CÁLCULO DOS ANÉIS DE HOMOLOGIA E
COHOMOLOGIA DOS GRUPOS CLÁSSICOS
 U_n e Sp_n COM COEFICIENTES NUM
DOMÍNIO DE IDEAIS PRINCIPAIS.

João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao
Instituto de Ciências Matemá-
ticas de São Carlos, da Uni
versidade de São Paulo, para
obtenção do Título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

São Carlos

DEDICAÇÃO E AGRADECIMENTOS

Dedico esta dissertação aos meus pais, meu ir mão e à minha esposa. Aos dois primeiros pela confiança e apoio que sempre me deram desde o instante em que optei pelo curso de Matemática e à minha esposa, de maneira especial, pelo incentivo e compreensão indispensáveis.

Meus agradecimentos ao professor Oziride Manzoli Neto pela seriedade com a qual me orientou, bem como pela paciência e confiança em mim depositadas. Finalmente, deixo aqui os meus agradecimentos à todos aqueles que de uma maneira direta ou indireta contribuíram para a realização desta dissertação.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP, CAPES e do CNPq.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

§1	Notações e Convenções	2
§2	Material Básico de Topologia Algébrica	7
§3	Espaços Compactamente Gerados	37
§4	Pares NDR	39
§5	Espaços com Pontos Base	47
§6	H-Espaços	54
§7	Propriedades de Homologia e Cohomologia de H-Espaços	64
§8	Álgebra Exterior	74
§9	Álgebras de Hopf	78
§10	Esferas	86

CAPÍTULO 2

§1	Fibrações	96
§2	Fibrações sobre uma Suspensão e Sequências de Wang	130
§3	Mais Propriedades da Sequência de Wang	153

CAPÍTULO 3

BIBLIOGRAFIA	192
--------------	-----

ABSTRACT

The purpose of this work is to describe the ring structure of the Cohomology and Homology of the classical groups U_n and Sp_n with coefficients in an principal ideal domain.

The preliminaries are well developed in chapters 1 and 2 for an easier understanding of the final theorems which are in chapter 3.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é descrever a estrutura dos anéis de Cohomologia e Homologia dos grupos clássicos U_n e Sp_n com coeficientes num domínio de ideais principais.

Os preliminares são bastante desenvolvidos nos capítulos 1 e 2 para um fácil entendimento dos teoremas finais contidos no capítulo 3.

CAPÍTULO 1

Neste capítulo colocamos o material necessário para o desenvolvimento dos próximos dois capítulos. O §1 consiste de uma lista de notações e de convenções que serão usadas em toda a parte do texto. O §2 consiste de todo um material básico de topologia algébrica. No §3 enumeramos aquelas propriedades mais importantes da categoria compactamente gerada. No §4 resumimos os resultados de Steenrod obtidos para pares $NDR(DR)$.

Espaços com ponto base não degenerado formam uma subcategoria plena K_* da categoria K_0 de espaços com ponto base, e muitas construções em K_* terão interesse para nós e são discutidas no §5: junções reduzidas, cones, suspensões.

Proximamente nos deparamos com o problema de definir uma operação binária natural no conjunto das classes de homotopia de X em $Y([X,Y])$, para todo espaço X em K_* . Surge naturalmente a pergunta: Dado Y , existe um produto natural em $[X,Y]$ para todo X ? Quando a resposta é afirmativa dizemos que Y é um H -espaço. Para esta questão mostramos que Y é um H -espaço se, e somente se, Y admite uma multiplicação contínua com unidade, isto é, uma aplicação $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ tal que $\mu|_{Y \vee Y}$ é a aplicação dobra que identifica cada cópia de Y em $Y \vee Y$.

com o espaço Y . Exemplos de H -espaços são os grupos topológicos e estes tipos de espaços são explorados nos §§6-7.

Nos §§8-9 citamos sem provas as propriedades algébricas de álgebras exterior e de Hopf, respectivamente e no §10 o principal objetivo é o de provar os homeomorfismos $U_n/U_{n-1} \approx S^{2n-1}$ e $Sp_n/Sp_{n-1} \approx S^{4n-1}$ onde U_n e Sp_n são os grupos clássicos unitário e simplético, nesta ordem.

§1 NOTAÇÕES E CONVENÇÕES

$\mathbb{Z}$ é o anel dos inteiros.

$\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais, com sua topologia usual.

$\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos.

$\mathbb{Q}$ é a álgebra dos quaternions.

I é o intervalo fechado $[0,1]$ de números reais, com a topologia relativa, e $\dot{I}$ é o subespaço de I consistindo dos dois pontos $0,1$.

$\mathbb{R}^\infty$ é o espaço vetorial de todas as sequências $x = \{x_i \mid i = 0,1,\dots\}$ de números reais que zeram a

partir de algum ponto, isto é, existe um inteiro não negativo N (dependendo de x) tal que $x_i = 0$ para todo $i \geq N$. R^∞ é um espaço com produto interno

$$x \cdot y = \sum_{i=0}^{\infty} x_i y_i$$

e norma

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Se e_i é o i -ésimo vetor unitário, cuja i -ésima coordenada é 1 e todas as outras coordenadas são 0, então $e_0, e_1, \dots$ é uma base ortonormal para R^∞ .

$$S^\infty = \{x \in R^\infty \mid \|x\| = 1\}$$

$$E^\infty = \{x \in R^\infty \mid \|x\| \leq 1\}$$

$$R^n = \{x \in R^\infty \mid x_i = 0 \text{ para todo } i \geq n\} \quad (n \geq 0)$$

$$S^{n-1} = S^\infty \cap R^n$$

$$E^n = E^\infty \cap R^n$$

Observação: O produto interno em R^∞ determina uma métrica mas a topologia que estamos usando sobre R^∞ não é aquela determinada pela métrica (trata-se da topologia mais fina que torna todas as inclusões $i_n: R^n \rightarrow R^\infty$ contínuas).

nuas). Contudo, os subespaços R^n , S^{n-1} e E^n têm sua topologia usual, a qual é realmente induzida pela métrica.

O grupo ortogonal $O(n)$ é o conjunto de todas as transformações lineares $T: R^n \rightarrow R^n$ que preservam o produto interno: $(Tx) \cdot (Ty) = x \cdot y$ para todos $x, y \in R^n$. O subgrupo de $O(n+1)$ deixando o último vetor coordenado e_n fixado pode ser identificado com $O(n)$. Assim temos inclusões $O(n) \subset O(n+1)$ para todo n .

$SO(n)$ é o subgrupo de $O(n)$ consistindo de transformações com determinante +1.

Necessitaremos considerar os espaços euclidianos complexo e quaterniônico. É conveniente fazer isto do seguinte modo: seja V um espaço vetorial real, e seja $I: V \rightarrow V$ uma transformação linear tal que $I^2 = -E$, onde E é a transformação identidade de V . Então V é um espaço vetorial complexo via o produto escalar dado por

$$(a+ib)x = ax + bI(x) \quad (a, b \in R, x \in V)$$

Semelhantemente, suponha que I, J, K são transformações lineares tais que

$$I^2 = J^2 = K^2 = -E,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J$$

Então, V é um espaço vetorial (à esquerda) sobre a álgebra dos quatérnions Q via o produto escalar dado por

$$(a+bi+cj+dk)x = ax+bI(x)+cJ(x)+dK(x)$$

Seja C^∞ o espaço vetorial R^∞ , com a estrutura complexa definida por

$$I(e_{2j}) = e_{2j+1}$$

$$I(e_{2j+1}) = -e_{2j},$$

para todo $j \geq 0$. Então, os vetores $e_0, e_2, \dots$ formam uma base (complexa) para C^∞ , e os vetores $e_0, e_2, \dots, e_{2n-2}$ formam uma base (complexa) para um subespaço C^n , que é evidentemente R^{2n} com a estrutura complexa definida pela restrição de I a R^{2n} .

Semelhantemente, definimos Q^∞ como o espaço vetorial R^∞ , com a estrutura quaterniônica definida por

$$\begin{aligned}
 J(e_{4i}) &= e_{4i+2} , & K(e_{4i}) &= e_{4i+3} ; \\
 J(e_{4i+1}) &= -e_{4i+3} , & K(e_{4i+1}) &= e_{4i+2} ; \\
 J(e_{4i+2}) &= -e_{4i} , & K(e_{4i+2}) &= -e_{4i+1} ; \\
 J(e_{4i+3}) &= e_{4i+1} , & K(e_{4i+3}) &= -e_{4i} ;
 \end{aligned}$$

e onde I está definida como para C^∞ . Então os vetores $e_0, e_4, \dots$ formam uma base (quaterniônica) para Q^∞ , e os vetores $e_0, e_4, \dots, e_{4n-4}$ formam uma base (quaterniônica) para um subespaço Q^n , que é evidentemente R^{4n} com a estrutura quaterniônica definida pelas restrições de I, J, K a R^{4n} .

O grupo unitário $U(n)$ é definido como o conjunto de todas as transformações lineares de C^n que pertencem ao grupo ortogonal $O(2n)$; e $SU(n)$ é o subgrupo de $U(n)$ consistindo de todos elementos de determinante $+1$ (como transformações lineares complexas; todo membro de $U(n)$ tem determinante $+1$ quando considerado como uma transformação linear real). Semelhantemente, o grupo simplético $Sp(n)$ é o conjunto de todas as transformações de Q^n que pertencem ao grupo ortogonal $O(4n)$. Existem inclusões $U(n) \subset U(n+1)$, $Sp(n) \subset Sp(n+1)$.

Observação: Frequentemente escreveremos O_n, U_n, Sp_n ao invés de $O(n), U(n), Sp(n)$, respectivamente.

Nota: Sejam X e Y espaços topológicos. Por uma aplicação de X em Y entendemos uma função contínua de X em Y .

§2 Material Básico de Topologia Algébrica

(2.1) Complexos de Cadeias (Co-cadeias).

Definição: Um complexo de cadeias $C = (C_n, \partial_n)$ é definido por um par de seqüências: uma seqüência de grupos abelianos $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e uma seqüência de homomorfismos

$\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$, tal que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Frequentemente, um complexo de cadeias é representado por uma seqüência inferior

$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$; e os elementos de C_n são denominados n -cadeias.

Definição (*): Um complexo de co-cadeias $C^* = (C^n, \delta^n)$ é definido por um par de seqüências: uma seqüência de grupos abelianos $(C^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ e uma seqüência de homomorfismos $\delta^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ tais que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A representação normal para um tal complexo é uma sequência superior da forma:

$\dots C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \longrightarrow \dots$; e os elementos de C^n são denominados n -co-cadeias.

A um complexo de cadeias $C = (C_n, \partial_n)$ se associa de modo natural certos subgrupos dos grupos de cadeias C_n em cada dimensão n :

$$Z_n(C) = \text{Ker } \partial_n = \text{núcleo de } \partial_n \text{ e}$$

$$B_n(C) = \text{Im } \partial_{n+1} = \partial_{n+1}(C_{n+1})$$

Os elementos de $Z_n(C)$ são chamados n -ciclos e os de $B_n(C)$ n -bordos do complexo C . Observando que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ acarreta obviamente $B_n(C) \subset Z_n(C)$ para todo n , podemos definir os grupos quocientes

$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$, denominado o grupo de homologia de C na dimensão n . Os elementos de $H_n(C)$ são denominados classes de homologia.

Seja agora, G um grupo abeliano e consideremos a cadeia $C \otimes G$:

$$\dots C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes 1_G} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_G} C_{n-1} \otimes G \rightarrow \dots$$

onde $1_G: G \rightarrow G$ é o homomorfismo identidade.

Definimos $H_n(C; G) = H_n(C \otimes G)$ como sendo

o grupo de homologia do complexo C com coeficientes no grupo G .

Partindo, agora, de um complexo de co-cadeias $C^* = (C^n, \delta^n)$, define-se analogamente $Z^n(C^*) = \text{Ker } \delta^n =$ grupo dos n -cociclos, $B^n(C^*) = \text{Im } \delta^{n-1} =$ grupo dos n -cobordos e $H^n(C^*) = Z^n(C^*)/B^n(C^*) =$ grupo de cohomologia de C^* na dimensão n .

Os elementos de $H^n(C^*)$ são denominados classes de cohomologia.

Sejam agora, G um grupo abeliano e $C: \dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$ um complexo de cadeias. Considere $C^n = \text{Hom}(C_n, G)$ e defina $\delta^{n-1}: C^{n-1} \rightarrow C^n$ por $\delta^{n-1}(\alpha) = \alpha \circ \partial_n$ para cada $\alpha \in C^{n-1} = \text{Hom}(C_{n-1}, G)$. Então, a sequência $\dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \rightarrow \dots$ é um complexo de co-cadeias $C^* = (C^n, \delta^n)$ e definimos $H^n(C; G) = H^n(C^*)$, como sendo o grupo de cohomologia de C com coeficientes no grupo G .

Definição: Dados dois complexos de cadeias $C = (C_n, \partial_n)$ e $C' = (C'_n, \partial'_n)$, chama-se aplicação de cadeias $\phi: C \rightarrow C'$ a uma família de homomorfismos $\phi = (\phi_n)$, $\phi_n: C_n \rightarrow C'_n$, $n \in \mathbb{Z}$, tal que, para todo n

$$\partial'_n \phi_n = \phi_{n-1} \partial_n$$

Definição: Seja $C = (C_n, \partial_n)$ um complexo de cadeias. Por um subcomplexo de cadeias D de C entendemos uma sequência de subgrupos $D_n \subset C_n$ e de homomorfismos

$\partial'_n: D_n \rightarrow D_{n-1}$ tais que $\partial_n|_{D_n} = \partial'_n$. **Notação:** $D \subset C$.

Dado um subcomplexo de cadeias $D \subset C$ de fine-se o complexo quociente $E = C/D$, como sendo o complexo de cadeias $E = (E_n, \bar{\partial}_n)$, onde $E_n = C_n/D_n$ e $\bar{\partial}_n: E_n \rightarrow E_{n-1}$ é definido por passagem ao quociente em ∂_n (visto que $\partial_n(D_n) \subset D_{n-1}$). Lembramos que os elementos de $E_n = C_n/D_n$ são classes de restos $c + D_n$, $c \in C_n$, onde a adição é dada por: $(c+D_n) + (c'+D_n) = (c+c') + D_n$.

$\bar{\partial}_n: E_n \rightarrow E_{n-1}$, obtida de ∂_n por passagem ao quociente, atua nas classes de restos segundo a fórmula $\bar{\partial}_n(c+D_n) = (\partial_n c) + D_{n-1}$ e verifica-se facilmente que $\bar{\partial}_{n-1} \circ \bar{\partial}_n = 0$ para todo n .

Definimos

$H_n(C, D) = H_n(C/D) = \text{Ker } \bar{\partial}_n / \text{Im } \bar{\partial}_{n+1}$, o n -ésimo grupo de homologia do par (C, D) .

(2.2) Módulos Graduados

Seja A um domínio de ideais principais e de notemos D um conjunto de elementos. Por um módulo graduado sobre A , com D como seu conjunto de graus entende-

mos um módulo X , sobre A , com uma decomposição em soma direta

$$X = \sum_{d \in D} X_d$$

de X em uma família de submódulos X_d de X indexados pelo conjunto D .

Seja X um módulo graduado sobre A , com D como seu conjunto de graus. Um elemento $x \in X$ é homogêneo se, e somente se, está contido em X_d para algum $d \in D$. No caso em que $x \in X_d$, dizemos que x é homogêneo de grau d e denotamos $\deg(x) = d$.

O elemento 0 de X é homogêneo de qualquer grau. Por outro lado, um elemento não nulo x de X pode pertencer a no máximo um X_d . Cada elemento x de X pode ser representado de uma única maneira na forma:

$$x = \sum_{d \in D} x_d$$

onde para cada $d \in D$, x_d é homogêneo de grau d . O elemento x_d é chamado a componente homogênea de grau d do elemento x . Apenas um número finito destas componentes homogêneas de x pode ser diferente de zero.

Em todo este parágrafo, assumiremos que o conjunto D de graus é um grupo abeliano aditivo. Se-

jam X e Y quaisquer dois módulos graduados sobre A , com o mesmo grupo abeliano D de graus. Seja r um elemento de D . Um homomorfismo de módulos

$$f: X \rightarrow Y$$

é homogêneo de grau r se, e somente se, $f(X_d) \subset Y_{d+r}$ para todo $d \in D$.

Para ilustrar e mostrar o uso da noção de módulos graduados, consideremos uma sequência inferior

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots$$

de homomorfismos como definido em (2.1) para grupos abelianos. A generalização a módulos sobre A é óbvia. De fato, podemos assumir que, para cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$, C_n é um módulo sobre A e $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ é um homomorfismo de módulos satisfazendo $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Formando a soma direta dos módulos C_n para todo $n \in \mathbb{Z}$, obtemos um módulo graduado,

$$C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n,$$

sobre A com $\mathbb{Z}$ como o seu conjunto de graus.

A soma direta dos homomorfismos de módulos

$\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ é um endomorfismo homogêneo $\partial: C \rightarrow C$ do módulo graduado C sobre A , de grau -1 , satisfazendo $\partial \circ \partial = 0$. Assim, a noção de uma sequência inferior de homomorfismos de módulos é reduzida àquela de um módulo graduado C com inteiros como conjunto de graus, junto com um endomorfismo homogêneo ∂ de C de grau -1 e satisfazendo $\partial \circ \partial = 0$. Semelhantemente, a noção de uma sequência superior de homomorfismos de módulos pode ser reduzida àquela de um módulo graduado C^* com inteiros como conjunto de graus, junto com um endomorfismo homogêneo δ de C^* de grau 1 e satisfazendo $\delta \circ \delta = 0$.

Por um módulo diferencial sobre A , entendemos, um módulo C sobre A junto com um endomorfismo

$$d: C \rightarrow C$$

do módulo C satisfazendo $d \circ d = 0$. Neste caso, temos $\text{Im}(d) \subset \text{Ker}(d)$.

O módulo quociente

$$H(C) = \text{Ker}(d) / \text{Im}(d)$$

é chamado o módulo derivado deste módulo diferencial C .

No caso em que C é o módulo graduado sobre A construído de uma sequência inferior como acima e $d = \partial$, o módulo derivado é graduado com uma decomposição em soma direta

$$H_*(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n(C)$$

onde $H_n(C)$ é o n -ésimo módulo de homologia dimensional da sequência inferior dada.

Semelhantemente, se C é o módulo graduado sobre A construído de uma sequência superior e $d = \delta$, então o módulo derivado é também graduado com uma decomposição em soma direta

$$H^*(C) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H^n(C)$$

onde $H^n(C)$ é o n -ésimo módulo de cohomologia da sequência superior dada.

Observação: Nas aplicações que faremos desta noção teremos normalmente $H_n(C) = 0$ se $n < 0$ ($H^n(C) = 0$ se $n < 0$) e portanto $H_*(C) = \sum_{n \geq 0} H_n(C)$ ($H^*(C) = \sum_{n \geq 0} H^n(C)$).

2.3. Generalidades sobre Módulos

A seguinte noção é de particular importância: Uma sequência de módulos sobre A e homomorfismos

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow \dots \rightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$$

se diz exata se: $\text{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Se a sequência é da forma $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$

diremos que é uma sequência exata curta.

Uma sequência exata curta de módulos sobre A e homomorfismos

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

cinde se, $f(M')$ é um somando direto de M .

Temos as equivalências

- i) A sequência exata curta cinde;
- ii) Existe um homomorfismo $\bar{f}: M \rightarrow M'$ com $\bar{f} \circ f = \text{identidade}$;
- iii) Existe um homomorfismo $\bar{g}: M'' \rightarrow M$ com $g \circ \bar{g} = \text{identidade}$.

O resultado seguinte se conhece com o nome de:

Lema dos Cinco

Seja o diagrama comutativo de módulos sobre A e homomorfismos, com ambas as filas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & X_4 & \xrightarrow{f_4} & X_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_3 & \xrightarrow{g_3} & Y_4 & \xrightarrow{g_4} & Y_5 \end{array}$$

Então:

- i) Se h_2 e h_4 são epimorfismos e h_5 é um monomorfismo, então h_3 é um epimorfismo;
- ii) Se h_2 e h_4 são monomorfismos e h_1 é um epimorfismo, então h_3 é um monomorfismo.

Note que, como um caso especial do Lema dos Cinco, se h_1, h_2, h_4 e h_5 são isomorfismos, então h_3 é um isomorfismo.

2.4. Tor e Ext

Para qualquer módulo M sobre A existe uma sequência exata $0 \rightarrow L' \xrightarrow{i} L \rightarrow M \rightarrow 0$ com L livre (ver[1], proposição I.3.1, p.13)

Se N é outro módulo sobre A definimos,

$$\text{Tor}(M, N) = \text{Ker}(L' \otimes N \xrightarrow{(i \otimes \text{id})} L \otimes N)$$

Temos os seguintes resultados:

- i) Para qualquer par de módulos X e Y ,

$$\text{Tor}(X, Y) \cong \text{Tor}(Y, X);$$
- ii) Se X é um módulo livre, $\text{Tor}(X, Y) = 0$
para qualquer módulo Y ;
- iii) $\text{Tor}(X, 0) = 0$ para qualquer módulo X
(0 é o módulo nulo).

Agora, seja dada $0 \rightarrow L' \xrightarrow{i} L \rightarrow M \rightarrow 0$ com
 L livre e N um outro A -módulo.

Definimos

$$\text{Ext}(M, N) = \text{coker}(\text{Hom}_A(L, N) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_A(L', N)) = \text{Hom}_A(L', N) / \text{Im}(\beta).$$

Temos o seguinte resultado:

Se X é um módulo livre, $\text{Ext}(X, Y) = 0$ para qualquer módulo Y .

(2.5) Homologia e Cohomologia Singular

Em todo este parágrafo referenciamos [1] e [2]. Seja X um espaço topológico e definamos
 $S_n(X)$ = grupo abeliano livre gerado pelos n -simplexos singulares de X .

Um elemento de $S_n(X)$ é chamado uma n -cadeia singular de X e tem a forma $\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$ onde n_{ϕ} é um-

inteiro igual a zero a menos de um número finito de ϕ .

Desde que, o i -ésimo operador face $\tilde{\partial}_i(\phi)$ é um $(n-1)$ simplexo singular de X , definimos

$$\partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X) \quad \text{por} \quad \partial_n \left(\sum_{\phi} n_{\phi} \phi \right) = \sum_{\phi} n_{\phi} \partial_n(\phi) \quad \text{onde}$$

$$\partial_n(\phi) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{\partial}_i(\phi).$$

Vale $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para todo n .

O complexo de cadeias $S_*(X) = (S_n(X), \partial_n)$ é chamado o complexo singular de X .

Definimos

$$H_n(X) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

o n -ésimo grupo de homologia singular de X .

Por um par de espaços topológicos (X, A) entendemos um espaço topológico X , junto com um subespaço $A \subseteq X$. Se (X, A) é um par de espaços topológicos, $S_*(A)$ pode ser visto como um subcomplexo de $S_*(X)$.

O complexo de cadeia singular de $X \bmod A$ é definido por

$$S_*(X, A) = S_*(X) / S_*(A).$$

Agora, seja G um domínio de ideais principais e considere o complexo $S_*(X, A) \otimes G$. A homologia deste complexo, é definida por $H_n(X, A; G) = H_n(S_*(X, A) \otimes G)$.

Se $G = \mathbb{Z}$, abreviaremos para $H_n(X, A)$.

Novamente, seja (X, A) um par de espaços topológicos e G um domínio de ideais principais. Temos que

$$S_*(X, A): \dots S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X, A) \rightarrow \dots$$

é um complexo de cadeias. Defina

$$S^n(X, A; G) = \text{Hom}(S_n(X, A), G). \text{ Consideremos}$$

$\alpha \in \text{Hom}(S_{n-1}(X, A), G)$. Seja δ^{n-1} tal que $\delta^{n-1}(\alpha) = \alpha \circ \partial_n$; então a sequência

$$\dots \rightarrow S^{n-1}(X, A; G) \xrightarrow{\delta^{n-1}} S^n(X, A; G) \xrightarrow{\delta^n} S^{n+1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

é um complexo de cocadeias e

$$H^n(X, A; G) = \text{Ker } \delta^n / \text{Im } \delta^{n-1}.$$

Se $G = \mathbb{Z}$, abreviaremos para $H^n(X, A)$.

Vejamos algumas propriedades fundamentais da homologia e cohomologia singular.

P.1 - Para cada par (X, A) se tem sequências exatas (nas quais se omitiu escrever o grupo G de coeficientes, por razões de espaço), chamadas sequências exatas longas de homologia e cohomologia do par (X, A) :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{p+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(A) \\ \rightarrow \dots \rightarrow H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \xrightarrow{j^*} H^0(X) \xrightarrow{i^*} H^0(A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^p(X, A) \xrightarrow{j^*} H^p(X) \xrightarrow{i^*} H^p(A) \rightarrow \dots$$

onde i^*, j^*, i_*, j_* são injeções = (homomorfismos induzidos por inclusões)

P.2 - Se P é um ponto, então $H_q(P; G) = H^q(P; G) = 0$ se $q > 0$, e $H_0(P; G) \cong G \cong H^0(P; G)$

P.3 - Se $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são homotópicas, então $f_* = g_*$, e $f^* = g^*$.

P.4 - Se (X, A) é um par de espaços topológicos para o qual A é um retrato por deformação forte de X , então $H^p(X, A) = H_p(X, A) = 0$ para todo p .

P.5 - Se (X, A) é um par de espaços topológicos para o qual A é um retrato de X , então as sequências exatas longas de homologia e cohomologia do par (X, A) quebram-se nas sequências exatas curtas

$$0 \rightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^p(X, A) \xrightarrow{j^*} H^p(X) \xrightarrow{i^*} H^p(A) \rightarrow 0$$

(2.6) Tríplas e Tríadas

No que segue, omitiremos o grupo de coefi-
cientes. Uma tripla (X, A, B) consiste em uma terna orde-
nada, com $B \subseteq A \subseteq X$. Aplicações de triplas se definem de
forma óbvia.

Dado uma tripla (X, A, B) , se tem as inclu-
sões

$$\begin{array}{lll} i: A \rightarrow X & i': B \rightarrow X & i'': B \rightarrow A \\ j: X \rightarrow (X, A) & j': X \rightarrow (X, B) & j'': A \rightarrow (A, B) \\ \ell: (A, B) \rightarrow (X, B) & m: (X, B) \rightarrow (X, A) & \end{array}$$

Temos a:

Proposição - Dado uma tripla (X, A, B) , se tem sequências
exatas longas

$$\dots \rightarrow H_p(A, B) \xrightarrow{\ell_*} H_p(X, B) \xrightarrow{m_*} H_p(X, A) \xrightarrow{j''_* \partial} H_{p-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H_0(A, B) \rightarrow H_0(X, B) \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0$$

onde $\partial: H_p(X, A) \rightarrow H_{p-1}(A)$ é o homomorfismo de conexão
da sequência exata longa de homologia do par (X, A) ; e

$$0 \rightarrow H^0(X, A) \xrightarrow{m^*} H^0(X, B) \xrightarrow{\ell^*} H^0(A, B) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(A, B) \xrightarrow{\delta j^{**}} H^p(X, A) \xrightarrow{m^*} H^p(X, B) \xrightarrow{\ell^*} H^p(A, B) \rightarrow \dots$$

onde $\delta: H^{p-1}(A) \rightarrow H^p(X, A)$ é o homomorfismo de conexão da sequência exata longa de cohomologia do par (X, A) .

Observação: Desde que em (2.5) nós definimos

$S^n(X, A; G) = \text{Hom}(S_n(X, A), G)$, é usual adotar a notação abaixo: se $\phi \in S^n(X, A; G)$ e c está em $S_n(X, A)$, então o valor de ϕ em c é o elemento de G denotado por $\langle \phi, c \rangle$. Note que esta aplicação é bilinear no sentido de que

$$\langle \phi_1 + \phi_2, c \rangle = \langle \phi_1, c \rangle + \langle \phi_2, c \rangle$$

e

$$\langle \phi, c_1 + c_2 \rangle = \langle \phi, c_1 \rangle + \langle \phi, c_2 \rangle$$

Em particular, para qualquer inteiro n temos $\langle \phi, nc \rangle = \langle n\phi, c \rangle$.

Deste modo, esta aplicação produz um homomorfismo

$$S^n(X, A; G) \otimes S_n(X, A) \rightarrow G \quad \text{para cada } n.$$

Nesta notação, os operadores bordo e cobordo são adjuntos; isto é, $\langle \phi, \partial c \rangle = \langle \delta \phi, c \rangle$. Além disso, se

$f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ é uma aplicação de pares, $\phi \in S^n(Y,B;G)$ e $c \in S_n(X,A)$, então $\langle \phi, f_{\#}(c) \rangle = \langle f^{\#}(\phi), c \rangle$, onde

$$f_{\#}: S_n(X,A) \rightarrow S_n(Y,B) \quad \text{e} \quad f^{\#}: S^n(Y,B;G) \rightarrow S^n(X,A;G)$$

são as aplicações de cadeia e co-cadeia induzidas por f respectivamente.

Agora, seja $x \in H^n(X,A;G)$ representado por um cociclo ϕ e $y \in H_n(X,A)$ representado por um ciclo c . Então definimos uma aplicação bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle: H^n(X,A;G) \otimes H_n(X,A) \rightarrow G$ por $\langle x, y \rangle = \langle \phi, c \rangle$.

Esta aplicação bilinear é chamada o índice de Kronecker e pode ser vista como um homomorfismo $\alpha: H^n(X,A;G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X,A), G)$. Além disso, se $f_{\star}: H_n(X,A) \rightarrow H_n(Y,B)$ e $f^{\star}: H^n(Y,B;G) \rightarrow H^n(X,A;G)$ são os homomorfismos induzidos; temos $\langle f^{\star}(z), w \rangle = \langle z, f_{\star}(w) \rangle$ para $z \in H^n(Y,B;G)$ e $w \in H_n(X,A)$.

Vamos agora enunciar mais alguns resultados relevantes:

Um módulo graduado $X = \sum_{d \in D} X_d$ é de tipo finito se, para cada d , X_d é finitamente gerado.

Teorema (Fórmula de Künneth para Cohomologia)

Sejam G e G' domínios de ideais principais com $\text{Tor}(G, G') = 0$.

Se $H_*(X;Z)$ e $H_*(Y;Z)$ são de tipo finito, então existe uma sequência exata que cinde

$$0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H^p(X;G) \otimes H^q(Y;G') \xrightarrow{x} H^n(X \times Y; G \otimes G')$$

$$\rightarrow \sum_{p+q=n+1} \text{Tor}(H^p(X;G), H^q(Y;G')) \rightarrow 0.$$

Observação: x é a aplicação dada pelo produto cross em cohomologia.

Teorema (Fórmula de Kunneth para homologia)

Sejam G e G' domínios de ideais principais com $\text{Tor}(G, G') = 0$.

Então existe uma sequência exata que cinde

$$0 \rightarrow \sum_{p+q=n} H_p(X;G) \otimes H_q(Y;G') \xrightarrow{x} H_n(X \times Y; G \otimes G')$$

$$\rightarrow \sum_{r+s=n-1} \text{Tor}(H_r(X;G), H_s(Y;G')) \rightarrow 0$$

Observação: x é a aplicação dada pelo produto cross em homologia.

Teorema dos Coeficientes Universais

I) Dado um par (X,A) de espaços e um domínio de ideais principais G , existe uma sequência exata que cinde

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A; Z), G) \rightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(H_n(X, A), G) \rightarrow 0$$

II) (R um domínio de ideais principais) A sequência

$$0 \rightarrow H_n(X; Z) \otimes R \rightarrow H_n(X; R) \rightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(X; Z), R) \rightarrow 0 \quad \text{é exata e cinde.}$$

Vejamos agora algumas propriedades do produto cup, bem como suas relações com o produto cross (provadas em [7]).

P.1 Sejam $a, b \in H^*(X), c, d \in H^*(Y)$. Então

$$(a \smile b) \times (c \smile d) = (-1)^{|b||c|} (a \times c) \smile (b \times d) \quad \text{onde } |x| \text{ denota a dimensão.}$$

$$\text{P.2 Sejam } c, d \in H^*(X). \text{ Então } c \smile d = (-1)^{|c| \cdot |d|} d \smile c.$$

Definição: Sejam A, A_α e B_α módulos sobre R e seja α um elemento de algum conjunto de índices. Um conjunto de homomorfismos $i_\alpha: A_\alpha \rightarrow A$ é chamado uma representação injetiva de A como uma soma direta $\sum i_\alpha(A_\alpha)$ se, e somente se, cada elemento $a \in A$ tem uma única representação $a = \sum_\alpha i_\alpha(c_\alpha)$, onde a soma contém apenas um número finito de termos não nulos.

Definição: Um conjunto de homomorfismos $P_\alpha: A \rightarrow B_\alpha$ é chamado uma representação projetiva de A como um produto direto dos B_α se, e somente se, para cada $b_\alpha \in B_\alpha$ existe um único $a \in A$ tal que $p_\alpha(a) = b_\alpha$.

Uma tríada $(X; A, B)$ consiste de um espaço topológico X e um par ordenado de subespaços A , e B , de X .

Cada tríada $(X; A, B)$ tem injeções

$$k_2: (B, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, A)$$

e

$$K_1: (A, A \cap B) \rightarrow (A \cup B, B)$$

A tríada $(X; A, B)$ é chamada exata, ou tríada própria, se K_{1*} e K_{2*} (para cohomologia K_1^* e K_2^*) são isomorfismos.

Teorema de Mayer-Vietoris

a) Homologia: Seja $(X; A, B)$ uma tríada exata na qual $X = A \cup B$. Então a sequência de Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_q(A \cap B) \xrightarrow{\Psi}$$

$$H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{\Phi} H_q(X) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

é exata. Aqui Ψ , Φ , e Δ são definidos por

$\Psi(a) = (m_{1*}(a), -m_{2*}(a))$, $\phi(x_1, x_2) = i_*(x_1) + i'_*(x_2)$, e
 $\Delta = -\partial'_*(K_{1*})^{-1}j'_* = \partial''_*(K_{2*})^{-1}j_*$ onde $m_1: A \cap B \rightarrow A$ e
 $m_2: A \cap B \rightarrow B$ são inclusões e ∂'_* e ∂''_* são os homomorfismos de conexão da sequência de homologia do par
 $(A, A \cap B)$ e $(B, A \cap B)$ respectivamente.

b) Cohomologia: Seja $(X; A, B)$ uma tríada exata na qual
 $X = A \cup B$. Então a sequência de Mayer-Vietoris

$$\dots \leftarrow H^{q+1}(X) \xleftarrow{\Delta} H^q(A \cap B) \xleftarrow{\phi}$$

$$H^q(A) \oplus H^q(B) \xleftarrow{\Psi} H^q(X) \xleftarrow{\Delta} H^{q-1}(A \cap B) \leftarrow \dots$$

é exata. Aqui Ψ , ϕ , e Δ são definidos por

$\Psi(x) = (i^*(x), -i'^*(x))$, $\phi(x_1, x_2) = m_1^*(x_1) + m_2^*(x_2)$, e
 $\Delta = -j^*(K_2^*)^{-1}\delta''_* = j'^*(K_1^*)^{-1}\delta'_*$ onde δ'_* e δ''_* são
os homomorfismos de conexão da sequência de cohomologia
do par $(A, A \cap B)$ e $(B, A \cap B)$ respectivamente.

(2.7) Orientação

Seja E uma n -célula e denotemos $\dot{E}$ o
bordo de E . Uma orientação de E é apenas um gerador ε
do grupo cíclico infinito $H^n(E, \dot{E})$; o par (E, ε) é chamada
de uma n -célula orientada.

Se S é uma n -esfera (com ponto base), uma orientação σ de S é um gerador do grupo cíclico infinito $H^n(S, \mathbb{Z})$; o par (S, σ) é chamado uma n -esfera orientada. Se E é uma n -célula com ponto base $*$ e $\dot{E}$, então $\dot{E}$ é uma $(n-1)$ -esfera, e o isomorfismo $(\delta^*)^{-1}: H^n(E, \dot{E}) \rightarrow H^{n-1}(\dot{E}, *)$ carrega uma orientação ε de E numa orientação $(\delta^*)^{-1}(\varepsilon)$ de $\dot{E}$.

A orientação de E pode também ser dada por um gerador ε' do grupo cíclico infinito $H_n(E, \dot{E})$ tal que o índice de Kronecker $\langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle = 1$. Segundo esta orientação, se E é uma n -célula com ponto base $*$ e $\dot{E}$, então $\dot{E}$ é uma $(n-1)$ -esfera, e o isomorfismo $\partial_*: H_n(E, \dot{E}) \rightarrow H_{n-1}(\dot{E}, *)$ carrega uma orientação ε' de E numa orientação $\partial_*\varepsilon'$ de $\dot{E}$ tal que o índice de Kronecker $\langle (\delta^*)^{-1}\varepsilon, \partial_*\varepsilon' \rangle = \langle \delta^*(\delta^*)^{-1}\varepsilon, \varepsilon' \rangle = \langle \varepsilon, \varepsilon' \rangle = 1$.

Escolhamos, agora, orientações definitivas das células e esferas que aparecerão mais tarde.

$S^0 = T = \{0, 1\}$ é orientada pela classe de homologia s_0 do ponto 1.

T é orientado pelo elemento t tal que $\partial_*t = s_0$.

S^1 é orientada por $s = \bar{w}_*(t)$, onde $\bar{w}: (T, \dot{T}) \rightarrow (S^1, *)$ é a aplicação identificação.

$S^n = S^1 \wedge \dots \wedge S^1$ é orientada por $s_n = s \wedge \dots \wedge s$.

$E^n = T \wedge S^{n-1}$ é orientado por $\varepsilon_n = t \wedge s_{n-1}$.

Observação: Para o capítulo 2 a seguir necessitaremos da seguinte

Definição: Dizemos que a fibra F atua sobre a fibração p se, e somente se, existe uma aplicação $\mu: X \times F \rightarrow X$ tal que $\mu \circ i_1 \simeq 1$, a aplicação identidade de X , $\mu \circ i_2 \simeq i: F \hookrightarrow X$, $p \circ \mu = p \circ p_1$, onde $p_1: X \times F \rightarrow X$ é a projeção. Aqui, $i_1: X \rightarrow X \times F$ e $i_2: F \rightarrow X \times F$ são as inclusões.

(2.8) Os problemas fundamentais: Extensão, Levantamento, Homotopia.

Um problema básico de topologia é o de "fatorar uma função contínua por uma outra". Especificamente, dado um diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \downarrow & \searrow f & \\ & X & Y \end{array}$$

em alguma categoria $\mathcal{C}$ de espaços topológicos e aplicações contínuas, pode ele ser completado a um diagrama comutativo

na mesma categoria? Este é o problema de fatorização a direita, e é convenientemente simbolizado pelo diagrama

onde a flecha tracejada indica uma aplicação cuja existência está em questão.

Dualmente, tem-se o problema de fatorização a esquerda

Quando a aplicação i de (a) é 1-1, o problema de fatorização correspondente é chamado um pro-

blema de extensão, e g uma extensão de f . Quando a aplicação p de (b) aplica X sobre B , o problema de fatorização correspondente é chamado um problema de levantamento, e g um levantamento de f .

Um caso especial importante do problema de extensão é o problema de homotopia. Sejam $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ aplicações, e seja I o intervalo fechado $[0,1]$. Então f_0 e f_1 são homotópicas ($f_0 \simeq f_1$) se, e somente se, a aplicação de $I \times X$ em Y que envia (t,x) em $f_t(x)$ ($t \in [0,1]$) tem uma extensão $f: I \times X \rightarrow Y$. Tal uma extensão é chamada uma homotopia de f_0 a f_1 , e determina, para cada $t \in I$, uma aplicação $f_t: X \rightarrow Y$, dada por

$$f_t(x) = f(t,x) \quad (t \in I, x \in X).$$

Se A é um subespaço de X e $f_0|_A = f_1|_A$, dizemos que f_0 e f_1 são homotópicas relativamente a A ($f_0 \simeq f_1(\text{rel.} A)$) se, e somente se, existe uma homotopia $f: I \times X \rightarrow Y$ de f_0 a f_1 satisfazendo a condição adicional $f_t|_A = f_0|_A$ para todo $t \in I$. A homotopia f é estacionária em $x \in X$ se, e somente se, $f(t,x) = f(0,x)$ para todo $t \in I$; f é estacionária sobre $A \subset X$ se, e somente se, f é estacionária em cada ponto de A . Finalmente, uma homotopia estacionária é aquela que é estacionária sobre X .

A relação de homotopia é reflexiva, simétrica e transitiva, e o estudo dos conjuntos $[X,Y]$ de classes de equivalência, chamados classes de homotopia, é o objeto da teoria de homotopia. Se (X,A) e (Y,B) são pares, uma aplicação de pares $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ é uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ para o qual $f(A) \subseteq B$.

Duas aplicações $f_0, f_1: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ são homotópicas como aplicações de pares se, e somente se, existe uma homotopia de f_0 a f_1 que aplica $I \times A$ em B .

Observação: Se (X,A) é um par de espaços então $I \times (X,A)$ é o par de espaços $(I \times X, I \times A)$.

Outro caso importante do problema de extensão é o problema de extensão de homotopia: Sejam $f: X \rightarrow Y$ e $g: I \times A \rightarrow Y$ uma homotopia de $f|_A$ a uma aplicação $f': A \rightarrow Y$. Então f e g definem uma aplicação $h: 0 \times X \cup I \times A \rightarrow Y$ e podemos perguntar se o problema de extensão

(c)

$$\begin{array}{ccc}
 0 \times X \cup I \times A & \xrightarrow{h} & Y \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & I \times X &
 \end{array}$$

tem uma solução. Quando isto ocorre, a extensão é uma homotopia de f a uma extensão de f' .

Quando o problema (c) tem uma solução para todo espaço Y e aplicação h , dizemos que o par (X,A) tem a propriedade da extensão de homotopia.

Como já definimos anteriormente, uma triáda $(X;A,B)$ se diz própria se, e somente se, as injecções $H^n(A \cup B, B) \rightarrow H^n(A, A \cap B)$ (equivalentemente, se, e somente se, as injecções $H^n(A \cup B, A) \rightarrow H^n(B, A \cap B)$) são isomorfismos para todo n .

Observações:

- i) injecções são homomorfismos induzidos pelas inclusões, não significam que são injetoras como homomorfismos.
- ii) Para as Definições, Lema e Teorema abaixo uso par NDR, proclusão e grupo topológico que estão definidos nas páginas 39, 41 e 85 respectivamente.

Definição: A triáda $(X; A,B)$ é uma triáda NDR se, e somente se, $X = A \cup B$, A e B são fechados, e um dos pares $(A, A \cap B)$, $(B, A \cap B)$ é um par NDR.

Lema: Seja (X,A) um par NDR, e seja $p: X \rightarrow X/A$ a proclusão natural. Então

$$p^*: H^n(X/A, *) \rightarrow H^n(X, A).$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Seja TX o cone sobre X ; então $X \cup TA$ é um subespaço de TX , e $(X \cup TA, TA)$ é um par NDR. Por (4.5) do §4 deste capítulo, a proclusão $q: X \cup TA \rightarrow (X \cup TA)/TA$ é uma equivalência de homotopia.

Seja $h: X/A \rightarrow (X \cup TA)/TA$ o homeomorfismo natural. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(X, A) & \xleftarrow{p^*} & H^n(X/A, *) \\
 \uparrow i_1 & & \uparrow h^* \\
 H^n(X \cup TA, TA) & \xleftarrow{q_1} & H^n((X \cup TA)/TA, *) \\
 \downarrow i_2 & \searrow q_2 & \\
 H^n(X \cup TA, *) & &
 \end{array}$$

no qual q_1, q_2 são os homomorfismos induzidos por q e i_1, i_2 são as injeções. Mas A é um retrato por deformação (forte) de uma vizinhança dele próprio em TA , e portanto i_1 é um isomorfismo. Que i_2 é um isomorfismo segue da exatidão da sequência de cohomologia da tripla $(X \cup TA, TA, *)$ e da contratibilidade de TA . Desde que q é uma equivalência de homotopia, q_2 é um isomorfismo, e portanto q_1 é um isomorfismo. Mas h^* é um isomorfismo, e segue que p^* é um isomorfismo. $\square$

Teorema: Seja $(X;A,B)$ uma triáda NDR. Então $(X;A,B)$ é própria.

Demonstração: Podemos assumir que $(A,A \cap B)$ é um par NDR, e portanto (X,B) também o é. Sejam $p: (A,A \cap B) \rightarrow (A/(A \cap B),*)$ e $q: (X,B) \rightarrow (X/B,*)$ as aplicações identificação e seja $i: (A,A \cap B) \hookrightarrow (X,B)$ a inclusão. A aplicação induzida $h: (A/(A \cap B),*) \rightarrow (X/B,*)$ é um homeomorfismo, e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(A,A \cap B) & \xleftarrow{p^*} & H^n(A/(A \cap B),*) \\ \uparrow i^* & & \uparrow h^* \\ H^n(X,B) & \xleftarrow{q^*} & H^n(X/B,*) \end{array}$$

é comutativo. Como $(A,A \cap B)$ e (X,B) são pares NDR, p^* e q^* são isomorfismos. Desde que h^* é um isomorfismo, segue que i^* é um isomorfismo. $\square$

Definição: Por uma tripla NDR (X,A,B) , entendemos uma tripla (X,A,B) na qual os pares (X,A) , (X,B) e (A,B) são pares NDR.

Sejam (X,A,A') e (Y,B,B') triplas NDR. Então, existe um diagrama comutativo (ver [3], p.68).

$$\begin{array}{ccccc}
 H^n(X \times B' \cup A \times B, X \times B' \cup A' \times B) & \xrightarrow{k_1} & H^n(A \times B, A \times B' \cup A' \times B) & \xleftarrow{k_2} & H^n(A \times B \cup A' \times Y, A \times B' \cup A' \times Y) \\
 \delta_1 \downarrow & \nearrow k_5 & \uparrow k_0 & \nearrow k_6 & \downarrow \delta_2 \\
 H^{n+1}(X \times B, X \times B' \cup A \times B) & & H^n(X \times B' \cup A \times B \cup A' \times Y, X \times B' \cup A' \times Y) & & H^{n+1}(A \times Y, A \times B \cup A' \times Y) \\
 & \nwarrow \ell_1 & \downarrow \delta_0 & \nearrow \ell_2 & \\
 & & H^{n+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B' \cup A \times B \cup A' \times Y) & & \\
 k_3 \uparrow & & & & k_4 \uparrow \\
 & \nearrow j_1 & & \nwarrow j_2 & \\
 H^{n+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B' \cup A \times Y) & & & & H^{n+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B \cup A' \times Y)
 \end{array}$$

no qual os homomorfismos K_i são isomorfismos, pelo Teorema da Excisão. É um resultado conhecido que, se $u \in H^p(A, A')$, $v \in H^q(B, B')$ então

$$\delta_1 K_1^{-1}(u \times v) = \delta u \times v \in H^{p+q+1}((X, A) \times (B, B')),$$

$$\delta_2 K_2^{-1}(u \times v) = (-1)^p u \times \delta v \in H^{p+q+1}((A, A') \times (Y, B)) \text{ e}$$

$$\delta_0 K_0^{-1}(u \times v) = \delta(u \times v) \in H^{p+q+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B' \cup A \times B \cup A' \times Y).$$

Estes elementos estão em grupos diferentes; para compará-los, é conveniente injetá-los no grupo $H^{p+q+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B' \cup A \times B \cup A' \times Y)$ via as aplicações $j_1 K_3^{-1}$ e $j_2 K_4^{-1}$; vamos continuar a denotar suas imagens via estas aplicações pelos mesmos símbolos.

Nestas condições, temos que no grupo

$H^{p+q+1}(X \times B \cup A \times Y, X \times B' \cup A \times B \cup A' \times Y)$ vale a relação $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^p u \times \delta v$.

§3 - ESPAÇOS COMPACTAMENTE GERADOS

Nesta secção, listaremos sem prova, algumas propriedades que facilitarão o entendimento do que vem a seguir; para as provas referenciamos Steenrod [10].

Um espaço X é compactamente gerado se, e somente se, X é um espaço Hausdorff e cada subconjunto A de X com a propriedade de que $A \cap C$ é fechado em X para todo subconjunto compacto C de X é ele próprio fechado.

Seja K a categoria cujos objetos são todos os espaços compactamente gerados e cujos morfismos são todas as aplicações contínuas entre tais espaços. Assim K é uma subcategoria plena da categoria τ de todos os espaços topológicos, bem como da categoria τ_2 de todos os espaços Hausdorff.

Se X é um espaço Hausdorff, o espaço compactamente gerado associado é o espaço $K(X)$ definido do seguinte modo: $K(X)$ e X têm o mesmo conjunto de pontos, e um subconjunto A de X é fechado em $K(X)$ se, e somente se, $A \cap C$ é fechado em X para todo subconjunto

to compacto C de X . Para qualquer função $f: X \rightarrow Y$, seja $K(f)$ a mesma função, reconhecida como uma aplicação de $K(X)$ em $K(Y)$.

(3.1) $K(X)$ é compactamente gerado.

(3.2) Se X é compactamente gerado, então $K(X) = X$.

(3.3) Se $f: X \rightarrow Y$ é uma função, então $K(f)$ é contínua se, e somente se, $f|_C: C \rightarrow Y$ é contínua para todo conjunto compacto $C \subset X$.

Se X e Y são compactamente gerados, seu produto cartesiano $X \times_C Y$ na topologia usual pode não ser. Contudo, sejam $p: X \times_C Y \rightarrow X$ e $q: X \times_C Y \rightarrow Y$ as projeções. Então $K(p): K(X \times_C Y) \rightarrow K(X) = X$ e $K(q): K(X \times_C Y) \rightarrow K(Y) = Y$ e temos

(3.4) $K(X \times_C Y)$, com os morfismos $K(p)$, $K(q)$ é um produto para X e Y na categoria K . (Isto significa que a operação de composição com $K(p)$ e $K(q)$ estabelece uma correspondência 1-1 entre os conjuntos $K(W, K(X \times_C Y))$ e $K(W, X) \times K(W, Y)$ para qualquer espaço compactamente gerado W). Assim, é razoável definir $X \times Y$ como o produto cartesiano retopologizado $K(X \times_C Y)$. Chamaremos este produto, o produto categórico (ou simplesmente produto), re

servando o termo produto cartesiano em seu sentido usual.

(3.5) O produto categórico é comutativo e associativo, a menos de homeomorfismos naturais.

Observação: Uma aplicação $i: X \rightarrow Y$ em K será chamada uma inclusão se, e somente se, i é um homeomorfismo de X com o subespaço $i(X)$ de Y .

§4 PARES NDR

Para esta secção, novamente referimos Steenrod [10] para as provas.

Seja X compactamente gerado e seja A um subespaço de X . Então (X, A) é chamado um par NDR se, e somente se, existem aplicações contínuas $u: X \rightarrow I$, $h: I \times X \rightarrow X$, tal que

$$(1) \quad A = u^{-1}(0);$$

$$(2) \quad h(0, x) = x \text{ para todo } x \in X;$$

$$(3) \quad h(t, x) = x \text{ para todo } t \in I, \quad x \in A;$$

(4) $h(1,x) \in A$ para todo $x \in X$ tal que $u(x) < 1$.

Se ao invés de (4), nós assumimos

(4') $h(1 \times X) \subset A$, dizemos que (X,A) é um par DR. Dizemos que o par (u,h) representa (X,A) como um par NDR (par DR).

Note que, se (X,A) é um par NDR, A é um retrato de sua vizinhança $U = \{x \in X \mid u(x) < 1\}$, e as sim uma vizinhança retrato de X . Referiremos a U como uma vizinhança retraível de A .

(4.1) Se X é compactamente gerado e A é fechado em X , as quatro condições abaixo são equivalentes:

(1) (X,A) é um par NDR;

(2) $(I \times X, 0 \times X \cup I \times A)$ é um par DR;

(3) $0 \times X \cup I \times A$ é um retrato de $I \times X$;

(4) (X,A) tem a propriedade da extensão de homotopia.

(4.2) Se (X,A) e (Y,B) são pares NDR, então também são todos os pares que podem ser formados do diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X \times Y & \xrightarrow{\quad} & X \times B \cup A \times Y & \begin{array}{l} \nearrow X \times B \\ \searrow A \times Y \end{array} & \xrightarrow{\quad} A \times B \end{array}$$

Em particular, o par $(X,A) \times (Y,B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ é um par NDR. Além disso, se (X,A) ou (Y,B) é um par DR, também o é $(X,A) \times (Y,B)$.

(4.3) Se $B \subset A \subset X$ e (A,B) e (X,A) são pares NDR (pares DR), então (X,B) é um par NDR (par DR).

Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é chamada uma proclusão se, e somente se, f aplica X sobre Y e Y tem a topologia da identificação imposta por f , de maneira que, um subconjunto U de Y é aberto se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X .

Uma aplicação $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ é chamada um homeomorfismo relativo se, e somente se, f é uma proclusão de X em Y e $f|_{X-A}$ é um homeomorfismo de $X-A$ com $Y-B$.

Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ são aplicações tais que $g \circ f \simeq 1_X$ (a aplicação identidade de X) e $f \circ g \simeq 1_Y$ (a aplicação identidade de Y), dizemos que g é uma homotopia inversa de f ; e f é chamada uma equivalência de homotopia se, e somente se, tem uma homotopia inversa. Dizemos neste caso que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia. Tal definição é análoga para aplicações de pares, isto é, se $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ e $g: (Y,B) \rightarrow (X,A)$ são aplicações de pares tais que

$g \circ f \approx 1_{(X,A)}$ (a aplicação identidade de (X,A)) e
 $f \circ g \approx 1_{(Y,B)}$ (a aplicação identidade de (Y,B)), dizemos
que g é uma homotopia inversa de f ; e f é chamada uma e
quivalência de homotopia se, e somente se, tem uma homo-
topia inversa. Dizemos neste caso que (X,A) e (Y,B) têm
o mesmo tipo de homotopia.

Seja $i: A \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. A
é chamado um retrato de X se, e somente se, existe
 $r: X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = 1_A$. Tal aplicação r é chama-
da uma retração.

Diremos que A é um retrato por deforma-
ção (forte) de X se, e somente se, existe uma homoto-
pia $F: I \times X \rightarrow X$, tal que

$$F(0, x) = x \quad (x \in X)$$

$$F(t, a) = a \quad (a \in A, t \in I)$$

$$F(1 \times X) \subset A.$$

O valor final de tal uma homotopia é uma
retração $r = F_1: X \rightarrow A$.

Note que, se A é um retrato por deforma-
ção (forte) de X , então (X,A) é um par DR se, e so-
mente se, existe uma aplicação $u: X \rightarrow I$ tal que
 $A = u^{-1}(0)$.

(4.4) Se (X,A) é um par NDR, então a aplicação inclusão $i: A \hookrightarrow X$ é uma equivalência de homotopia se, e somente se, A é retrato por deformação (forte) de X .

Demonstração: Veja [3], p.25

Se X é um espaço tal que a aplicação identidade de X é homotópica a uma aplicação constante sobre algum ponto de X , dizemos que X é contraível (ou contrátil).

(4.5) Se (X,A) é um par NDR e A é contraível, a aplicação identificação $p: X \rightarrow X/A$ é uma equivalência de homotopia.

Demonstração: Veja [3], p.26

Concluimos esta secção com uma variante da definição de par NDR devido a A. Strøm.

(4.6) Se A é fechado em X , então (X,A) é um par NDR se, e somente se, existem aplicações $u: X \rightarrow I$ e $h: I \times X \rightarrow X$ tal que

$$(1) A \subset u^{-1}(0),$$

$$(2) \quad h(0, x) = x \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$(3) \quad h(t, a) = a \quad \text{para todo } (t, a) \in I \times A,$$

$$(4) \quad h(t, x) \in A \quad \text{sempre que } t > u(x).$$

Demonstração: Se (X, A) é um par NDR, então por (3) de (4.1) existe uma retração $r: I \times X \rightarrow 0 \times X \cup I \times A$.

Defina u e h por

$$u(x) = \sup_{t \in I} |t - p_1 r(t, x)|,$$

$$h(t, x) = p_2 r(t, x),$$

onde $p_1: I \times X \rightarrow I$, $p_2: I \times X \rightarrow X$ são as projeções.

Então:

(1) $A \subset u^{-1}(0)$ pois para cada $a \in A$ temos

$$u(a) = \sup_{t \in I} |t - p_1 r(t, a)|$$

$$= \sup_{t \in I} |t - p_1(t, a)|$$

$$= \sup_{t \in I} |t - t|$$

$$= 0,$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ Para cada } x \in X, \quad h(0, x) &= p_2 r(0, x) \\
 &= P_2(0, x) \\
 &= x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ Para cada } (t, a) \in I \times A, \quad h(t, a) &= p_2 r(t, a) \\
 &= p_2(t, a) \\
 &= a,
 \end{aligned}$$

(4) $h(t, x) \in A$ sempre que $t > u(x)$ pois se $h(t, x) \notin A$ segue que $r(t, x) \notin I \times A$

(note que $h = p_2 \circ r$). Logo $r(t, x) \in (0 \times X) - (0 \times A)$.

$$\text{Mas } u(x) = \sup_{s \in I} |s - p_1 r(s, x)| \text{ e como}$$

$$|t - p_1 r(t, x)| = t \quad (\text{note que } p_1 r(t, x) = 0) \text{ segue que } u(x) \geq t.$$

Reciprocamente, suponha que u e h satisfazem (1) - (4) acima. Então uma retração

$r: I \times X \rightarrow 0 \times X \cup I \times A$ é definida por

$$r(t, x) = \begin{cases} (0, h(t, x)) & \text{se } t \leq u(x), \\ (t - u(x), h(t, x)) & \text{se } t \geq u(x). \end{cases}$$

Com efeito, temos

$$r(0,x) = \begin{cases} (0, h(0,x)) & \text{se } u(x) \geq 0, \\ (-u(x), h(0,x)) & \text{se } u(x) \leq 0 \end{cases}$$

Mas $u: X \rightarrow I$ e $h(0,x) = x$ para todo $x \in X$. Logo $r(0,x) = (0,x)$ para todo $x \in X$.

Também, para todo $(t,a) \in I \times A$

$$r(t,a) = \begin{cases} (0, h(t,a)) & \text{se } t \leq u(a), \\ (t-u(a), h(t,a)) & \text{se } t \geq u(a). \end{cases}$$

Como $A \subset u^{-1}(0)$, $u(a) = 0$. Por outro lado $h(t,a) = a$, $\forall t \in I$. Logo,

$$r(t,a) = \begin{cases} (0,a) & \text{se } t = 0 \\ (t,a) & \text{se } t \geq 0 \end{cases} = (t,a) \text{ para todo}$$

$(t,a) \in I \times A$.

Portanto $\text{roi} = I_0 \times X \cup I \times A$ onde $i: I_0 \times X \cup I \times A \hookrightarrow I \times X$ é a inclusão.

§5 Espaços com pontos base

Seja X um espaço e fixemos um ponto base $x_0 \in X$. O ponto base $x_0 \in X$ é chamado não degenerado se, e somente se, $(X, \{x_0\})$ é um par NDR.

Seja K_0 a categoria de todos os espaços compactamente gerados com pontos base; e K_* a subcategoria plena de K_0 consistindo de todos os espaços com pontos base não degenerado.

Às vezes trataremos com espaços (compactamente gerados) sem um ponto base prescrito (chamados espaços livres) e aplicações entre tais espaços (chamadas aplicações livres).

Para tratá-los adotaremos o estratagema de juntar um ponto base externo. Especificamente, se X é um espaço livre, seja $X^+ = X + P$ a soma topológica de X e um espaço P consistindo de um único ponto $*$, o ponto base de X^+ ; e se $f: X \rightarrow Y$ é uma aplicação livre, $f^+: X^+ \rightarrow Y^+$ é a extensão de f que preserva o ponto base. A designação $X \rightarrow X^+$, $f \rightarrow f^+$ é um funtor fiel da categoria K na categoria K_* ; portanto podemos reconhecer K como uma subcategoria de K_* .

Usualmente abandonaremos o sinal $+$ exceto quando necessário para ênfase.

Se (X, x_0) e (Y, y_0) são espaços em K_* , é natural escolher (x_0, y_0) como o ponto base de $X \times Y$ (produto categórico de X e Y na categoria K), pois as projeções $p_1: X \times Y \rightarrow X$ e $p_2: X \times Y \rightarrow Y$ são aplicações em K_* (note que $(X \times Y, \{(x_0, y_0)\})$ é um par NDR conforme (4.2) do §4 deste capítulo), e é fácil ver que $(X \times Y, (x_0, y_0))$, com as aplicações p_1, p_2 ; é o produto categórico de (X, x_0) e (Y, y_0) .

O mesmo não acontece para a soma, pois a união disjunta $X + Y$ não tem um ponto base natural. Contudo o espaço $X \vee Y$ obtido de $X + Y$ por identificar x_0 com y_0 , junto com as inclusões naturais $j_1: X \rightarrow X \vee Y$, $j_2: Y \rightarrow X \vee Y$, é a soma de X e Y na categoria K_* .

Como sempre é o caso em uma categoria pontuada, existe uma aplicação natural K da soma $X \vee Y$ no produto $X \times Y$; esta aplicação é caracterizada pelas propriedades

- (1) $p_1 \circ K \circ j_1$ é a aplicação identidade de X ,
- (2) $p_2 \circ K \circ j_2$ é a aplicação identidade de Y ,
- (3) $p_1 \circ K \circ j_2$ e $p_2 \circ K \circ j_1$ são aplicações constantes.

A aplicação K é, de fato, uma inclusão, aplicando $X \vee Y$ sobre o subespaço $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$, e normalmente identificamos $X \vee Y$ com este subespaço.

Uma construção importante na categoria K_* é a junção reduzida (ou produto "smash") de dois espaços X, Y . Este, é o espaço quociente $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$. Para $x \in X, y \in Y$, seja $x \wedge y$ a imagem de (x, y) via a proclusão $X \times Y \rightarrow X \wedge Y$. Por conseguinte $x \wedge y_0 = x_0 \wedge y = x_0 \wedge y_0$ é o ponto base de $X \wedge Y$.

Propriedades

(5.1) A junção reduzida é comutativa e associativa, a menos de homeomorfismo natural.

(5.2) Os espaços $X \wedge (Y \wedge Z)$ e $(X \wedge Y) \wedge (X \wedge Z)$ são naturalmente homeomorfos.

(5.3) Se (X, A) é um par NDR e $Y \in K_*$, os espaços $(X/A) \wedge Y$ e $(X \wedge Y)/(A \wedge Y)$ são naturalmente homeomorfos.

Quando um ou ambos os fatores são espaços livres, tem-se

(5.4) Se $X \in K_*$, $Y \in K$, então $X \wedge Y^+ = (X \times Y)/(\{x_0\} \times Y)$.

(5.5) Se X e $Y \in K$, então $X^+ \wedge Y^+ = (X \times Y)^+$

Sejam $f: X \rightarrow X'$, $g: Y \rightarrow Y'$ aplicações em K_* . Então a aplicação $f \times g: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ envia $X \vee Y$ em $X' \vee Y'$, bem como $X \wedge Y$ em $X' \wedge Y'$, e desse modo induz

$$f \vee g: X \vee Y \rightarrow X' \vee Y' \text{ e}$$

$$f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'.$$

Consideremos I como um espaço livre na categoria K_* ; vemos que, por (5.4), $I \wedge X$ é o quociente $(I \times X)/(I \times \{x_0\})$.

O espaço $I \wedge X$ é o prisma (reduzido) sobre X , e as aplicações $x \rightarrow t \wedge x$ ($t=0,1$) são inclusões, aplicando X homeomorficamente sobre os subespaços $0 \wedge X$, $1 \wedge X$ de $I \wedge X$. O prisma definido nesta maneira difere do prisma usual $I \times X$ pelo fato do subespaço $I \times \{x_0\}$ deste, ter sido identificado a um ponto.

Prisma usual

$I \times X$:

Prisma reduzido

$I \wedge X$:

É também conveniente considerar o intervalo unitário como um espaço com 0 como ponto base, para distinguir este espaço pontuado do espaço livre I , definimos T como o par $(I, 0)$. Coloquemos $\dot{T} = (\dot{I}, 0)$. O cone (reduzido) sobre um espaço X é então definido como o espaço $TX = T \wedge X$. Neste caso a aplicação $x \mapsto 1 \wedge x$ é uma inclusão, aplicando X homeomorficamente sobre o subespaço $\dot{T} \wedge X = 1 \wedge X$ de TX , o qual normalmente indentificaremos com X , enquanto $0 \wedge X$ é o ponto base.

O espaço TX é contrátil, difere do cone usual pelo fato do subespaço contrátil deste, a saber o cone sobre o ponto base, ter sido identificado a um ponto.

Cone usual

$$CX = (I \times X) / (\{0\} \times X):$$

Cone reduzido

TX:

Além disso, segue de (5.3) que

$TX = (I \wedge X) / (0 \wedge X)$. Seja $S = I/\dot{I}$; então a suspensão (reduzida) de X é o espaço $SX = S \wedge X$.

Por causa de (5.3), $SX = (I \wedge X) / (\dot{I} \wedge X) = TX/X$. Novamente, difere da suspensão usual pelo fato de um subconjunto contrátil conveniente ter sido identificado a um ponto.

Suspensão usual

$$\mathcal{S}X = (I \times X) / (\{0\} \times X + \{1\} \times X):$$

Suspensão reduzida

$$SX = TX/X:$$

Observação: $\ast = \bar{0} = \bar{1}$ é o ponto base de $S = I/\dot{I}$.

Defina subconjuntos

$$T_+X = \{\bar{t} \wedge x \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\},$$

$$T_-X = \{\bar{t} \wedge x \mid \frac{1}{2} \leq t \leq 1\},$$

de SX (aqui $\bar{t}$ é a imagem de $t \in I$ via a aplicação identificação $\bar{w}: (I, \dot{I}) \rightarrow (S, \ast)$). Então T_+X e T_-X são

cópias homeomorfas do cone TX , e $T_+X \cap T_-X$ é homeomorfo com X .

Observação: $S(S^{n-1}) = S^n$

§6 - H-espços

Em geral, nenhum produto natural existe definido em $[X, Y]$ para todo espaço X . Assim sendo, a pergunta abaixo surge naturalmente:

(1) Dado Y existe um produto natural definido em $[X, Y]$ para todo X ?

Diremos que Y é um H-espço se, e somente se, vale (1).

Quando Y é um H-espço, escreveremos a composição multiplicativamente.

Neste parágrafo, estaremos trabalhando na categoria K_* , de maneira que todos os espaços em discussão serão assumidos ter pontos base não degenerado.

Para qualquer espaço Y , sejam p_1, p_2 as projeções de $Y \times Y$ sobre o primeiro e segundo fatores, respectivamente.

Sejam $i_1, i_2: Y \rightarrow Y \times Y$ as inclusões, definidas por

$$(6.1) \quad i_1(y) = (y, y_0), \quad i_2(y) = (y_0, y) \quad (y \in Y).$$

Então $p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2 = 1$, a aplicação identidade de Y , enquanto $p_1 \circ i_2 = p_2 \circ i_1 = *$.

Se X é qualquer espaço, seja $\Delta: X \rightarrow X \times X$ a aplicação diagonal, dada por $\Delta(x) = (x, x)$ ($x \in X$).

Teorema (6.2) Um espaço Y é um H -espaço se, e somente se, existe uma aplicação $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ tal que $\mu \circ i_1 = \mu \circ i_2 = 1$. A aplicação μ então satisfaz a condição $[\mu] = [p_1] \cdot [p_2]$. Além disso, se $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ são aplicações, então $[f_1] \cdot [f_2]$ é a classe de homotopia da composta

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f_1 \times f_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

Demonstração: Suponha que Y é um H -espaço. Então podemos multiplicar as classes de homotopia de p_1 e p_2 para obter um elemento $[\mu] = [p_1] \cdot [p_2]$ para alguma $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$.

Pela naturalidade do produto temos

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad [\mu] \circ [i_1] &= ([p_1] \cdot [p_2]) \circ [i_1] \\
 &= [p_1 \circ i_1] \cdot [p_2 \circ i_1] \\
 &= [1] \cdot [*] \\
 &= [1],
 \end{aligned}$$

e semelhantemente

$$(6.4) \quad [\mu] \circ [i_2] = [1].$$

Além do mais, se $f_1, f_2: X \rightarrow Y$, temos

$$(6.5) \quad p_i \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta = f_i \quad (i=1,2)$$

Novamente pela naturalidade, temos

$$\begin{aligned}
 [\mu] \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta] &= ([p_1] \cdot [p_2]) \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta] \\
 &= ([p_1] \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta]) \cdot ([p_2] \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta]) \\
 &= [f_1] \cdot [f_2].
 \end{aligned}$$

As condições (6.3), (6.4) nos diz que $\mu \circ i_1 \approx 1 \approx \mu \circ i_2$, e portanto $\mu \circ K \approx \nabla$, onde $K: Y \vee Y \rightarrow Y \times Y$ é a inclusão e $\nabla: Y \vee Y \rightarrow Y$ é a aplicação dobra, definida por

$$(6.6) \quad \nabla(y, y_0) = \nabla(y_0, y) = y \quad (\text{ver observação 1, logo abaixo do teorema}).$$

Agora $(Y \times Y, Y \vee Y)$ é um par NDR, por (4.2) do §4 deste capítulo, e então (ver observação 2, logo abaixo do teorema) existe $\mu' \simeq \mu$ tal que $\mu' \circ K = \nabla$.

Como $\mu' \simeq \mu$ temos $[\mu'] = [\mu]$.

Logo $\mu': Y \times Y \rightarrow Y$ é tal que

$$\begin{aligned} [\mu'] &= [p_1] \cdot [p_2]. \text{ Além disso, } [\mu'] \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta] = \\ &= [f_1] \cdot [f_2] \text{ e } \mu' \circ i_1(y) = \mu' \circ i_1 \circ \nabla(y, y_0) = \mu' \circ K(y, y_0) = \\ &= \nabla(y, y_0) = y, \quad \mu' \circ i_2(y) = \mu' \circ i_2 \circ \nabla(y_0, y) = \mu' \circ K(y_0, y) = \\ &= \nabla(y_0, y) = y. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que Y é um espaço e $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ uma aplicação tal que $\mu \circ i_1 = 1 = \mu \circ i_2$ (tal uma aplicação μ é chamada um produto em Y). Então, dados $f_1, f_2: X \rightarrow Y$, podemos definir $f_1 \cdot f_2 = \mu \circ (f_1 \times f_2) \circ \Delta$.

A composição assim definida é compatível com homotopia, isto é, se $g_1, g_2: X \rightarrow Y$ são aplicações tais que $g_1 \simeq f_1$ e $g_2 \simeq f_2$ então $g_1 \cdot g_2 \simeq f_1 \cdot f_2$.

Para ver isto, basta observar que

$g_1 \times g_2 \simeq f_1 \times f_2$ via a homotopia $F: I \times (X \times X) \rightarrow Y \times Y$ dada por $F(t, (x, y)) = (F_1(t, x), F_2(t, y))$, onde $F_1: I \times X \rightarrow Y$ e $F_2: I \times X \rightarrow Y$ são as homotopias entre g_1, f_1 e g_2, f_2 respectivamente.

$$\begin{aligned}\text{Logo } [g_1.g_2] &= [\mu] \circ [g_1 \times g_2] \circ [\Delta] \\ &= [\mu] \circ [f_1 \times f_2] \circ [\Delta] \\ &= [f_1.f_2] \quad e\end{aligned}$$

$$g_1.g_2 \simeq f_1.f_2.$$

Assim $f_1.f_2$ induz um produto natural em $[X,Y]$, a saber $[f_1].[f_2] = [f_1.f_2]$, e portanto Y é um H -espaço. Além disso $p_1.p_2 = \mu \circ (p_1 \times p_2) \circ \Delta = \mu \circ l = \mu$

Observações:

1) Se $\mu \circ i_1 \simeq \mu \circ i_2 \simeq l$ então $\mu \circ k \simeq \nabla$, onde $K: Y \vee Y \rightarrow Y \times Y$ é a inclusão e $\nabla: Y \vee Y \rightarrow Y$ é a aplicação dobra, definida por $\nabla(y,y_0) = \nabla(y_0,y) = y$.

Com efeito, existem homotopias

$H_1: I \times Y \rightarrow Y$ e $H_2: I \times Y \rightarrow Y$ tais que

$$H_1(0,y) = \mu \circ i_1(y);$$

$$H_1(1,y) = l(y);$$

$$H_1(t,y_0) = y_0 \quad e$$

$$H_2(0,y) = \mu \circ i_2(y);$$

$$H_2(1,y) = l(y);$$

$$H_2(t,y_0) = y_0.$$

Sejam $G_1 = H_1 \circ (1 \times \nabla|Y \times \{y_0\}) : I \times (Y \times \{y_0\}) \rightarrow Y$ e
 $G_2 = H_2 \circ (1 \times \nabla|\{y_0\} \times Y) : I \times (\{y_0\} \times Y) \rightarrow Y$.

$$\begin{aligned} \text{Então } G_1(0, (y, y_0)) &= H_1(0, (\nabla|Y \times \{y_0\})(y, y_0)) \\ &= \mu_0 i_1 \circ (\nabla|Y \times \{y_0\})(y, y_0) \\ &= \mu_0(K|Y \times \{y_0\})(y, y_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1(1, (y, y_0)) &= H_1(1, (\nabla|Y \times \{y_0\})(y, y_0)) \\ &= (\nabla|Y \times \{y_0\})(y, y_0) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(0, (y_0, y)) &= H_2(0, (\nabla|\{y_0\} \times Y)(y_0, y)) \\ &= \mu_0 i_2 \circ (\nabla|\{y_0\} \times Y)(y_0, y) \\ &= \mu_0(K|\{y_0\} \times Y)(y_0, y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(1, (y_0, y)) &= H_2(1, (\nabla|\{y_0\} \times Y)(y_0, y)) \\ &= (\nabla|\{y_0\} \times Y)(y_0, y). \end{aligned}$$

Definamos $H: I \times (Y \vee Y) \rightarrow Y$ por

$$H(t, (y, y_0)) = G_1(t, (y, y_0));$$

$$H(t, (y_0, y)) = G_2(t, (y_0, y)).$$

Como $H(t, (y_0, y_0)) = G_1(t, (y_0, y_0)) =$
 $= G_2(t, (y_0, y_0)) = y_0$ segue que H é bem definida. Por
 outro lado temos

$$H(0, (y, y_0)) = G_1(0, (y, y_0)) = \mu_0(K|Y \times \{y_0\})(y, y_0);$$

$$H(0, (y_0, y)) = G_2(0, (y_0, y)) = \mu_0(K|\{y_0\} \times Y)(y_0, y);$$

$$H(0, (y_0, y_0)) = y_0 = \mu_0 K(y_0, y_0) \quad e \quad \text{logo}$$

$$H_0 \equiv H|0 \times (Y \vee Y) = \mu_0 K.$$

Também, $H(1, (y, y_0)) = G_1(1, (y, y_0)) =$

$$= (\nabla|Y \times \{y_0\})(y, y_0);$$

$$H(1, (y_0, y)) = G_2(1, (y_0, y)) = (\nabla| \{y_0\} \times Y)(y_0, y);$$

$$H(1, (y_0, y_0)) = y_0 = \nabla(y_0, y_0) \quad e$$

logo $H_1 = H|1 \times (Y \vee Y) = \nabla$. Portanto H é a homotopia desejada entre $\mu \circ K$ e ∇ .

2) Como $(Y \times Y, Y \vee Y)$ é um par NDR segue por (4.1) do §4 deste capítulo que $(Y \times Y, Y \vee Y)$ tem a propriedade da extensão de homotopia.

Assim, $h: 0 \times (Y \times Y) \cup I \times (Y \vee Y) \rightarrow Y$ definida por $h(0, (x, y)) = \mu(x, y) ((x, y) \in Y \times Y)$

$$h|I \times (Y \vee Y) = H$$

(onde H é a homotopia entre $\mu \circ K$ e ∇ definida na observação 1 acima) tem uma extensão $F: I \times (Y \times Y) \rightarrow Y$ que é uma homotopia entre μ e uma extensão de ∇ , a saber

$\mu': Y \times Y \rightarrow Y$ dada por

$$\mu'(x, y) = F(1, (x, y)) \quad ((x, y) \in Y \times Y).$$

Assim, $\mu' \simeq \mu$ e é tal que $\mu' \circ K = \nabla$ pois

$$\begin{aligned} \mu' \circ K(y, y_0) &= \mu'(y, y_0) = F(1, (y, y_0)) = h(1, (y, y_0)) \\ &= H(1, (y, y_0)) = \nabla(y, y_0) \quad e \end{aligned}$$

- 61 -

$$\begin{aligned}
 \mu'_{ok}(y_0, y) &= \mu'(y_0, y) \\
 &= F(1, (y_0, y)) \\
 &= h(1, (y_0, y)) \\
 &= H(1, (y_0, y)) \\
 &= \nabla(y_0, y) \quad .
 \end{aligned}$$

Daremos agora alguns exemplos de H-espacos

Exemplo 1. Todo grupo topológico é um H-espaco. De fato, se Y é um grupo topológico e $f, g: X \rightarrow Y$ podemos definir um produto $f.g: X \rightarrow Y$ pela fórmula

$$(f.g)(x) = f(x).g(x).$$

Este produto é compatível com homotopia e induz uma operação de grupo natural em $[X, Y]$ (ver obs.3 a seguir).

Observação 3. Sejam $\tilde{f}, \tilde{g}: X \rightarrow Y$ tais que $\tilde{f} \simeq f$ e $\tilde{g} \simeq g$. Logo, existem $F: I \times X \rightarrow Y$ e $G: I \times X \rightarrow Y$ homotopias entre $\tilde{f}, f$ e $\tilde{g}, g$ respectivamente.

Definamos $H: I \times X \rightarrow Y$ por

$$H(t, x) = F(t, x) . G(t, x)$$

Temos,

$$H(0,x) = F(0,x) \cdot G(0,x) = \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) = (\tilde{f} \cdot \tilde{g})(x),$$

$$H(1,x) = F(1,x) \cdot G(1,x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).$$

Assim $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \approx f \cdot g$ e o produto é compatível com homotopia.

Definamos em $[X,Y]$ a seguinte operação:

$[f] \times [g] = [f \cdot g]$. Pelas considerações acima tal operação é bem definida. Notemos agora que $([X,Y], \times)$ é um grupo, onde:

o elemento neutro é $[e]$ com $e: X \rightarrow Y$ definida por

$e(x) = e$ (e é o elemento neutro de Y); o elemento inverso

de $[f]$ é $[n]$, com $n: X \rightarrow Y$ definida por

$n(x) = (f(x))^{-1}$ (elemento inverso de $f(x)$ em Y) e

$$\begin{aligned} ([f] \times [g]) \times [h] &= [f \cdot g] \times [h] \\ &= [(f \cdot g) \cdot h] \\ &\stackrel{(*)}{=} [f \cdot (g \cdot h)] \\ &= [f] \times [g \cdot h] \\ &= [f] \times ([g] \times [h]). \end{aligned}$$

(*) Note que Y é um grupo topológico.

Exemplo 2 - As esferas unitárias nas álgebras de divisão C, Q são H -espaços.

De fato, S^1 e S^3 são grupos topológicos.

Definição: Um grupo de Lie é uma variedade G , com uma estrutura de grupo de tal modo que as aplicações

$$\begin{array}{ll} G \times G \rightarrow G & \text{e} \quad G \rightarrow G \\ (x,y) \rightarrow x.y & x \rightarrow x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis (isto é, de classe C^∞).

Exemplo 3 - Os grupos de Lie clássicos O_n , U_n e Sp_n são H-espacos.

De fato, são grupos topológicos.

Definição: Um par NDR (Y,B) é chamado um H-par se, e somente se, Y e B são H-espacos e a restrição do produto em Y a $B \times B$ é homotópica (e portanto pode ser assumida igual) ao produto em B .

Definição: Sejam Y, Y' H-espacos com produtos μ, μ' , respectivamente. Uma aplicação $f: Y \rightarrow Y'$ é chamada uma H-aplicação se, e somente se, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{f \times f} & Y' \times Y' \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\ Y & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

é homotopicamente comutativo, isto é, $\mu' \circ (f \times f) \simeq f \circ \mu$.

Observação: Citaremos agora, alguns resultados sobre grupos de Lie compactos

Resultado 1. Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie compacto G . Então, H é um grupo de Lie, e a aplicação $p: G \rightarrow G/H$ de G no espaço das classes laterais de H em G é a projeção de um fibrado vetorial.

Para a demonstração de tal resultado, veja [4], p. 30.

Pelo corolário (1.6) do §1 do capítulo 2 a seguir temos,

Resultado 2. A aplicação $p: G \rightarrow G/H$ é uma fibração.

§7 - Propriedades de Homologia e Cohomologia de H-espços

Do começo ao fim desta secção consideraremos grupos de homologia e cohomologia com coeficientes em um domínio de ideais principais A . Uma H -estrutura sobre um espaço X envolve relações entre os grupos de homologia e cohomologia dos espaços X , $X \times X$, e $X \vee X$; e investigaremos algumas consequências destas relações.

Começamos com algumas observações elementares sobre as propriedades de cohomologia do par $(X \times X, X \vee X)$.

Assumiremos que $X \in K_*$, de maneira que o par $(X, *)$ é um par NDR. Segue de (4.2) do § 4 deste capítulo que $(X, *) \times (X, *) = (X \times X, X \vee X)$ é um par NDR, e do Teorema do §2, (2.8), deste capítulo, que $(X \vee X; X \times \{*\}, \{*\} \times X)$ é uma tríada própria. Do Teorema de Mayer-Vietoris (ver §2, (2.6)) deduzimos

(7.1) As projeções $q_1^*, q_2^*: H^r(X) \rightarrow H^r(X \vee X)$ representam o último grupo como uma soma direta. A representação dual como um produto direto é dada pelas injeções $j_1^*, j_2^*: H^r(X \vee X) \rightarrow H^r(X)$.

Consideremos a sequência de cohomologia

$$\dots \xrightarrow{\delta^*} H^r(X \times X, X \vee X) \xrightarrow{\ell^*} H^r(X \times X) \xrightarrow{K^*} H^r(X \vee X) \rightarrow \dots$$

do par $(X \times X, X \vee X)$. Se $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ são as projeções, e $\lambda = p_1^* \circ j_1^* + p_2^* \circ j_2^*: H^r(X \vee X) \rightarrow H^r(X \times X)$, então

$$j_1^* \circ K^* \circ \lambda = i_1^* \circ \lambda = i_1^* \circ p_1^* \circ j_1^* + i_1^* \circ p_2^* \circ j_2^* = j_1^*$$

(porque $p_1 \circ i_1$ é a identidade e $p_2 \circ i_1$ a aplicação constante no ponto base) e semelhantemente

$$j_2^* \circ K^* \circ \lambda = i_2^* \circ \lambda = j_2^*.$$

Notemos que $K^* \circ \lambda$ é a identidade, pois se $K^* \circ \lambda$ não fosse a identidade existiria um $c \in H^r(X \vee X)$

tal que $K^* \circ \lambda(c) \neq c$ e como $j_1^*(K^* \circ \lambda(c)) = j_1^*(c)$ e $j_2^*(K^* \circ \lambda(c)) = j_2^*(c)$; j_1^*, j_2^* não seria uma representação projetiva de $H^r(X \vee X)$ como um produto direto dos $H^r(X)$, contradizendo (7.1).

Além disso, $\text{Im } \lambda = \text{Im } p_1^* + \text{Im } p_2^*$. Com e feito, $\text{Im } \lambda \subset \text{Im } p_1^* + \text{Im } p_2^*$. Por outro lado, tomemos $x \in \text{Im } p_1^* + \text{Im } p_2^*$. Então $x = p_1^*(a) + p_2^*(b)$ com $(a, b) \in H^r(X) \oplus H^r(X)$. Como j_1^*, j_2^* constituem uma representação projetiva de $H^r(X \vee X)$ como um produto direto dos $H^r(X)$, segue-se que existe um único $c \in H^r(X \vee X)$ tal que $j_1^*(c) = a$ e $j_2^*(c) = b$. Logo, $x = p_1^* \circ j_1^*(c) + p_2^* \circ j_2^*(c) = \lambda(c)$ e $x \in \text{Im } \lambda$. Por consequinte,

(7.2) A injeção $K^*: H^r(X \times X) \rightarrow H^r(X \vee X)$ é um epimor-
fismo, de maneira que

$$H^r(X \times X) \cong H^r(X \vee X) \oplus H^r(X \times X, X \vee X)$$

para todo r . Além disso, ℓ^* induz um isomorfismo $\overline{\ell^*}$ de $H^r(X \times X, X \vee X)$ com o grupo quociente $H^r(X \times X) / (\text{Im } p_1^* + \text{Im } p_2^*)$. A composição da inversa do último isomorfismo com a projeção natural de $H^r(X \times X)$ sobre seu grupo quociente $H^r(X \times X) / (\text{Im } p_1^* + \text{Im } p_2^*)$ é um homomorfismo

$\beta: H^r(X \times X) \rightarrow H^r(X \times X, X \vee X)$, e temos

(7.3) Os homomorfismos

$$p_1^*, p_2^*: H^r(X) \rightarrow H^r(X \times X)$$

$$\ell^*: H^r(X \times X, X \vee X) \rightarrow H^r(X \times X)$$

representam o grupo $H^r(X \times X)$ como uma soma direta

$$H^r(X \times X) \cong H^r(X) \oplus H^r(X) \oplus H^r(X \times X, X \vee X)$$

A representação dual como um produto é dada por $i_1^*, i_2^*: H^r(X \times X) \rightarrow H^r(X)$

$$\beta: H^r(X \times X) \rightarrow H^r(X \times X, X \vee X).$$

Para cada $u \in H^r(X \times X)$, temos

$$u = p_1^*oi_1^*(u) + p_2^*oi_2^*(u) + \ell^*\beta(u).$$

Agora, suponhamos que X é um H -espaço com produto μ . Então $\mu^*: H^r(X) \rightarrow H^r(X \times X)$. Dizemos que $x \in H^r(X)$ é primitivo se, e somente se, $\beta\mu^*x = 0$. Por (7.3), isto é verdade se, e somente se,

$$\mu^*x = p_1^* \circ i_1^* \circ \mu^*x + p_2^* \circ i_2^* \circ \mu^*x = p_1^*x + p_2^*x \quad (\text{Ver Teorema (6.2), §6}).$$

Os resultados acima dualizam para homologia.

(7.4) As injeções $j_{1*}, j_{2*}: H_q(X) \rightarrow H_q(X \vee X)$ representam o último grupo como uma soma direta. A representação dual como um produto direto é dada por

$$q_{1*}, q_{2*}: H_q(X \vee X) \rightarrow H_q(X).$$

Consideremos a sequência de homologia

$$\dots \rightarrow H_q(X \vee X) \xrightarrow{K_*} H_q(X \times X) \xrightarrow{\ell_*} H_q(X \times X, X \vee X) \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

do par $(X \times X, X \vee X)$, e seja

$$\tilde{\lambda} = j_{1*} \circ p_{1*} + j_{2*} \circ p_{2*}: H_q(X \times X) \rightarrow H_q(X \vee X)$$

Agora, $\tilde{\lambda} \circ K_* \circ j_{1*} = \tilde{\lambda} \circ i_{1*} =$
 $= j_{1*} \circ p_{1*} \circ i_{1*} + j_{2*} \circ p_{2*} \circ i_{1*} = j_{1*}$ (porque $p_1 \circ i_1$ é a identidade e $p_2 \circ i_1$ a aplicação constante no ponto base) e semelhantemente

$$\tilde{\lambda} \circ K_* \circ j_{2*} = j_{2*}$$

Notemos que $\tilde{\lambda} \circ K_*$ é a identidade, pois se $\tilde{\lambda} \circ K_*$ não fosse a identidade existiria um $c \in H_r(X \vee X)$ tal que $\tilde{\lambda} \circ K_*(c) \neq c$. Mas por (7.4) c tem uma única representação $c = j_{1*}(a) + j_{2*}(b)$ com $a, b \in H^r(X)$ e como $\tilde{\lambda} \circ K_*(c) = \tilde{\lambda} \circ K_* \circ j_{1*}(a) + \tilde{\lambda} \circ K_* \circ j_{2*}(b)$

$$= j_{1*}(a) + j_{2*}(b),$$

segue que $\tilde{\lambda} \circ K_*(c) = c$, o que é uma contradição.

Além disso, $\text{Ker } \tilde{\lambda} = \text{Ker } p_{1*} \cap \text{Ker } p_{2*}$. Com efeito, se $x \in \text{Ker } \tilde{\lambda}$, segue que $\tilde{\lambda}x = 0$.

Portanto $j_{1*} \circ p_{1*}(x) + j_{2*} \circ p_{2*}(x) = 0$. Como j_{1*} e j_{2*} é uma representação injetiva de $H_q(X \vee X)$ como uma soma direta $j_{1*}(H_q(X)) \oplus j_{2*}(H_q(X))$ segue que $j_{1*} \circ p_{1*}(x) = 0$ e $j_{2*} \circ p_{2*}(x) = 0$.

Logo $p_{1*}(x) = 0$ e $p_{2*}(x) = 0$ e daí $x \in \text{Ker } p_{1*} \cap \text{Ker } p_{2*}$. A recíproca $\text{Ker } p_{1*} \cap \text{Ker } p_{2*} \subset \text{Ker } \tilde{\lambda}$ é imediata.

Portanto

(7.5) A injeção $K_*: H_q(X \vee X) \rightarrow H_q(X \times X)$ é um monomorfismo que cinde, de maneira que

$$H_q(X \times X) \cong H_q(X \vee X) \oplus H_q(X \times X, X \vee X)$$

para todo q . Além disso ℓ_* aplica o subgrupo
 $\text{Ker } p_{1*} \cap \text{Ker } p_{2*} = \text{Ker } \tilde{\lambda}$ isomorficamente sobre
 $H_q(X \times X, X \vee X)$.

Deste modo; se $\tilde{\beta}: H_q(X \times X, X \vee X) \rightarrow$
 $H_q(X \times X)$ é a inversa da restrição de ℓ_* a
 $\text{Ker } p_{1*} \cap \text{Ker } p_{2*}$, temos

(7.6) Os homomorfismos

$$i_{1*}, i_{2*}: H_q(X) \rightarrow H_q(X \times X)$$

$$\tilde{\beta}: H_q(X \times X, X \vee X) \rightarrow H_q(X \times X)$$

representam o grupo $H_q(X \times X)$ como uma soma direta

$$H_q(X \times X) \cong H_q(X) \oplus H_q(X) \oplus H_q(X \times X, X \vee X)$$

A representação dual como um produto é da-
da por

$$p_{1*}, p_{2*}: H_q(X \times X) \rightarrow H_q(X),$$

$$\ell_*: H_q(X \times X) \rightarrow H_q(X \times X, X \vee X)$$

Para cada $u \in H_q(X \times X)$, temos

$$u = i_{1*} p_{1*} u + i_{2*} p_{2*} u + \tilde{\beta} \ell_* u.$$

Um elemento $x \in H_q(X)$ é chamado primitivo se, e somente se, $\ell_* \Delta_* x = 0$ (onde $\Delta: X \rightarrow X \times X$ é a aplicação diagonal $\Delta y = (y, y)$).

Por (7.6) isto é verdade se, e somente se,

$$\begin{aligned} \Delta_* x &= i_{1*} p_{1*} \Delta_* x + i_{2*} p_{2*} \Delta_* x \\ &= i_{1*} x + i_{2*} x \end{aligned}$$

Agora, suponhamos que X é um H-espço com produto μ . Será conveniente aqui tratar X como um espaço livre, ignorando o papel do ponto base. Para evitar confusão, seja X_* o espaço livre resultante. O grupo de homologia reduzido $\tilde{H}_q(X_*)$ é definido por Eilenberg-Steenrod [8] como o Kernel do homomorfismo $H_q(X_*) \rightarrow H_q(*)$ induzido pela única aplicação de X_* no ponto base $*$. Sendo a composta

$$\tilde{H}_q(X_*) \rightarrow H_q(X_*) \rightarrow H_q(X_*, *) = H_q(X)$$

um isomorfismo (ver obs.1 no final deste parágrafo), podemos considerar $H_q(X)$ como um subgrupo de $H_q(X_*)$.

Seja $\mu: X_* \times X_* \rightarrow X_*$ o produto; então μ induz $\mu_*: H_n(X_* \times X_*) \rightarrow H_n(X_*)$.

O produto cross em homologia é uma aplicação bilinear

$$H_p(X_*) \otimes H_q(X_*) \longrightarrow H_{p+q}(X_* \times X_*)$$

Combinando estes, obtemos uma bilinear

$$H_p(X_*) \otimes H_q(X_*) \longrightarrow H_{p+q}(X_*)$$

Assim $H_*(X_*)$ é uma álgebra graduada sobre A , a álgebra Pontryagin de X . A aplicação $X_* \rightarrow *$ é evidentemente uma H -aplicação, e segue que o homomorfismo induzido $H_*(X_*) \rightarrow H_*(*)$ é um homomorfismo de álgebras. Assim $\tilde{H}_*(X_*)$ é um ideal em $H_*(X_*)$, e deste modo podemos considerar $H_*(X)$ como uma álgebra em si mesma, a álgebra de Pontryagin reduzida de X .

Pode ser útil tornar explícito o produto no ideal $H_*(X)$. Definimos acima um monomorfismo que cinde

$$\tilde{\beta}: H_q(X \times X, X \vee X) \longrightarrow H_q(X \times X);$$

compondo $\tilde{\beta}$ com $\mu_*: H_q(X \times X) \longrightarrow H_q(X)$, obtemos um homomorfismo

$$\tau: H_q(X \times X, X \vee X) \rightarrow H_q(X)$$

O produto cross é uma bilinear

$$H_p(X) \otimes H_r(X) \longrightarrow H_q(X \times X, X \vee X) \text{ (p+r=q)}.$$

Portanto, se $u \in H_p(X)$, $v \in H_r(X)$, então $u.v = \tau(u \times v)$ é um produto no ideal $H_*(X)$ já que para todos elementos $\alpha, \beta \in A$ e u, v, w em $H_*(X)$ temos

$$\begin{aligned} (\alpha u + \beta v).w &= \tau((\alpha u + \beta v) \times w) \\ &= \tau(\alpha(u \times w) + \beta(v \times w)) \\ &= \tau(\alpha(u \times w)) + \tau(\beta(v \times w)) \\ &= \alpha \tau(u \times w) + \beta \tau(v \times w) \\ &= \alpha(u.w) + \beta(v.w) \end{aligned}$$

e semelhantemente

$$w.(\alpha u + \beta v) = \alpha(w.u) + \beta(w.v).$$

Tal produto é chamado o produto de Pontryagin no ideal $H_*(X)$.

Observações:

1) Consideremos a sequência exata longa de homologia

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{q+1}(X_*, *) &\xrightarrow{\partial_*} H_q(*) \xrightarrow{i_*} H_q(X_*) \xrightarrow{j_*} H_q(X_*, *) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{q-1}(*) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(X_*, *) \xrightarrow{\partial_*} H_0(*) \xrightarrow{i_*} H_0(X_*) \rightarrow \\ &\rightarrow H_0(X_*, *) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

do par $(X_*, *)$. Segue (ver Cap.12, Corolário 12.4, p.132, [6]) que a sequência

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{q+1}(X_*, *) &\xrightarrow{\partial_*} H_q(*) \xrightarrow{i_*} H_q(X_*) \xrightarrow{j_*} H_q(X_*, *) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{q-1}(*) \rightarrow \dots \rightarrow H_1(X_*, *) \xrightarrow{\bar{\partial}_*} \tilde{H}_0(*) \xrightarrow{\bar{i}_*} \tilde{H}_0(X_*) \xrightarrow{\bar{j}_*} H_0(X_*, *) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

é exata. Desde que $H_q(*) = 0$ para $q \neq 0$, $\tilde{H}_0(*) = 0$ e $\tilde{H}_q(X_*) = H_q(X_*)$ para $q \neq 0$; segue que a composta

$$\tilde{H}_q(X_*) \hookrightarrow H_q(X_*) \rightarrow H_q(X_*, *) = H_q(X)$$

é um isomorfismo para todo q .

§8 - Álgebra Exterior

Observação: Para esta secção indicamos como referência S. Mac Lane [9].

Por um A-módulo $\mathbb{Z}$ -graduado entendemos uma família $M = \{M_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ de A-módulos M_n ; um elemento m de M_n é também chamado um elemento de grau n em M (denotamos $\deg m = n$).

Um A-módulo graduado M é um módulo $\mathbb{Z}$ -graduado com $M_n = 0$ para $n < 0$.

Uma álgebra graduada Ω é uma família de A-módulos $\{\Omega_n, n = 0, 1, \dots\}$ com um elemento distinguido $1 \in \Omega_0$ e uma função A-bilinear

$$\Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$$

$$(\lambda, \mu) \rightarrow \lambda \cdot \mu \quad \text{tal que sempre temos}$$

$$\deg(\lambda \cdot \mu) = \deg(\lambda) + \deg(\mu),$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \nu) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \nu, \quad 1 \cdot \lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda.$$

Uma álgebra graduada Ω é comutativa se sempre

$$\lambda \cdot \mu = (-1)^{\deg(\lambda)\deg(\mu)} \mu \cdot \lambda.$$

Em consequência, os elementos de grau par comutam no sentido normal. Se, além disso, $\lambda^2 = 0$ para todo elemento λ de grau ímpar, Ω é chamada rigorosamente comutativa.

O produto tensorial de duas A-álgebras graduadas Ω e Σ é seu produto tensorial $\Omega \otimes \Sigma$, como

módulos graduados, onde em termos de elementos, o produto é dado por

$$(\lambda \otimes \sigma)(\lambda' \otimes \sigma') = (-1)^{\deg(\sigma)\deg(\lambda')} \lambda \cdot \lambda' \otimes \sigma \cdot \sigma' \quad \text{e a}$$

identidade de $\Omega \otimes \Sigma$ é $1_\Omega \otimes 1_\Sigma$.

O produto tensorial para álgebras graduadas satisfaz

$$\alpha: \Omega \otimes \Sigma \cong \Sigma \otimes \Omega, \quad \alpha[\lambda \otimes \sigma] = (-1)^{\deg(\lambda)\deg(\sigma)} \sigma \otimes \lambda$$

$$\beta: (\Omega \otimes \Sigma) \otimes \tau \cong \Omega \otimes (\Sigma \otimes \tau), \quad \beta[(\lambda \otimes \sigma) \otimes \gamma] = \lambda \otimes (\sigma \otimes \gamma),$$

$$A \otimes \Omega \cong \Omega \cong \Omega \otimes A, \quad a \otimes \lambda \rightarrow a\lambda \leftarrow \lambda \otimes a$$

(Aqui A é reconhecido como uma álgebra graduada com $A_0 = A$, $A_n = 0$, $n \neq 0$).

A álgebra exterior $\Lambda = \Lambda(u)$ sobre um símbolo u de grau ímpar d é construída do A -módulo livre Au com um gerador u como a álgebra graduada Λ com $\Lambda_0 = A$, $\Lambda_d = Au$, $\Lambda_n = 0$ para $0 \neq n \neq d$, e com produto determinado por $1u = u = u1$, $u^2 = 0$.

É rigorosamente comutativa.

Seja $\Lambda(u_i)$, $i = 1, \dots, n$, a álgebra exterior sobre um símbolo u_i de grau ímpar d_i .

Para n letras $u_1, \dots, u_n$, cada uma de grau ímpar d_i , o produto tensorial (sobre A).

$\Lambda(u_1, \dots, u_n) = \Lambda(u_1) \otimes \dots \otimes \Lambda(u_n)$ é uma álgebra graduada rigorosamente comutativa, chamada a álgebra exterior sobre A com geradores $u_1, \dots, u_n$

O produto de dois elementos e e e' na álgebra exterior é frequentemente escrito como $e \wedge e'$. Claramente (*) Λ é o módulo livre sobre todos os produtos (em ordem) dos geradores u_i ; os produtos de grau $d_{i_1} + \dots + d_{i_p} > 0$ são

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p} = u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots \wedge u_{i_p},$$

com $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$.

(*) Note que $u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i$ para $i \neq j$.

O número de tais produtos é $\binom{n}{p}$ onde

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Vale a regra

$$u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} \dots u_{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_p} \quad \text{onde } \sigma \text{ é uma}$$

permutação qualquer de $\{1, \dots, p\}$ e $\text{sgn } \sigma$ é o sinal da permutação σ .

§9 - ÁLGEBRAS DE HOPF

Observação: A referência padrão para a teoria de álgebras de Hopf é Milnor-Moore [11].

Devemos observar, contudo, que nossa terminologia difere um tanto das suas, no sentido de que não assumimos quaisquer leis comutativa ou associativa na definição de uma álgebra de Hopf. Assim, uma álgebra de Hopf sobre A é um A -módulo graduado H , junto com aplicações

$$\phi: H \otimes H \rightarrow H, \quad \eta: A \rightarrow H$$

$$\Psi: H \rightarrow H \otimes H, \quad \varepsilon: H \rightarrow A$$

tais que $\varepsilon \circ \eta = 1_A$ e os diagramas abaixo são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes H & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & H \otimes H & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} & A \otimes H \\
 \searrow & & \downarrow \phi & \swarrow \Psi & \nearrow \\
 & & H & & H \\
 \nearrow & & \downarrow \phi & \swarrow \Psi & \searrow \\
 H \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \eta} & H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & H \otimes A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 H \otimes H & \xrightarrow{\phi} & H \xrightarrow{\psi} H \otimes H \\
 \psi \otimes \psi \downarrow & & \uparrow \phi \otimes \phi \\
 H \otimes H \otimes H \otimes H & \xrightarrow{1 \otimes \tau \otimes 1} & H \otimes H \otimes H \otimes H
 \end{array}$$

onde as setas não rotuladas são os isomorfismos óbvios e onde $\tau: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$ é a aplicação torcida definida por

$$\tau(x \otimes y) = (-1)^{pq} y \otimes x$$

para $x \in H_p$, $y \in H_q$.

H é chamado conexo se, e somente se, η aplica A sobre H_0 (equivalentemente $\epsilon|_{H_0}: H_0 \cong A$).

Se H é uma álgebra de Hopf de tipo finito (isto é, H_p é um A -módulo livre finitamente gerado para todo p), então o módulo graduado H^* tal que $H^p = \text{Hom}(H_p, A)$ é novamente uma álgebra de Hopf, chamada a álgebra de Hopf dual de H .

De fato, a aplicação natural

$H^* \otimes H^* \xrightarrow{\phi} (H \otimes H)^*$ é um isomorfismo; fazendo uso deste isomorfismo, H^* junto com as aplicações induzidas

$$\phi^*: H^* \rightarrow H^* \otimes H^*, \quad \eta^*: H^* \rightarrow A$$

$$\psi^*: H^* \otimes H^* \rightarrow H^*, \quad \epsilon^*: A \rightarrow H^*$$

são tais que $\eta^* \circ \epsilon^* = 1_A$ e os diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \otimes H^* & \xleftarrow{\eta^* \otimes 1} & H^* \otimes H^* & \xleftarrow{\epsilon^* \otimes 1} & A \otimes H^* \\
 \nwarrow & & \nearrow \phi^* & \searrow \psi^* & \swarrow \\
 & H^* & & & H^* \\
 \swarrow & & \searrow \phi^* & \nearrow \psi^* & \nwarrow \\
 H^* \otimes A & \xleftarrow{1 \otimes \eta^*} & H^* \otimes H^* & \xleftarrow{1 \otimes \epsilon^*} & H^* \otimes A \\
 \\
 & H^* \otimes H^* \xleftarrow{\phi^*} H^* \xleftarrow{\psi^*} H^* \otimes H^* & & & \\
 \psi^* \otimes \psi^* \uparrow & & & & \downarrow \phi^* \otimes \phi^* \\
 \\
 H^* \otimes H^* \otimes H^* \otimes H^* & \xleftarrow{1 \otimes \tau^* \otimes 1} & H^* \otimes H^* \otimes H^* \otimes H^*
 \end{array}$$

onde novamente observamos que as setas não rotuladas são os isomorfismos óbvios induzidos e τ^* é a aplicação induzida de τ (a menos deste isomorfismo natural ϕ).

Observemos que desde que $\epsilon \circ \eta = 1_A$, a composta $\text{Ker } \epsilon \xrightarrow{i} H \xrightarrow{p} \text{coKer } \eta = \frac{H}{\eta(A)}$, onde p é a projeção natural, é um isomorfismo (ver obs.1 no final desta

secção). Por conseguinte é conveniente identificá-los, de maneira que $\bar{H} = \text{Ker } \epsilon = \text{coK}\eta$ pode ser reconhecido como: ou um submódulo ou um módulo quociente de H . Se H é conexo, então

$$\bar{H}_0 = H_0 / (H_0 \cap \eta(A)) = H_0 / (H_0 \cap H_0) = H_0 / H_0 = 0,$$

$$\bar{H}_n = H_n / (H_n \cap \eta(A)) = H_n / (H_n \cap H_0) = H_n / \{1\} = H_n$$

para todo $n > 0$.

Um elemento $x \in \bar{H}$ é chamado primitivo se, e somente se, x pertence ao Kernel da aplicação composta

$$\bar{H} \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\Psi} H \otimes H \xrightarrow{p \otimes p} \bar{H} \otimes \bar{H}$$

Note que, se H é conexo, então $x \in H_n$ é primitivo se, e somente se,

$$\Psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

(ver obs.2 no final desta secção).

Seja X um H -espaço conexo por caminhos, A um domínio de ideais principais, e assumamos por toda a parte desta secção que

(9.1) Para cada q , o módulo de homologia $H_q(X;A)$ é um módulo livre de posto finito.

Quando isto acontece, dizemos que X tem tipo finito. Segue do Teorema dos Coeficientes Universais (ver §2, (2.6)) que

(9.2) Os módulos $H_q(X;A)$, $H^q(X;A)$ são A -módulos duais.

Segue do Teorema de Kunneth (ver §2, (2.6)) que

(9.3) Os produtos cross para homologia e cohomologia induzem isomorfismos

$$H_*(X;A) \otimes H_*(X;A) \cong H_*(X \times X;A),$$

$$H^*(X;A) \otimes H^*(X;A) \cong H^*(X \times X;A).$$

Nesta secção usaremos estes isomorfismos para identificar $H_*(X \times X;A)$ e $H^*(X \times X;A)$ como os produtos tensoriais apropriados.

Deste modo a aplicação diagonal $\Delta: X \rightarrow X \times X$ e o produto $\mu: X \times X \rightarrow X$ podem ser considerados induzindo homomorfismos

$$\Delta_*: H_*(X) \rightarrow H_*(X) \otimes H_*(X)$$

$$\mu_*: H_*(X) \otimes H_*(X) \rightarrow H_*(X),$$

bem como homomorfismos

$$\mu^*: H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes H^*(X),$$

$$\Delta^*: H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X).$$

(Aqui, e para o resto desta secção, supriremos o nome do coeficiente de domínio A, escrevendo $H_*(X)$, $H^*(X)$, ao invés de $H_*(X;A)$, $H^*(X,A)$).

Teorema (9.4) Sob os homomorfismos μ_* , Δ_* , o módulo $H_*(X)$ é uma álgebra de Hopf sobre A. Sob os homomorfismos Δ^* , μ^* , o módulo $H^*(X)$ é uma álgebra de Hopf sobre A. Além disso, $H_*(X)$ e $H^*(X)$ são álgebras de Hopf duais.

De particular importância, se $X = U_n(Sp_n)$ e A é um domínio de ideais principais, então o módulo graduado $H_*(X)$ de tipo finito (conforme teoremas 3.3 (3.4) do capítulo 3), junto com os homomorfismos (definidos nos geradores):

$\phi: H_*(X) \otimes H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(X \times X) \xrightarrow{\mu_*} H_*(X)$ dado por
 $\phi(x_i! \otimes x_j!) = \mu_*(x_i! \times x_j!) = x_i! \cdot x_j!$ (Produto de Pontryagin),
 $\psi: H_*(X) \xrightarrow{\Delta_*} H_*(X \times X) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$ dado por
 $\psi(x_i!) = \times \circ \Delta_*(x_i!) = \times(x_i! \times 1 + 1 \times x_i!) = x_i! \otimes 1 + 1 \otimes x_i!$
 e aplicações:

$\eta: A \rightarrow H_*(X)$ definida por $\eta(a) = a1 + 0 + 0 + \dots$, onde 1 é o gerador de $H_0(X) \cong A$ e $\varepsilon: H_*(X) \rightarrow A$ definida por $\varepsilon(a_01 + a_1 + a_2 + \dots) = a_0$, é uma álgebra de Hopf sobre A , onde $\times$ é o isomorfismo dado pelo Teorema de Künneth, μ_* é a induzida do produto em X e Δ_* é a induzida da aplicação diagonal.

Também, o módulo graduado $H^*(X)$ de tipo finito (conforme teoremas 3.1 (3.2) do Capítulo 3), junto com os homomorfismos (definidos nos geradores):

$\phi^*: H^*(X) \xrightarrow{\mu^*} H^*(X \times X) \xrightarrow{\cong} H^*(X) \otimes H^*(X)$ dado por
 $\phi^*(x_i) = \times \circ \mu^*(x_i) = \times(x_i \times 1 + 1 \times x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$,
 $\psi^*: H^*(X) \otimes H^*(X) \xrightarrow{\cong} H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(X)$ dado por
 $\psi^*(x_i \otimes x_j) = \Delta^*(x_i \times x_j) = x_i \cup x_j$ (produto cup) e aplicações:

$\eta^*: H^*(X) \rightarrow A$ definida por $\eta^*(a_01 + a_1 + a_2 + \dots) = a_0$
 $\varepsilon^*: A \rightarrow H^*(X)$ definida por $\varepsilon^*(a) = a1 + 0 + 0 + \dots$, onde 1 é o gerador de $H^0(X) \cong A$ e
 $\tau^*: H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X) \otimes H^*(X)$ definida por $\tau^*(x \otimes y) = (-1)^{pq} y \otimes x$, para $x \in H^p$ e $y \in H^q$, é uma álgebra de Hopf sobre A , onde $\times$ é o isomorfismo dado pelo Teorema de Künneth, μ^* é induzida do produto em X e Δ^* é a induzida da aplicação diagonal.

Observações:

1) Desde que $\epsilon \circ \eta = 1_A$ segue que a sequência curta exata

$$0 \rightarrow \text{Ker } \epsilon \xrightarrow{i} H \xrightarrow[\eta]{\epsilon} A \rightarrow 0 \quad \text{cinde em } A$$

e portanto $H \cong \text{Ker } \epsilon \oplus \eta(A)$; donde $\text{cok } \eta = H/\eta(A) \cong \text{Ker } \epsilon$ via o homomorfismo $y + \eta(A) \rightarrow a$, onde a é univocamente determinado pela decomposição única de $y = a + b$, com $a \in \text{Ker } \epsilon$ e $b \in \eta(A)$. Note que tal homomorfismo é o homomorfismo inverso de $p \circ i$; donde segue o resultado.

2) Um elemento $x \in H_n = \bar{H}_n$ é primitivo se, e somente se, x pertence ao Kernel da composta

$$H_n \xrightarrow{i} H_n \xrightarrow{\Psi} H_n \otimes H_n \xrightarrow{p \otimes p} H_n \otimes H_n$$

o que é equivalente a dizer que $\Psi(x) \in \text{Ker}(p \otimes p)$.

Mas, $\text{Ker}(p \otimes p)$

é o submódulo de $H_n \otimes H_n$ gerado pelos elementos $a \otimes b$ com $a \in \text{Ker}(p)$ ou $b \in \text{Ker}(p)$.

Desde que H é conexo, $\text{Ker}(p) = \eta(A) = H_0 \cong A$.

Assim, todo elemento $y \in \text{Ker}(p)$ pode ser escrito na forma $\lambda.1$ com $\lambda \in A$.

Portanto os elementos $a' \otimes 1 + 1 \otimes b'$ geram $\text{Ker}(p \otimes p)$ com $a', b' \in H_n$.

Assim, se $\Psi(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ segue que $\Psi(x) \in \text{Ker}(p \otimes p)$ e portanto x é primitivo em H_n .

§10 - Esferas

Ao longo deste parágrafo, as variedades que aparecerem serão de Hausdorff e G será compacto.

Definição: Um grupo topológico G é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo tal que as aplicações

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \quad \text{e} \quad G \rightarrow G \\ (x, y) &\rightarrow x \cdot y \quad \quad x \rightarrow x^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas. Decorre imediatamente da definição que num grupo topológico, as aplicações

$$\begin{aligned} L_x: G &\rightarrow G \quad \text{e} \quad R_x: G \rightarrow G \\ y &\rightarrow x \cdot y \quad \quad y \rightarrow y \cdot x \end{aligned}$$

são homeomorfismos, para cada $x \in G$. (É imediato que L_x e R_x são contínuas e que $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$ e $(R_x)^{-1} = R_{x^{-1}}$ para cada $x \in G$). Estas aplicações são chamadas respectivamente translação à esquerda por x e translação à direita por x . Indicaremos por e o elemento identidade de G .

Definição: Dizemos que um grupo topológico G age em uma variedade M , se existe uma aplicação contínua

$$\eta: G \times M \rightarrow M$$

indicada por $\eta(x,p) = xp$ tal que

(a) $ep = p$;

(b) $(xy)p = x(yp)$.

Neste caso, η é chamada ação de G em M .
Dada uma ação η de G em M , definimos a órbita de um ponto $p \in M$ como sendo o conjunto

$$Gp = \{xp; x \in G\}.$$

Em outras palavras, a órbita de um ponto $p \in M$ é a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} G \times \{p\} &\rightarrow M \\ (x,p) &\rightarrow \eta(x,p). \end{aligned}$$

Dizemos que a ação η é transitiva ou que

G age transitivamente em M através de η se $G_p = M$, para todo $p \in M$, isto é, para todo $p, q \in M$ existe $x \in G$ tal que $xp = q$.

Para todo $p_0 \in M$, definimos o grupo de isotropia do ponto P_0

$$G_{p_0} = \{x \in G; xp_0 = p_0\}$$

Note que G_{p_0} é um subgrupo fechado de G desde que $G_{p_0} = \phi^{-1}(p_0)$ onde ϕ é a aplicação contínua

$$G \rightarrow M$$

$$x \rightarrow xp_0$$

Além disso temos

(10.1) Se $\eta: G \times M \rightarrow M$ é uma ação transitiva, então G_p é isomorfo a G_q , para todo $p, q \in M$.

Demonstração: Se η é transitiva, existe $a \in G$ tal que $ap = q$ e daí

$$p = ep = (a^{-1}a)p = a^{-1}(ap) = a^{-1}q$$

Definimos agora

$$\begin{aligned} \phi: G_p &\rightarrow G_q & e & & \psi: G_q &\rightarrow G_p \\ x &\rightarrow axa^{-1} & & & y &\rightarrow a^{-1}ya \end{aligned}$$

Note que ϕ e ψ estão bem definidas, pois, se $x \in G_p$, $(axa^{-1})q = ax(a^{-1}q) = axp = ap = q$ e se $y \in G_q$, $(a^{-1}ya)p = a^{-1}y(ap) = a^{-1}yq = a^{-1}q = p$.

Ainda, ϕ e ψ são homomorfismos e $\phi = \psi^{-1}$.

$$\begin{aligned} \text{De fato, } \phi(x.y) &= axya^{-1} = \\ (axa^{-1}).(aya^{-1}) &= \phi(x) \cdot \phi(y), \quad \psi(x.y) = a^{-1}xya = \\ &= (a^{-1}xa) \cdot (a^{-1}ya) = \psi(x) \cdot \psi(y), \\ \phi \circ \psi(y) &= \phi(a^{-1}ya) = aa^{-1}yaa^{-1} = y \quad e \\ \psi \circ \phi(x) &= \psi(axa^{-1}) = a^{-1}axa^{-1}a = x. \end{aligned}$$

Para ver que são contínuas, basta notar que $\phi = L_a \circ R_{a^{-1}}|_{G_p}$ e $\psi = L_{a^{-1}} \circ R_a|_{G_q}$

□

(10.2) Seja $\eta: G \times M \rightarrow M$ uma ação transitiva de um grupo topológico G na variedade M . Seja $p_0 \in M$ e seja H o subgrupo de isotropia em p_0 . Definamos a aplicação

$$\alpha: G/H \rightarrow M$$

$$xH \rightarrow \eta(x, p_0) = xp_0$$

Então α é um homeomorfismo.

Demonstração: Notemos primeiramente que α está bem definida, pois se $xH = yH$, temos $y^{-1}x \in H$ e daí $(y^{-1}x)p_0 = p_0$, pois $H = G_{p_0}$. Segue-se que $y^{-1}(xp_0) = p_0$, ou seja $xp_0 = yp_0$, o que demonstra o que havíamos afirmado.

Passemos agora à demonstração de que α é um homeomorfismo.

(i) α é sobrejetora. Decorre imediatamente da transitividade de η .

(ii) α é 1-1. Pois se $xp_0 = yp_0$, então $y^{-1}x \in H$, logo $xH = yH$.

(iii) α é contínua. Notemos primeiramente o fato geral seguinte: $f: G/H \rightarrow M$ é contínua se, e somente se, $f \circ \pi: G \rightarrow M$ é contínua, onde $\pi: G \rightarrow G/H$ é a aplicação quociente. De fato, suponhamos que $f \circ \pi$ seja contínua e seja O um aberto em M . Então $\pi^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ \pi)^{-1}(O)$ é aberto em G , donde segue que $f^{-1}(O)$ é um aberto em G/H (G/H possui a topologia co-induzida pela aplicação $\pi: G \rightarrow G/H$), o que demonstra a afirmação feita. Observe a seguir que a aplicação

$$\alpha \circ \pi: G \rightarrow M$$

$$x \rightarrow xp_0$$

é contínua pois equivale à restrição de η a $G \times \{p_0\} \cong G$. Portanto, segue-se da observação anterior que α é contínua. Para terminar a demonstração, falta apenas provar que α é fechada.

Notemos, primeiramente, que desde que G é compacto e $\pi: G \rightarrow G/H$ é contínua e sobrejetora, então G/H é compacto.

Agora, seja F um fechado em G/H . Então, F é compacto. Desde que α é contínua, segue-se que $\alpha(F)$ é um compacto de M .

Mas, M é Hausdorff e, daí, $\alpha(F)$ é fechado em M .

Os exemplos a seguir dão uma idéia da importância de (10.2).

(1) Seja C^n com a base complexa

$$\varepsilon = \{e_0, e_2, \dots, e_{2n-2}\}$$

e seja

$$X = \{w \in C^n; |w| = 1\}$$

Definimos

$$\eta: U(n) \times X \rightarrow X$$

$$(T, w) \rightarrow T(w)$$

η é evidentemente uma ação. Mostremos que η é transitiva. Dado $w_0 \in X$, escolhemos $w_2, \dots, w_{2n-2} \in X$ tais que

$$\beta = \{w_0, w_2, \dots, w_{2n-2}\}$$

seja uma base ortonormal do C^n .

$$\text{Definamos } T: C^n \rightarrow C^n$$

$$T(e_{2j}) = w_{2j}$$

Então, T é uma transformação linear de C^n que pertence ao grupo ortogonal $O(2n)$.

Logo $T \in U(n)$ e além disso $T(e_{2j}) = w_{2j}$ para todo j ; em particular $T(e_0) = w_0$.

Agora, se $u, v \in X$, tomamos $F, G \in U(n)$ tais que $F(e_0) = u$ e $G(e_0) = v$; temos que $F G^{-1} \in U(n)$ e $F G^{-1}(v) = u$. Daí se conclui que η é transitiva. Desde que $U(n-1)$ pode ser identificado com o subgrupo de

$U(n)$ que deixa o vetor e_{2n-2} fixado, temos que
 $U(n-1) = U(n)_{e_{2n-2}}$. Por (10.2) $U(n)/U(n-1)$ é homeomorfo a X .

Tomando agora, o sistema de coordenadas global

$$\{e_0, e_1 = i.e_0, \dots, e_{2n-2}, e_{2n-1} = i.e_{2n-2}\}$$

de C^n , vemos que $C^n \approx R^{2n}$ e $X \approx S^{2n-1}$, donde se conclui que

$$U(n)/U(n-1) \approx S^{2n-1}$$

(2) Seja Q^n com a base quaterniônica

$$\varepsilon = \{e_0, e_4, \dots, e_{4n-4}\}$$

e seja

$$X = \{q \in Q^n; |q| = 1\}$$

Definimos

$$\eta: Sp(n) \times X \rightarrow X$$

$$(T, q) \rightarrow T(q)$$

η é evidentemente uma ação. Mostremos que η é transitiva. Dado $q_0 \in X$, escolhemos $q_4, \dots, q_{4n-4} \in X$ tais que

$$\beta = \{q_0, q_4, \dots, q_{4n-4}\}$$

seja uma base ortonormal de Q^n .

Definamos $T: Q^n \rightarrow Q^n$

$$T(e_{4j}) = q_{4j}$$

Então, T é uma transformação linear de Q^n que pertence ao grupo ortogonal $O(4n)$. Logo $T \in Sp(n)$ e além disso $T(e_{4j}) = q_{4j}$ para todo j ; em particular $T(e_0) = q_0$.

Agora, se $u, v \in X$, tomamos $F, G \in Sp(n)$ tais que $F(e_0) = u$ e $G(e_0) = v$; temos que $FG^{-1} \in Sp(n)$ e $FG^{-1}(v) = u$. Daí se conclui que η é transitiva. Desde que $Sp(n-1)$ pode ser identificado com o subgrupo de $Sp(n)$ que deixa o vetor e_{4n-4} fixado, temos que

$$Sp(n-1) = Sp(n)_{e_{4n-4}}$$

Por (10.2) $Sp(n)/Sp(n-1)$ é homeomorfo a X .

Tomando agora, o sistema de coordenadas global

$$\{e_0, e_1 = i.e_0, e_2 = j.e_0, e_3 = k.e_0, \dots, e_{4n-4}, e_{4n-3} = i.e_{4n-4}, e_{4n-2} = j.e_{4n-4}, e_{4n-1} = k.e_{4n-4}\} \text{ de } Q^n$$

vemos que $Q^n \approx R^{4n}$ e $X \approx S^{4n-1}$, donde se conclui que

$$Sp(n)/Sp(n-1) \approx S^{4n-1}$$

CAPÍTULO 2

O §1 deste capítulo é dedicado a fibrações. Os exemplos mais simples de fibrações são dados. Fibrações induzidas e equivalência de homotopia de fibra são estudados. No §2, assumimos que o espaço base B é a suspensão de um espaço W .

A decomposição da base em duas cópias do espaço contrátil TW induz uma decomposição do espaço total em dois subespaços, cada um dos quais têm o mesmo tipo de homotopia de $TW \times F$, e portanto de F . Suas intersecções têm o tipo de homotopia de $W \times F$, e uma consideração do relacionamento entre estes subespaços conduz a uma sequência exata que torna o relacionamento entre os grupos de homologia dos três espaços F , X e B razoavelmente simples.

O caso $B = S^n$ é de especial interesse, e a sequência exata resultante denomina-se sequência de Wang. Já o §3 é dedicado para mais algumas propriedades da sequência de Wang.

§1. FIBRAÇÕES

Seja $p: X \rightarrow B$ uma aplicação e Y um espaço na categoria K . Um problema do levantamento de homotopia para (p, Y) é simbolizado por um diagrama comutativo

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ I \times Y & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

onde $i_0(y) = (0, y)$ para todo $y \in Y$; e as aplicações $f: Y \rightarrow X$, $G: I \times Y \rightarrow B$ se dizem constituir os dados para o problema em questão. A aplicação G é uma homotopia de $p \circ f$; e uma solução para o problema é uma homotopia $F: I \times Y \rightarrow X$ de f tal que $p \circ F = G$; assim F levanta a homotopia G de $p \circ f$ a uma homotopia de f .

Observação: Muitas vezes é conveniente prescrever o valor final, mais propriamente do que o valor inicial, do levantamento de uma homotopia. Assim, se $i_1: Y \rightarrow I \times Y$ é a aplicação tal que $i_1(y) = (1, y)$, duas aplicações

$f: Y \rightarrow X$, $G: I \times Y \rightarrow B$ tais que $G_{0,1} = p \circ f$, são frequentemente indicadas como os dados para um problema de levantamento de homotopia.

A aplicação p tem a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a Y se, e somente se, todo problema (1.1) tem uma solução; e p é chamada uma fibração se, e somente se, tem a propriedade do levantamento de homotopia (HLP) com respeito a todo espaço Y . Se $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, a fibra sobre $b \in B$ é o conjunto $F_b = p^{-1}(b)$. O espaço B é chamado de espaço base e o espaço X de espaço total da fibração p ; e muitas vezes dizemos que X é um espaço fibrado sobre B com respeito a p .

Frequentemente usaremos a locução

" $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$ é uma fibração" para significar que $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, que F é a fibra sobre algum ponto designado de B e que $i: F \hookrightarrow X$ é a inclusão.

Exemplos simples de fibração são dados pelos

Teorema (1.2) Para quaisquer espaços U e F , a projeção $p_1: U \times F \rightarrow U$ é uma fibração.

De fato, se

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & U \times F \\
 i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p_1 \\
 I \times Y & \xrightarrow{G} & U
 \end{array}$$

é um problema de levantamento de homotopia, a aplicação

$H: I \times Y \rightarrow U \times F$ definida por

$H(t,y) = (G(t,y), p_2 \circ f(y))$, onde $p_2: U \times F \rightarrow F$ é a projeção; é uma solução pois para todo $(t,y) \in I \times Y$,

$$p_1 \circ H(t,y) = p_1(G(t,y), p_2 \circ f(y)) = G(t,y)$$

e portanto $p_1 \circ H = G$.

Teorema (1.3) Para quaisquer espaços B e F , a projeção

$p_2: F \times B \rightarrow B$ é uma fibração.

De fato, se

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & F \times B \\
 i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p_2 \\
 I \times Y & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

é um problema de levantamento de homotopia, a aplicação

$H: I \times Y \rightarrow F \times B$ definida por $H(t,y) = (p_1 \circ f(y), G(t,y))$, on

de $p_1: F \times B \rightarrow B$ é a projeção; é uma solução pois $p_2 \circ H(t, y) = p_2(p_1 \circ f(y), G(t, y)) = G(t, y)$ para todo $(t, y) \in I \times Y$ e portanto $p_2 \circ H = G$.

A projeção $p_2: F \times B \rightarrow B$ é chamada uma fibração trivial.

Teorema (1.4) Se $p: X \rightarrow Y$ e $q: Y \rightarrow B$ são fibrações, então $q \circ p: X \rightarrow B$ também é uma fibração.

De fato, seja

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow q \circ p \\ I \times Z & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

um problema de levantamento de homotopia.

Consideremos o problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p \circ f} & Y \\ i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow q \\ I \times Z & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Como $q: Y \rightarrow B$ é uma fibração, existe

$H: I \times Z \rightarrow Y$ tal que $q_0 H = G$.

Agora, considerando o problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ I \times Z & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

e usando o fato de que $p: X \rightarrow Y$ é uma fibração, segue que existe $F: I \times Z \rightarrow X$ tal que $p \circ F = H$.

F é a solução desejada para o problema i nicial em questão, pois $q_0 p \circ F = q_0 H = G$

O resultado a seguir é devido a Hurewicz.

Teorema (Hurewicz). Seja $p: X \rightarrow B$ uma aplicação contínua. Suponha que B é paracompacto e que existe uma cobertura aberta β de B tal que, para cada $V \in \beta$, $p|_{p^{-1}(V)}: p^{-1}(V) \rightarrow V$ é uma fibração. Então p é uma fibração.

Véja a demonstração em [5], capítulo XX, §§3-4.

Definição (1.5) Uma aplicação $p: X \rightarrow B$ é chamada uma projeção de um fibrado vetorial se, e somente se, p é contínua e para cada b de B , existe uma vizinhança U de b e um homeomorfismo $\phi_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que $p \circ \phi_U = p_1$, onde $p_1: U \times F \rightarrow U$ é a projeção e F é a fibra.

A importância do Teorema de Hurewicz está no

Corolário (1.6) Seja $p: X \rightarrow B$ a projeção de um fibrado vetorial, e suponha que B é paracompacto. Então p é uma fibração.

Demonstração: Por hipótese B é paracompacto. Como $p: X \rightarrow B$ é a projeção de um fibrado vetorial então temos que p é contínua e que para cada b de B existe uma vizinhança U de b e um homeomorfismo

$\phi_U: U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\phi_U} & p^{-1}(U) \\ & \searrow p_1 & \downarrow p \\ & & U \end{array} \text{ é comutativo.}$$

Seja β a coleção destes U . Obviamente β é uma cobertura aberta de B e como para cada U de β temos que

$p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \rightarrow U$ é a projeção $p_1: U \times F \rightarrow U$

a menos de homeomorfismo, segue-se pelo Teorema (1.2) que $p|_{p^{-1}(U)}: p^{-1}(U) \rightarrow U$ é uma fibração. Logo pelo teorema (Hurewicz) temos que p é uma fibração.

Teorema (1.7) Seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração, e seja B_0 um subespaço fechado de B , $X_0 = p^{-1}(B_0)$. Se (B, B_0) é um par NDR, então (X, X_0) também o é.

Demonstração: (Usaremos a variante da definição de par NDR devido a A. Strøm).

Como B_0 é um subespaço fechado de B e (B, B_0) é um par NDR então existem aplicações contínuas $u: B \rightarrow I$ e $h: I \times B \rightarrow B$ tais que

$$(1) B_0 \subset u^{-1}(0),$$

$$(2) h(0, b) = b \text{ para todo } b \in B,$$

(3) $h(t,x) = x$ para todo $(t,x) \in I \times B_0$,

(4) $h(t,b) \in B_0$ sempre que $t > u(b)$.

Como a aplicação identidade $1: X \rightarrow X$ e a aplicação $ho(1 \times p): I \times X \rightarrow B$ formam os dados para um problema de levantamento de homotopia para (p,X) e $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, então existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ I \times X & \xrightarrow{ho(1 \times p)} & B \end{array}$$

Defina $H': I \times X \rightarrow X$ por

$$H'(t,x) = \begin{cases} H(t,x) & \text{se } t \leq u(p(x)) \\ H(u(p(x)), x) & \text{se } t \geq u(p(x)) \end{cases}$$

Desde de B_0 é um subespaço fechado de B e $p: X \rightarrow B$ é contínua, pois é uma fibração, segue que $X_0 = p^{-1}(B_0)$ é um subespaço fechado de X . Para concluirmos que (X, X_0) é um par NDR, basta verificarmos que as

aplicações contínuas $uop: X \rightarrow I$ e $H': I \times X \rightarrow X$ satisfazem as condições

$$(\bar{1}) \quad X_0 \subset (uop)^{-1}(0),$$

$$(\bar{2}) \quad H'(0, x) = x \text{ para todo } x \in X,$$

$$(\bar{3}) \quad H'(t, x) = x \text{ para todo } (t, x) \in I \times X_0,$$

$$(\bar{4}) \quad H'(t, x) \in X_0 \text{ sempre que } t > uop(x)$$

Façamos então a verificação de cada uma delas:

$$(\bar{1}) \quad \text{Seja } x_0 \in X_0 = p^{-1}(B_0). \text{ Então } p(x_0) \in B_0.$$

$$\text{Como } B_0 \subset u^{-1}(0) \text{ segue que } p(x_0) \in u^{-1}(0)$$

$$\text{Logo } uop(x_0) = 0 \text{ e daí temos que}$$

$$x_0 \in (uop)^{-1}(0). \text{ Portanto } X_0 \subset (uop)^{-1}(0)$$

$$(\bar{2}) \quad \text{Temos}$$

$$H'(0, x) = \begin{cases} H(0, x) & \text{se } 0 \leq u(p(x)) \\ H(u(p(x)), x) & \text{se } 0 \geq u(p(x)) \end{cases}$$

Desde que $u \circ p: X \rightarrow I$ segue-se que

$$u(p(x)) \in I = [0,1].$$

Logo, $H'(0,x) = H(0,x) = x$ para todo $x \in X$.

$$(3) \quad \text{Temos } H'(t,x) = \begin{cases} H(t,x) & \text{se } t \leq u(p(x)) \\ H(u(p(x)),x) & \text{se } t \geq u(p(x)) \end{cases}$$

para todo $(t,x) \in I \times X$.

Seja $(t,x) \in I \times X_0$ qualquer.

Como $x \in X_0$ então $u(p(x)) = 0$ pois $X_0 \subset (u \circ p)^{-1}(0)$.

Logo, para todo $(t,x) \in I \times X_0$ temos que

$$H'(t,x) = \begin{cases} H(t,x) & \text{se } t \leq 0 \\ H(0,x) & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Como $t \in I = [0,1]$ conclui-se finalmente que $H'(t,x) = H(0,x)$ para todo $(t,x) \in I \times X_0$, ou seja, $H'(t,x) = x$ para todo $(t,x) \in I \times X_0$.

(4) Suponha que $t > u(p(x))$. Então

$$\begin{aligned} p \circ H'(t, x) &= p \circ H(u(p(x)), x) = h \circ (1 \times p)(u(p(x)), x) = \\ &= h(u(p(x)), p(x)). \end{aligned}$$

Para todo $s > u(p(x))$, $h(s, p(x)) \in B_0$ por (4) para o par (u, h) .

Desde que B_0 é fechado, $h(u(p(x)), p(x)) \in B_0$, e então $p \circ H'(t, x) \in B_0$.

Logo $H'(t, x) \in p^{-1}(B_0) = X_0$.

Lema (1.8) Seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração, e seja (Y, A) um par DR. Então todo problema de levantamento de extensão

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array} \quad \text{tem uma solução.}$$

Demonstração: Como por hipótese (Y, A) é um par DR, existem aplicações contínuas $u: Y \rightarrow I$, $\tilde{\phi}: I \times Y \rightarrow Y$ e $r: Y \rightarrow A$ tais que $A = u^{-1}(0)$, $\tilde{\phi}_0$ é a aplicação identidade de Y , $\tilde{\phi}_1 = i \circ r$ onde $i: A \hookrightarrow Y$ é a inclusão e $\tilde{\phi}$ é estacionária sobre A .

Defina $\phi: I \times Y \rightarrow Y$ por

$$\phi(t, y) = \tilde{\phi}(1-t, y).$$

Claramente ϕ é contínua.

Como para todo $y \in Y$ temos que

$$\phi_0(y) = \phi(0, y) = \tilde{\phi}(1, y) = \tilde{\phi}_1(y) = \text{ior}(y) \text{ então } \phi_0 = \text{ior}.$$

Por outro lado, para cada $y \in Y$,

$$\phi_1(y) = \phi(1, y) = \tilde{\phi}(0, y) = \tilde{\phi}_0(y) = y, \text{ portanto } \phi_1 \text{ é a aplicação identidade de } Y.$$

Mais ainda, ϕ é estacionária sobre A pois para todo $(t, a) \in I \times A$, $\phi(t, a) = \tilde{\phi}(1-t, a) = a$.

Defina uma aplicação $\phi: I \times Y \rightarrow Y$ por

$$\phi(t, y) = \begin{cases} \phi(t/u(y), y) & (t < u(y)), \\ \phi(1, y) & (t \geq u(y)). \end{cases}$$

A restrição de ϕ ao conjunto aberto $I \times (Y-A)$ (note que $A = u^{-1}(0) \subset Y$ é fechado) é contínua. Isto segue pelo simples fato de que $y \in Y - A$ é equivalente a dizer que $0 < u(y) \leq 1$.

Seja $(t, y) \in I \times A$ e seja U uma vizinhança de y . Então, $I \times \{y\} \subset \phi^{-1}(U)$ pois para todo $t \in I$, $\phi(t, y) = y \in U$.

Como U é uma vizinhança de y , existe um aberto $W \subset U$ tal que $y \in W \subset U$

Seja $V = W \cap A$. Logo V é uma vizinhança de y .

Como, para todo $(t,y) \in I \times V$ temos que $\phi(t,y) = y \in U$, concluímos que existe uma vizinhança V de y tal que $I \times V \subset \phi^{-1}(U)$. O conjunto $I \times V$ é uma vizinhança de (t,y) em $I \times Y$ e $\phi(I \times V) \subset \phi(I \times V) \subset U$. Isto prova que ϕ é contínua em cada ponto de $I \times A$, e assim temos que ϕ é contínua. As aplicações $f \circ \phi: I \times Y \rightarrow B$ e $g \circ r: Y \rightarrow X$ formam os dados para um problema de levantamento de homotopia para (p,y)

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g \circ r} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ I \times Y & \xrightarrow{f \circ \phi} & B \end{array}$$

Como $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, então e existe uma aplicação $H: I \times Y \rightarrow X$ tal que $H_0(y) = H(0,y) = g \circ r(y)$ e $p \circ H = f \circ \phi$.

Então a aplicação $h: Y \rightarrow X$ definida por $h(y) = H(u(y), y)$ é a solução desejada para o problema de levantamento de extensão

De fato, para cada $a \in A \subset Y$ temos
 $h(a) = H(u(a), a) = H(0, a) = \text{gor}(a) = g(a)$ pois $r: Y \rightarrow A$
 é uma retração de A .

Ainda, para cada $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
 \text{poh}(y) &= \text{poH}(u(y), y) = \text{fo}\phi(u(y), y) \\
 &= \text{fo}\phi(1, y) = f(y)
 \end{aligned}$$

Suponha que $p: X \rightarrow B$, $f: B' \rightarrow B$ são a-
 plicações (não necessariamente fibrações).

Seja $X' = \{(b', x) \in B' \times X \mid f(b') = p(x)\}$

Então as restrições a X' das projeções de
 $B' \times X$ em seus fatores são aplicações $p': X' \rightarrow B'$,
 $f': X' \rightarrow X$, e o diagrama

$$(1.9) \quad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & X \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo.

O diagrama (1.9) tem a propriedade universal abaixo:

(1.10) Sejam $g: Y \rightarrow X$, $q: Y \rightarrow B'$ tais que $pog = foq$.

Então existe uma única $h: Y \rightarrow X'$ tal que $f'oh = g$ e $p'oh = q$.

(Em outras palavras, o problema

tem uma única solução).

Demonstração: Seja $q \times g: Y \rightarrow B' \times X$ definida por $(q \times g)(y) = (q(y), g(y))$ para todo $y \in Y$.

Como $\text{im}(q \times g) \subset X'$, pois por hipótese $f \circ q(y) = p \circ g(y)$ para todo $y \in Y$, segue que $q \times g: Y \rightarrow X'$.

Tomemos $h = q \times g$. Temos

$f' \circ h(y) = f' \circ (q \times g)(y) = f'(q(y), g(y)) = g(y)$ e
 $p' \circ h(y) = p' \circ (q \times g)(y) = p'(q(y), g(y)) = q(y)$ para todo $y \in Y$ e portanto $f' \circ h = g$ e $p' \circ h = q$. Provemos a unicidade de h .

Suponhamos que exista uma outra aplicação $\theta: Y \rightarrow X'$ tal que $f' \circ \theta = g$ e $p' \circ \theta = q$.

Tomemos $y \in Y$ qualquer. Como $\theta(y) \in X'$, segue-se que $\theta(y) = (b', x) \in B' \times X$ tal que $f(b') = p(x)$.

Portanto temos $\theta(y) = (b', x) =$
 $(p'(b', x), f'(b', x)) = (p' \circ \theta(y), f' \circ \theta(y)) = (q(y), g(y)) =$
 $= h(y)$ para todo $y \in Y$ e daí $\theta = h$.

□

Teorema (1.11) Se $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, então $p': X' \rightarrow B'$ também é uma fibração.

Demonstração:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{f'} & X \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p' & & \downarrow p \\ I \times Y & \xrightarrow{H} & B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Pois se $g: Y \rightarrow X'$ e $H: I \times Y \rightarrow B'$ formam os dados para um problema de levantamento de homotopia para a aplicação p' , então $f'og: Y \rightarrow X$ e $foH: I \times Y \rightarrow B$ formam os dados para um problema de levantamento de homotopia para p e por hipótese este último problema tem uma solução $G': I \times Y \rightarrow X$ (portanto $poG' = foH$).

Temos então o diagrama

onde $poG' = foH$. Por (1.10), existe uma única aplicação $G: I \times Y \rightarrow X'$ tal que $f'oG = G'$ e $p'oG = H$.

Logo, G é a solução desejada para o problema de levantamento de homotopia para p' e portanto p' é uma fibração.

A fibração $p': X' \rightarrow B'$ é chamada induzida de $p: X \rightarrow B$ por f .

Notemos que a aplicação $f': X' \rightarrow X$ aplica a fibra sobre $b' \in B'$ ($F_{b'} = (p')^{-1}(b')$) homeomorficamente sobre a fibra sobre $f(b') \in B$ ($F_{f(b')} = p^{-1}(f(b'))$). Em outras palavras, $f': F_{b'} \subset X' \longrightarrow F_{f(b')} \subset X$ é um homeomorfismo. Com efeito, temos que f' é obviamente contínua (como restrição de função contínua).

Além disso f' é bijetora pois temos que se (b', x_1) e (b', x_2) são elementos quaisquer de $F_{b'}$, com $f'(b', x_1) = f'(b', x_2)$ então $x_1 = x_2$ e daí $(b', x_1) = (b', x_2)$.

Por outro lado, dado $w \in F_{f(b')} = p^{-1}(f(b'))$, temos que $p(w) = f(b')$. Tomemos então $(b', w) \in F_{b'}$.

Logo $f'(b', w) = w$.

Agora só nos resta observar que $v: F_{f(b')} \longrightarrow F_{b'}$ definida por $v(w) = (b', w)$ é a inversa contínua de f' .

De fato, $f' \circ v(w) = f'(b', w) = w$ para todo $w \in F_{f(b')}$ e $v \circ f'(b', x) = v(x) = (b', x)$ para todo $(b', x) \in F_{b'}$.

Mais ainda, se $f: B' \rightarrow B$ é uma inclusão, então f' é uma inclusão aplicando X' homeomorficamente sobre $p^{-1}(B')$. Isto se deve ao fato de que

$f': F_{b'} \subset X' \rightarrow F_{b'} \subset X$ é um homeomorfismo e
 $f'(X') \subset p^{-1}(B')$ pois para cada $(b', x) \in X'$ temos que
 $pf'(b', x) = p(x) = b' \in B'$.

Então temos o

Corolário (1.12) Se $p: X \rightarrow B$ é uma fibração e $B' \subset B$,
 $X' = p^{-1}(B')$, então $p|_{X'}: X' \rightarrow B'$ é uma fibração.

A notação de fibração induzida também tem
 uma espécie de propriedade de transitividade, expressada
 em

(1.13) Seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração, e sejam
 $f: B' \rightarrow B$, $g: B'' \rightarrow B'$. Seja $p': X' \rightarrow B'$ a fibração in-
 duzida de p por f , e seja $p'': X'' \rightarrow B''$ a fibração in-
 duzida de p' por g . Então a fibração induzida
 de p pela aplicação $f \circ g: B'' \rightarrow B$ é p'' (a menos de
 homeomorfismo natural).

Demonstração:

Seja $\theta'': Y'' \rightarrow B''$ a fibração induzida de
 p por $f \circ g: B'' \rightarrow B$, onde $Y'' = \{(b'', x) \in B'' \times X \mid p(x) = f \circ g(b'')\}$.

Desde que $X'' = \{(b'', w) \in B'' \times X' \mid p'(w) = g(b'')\}$

(onde $X' = \{(b', x) \in B' \times X \mid p(x) = f(b')\}$) é homeomorfo a Y'' via o homeomorfismo natural $\Psi: Y'' \rightarrow X'$ definido por $\Psi(b'', x) = (b'', (g(b''), x))$, e temos que $\theta'' = p'' \circ \Psi$ pois $p'' \circ \Psi(b'', x) = p''(b'', (g(b''), x)) = b'' = \theta''(b'', x)$ para todo $(b'', x) \in Y''$, segue o resultado.

Introduziremos agora uma relação de equivalência entre fibrações. Sejam $p: X \rightarrow B$ e $p': X' \rightarrow B$ fibrações com o mesmo espaço base B . Dizemos que p e p' têm o mesmo tipo de homotopia de fibra, se e somente se, existem aplicações $\lambda: X \rightarrow X'$, $\mu: X' \rightarrow X$ tais que $p' \circ \lambda = p$, $p \circ \mu = p'$, e homotopias $\Lambda: I \times X \rightarrow X$, $\Lambda': I \times X' \rightarrow X'$ entre $\mu \circ \lambda$ e a aplicação identidade de X por um lado, e entre $\lambda \circ \mu$ e a aplicação identidade de X' por outro lado, tais que as homotopias $p \circ \Lambda: I \times X \rightarrow B$ e $p' \circ \Lambda': I \times X' \rightarrow B$ são estacionárias.

O par de aplicações (λ, μ) se diz constituir uma equivalência de homotopia de fibra cujas componentes são λ e μ . Muitas vezes diremos que λ é uma equivalência de homotopia de fibra quando entendemos que λ é uma componente de tal uma equivalência.

Reconhecemos a projeção $F \times B \rightarrow B$ de um espaço produto em um fator como uma fibração trivial; e uma fibração $p: X \rightarrow B$ é chamada trivial homotopicamente

fibrada se, e somente se, tem o mesmo tipo de homotopia de fibra como tal um produto.

Sejam $\lambda: X \rightarrow X'$, $\mu: X' \rightarrow X$ componentes de uma equivalência de homotopia de fibra entre $p: X \rightarrow B$ e $p': X' \rightarrow B$. Seja B_0 um subespaço de B e sejam $X_0 = p^{-1}(B_0)$, $X'_0 = (p')^{-1}(B_0)$. Então:

(i) $\lambda(X_0) \subset X'_0$ pois para todo $x_0 \in X_0$ temos que
 $p' \circ \lambda(x_0) = p(x_0) \in B_0$,

(ii) $\mu(X'_0) \subset X_0$ pois para todo $x'_0 \in X'_0$ temos que
 $p \circ \mu(x'_0) = p'(x'_0) \in B_0$,

e é evidente que

(1.14) As aplicações $\lambda_0 = \lambda|_{X_0}: X_0 \rightarrow X'_0$ e $\mu_0 = \mu|_{X'_0}: X'_0 \rightarrow X_0$ são as componentes de uma equivalência de homotopia de fibra entre as fibrações $p|_{X_0}: X_0 \rightarrow B_0$ e $p'|_{X'_0}: X'_0 \rightarrow B_0$. Em particular, os pares (X, X_0) e (X', X'_0) têm o mesmo tipo de homotopia.

Proposição (1.15)

Seja $p: X \rightarrow I \times B$ uma fibração, e sejam $p_t: X_t \rightarrow B$ as fibrações induzidas por $i_t: B \rightarrow I \times B$ ($t = 0, 1$). Então p_0 e p_1 têm o mesmo tipo de homoto-

pia de fibra.

Demonstração: Temos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 X_t & \xrightarrow{f_t} & X \\
 p_t \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{i_t} & I \times B
 \end{array} \quad (t=0,1)$$

onde $X_t = \{(b,x) \in B \times X \mid i_t(b) = p(x)\}$ e f_t, p_t são as restrições a X_t das projeções de $B \times X$ em X e B respectivamente.

Desde que $p: X \rightarrow I \times B$ é uma fibração, o problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{f_0} & X \\
 i_0 \downarrow & \nearrow H_0 & \downarrow p \\
 I \times X_0 & \xrightarrow{l \times p_0} & I \times B
 \end{array}$$

tem uma solução $H_0: I \times X_0 \rightarrow X$ tal que

$$H_0(0, x_0) = f_0(x_0)$$

$$(s \in I, x_0 \in X_0).$$

$$p \circ H_0(s, x_0) = (l \times p_0)(s, x_0) = (s, p_0(x_0)),$$

Semelhantemente, o problema de levanta-

mento de homotopia

$$\begin{array}{ccc}
 X_1 & \xrightarrow{f_1} & X \\
 i_1 \downarrow & \nearrow H_1 & \downarrow p \\
 I \times X_1 & \xrightarrow{l \times p_1} & I \times B
 \end{array}$$

tem uma solução $H_1: I \times X_1 \rightarrow X$ tal que

$$H_1(1, x_1) = f_1(x_1)$$

$$p \circ H_1(s, x_1) = (l \times p_1)(s, x_1) = (s, p_1(x_1)), \quad (s \in I, x_1 \in X_1).$$

Defina $\lambda: X_0 \rightarrow X_1$, $\mu: X_1 \rightarrow X_0$ por

$$f_1 \circ \lambda(x_0) = H_0(1, x_0),$$

$$f_0 \circ \mu(x_1) = H_1(0, x_1).$$

Então

$$\begin{aligned}
 i_{10} p_{10} \lambda(x_0) &= p \circ f_{10} \lambda(x_0) = p \circ H_0(1, x_0) = (1, p_0(x_0)) = \\
 &= i_{10} p_0(x_0),
 \end{aligned}$$

e portanto $p_{10} \lambda = p_0$.

Semelhantemente, $p_0 \circ \mu = p_1$ desde que temos $i_{00} p_{00} \mu(x_1) = p \circ f_{00} \mu(x_1) = p \circ H_1(0, x_1) = (0, p_1(x_1)) = i_{00} p_1(x_1)$.

Definamos aplicações

$$g: I \times I \times X_0 \cup I \times \dot{I} \times X_0 \rightarrow X,$$

$$K: I \times I \times X_0 \rightarrow I \times B \text{ por}$$

$$g(s, t, x_0) = \begin{cases} H_0(s, x_0) & (t=0), \\ f_1 \circ \lambda(x_0) & (s=1), \\ H_1(s, \lambda(x_0)) & (t=1); \end{cases}$$

$$K(s, t, x_0) = (s, p_0(x_0)).$$

Verifiquemos que g é bem definida e que K é uma extensão de pog .

Com efeito, temos

$$g(1, 0, x_0) = \begin{cases} H_0(1, x_0) \\ || \\ f_1 \circ \lambda(x_0) \end{cases},$$

$$g(1, 1, x_0) = \begin{cases} f_1 \circ \lambda(x_0) \\ || \\ H_1(1, \lambda(x_0)) \end{cases}$$

e portanto g é bem definida. Por outro lado, como
 $pog(1, t, x_0) = pof_1 \circ \lambda(x_0) = poH_0(1, x_0) = (1, p_0(x_0)) =$
 $= K(1, t, x_0),$

$$\text{pog}(s, 0, x_0) = \text{poH}_0(s, x_0) = (s, p_0(x_0)) = K(s, 0, x_0) \quad e$$

$$\begin{aligned} \text{pog}(s, 1, x_0) &= \text{poH}_1(s, \lambda(x_0)) = (s, p_1 \circ \lambda(x_0)) = (s, p_0(x_0)) = \\ &= K(s, 1, x_0) \end{aligned}$$

segue que K é uma extensão de pog .

Consideremos o problema de levantamento de extensão

$$\begin{array}{ccc} 1 \times I \times X_0 \cup I \times \dot{I} \times X_0 & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\ I \times I \times X_0 & \xrightarrow{K} & I \times B \end{array}$$

Desde que $p: X \rightarrow I \times B$ é uma fibração e $(I \times I \times X_0, 1 \times I \times X_0 \cup I \times \dot{I} \times X_0)$ é um par DR, segue pelo lema (1.8), que existe

$$G: I \times I \times X_0 \longrightarrow X \quad \text{tal que} \quad \text{po}G = K$$

Então

$\text{po}G(0, t, x_0) = K(0, t, x_0) = (0, p_0(x_0)) = i_0 \circ p_0(x_0)$, e assim $G|_{0 \times I \times X_0}$ define uma aplicação $G_0: I \times X_0 \rightarrow X_0$ por

$$G_0(t, x_0) = (p_0(x_0), G(0, t, x_0)) \quad e$$

$$p_0 \circ G_0(t, x_0) = p_0(x_0) = p_0 \circ G_0(0, x_0) \quad (\forall t \in I, \forall x_0 \in X_0).$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} G_0(0, x_0) &= (p_0(x_0), G(0, 0, x_0)) = \\ &= (p_0(x_0), g(0, 0, x_0)) = \\ &= (p_0(x_0), H_0(0, x_0)) = (p_0(x_0), f_0(x_0)) = x_0, \\ G_0(1, x_0) &= (p_0(x_0), G(0, 1, x_0)) = \\ &= (p_0(x_0), g(0, 1, x_0)) = (p_0(x_0), H_1(0, \lambda(x_0))) = \\ &= (p_0(x_0), f_0 \circ \mu(\lambda(x_0))) = \mu \circ \lambda(x_0) \end{aligned}$$

$$\text{pois } p_0 \circ \mu \circ \lambda(x_0) = p_1 \circ \lambda(x_0) = p_0(x_0).$$

Segue-se que G_0 é uma homotopia entre $\mu \circ \lambda$ e a aplicação identidade de X_0 .

Falta-nos ainda verificar que $\lambda \circ \mu$ é homotópica a aplicação identidade de X_1 .

Para isto definamos aplicações

$$h: I \times I \times X_1 \cup I \times \dot{I} \times X_1 \rightarrow X, \quad L: I \times I \times X_1 \rightarrow I \times B$$

por

$$h(s, t, x_1) = \begin{cases} H_1(1-s, x_1) & (t=0), \\ f_0 \circ \mu(x_1) & (s=1), \\ H_0(1-s, \mu(x_1)) & (t=1); \end{cases}$$

$$L(s, t, x_1) = (1-s, p_1(x_1)). \quad \dots$$

Pelo fato de que

$$h(1,0,x_1) = \begin{cases} f_0 \circ \mu(x_1) \\ || \\ H_1(0,x_1) \end{cases} \quad e$$

$$h(1,1,x_1) = \begin{cases} f_0 \circ \mu(x_1) \\ || \\ H_0(0,\mu(x_1)) \end{cases} \quad \text{temos que}$$

h é bem definida. Por outro lado, desde que

$$\begin{aligned} \text{poh}(1,t,x_1) &= \text{po}f_0 \circ \mu(x_1) = \text{po}H_1(0,x_1) = (0,p_1(x_1)) = \\ &= L(1,t,x_1), \end{aligned}$$

$$\text{poh}(s,0,x_1) = \text{po}H_1(1-s,x_1) = (1-s,p_1(x_1)) = L(s,0,x_1) \quad e$$

$$\text{poh}(s,1,x_1) = \text{po}H_0(1-s,\mu(x_1)) = (1-s,p_0(\mu(x_1))) =$$

$$= (1-s,p_1(x_1)) = L(s,1,x_1) \quad \text{segue que } L \text{ é uma extensão}$$

de poh .

Desde que $p: X \rightarrow I \times B$ é uma fibração e $(I \times I \times X_1, 1 \times I \times X_1 \cup I \times \dot{I} \times X_1)$ é um par DR, segue-se pelo lema (1.8) que o problema de levantamento de extensão

$$\begin{array}{ccc}
 I \times I \times X_1 \cup I \times \dot{I} \times X_1 & \xrightarrow{h} & X \\
 \downarrow i & \nearrow & \downarrow p \\
 I \times I \times X_1 & \xrightarrow{L} & I \times B
 \end{array}$$

tem

uma solução $H: I \times I \times X_1 \rightarrow X$ e portanto $p \circ H = L$

Então $p \circ H(0, t, x_1) = L(0, t, x_1) = (1, p_1(x_1)) =$
 $= i_1 \circ p_1(x_1)$, e assim $H|_{0 \times I \times X_1}$ define uma aplicação
 $H_1: I \times X_1 \rightarrow X_1$ por

$$H_1(t, x_1) = (p_1(x_1), H(0, t, x_1)) \quad e$$

$$p_1 \circ H_1(t, x_1) = p_1(x_1) = p_1 \circ H_1(0, x_1) \quad (\forall t \in I, \forall x_1 \in X_1)$$

Mais ainda,

$$H_1(0, x_1) = (p_1(x_1), H(0, 0, x_1)) = (p_1(x_1), h(0, 0, x_1)) =$$

$$= (p_1(x_1), H_1(1, x_1)) = (p_1(x_1), f_1(x_1)) = x_1,$$

$$H_1(1, x_1) = (p_1(x_1), H(0, 1, x_1)) = (p_1(x_1), h(0, 1, x_1)) =$$

$$= (p_1(x_1), H_0(1, \mu(x_1))) = (p_1(x_1), f_1 \circ \lambda(\mu(x_1))) =$$

$$= \lambda \circ \mu(x_1) \quad \text{pois} \quad p_1 \circ \lambda \circ \mu(x_1) = p_0 \circ \mu(x_1) = p_1(x_1).$$

Séque-se portanto que H_1 é uma homotopia
entre $\lambda \circ \mu$ e a aplicação identidade de X_1 .

Logo p_0 e p_1 têm o mesmo tipo de homotopia

de fibra.

Seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração, e sejam $f_0, f_1: B' \rightarrow B$ aplicações homotópicas. Sejam $p'_t: X'_t \rightarrow B'$ as fibrações induzidas por f_t ($t=0,1$). Então

Teorema (1.16) As fibrações $p'_0: X'_0 \rightarrow B'$ e $p'_1: X'_1 \rightarrow B'$ têm o mesmo tipo de homotopia de fibra.

Demonstração: Seja $f: I \times B' \rightarrow B$ uma homotopia de f_0 a f_1 , tal que $f \circ i'_t = f_t$ ($t=0,1$), onde $i'_t: B' \rightarrow I \times B'$ é definida por $i'_0(b') = (0, b')$ e $i'_1(b') = (1, b')$ para todo $b' \in B'$. Seja $p': X' \rightarrow I \times B'$ a fibração induzida de p por f e sejam $g'_t: X'_t \rightarrow B'$ as fibrações induzidas de p' por i'_t ($t=0,1$). Pela propriedade de transitividade (1.13) as fibrações induzidas de p por $f \circ i'_t = f_t$ são g'_t (a menos de homeomorfismo natural).

Logo $g'_t = p'_t$ ($t=0,1$) e pela **Proposição (1.15)** segue o resultado.

Observação:

A equivalência de homotopia de fibra $\lambda: X_0 \rightarrow X_1$ tem um grau maior de arbitrariedade. De fato, uma inspecção da prova da proposição (1.15) revela que qualquer λ , tendo a propriedade de que existe uma homotopia $H_0: I \times X_0 \rightarrow X$ de f_0 a $f_1 \circ \lambda$ tal que $p \circ H_0 = 1 \times p_0: I \times X_0 \rightarrow I \times B$, é uma equivalência de homotopia de fibra.

Corolário (1.17)

Seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração, e suponha que B é contraível. Então p é trivial homotopicamente fibrada. Assim, para qualquer subespaço B_0 de B , os pares $(X, p^{-1}(B_0))$ e $(F \times B, F \times B_0)$ têm o mesmo tipo de homotopia.

Demonstração Desde que B é contraível temos que a aplicação identidade de B é homotópica a uma aplicação constante $\text{cte}: B \rightarrow B$ dada por $\text{cte}(b) = *$ para cada $b \in B$.

Porém, a fibração induzida de p por cte é a projeção $B \times F \rightarrow B$, pois temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Y' & \xrightarrow{(cte)'} & X \\
 \rho' \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{cte} & B
 \end{array}
 \quad \text{onde } \rho' \text{ e } (cte)'$$

são as projeções em B e X respectivamente e

$$Y' = \{(b, x) \in B \times X \mid * = cte(b) = p(x)\} = B \times F$$

onde $F = p^{-1}(\{*\})$ é a fibra sobre $*$ $\in B$.

Por outro lado, a fibração induzida de p por $id: B \rightarrow B$ dada por $id(b) = b$ para todo $b \in B$ é a própria p (a menos de homeomorfismo).

Com efeito, temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{(id)'} & X \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{id} & B
 \end{array}$$

onde p' e $(id)'$ são as projeções em B e X respectivamente e $X' = \{(b, x) \in B \times X \mid p(x) = id(b) = b\}$.

Porém X' é homeomorfo a X pois a aplicação $\phi: X' \rightarrow X$ definida por $\phi(b, x) = x$ é um homeomorfismo desde que é contínua, bijetora e sua inversa contínua é dada por $\psi: X \rightarrow X'$ onde $\psi(x) = (p(x), x)$.

Para vermos que ϕ é bijetora, primeiro suponhamos que (b_1, x_1) e $(b_2, x_2) \in X'$ são tais que $\phi(b_1, x_1) = \phi(b_2, x_2)$. Logo temos $x_1 = x_2$ e daí segue que $b_1 = p(x_1) = p(x_2) = b_2$. Portanto $(b_1, x_1) = (b_2, x_2)$ e ϕ é injetora. Por outro lado, dado $x \in X$, tome $(p(x), x) \in X'$. Então temos que $\phi(p(x), x) = x$; logo ϕ é sobrejetora.

Ainda; dado $(b, x) \in X'$ qualquer temos $\psi \circ \phi(b, x) = \psi(x) = (p(x), x) = (b, x)$ e também dado $x \in X$ qualquer $\phi \circ \psi(x) = \phi(p(x), x) = x$ e portanto ψ é a inversa de ϕ .

Observe agora que $p' = p \circ \phi$, pois para todo $(b, x) \in X'$ temos $p \circ \phi(b, x) = p(x) = b = p'(b, x)$ o que mostra que p' é p (a menos de homeomorfismo).

De acordo com o teorema (1.16) p e a projeção $B \times F \rightarrow B$ têm o mesmo tipo de homotopia de fibra. Logo p é trivial homotopicamente fibrada.

Uma equivalência de homotopia de fibra $\lambda: F \times B \rightarrow X$ é chamada uma trivialização da fibração $p: X \rightarrow B$.

Vejam como construir uma trivialização $\lambda: F \times B \rightarrow X$ quando B é um espaço contraível:

Seja $h: I \times B \rightarrow B$ uma homotopia da aplicação constante $\text{cte}: B \rightarrow B$ com a aplicação identidade de B e seja $H: I \times F \times B \rightarrow B$ definida por $H(t, f, b) = (h \circ (1 \times p_2))(t, f, b)$ onde $p_2: F \times B \rightarrow B$ é a projeção. Como

$$H(0, f, b) = (h \circ (1 \times p_2))(0, f, b) = h(0, b) = * = \text{cte}(f, b) \quad e$$

$$H(1, f, b) = (h \circ (1 \times p_2))(1, f, b) = h(1, b) = \text{id}(b) = b = p_2(f, b)$$

segue-se que H é uma homotopia da aplicação constante $\text{cte}: F \times B \rightarrow B$ com a aplicação p_2 .

Seja $i: F \hookrightarrow X$, e seja $p_1: F \times B \rightarrow F$ a projeção.

Então, como $p: X \rightarrow B$ é uma fibração, o problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{i \circ p_1} & X \\ \downarrow i_0 & \nearrow H & \downarrow p \\ I \times F \times B & \xrightarrow{\quad} & B \end{array}$$

tem uma solução $G: I \times F \times B \rightarrow X$ que é uma homotopia de $i \circ p_1$ com uma aplicação $\lambda: F \times B \rightarrow X$ definida por $\lambda(f, b) = G(1, f, b)$ para todo $(f, b) \in F \times B$; tal que $p \circ \lambda = p_2$ pois

$$p \circ \lambda(f, b) = p \circ G(1, f, b) = H(1, f, b) = p_2(f, b) \quad (\forall (f, b) \in F \times B).$$

Tal λ é a trivialização desejada.

Teorema (1.18): A aplicação λ é uma trivialização de p .

Demonstração:

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X_t & \xrightarrow{f_t} & \bar{X} & \xrightarrow{\bar{h}} & X \\ p_t \downarrow & & \downarrow \bar{p} & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{i_t} & I \times B & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

onde $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow I \times B$ é a fibração induzida por h e $p_t: X_t \rightarrow B$ é a fibração induzida por i_t .

Então

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \{(t, b, x) \in I \times B \times X \mid h(t, b) = p(x)\}, \quad \bar{p}(t, b, x) = (t, b) \quad e \\ \bar{h}(t, b, x) &= x; \\ X_t &= \{(b, \bar{x}) \in B \times \bar{X} \mid \bar{p}(\bar{x}) = i_t(b)\}, \quad p_t(b, \bar{x}) = b \quad e \\ f_t(b, \bar{x}) &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Como (a menos de um homeomorfismo) p_t é a fibração induzida de p por hoi_t temos

$$X_t = \{(b, y) \in B \times X \mid p(y) = hoi_t(b)\}.$$

Assim

$$X_0 = \{(b, y) \in B \times X \mid p(y) = hoi_0(b)\} \quad e$$

como $hoi_0(b) = h(0, b) = * \in B$, podemos identificar X_0

com $B \times F$ (onde $F = p^{-1}(*)$) e por outro lado, como

$$X_1 = \{(b, y) \in B \times X \mid p(y) = hoi_1(b)\} \quad \text{e} \quad hoi_1(b) = h(1, b) = b,$$

podemos identificar X_1 com X .

Portanto as aplicações no diagrama são dadas por $p_0(b, y) = b$, $p_1 = p$, $f_0(b, y) = (0, b, y)$, $f_1(x) = (1, p(x), x)$.

Defina $H_0: I \times X_0 \rightarrow \bar{X}$ por $H_0(t, b, y) = (t, b, G(t, y, b))$ (H_0 é bem definida pois $p \circ G(t, y, b) = H(t, y, b) = h_0(1 \times p_2)(t, y, b) = h(t, b)$).

$$\begin{aligned} \text{Então } H_0(0, b, y) &= (0, b, G(0, y, b)) = \\ &= (0, b, i \circ p_1(y, b)) = (0, b, i(y)) = (0, b, y) = f_0(b, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0(1, b, y) &= (1, b, G(1, y, b)) = (1, b, \lambda(y, b)) = \\ &= f_1 \circ \lambda(y, b) \quad \text{pois} \quad f_1 \circ \lambda(y, b) = f_1(\lambda(y, b)) = \\ &= (1, p \circ \lambda(y, b), \lambda(y, b)) = (1, p_2(y, b), \lambda(y, b)) = (1, b, \lambda(y, b)). \end{aligned}$$

Pela observação anterior ao Corolário (1.17), λ é uma equivalência de homotopia de fibra.

Nos próximos dois parágrafos, assumiremos que a fibra F é conexa por caminhos. □

§2. FIBRAÇÕES SOBRE UMA SUSPENSÃO E SEQUÊNCIAS DE WANG.

Vamos iniciar esta secção com algumas ob-

servações úteis para o entendimento da demonstração do Teorema 2.1 logo a seguir.

o1) Seja W um espaço com ponto base não degenerado $*$.

Então o ponto base de T_W , $\bar{l} \wedge w = \bar{t} \wedge * = \bar{l} \wedge *$, é um retrato por deformação forte de T_W (em outras palavras, T_W é contraível no sentido forte).

Com efeito, defina $F: I \times T_W \rightarrow T_W$ por

$$F(s, \bar{t} \wedge w) = \overline{t+s(1-t)} \wedge w$$

(note que $t+s(1-t)$ com $s \in I$ é a equação do segmento $[t, 1]$, que obviamente está contido em $[1/2, 1]$ pois $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$).

F é bem definida, pois para qualquer $t_0 \in [1/2, 1]$ tal que $t_0 \in \bar{t}$ (com $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$) temos que $t_0 = t$.

Como

$$F(0, \bar{t} \wedge w) = \bar{t} \wedge w \quad (\bar{t} \wedge w \in T_W),$$

$$F(s, \bar{l} \wedge w) = \bar{l} \wedge w \quad (s \in I),$$

$$F(1, \bar{t} \wedge w) = \bar{l} \wedge w; \text{ segue o resultado.}$$

o2) A inclusão $i: F \hookrightarrow X_-$ é uma equivalência de homotopia.

Com efeito, de acordo com a observação o1 temos que $F: I \times T_W \rightarrow T_W$ definida por

$F(s, \bar{t} \wedge w) = \overline{t+s(1-t)} \wedge w$ é uma homotopia entre a aplicação identidade de T_W e a aplicação constante $c: T_W \rightarrow T_W$ dada por $c(\bar{t} \wedge w) = \bar{1} \wedge w$ que tem a propriedade de que $F(s, \bar{1} \wedge w) = \bar{1} \wedge w$.

Sejam $G = F \circ (1 \times p): I \times X_- \rightarrow T_W$ (onde $1 \times p: I \times X_- \rightarrow I \times T_W$ é dada por $(1 \times p)(t, x_-) = (t, p(x_-))$ ($\forall (t, x_-) \in I \times X_-$)) e $1_{X_-}: X_- \rightarrow X_-$ é a aplicação identidade de X_- .

Portanto, G e 1_{X_-} formam os dados para um problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} X_- & \xrightarrow{1_{X_-}} & X_- \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ I \times X_- & \xrightarrow{G} & T_W \end{array}$$

Desde que p é uma fibração com fibra $F = p^{-1}(\{\bar{1} \wedge w\})$ existe uma homotopia $H: I \times X_- \rightarrow X_-$ tal que $p \circ H = G$.

Notemos que

$$\begin{aligned} H(0, x_-) &= x_- ; \\ p \circ H(s, f) &= G(s, f) = (F \circ (1 \times p))(s, f) = \\ &= F(s, p(f)) = F(s, \bar{1} \wedge w) = \bar{1} \wedge w \end{aligned}$$

$(\forall (s,f) \in I \times F)$ e portanto $H(s,f) \in F$;

$$\begin{aligned} H(1 \times X_-) &\subset F \text{ pois } p \circ H(1, x_-) = G(1, x_-) = \\ &= (F \circ (1 \times p))(1, x_-) = F(1, p(x_-)) = \bar{1} \wedge w. \end{aligned}$$

Definamos $r: X_- \rightarrow F$ por

$$r(x_-) = H(1, x_-)$$

Desde que $H: I \times X_- \rightarrow X_-$ é uma homotopia entre 1_{X_-} e ior e $H|_{I \times F}: I \times F \rightarrow F$ é uma homotopia entre 1_F e roi temos $1_{X_-} \simeq \text{ior}$ e $1_F \simeq \text{roi}$ e portanto i é uma equivalência de homotopia.

o3) Desde que $i: F \hookrightarrow X_-$ é uma equivalência de homotopia, $i_1: H^q(X, X_-) \rightarrow H^q(X, F)$ é um isomorfismo (onde $i_1 = i^*$ com $i: (X, F) \hookrightarrow (X, X_-)$).

Inicialmente notemos que, desde que $i: F \hookrightarrow X_-$ é uma equivalência de homotopia, existe $r: X_- \rightarrow F$ tal que $\text{ior} \simeq 1_{X_-}$ e $\text{roi} \simeq 1_F$. Logo $r^* \circ i^* = \text{id}$ e $i^* \circ r^* = \text{id}$ o que implica ser $i^*: H^q(X_-) \rightarrow H^q(F)$ um isomorfismo $\forall q$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \rightarrow & H^{q-1}(X) & \rightarrow & H^{q-1}(X_-) & \rightarrow & H^q(X, X_-) & \rightarrow & H^q(X) & \rightarrow & H^q(X_-) & \rightarrow & \dots \\ & & \text{id} \downarrow & & i^* \downarrow & & i_1 \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow i^* & & \\ \dots & \rightarrow & H^{q-1}(X) & \rightarrow & H^{q-1}(F) & \rightarrow & H^q(X, F) & \rightarrow & H^q(X) & \rightarrow & H^q(F) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Como i^* e id são isomorfismos, segue pelo lema dos cinco que i_1 é um isomorfismo.

o4) Desde que TW é contrátil, a projeção $p_1: TW \times F \rightarrow TW$ é homotópica a aplicação constante e por consequência a projeção $\text{id}_{p_2}: TW \times F \rightarrow F \xrightarrow{i} X_+$ é homotópica em X_+ a uma aplicação $h: TW \times F \rightarrow X_+$ tal que $p_0 h = p_1$ (a menos de homeomorfismo).

De fato, TW é contrátil via a homotopia

$$H: I \times TW \rightarrow TW \text{ definida por } H(s, t \wedge w) = st \wedge w,$$

pois $H(0, t \wedge w) = 0 \wedge w$ ($t \wedge w \in TW$) onde $0 \wedge w = 0 \wedge * = t \wedge *$ é o ponto base de TW e

$$H(1, t \wedge w) = t \wedge w.$$

(Note que $H(s, 0 \wedge w) = 0 \wedge w$).

Seja $\tilde{H} = H_0(1 \times p_1): I \times TW \times F \rightarrow TW$ (onde 1 é a aplicação identidade de I).

Notemos que

$$\tilde{H}(0, (t \wedge w, f)) = (H_0(1 \times p_1))(0, (t \wedge w, f)) = H(0, t \wedge w) = 0 \wedge w$$

($(t \wedge w, f) \in TW \times F$) e

$$\begin{aligned} \tilde{H}(1, (t \wedge w, f)) &= (H_0(1 \times p_1))(1, (t \wedge w, f)) = \\ &= H(1, t \wedge w) = t \wedge w = p_1(t \wedge w, f). \end{aligned}$$

Logo $\tilde{H}$ é uma homotopia entre p_1 e a aplicação constante.

Consideremos o problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc}
 TW \times F & \xrightarrow{iop_2} & X_+ \\
 i_0 \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\
 I \times TW \times F & \xrightarrow{\alpha \circ \tilde{H}} & T_+W \underset{\alpha}{\approx} TW
 \end{array}$$

onde $\alpha: TW \rightarrow T_+W$ é o homeomorfismo dado por

$$\alpha(t \wedge w) = \frac{\bar{t}}{2} \wedge w.$$

Desde que p é uma fibração com fibra $F = p^{-1}(\{\bar{0} \wedge * = \frac{\bar{t}}{2} \wedge * = \bar{0} \wedge w\})$ existe uma homotopia $G: I \times TW \times F \rightarrow X_+$ tal que $poG = \alpha \circ \tilde{H}$.

Definamos $h: TW \times F \rightarrow X_+$ por

$$h(t \wedge w, f) = G(1, t \wedge w, f).$$

Assim G é uma homotopia entre

$iop_2: TW \times F \rightarrow X_+$ e h (pois $G(0, t \wedge w, f) = iop_2(t \wedge w, f)$) e h é tal que $poh = p_1$ (a menos de homeomorfismo), pois temos $poh(t \wedge w, f) = poG(1, t \wedge w, f) = \alpha \circ \tilde{H}(1, t \wedge w, f) = \alpha \circ p_1(t \wedge w, f) \quad (\forall (t \wedge w, f) \in TW \times F)$.

Desde que $h(W \times F) \subset X_0 = p^{-1}(W)$ pois $poh(1 \wedge w, f) = p_1(1 \wedge w, f) = 1 \wedge w \in 1 \wedge W \approx W$, $h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$ é uma aplicação de pares.

o5) O homeomorfismo de TW com T_+W ,

$TW \xrightarrow{\phi} T_+W \xleftarrow{i} SW = B$ onde $\phi(t \wedge w) = \frac{\bar{t}}{2} \wedge w$ é homotópico em $SW = B$ à proclusão $\bar{w}' = \bar{w} \wedge 1: (TW, W) \rightarrow (SW, *)$ definida por $\bar{w}'(t \wedge w) = (\bar{w} \wedge 1)(t \wedge w) = \bar{w}(t) \wedge 1(w) = \bar{t} \wedge w$ (note que aqui $*$ = $\bar{1} \wedge w$ é o ponto base de T_+W).

Com efeito, $H: I \times TW \rightarrow SW$ definida por

$$H(s, t \wedge w) = \frac{\bar{t}}{2}(s+1) \wedge w$$

é a homotopia desejada entre ϕ e $\bar{w}'$, pois temos

$$H(0, t \wedge w) = \frac{\bar{t}}{2} \wedge w = \phi(t \wedge w)$$

$$H(1, t \wedge w) = \bar{t} \wedge w = \bar{w}'(t \wedge w).$$

Notemos que $H(I \times 1 \wedge W) \subset T_-W$

De fato, temos $H(s, 1 \wedge w) = \frac{(s+1)}{2} \wedge w$ e

$$\frac{1}{2} \leq \frac{s+1}{2} \leq 1.$$

o6) A equivalência de homotopia de fibra

$h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$ é homotópica em (X, X_-) a uma aplicação $\phi: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, F)$ tal que $p_0 \phi = \bar{w}' \circ p_1$.

De fato, definamos $\theta: I \times SW \rightarrow SW$ por

$$\theta(s, \bar{t} \wedge w) = \overline{\phi(s, \bar{t})} \wedge w \quad \text{onde}$$

$$\phi(s, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \\ \frac{2t}{2-s} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \end{cases}$$

Temos $\theta(0, \bar{t} \wedge w) = \overline{\phi(0, t)} \wedge w = \bar{t} \wedge w$ e

$$\begin{aligned} \theta(1, \bar{t} \wedge w) &= \overline{\phi(1, t)} \wedge w = \\ &= \begin{cases} \bar{1} \wedge w & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \overline{2t} \wedge w & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $\theta(I \times T_W) \subset T_W$ pois

$$\frac{1}{2} \leq \phi(s, t) \leq 1 \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

(Com efeito, se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2}$ então
 $\phi(s, t) = \frac{2t}{2-s}$. Logo $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2-s} \leq \frac{2t}{2-s} \leq 1$ e se

$$1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \quad \phi(s, t) = 1)$$

Portanto, $\theta': (I \times SW, I \times T_W) \rightarrow (SW, T_W)$
 dada por $\theta'(s, \bar{t} \wedge w) = \theta(1-s, \bar{t} \wedge w)$ é uma homotopia de
 pares terminando com a identidade $1: (SW, T_W) \rightarrow (SW, T_W)$.

Seja $\tilde{\theta} = \theta' \circ (1 \times \bar{w}' \circ p_1): (I \times TW \times F, I \times W \times F) \rightarrow$
 $(SW, *)$ onde 1 é a aplicação identidade de I e
 $\bar{w}' \circ p_1: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (SW, *)$ é dada por $\bar{w}' \circ p_1(t \wedge w, f) =$
 $= \bar{w}'(t \wedge w) = \bar{t} \wedge \bar{w}.$

Temos

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(1, t \wedge w, f) &= (\theta'_0(1 \times \bar{w}'_{op_1}))(1, t \wedge w, f) = \\ &= \theta'(1, \bar{t} \wedge w) = \bar{t} \wedge w = \\ &= \bar{w}'_{op_1}(t \wedge w, f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e \quad \tilde{\theta}(0, t \wedge w, f) &= (\theta'_0(1 \times \bar{w}'_{op_1}))(0, t \wedge w, f) = \\ &= \theta'(0, \bar{t} \wedge w) = \theta(1, \bar{t} \wedge w) = \begin{cases} \bar{t} \wedge w & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ \bar{t} \wedge w & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo $\tilde{\theta}$ é uma homotopia de pares terminando com $\bar{w}'_{op_1}$.

Sejam $i: (X_+, X_0) \hookrightarrow (X, X_-)$ a inclusão e $h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$. Então $i \circ h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, X_-)$ e $j \circ \tilde{\theta}$ (onde $j: (SW, *) \rightarrow (SW, T_-W)$ é a inclusão) são os dados para um problema de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} (TW \times F, W \times F) & \xrightarrow{i \circ h} & (X, X_-) \\ \downarrow i_0 & \nearrow & \downarrow p \\ (I \times TW \times F, I \times W \times F) & \xrightarrow{j \circ \tilde{\theta}} & (SW, T_-W) \end{array}$$

Desde que p é uma fibração com fibra F ,

existe $\bar{G}: (I \times TW \times F, I \times W \times F) \rightarrow (X, X_-)$ tal que $po\bar{G} = jo\tilde{\Theta}$.

Defina $\phi: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, F)$ por

$$\phi(t \wedge w, f) = \bar{G}(1, t \wedge w, f)$$

(note que $\phi(1 \wedge w, f) \in F$ pois $po\phi(1 \wedge w, f) = po\bar{G}(1, 1 \wedge w, f) = jo\tilde{\Theta}(1, 1 \wedge w, f) = j(\bar{1} \wedge w) = \bar{1} \wedge w = *$).

Da forma como ϕ foi construída, temos que $h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$ e $\phi: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, F)$ são homotópicas em (X, X_-) e $po\phi = \bar{w}'op_1$ (pois $po\phi(t \wedge w, f) = po\bar{G}(1, t \wedge w, f) = jo\tilde{\Theta}(1, t \wedge w, f) = j(\bar{w}'op_1(t \wedge w, f)) = \bar{w}'op_1(t \wedge w, f)$).

Seja W um espaço com ponto base não degenerado $*$, $B = SW$ e seja $p: X \rightarrow B$ uma fibração com fibra F . Como usual, se $t \in I$, $\bar{t} = \bar{w}(t)$ é o ponto de $S = S^1$ via a aplicação identificação $\bar{w}$.

Então B é a união $T_+W \cup T_-W$ de duas cópias do cone sobre W ;

$$T_+W = \{\bar{t} \wedge w \mid t \leq \frac{1}{2}\},$$

$$T_-W = \{\bar{t} \wedge w \mid t \geq \frac{1}{2}\},$$

e $T_+W \cap T_-W$ é uma cópia de W .

Sejam $X_+ = p^{-1}(T_+W)$, $X_- = p^{-1}(T_-W)$,
 $X_0 = X_+ \cap X_- = p^{-1}(W)$.

Desde que $(T_+W, \hat{W})$ e (SW, T_+W) são pares NDR também o são os pares (X_+, X_0) e (X, X_+) , por teore-

ma (1.7) do §1 deste capítulo. Desde que T_W é contraível no sentido forte (ver o1), a inclusão $i: F \hookrightarrow X_-$ é uma equivalência de homotopia (ver o2), e então (ver o3) a injeção

$i_1: H^q(X, X_-) \rightarrow H^q(X, F)$ é um isomorfismo (onde $i_1 = i^*$ com $i: (X, F) \hookrightarrow (X, X_-)$ a inclusão).

Desde que $(X; X_+, X_-)$ é uma triáda NDR, segue por teorema do §2, (2.8), do capítulo 1, que $(X; X_+, X_-)$ é própria, e então a injeção $i_2: H^q(X, X_-) \rightarrow H^q(X_+, X_0)$ é um isomorfismo (onde $i_2 = \ell^*$ com $\ell: (X_+, X_0) \hookrightarrow (X, X_-)$ a inclusão).

Como T_+W é homeomorfo com TW via a aplicação $\bar{t} \wedge w \rightarrow (2t) \wedge w$, nós podemos reconhecer X_+ como um espaço fibrado sobre TW .

Desde que TW é contrátil, a projeção $p_1: TW \times F \rightarrow TW$ é homotópica a aplicação constante e por consequência, a projeção $p_2: TW \times F \rightarrow F \xrightarrow{i} X_+$ é homotópica em X_+ a uma aplicação $h: TW \times F \rightarrow X_+$ tal que $p_0h = p_1$ (a menos de homeomorfismo) (ver o4).

Como $h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$ é uma equivalência de homotopia de fibra (conforme observação anterior ao corolário (1.17) do §1 deste capítulo), $h^*: H^q(X_+, X_0) \rightarrow H^q(TW \times F, W \times F)$ é um isomorfismo, por este mesmo corolário.

O homeomorfismo acima de TW com T_+W é homotópico em $B = SW$ à proclusão $\bar{w}' = \bar{w} \wedge 1: (TW, W) \rightarrow (SW, *)$; via esta homotopia, nós podemos assumir que os pontos de W permanecem em T_W (ver o5).

Portanto, $h: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X_+, X_0)$ é homotópica em (X, X_-) a uma aplicação $\phi: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, F)$ tal que $p \circ \phi = \bar{w}' \circ p_1$ (ver o6).

Então, $i_0 \phi = \ell \circ h$ e portanto $\phi^* \circ i_1 = (i_0 \phi)^* = (\ell \circ h)^* = h^* \circ i_2$, e o fato de que i_1, i_2 e h^* são isomorfismos implica que $\phi^*: H^q(X, F) \rightarrow H^q(TW \times F, W \times F)$ é um isomorfismo.

Resumimos esta discussão no

Teorema (2.1) Seja $p: X \rightarrow SW$ uma fibração com fibra F . Então, existe uma aplicação $\phi: (TW \times F, W \times F) \rightarrow (X, F)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (TW \times F, W \times F) & \xrightarrow{\phi} & (X, F) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p \\ (TW, W) & \xrightarrow{\bar{w}'} & (SW, *) \end{array} \quad \text{é}$$

comutativo e tal que, para qualquer grupo de coeficiente G ,

$$\phi^*: H^q(X, F; G) \rightarrow H^q(TW \times F, W \times F; G)$$

são isomorfismos. $\square$

Além disso, $\phi|_{\{*\}} \times F: F \rightarrow F$ é homotópica a identidade.

Com efeito, defina $\Psi: I \times F \rightarrow F$ por

$$\Psi(s, f) = \begin{cases} i_0 G(2s, t^*, f), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{G}(2s-1, t^*, f), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

onde $i: X_+ \hookrightarrow X$ é a inclusão, $G: I \times TW \times F \rightarrow X_+$ é a homotopia de ϕ_4 e $\bar{G}: I \times TW \times F \rightarrow X$ é a homotopia de ϕ_6 .

Desde que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_+ & \xrightarrow{i} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ T_+W & \xrightarrow{i} & SW \end{array} \quad \text{comuta, temos que o}$$

diagrama

$$\begin{array}{ccc} TW \times F & \xrightarrow{i_0(i_0 p_2)} & X \\ i_0 \downarrow & \nearrow i_0 G & \downarrow p \\ I \times TW \times F & \xrightarrow{i_0 \alpha_0 \tilde{H}} & SW \end{array} \quad \text{comuta}$$

pois, $p \circ i_0 G = i_0 p \circ G = i_0 \alpha_0 \tilde{H}$ e

$(i_0 G)_0 = i_0(i_0 p_2)$ e $(i_0 G)_1 = i_0 h$ (ver ϕ_4).

Agora, Ψ é bem definida pois (ver o4 e o6),

$$\begin{aligned}
 \text{poio } G(2s, t \wedge *, f) &= i\alpha\alpha\tilde{H}(2s, t \wedge *, f) \\
 &= i\alpha\alpha(H_0(1 \times p_1))(2s, t \wedge *, f) \\
 &= i\alpha\alpha H(2s, t \wedge *) \\
 &= i\alpha(2st \wedge *) \\
 &= i(\overline{st} \wedge *) = \overline{st} \wedge * \quad (0 \leq s \leq \frac{1}{2}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{po}\bar{G}(2s-1, t \wedge *, f) &= j\alpha\tilde{\Theta}(2s-1, t \wedge *, f) \\
 &= j\alpha(\theta'_0(1 \times \bar{w}'_{op_1}))(2s-1, t \wedge *, f) \\
 &= j\alpha\theta'(2s-1, \bar{w}'_{op_1}(t \wedge *, f)) \\
 &= j\alpha\theta'(2s-1, \bar{t} \wedge *) \\
 &= j\alpha\theta(2-2s, \bar{t} \wedge *) \\
 &= j(\overline{\phi(2-2s, t)} \wedge *) \\
 &= \overline{\phi(2-2s, t)} \wedge * \quad (\frac{1}{2} \leq s \leq 1)
 \end{aligned}$$

$$e \quad \Psi(\frac{1}{2}, f) = i\alpha G(1, t \wedge *, f) = i\alpha h(t \wedge *, f) = \bar{G}(0, t \wedge *, f).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Como } \Psi(0, f) &= i\alpha G(0, t \wedge *, f) = \\
 &= i\alpha(i\alpha p_2)(t \wedge *, f) \\
 &= i\alpha i(f) \\
 &= i(f) \\
 &= f \quad e
 \end{aligned}$$

$$\Psi(1, f) = \bar{G}(1, t \wedge *, f) = \phi(t \wedge *, f) = \phi|(\{*\} \times F)(f)$$

Ψ é a homotopia desejada entre $\phi|(\{*\} \times F): F \rightarrow F$ e a identidade de F .

A aplicação ϕ é chamada uma aplicação estrutural, e $\Psi = \phi|_{W \times F}: W \times F \rightarrow F$ uma aplicação característica, para a fibração p .

Corolário (2.2) Existe sequência exata

$$(2.3) \quad \dots \rightarrow H^{q-1}(X;G) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(F;G) \xrightarrow{\phi^* \circ \delta^*} H^q(TW \times F, W \times F; G) \\ \xrightarrow{j^* \circ (\phi^*)^{-1}} H^q(X;G) \xrightarrow{i^*} H^q(F;G) \rightarrow \dots$$

Com efeito, considere a sequência exata longa de cohomologia do par $(X, F; G)$

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(X;G) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(F;G) \xrightarrow{\delta^*} H^q(X, F; G) \xrightarrow{j^*} \\ H^q(X;G) \xrightarrow{i^*} H^q(F;G) \rightarrow \dots$$

Desde que $H^q(X, F; G) \xrightarrow{\phi^*} H^q(TW \times F, W \times F; G)$ são isomorfismos conforme teorema (2.1), segue o corolário.

□

Desde que $\{*\}$ é um retrato por deformação (forte) de TW , o subespaço $F = \{*\} \times F$ é um retrato por deformação (forte) de $TW \times F$. Pela exatidão da sequência (longa) de cohomologia da tripla $(TW \times F, W \times F, F)$

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(TW \times F, F) \rightarrow H^{q-1}(W \times F, F) \xrightarrow{\delta^*} H^q(TW \times F, W \times F) \rightarrow \\ H^q(TW \times F, F) \rightarrow \dots$$

e, como $H^{q-1}(TW \times F, F) = H^q(TW \times F, F) = 0$ (pois F é um retrato por deformação (forte) de $TW \times F$), segue que

$$\delta^*: H^{q-1}(W \times F, F) \longrightarrow H^q(TW \times F, W \times F) \quad \text{são}$$

isomorfismos.

Vamos considerar W como um espaço com ponto base e F como um espaço livre; então o quociente $\frac{W \times F}{F}$ é apenas a junção reduzida $W \wedge F$; logo $H^{q-1}(W \times F, F) \cong H^{q-1}(W \wedge F)$, por Lema do §2, (2.8), do capítulo 1. Portanto, a sequência (2.3) torna-se

$$(2.4) \quad \dots \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(F; G) \xrightarrow{\sim \Psi^*} H^q(W \wedge F; G) \rightarrow \\ \rightarrow H^{q+1}(X; G) \rightarrow H^{q+1}(F; G) \rightarrow \dots$$

Vamos tornar $\tilde{\Psi}^*$ explícita. A sequência de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^q(W \times F, F) \rightarrow H^q(W \times F) \rightarrow H^q(F) \rightarrow \dots$$

do par $(W \times F, F)$ com coeficientes em G se quebra (pois F é um retrato de $W \times F$) em uma família de sequências curtas exata (que cinde)

$$0 \rightarrow H^q(W \wedge F) \xrightarrow{j^*} H^q(W \times F) \xleftarrow[\Psi_*]{i^*} H^q(F) \rightarrow 0$$

Seja $p_2: W \times F \rightarrow F$ a projeção no segundo fator; logo $p_2 \circ i = 1 \simeq \phi|_{\{*\}} \times F = \psi \circ i$, e portanto $i^* \circ \psi^* = i^* \circ p_2^*: H^q(F) \rightarrow H^q(F)$.

Por conseguinte, i^* anula a imagem de $\psi^* - p_2^*$ e portanto induz um homomorfismo

$$\tilde{\psi}^*: H^q(F; G) \rightarrow H^q(W \wedge F; G) \text{ tal que}$$

$$(2.5) \quad j^* \circ \tilde{\psi}^* = \psi^* - p_2^*: H^q(F; G) \rightarrow H^q(W \times F; G)$$

Considere o diagrama

$$(2.6) \quad \begin{array}{ccc} H^{q+1}(X, F) & \xrightarrow{\phi^*} & H^{q+1}(TW \times F, W \times F) \\ \uparrow \delta^* & & \uparrow \delta^* \\ H^q(F) & \xrightarrow{\psi^* - p_2^*} & H^q(W \times F) \\ \downarrow \tilde{\psi}^* & \nearrow j^* & \\ H^q(W \wedge F) & & \end{array}$$

Desde que ψ é a restrição de ϕ a uma aplicação de $W \times F$ em F , temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, F) & \xrightarrow{\phi^*} & H^q(TW \times F, W \times F) \\ \uparrow \delta^* & & \uparrow \delta^* \\ H^{q-1}(F) & \xrightarrow{\psi^*} & H^{q-1}(W \times F) \end{array}$$

é comutativo; logo $\phi^* \circ \delta^* = \delta^* \circ \psi^*$.

Por outro lado $\delta^* \circ p_2^* = 0$ pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(F, F) & \xrightarrow{p_2^*} & H^{q+1}(TW \times F, W \times F) \\ \uparrow \delta^* & & \uparrow \delta^* \\ H^q(F) & \xrightarrow{p_2^*} & H^q(W \times F) \end{array}$$

é comutativo, e então $\delta^* \circ (\Psi^* - p_2^*) = \delta^* \circ \Psi^* - \delta^* \circ p_2^* = \phi^* \circ \delta^*$.

Logo, o quadrado no diagrama (2.6) é comutativo. Por (2.5), segue que o diagrama (2.6) é comutativo.

A sequência (2.3) (ou (2.4)) é chamada a sequência de Wang para a fibração p .

Corolário (2.7) Se $p: X \rightarrow S^n$ é uma fibração com fibra F ($n > 1$), existe sequência exata

$$(2.8) \quad \dots \rightarrow H^{q-1}(X; G) \rightarrow H^{q-1}(F; G) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(F; G) \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow H^q(F; G) \rightarrow \dots$$

Esta é obtida de (2.3) após observar que pelo teorema de Künneth, o produto cross induz isomorfismo

$$H^n(TS^{n-1}, S^{n-1}) \otimes H^{q-n}(F; G) \cong H^q(TS^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F; G)$$

Assim, se e é o gerador do grupo cíclico infinito $H^n(TS^{n-1}, S^{n-1})$ então,

$$H^{q-n}(F;G) \xrightarrow{ex} H^q(TS^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F;G)$$

é um isomorfismo e por (2.3)

$$\begin{array}{ccccc} \dots \rightarrow H^{q-1}(X;G) & \xrightarrow{i^*} & H^{q-1}(F;G) & \xrightarrow{\phi^* \circ \delta^*} & H^q(TS^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F;G) & \xrightarrow{j^* \circ (\phi^*)^{-1}} \dots \\ & & \searrow \theta^* & & \uparrow ex \\ & & & & H^{q-n}(F;G) \end{array}$$

$$H^q(X;G) \xrightarrow{i^*} H^q(F;G) \rightarrow \dots$$

Suponha, em particular, que G é (o grupo aditivo de) um anel comutativo com unidade. Então temos

Teorema (2.9) A aplicação $\theta^*: H^*(F;G) \rightarrow H^*(F;G)$ de (2.8) é uma derivação de grau $(1-n)$, do anel graduado $H^*(F;G)$.

Para a demonstração deste **Teorema** necessitamos da observação

o7) Sejam e o gerador canônico do grupo cíclico infinito $H^n(E^n, S^{n-1})$, $s = \delta^{*-1}(e) \in H^{n-1}(S^{n-1})$, 1 o gerador do grupo cíclico infinito $H^0(S^{n-1})$, $u \in H^{q-1}(F)$ e $v \in H^{q-n}(F)$. Então $\delta^*: H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \rightarrow H^q(E^n \times F, S^{n-1} \times F)$ é tal que

$$\delta^*(1 \times u) = 0 \quad e$$

$$\delta^*(s \times v) = e \times v.$$

Com efeito, temos (ver §2, (2.8), do capítulo 1, u

sando as triplas NDR (E^n, S^{n-1}, ϕ) e (F, F, ϕ)

$$\delta^*(1 \times u) = \delta^*1 \times u + (-1)^0 1 \times \delta^*u, \text{ com}$$

$$\delta^*1 \times u = \delta_1 K_1^{-1}(1 \times u) \text{ e}$$

$$(-1)^0 1 \times \delta^*u = \delta_2 K_2^{-1}(1 \times u), \text{ onde os homomorfismos}$$

$$K_1, K_2: H^{q-1}(S^{n-1} \times F, \phi) \rightarrow H^{q-1}(S^{n-1} \times F, \phi)$$

são isomorfismos (pelo T.Excisão),

$$\delta_1: H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \rightarrow H^q(E^n \times F, S^{n-1} \times F) \text{ e}$$

$$\delta_2: H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \rightarrow H^q(S^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F).$$

$$\text{Como } H^q(S^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F) = 0, \quad \delta_2 = 0$$

$$\text{e portanto } (-1)^0 1 \times \delta^*u = \delta_2 K_2^{-1}(1 \times u) = \delta_2(K_2^{-1}(1 \times u)) = 0.$$

Por outro lado, como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(E^n \times F) & \xrightarrow{i^*} & H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \\ \uparrow \times & & \uparrow \times \\ H^0(E^n) \otimes H^{q-1}(F) & \xrightarrow[j^* \otimes 1]{\cong} & H^0(S^{n-1}) \otimes H^{q-1}(F) \end{array} \quad \text{é}$$

comutativo (onde i e j são inclusões); e a sequência de cohomologia

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(E^n \times F) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \xrightarrow{\delta_1} H^q(E^n \times F, S^{n-1} \times F) \rightarrow \dots$$

do par $(E^n \times F, S^{n-1} \times F)$ é exata, temos $\delta^*1 \times u = 0$, pois $K_1^{-1}(1 \times u) \in \text{Im } i^* = \text{Ker } \delta_1$.

Calculemos agora $\delta^*(s \times v)$.

Temos $\delta^*(s \times v) = \delta^*s \times v + (-1)^{n-1} s \times \delta^*v$,
 com $(-1)^{n-1} s \times \delta^*v = \delta_2 K_2^{-1}(s \times v)$ onde o homomorfismo
 $K_2: H^{q-1}(S^{n-1} \times F, \phi) \rightarrow H^{q-1}(S^{n-1} \times F, \phi)$ é um isomorfis-
 mo (pelo T.Excisão), e $\delta_2: H^{q-1}(S^{n-1} \times F, \phi) \rightarrow H^q(S^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F)$.
 Como $H^q(S^{n-1} \times F, S^{n-1} \times F) = 0$, $\delta_2 = 0$ e portanto
 $(-1)^{n-1} s \times \delta^*v = 0$. Logo $\delta^*(s \times v) = \delta^*s \times v = e \times v$.

Vamos agora à demonstração do **Teorema (2.9)**.

Seja e o gerador canônico do grupo cíclico infinito $H^n(E^n, S^{n-1})$, e ponha $s = \delta^{*-1}(e) \in H^{n-1}(S^{n-1})$, de maneira que o índice de Kronecker $\langle e, \varepsilon_n \rangle = 1$.

(Veja a discussão de orientação no §2, (2.7), do cap. 1). Portanto $\delta^*s = e$, e existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(F) & \xrightarrow{\psi^*} & H^{q-1}(S^{n-1} \times F) \\ \downarrow \delta^* & & \downarrow \delta^* \\ H^q(X, F) & \xrightarrow[\phi^*]{} & H^q(E^n \times F, S^{n-1} \times F) \end{array}$$

e θ^* é definida pela condição

$$(2.10) \quad \phi^* \delta^* x = e \times \theta^*(x)$$

O elemento unidade 1 de $H^*(S^{n-1})$ gera

o grupo cíclico infinito $H^0(S^{n-1})$, e as aplicações

$$H^{q-1}(F) \xrightarrow{1 \times} H^{q-1}(S^{n-1} \times F), \quad H^{q-n}(F) \xrightarrow{s \times} H^{q-1}(S^{n-1} \times F)$$

$$u \longrightarrow 1 \times u$$

$$v \longrightarrow s \times v$$

representam $H^{q-1}(S^{n-1} \times F)$ como a soma direta

$$H^{q-1}(F) \oplus H^{q-n}(F), \quad \text{e} \quad (\text{ver o7})$$

$$(2.11) \quad \delta^*(1 \times u) = 0,$$

$$\delta^*(s \times v) = \delta^*s \times v = e \times v.$$

Se $x \in H^{q-1}(F)$, temos $\Psi^*(x) = 1 \times u + s \times v$, para alguns $u \in H^{q-1}(F)$, $v \in H^{q-n}(F)$. Agora, desde que $\Psi \circ i = \phi|_{\{*\} \times F}: F \rightarrow F$ é homotópica a identidade, temos $i^* \circ \Psi^* = \text{id}$ e portanto $x = \text{id}x = i^* \circ \Psi^*x = i^*(1 \times u + s \times v) = u$.

Por outro lado, como

$$e \times \theta^*(x) = \phi^* \delta^*x = \delta^* \Psi^*x = \delta^*(1 \times u) + \delta^*(s \times v) = e \times v$$

e $e \times$ é um isomorfismo, segue que $\theta^*(x) = v$.

Portanto,

$$\Psi^*(x) = 1 \times x + s \times \theta^*(x).$$

Agora Ψ^* é um homomorfismo de anel. Porém $x \in H^{q-1}(F)$, $y \in H^{r-1}(F)$ implicam,

$$\Psi^*(x \cup y) = 1 \times (x \cup y) + s \times \theta^*(x \cup y)$$

$$\begin{aligned} \Psi^*(x) \cup \Psi^*(y) &= \{1 \times x + s \times \theta^*(x)\} \cup \{1 \times y + s \times \theta^*(y)\} \\ &= (1 \times x) \cup (1 \times y) + (1 \times x) \cup (s \times \theta^*(y)) + \\ &\quad + (s \times \theta^*(x)) \cup (1 \times y) + (s \times \theta^*(x)) \cup (s \times \theta^*(y)) \\ &= (-1)^{0 \cdot (q-1)} (1 \cup 1) \times (x \cup y) + \\ &\quad + (-1)^{(n-1) \cdot (q-1)} (1 \cup s) \times (x \cup \theta^*(y)) + \\ &\quad + (-1)^{0 \cdot (q-n)} (s \cup 1) \times (\theta^*(x) \cup y) + \\ &\quad + (-1)^{(n-1)(q-n)} (s \cup s) \times \theta^*(x) \cup \theta^*(y) \end{aligned}$$

Desde que $1 \cup s = s \cup 1$ e

$s \cup s \in H^{2n-2}(S^{n-1}) = 0$ temos

$$\begin{aligned} \Psi^*(x) \cup \Psi^*(y) &= 1 \times (x \cup y) + s \times (\theta^*(x) \cup y) \\ &\quad + (-1)^{(n-1)(q-1)} s \times (x \cup \theta^*(y)) \\ &= 1 \times (x \cup y) + \\ &\quad + s \times [\theta^*(x) \cup y + (-1)^{(n-1)(q-1)} x \cup \theta^*(y)] \end{aligned}$$

Segue que

$$\theta^*(x \cup y) = \theta^*(x) \cup y + (-1)^{(n-1)\dim x} x \cup \theta^*(y).$$

§3 - Mais Propriedades da Sequência de Wang.

Seja $p: X \rightarrow S^n$ uma fibração com fibra F .

No §2 deste capítulo estabelecemos a sequência de cohomologia de Wang

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(F) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(F) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} \\ H^q(F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

com coeficientes em um anel comutativo A , onde a injeção i^* é um homomorfismo de anel e θ^* é uma derivação. A propriedade de α^* abaixo será útil para nós:

Teorema (3.1) Para $x \in H^{q-n}(F)$, $y \in H^r(X)$, temos

$$\alpha^*(x \smile i^*(y)) = \alpha^*(x) \smile y.$$

Para ver isto, lembre que α^* é definida pela comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, F) & \xrightarrow{j^*} & H^q(X) \\ \phi^* \downarrow & & \uparrow \alpha^* \\ H^q(E^n \times F, S^{n-1} \times F) & \xleftarrow{e \times} & H^{q-n}(F) \dots \end{array}$$

onde ϕ é uma aplicação estrutural e e é uma orienta-

ção de E^n . Portanto $\alpha^*(x) = j^*(z)$, onde $z \in H^Q(X, F)$ é o elemento tal que $\phi^*(z) = e \times x$.

Existe uma bilinear:

$$H^Q(X, F) \otimes H^r(X) \rightarrow H^{Q+r}(X, F),$$

definida pelo produto cup; e esta bilinear tem a propriedade (devido a naturalidade do produto cup)

$$j^*(z \smile y) = j^*(z) \smile y = \alpha^*(x) \smile y.$$

Calculemos $\phi^*(z \smile y)$. A naturalidade do produto cup dá

$$\phi^*(z \smile y) = \phi^*(z) \smile \phi_0^*(y) \quad \text{onde}$$

$\phi_0^*: H^r(X) \rightarrow H^r(E^n \times F)$ é o homomorfismo dos grupos absolutos induzido pela aplicação estrutural ϕ .

Como $\phi| \{*\} \times F: F \rightarrow F$ é homotópica a identidade segue que $\phi_0^*(y) = 1 \times i^*(y)$, pois o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^r(X) & \xrightarrow{i^*} & H^r(F) \\ \phi_0^* \downarrow & & \downarrow (\phi| \{*\} \times F)^* = id \\ H^r(E^n \times F) & \xrightarrow[\cong]{i^*} & H^r(\{*\} \times F) \\ \uparrow \times \cong & & \cong \uparrow \times \\ & & \end{array}$$

$$H^0(E^n) \otimes H^r(F) \xrightarrow[\cong]{i^* \otimes 1} H^0(*) \otimes H^r(F) \quad \text{é comuta-}$$

tivo e portanto

$$\begin{aligned}
 \phi^*(z \cup y) &= \phi^*(z) \cup (1 \times i^*(y)) \\
 &= (e \times x) \cup (1 \times i^*(y)) \\
 &= (-1)^{0 \cdot (q-n)} (e \cup 1) \times (x \cup i^*(y)) \\
 &= e \times (x \cup i^*(y))
 \end{aligned}$$

Por definição de

$$\alpha^*, \quad \alpha^*(x \cup i^*(y)) = j^*(z \cup y) = \alpha^*(x) \cup y.$$

Corolário (3.2) Se $x \in H^p(X)$, $y \in H^{q-n}(F)$, então

$$\alpha^*(i^*(x) \cup y) = (-1)^{np} x \cup \alpha^*(y).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \alpha^*(i^*(x) \cup y) &= \alpha^*((-1)^{p(q-n)} y \cup i^*(x)) \\
 &= (-1)^{p(q-n)} \alpha^*(y \cup i^*(x)) \\
 &= (-1)^{p(q-n)} \alpha^*(y) \cup x \\
 &= (-1)^{p(q-n)} (-1)^{qp} x \cup \alpha^*(y) \\
 &= (-1)^{np} x \cup \alpha^*(y).
 \end{aligned}$$

Corolário (3.3) A imagem de α^* é um ideal em $H^*(X)$, cujo produto de quaisquer dois elementos é zero.

Com efeito, para qualquer $y \in H^*(X)$ e $\alpha^*(x) \in \text{Im} \alpha^*$ temos $\alpha^*(x) \smile y = \alpha^*(x \smile i^*(y))$ e portanto $\alpha^*(x) \smile y \in \text{Im} \alpha^*$.

Além disso, para quaisquer x e $z \in H^{q-n}(F)$, $\alpha^*(x) \smile \alpha^*(z) = \alpha^*(x \smile i^* \alpha^*(z)) = 0$ (note que $i^* \alpha^* = 0$).

□

Se x é o elemento unidade 1 do anel de cohomologia $H^0(F)$, o elemento $u = \alpha^*(1)$ pertence a $H^n(X)$, e temos o

Corolário (3.4) O endomorfismo $d^* = \alpha^* \circ i^*$ de $H^*(X)$ é determinado por $d^*(y) = u \smile y$ para todo $y \in H^*(X)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} d^*(y) &= \alpha^* \circ i^*(y) \\ &= \alpha^*(1 \smile i^*(y)) \\ &= \alpha^*(1) \smile y \\ &= u \smile y, \text{ para todo } y \in H^*(X). \end{aligned}$$

□

Podemos identificar o elemento u . Para isso observamos que temos (ver Teorema 2.1) um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 (E^n \times F, S^{n-1} \times F) & \xrightarrow{\phi} & (X, F) \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p \\
 (E^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{q} & (S^n, *)
 \end{array}$$

onde p_1 é a projeção sobre o primeiro fator.

Seja s^n o gerador de $H^n(S^n)$ tal que $q^*(s^n) = e$. Então $\phi^* \circ p^*(s^n) = p_1^* \circ q^*(s^n) = p_1^*(e) = e \times 1$.

Por definição de α^* , $\alpha^*(1) = j^* \circ p^*(s^n)$; este elemento é a imagem de s^n via o homomorfismo de $H^n(S^n)$ em $H^n(X)$ induzido por p .

Se continuamos a denotar este homomorfismo por p^* , temos que

(3.5) A relação $\alpha^*(1) = p^*(s^n)$ é verdadeira em $H^n(X)$.

Vamos supor agora que F atua sobre a fibração p por $\mu: X \times F \rightarrow X$.

Então a aplicação $\text{pop}_1: X \times F \rightarrow S^n$ é uma fibração com fibra $F \times F$; e o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X \times F & \xrightarrow{\mu} & X \\
 \searrow p \circ p_1 & & \swarrow p \\
 & S^n &
 \end{array}$$

é comutativo. Portanto

$$\mu^*(u) = \mu^*p^*(s^n) = (p \circ p_1)^*(s^n) = p_1^*p^*(s^n) = p_1^*(u) = u \times 1.$$

Deste modo

(3.6) O homomorfismo $\mu^*: H^*(X) \rightarrow H^*(X \times F)$ envia u em $u \times 1 = p_1^*(u)$.

Um caso especial importante será necessário no capítulo 3. Suponha que a aplicação $\mu: X \times F \rightarrow X$ tem uma extensão $\mu_1: X \times X \rightarrow X$ tornando (X, F) em um H-par. Neste caso dizemos que p é uma H-fibração (com respeito a estrutura dada de (X, F) como um H-par). Por exemplo, se X é um grupo de Lie compacto e F é um subgrupo fechado, então $p: X \rightarrow X/F$ é uma H-fibração.

Com efeito, de acordo com os resultados sobre Grupos de Lie compactos no final do §6 do capítulo 1, $p: X \rightarrow X/F$ é a projeção de um fibrado vetorial.

Por corolário (1.6) do §1 deste capítulo, p é uma fibração.

Desde que a fibra F atua sobre a fibração p por $\mu: X \times F \rightarrow X$ dada por $\mu(x, f) = x.f$ (onde $\cdot$ é a operação do grupo de Lie compacto X) e μ tem uma extensão $\mu_1: X \times X \rightarrow X$ dada por $\mu_1(x, y) = x \cdot y$ tornando (X, F) em um H-par (note que X e F são H-espacos e a restrição de μ_1 a $F \times F$ é o produto em F), segue que $p: X \rightarrow X/F$ é uma H-fibração.

Teorema (3.7) Se $p: X \rightarrow S^n$ é uma H-fibração com fibra F e o anel dos coeficientes é um domínio de ideais principais A , então o elemento $u \in H^n(X)$ é primitivo.

A exatidão da sequência de cohomologia de Wang

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{q-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(F) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n}(F) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(X) \xrightarrow{i^*} \\ H^q(F) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-n+1}(F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

implica que $i^*: H^q(X) \rightarrow H^q(F)$ é um isomorfismo para $q < n-1$ (note que $H^{q-n}(F) = 0$ e $H^{q-n+1}(F) = 0$), e a sequência

$$0 \rightarrow H^{n-1}(X) \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(F) \xrightarrow{\theta^*} H^0(F) \rightarrow \dots$$

é exata. Desde que $H^0(F)$ é livre e A é um domínio de

ideais principais, a imagem de θ^* é livre, e portanto o monomorfismo $i^*: H^{n-1}(X) \rightarrow H^{n-1}(F)$ cinde. Segue do Teorema de Künneth que $(1 \wedge i)^*: H^n(X \wedge X) \rightarrow H^n(X \wedge F)$ é um monomorfismo. (Veja observação o9 no final desta secção).

Existe (ver observação o8 no final desta secção) um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & H^n(X \times X) & \xrightarrow{K_1^*} & H^n(X \wedge X) & \\
 \mu_1^* \nearrow & \downarrow (1 \times i)^* & & \downarrow (1 \wedge i)^* & \\
 H^n(X) & & & & \\
 \mu^* \searrow & H^n(X \times F) & \xrightarrow{K_2^*} & H^n(X \wedge F) &
 \end{array}$$

no qual os homomorfismos K_1^* são dados pelas compostas:

$$K_1^*: H^n(X \times X) \xrightarrow{\pi} \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} \xrightarrow[\cong]{\psi} H^n(X \wedge X),$$

onde π é a projecção natural de $H^n(X \times X)$ sobre seu grupo quociente $\frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$ e ψ é a inversa do isomorfismo $H^n(X \wedge X) \xrightarrow[\cong]{\ell^*} \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$ dado no §7, (7.2),

do capítulo 1 e

$$K_2^*: H^n(X \times F) \xrightarrow{\pi'} \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} \xrightarrow[\cong]{\psi'} H^n(X \wedge F),$$

onde π' é a projecção natural de $H^n(X \times F)$ sobre seu grupo quociente $\frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$ e ψ' é a inversa do iso

morfismo $\overline{\ell}^*: H^n(X \wedge F) \rightarrow \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$ obtido da mesma forma

ma como o isomorfismo $\overline{\ell}^*$ foi obtido no §7, (7.2), do Capítulo 1.

Por (3.6), $K_2^* \mu^*(u) = K_2^* p_1^*(u) = 0$; desde que $(1 \wedge i)^*$ é um monomorfismo, $K_1^* \mu_1^*(u) = 0$ (visto que $(1 \wedge i)^*(K_1^* \mu_1^*(u)) = K_2^*(1 \times i)^* \mu_1^*(u) = K_2^* \mu^*(u) = 0$ e portanto $K_1^* \mu_1^*(u) \in \text{Ker}(1 \wedge i)^* = \{0\}$), e assim u é primitivo.

Nota: p_1 e p_2 são as projeções no primeiro e segundo fator.

Observações:

o8) o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(X \times X) & \xrightarrow{K_1^*} & H^n(X \wedge X) \\
 & \nearrow \mu_{1,1}^* & \downarrow (1 \times i)^* & & \downarrow (1 \wedge i)^* \\
 H^n(X) & & & & \\
 & \searrow \mu^* & H^n(X \times F) & \xrightarrow{K_2^*} & H^n(X \wedge F)
 \end{array}$$

é comutativo, onde os homomorfismos K_i^* são dados no Teorema (3.7).

Com efeito, desde que $p: X \rightarrow S^n$ é uma H-fibração a aplicação $\mu: X \times F \rightarrow X$ tem uma extensão $\mu_1: X \times X \rightarrow X$ tornando (X, F) em um H-par.

Logo temos que, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ \mu_1 \swarrow & \uparrow 1 \times i & \\ X & & X \times F \\ \mu \swarrow & & \end{array}$$

é comutativo e por

tanto segue que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & H^n(X \times X) & \\ \mu_1^* \nearrow & \downarrow (1 \times i)^* & \\ H^n(X) & & H^n(X \times F) \\ \mu^* \searrow & & \end{array}$$

é comutativo.

Para vermos a comutatividade no retângulo observamos primeiramente que, desde que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\ell} & X \wedge X \\ \uparrow (1 \times i) & & \uparrow 1 \wedge i \\ X \times F & \xrightarrow{\ell_0} & X \wedge F \end{array}$$

é comutativo

(onde ℓ e ℓ_0 são as projeções naturais), o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(X \times X) & \xleftarrow{\ell^*} & H^n(X \wedge X) \\ \downarrow (1 \times i)^* & & \downarrow (1 \wedge i)^* \end{array}$$

$$H^n(X \times F) \xleftarrow[\ell_0^*]{} H^n(X \wedge F) \quad \text{comuta.}$$

Lembremos que

$$\begin{array}{ccc} H^n(X \times X) & \xrightarrow{K_1^*} & H^n(X \wedge X) \\ \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\ \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & & \end{array} \quad \text{comuta, on}$$

de ψ é o homorfismo inverso do isomorfismo induzido por ℓ^* , a saber

$$\overline{\ell^*} = \pi \ell^*: H^n(X \wedge X) \rightarrow \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$$

($p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ são as projeções no primeiro e segundo fator respectivamente) e

$$\begin{array}{ccc}
 H^n(X \times F) & \xrightarrow{K_2^*} & H^n(X \wedge F) \\
 \pi' \downarrow & & \uparrow \psi' \\
 \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & &
 \end{array}$$

comuta, onde ψ' é o homomorfismo inverso do isomorfismo induzido por ℓ_0^* , para saber

$$\ell_0^* = \eta' \ell_0^*: H^n(X \wedge F) \rightarrow \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$$

($p_1: X \times F \rightarrow X$ e $p_2: X \times F \rightarrow F$ são as projeções).

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^n(X \times X) & & \\
 & (1 \times i)^* \swarrow & \eta \downarrow & \swarrow k_1^* & \\
 & H^n(X \times F) & & H^n(X \wedge X) & \\
 & \searrow K_2^* & & \swarrow \ell^* & \\
 & & \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & & \\
 & \eta' \downarrow & \ell_0^* \downarrow & \swarrow \ell^* & \downarrow (1 \wedge i)^* \\
 & \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & & H^n(X \wedge F) & \\
 & \swarrow (1 \times i)^* & \swarrow \ell_0^* & \swarrow \psi' & \\
 & \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & & &
 \end{array}$$

Como

$$(1 \times i)^* \ell^* = \ell_0^* (1 \wedge i)^*,$$

$$\pi' (1 \times i)^* = \frac{(1 \times i)^*}{\sim} \pi,$$

$$\overline{\ell^*} = \pi \ell^*,$$

$$\overline{\ell_0^*} = \pi' \ell_0^*,$$

$$\overline{\ell^*} \Psi = \Psi \overline{\ell^*} = 1 \quad e$$

$$\overline{\ell_0^*} \Psi' = \Psi' \overline{\ell_0^*} = 1 \quad \text{o sub-diagrama}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & \xrightarrow{\Psi} & H^n(X \wedge X) \\ \downarrow \frac{(1 \times i)^*}{\sim} & & \downarrow (1 \wedge i)^* \\ \frac{H^n(X \times F)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*} & \xrightarrow{\Psi'} & H^n(X \wedge F) \end{array}$$

comuta pois, dado $x \in \frac{H^n(X \times X)}{\text{Imp}_1^* + \text{Imp}_2^*}$ ponha

$$\Psi(x) = y, \quad z = (1 \wedge i)^*(y), \quad r = \frac{(1 \times i)^*}{\sim}(x),$$

$$w = \ell^*(y), \quad t = (1 \times i)^*(w) \quad e \quad \Psi'(r) = s.$$

Provemos que $s = z$.

$$\text{Temos } \eta(w) = \eta \ell^*(y) = \overline{\ell^*} y = \overline{\ell^*} \Psi(x) = x$$

$$e \quad \eta'(t) = \eta'(1 \times i)^*(w) = \frac{(1 \times i)^*}{\sim} \eta(w) = \frac{(1 \times i)^*}{\sim}(x) = r \quad \text{co-}$$

mo $(1 \times i)^* \ell^*(y) = \ell_0^* (1 \wedge i)^*(y)$ segue que

$$t = (1 \times i)^*(w) = \ell_0^*(z)$$

Logo $r = \pi'(t) = \pi' \ell_0^*(z) = \overline{\ell_0^*}(z)$ e daí
 $s = \Psi'(r) = \Psi' \overline{\ell_0^*}(z) = z.$

Agora, tomemos $u \in H^n(X \times X).$

Como

$$\begin{aligned} (1 \wedge i) * K_1^*(u) &= (1 \wedge i) * \Psi \mathbb{T}(u) \\ &= \Psi' \frac{(1 \times i)^*}{\sim} \mathbb{T}(u) \\ &= \Psi' \mathbb{T}'(1 \times i)^*(u) \\ &= K_2^*(1 \times i)^*(u), \text{ segue o re-} \end{aligned}$$

sultado.

o9) Se $i^*: H^q(X, *) \rightarrow H^q(F, *)$ é isomorfismo para $q < n - 1$ e $i^*: H^{n-1}(X, *) \rightarrow H^{n-1}(F, *)$ é monomorfismo, então, pelo Teorema de Künneth,

$(1 \wedge i)^*: H^n(X \wedge X) \rightarrow H^n(X \wedge F)$ é monomorfismo.

De fato, temos $H^n(X \wedge X) \cong H^n(X \times X, X \vee X)$
e $H^n(X \wedge F) \cong H^n(X \times F, X \vee F)$

Agora, pelo Teorema de Künneth,

$$H^n(X \times X, X \vee X) \cong \sum_{p+q=n} H^p(X, *) \otimes H^q(X, *) \quad e$$

$$H^n(X \times F, X \vee F) \cong \sum_{p+q=n} H^p(X, *) \otimes H^q(F, *)$$

Temos $H^0(X, *) = \hat{H}^0(F, *) = 0$ e como o dia-

grama

$$H^n(X \wedge X) \cong H^1(X, *) \otimes H^{n-1}(X, *) \oplus H^2(X, *) \otimes H^{n-2}(X, *) \oplus \dots \oplus H^{n-1}(X, *) \otimes H^1(X, *)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow (1 \wedge i)^* & & \downarrow 1 \otimes i^* + 1 \otimes i^* + \dots + 1 \otimes i^* \\ & & \end{array}$$

$$H^n(X \wedge F) \cong H^1(X, *) \otimes H^{n-1}(F, *) \oplus H^2(X, *) \otimes H^{n-2}(F, *) \oplus \dots \oplus H^{n-1}(X, *) \otimes H^1(F, *)$$

comuta naturalmente e $i^*: H^q(X, *) \rightarrow H^q(F, *)$ é isomorfismo para $q < n - 1$ e temos $i^*: H^{n-1}(X, *) \rightarrow H^{n-1}(F, *)$ monomorfismo, segue que $(1 \wedge i)^*$ é monomorfismo.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo as fibrações

$$U_n \rightarrow S^{2n-1}$$

$$Sp_n \rightarrow S^{4n-1}$$

são usadas para calcular os anéis de homologia e cohomologia dos grupos clássicos (com coeficientes em um domínio de ideais principais A).

Teorema 3.1 A álgebra de Hopf $H^*(U_n; A)$ com coeficientes em um domínio de ideais principais A é a álgebra exterior $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$, onde x_i é um elemento primitivo de $H^{2i-1}(U_n; A)$.

Para um entendimento melhor da demonstração deste teorema (que virá logo a seguir) façamos algumas observações:

03.1.1) O grupo U_1 é apenas o grupo multiplicativo S^1 de números complexos de valor absoluto 1.

Inicialmente provemos que todas as transformações lineares de $\mathbb{C}$ que pertencem ao grupo ortogonal $O(2)$ é do tipo: $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$Tz = \lambda z \text{ com } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } |\lambda| = 1 \text{ } (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Como todas as transformações lineares $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são da forma $Tz = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C} (\forall z \in \mathbb{C})$,

basta provarmos que se tem necessariamente $|\lambda| = 1$.

Desde que tal T deve pertencer ao grupo ortogonal $O(2)$, $|Tz|^2 = |z|^2$ para todo $z \in C$.

Obviamente, isto é satisfeito para $z = 0$.

Tomemos $z \neq 0$. Logo devemos ter

$$|\lambda z|^2 = |z|^2 \quad (\forall z \neq 0) \quad \text{ou equivalentemente}$$

$$|\lambda|^2 |z|^2 = |z|^2 \quad (\forall z \neq 0) \quad \text{e portanto} \quad |\lambda| = 1. \quad \text{Seja}$$

$$S^1 = \{z \in C \mid |z| = 1\}.$$

Definamos

$$G: (S^1, \cdot) \longrightarrow (U_1, \circ) \quad \text{por}$$

$$G(\lambda) = T \quad \text{onde} \quad T: C \rightarrow C \quad \text{é definida} \quad \text{por}$$

$$Tz = \lambda z \quad (\forall z \in C).$$

Obviamente G é bem definida.

Provemos que G é um isomorfismo entre os grupos $(S^1, \cdot)$ e $(U_1, \circ)$.

Temos $G(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = H$ onde $H: C \rightarrow C$ é definida por $H(z) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)z$ ($\forall z \in C$).

Por outro lado, como $G(\lambda_1) = T$ onde $T: C \rightarrow C$ é definida por $Tz = \lambda_1 z$ ($\forall z \in C$) e $G(\lambda_2) = L$ onde $L: C \rightarrow C$ é definida por $L(z) = \lambda_2 z$ ($\forall z \in C$) temos $G(\lambda_1) \circ G(\lambda_2) = T \circ L$.

Mas $T \circ L(z) = T(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)z = H(z)$ ($\forall z \in C$) e portanto $G(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = G(\lambda_1) \circ G(\lambda_2)$, o que prova ser G um homomorfismo.

Suponhamos que $G(\lambda_1) = G(\lambda_2)$. Então de
vemos ter $T = L$ e portanto $Tz = Lz$ ($\forall z \in C$), o que
implica $\lambda_1 z = \lambda_2 z$ ($\forall z \in C$) e portanto $\lambda_1 = \lambda_2$ e G é
injetora. Agora, dada $T \in U_1$ temos que $Tz = \mu z$ ($\forall z \in C$)
com $|\mu| = 1$. Tomemos $\mu \in S^1$.

Por definição de G devemos ter $G(\mu) = T$
e G é sobrejetora. Logo G é um isomorfismo.

03.1.2) $H^1(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1) = 0.$

Com efeito, como S^1 é um H-espço temos
que $H^1(S^1 \times S^1) \cong H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \oplus H^1(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1)$. Por
outro lado, pela fórmula de Künneth

$H^1(S^1 \times S^1) \cong H^1(S^1) \oplus H^1(S^1)$. Portanto

$H^1(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1) = 0.$

03.1.3) A derivação $\theta^*: H^*(U_{n-1}) \rightarrow H^*(U_{n-1})$ ($n > 1$)
de grau $-2n+2$ é identicamente nula.

Primeiro notemos que θ^* anula os geradores
 $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(U_{n-1})$ ($n > 1$), pois para
 $1 \leq i \leq n-1$ temos que $2i-1-2n+2 \leq -1$ (logo
 $H^{2i-1-2n+2}(U_{n-1}) = 0$) e portanto $\theta^*: H^{2i-1}(U_{n-1}) \rightarrow 0$ o
que acarreta $\theta^*(x_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Agora, como θ^* é uma derivação e

$\theta^*(x_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$, segue-se que θ^* anula

o produto de dois quaisquer destes elementos x_i pois te

mos $\theta^*(x_i \cup x_j) = \theta^*(x_i) \cup x_j + (-1)^{(2n-2)\dim x_i} x_i \cup \theta^*(x_j)$

$= 0$; e assim por diante concluímos que θ^* anula todos

os geradores de $H^*(U_{n-1})$ (eles são produtos de no máxi-

mo $(n-1)$ destes elementos x_i). Logo θ^* é identicamente

nula.

03.1.4) Se i^* é um isomorfismo então $i^* \otimes i^*$ tam

bém é um isomorfismo com inversa $(i^*)^{-1} \otimes (i^*)^{-1}$, (onde

$(i^*)^{-1}$ é o homomorfismo inverso de i^*).

03.1.5) Se i^* é um isomorfismo e $i^*(x_j)$ ($j < n$)

são primitivos em U_{n-1} então os x_j ($j < n$) são primiti

vos em U_n .

Com efeito, como por hipótese de indução

na demonstração do teorema 3.1 $H^*(U_{n-1})$ e $H^*(U_n)$ são

A-módulos livres de posto finito temos que o produto cup

induz isomorfismos

$$H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}) \xrightarrow{\cong} H^*(U_{n-1}) \otimes H^*(U_{n-1})$$

e

$$H^*(U_n) \otimes H^*(U_n) \xrightarrow{\cong} H^*(U_n \times U_n) \dots$$

Por outro lado, por serem U_{n-1} e U_n H-espacos temos que:

$$H^*(U_n \times U_n) \cong H^*(U_n) \oplus H^*(U_n) \oplus H^*(U_n \times U_n, U_n \vee U_n)$$

e

$$H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}) \cong H^*(U_{n-1}) \oplus H^*(U_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}, U_{n-1} \vee U_{n-1})$$

Consideremos agora o diagrama de isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} H^*(U_n) \oplus H^*(U_n) \oplus H^*(U_n \times U_n, U_n \vee U_n) & \cong & H^*(U_n \times U_n) \xrightarrow{\sim} H^*(U_n) \otimes H^*(U_n) \\ & & \downarrow i^* \otimes i^* \\ H^*(U_{n-1}) \oplus H^*(U_{n-1}) \oplus H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}, U_{n-1} \vee U_{n-1}) & \cong & H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}) \xrightarrow{\sim} H^*(U_{n-1}) \otimes H^*(U_{n-1}) \end{array}$$

Indiquemos por μ^* as multiplicações em U_{n-1} e U_n . Pela comutatividade natural do diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^*(U_{n-1}) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}) \\ i^* \uparrow \cong & & \cong \uparrow \psi \\ H^*(U_n) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(U_n \times U_n) \end{array}$$

onde $\psi = (\vee) (i^* \otimes i^*) (\vee)^{-1}$ e por termos por hipótese

que a componente de $\mu^*(i^*(x_j))$ em $H^*(U_{n-1} \times U_{n-1}, U_{n-1} \vee U_{n-1})$ é zero, segue que a componente de $\mu^*(x_j)$ em $H^*(U_n \times U_n, U_n \vee U_n)$ é também nula, o que prova serem os x_j ($j < n$) primitivos em U_n .

Demonstração do teorema 3.1: (Será feita por indução sobre n)

O grupo U_1 é apenas o grupo multiplicativo S^1 de números complexos de valor absoluto 1 (ver 03.1.1) e o teorema é verdadeiro neste caso pois

$$H^r(U_1; A) \cong H^r(S^1; A) \cong \begin{cases} A & \text{para } r = 0 \\ A & \text{para } r = 1 \\ 0 & \text{para } r \neq 0 \text{ e } r \neq 1; \end{cases}$$

logo $H^*(U_1; A) \cong A \oplus A = A(1) \oplus A(x_1) \cong \Lambda(x_1)$.

(note que $x_1^2 = x_1 \cup x_1 \in H^2(S^1; A) = 0$) e x_1 é um elemento primitivo de $H^1(U_1; A)$ pois a componente de $\mu^*(x_1)$ em $H^1(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1)$ (onde μ^* é a multiplicação em S^1) é nula (ver o 3.1.2).

Suponha agora que

$H^*(U_{n-1}) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1})$, onde x_i é um elemento primitivo de $H^{2i-1}(U_{n-1})$. Desde que $p: U_n \rightarrow \frac{U_n}{U_{n-1}} \cong S^{2n-1}$ é uma fibração com fibra U_{n-1} ($n > 1$), existem sequências

exatas

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U_{n-1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-2n+1}(U_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(U_n) \xrightarrow{i^*}$$

(*)

$$\xrightarrow{i^*} H^q(U_{n-1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-2n+2}(U_{n-1}) \rightarrow \dots$$

Mas, θ^* tem grau $-2n + 2$, e então $\theta^* \underline{a}$ nula os geradores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(U_{n-1})$ ($n > 1$).

Na verdade θ^* é identicamente nula (ver o3.1.3).

Portanto a sequência exata (*) quebra-se em uma família de sequências curtas exatas

$$(**) \quad 0 \rightarrow H^{q-2n+1}(U_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(U_n) \xrightarrow{i^*} H^q(U_{n-1}) \rightarrow 0$$

Desde que $H^q(U_{n-1})$ é um A-módulo livre $\forall q$, segue-se que $H^q(U_n)$ também é livre pois a família de sequências curtas exatas (**) cinde em $H^q(U_{n-1})$ e portanto existe um homomorfismo $\gamma^*: H^q(U_{n-1}) \rightarrow H^q(U_n)$ tal que $i^*\gamma^* = \text{id}_{H^q(U_{n-1})}$ e daí temos que

$$H^q(U_n) \cong \alpha^*(H^{q-2n+1}(U_{n-1})) \oplus \gamma^*(H^q(U_{n-1})).$$

Mais ainda, a injeção $i^*: H^q(U_n) \rightarrow H^q(U_{n-1})$ é um isomorfismo para $q < 2n - 1$ pois $H^{q-2n+1}(U_{n-1}) = 0$.

Denotemos as imagens inversas dos geradores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(U_{n-1})$ pelos mesmos símbolos

$x_1, \dots, x_{n-1}$.

Coloquemos $x_n = \alpha^*(1) \in H^{2n-1}(U_n)$ onde $\alpha^*: H^0(U_{n-1}) \rightarrow H^{2n-1}(U_n)$.

Os monômios $x_I = x_{i_1} \smile \dots \smile x_{i_k}$ ($i_1 < \dots < i_k < n$) formam uma base para o módulo $H^*(U_{n-1})$ e pela exatidão da sequência (**), os monômios $\gamma^*(x_I) \equiv x_I$, $\alpha^*(x_J)$ formam uma base para o módulo $H^*(U_n)$ pois $H^*(U_n) \cong \alpha^*(H^*(U_{n-1})) \oplus \gamma^*(H^*(U_{n-1}))$.

Como $x_J \equiv \gamma^*(x_J)$ temos

$$i^*(\bar{x}_J) = i^*\gamma^*(x_J) = \bar{x}_J, \text{ logo}$$

$\alpha^*(x_J) = \alpha^*i^*(x_J) = x_n \smile x_J$ (ver corolário (3.4) do §3 do capítulo 2).

Segue-se então que $H^*(U_n)$ é a álgebra exterior gerada por $x_1, \dots, x_n$ (Note que $x_n^2 = x_n \smile x_n = 0$ pois $\dim x_n = 2n-1$).

Por hipótese, os elementos $i^*(x_j)$ ($j < n$) são primitivos em U_{n-1} ; desde que i^* é um isomorfismo em dimensões $\leq j$ (pois se $q \leq j < n$ então $q-2n+1 < -1$ e portanto $H^{q-2n+1}(U_{n-1}) = 0$), segue que $i^* \otimes i^*$ também é um isomorfismo (ver o3.1.4), e então os x_j são primitivos em U_n (ver o3.1.5).

Desde que $p: U_n \rightarrow S^{2n-1}$ é uma H-fibração tem-se que $x_n = \alpha^*(1)$ também é primitivo. (ver Teorema 3.7 do §3 do capítulo 2).

Teorema 3.2: A álgebra de Hopf $H^*(Sp_n; A)$ com coeficientes em um domínio de ideais principais A é a álgebra exterior $\Lambda(x_1, \dots, x_n)$, onde x_i é um elemento primitivo de $H^{i-1}(Sp_n; A)$.

Para um entendimento melhor da demonstração deste teorema (que virá logo a seguir) façamos algumas observações:

3.2.1) O grupo Sp_1 é apenas o grupo multiplicativo S^3 de números quaterniônicos de valor absoluto 1.

Inicialmente provemos que todas as transformações lineares de Q (álgebra dos quaternions) que pertencem ao grupo ortogonal $O(4)$ é do tipo $T: Q \rightarrow Q$ dada por $Tz = \lambda z$ com $\lambda \in Q$ e $|\lambda| = 1$ ($\forall z \in Q$).

Como todas as transformações lineares $T: Q \rightarrow Q$ são da forma $Tz = \lambda z$ para algum $\lambda \in Q$ ($\forall z \in Q$) resta provarmos que se tem necessariamente $|\lambda| = 1$.

Desde que tal T deve pertencer ao grupo ortogonal $O(4)$, $|Tz|^2 = |z|^2$ ($\forall z \in Q$).

Obviamente isto é verdadeiro para $z = 0$.

Tomemos $0 \neq z \in Q$. Logo devemos ter

$$|\lambda z|^2 = |z|^2 \quad (\forall z \neq 0) \quad \text{ou equivalentemente}$$

$$|\lambda|^2 |z|^2 = |z|^2 \quad (\forall z \neq 0) \quad \text{e portanto} \quad |\lambda| = 1.$$

$$\text{Seja } S^3 = \{q \in Q \mid |q| = 1\} \dots$$

Definamos

$G: (S^3, \cdot) \rightarrow (Sp_1, \circ)$ por $G(\lambda) = T$ onde
 $T: Q \rightarrow Q$ é definida por $Tz = \lambda z$ ($\forall z \in Q$).

Obviamente G é bem definida.

Provemos que G é um isomorfismo entre
os grupos $(S^3, \cdot)$ e $(Sp_1, \circ)$.

Temos $G(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = H$ onde $H: Q \rightarrow Q$ é de-
finida por $H(z) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)z$ ($\forall z \in Q$).

Por outro lado, como $G(\lambda_1) = T$ onde
 $T: Q \rightarrow Q$ é definida por $T(z) = \lambda_1 z$ ($\forall z \in Q$) e $G(\lambda_2) = L$
onde $L: Q \rightarrow Q$ é definida por $L(z) = \lambda_2 z$ ($\forall z \in Q$) temos
 $G(\lambda_1) \circ G(\lambda_2) = T \circ L$.

Mas, $T \circ L(z) = T(\lambda_2 z) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)z = H(z)$
($\forall z \in Q$) e portanto $G(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = G(\lambda_1) \circ G(\lambda_2)$, o que pro-
va ser G um homomorfismo. Suponhamos que $G(\lambda_1) = G(\lambda_2)$.

Então $T = L$ e portanto $Tz = Lz$ ($\forall z \in Q$)
o que implica $\lambda_1 z = \lambda_2 z$ ($\forall z \in Q$) e portanto $\lambda_1 = \lambda_2$
e G é injetora. Agora, dada $T \in Sp_1$, temos que
 $Tz = \mu z$ ($\forall z \in Q$) com $|\mu| = 1$. Tomemos $\mu \in S^3$. Por
definição de G , $G(\mu) = T$ e G é sobrejetora.

Logo G é um isomorfismo.

o3.2.2) $H^3(S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3) = 0$

Com efeito, como S^3 é um H-espço temos que $H^3(S^3 \times S^3) \cong H^3(S^3) \oplus H^3(S^3) \oplus H^3(S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3)$.

Por outro lado, pela fórmula de Künneth

$H^3(S^3 \times S^3) \cong H^3(S^3) \oplus H^3(S^3)$. Portanto

$$H^3(S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3) = 0.$$

o3.2.3) A derivação $\theta^*: H^*(Sp_{n-1}) \rightarrow H^*(Sp_{n-1})$ ($n > 1$) de grau $-4n+2$ é identicamente nula.

Primeiro notemos que θ^* anula os geradores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(Sp_{n-1})$ ($n > 1$) pois para $1 \leq i \leq n-1$ temos que $4i - 1 - 4n + 2 \leq -3$ (logo $H^{4i-4n+2}(Sp_{n-1}) = 0$) e portanto $\theta^*: H^{4i-4n+2}(Sp_{n-1}) \rightarrow 0$ o

que acarreta $\theta^*(x_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$.

Agora, como $\theta^*(x_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$ e θ^* é uma derivação, segue que θ^* anula o produto de dois quaisquer destes elementos x_i pois temos $\theta^*(x_i \smile x_j) = \theta^*(x_i) \smile x_j + (-1)^{(4n-2)\dim x_i} x_i \smile \theta^*(x_j) = 0$, e assim por diante concluímos que θ^* anula todos os geradores de $H^*(Sp_{n-1})$ (eles são produtos de no máximo $(n-1)$ destes elementos x_i). Logo θ^* é identicamente nula.

o3.2.4) Se i^* é um isomorfismo e $i^*(x_j)$ ($j < n$) são primitivos em Sp_{n-1} então os x_j ($j < n$) são primitivos em Sp_n .

Com efeito, como por hipótese de indução na demonstração do teorema 3.2 $H^*(Sp_{n-1})$ e $H^*(Sp_n)$ são A-módulos livres de posto finito temos que o produto cup' induz isomorfismos

$$H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}) \cong \bigcup_{i+j=n} H^*(Sp_{n-1}) \otimes H^*(Sp_{n-1})$$

e

$$H^*(Sp_n \times Sp_n) \cong \bigcup_{i+j=n} H^*(Sp_n) \otimes H^*(Sp_n)$$

Por outro lado, por serem Sp_{n-1} e Sp_n H-espacos temos que

$$H^*(Sp_n \times Sp_n) \cong H^*(Sp_n) \oplus H^*(Sp_n) \oplus H^*(Sp_n \times Sp_n, Sp_n \vee Sp_n)$$

e

$$H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}) \cong H^*(Sp_{n-1}) \oplus H^*(Sp_{n-1}) \oplus$$

$$\oplus H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}, Sp_{n-1} \vee Sp_{n-1})$$

Consideremos agora o diagrama de isomorfismos

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(Sp_n) \oplus H^*(Sp_n) \oplus H^*(Sp_n \times Sp_n, Sp_n \vee Sp_n) & \cong & H^*(Sp_n \times Sp_n) \xrightarrow{\sim} H^*(Sp_n) \otimes H^*(Sp_n) \\
 & & \downarrow i^* \otimes i^* \\
 H^*(Sp_{n-1}) \oplus H^*(Sp_{n-1}) \oplus H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}, Sp_{n-1} \vee Sp_{n-1}) & \cong & H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}) \xrightarrow{\sim} H^*(Sp_{n-1}) \otimes H^*(Sp_{n-1})
 \end{array}$$

Indiquemos por μ^* as multiplicações em Sp_{n-1} e Sp_n .

Pela comutatividade natural do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H^*(Sp_{n-1}) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}) \\
 \uparrow \cong i^* & & \uparrow \cong \psi \\
 H^*(Sp_n) & \xrightarrow{\mu^*} & H^*(Sp_n \times Sp_n)
 \end{array}$$

onde $\psi = (\vee) (i^* \otimes i^*) (\vee^{-1})$ e, por termos por hipótese que a componente de $\mu^*(i^*(x_j))$ em $H^*(Sp_{n-1} \times Sp_{n-1}, Sp_{n-1} \vee Sp_{n-1})$ é nula segue que a componente de $\mu^*(x_j)$ em $H^*(Sp_n \times Sp_n, Sp_n \vee Sp_n)$ é também nula o que prova serem os x_j ($j < n$) primitivos em Sp_n .

o3.2.5) Se i^* é um isomorfismo, então $i^* \otimes i^*$ é um isomorfismo com inversa $(i^*)^{-1} \otimes (i^*)^{-1}$ (onde $(i^*)^{-1}$ é o homomorfismo inverso de i^*).

Demonstração do teorema 3.2: (Será feita por indução sobre n)

O grupo Sp_1 é apenas o grupo multiplicativo S^3 dos números quaterniônicos de valor absoluto 1 (ver 03.2.1) e o teorema é verdadeiro neste caso,

$$H^r(Sp_1; A) \cong H^r(S^3; A) \cong \begin{cases} A & \text{para } r = 0 \\ A & \text{para } r = 3 \\ 0 & \text{para } r \neq 0 \text{ e } r \neq 3; \end{cases}$$

logo $H^*(Sp_1; A) \cong A \oplus A = A(1) \oplus A(x_1) \cong \Lambda(x_1)$ (note que $x_1^2 = x_1 \smile x_1 \in H^6(S^3; A) = 0$) e x_1 é um elemento primitivo de $H^3(Sp_1; A)$ pois a componente de $\mu^*(x_1)$ em $H^3(S^3 \times S^3, S^3 \vee S^3)$ (onde μ^* é a multiplicação em S^3) é nula. (ver o3.2.2).

Suponha agora que

$H^*(Sp_{n-1}; A) \cong \Lambda(x_1, \dots, x_{n-1})$ onde x_i é um elemento primitivo de $H^{4i-1}(Sp_{n-1}; A)$

Desde que a projeção

$p: Sp_n \rightarrow \frac{Sp_n}{Sp_{n-1}} \approx S^{4n-1}$ é uma fibração com fibra

Sp_{n-1} ($n > 1$) segue que existem sequências exatas

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(Sp_n) \xrightarrow{i^*} H^{q-1}(Sp_{n-1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-4n+1}(Sp_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\alpha^*} H^q(Sp_n) \xrightarrow{i^*} H^q(Sp_{n-1}) \xrightarrow{\theta^*} H^{q-4n+2}(Sp_{n-1}) \rightarrow \dots$$

Mas θ^* tem grau $-4n+2$, e então θ^* a nula os geradores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(Sp_{n-1})$ ($n > 1$).

Na verdade θ^* é identicamente nula (ver o3.2.3)

Portanto a sequência exata (*) quebra-se em uma família de sequências curtas exatas

$$0 \rightarrow H^{q-4n+1}(Sp_{n-1}) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(Sp_n) \xrightarrow{i^*} H^q(Sp_{n-1}) \rightarrow 0 \quad (**)$$

Desde que $H^q(Sp_{n-1})$ é um A-módulo livre $\forall q$ segue-se que $H^q(Sp_n)$ também é livre pois a família de sequências curtas exatas (**) cinde em $H^q(Sp_{n-1})$ e

portanto existe um homomorfismo $\gamma^*: H^q(Sp_{n-1}) \rightarrow H^q(Sp_n)$ tal que $i^*\gamma^* = \text{id}_{H^q(Sp_{n-1})}$ e daí temos que

$$H^q(\mathrm{Sp}_n) \cong \alpha^*(H^{q-4n+1}(\mathrm{Sp}_{n-1})) \oplus \gamma^*(H^q(\mathrm{Sp}_{n-1}))$$

Mais ainda, a injeção

$i^*: H^q(\mathrm{Sp}_n) \rightarrow H^q(\mathrm{Sp}_{n-1})$ é um isomorfismo para $q < 4n - 1$ pois $H^{q-4n+1}(\mathrm{Sp}_{n-1}) = 0$.

Denotemos as imagens inversas dos geradores $x_1, \dots, x_{n-1}$ de $H^*(\mathrm{Sp}_{n-1})$ pelos mesmos símbolos $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Coloquemos $x_n = \alpha^*(1) \in H^{4n-1}(\mathrm{Sp}_n)$, onde $\alpha^*: H^0(\mathrm{Sp}_{n-1}) \rightarrow H^{4n-1}(\mathrm{Sp}_n)$.

Os monômios

$x_I = x_{i_1} \smile \dots \smile x_{i_k}$ ($i_k < \dots < i_1 < n$) formam uma base para o módulo $H^*(\mathrm{Sp}_{n-1})$ e pela exatidão da sequência (**), os monômios $\gamma^*(x_I) \equiv x_I$ e $\alpha^*(x_J)$ formam uma base para o módulo $H^*(\mathrm{Sp}_n)$ pois

$$H^*(\mathrm{Sp}_n) \cong \alpha^*(H^*(\mathrm{Sp}_{n-1})) \oplus \gamma^*(H^*(\mathrm{Sp}_{n-1}))$$

Como $x_J \equiv \gamma^*(x_J)$ temos $i^*(x_J) = i^*\gamma^*(x_J) = x_J$, logo $\alpha^*(x_J) = \alpha^*i^*(x_J) = x_n \smile x_J$ (ver corolário 3.4 do §3 do capítulo 2).

Segue-se então que $H^*(\mathrm{Sp}_n)$ é a álgebra exterior gerada por $x_1, \dots, x_n$. (Note que

$$x_n^2 = x_n \smile x_n = 0 \text{ pois } \dim x_n = 4n-1).$$

Por hipótese os elementos $i^*(x_j)$ ($j < n$) são primitivos em Sp_{n-1} .

Desde que i^* é um isomorfismo em dimensões $\leq j$, pois se $q \leq j < n$ então $q - 4n + 1 \leq -6$ e portanto $H^{q-4n+1}(\mathrm{Sp}_{n-1}) = 0$, segue que $i^* \otimes i^*$ também é um isomorfismo (ver o3.2.5), e então os x_j ($j < n$) são primitivos em Sp_n (ver o3.2.4).

Desde que $p: \mathrm{Sp}_n \rightarrow S^{4n-1}$ é uma H -fibrção tem-se que $x_n = \alpha^*(1)$ também é primitivo (ver Teorema 3.7 do §3 do Capítulo 2).

Teorema 3.3 A álgebra de Hopf $H_*(U_n; A)$ com coeficientes em um domínio de ideais principais A é a álgebra exterior $\Lambda(x'_1, \dots, x'_n)$, onde x'_i é um elemento primitivo de $H_{2i-1}(U_n; A)$. Em particular, a álgebra Pontryagin de U_n é comutativa.

Para um entendimento melhor da demonstração deste teorema (que virá logo a seguir) façamos algumas observações:

o3.3.1) Calculemos $\mu^*(x_K)$ (onde μ^* é a multiplicação em U_n); $x_K = x_{K_1} \smile \dots \smile x_{K_n}$ com $K = \{K_1, \dots, K_n\}$ onde $K_1 < \dots < K_n \leq n$ e x_{K_i} é primitivo.

Se $K = \{K_1\}$

$\mu^*(x_{K_1}) = x_{K_1} \times 1 + 1 \times x_{K_1}$ (note que x_{K_1} é primitivo).

Por outro lado

$$\sum_{I+J=\{K_1\}} \eta(I, J) x_I \times x_J = \eta(\{K_1\}, \phi) x_{k_1} \times x_\phi + \eta(\phi, \{K_1\}) x_\phi \times x_{k_1}$$

onde

$$\eta(\{K_1\}, \phi) = \text{sinal da permutação} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\eta(\phi, \{K_1\}) = \text{sinal da permutação} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = 1$$

e $x_\phi = 1$. Portanto

$$\sum_{I+J=\{K_1\}} \eta(I, J) x_I \times x_J = x_{k_1} \times 1 + 1 \times x_{k_1} = \mu^*(x_{k_1}).$$

Se $K = \{k_1, k_2\}$

$$\begin{aligned} \mu^*(x_K) &= \mu^*(x_{k_1} \cup x_{k_2}) = \mu^*(x_{k_1}) \cup \mu^*(x_{k_2}) = \\ &= (x_{k_1} \times 1 + 1 \times x_{k_1}) \cup (x_{k_2} \times 1 + 1 \times x_{k_2}) = \\ &= (x_{k_1} \times 1) \cup (x_{k_2} \times 1) + (x_{k_1} \times 1) \cup (1 \times x_{k_2}) + \\ &+ (1 \times x_{k_1}) \cup (x_{k_2} \times 1) + (1 \times x_{k_1}) \cup (1 \times x_{k_2}) = \\ &= (-1)^{0 \cdot (2k_2 - 1)} (x_{k_1} \cup x_{k_2}) \times (1 \cup 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{0 \cdot 0} (x_{k_1} \cup 1) \times (1 \cup x_{k_2}) + \\
 & + (-1)^{(2k_1-1)(2k_2-1)} (1 \cup x_{k_2}) \times (x_{k_1} \cup 1) + \\
 & + (-1)^{(2k_1-1) \cdot 0} (1 \cup 1) \times (x_{k_1} \cup x_{k_2}) = \\
 & = x_k \times 1 + x_{k_1} \times x_{k_2} - x_{k_2} \times x_{k_1} + 1 \times x_k
 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 \sum_{I+J=\{k_1, k_2\}} \eta(I, J) x_I \times x_J &= \eta(k, \phi) x_k \times x_\phi + \\
 &+ \eta(\{k_1\}, \{k_2\}) x_{k_1} \times x_{k_2} + \\
 &+ \eta(\{k_2\}, \{k_1\}) x_{k_2} \times x_{k_1} + \eta(\phi, k) x_\phi \times x_k
 \end{aligned}$$

onde $\eta(k, \phi) = \text{sinal da permutação } \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = 1,$

$$\eta(\{k_1\}, \{k_2\}) = \text{sinal da permutação } \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\eta(\{k_2\}, \{k_1\}) = \text{sinal da permutação } \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & k_1 \end{pmatrix} = -1,$$

$$\eta(\phi, k) = \text{sinal da permutação } \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} = 1 \text{ e}$$

$x_\phi = 1$. Portanto

$$\sum_{I+J=\{k_1, k_2\}} \eta(I, J) x_I \times x_J = x_k \times 1 + x_{k_1} \times x_{k_2} -$$

$$- x_{k_2} \times x_{k_1} + 1 \times x_k = \mu^*(x_k);$$

e assim por diante, se $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ temos

$$\mu^*(x_k) = \sum_{I+J=K} \eta(I, J) x_I \times x_J \text{ onde } \eta(I, J) \text{ é o sinal da}$$

permutação $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_r & k_{r+1} & \dots & k_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_s \end{pmatrix}$ com

$$I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \text{ e } J = \{j_1, \dots, j_s\}.$$

o3.3.2) Se P, Q são sequências fixadas, então

$$\langle x_P \times x_Q, x'_P \times x'_Q \rangle = (-1)^{p \cdot q}$$

onde p, q são os comprimentos das sequências P, Q respectivamente. Isto se deve ao fato de que

$$(x_P \times x_Q)' = (-1)^{pq} x'_P \times x'_Q$$

e a demonstração deste fato é um tanto laboriosa e envolvendo as definições de produto cross e base dual, sendo por isso omitida aqui.

Demonstração do Teorema 3.3:

Os elementos $x_I = x_{i_1} \cup \dots \cup x_{i_k}$, quando I percorre todas as sequências de inteiros positivos $(i_1, \dots, i_k)$ tal que $i_1 < \dots < i_k \leq n$, formam uma base para o módulo $H^*(U_n; A)$. Seja $\{x'_I\}$ a base dual.

Se I, J são duas tais sequências sem nenhum termo em comum, seja $K = I + J$ a sequência obtida rearranjando $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ em ordem crescente.

Temos então (ver 03.3.1)

$$\mu^*(X_K) = \sum_{I+J=K} \eta(I, J) x'_I \times x'_J, \text{ onde}$$

$\eta(I, J)$ é o sinal da permutação

$$\begin{pmatrix} k_1, \dots, k_r, k_{r+1}, \dots, k_n \\ i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \end{pmatrix}$$

Sejam P e Q sequências fixadas. Calcularemos $x'_P \cdot x'_Q$ (produto de Pontryagin) encontrando seu índice de Kronecker com cada elemento base $x_{\dots}$. Ora

$$\begin{aligned}
 \langle x_K, x'_P \cdot x'_Q \rangle &= \langle x_K, \mu_*(x'_P \times x'_Q) \rangle \\
 &= \langle \mu^*(x_K), x'_P \times x'_Q \rangle \\
 &= \sum_{I+J=K} \eta(I, J) \langle x_I \times x_J, x'_P \times x'_Q \rangle.
 \end{aligned}$$

Existe no máximo um termo não nulo nesta soma, que acontece quando $I = P$ e $J = Q$.

Se P e Q têm um elemento em comum, ou se elas não têm elemento em comum, mas $P + Q \neq K$, isto não pode acontecer, e assim $\langle x_K, x'_P \cdot x'_Q \rangle = 0$.

Se $P + Q = K$, então

$$\begin{aligned}
 \langle x_K, x'_P \cdot x'_Q \rangle &= \eta(P, Q) \langle x_P \times x_Q, x'_P \times x'_Q \rangle = \\
 &= (-1)^{P \cdot q} \eta(P, Q)
 \end{aligned}$$

onde p e q são os comprimentos das sequências P , Q respectivamente (ver o3.3.2). Então,

$$(*) \quad x'_P \cdot x'_Q = \begin{cases} (-1)^{P \cdot q} \eta(P, Q) x'_{P+Q} & \text{se } P \text{ e } Q \text{ não têm elemento em comum,} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Trocando P e Q em $(*)$ resulta

$$\begin{aligned}
 x'_Q \cdot x'_P &= (-1)^{P \cdot q} \eta(Q, P) x'_{P+Q} \\
 &= \eta(Q, P) \eta(P, Q) x'_P \cdot x'_Q \quad (\text{por } (*)) \\
 &= (-1)^{P \cdot q} x'_P \cdot x'_Q
 \end{aligned}$$

e então a álgebra é comutativa.

Mais ainda, $x_i'^2 = 0$ para cada i (note que $x_i' \in H_{2i-1}(U_n; A)$).

Para provar que $H_*(U_n; A)$ é uma álgebra exterior, resta mostrar que os monômios $x_{j_1}' \dots x_{j_k}'$ com $j_1 > \dots > j_k$ formam uma base.

Para isto é suficiente mostrar que, se $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ então $x_I' = x_{i_k}' \dots x_{i_1}'$ (**)

Isto sendo evidentemente verdadeiro para $k = 1$, coloquemos $J = (i_2, \dots, i_k)$ e assumamos que $x_J' = x_{i_k}' \dots x_{i_2}'$. Então por (*),

$$\begin{aligned} x_J' \cdot x_{i_1}' &= (-1)^{k-1} \eta(J, \{i_1\}) x_I' \\ &= (-1)^{k-1} (-1)^{k-1} x_I' = x_I', \text{ isto} \end{aligned}$$

completa a prova indutiva de (**).

Resta provar que x_i' é primitivo. Ora

$$\begin{aligned} \langle x_I' \times x_J', \Delta_*(x_i') \rangle &= \langle \Delta^*(x_I' \times x_J'), x_i' \rangle \\ &= \langle x_I' \smile x_J', x_i' \rangle \end{aligned}$$

Se I, J têm um elemento em comum,

$x_I' \smile x_J' = 0$; caso contrário $x_I' \smile x_J' = x_{I+J}'$.

Portanto, se ou I ou J têm comprimento > 1 ou ambos têm comprimento 1, então

$$\langle x_I \times x_J, \Delta_*(x'_i) \rangle = 0.$$

Os únicos índices de Kronecker não nulos são

$$\langle x_i \times 1, \Delta_*(x'_i) \rangle = \langle x_i \cup 1, x'_i \rangle = \langle x_i, x'_i \rangle = 1$$

$$\langle 1 \times x_i, \Delta_*(x'_i) \rangle = \langle 1 \cup x_i, x'_i \rangle = \langle x_i, x'_i \rangle = 1$$

e portanto

$$\Delta_*(x'_i) = x'_i \times 1 + 1 \times x'_i, \text{ isto é, } x'_i \text{ é primitivo.}$$

□

Teorema 3.4

A álgebra de Hopf $H_*(Sp_n; A)$ com coeficientes em um domínio de ideais principais A é a álgebra exterior $\Lambda(x'_1, \dots, x'_n)$, onde x'_i é um elemento primitivo de $H_{i-1}(Sp_n; A)$. Em particular a álgebra Pontryagin de Sp_n é comutativa.

Demonstração do teorema:

A prova deste teorema difere apenas em notação com a prova do teorema 3.3. □

BIBLIOGRAFIA

Livros e Notas

- [1] - Ricabarra/Larotonda, Notas de Topologia Algébra
ca, Fascículo 24, Universidad de Buenos Aires,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Dep
artamento de Matematicas, 1969.
- [2] - Vick, J.W., Homology Theory, Academic, N.Y., 1973.
- [3] - Whitehead, G.W., Elements of Homotopy Theory, GTM,
61, Springer-Verlag, N.Y., 1978.
- [4] - Steenrod, N., The Topology of Fibre Bundles,
Princeton: Princeton University Press, 1951.
- [5] - Dugundji, J., Topology, Boston: Allyn and Bacon,
1965.
- [6] - Artin, E., and Braun, H., Introduction to
Algebraic Topology, Merrill Publ., Columbus,
Ohio, 1969.

- [7] - Greenberg, M.J./Harper, J.R., Algebraic Topology,
The Benjamin/Cumming Publishing Company, 1981.

- [8] - Eilenberg, Samuel and Steenrod, Norman,
Foundations of Algebraic Topology, Princeton
Mathematical Series, Nº 15. Princeton
University Press, 1952.

- [9] - Mac Lane, Saunders, Homology, Die Grundlehren
der Mathematischen Wissenschaften, Band 114,
New York: Academic Press and Berlin -
Heidelberg-New York: Springer Verlag 1963, 1975.

Artigos

- [10] - Steenrod, Norman E. , A convenient category of
topological spaces, Michigan Math. J. 14 (1967),
133-152.

- [11] - Milnor, John W. and Moore, John C. ,
On the structure of Hopf algebras, Ann. of
Math. (2) 81 (1965), 211-264.