto $W \subset U \cap V$, com $x \in W$, tal que $r_{W,U}(s) = r_{W,V}(t)$. Essa relação de equivalência particiona $\mathfrak{M}$ em classes de equivalências, as quais são chamadas os *germes de A em x* . A classe de equivalência que contém $s \in A(U)$ é chamada o *germe de s em $x \in U$* e será denotada por s_x .

O conjunto $\mathcal{A}_x$ dos germes de A em x nada mais é do que o limite direto

$$\mathcal{A}_x = \varinjlim A(U),$$

onde U varia sobre todos os subconjuntos abertos de X contendo x . O conjunto $\mathcal{A}_x$ herda dos grupos $A(U)$ uma estrutura de grupo canônica.

Considere a união disjunta

$$\mathcal{A} = \coprod_{x \in X} \mathcal{A}_x = \{(x, a) : x \in X \text{ e } a \in \mathcal{A}_x\}.$$

Introduzimos no conjunto $\mathcal{A}$ uma topologia, como segue. Fixado um elemento $s \in A(U)$, então para cada $x \in U$, temos o germe s_x de s em x . Para s fixado, o conjunto de todos os germes $s_x \in \mathcal{A}_x$, para $x \in U$, é tomado como sendo um conjunto aberto em $\mathcal{A}$. O conjunto $\mathcal{A}$, munido da topologia gerada por estes abertos é chamado o *feixe gerado pelo prefeixe A* e será denotado por

$$\mathcal{A} = \text{Feixe}(U \mapsto A(U)).$$

Existe uma projeção natural $\pi : \mathcal{A} \rightarrow X$, definida por $\pi(x, a) = x$. Em [8, Capítulo 1, pg. 5], Bredon apresenta uma definição alternativa do conceito de *feixe gerado por um prefeixe* e mostra que π é um homeomorfismo local.

- (c) **O feixe imagem inversa:** Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e $(\mathcal{B}, \pi)$ um feixe sobre Y . A imagem inversa $f^*\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}$ é o feixe sobre X definido por

$$f^*\mathcal{B} = \{(x, b) \in X \times \mathcal{B} : f(x) = \pi(b)\},$$

onde $\pi : \mathcal{B} \rightarrow Y$ é a projeção canônica. A projeção $\tilde{\pi} : f^*\mathcal{B} \rightarrow X$, é dada por $\tilde{\pi}(x, b) = x$. A estrutura de grupo sobre $f^*\mathcal{B}$ é dada pelo isomorfismo $\mathcal{B}_{f(x)} \rightarrow (f^*\mathcal{B})_x$ definido por $b \mapsto (x, b)$.

- (d) **O feixe produto tensorial:** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes sobre X . O feixe produto tensorial é definido por

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \text{Feixe}(U \mapsto \mathcal{A}(U) \otimes \mathcal{B}(U)),$$

Desde que o produto tensorial comuta com limites diretos, temos o isomorfismo natural: (vide [8, Capítulo I, Seção 5])

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_x \cong \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_x.$$

- (e) **O feixe produto torção:** Usaremos a notação $G * H$ para $Tor(G, H)$. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes sobre X . O feixe produto torção é definido por

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \text{Feixe}(U \mapsto \mathcal{A}(U) * \mathcal{B}(U)).$$

Desde que o produto torção comuta com limites diretos, temos o isomorfismo natural (vide [8, Capítulo I, Seção 5])

$$(\mathcal{A} * \mathcal{B})_x \cong \mathcal{A}_x * \mathcal{B}_x.$$

- (f) Sejam X, Y espaços topológicos e $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ as projeções. Para feixes $\mathcal{A}$ sobre X e $\mathcal{B}$ sobre Y , combinando os exemplos (c) e (d), definimos o feixe **produto tensorial total** sobre $X \times Y$ por

$$\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B} := (\pi_X^* \mathcal{A}) \otimes (\pi_Y^* \mathcal{B}).$$

De modo similar, combinando os exemplos (c) e (e), definimos o **produto torção total** sobre $X \times Y$ por

$$\mathcal{A} \widehat{*} \mathcal{B} := (\pi_X^* \mathcal{A}) * (\pi_Y^* \mathcal{B}).$$

Claramente, temos isomorfismos naturais

$$(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})_{(x,y)} \cong \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_y \quad \text{e} \quad (\mathcal{A} \widehat{*} \mathcal{B})_{(x,y)} \cong \mathcal{A}_x * \mathcal{B}_y.$$

(g) **O feixe restrição :** Se $(\mathcal{A}, \pi)$ é um feixe sobre X e se $Y \subset X$, então o feixe restrição de $\mathcal{A}$ a Y , denotado por $\mathcal{A}|_Y$, é um feixe sobre Y definido por

$$\mathcal{A}|_Y = \pi^{-1}(Y),$$

com projeção $\pi|_{\pi^{-1}(Y)}$.

(h) **O subfeixe e o feixe quociente:** Um **subfeixe** $\mathcal{A}$ de um feixe $\mathcal{B}$ é um subespaço aberto de $\mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A}_x = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_x$ é um subgrupo de $\mathcal{B}_x$, para todo $x \in X$, ou seja, $\mathcal{A}$ é um subespaço de $\mathcal{B}$ que é um feixe sobre X com a estrutura algébrica induzida.

Seja $\mathcal{A}$ um subfeixe de um feixe $\mathcal{B}$, o **feixe quociente** $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ é definido por

$$\mathcal{B}/\mathcal{A} := \text{Feixe}(U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)).$$

As fibras em um ponto $x \in X$ são da forma

$$(\mathcal{B}/\mathcal{A})_x \cong \mathcal{B}_x/\mathcal{A}_x.$$

Definição 5.10. Seja $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de feixes. Então, temos que $\ker h = \{\alpha \in \mathcal{A} \mid h(\alpha) = 0\}$ é um subfeixe de $\mathcal{A}$, e $\text{Im } h$ é um subfeixe de $\mathcal{B}$. Dizemos que uma seqüência de feixes $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ é exata se $\text{Im } f = \ker g$. Uma seqüência de feixes $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ é exata se, e somente se, $\mathcal{A}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{C}_x$ é exata, para todo $x \in X$.

Observação 5.11. A seqüência exata de prefeixes

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U) \longrightarrow 0$$

induz uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}/\mathcal{A} \longrightarrow 0,$$

conforme [8, Capítulo 1, § 2, pg. 10].

Observação 5.12. O feixe gerado por um prefeixe constante é constante. De fato, no caso em que o prefeixe é constante, $\mathcal{A}(U) = G$ grupo abeliano, para todo aberto U de X , temos

$$\mathcal{A}_x = \varinjlim \mathcal{A}(U) = G,$$

portanto

$$\mathcal{A} = \coprod_{x \in X} \mathcal{A}_x = \coprod_{x \in X} G = \{(x, a) : x \in X, a \in G\} \cong X \times G.$$

Observação 5.13. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então para qualquer grupo abeliano G temos

$$f^*(Y \times G) \cong X \times G,$$

isto é, f^* preserva feixes constantes. De fato, o isomorfismo de feixes

$$X \times G \rightarrow f^*(Y \times G)$$

é definido por $(x, g) \mapsto (x, (f(x), g))$.

Observação 5.14. Um homomorfismo de feixes $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ induz um homomorfismo de prefeixes das seções $\mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{B}(U)$, $s \mapsto h \circ s$. Reciprocamente, seja $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo de prefeixes. Para cada $x \in X$, h induz um homomorfismo

$$h_x : \mathcal{A}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{A}(U) \rightarrow \varinjlim_{x \in U} \mathcal{B}(U) = \mathcal{B}_x$$

e, portanto, induz uma função $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Para qualquer aberto $U \subset X$, existe

uma aplicação natural

$$\begin{aligned}\theta_U : A(U) &\rightarrow \mathcal{A}(U) \\ s &\mapsto \theta_U(s),\end{aligned}\tag{5.1}$$

a qual é um homomorfismo que comuta com as restrições, onde a seção $\theta_U(s) : U \rightarrow \mathcal{A}$ é dada por $x \mapsto \theta_U(s)(x) := s_x \in \mathcal{A}_x$, para cada $s \in A(U)$ e $x \in U$. Se $s \in A(U)$ então, h aplica a seção $\theta_U(s) \in \mathcal{A}(U)$ sobre a seção $\theta_U(h(s)) \in \mathcal{B}(U)$. Assim, h é uma função contínua (vide [8, Capítulo 1, § 1.7, pg. 6 e § 2, pg. 9]).

Seja A um prefeixe e $\mathcal{A}$ o feixe gerado por A . Para um aberto qualquer $U \subset X$, o núcleo de $\theta_U : A(U) \rightarrow \mathcal{A}(U)$ é constituído dos elementos $s \in A(U)$ que satisfazem: para todo $x \in U$, existe uma vizinhança V de x tal que $s|_V = 0$. Assim, θ_U é um monomorfismo para todo $U \subset X$ se, e somente se, o prefeixe A satisfaz a seguinte condição:

(S1) Se $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, com U_{α} aberto em X , e $s, t \in A(U)$ são tais que $s|_{U_{\alpha}} = t|_{U_{\alpha}}$, para todo α , então, $s = t$.

Se um prefeixe A satisfaz **(S1)**, então θ_U é sobrejetivo para todo aberto U (e portanto é um isomorfismo) se, e somente se, o prefeixe A satisfaz a seguinte condição:

(S2) Sejam $\{U_{\alpha}\}$ uma coleção de abertos em X e $U = \bigcup U_{\alpha}$. Se elementos $s_{\alpha} \in A(U_{\alpha})$ são dados tais que $s_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} = s_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}}$, para todo α, β , então, existe $s \in A(U)$ com $s|_{U_{\alpha}} = s_{\alpha}$, para todo α .

Observação 5.15. Com a descrição dada anteriormente, feixes estão em correspondência um-a-um com os prefeixes que satisfazem as condições (S1) e (S2). Assim, consideramos como feixes os prefeixes que satisfazem (S1) e (S2) (vide [8, Capítulo 1, § 1.6, 1.7, pg. 6]).

Definição 5.16. Uma **família de suportes** sobre um espaço topológico X é uma família Φ de subconjuntos fechados de X tais que

- (i) um subconjunto fechado de um elemento de Φ é um elemento de Φ ;

(ii) a união finita de elementos de Φ é ainda um elemento de Φ .

Dizemos que a família de suportes Φ é paracompactificada se, em adição,

(iii) cada elemento de Φ é paracompacto;

(iv) cada elemento de Φ tem uma vizinhança fechada que está em Φ .

Observação 5.17. A família de suportes constituída de todos os subconjuntos compactos de X é chamada **família de suporte compacto** e será denotada por **c**. Essa família é paracompactificada se o espaço topológico X for localmente compacto. É habitual “denotar” a família de suportes constituída de todos os subconjuntos fechados de X pela ausência de um símbolo.

Definição 5.18. Seja $\mathcal{A}$ um feixe sobre X . Definimos o **suporte** de uma seção $s \in \mathcal{A}(X)$ como sendo o conjunto $|s| = \{x \in X : s(x) \neq 0\}$.

Note que o conjunto $|s|$ é fechado, desde que seu complemento é o conjunto dos pontos de X nos quais s coincide com a seção nula, o qual é um conjunto aberto (vide [8, Capítulo 1, pg. 4]). Se A é um prefeixe sobre X e se $s \in A(X)$, colocamos $|s| = |\theta(s)|$, onde $\theta : A(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ é a aplicação canônica e $\mathcal{A}$ é o feixe gerado por A .

Definição 5.19. Se $\mathcal{A}$ é um feixe sobre X , definimos:

$$\Gamma_{\Phi}(\mathcal{A}) = \{s \in \mathcal{A}(X) : |s| \in \Phi\},$$

para cada família de suportes Φ . Então, $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{A})$ é um subgrupo de $\mathcal{A}(X)$, chamado o **subgrupo das seções com suporte em Φ** . Para um prefeixe A sobre X , definimos:

$$A_{\Phi}(X) = \{s \in A(X) : |s| \in \Phi\}.$$

Definição 5.20. Um **feixe graduado** $\mathcal{L}^*$ é uma sequência $\{\mathcal{L}^q\}$ de feixes, onde q varia sobre os inteiros. Um **feixe diferencial** é um feixe graduado junto com homomorfismos $d : \mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{L}^{q+1}$, tais que $d \circ d : \mathcal{L}^q \rightarrow \mathcal{L}^{q+2}$ é zero, para todo q . Uma **resolução** de um feixe $\mathcal{A}$ é um feixe diferencial $\mathcal{L}^*$ com $\mathcal{L}^q = 0$, para $q < 0$,

junto com um homomorfismo $\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}^0$, chamado **homomorfismo aumento**, tal que a sequência

$$0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

é exata. De modo similar são definidos prefeixe graduado e prefeixe diferencial.

5.2 Cohomologia com coeficientes em um feixe

Para qualquer feixe $\mathcal{A}$ sobre um espaço topológico X e um aberto $U \subset X$, denotamos por $C^0(U; \mathcal{A})$ a coleção de todas as funções (as quais não são necessariamente contínuas) $f : U \rightarrow \mathcal{A}$ tais que $\pi \circ f$ é a identidade sobre U , onde $\pi : \mathcal{A} \rightarrow X$ é a projeção canônica. Assim, $C^0(U; \mathcal{A})$, é um grupo e a correspondência $U \mapsto C^0(U; \mathcal{A})$ é um prefeixe sobre X que satisfaz as condições **(S1)** e **(S2)** da Observação 5.14. Portanto, de acordo com a Observação 5.15, esse prefeixe é um feixe, que denotaremos por $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})$.

A inclusão $\mathcal{A}(U) \hookrightarrow C^0(U; \mathcal{A}) = \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})(U)$ induz um monomorfismo

$$\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}).$$

Agora, considere o feixe quociente sobre X

$$\mathcal{Z}^1(X; \mathcal{A}) := \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) / \mathcal{A}.$$

Continuando indutivamente, podemos definir para qualquer $q \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^q(X; \mathcal{A}) &:= \mathcal{C}^0(X; \mathcal{Z}^q(X; \mathcal{A})), \\ \mathcal{Z}^{q+1}(X; \mathcal{A}) &:= \mathcal{C}^q(X; \mathcal{A}) / \mathcal{Z}^q(X; \mathcal{A}). \end{aligned}$$

Pela construção dos feixes, a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^q(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^q(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{q+1}(X; \mathcal{A}) \longrightarrow 0$$

é exata. Denotamos por d a composição

$$\mathcal{C}^q(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \mathcal{Z}^{q+1}(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^{q+1}(X; \mathcal{A}).$$

Então, a seqüência

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2(X; \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \cdots \quad (5.2)$$

é exata. Assim, (5.2) é uma resolução de $\mathcal{A}$, que denotamos por $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A})$, chamada *a resolução canônica de $\mathcal{A}$* (devida a Godement). Se Φ é uma família de suportes sobre X , temos o complexo de cocadeias.

$$\mathcal{C}_{\Phi}^*(X; \mathcal{A}) := \Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{A}))$$

Definição 5.21. Para uma família Φ de suportes sobre X e para um feixe $\mathcal{A}$ sobre X , o q -ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em $\mathcal{A}$ e com suporte em Φ é definido por

$$H_{\Phi}^q(X; \mathcal{A}) := H^q(\mathcal{C}_{\Phi}^*(X; \mathcal{A})).$$

Desde que $0 \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{A}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{C}^1(X; \mathcal{A}))$ é exata, temos o isomorfismo

$$H_{\Phi}^0(X; \mathcal{A}) \cong \Gamma_{\Phi}(\mathcal{A}).$$

Se $0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$ é uma seqüência exata curta de feixes sobre X , então existe uma *seqüência exata longa em cohomologia de feixes*

$$\cdots \rightarrow H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A}) \rightarrow H_{\Phi}^p(X; \mathcal{B}) \rightarrow H_{\Phi}^p(X; \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} H_{\Phi}^{p+1}(X; \mathcal{A}) \rightarrow \cdots \quad (5.3)$$

5.3 Produtos cup e cross

Apresentamos agora um importante teorema sobre funtores de feixes, o qual dá origem a resultados importantes como o produto cup e a induzida de uma aplicação em cohomologia. Todos os feixes considerados são feixes sobre um espaço topológico X fixado e todos os funtores são aditivos covariantes da

categoria dos feixes sobre X para a categoria dos grupos abelianos.

Uma classe $\mathcal{E}$ de seqüências exatas curtas $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ é chamada **admissível** se satisfaz as seguintes três condições:

- $\mathcal{E}$ é fechada sob isomorfismos de seqüências exatas.
- Toda seqüência exata curta de feixes $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ que satisfaz:
 $0 \rightarrow \mathcal{A}'_x \rightarrow \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{A}''_x \rightarrow 0$ cinde, para cada $x \in X$, pertence a $\mathcal{E}$.
- Se $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ pertence a $\mathcal{E}$, então considerando $\mathcal{A}'$ como um subfeixe de $\mathcal{A}$, a seqüência

$$0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}^0(X; \mathcal{A})/\mathcal{A}' \rightarrow 0$$

pertence a $\mathcal{E}$.

Uma **seqüência $\mathcal{E}$ -conexa** de funtores (covariantes) (F^*, δ) é uma seqüência de funtores

$$F^n : \mathcal{A} \rightarrow F^n(\mathcal{A}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

junto com transformações naturais

$$\delta : F^n(\mathcal{A}'') \rightarrow F^{n+1}(\mathcal{A}')$$

definidas para todas as seqüências exatas $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ em $\mathcal{E}$ tal que a seqüência longa induzida

$$\cdots \rightarrow F^n(\mathcal{A}') \rightarrow F^n(\mathcal{A}) \rightarrow F^n(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} F^{n+1}(\mathcal{A}') \rightarrow \cdots$$

é de ordem dois, e tal que o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

(com seqüências exatas curtas em $\mathcal{E}$), induz um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
F^n(\mathcal{A}'') & \xrightarrow{\delta} & F^{n+1}(\mathcal{A}') \\
\downarrow & & \downarrow \\
F^n(\mathcal{B}'') & \xrightarrow{\delta} & F^{n+1}(\mathcal{B}').
\end{array}$$

Usamos o termo “conexo” para $\mathcal{E}$ -conexo, quando $\mathcal{E}$ consistir de todas as seqüências exatas curtas.

Um **sistema $\mathcal{E}$ -conexo de multifuntores** é um sistema $(F^{*,\dots,*}, \delta_1, \dots, \delta_n)$, onde $F^{*,\dots,*}$ é um sistema de funtores de n -variáveis (n fixado) indexado por n -uplas de inteiros, tal que se todos os índices $p_1, \dots, p_n$ estão fixados, exceto para o i -ésimo, e se todas as variáveis $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ estão fixadas, exceto a i -ésima, então junto com δ_i , obtemos uma seqüência $\mathcal{E}$ -conexa de funtores de uma variável, e também exigimos que $\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i$, para todo i, j , quando isso está definido.

Uma seqüência conexa de funtores (F^*, δ) é chamada **fundamental** se as seguintes condições são satisfeitas:

- $F^p(\mathcal{A}) = 0$, se $p < 0$.
- $F^p(\mathcal{A}) = 0$, se $p > 0$ e se $\mathcal{A}$ tem a forma $\mathcal{C}^0(X; \mathcal{B})$, para algum feixe $\mathcal{B}$.
- Para qualquer seqüência exata curta $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$, a seqüência induzida

$$\dots \rightarrow F^n(\mathcal{A}') \rightarrow F^n(\mathcal{A}) \rightarrow F^n(\mathcal{A}'') \xrightarrow{\delta} F^{n+1}(\mathcal{A}') \rightarrow \dots$$

é exata.

Essas condições implicam que F^p é o p -ésimo funtor derivado à direita do funtor exato à esquerda F^0 .

Teorema 5.22. [8, Capítulo 2, §6, Teorema 6.2, pg. 53] *Suponhamos que $(F_1^*, \delta_1), \dots, (F_n^*, \delta_n)$ sejam seqüências conexas fundamentais de funtores e que $(F^{*,\dots,*}, \delta'_1, \dots, \delta'_n)$ seja um sistema $\mathcal{E}$ -conexo de multifuntores de n -variáveis, com $\mathcal{E}$ admissível. Seja*

$$T^{0,\dots,0} : F_1^0(\mathcal{A}_1) \otimes \dots \otimes F_n^0(\mathcal{A}_n) \rightarrow F^{0,\dots,0}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$$

uma dada transformação natural de funtores. Então,

(a) Existe uma única extensão de $T^{0,\dots,0}$ para transformações naturais

$$T^{p_1,\dots,p_n} : F_1^{p_1}(\mathcal{A}_1) \otimes \cdots \otimes F_n^{p_n}(\mathcal{A}_n) \rightarrow F^{p_1,\dots,p_n}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$$

que são compatíveis com relação a δ_i e δ'_i , para todo i , ou seja, se

$$0 \rightarrow \mathcal{A}'_i \rightarrow \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}''_i \rightarrow 0$$

pertence a $\mathcal{E}$ e se $\alpha_j \in F_j^{p_j}(\mathcal{A}_j)$, para $j \neq i$, e $\alpha_i \in F_i^{p_i}(\mathcal{A}''_i)$, então

$$T^{p_1,\dots,p_{i+1},\dots,p_n}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \delta_i \alpha_i \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \delta'_i T^{p_1,\dots,p_n}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n).$$

(b) Se para índices fixados p_j , $j \neq i$, e para variáveis fixadas $\mathcal{A}_j$, $j \neq i$, a seqüência de funtores $\mathcal{A}_i \mapsto F^{p_1,\dots,p_n}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ é $\mathcal{E}'$ -conexo, para algum $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$ admissível, por uma transformação δ''_i estendendo δ'_i , então δ_i e δ''_i são compatíveis.

(c) Se $n = 1$ e (F^*, δ'_1) é também fundamental, então:

- (i) Se $T^0 : F_1^0(\mathcal{A}) \rightarrow F^0(\mathcal{A})$ é sobrejetiva, para todo $\mathcal{A}$, então o mesmo acontece com T^p , para todo p .
- (ii) Se T^0 é injetiva, para todo $\mathcal{A}$ e, se além disso, é um isomorfismo para todo feixe $\mathcal{A}$ que satisfaz: $\mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(U)$ é sobrejetivo, para todo conjunto aberto $U \subset X$; então T^p é um isomorfismo, para todo $\mathcal{A}$ e para todo p .

5.3.1 Homomorfismo induzido em cohomologia

Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, Φ e Ψ famílias de suportes sobre X e Y , respectivamente, tais que $f^{-1}\Psi \subset \Phi$, onde $f^{-1}\Psi$ denota a família de suportes sobre X formada por todos os subconjuntos fechados de conjuntos da forma $f^{-1}(K)$, para $K \in \Psi$. Então, $F_1^*(\mathcal{B}) = H_\Psi^*(Y; \mathcal{B})$ é uma seqüência conexa fundamental de funtores de feixes $\mathcal{B}$ sobre Y . Também $F_2^*(\mathcal{B}) = H_\Phi^*(X; f^*\mathcal{B})$ é um sistema conexo de funtores de $\mathcal{B}$, desde que o funtor $\mathcal{B} \rightarrow f^*\mathcal{B}$ é exato.

Definimos uma transformação natural $\Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_{f^{-1}\Psi}(f^*\mathcal{B})$, como segue: se

$s : Y \rightarrow \mathcal{B}$ é uma seção de $\mathcal{B}$ sobre Y , então a função $x \mapsto (x, s(f(x)))$ é uma seção de $f^*\mathcal{B}$ sobre $f^{-1}(Y) = X$. Assim, definimos uma aplicação

$$f^* : \mathcal{B}(Y) \rightarrow f^*\mathcal{B}(X).$$

Desde que $|f^*(s)| \subset f^{-1}(|s|)$, temos $f^*(s) \in f^{-1}\Psi$. Portanto, f^* induz uma aplicação $\Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_{f^{-1}\Psi}(f^*\mathcal{B})$. Dessa forma, temos a transformação natural

$$F_1^0(\mathcal{B}) = \Gamma_\Psi(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_{f^{-1}\Psi}(f^*\mathcal{B}) \hookrightarrow \Gamma_\Phi(f^*\mathcal{B}) = F_2^0(\mathcal{B}).$$

De acordo com o Teorema 5.22, isso determina uma transformação natural

$$f_{\Phi\Psi}^* : H_\Psi^*(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H_\Phi^*(X; f^*\mathcal{B}) \quad (5.4)$$

de funtores compatíveis com homomorfismos conectantes. Isso significa que uma seqüência exata de feixes $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ dá origem a um diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_\Psi^p(Y; \mathcal{B}') & \longrightarrow & H_\Psi^p(Y; \mathcal{B}) & \longrightarrow & H_\Psi^p(Y; \mathcal{B}'') \longrightarrow H_\Psi^{p+1}(Y; \mathcal{B}') \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H_\Phi^p(X; f^*\mathcal{B}') & \longrightarrow & H_\Phi^p(X; f^*\mathcal{B}) & \longrightarrow & H_\Phi^p(X; f^*\mathcal{B}'') \longrightarrow H_\Phi^{p+1}(X; f^*\mathcal{B}') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

em cohomologia, o qual é comutativo.

5.3.2 Produto cup

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes sobre X , Ψ e Φ famílias de suportes sobre X . Considerando $F_1^*\mathcal{A} = H_\Phi^*(X; \mathcal{A})$ e $F_2^*\mathcal{B} = H_\Psi^*(X; \mathcal{B})$, o Teorema 5.22 implica na existência do *produto cup* em teoria de feixes.

Teorema 5.23. [8, Capítulo 2, §7, Teorema 7.1, pg. 57] *Sejam Φ e Ψ famílias de suportes sobre um espaço topológico X . Então, existe uma única transformação natural de funtores (da categoria de feixes sobre X na categoria de grupos abelianos)*

$$\smile : H_\Phi^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_\Psi^q(X; \mathcal{B}) \rightarrow H_{\Phi \cap \Psi}^{p+q}(X; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}),$$

chamada o “produto cup”, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para $p = q = 0$,

$$\smile: \Gamma_{\Phi}(\mathcal{A}) \otimes \Gamma_{\Psi}(\mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_{\Phi \cap \Psi}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

é a transformação induzida pela aplicação canônica $\mathcal{A}(X) \otimes \mathcal{B}(X) \rightarrow (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(X)$ definida por $s_1 \otimes s_2 \mapsto s$, onde $s: X \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é a seção

$$s(x) = t_x(s_1(x) \otimes s_2(x)) \in (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_x,$$

com $t_x: \mathcal{A}_x \otimes \mathcal{B}_x \cong (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_x$ isomorfismo (vide Exemplo 5.9(d)).

(ii) Se $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'' \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'' \otimes \mathcal{B} \rightarrow 0$ são exatas, então para $\alpha \in H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A}'')$ e $\beta \in H_{\Psi}^q(X; \mathcal{B})$, temos

$$\delta(\alpha \smile \beta) = \delta\alpha \smile \beta.$$

(iii) Se $0 \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}'' \rightarrow 0$ são exatas, então para $\alpha \in H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A})$ e $\beta \in H_{\Psi}^q(X; \mathcal{B}'')$, temos

$$\delta(\alpha \smile \beta) = (-1)^p \alpha \smile \delta\beta.$$

Corolário 5.24. [8, Capítulo 2, §7, Corolário 7.2, pg. 58] Seja $\tau: \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ o isomorfismo canônico. Então, para $\alpha \in H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A})$ e $\beta \in H_{\Psi}^q(X; \mathcal{B})$, temos

$$\alpha \smile \beta = (-1)^{pq} \tau^*(\beta \smile \alpha).$$

Observação 5.25. O produto cup é associativo (vide [8, Capítulo 2, §7, Proposição 7.3, pg. 58]).

Observação 5.26. No caso do feixe constante $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{Z}_p$ sobre um espaço topológico X , o homomorfismo $\tau: \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p$, no Corolário 5.24, é a identidade sobre o feixe constante $\mathbb{Z}_p$. De fato,

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p = \text{Feixe}(U \mapsto \mathbb{Z}_p(U) \otimes \mathbb{Z}_p(U))$$

é o feixe com fibra $(\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p)_x \cong (\mathbb{Z}_p)_x \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)_x$ (vide Exemplo 5.9 (d)). Mas,

$(\mathbb{Z}_p)_x \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p)_x = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p$ e, portanto,

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p = \coprod_{x \in X} (\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p)_x = \coprod_{x \in X} \mathbb{Z}_p = \{(x, a); x \in X, a \in \mathbb{Z}_p\} \cong X \times \mathbb{Z}_p.$$

5.3.3 Produto cross

Sejam X e Y espaços topológicos, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ feixes sobre X e Y , respectivamente e Φ, Ψ famílias de suportes sobre X e Y , respectivamente. Consideramos as projeções $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$. Usamos as notações $\Phi \times Y = \pi_X^{-1}(\Phi)$ e $X \times \Psi = \pi_Y^{-1}(\Psi)$. Observamos que $\Phi \times \Psi = (\Phi \times Y) \cap (X \times \Psi)$. Na Seção 5.3.1(5.4), definimos homomorfismos naturais:

$$\pi_X^* : H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A}) \rightarrow H_{\Phi \times Y}^p(X \times Y; \pi_X^* \mathcal{A}) \quad \text{e} \quad \pi_Y^* : H_{\Psi}^q(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H_{X \times \Psi}^q(X \times Y; \pi_Y^* \mathcal{B}). \quad (5.5)$$

Combinando os homomorfismos π_X^* e π_Y^* dados em (5.5) com o produto cup, obtemos o homomorfismo

$$\times : H_{\Phi}^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_{\Psi}^q(Y; \mathcal{B}) \rightarrow H_{\Phi \times \Psi}^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}), \quad (5.6)$$

chamado o produto cross, definido por

$$\alpha \times \beta = \pi_X^*(\alpha) \smile \pi_Y^*(\beta).$$

Mostraremos a seguir que, considerando as famílias de suporte Φ e Ψ como sendo a família de suportes compactos $c = c(X)$ e $c = c(Y)$ sobre X e Y , respectivamente, podemos definir o produto cross em termos das cohomologias com suporte compacto, como segue.

Sejam $id : X \times Y \rightarrow X \times Y$ a aplicação identidade e denotamos por $c(X \times Y) = c$ e $c(X) \times c(Y) = c \times c$ famílias de suportes sobre $X \times Y$. Observamos que

$$id^{-1}(c \times c) = c \times c \subset c = c(X \times Y).$$

Dessa forma, segue da Seção 5.3.1, que a transformação natural

$$\Gamma_{c \times c}(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow \Gamma_{id^{-1}(c \times c)}(id^*(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})) \hookrightarrow \Gamma_c(id^*(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B})) = \Gamma_c(\mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}),$$

induz uma transformação natural

$$id^* : H_{c \times c}^*(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \rightarrow H_c^*(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}).$$

Assim, podemos considerar o produto cross como sendo um homomorfismo natural em termos das cohomologias com suporte compacto, dado pela composição do homomorfismo em (5.6) com o homomorfismo id^* :

$$\begin{aligned} \times : H_c^p(X; \mathcal{A}) \otimes H_c^q(Y; \mathcal{B}) &\rightarrow H_c^{p+q}(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \\ \alpha \times \beta &= id^*(\pi_X^*(\alpha) \smile \pi_Y^*(\beta)) = \pi_X^*(\alpha) \smile \pi_Y^*(\beta). \end{aligned} \quad (5.7)$$

5.4 A seqüência exata de Künneth

Teorema 5.27. [8, Teorema 15.2, pg. 108] *Se X e Y são espaços topológicos localmente compactos Hausdorff, e se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são feixes sobre X e Y , respectivamente, com $\mathcal{A} \hat{*} \mathcal{B} = 0$, então existe uma seqüência exata natural*

$$\bigoplus_{s+t=n} H_c^s(X; \mathcal{A}) \otimes H_c^t(Y; \mathcal{B}) \hookrightarrow H_c^n(X \times Y; \mathcal{A} \hat{\otimes} \mathcal{B}) \twoheadrightarrow \bigoplus_{s+t=n+1} H_c^s(X; \mathcal{A}) * H_c^t(Y; \mathcal{B}),$$

a qual cinde.

Corolário 5.28. *Se X e Y são espaços topológicos localmente compactos Hausdorff, e se $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_p$ e $\mathcal{B} = \mathbb{Z}_p$, p primo, são feixes constantes sobre X e Y , respectivamente, então existe um isomorfismo natural*

$$\begin{aligned} \bigoplus_{s+t=n} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) &\xrightarrow{\sim} H_c^n(X \times Y; \mathbb{Z}_p) \\ \sum_{s+t=n} \alpha_s \otimes \beta_t &\mapsto \sum_{s+t=n} \alpha_s \times \beta_t \end{aligned}$$

Demonstração. Temos $\mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p = 0$, pois (vide Exemplo 5.9(f))

$$\mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p := \pi_X^* \mathbb{Z}_p * \pi_Y^* \mathbb{Z}_p,$$

onde $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ são as projeções, $\pi_X^* \mathbb{Z}_p$ e $\pi_Y^* \mathbb{Z}_p$ são os feixes imagem inversa sobre $X \times Y$ (vide Exemplo 5.9(c)). Da Observação 5.13, temos $\pi_X^* \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$ e $\pi_Y^* \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$. Logo, (vide Exemplo 5.9 (e))

$$\mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p = \text{Feixe}(U \mapsto \mathbb{Z}_p(U) * \mathbb{Z}_p(U)),$$

é um feixe com fibras $(\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p)_x \cong (\mathbb{Z}_p)_x * (\mathbb{Z}_p)_x = \text{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = 0$, desde que $\mathbb{Z}_p$ é um corpo. Assim, do Teorema de Künneth (Teorema 5.27), temos a seqüência exata de homomorfismos naturais

$$\bigoplus_{s+t=n} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) \hookrightarrow H_c^n(X \times Y; \mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow \bigoplus_{s+t=n+1} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) * H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p).$$

Observamos que, $\bigoplus_{s+t=n+1} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) * H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) = 0$, pois $H_c^s(X; \mathbb{Z}_p)$ e $H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p)$ são $\mathbb{Z}_p$ -módulos. Portanto,

$$H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) * H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) = 0,$$

desde que todo módulo sobre um corpo é livre. Além disso, $\mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p$ é o feixe constante $\mathbb{Z}_p$, pois (vide Exemplo 5.9(f))

$$\mathbb{Z}_p \hat{*} \mathbb{Z}_p = \pi_X^* \mathbb{Z}_p \otimes \pi_Y^* \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p,$$

onde

$$\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p = \text{Feixe}(U \mapsto \mathbb{Z}_p(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p(U))$$

é o feixe constante $\mathbb{Z}_p$ (vide Observação 5.26). Logo, o homomorfismo natural

$$0 \rightarrow \bigoplus_{s+t=n} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_c^n(X \times Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0$$

é um isomorfismo, o qual coincide com o homomorfismo

$$\bigoplus_{s+t=n} H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\sim} H_c^n(X \times Y; \mathbb{Z}_p)$$

$$\sum_{s+t=n} \alpha_s \otimes \beta_t \mapsto \sum_{s+t=n} \alpha_s \times \beta_t,$$

pois cada produto cross $\times : H_c^s(X; \mathbb{Z}_p) \otimes H_c^t(Y; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H_c^{s+t}(X \times Y; \mathbb{Z}_p)$ é um homomorfismo natural definido usando-se o Teorema 5.22. ■

5.5 A cohomologia de Čech

Dados G um grupo abeliano fixado, X um espaço topológico e Φ uma família de suportes paracompactificada sobre X , definimos os grupos de cohomologia de Čech $\check{H}_{\Phi}^*(X; G)$, com coeficientes no prefixe constante G sobre X , como segue (vide [8, Capítulo I, §7 e Capítulo III, §4, Corolário 4.5, pg. 191]).

Seja $\mathfrak{A} = \{U_{\alpha} : \alpha \in I\}$ uma cobertura aberta de X , indexada por um conjunto I , e considere o prefixe constante G sobre X . Uma n -cocadeia c de $\mathfrak{A}$ é uma função definida sobre $(n+1)$ -uplas ordenadas $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de elementos de I , tal que

$$U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n} := U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset, \quad \text{com valor } c(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in G(U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}).$$

O conjunto de todas as n -cocadeias forma um grupo, denotado por $\check{C}^n(\mathfrak{A}; G)$. Para um conjunto aberto V de X temos a cobertura $\mathfrak{A} \cap V = \{U_{\alpha} \cap V : \alpha \in I\}$. Assim, obtemos um grupo de cocadeias $\check{C}^n(\mathfrak{A} \cap V; G)$ e a correspondência

$$V \mapsto \check{C}^n(\mathfrak{A} \cap V; G)$$

é um prefixe sobre X e, portanto, temos um feixe

$$\check{C}^n(\mathfrak{A}; G) := \text{Feixe}(V \mapsto \check{C}^n(\mathfrak{A} \cap V; G)).$$

Agora, consideramos o suporte $|c|$ de uma cocadeia, isto é, $|c| := |\theta(c)|$, onde $\theta : \check{C}^n(\mathfrak{A}; G) \rightarrow \Gamma(\check{C}^n(\mathfrak{A}; G))$. Isso define o grupo de cocadeias $\check{C}_{\Phi}^n(\mathfrak{A}; G)$, para uma

família de suportes paracompactificada Φ sobre X . O operador cobordo

$$d : \check{C}_{\Phi}^n(\mathfrak{A}; G) \rightarrow \check{C}_{\Phi}^{n+1}(\mathfrak{A}; G)$$

é definido por

$$dc(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) := \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i c(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n) | U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}}.$$

Temos $d^2 = 0$, então existem os grupos de cohomologia

$$\check{H}_{\Phi}^n(\mathfrak{A}; G) = H^n(\check{C}_{\Phi}^*(\mathfrak{A}; G)).$$

Um refinamento de $\mathfrak{A}$ é uma outra cobertura aberta $\mathfrak{B} = \{V_{\beta} : \beta \in J\}$ de X junto com uma função, chamada projeção de refinamento, $\varphi : J \rightarrow I$ tal que $V_{\beta} \subset U_{\varphi(\beta)}$, para todo $\beta \in J$. Isso produz uma aplicação de cadeias

$$\varphi^* : \check{C}_{\Phi}^*(\mathfrak{A}; G) \rightarrow \check{C}_{\Phi}^*(\mathfrak{B}; G), \quad \text{onde} \quad \varphi^*(c)(\beta_0, \dots, \beta_n) = c(\varphi(\beta_0), \dots, \varphi(\beta_n)) | V_{\beta_0, \dots, \beta_n}.$$

Se $\psi : J \rightarrow I$ é uma outra projeção de refinamento, então a função

$$D : \check{C}_{\Phi}^{n+1}(\mathfrak{A}; G) \rightarrow \check{C}_{\Phi}^n(\mathfrak{B}; G)$$

definida por

$$Dc(\beta_0, \dots, \beta_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c(\varphi(\beta_0), \dots, \varphi(\beta_i), \psi(\beta_i), \dots, \psi(\beta_n)) | V_{\beta_0, \dots, \beta_n}$$

é uma homotopia de cadeias entre φ^* e ψ^* . Portanto, existe um isomorfismo

$$j_{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}}^n : \check{H}_{\Phi}^n(\mathfrak{A}; G) \rightarrow \check{H}_{\Phi}^n(\mathfrak{B}; G),$$

induzido por φ^* , mas que não depende da projeção de refinamento φ escolhida. Assim, podemos definir os grupos de cohomologia de Čech por

$$\check{H}_{\Phi}^n(X; G) = \varinjlim_{\mathfrak{A}} \check{H}_{\Phi}^n(\mathfrak{A}; G).$$

Observação 5.29. A dimensão de cobertura de um espaço topológico X , denotada por $\text{covdim } X$, é o menor inteiro m (ou ∞) tal que toda cobertura de X tem um refinamento para o qual nenhum ponto está contido em mais do que $m + 1$ elementos distintos da cobertura. Se $\text{covdim } X = m < \infty$, temos $\check{H}_{\Phi}^q(X; G) = 0$, para todo $q > m$ (vide [8, Capítulo 1, §7, pg. 29]).

Observação 5.30. No caso de coeficientes constantes, as teorias de cohomologia H_c^* e H^* definidas sobre espaços topológicos localmente compactos e para-compactos, respectivamente, coincidem com a teoria de cohomologia de Čech (vide [8, Capítulo III, §4, Corolário 4.12, pg. 192]).

Referências Bibliográficas

- [1] Akbulut, S.; King, H. C., *All knots are algebraic*, Comment. Math. Helv. **56**, (1981), 339-351.
- [2] Andrica, D.; Funar, L., *On smooth maps with finitely many critical points*, J. London Math. Soc. **69**, (2004), 783-800.
- [3] Andrica, D.; Funar, L., *On smooth maps with finitely many critical points*, J. London Math. Soc. **69**, (2004), 783-800, Addendum **73**, (2006), 231-236.
- [4] Araújo dos Santos, R.N.; Dreibeibris, D.; Dutertre, N., *Topology of the real Milnor fiber for isolated singularities. Real and complex singularities*, Contemp. Math. **569**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2012), 67-75.
- [5] Araújo dos Santos, R.N.; Tibar, M., *Real map germs and higher open book structures*, Geometriae Dedicata **147**, (2010), 177-185.
- [6] Borsuk, K., *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20**, (1933), 177-190.
- [7] Bredon, G., *Introduction to compact transformation groups*, Vol. **46**, Academic Press, New York and London, (1972).
- [8] Bredon, G., *Sheaf Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **170**, Springer, New York, (1997).
- [9] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **139**, Springer, New York, (1991).
- [10] Bröcker, TH.; Jänich, K., *Introduction to differential topology*, English edition by Cambridge University Press, (1982).

- [11] Church, P. T.; Lamotke, K., *Non-trivial polynomial isolated singularities*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 78=Indag. Math. **37**, (1975), 149-154.
- [12] Conner, P.E.; Floyd E.E., *Differentiable Periodic Maps*. Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin **33**, (1964).
- [13] Cohen, M.M., *Simple Homotopy Theory*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, (1973).
- [14] Davis, J. F.; Kirk, P., *Lectures Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **35**, AMS, Providence, Rhode Island, (2001).
- [15] Dieck, T. tom, *Transformation Groups*, De Guyter Studies in Mathematics **8**, Berlin - New York, (1987).
- [16] Dieck, T. tom, *Algebraic Topology*, Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, (2008).
- [17] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1980).
- [18] Funar, L., *Global classification of isolated singularities in dimensions $(4, 3)$ and $(8, 5)$* . Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 10, no. **4**, (2011), 819-861.
- [19] Gonçalves, D.L.; Pergher, P.L.Q., $\mathbb{Z}_p$ -coincidence for maps of spheres into CW-complexes, Kobe J. Math. **15**, (1998), 191-195.
- [20] Gonçalves, D.L.; Jaworowski, J.; Pergher, P.L.Q. , *Measuring the size of the coincidence set*, Topology Appl. **125** (2002), 465-470.
- [21] Gonçalves, D.L.; Jaworowski, J.; Pergher, P.L.Q.; Volovikov, A.Yu., *Coincidences for maps of spaces with finite group actions*. Topology Appl. **145** (2004), no. 1-3, 61-68.
- [22] Greenberg, M.; Harper, J., *Algebraic topology. A first course*. Mathematics Lecture Note Series, **58**. Benjamin/Cummings Publishing Co., (1981).
- [23] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1974).

- [24] Harper, J. R., *Secondary Cohomology Operations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **49**, American Mathematical Society, (2002).
- [25] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, (2002).
- [26] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **20**, Springer-Verlag.
- [27] Izydorek, M.; Jaworowski, J., *Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (6) (1995) 1947-1950.
- [28] Khimshiashvili, G. M., *On the local degree of a smooth map*, Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR, **85**, (1977), 309-311.
- [29] King, H. C., *Topological types of isolated critical points*, Ann. of Math. (2) **107** (1978), 385-387.
- [30] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*. University of Washington, Department of Mathematics, version 3.0, (2000).
- [31] Looijenga, E., *A note on polynomial isolated singularities*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 74=Indag. Math. **33** (1971), 418-421.
- [32] Marzantowicz, W.; de Mattos, D.; dos Santos, E.L., *Bourgin-Yang version of the Borsuk-Ulam theorem for $\mathbb{Z}_{p^k}$ -equivariant maps*, Algebraic & Geometric Topology, to appear 2012.
- [33] de Mattos, D. ; dos Santos, E.L. , *On nonsymmetric theorems for (H, G) -coincidences*. Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol. **33**, (2009) 105-120.
- [34] de Mattos, D.; Souza, T.O., *(H, G) -Coincidence theorems for manifolds*. Artigo submetido para publicação e pré-print publicado nos Cadernos de Matemática do ICMC-USP, Vol. **13**, n. 1, (2012) 69-81.
- [35] Milnor, J. W., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, **61**, Princeton University Press, Princeton, NJ, University of Tokyo (1968).
- [36] Milnor, J.W., *Construction of Universal Bundles II*. Ann. Math. **63** (1956) 430-436.

- [37] Munkholm, H.J., *Borsuk-Ulam type theorems for proper $\mathbb{Z}_p$ -actions on (mod p homology) n -spheres*. Math. Scan. **24** (1969), 167-185.
- [38] Nakaoka, M., *Generalization of Borsuk-Ulam theorem*. Osaka J. Math. **7** (1970), 423-441.
- [39] Quillen, D., *The spectrum of an equivariant cohomology ring: I*, Annals of Mathematics, Vol. **94**, no. 3 (1971), 549-572.
- [40] Ruas, M. A.; Araújo dos Santos, R. N., *Real Milnor fibrations and (C)-regularity*. Manuscripta Math. **117** (2005), no. 2, 207-218.
- [41] Serre, J. P., *Linear representations of finite groups*. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott., Graduate Texts in Mathematics **42**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, (1977).
- [42] Souza, T. O.; Hohlenwerger, M.; de Mattos, D.; Araújo dos Santos, R. N., *New Characterization of trivial maps for the real Milnor fibers of dimension three*. JP Journal of Geometry and Topology, Vol. **12**, N. 2 (2012), 207-217.
- [43] Steenrod, N. E., *Cohomology operations*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. (1962).
- [44] Tibar, M.; Ying C.; Araújo dos Santos, R.N., *Singular open book structures from real mappings*, arXiv:1011.1757v2
- [45] Vick, J. W., *An Introduction to Algebraic Topology*, Second Edition, Springer Verlag, (1994).
- [46] Volovikov, A. Yu., *Mappings of free $\mathbb{Z}_p$ -spaces into manifolds*, Izv. Akad. Nauk SSRR Ser. Math., (46) n.1, (1992) 36-55.
- [47] Yang, C.T., *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson I, II*, Ann. of Math., **60** (1954), 262-282; **62** (1955), 271-283.
- [48] Whitehead, G.W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer Verlag, (1978).