DICOTOMIA DISCRETA E
APLICAÇÕES

Alexandre Nolasco de Carvalho

Orientador: *Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho*

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para a obten
ção do Título de Mestre em Matemática.

Ao

Sebastião,
Odites,
Jussara e
Felipe.

- A G R A D E C I M E N T O S -

- Ao Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho, por iniciar-me na Matemática, pelo exemplo, pelo apoio e incentivo constantes e pela orientação segura e paciente.
- Às muitas outras pessoas que colaboraram direta ou in diretamente para a realização deste trabalho.
- Finalmente, à Secretaria de Trabalhos Científicos do I.C.M.S.C., pelo excelente trabalho dactilográfico.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP em sua fase inicial.

A B S T R A C T

In this work we study the problem of "roughness" of exponential dichotomies for family of evolution operators. We show that dichotomies are not destroyed by small perturbations of the equations. We do this for equations that are perturbations of C_0 -semigroups.

Our main tool is discrete dichotomy.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAP. I - PRELIMINARES	1
I.0 - Teoria Espectral e Comutatividade	2
I.1 - Semigrupos de Operadores	5
I.2 - Equações de Evolução	18
CAP. II - DICOTOMIA DISCRETA	26
CAP. III - DICOTOMIA EXPONENCIAL PARA FAMÍLIAS DE OPERADORES DE EVOLUÇÃO	52
III.1 - Operadores de Evolução	53
III.2 - Dicotomias Exponenciais	65
BIBLIOGRAFIA	96

I N T R O D U Ç Ã O

Na teoria geométrica de equações diferenciais, o estudo das dicotomias exponenciais tem importância fundamental. Uma das propriedades que é importante para as aplicações é a preservação da dicotomia exponencial por "pequenas" perturbações.

Henry [3] estudou a preservação da dicotomia exponencial, sob perturbações com integral pequena, para equações diferenciais sobre um espaço de Banach X do tipo

$$\dot{x} = (A(t) + A_0)x .$$

Onde $t \rightarrow A(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é limitada, contínua na topologia forte dos operadores e A_0 é o gerador de um semigrupo analítico de operadores sobre X .

Neste trabalho estudamos o problema acima quando A_0 é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo. A técnica utilizada é, em muito, semelhante à utilizada por Henry [3] e consiste em estabelecer um elo entre dicotomia discreta e exponencial, e então utilizar os resultados de preservação do caso discreto para concluir preservação da dicotomia exponencial.

O uso da dicotomia discreta para demonstrar a preservação da dicotomia exponencial torna-se interessante devido ao seguinte resultado: $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L(X)$ tem dicotomia discreta se e só se para cada sequência limitada $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset X$ a equação de diferença $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ tem uma única solução limitada.

Este trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro deles contém resultados básicos de Análise Funcional e Semigrupos de Operadores sobre o espaço de Banach X , que serão utilizados nos capítulos seguintes. O segundo capítulo apresenta a teoria de dicotomia discreta e entre os resultados mais importantes deste capítulo estão o teorema de caracterização de dicotomia discreta, dado no parágrafo anterior e o teorema de preservação de dicotomia discreta. O terceiro capítulo apresenta resultados que relacionam dicotomia discreta à exponencial para concluir a preservação da dicotomia exponencial.

C A P Í T U L O I

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos resultados que são o suporte para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Na seção I.0 procuramos estabelecer os resultados de teoria espectral e comutatividade de operadores que são mais importantes neste trabalho. Estes resultados podem ser encontrados em [5].

Na seção I.1 preocupamo-nos em apresentar os principais fatos da teoria de semigrupos. Estes resultados são fundamentais no estudo de famílias de operadores de evolução e o teorema 1.16 já surge como um primeiro exemplo de dicotomia exponencial, que será tratada no capítulo III. A teoria apresentada nesta seção pode ser encontrada em [1] e [2], excessão feita ao teorema 1.13 que não é encontrado na literatura.

Na seção I.2 introduzimos equações de evolução, definindo solução mild e estrita e desenvolvendo os primeiros fatos. Neste ponto passamos a demonstrar todos os resultados mencionados visto que muitos destes ainda não são usuais na literatura.

Muitos fatos de análise funcional, além dos já mencionados, são frequentemente utilizados. Para estes referimos [4] e [5].

I.0 - TEORIA ESPECTRAL E COMUTATIVIDADE

Seja X um espaço de Banach real ou complexo, $L(X)$ o espaço das transformações lineares e contínuas de X em X . Seja T uma transformação linear definida sobre um subespaço $D(T)$ de X e $R(T) = TD(T)$, $D(T)$ e $R(T)$ são ditos domínio e imagem de T , respectivamente.

0.1 - DEFINIÇÃO

Seja $T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset X$. Se $\xi \in \mathbb{C}$ é tal que $(\xi - T)$ é inversível, com inversa limitada e $\overline{R(\xi - T)} = X$, dizemos que ξ pertence ao conjunto resolvente de T . Denota-se $\xi \in \rho(T)$. Se $\xi \notin \rho(T)$, dizemos que ξ pertence ao espectro de T . Denota-se $\xi \in \sigma(T)$.

Se $\xi \in \rho(T)$, o operador $(\xi - T)^{-1} = R(\xi, T)$ é chamado o perador resolvente de T em ξ .

O Teorema do Gráfico Fechado implica o seguinte importante teorema.

0.2 - TEOREMA

Se $T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset X$ é um operador linear fechado temos que, $\xi \in \rho(T)$ se e só se $(\xi - T)$ tem inversa com domínio X .

Nas situações em que é importante considerar o infinito na análise espectral é usual supor que $\xi = \infty \in \rho(T)$ se $T \in L(X)$ e ao espectro em caso contrário. O espectro e o resolvente assim extendidos são denotados por $\tilde{\sigma}(T)$ e $\tilde{\rho}(T)$, respectivamente.

0.3 - DEFINIÇÃO

Um operador $T: D(T) \subset X \rightarrow R(T) \subset X$ comuta com um operador $A \in L(X)$ se e só se $AT \subset TA$. Onde $AT \subset TA$ significa que se $u \in D(T)$ então $Au \in D(T)$ e $TAu = ATu$.

Alguns fatos de comutatividade e teoria espectral são relacionados a seguir. Alguns deles serão referidos nas seções e capítulos posteriores ou mesmo utilizados sem qualquer referência.

- i) A definição 0.3 é equivalente a $AT = TA$ se $T \in L(X)$.
- ii) Se um operador T é inversível e comuta com $A \in L(X)$, então T^{-1} comuta com A .
- iii) Se $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ é fechado e $\xi \in \rho(T)$, então $R(\xi, T)T \subset TR(\xi, T) = I + \xi R(\xi, T) \in L(X)$.
Portanto T comuta com $R(\xi, T)$.
- iv) Se T é fechado e A é pré-fechado com $D(A) \supset D(T)$, então $AR(\xi, T) \in L(X)$ para todo $\xi \in \rho(T)$.
- v) Se T é fechado e $\rho(T) \neq \emptyset$ para que T commute com $A \in L(X)$ é necessário que $R(\xi, T)A = AR(\xi, T)$ para todo $\xi \in \rho(T)$ e suficiente que para algum $\xi_0 \in \rho(T)$, $R(\xi_0, T)A = AR(\xi_0, T)$.
- vi) Se $\xi_1 \neq \xi_2$ estão em $\rho(T)$, então

$$R(\xi_1, T)R(\xi_2, T) = \frac{R(\xi_1, T) - R(\xi_2, T)}{\xi_1 - \xi_2}.$$

vii) Se $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ é fechado e inversível, então $\sigma(T)$ é levado em $\sigma(T^{-1})$ pela aplicação $\xi \rightarrow \xi^{-1}$ do plano complexo extendido nele mesmo.

0.4 - TEOREMA

O conjunto resolvente de um operador linear T é aberto e se T é fechado a aplicação

$$\xi \rightarrow R(\xi, T) : \rho(T) \rightarrow L(X)$$

é analítica e não pode ser continuada analiticamente à fronteira de $\rho(T)$.

No caso particular em que $T \in L(X)$ os conjuntos $\rho(T)$ e $\sigma(T)$ são ambos não vazios, com $\sigma(T) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$; ou seja $\sigma(T)$ é compacto.

0.5 - DEFINIÇÃO

Se $T \in L(X)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$$

existe e coincide com $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. Este limite é chamado raio espectral de T e será denotado por $r_\sigma(T)$.

O conceito e o teorema a seguir são, talvez, a parte mais importante desta seção e estão intimamente relacionados a problemas que abordaremos mais tarde.

0.6 - DEFINIÇÃO

Dizemos que T se decompõe de acordo com a decomposição $X = M' \oplus N'$ do espaço se:

i) $PD(T) \subset D(T)$;

$$ii) \quad TPD(T) \subset PD(T) \quad e$$

$$iii) \quad T(I-P)D(T) \subset (I-P)D(T)$$

onde P é a projeção sobre M' ao longo de N' .

0.7 - TEOREMA

Seja $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado e $\sigma(T) = \sigma' \cup \sigma''$, $\sigma' \cap \sigma'' = \emptyset$ com σ' contida no interior de uma curva fechada simples e retificável Γ e σ'' no exterior de Γ . Então T se decompõe de acordo com alguma decomposição do espaço, $X = M' \oplus M''$ tal que $T|_{M'} \in L(M')$, $\sigma' = \sigma(T|_{M'})$, $\sigma'' = \sigma(T|_{M''})$. Ainda, a projeção sobre M' ao longo de M'' é dada por

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, T) d\xi \in L(X).$$

Aqui $T|_{M'}$ é definida pela extensão $\tilde{a} M'$ de T' , onde: $D(T') = D(T) \cap M'$ e $T'x = Tx$ para todo $x \in D(T')$. Ainda $T|_{M''}$ é dada por $D(T|_{M''}) = D(T) \cap M''$ e $T|_{M''}x = Tx$ para todo x em $D(T|_{M''})$.

I.1 - SEMIGRUPOS DE OPERADORES

Nesta seção consideraremos X um espaço de Banach real ou complexo e $L(X)$ o espaço das transformações lineares e contínuas de X em X .

1.1 - DEFINIÇÃO

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores ou um C_0 -semigrupo sobre X é uma família $\{T(t), t \geq 0\} \subset L(X)$ satis

fazendo:

- i) $T(0) = I$;
- ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para $t, s \geq 0$;
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\| = 0$ para todo $x \in X$.

1.2 - DEFINIÇÃO

Se $\{T(t), t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo sobre X seu gerador infinitesimal é a aplicação $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ definida por:

$$D(A) = \{x \in X : \text{existe o limite } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Daqui por diante um C_0 -semigrupo será indicado na forma $\{e^{At}, t \geq 0\}$ onde A é o seu gerador infinitesimal e se B é um operador linear definido em um subespaço de X indicaremos por $D(B)$ o seu domínio e $R(B)$ a sua imagem.

O teorema a seguir estabelece importantes propriedades de C_0 -semigrupos.

1.3 - TEOREMA

Suponha que $\{e^{At}, t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo sobre X .

- i) Existe $M \geq 1$ e um número real β tal que

$$\|T(t)\| \leq M e^{\beta t}, \quad t \geq 0.$$

- ii) Para qualquer $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$.
- iii) A aplicação $t \mapsto \|T(t)\|$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.

- iv) O operador A é fechado e densamente definido. Para cada $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e
- $$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

- v) $\bigcup_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em X .
- vi) Para $\operatorname{Re} \lambda \geq \beta$ (β dado por i)), λ está no resolvente de A e para todo $x \in X$
- $$R(\lambda, A)x = (\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

1.4 - TEOREMA (de Hille-Yosida)

Suponha que $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é uma transformação linear. Então as seguintes condições são equivalentes:

- i) A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$ tal que $\|e^{At}\| \leq e^{\omega t}$ para todo $t \geq 0$.
- ii) A é fechado, densamente definido, com resolvente contendo (ω, ∞) e $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$ para $\lambda > \omega$.

Note que se $\{e^{At}, t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo com gerador A . Então $\{e^{At}e^{-\omega t}, t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo com gerador $A - \omega$.

1.5 - LEMA (A. Pazy)

Suponha que A é um operador linear cujo resolvente contém $(0, \infty)$ e que satisfaz

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq M \lambda^{-n}$$

quaisquer que sejam $n \geq 1$ e $\lambda > 0$. Então há uma norma $|\cdot|$ sobre X tal que

$$\|x\| \leq |x| \leq M \|x\| \quad \text{para todo } x \in X$$

e

$$|(\lambda - A)^{-1}x| \leq \lambda^{-1}|x| \quad \text{para todo } x \in X \text{ e } \lambda > 0.$$

O Teorema a seguir é conhecido como forma geral do Teorema de Hille-Yosida e foi obtido independentemente por W. Feller, I. Miyadera e R.S. Phillips, quase simultaneamente.

1.6 - TEOREMA

Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é uma transformação linear. Então, as seguintes afirmativas são equivalentes:

i) A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$ tal que

$$\|e^{At}\| \leq M e^{\beta t} \quad \text{para } t \geq 0;$$

ii) A é um operador fechado, densamente definido cujo resolvente contém (β, ∞) e

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq M(\lambda - \beta)^{-n} \quad \text{para } \lambda > \beta \text{ e } n \geq 1.$$

A técnica a seguir nos permite verificar se um determinado operador é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sem a necessidade de ter estimativas sobre a norma do operador resolvente.

1.7 - DEFINIÇÃO

Seja X um espaço de Banach e X' o seu dual com a norma usual. Uma aplicação dualidade $j : X \rightarrow X'$ é uma aplicação tal que

$$j(x) \in J(x) = \{\xi \in X' / \operatorname{Re} \xi(x) = \|x\|^2, \|\xi\| = \|x\|\}.$$

O Teorema de Hahn-Banach garante que $J(x)$ é não vazio para qualquer $x \in X$.

1.8 - DEFINIÇÃO

Um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dito dissipativo se para cada $x \in D(A)$ existe $\xi \in J(x)$ tal que $\operatorname{Re} \xi(Ax) \leq 0$.

1.9 - TEOREMA (de Lumer-Phillips)

Suponha que A é um operador densamente definido em um

espaço de Banach X , real ou complexo.

- i) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações ($\|e^{At}\| \leq 1$, $t \geq 0$); então A é dissipativo. Além disso $\operatorname{Re} \xi(Ax) \leq 0$ para todo $\xi \in J(x)$ e $R(\lambda-A) = X$ para todo $\lambda > 0$.
- ii) Se A é dissipativo e $R(\lambda-A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Nosso objetivo agora passa a ser a obtenção de uma forma mais aplicável do Teorema de Lumer-Phillips, em particular que remos obter uma formulação que nos permita verificar a dissipatividade em conjuntos menores.

1.10 - LEMA

A é dissipativo segundo alguma aplicação dualidade j se e só se

$$\|(\lambda-A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

para todo $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$.

1.11 - LEMA

Seja A_0 dissipativo segundo alguma aplicação dualidade j . Se $\overline{D(A_0)} = X$, então A_0 é fechável e o fecho A de A_0 é dissipativo segundo a mesma aplicação dualidade j .

Prova:

Suponha que A_0 não é fechável, então existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A_0)$, $x_n \rightarrow 0$ e $A_0 x_n \rightarrow y$ com $\|y\| = 1$. Pelo lema 11, temos:

$$\|(x+tx_n) - tA(x+tx_n)\| \geq \|(x+tx_n)\|$$

para todo $x \in D(A_0)$, $t > 0$.

Fazendo $n \rightarrow \infty$ e então $t \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\|x-y\| \geq \|x\| \quad \forall x \in D(A_0)$$

o que contradiz a densidade de $D(A_0)$.

Segue que A_0 é fechável. Seja $x \in D(A) \setminus D(A_0)$ e $y = Ax$. Então há uma sequência $\{x_n\} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $y_n = Ax_n \rightarrow y$. A sequência $j(x_n)$ é limitada em X' desde que $\|j(x_n)\| = \|x_n\|$. Seja v' um ponto do fecho da sequência $\{j(x_n), n \geq 1\}$ na topologia fraca-estrela. Então

$$\|v'\| \leq \lim \|j(x_n)\| = \|x\| \quad e$$

$$v'(x) = \lim [j(x_n)](x_n) = \|x\|^2$$

portanto $\|v'\| = \|x\|$. Ainda

$$\operatorname{Re} v'(y) \leq \overline{\lim} \operatorname{Re}[j(x_n)](Ax_n) \leq 0.$$

Redefinindo j em x por $j(x) = v'$, A torna-se dissipativo com respeito a j .

□

1.12 - LEMA

Se $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ é linear, fechável e com fecho $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. Então $\rho(A_0) = \rho(A)$.

Prova:

Se $\lambda \in \rho(A)$ então $(A-\lambda)^{-1} : X \rightarrow D(A)$ é limitada, em particular $(A_0-\lambda)^{-1} : R(A_0-\lambda) \rightarrow D(A_0)$ é limitada. Mostremos que $\overline{R(A_0-\lambda)} = X$. Seja $x \in X \setminus \overline{R(A_0-\lambda)}$, então $y = (A-\lambda)^{-1}x$ implica $x = (A-\lambda)y$ e existem $y_n \rightarrow y$, $x_n \rightarrow x$ tais que $y_n \in D(A_0)$ e $x_n = (A_0-\lambda)y_n$. Isto mostra que $x \in \overline{R(A_0-\lambda)}$ e $X = \overline{R(A_0-\lambda)}$. Ainda $\lambda \in \rho(A_0)$.

Se $\lambda \in \rho(A_0)$ então $(A_0-\lambda)^{-1} : R(A_0-\lambda) \rightarrow D(A_0)$ é limitada e com $\overline{R(A_0-\lambda)} = X$ então $R(A-\lambda) = X$ e se $A-\lambda$ é injetiva temos que $(A-\lambda)^{-1} : X \rightarrow D(A)$ é limitada. Mostremos que $A-\lambda$ é injetiva. Se $x \neq y$ em $D(A) \setminus D(A_0)$ então existe

$x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ com $(A_0 - \lambda)x_n \rightarrow (A - \lambda)x$ e $(A_0 - \lambda)y_n \rightarrow (A - \lambda)y$, $x_n, y_n \in D(A_0)$. Suponha que $(A - \lambda)x = (A - \lambda)y$ então $x_n - y_n \rightarrow x - y$ e $(A_0 - \lambda)(x_n - y_n) \rightarrow 0$ daí $(A_0 - \lambda)^{-1}(x_n - y_n) \rightarrow (A_0 - \lambda)^{-1}(x - y)$ e $(x_n - y_n) \rightarrow 0$, donde

$$x - y = 0$$

o que conclui a demonstração. □

1.13 - TEOREMA

Se A_0 é dissipativo segundo alguma aplicação dualidade j , $\overline{D(A_0)} = X$ e $\overline{R(\lambda_0 - A_0)} = X$ para algum $\lambda_0 > 0$. Então o fecho A de A_0 existe e gera C_0 -semigrupo de contrações.

Prova:

Pelo Lema 10 $\lambda_0 \in \rho(A_0)$. Pelo Lema 11 A_0 é fechável e o fecho A , de A_0 , é dissipativo. Pelo Lema 12 $\lambda_0 \in \rho(A)$ e $R(\lambda_0 - A) = X$. Segue do Teorema de Lumer-Phillips que A gera C_0 -semigrupo de contrações.

Este teorema é interessante pois permite que verifiquemos a dissipatividade em subespaços do domínio do gerador infinitesimal que sejam densos em X . Ressaltamos que, se $X = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ temos que $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é denso em $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e tem estrutura bem mais trabalhável.

1.14 - TEOREMA

Suponha que A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\} \subset L(X)$ satisfazendo $\|e^{At}\| \leq Me^{\beta t}$ e assumamos que $\gamma > \max\{0, \beta\}$. Para qualquer $x \in D(A^2)$ e $t > 0$

$$T(t)x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} x \, d\lambda \dots$$

Este limite é uniforme para $\varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

1.15 - TEOREMA

Sejam $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo sobre X e $B \in L(X)$. Então $A+B: D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador de um C_0 -semigrupo $\{e^{(A+B)t}, t \geq 0\}$. Se $\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t}$ para $t \geq 0$ então $\|e^{(A+B)t}\| \leq M e^{(\omega+M\|B\|)t}$ para $t \geq 0$.

O teorema a seguir é um primeiro caso de dicotomia exponencial, que estudaremos no capítulo III.

1.16 - TEOREMA

Assuma que $\{e^{At}, t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo sobre X e para algum $t_0 > 0$ $\sigma(e^{At_0})$ é disjunto do círculo $\{\lambda: |\lambda| = e^{\alpha t_0}\}$, para algum α real. Então

$$E = \int_{|\lambda|=e^{\alpha t_0}} (\lambda - e^{At_0})^{-1} d\lambda \in L(X)$$

é uma projeção, $E e^{At} = e^{At} E$ para $t \geq 0$. Se $X_+ = R(E)$ e $X_- = N(E)$ as restrições $e^{At}|_{X_{\pm}}$ estão em $L(X_{\pm})$, respectivamente, com

$$\begin{aligned} \sigma(e^{At}|_{X_+}) &= \sigma(e^{At}) \cap \{\lambda: |\lambda| < e^{\alpha t}\} = \sigma_t^+ \\ \sigma(e^{At}|_{X_-}) &= \sigma(e^{At}) \cap \{\lambda: |\lambda| > e^{\alpha t}\} = \sigma_t^- \end{aligned}$$

Existem constantes $M \geq 1$, $\delta > 0$ tais que

$$\|e^{At}|_{X_+}\| \leq M e^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{para } t \geq 0,$$

$\{e^{At}|_{X_-}, t \geq 0\}$ estende-se a um C_0 -grupo de operadores sobre X_- , com $e^{At}|_{X_-} = (e^{-At}|_{X_-})^{-1}$ para $t < 0$ e

$$\|e^{At}|_{X_-}\| \leq M e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0.$$

Prova:

Sabemos que $E = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=e^{At_0}} (\lambda - e^{At_0})^{-1} d\lambda$ é uma projeção e se $X_+ = R(E)$, $X_- = N(E)$ o teorema da decomposição espectral (I.0.10) nos diz que

$$\sigma(e^{At_0}|_{X_+}) = \sigma_t^+ \quad \text{e} \quad \sigma(e^{At_0}|_{X_-}) = \sigma_t^-.$$

Ainda e^{At} comuta com e^{At_0} , daí e^{At} comuta com $(\lambda - e^{At_0})^{-1}$ e com E , para todo $t \geq 0$. $E e^{At} = e^{At} E$ implica que $e^{At} X_+ \subset X_+$ e $e^{At} X_- \subset X_-$ e segue que $e^{At}|_{X_{\pm}} \in L(X_{\pm})$.

Em seguida note que o raio espectral de $e^{At_0}|_{X_+}$ é estritamente menor que e^{At_0} , digamos

$$r_{\sigma}(e^{At_0}|_{X_+}) < e^{(\alpha-\delta)t_0} \quad \text{para algum } \delta > 0$$

$$\text{e se } t > 0, \quad r_{\sigma}(e^{At}|_{X_+}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|e^{Amt}\|^{\frac{1}{m}},$$

tomemos $k \cdot t = n_k \cdot t_0 + \tau_k$, $0 \leq \tau_k < t_0$ e então

$$\begin{aligned} r_{\sigma}(e^{At}|_{X_+}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{An_k t_0} e^{A\tau_k}\|^{\frac{t}{n_k t_0 + \tau_k}} \\ &\leq \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|e^{An_k t_0}\|^{\frac{1}{n_k} \cdot \frac{t}{t_0 + \frac{\tau_k}{n_k}}} \cdot \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|e^{A\tau_k}\|^{\frac{t}{n_k t_0 + \tau_k}} \end{aligned}$$

Como $\|e^{At}\| \leq M$ para $0 \leq t < t_0$, temos que

$$r_{\sigma}(e^{At}|_{X_+}) \leq r_{\sigma}(e^{At_0}|_{X_+})^{t/t_0} < e^{(\alpha-\delta)t}$$

e

$$\sigma(e^{At}|_{X_+}) \subset \sigma_t^+.$$

Note agora que $e^{At_0}|_{X_-}$ é inversível com inversa limitada, desde que $\lambda = 0$ está no seu resolvente. Seja $t > 0$ qualquer e $N \geq 1$ tal que $Nt_0 \geq t$, então:

$$e^{A(Nt_0-t)} (e^{At_0}|_{X_-})^{-N}$$

é o inverso de $e^{At}|_{X_-}$ o que denotamos por $e^{-At}|_{X_-}$. Note ainda que o conjunto $\{\lambda : |\lambda| \leq e^{\alpha t_0}\} \subset \rho(e^{At_0}|_{X_-})$ donde segue que $\{\lambda : |\lambda| \geq e^{-\alpha t_0}\} \subset \rho(e^{-At_0}|_{X_-})$, ou ainda, existe $\delta > 0$ tal que

$$r_\sigma(e^{-At_0}|_{X_-}) < e^{-(\alpha+\delta)t_0}.$$

Procedendo como antes obtemos que

$$r_\sigma(e^{-At}|_{X_-}) < e^{-(\alpha+\delta)t} \quad \text{para todo } t > 0$$

isto é

$$r_\sigma(e^{At}|_{X_-}) < e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para todo } t < 0.$$

Ainda, $r_\sigma(e^{At_0}|_{X_-}) > e^{(\alpha+\delta)t_0}$, donde para $t > 0$ qualquer

$$r_\sigma(e^{At_0}|_{X_-}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|e^{Amt_0}|_{X_-}\|^{\frac{1}{m}}$$

tomando $mt_0 = nt + \tau$, $0 \leq \tau < t$, obtemos:

$$r_\sigma(e^{At_0}|_{X_-}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{Ant}\|^{\frac{1}{n} \cdot \frac{t_0}{t+\tau}} \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \|e^{A\tau}\|^{\frac{1}{m}}$$

e

$$e^{(\alpha+\delta)t_0} < r_\sigma(e^{At}|_{X_-})^{t_0/t}, \quad \text{isto é}$$

$$r_\sigma(e^{At}|_{X_-}) > e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{e} \quad \sigma(e^{At}|_{X_-}) \subset \sigma_t^-.$$

Note que

$$\sigma(e^{At}) = \sigma(e^{At}|_{X_+}) \cup \sigma(e^{At}|_{X_-}) = \sigma_t^+ \cup \sigma_t^-$$

Donde segue as igualdades

$$\sigma(e^{At}|_{X_+}) = \sigma_t^+ \quad \text{e} \quad \sigma(e^{At}|_{X_-}) = \sigma_t^-$$

As estimativas sobre a norma seguem da seguinte forma. Para n suficientemente grande.

$$\|e^{Ant_0}|_{X_+}\| < e^{(\alpha-\delta)nt_0}.$$

Logo

$$\|e^{Ant_0}|_{X_+}\| \leq M_0 e^{(\alpha-\delta)nt_0} \quad \text{para } n \geq 0 \quad \text{e algum } M_0 \geq 1.$$

Se $t > 0$ qualquer, então $t = nt_0 + \tau$ e

$$\begin{aligned} \|e^{At}|_{X_+}\| &= \|e^{Ant_0} e^{A\tau}|_{X_+}\| \leq M_0 e^{(\alpha-\delta)nt_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t_0} \{\|e^{A\tau}|_{X_+}\|\} \\ &\leq M e^{(\alpha-\delta)(nt_0+\tau)} = M e^{(\alpha-\delta)t} \end{aligned}$$

onde $M = M_0 \sup_{0 \leq \tau \leq t_0} \{\|e^{A\tau}|_{X_+}\|\} e^{-(\alpha-\delta)t_0}$.

De modo análogo mostra-se que

$$\|e^{At}|_{X_-}\| \leq M e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0.$$

□

Os resultados a seguir buscam relacionar o espectro de e^{At} com o espectro de A , onde $\{e^{At}, t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo.

1.17 - TEOREMA

Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Se

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{As} x \, ds,$$

então

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x \quad \forall x \in X$$

e

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{\lambda t}x - e^{At}x \quad \forall x \in D(A).$$

1.18 - TEOREMA

Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então

$$\sigma(e^{At}) \supset e^{t\sigma(A)} \quad \text{para } t \geq 0.$$

O espectro de um operador linear $A: D(A) \subset X \rightarrow R(A) \subset X$ consiste de três partes mutuamente exclusivas, que são:

a) O espectro pontual $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ não é injetiva}\}$

b) O espectro residual $\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ é injetiva e } \overline{R(\lambda - A)} \not\subseteq X\}$

c) O espectro contínuo $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ é injetiva, } \overline{R(\lambda - A)} = X \text{ e } R(\lambda - A) \not\subseteq X\}$.

1.19 - TEOREMA

Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então:

$$e^{t\sigma_p(A)} \subset \sigma_p(e^{At}) \subset e^{t\sigma_p(A)} \cup \{0\}.$$

Mais precisamente se $\lambda \in \sigma_p(A)$ então $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ e se $e^{\lambda t} \in \sigma_p(e^{At})$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_k = \lambda + \frac{2\pi i k}{t} \in \sigma_p(A)$.

1.20 - TEOREMA

Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Então,

i) Se $\lambda \in \sigma_r(A)$ e nenhum $\lambda_n = \lambda + \frac{2\pi i n}{t}$, $n \in \mathbb{Z}$ está em $\sigma_p(A)$, então $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$

ii) Se $e^{\lambda t} \in \sigma_r(e^{At})$ então nenhum $\lambda_n = \lambda + \frac{2\pi i n}{t}$, $n \in \mathbb{Z}$ está em $\sigma_p(A)$ e existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\lambda_k \in \sigma_r(A)$.

1.21 - TEOREMA

Seja $\{e^{At}, t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo. Se $\lambda \in \sigma_c(A)$ e se nenhum $\lambda_n = \lambda + \frac{2\pi i n}{t}$ está em $\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A)$ então $e^{\lambda t}$ está em $\sigma_c(e^{At})$.

1.22 - DEFINIÇÃO

Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é linear, fechado, densamente definido. Se para $\phi \in (0, \pi/2)$, $M \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, temos

$$\rho(A) \supset \{\lambda : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} = S(a, \phi)$$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M/|\lambda - a| \quad \text{para todo } \lambda \in S(a, \psi),$$

dizemos que o operador A é setorial.

1.23 - TEOREMA

Assuma que $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é tal que $\overline{D(A)} = X$ e $-A$ é setorial, isto é para reais a, c e ψ , $\pi/2 < \psi \leq \pi$,

$$\Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} / |\arg(\lambda - a)| \leq \psi\} \subset \rho(A)$$

e $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq c/|\lambda - a|$ para $\lambda \in \Sigma_a$. Então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

e $t \rightarrow e^{At}$ se estende a uma função analítica de $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \pi/2 - \psi\}$ em $L(X)$ e para algum K real

$$\|e^{At}\| \leq K e^{at}, \quad \|Ae^{At}\| \leq K t^{-1} e^{at}$$

para todo $t > 0$.

Aqui Γ_a consiste de $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) = \pm\psi \text{ e } |\lambda| \geq r\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r \text{ e } |\arg(\lambda - a)| \leq \psi\}$.

O teorema a seguir é o primeiro a estabelecer condições sobre o gerador infinitesimal do semigrupo sob os quais o teorema 1.16 é aplicável.

1.24 - TEOREMA

Se $-A$ é setorial e para algum α real, $\sigma(A)$ é disjunta da reta $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = \alpha\}$, seja $P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$ onde γ contém $\sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \alpha\}$ e $P = 0$ se este conjunto é vazio. Então P é uma projeção contínua, $Pe^{At} = e^{At}P$ para $t \geq 0$. Seja $X_- = N(P)$ e $X_+ = R(P)$, então $e^{At}|_{X_{\pm}} \in L(X_{\pm})$, respectivamente. Ainda:

$$\|e^{At}|_{X_+}\| \leq Me^{(\alpha-\delta)t} \quad \text{para } t \geq 0$$

e

$$\|e^{At}|_{X_-}\| \leq Me^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{para } t \leq 0.$$

$$\text{Onde } (e^{At}|_{X_-}) = (e^{At}|_{X_+})^{-1} \quad \text{para } t < 0.$$

I.2 - EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

Seja X um espaço de Banach e $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ linear, com $\overline{D(T)} = X$. Se $x' \in X'$, então $x' \circ T$ é um funcional linear definido sobre $D(T)$ e se T não é limitada $x' \circ T$ pode não ser limitada. Contudo se $x' \circ T$ é limitada, tem uma única extensão limitada $\tilde{a}$ $\overline{D(T)} = X$. Denotemos este elemento de X' por $T'y'$. Seja

$$D(T') = \{x' \in X' : x' \circ T \text{ é limitada sobre } D(T)\},$$

o conjugado de T é o operador linear T' definido por

$$\langle x, T'x' \rangle = \langle Tx, x' \rangle, \quad x \in D(T) \quad \text{e} \quad x' \in D(T').$$

Note que a relação acima define completamente T' desde que, para cada $x' \in D(T')$ especifica os valores de funcional linear limitado $T'x'$ sobre o denso $D(T)$ de X .

A definição de T' nada informa com respeito ao tamanho de $D(T')$, quando T não é contínua, na verdade $D(T')$ pode consistir apenas do funcional nulo. Esta situação é mais agradável quando T é fechado, como mostra o teorema a seguir.

2.1 - TEOREMA

Suponha que $T: D(T) \subset X \rightarrow X$ é fechado com $\overline{D(T)} = X$. Então o domínio $D(T')$ do operador conjugado de T é total, isto

$\bar{\epsilon} \quad \xi(x) = 0$ para todo $\xi \in D(T')$ implica $x = 0$.

Nesta seção estaremos interessados em encontrar uma expressão para a solução de

$$\dot{x} = Ax + B(t)x$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X e $t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow B(t) \in L(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores.

Começamos por considerar o seguinte problema de valor inicial (p.v.i.)

$$* \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + f(t) , & t_0 < t < t_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

onde $t \rightarrow f(t)$ é contínua em $[t_0, t_1)$ e o operador A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre X .

2.2 - DEFINIÇÃO

a) Uma solução estrita do p.v.i. (*) é uma função $x: [t_0, t_1) \rightarrow X$, contínua em $[t_0, t_1)$ e continuamente diferenciável em (t_0, t_1) , tal que $x(t) \in D(A)$ em (t_0, t_1) , $x(t_0) = x_0$ e $\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + f(t)$, $t_0 < t < t_1$.

b) Uma solução mild do p.v.i. (*) é uma função contínua $x: [t_0, t_1) \rightarrow X$ tal que para qualquer $\xi \in D(A')$, $t \rightarrow \langle \xi, x(t) \rangle$ é diferenciável com

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle = \langle A'\xi, x(t) \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle , \quad t_0 < t < t_1 .$$

O teorema a seguir nos dá formas de mais fácil manuseio para soluções mild e estabelece algumas relações importantes entre soluções mild e estrita.

2.3 - TEOREMA

1) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é uma solução estrita de $(*)$ então ela é também uma solução mild.

2) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é dada por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds$$

então $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é solução mild de $(*)$.

3) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é uma solução mild de $(*)$, então

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds.$$

Em particular o p.v.i. $(*)$ tem solução única.

4) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é uma solução mild de $(*)$ e para al gum $t \in (t_0, t_1)$ ou $x(t) \in D(A)$ ou $\frac{d}{dt} x(t)$ existe, en tão ambos são verdadeiros e neste ponto

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + f(t).$$

Prova:

1) Imediata

2) Definimos $x(t)$ por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds, \quad t_0 \leq t < t_1.$$

Seja $\xi \in D(A')$. Para qualquer $z \in X$ a aplicação $t \rightarrow \langle \xi, e^{At} z \rangle$ é diferenciável com derivada $\langle A^* \xi, e^{At} z \rangle$. De fa to para todo $z \in D(A)$ e $\xi \in D(A')$, temos

$$\langle \xi, e^{At} z \rangle = \langle \xi, z \rangle + \langle \xi, \int_0^t \frac{d}{ds} e^{As} z ds \rangle$$

$$\langle \xi, e^{At} z \rangle = \langle \xi, z \rangle + \langle \xi, \int_0^t A e^{As} z ds \rangle$$

$$\langle \xi, e^{At} z \rangle = \langle \xi, z \rangle + \langle \xi, A \int_0^t e^{As} z ds \rangle$$

$$\langle \xi, e^{At} z \rangle = \langle \xi, z \rangle + \langle A' \xi, \int_0^t e^{As} z ds \rangle$$

$$\langle \xi, e^{At} z \rangle = \langle \xi, z \rangle + \int_0^t \langle A' \xi, e^{As} z \rangle ds. \quad (1)$$

Note que ambos os lados da igualdade (1) fazem sentido para todo $z \in X$ e representam funcionais lineares e contínuos que coincidem em $D(A)$, que é denso em X . Logo a igualdade (1) deve ser verdadeira para todo $z \in X$. Como a expressão do lado direito de (1) é diferenciável com derivada $\langle A'\xi, e^{At}z \rangle$ segue que isto se verifica também para $\langle \xi, e^{At}z \rangle$. Ainda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\langle \xi, \int_{t_0}^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds \rangle - \langle \xi, \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds \rangle \right] \\ &= \frac{1}{h} \langle \xi, \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds \rangle + \int_{t_0}^t \langle \xi, \frac{(e^{Ah} - I)}{h} e^{A(t-s)} f(s) \rangle ds \\ &\rightarrow \langle \xi, f(t) \rangle + \langle A'\xi, \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds \rangle \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Segue que para todo $\xi \in D(A')$

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle &= \langle A'\xi, e^{A(t-t_0)} x_0 \rangle + \langle A'\xi, \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s) ds \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle \\ &= \langle A'\xi, x(t) \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle, \end{aligned}$$

como a derivada a direita é contínua a derivada existe e

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle = \langle A'\xi, x(t) \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle$$

para todo $\xi \in D(A')$. Isto mostra que $x(t)$ é uma solução mild de (*).

3) Mostremos que (*) tem uma única solução mild e isto implicará o requerido.

Sejam $x_i : [t_0, t_1) \rightarrow X$, $i = 1, 2$, soluções mild de (*) e $u : [t_0, t_1) \rightarrow X$ sua diferença. u é uma função contínua com $u(t_0) = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, u(t) \rangle = \langle A'\xi, u(t) \rangle, \quad t_0 < t < t_1,$$

para todo $\xi \in D(A')$. Seja

$$U(t) = \int_{t_0}^t u(s) ds ,$$

então

$$\langle \xi, u(t) \rangle = \int_{t_0}^t \langle A' \xi, u(s) \rangle ds = \langle A' \xi, U(t) \rangle$$

e

$$\langle \xi, \frac{d}{dt} U(t) \rangle = \langle A' \xi, U(t) \rangle$$

Note agora que

$$\langle (e^{At})' \xi, Ax \rangle = \langle A' \xi, e^{At} x \rangle \quad \text{para } \xi \in D(A') \quad \text{e } x \in D(A) ,$$

donde

$$(e^{At})' D(A') \subset D(A')$$

Isto implica que para qualquer $t' \in (t_0, t_1)$ e $\xi \in D(A')$

$$\langle A' (e^{A(t'-t)})' \xi, U(t) \rangle = \langle (e^{A(t'-t)})' \xi, \frac{d}{dt} U(t) \rangle = \langle \xi, e^{A(t'-t)} \frac{d}{dt} U(t) \rangle \text{ e}$$

$$\langle A' (e^{A(t'-t)})' \xi, U(t) \rangle = \langle (e^{A(t'-t)})' A' \xi, U(t) \rangle = \langle A' \xi, e^{A(t'-t)} U(t) \rangle .$$

Daí

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \langle \xi, e^{A(t'-t-h)} U(t+h) - e^{A(t'-t)} U(t) \rangle &= \frac{1}{h} \langle \xi, e^{A(t'-t-h)} [U(t+h) - U(t)] \rangle + \\ &- \frac{1}{h} \langle \xi, [e^{A(t'-t)} - e^{A(t'-t-h)}] U(t) \rangle \end{aligned}$$

tende para

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, e^{A(t'-t)} U(t) \rangle = \langle \xi, e^{A(t'-t)} \frac{d}{dt} U(t) \rangle - \langle A' \xi, e^{A(t'-t)} U(t) \rangle = 0$$

para todo $\xi \in D(A')$ e todo $t' \in (t_0, t_1)$, $t_0 \leq t \leq t'$. Como $U(t_0) = 0$ temos que $\langle \xi, e^{A(t'-t_0)} U(t_0) \rangle = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, e^{A(t'-t)} U(t) \rangle = 0$$

implica que $\langle \xi, e^{A(t'-t)} U(t) \rangle \equiv 0$ para todo $\xi \in D(A')$, $t' \in (t_0, t_1)$ e $t_0 \leq t \leq t'$. Pondo $t = t'$, temos

$$\langle \xi, U(t') \rangle = 0$$

para todo $\xi \in D(A')$, $t' \in (t_0, t_1)$, donde $\langle \xi, u(t) \rangle = 0$ para todo $\xi \in D(A')$ e para todo $t \in (t_0, t_1)$. Segue do fato que $D(A')$ é total e da continuidade que $u(t) = 0$ para todo

$t \in [t_0, t_1)$, ou seja

$$x_1(t) = x_2(t), \quad t_0 \leq t < t_1.$$

4) Seja

$$t_0 \leq t < t+h < t_1.$$

então

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} f(s) ds + \frac{1}{h} (e^{Ah} - I)x(t).$$

O termo do centro converge para $f(t)$ quando $h \rightarrow 0^+$. Logo se algum dos outros termos converge quando $h \rightarrow 0^+$ o terceiro deve necessariamente convergir.

Nosso próximo passo é definir solução do p.v.i.

$$(**) \quad \begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x & t_0 < t < t_1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X e $t \in J \subset \mathbb{R} \rightarrow B(t) \in L(X)$ e contínua na topologia forte dos operadores (aqui $J \supset [t_0, t_1)$).

2.4 - DEFINIÇÃO

a) Uma solução estrita de $(**)$ é uma função contínua $x: [t_0, t_1) \rightarrow X$, continuamente diferenciável em (t_0, t_1) tal que $x(t) \in D(A)$, $t \in (t_0, t_1)$ e $(**)$ se verifica.

b) Uma solução mild de $(**)$ é uma função contínua $x: [t_0, t_1) \rightarrow X$, tal que, para todo $\xi \in D(A')$, $t \rightarrow \langle \xi, x(t) \rangle$ é diferenciável sobre (t_0, t_1) com $x(t_0) = x_0$ e

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle = \langle A'\xi, x(t) \rangle + \langle \xi, B(t)x(t) \rangle, \quad t_0 < t < t_1.$$

O teorema a seguir tem o mesmo objetivo do teorema 2.3.

2.5 - TEOREMA

1) Uma solução estrita de (**) é também uma solução mild de (**).

2) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é contínua e $x(t_0) = x_0$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds, \quad t_0 \leq t < t_1.$$

então $x(t)$ é uma solução mild de (**).

3) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ é uma solução mild de (**), então

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds, \quad t_0 \leq \tau \leq t < t_1.$$

4) Uma solução mild $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ de (**) é uma solução estrita de (**) se e só se ela é continuamente diferenciável em (t_0, t_1) , se e só se $x(t) \in D(A)$ com $t \rightarrow Ax(t)$ contínua em (t_0, t_1) .

Prova:

1) Imediata.

2) É claro, do Teorema 2.3, que $x(t)$ é solução mild de $\dot{x} = Ax + B(t)x(t)$, $x(t_0) = x_0$, e a definição de solução mild de (*) implica que $x(t)$ é solução mild de (**).

3) A definição de solução mild de (**) implica que $x : [\tau, t_1) \rightarrow X$, $t_0 \leq \tau \leq t < t_1$ é solução mild de

$$\begin{cases} \dot{u} = Au + B(t)x(t) & \tau < t < t_1 \\ u(\tau) = x(\tau) \end{cases}$$

então o teorema 2.3 implica

$$x(t) = e^{A(t-\tau)} x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds, \quad t_0 \leq \tau \leq t < t_1.$$

4) Se $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$ +e solução mild de (**), então para $t_0 < t < t+h < t_1$

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds + \frac{1}{h} (e^{Ah} - I) x(t).$$

e como o termo do centro converge para $B(t)x(t)$, as equivalências seguem imediatamente.

CAPÍTULO II

DICOTOMIA DISCRETA

No decorrer deste capítulo consideraremos X um espaço de Banach, $L(X)$ o espaço das transformações lineares e contínuas definidas em X e tomando valores em X . Fixamos ainda as seguintes notações, Z é o conjunto dos números inteiros e $J \subset Z$ representa Z ou um dos seguintes subconjuntos de Z

$$Z_+^p = \{n \in Z : n \geq p\},$$

$$Z_-^p = \{n \in Z : n \leq p\}.$$

Apresentaremos aqui uma série de resultados relativos à dicotomia discreta incluindo a preservação de dicotomia discreta, que é o resultado central deste capítulo. A seguir apresentamos um sumário das implicações relacionando os Teoremas deste capítulo.

Os Lemas 2,3 e 4 provam que se $\{T_n\}_{n \in Z}$ tem dicotomia discreta e $\{y_n\}_{n \in Z}$ é uma sequência limitada de elementos de X , isto é, $\{y_n\}_{n \in Z} \in B = \mathcal{L}_\infty(Z, X)$, então a equação de diferença $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ tem uma única solução limitada. Este resultado é uma parte do Teorema 5.

O Teorema 5 caracteriza dicotomia discreta sobre Z , da

seguinte forma: $\{T_n\}$ tem dicotomia discreta sobre Z se e s $\tilde{o}$ se para cada $\{y_n\} \in B$ a equa $\tilde{c}$ o de diferen $\tilde{c}$ a $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ tem uma $\tilde{u}$ nica solu $\tilde{c}$ o limitada. Deste Teorema seguem fatos im $\tilde{p}$ ortantes como a unicidade na determina $\tilde{c}$ o das proje $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s, al $\tilde{e}$ m de ser fortemente utilizado na demonstra $\tilde{c}$ o do Teorema 9.

O Teorema 9 nos diz que se uma equa $\tilde{c}$ o de diferen $\tilde{c}$ a $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$, tem dicotomia discreta sobre Z , isto $\tilde{e}$, $\{T_n\}_{n \in Z}$ tem dicotomia discreta e se introduzimos nesta equa $\tilde{c}$ o uma perturba $\tilde{c}$ o uniformemente "pequena" a dicotomia $\tilde{e}$ preserva $\tilde{d}$ a.

O Lema 6 nos fornece um meio de estender uma sequ $\tilde{e}$ ncia de operadores $\{T_n\}_{n \in Z_+^0}$ com dicotomia discreta $\tilde{a}$ uma sequ $\tilde{e}$ ncia de operadores $\{T_n\}_{n \in Z}$ com dicotomia discreta, preservando as constantes.

O Teorema 12 $\tilde{e}$ uma extens $\tilde{a}$ o do Teorema 9 para sequ $\tilde{e}$ ncias de operadores $\{T_n\}_{n \in Z_+^0}$ com dicotomia discreta.

Por fim o Teorema 13 $\tilde{e}$ de fundamental import $\tilde{a}$ ncia na de $\tilde{m}$ onstra $\tilde{c}$ o do Teorema III.2.16 .

1 - DEFINI $\tilde{C}$ AO

Seja $\{T_n\}_{n \in J} \subset L(X)$ uma sequ $\tilde{e}$ ncia de operadores lineares e limitados de X em X . Dizemos que $\{T_n\}_{n \in J}$ tem dico $\tilde{t}$ omia discreta sobre J (com constantes M e θ) se existem constantes M , $\theta < 1$ e uma sequ $\tilde{e}$ ncia $\{P_n\}_{n \in J}$ de proje $\tilde{c}$ o $\tilde{e}$ s em $L(X)$ tais que:

$$i) T_n P_n = P_{n+1} T_n, \quad n+1, n \in J$$

$$ii) T_n|_{N(P_n)} \tilde{e} \text{ um isomorfismo de } N(P_n) \text{ sobre } N(P_{n+1}), \quad n+1, n \in J$$

iii) Se $T_{n,m} = T_{n-1} \dots T_m$ p/ $n > m$, $T_{m,m} = I$, então

$$\|T_{n,m} P_m x\| \leq M \theta^{n-m} \|x\| \quad \text{p/ } n \geq m, \quad n, m \in J$$

iv) $\|T_{n,m}(I-P_m)x\| \leq M \theta^{m-n} \|x\|$ p/ $n < m$, $n, m \in J$

onde $T_{n,m}(I-P_m)x = y \in N(P_n) \iff (I-P_m)x = T_{m,n}y$ e está bem definido por ii).

2 - LEMA

Suponha que $\{T_n\}_{n \in J}$ é uma sequência em $L(X)$. Se $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$, p/ $m, n \in J$, temos:

$$x_n = T_{n,m} x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} y_k$$

Prova:

Faremos a prova para $J = \mathbb{Z}_+^0$, as demais são feitas de modo semelhante. Esta relação é verdadeira p/ $n = m$ e $m = n-1$. Ainda $T_{n,m} T_{m-1} = T_{n,m-1}$. Suponha que a relação acima seja verdadeira para $m = r < n$, mostremos que vale também p/ $m = r-1$

$$x_n = T_{n,r} x_r + \sum_{k=r}^{n-1} T_{n,k+1} y_k$$

mas

$$x_r = T_{r-1} x_{r-1} + y_{r-1},$$

daí

$$x_n = T_{n,r} T_{r-1} x_{r-1} + T_{n,r} y_{r-1} + \sum_{k=r}^{n-1} T_{n,k+1} y_k$$

e

$$x_n = T_{n,r-1} x_{r-1} + \sum_{k=r-1}^{n-1} T_{n,k+1} y_k$$

como queríamos. □

Note que $T_{n,m} T_{m,k} = T_{n,k}$ p/ $n \geq m \geq k$ e que se $T_n P_n = P_{n+1} T_n$, então $T_{n,m} P_m = P_n T_{n,m}$.

Se nós definimos a função de Green de $\{T_n\}$ por

$$G_{n,m} = \begin{cases} T_{n,m} P_m & p/ n \geq m \\ -T_{n,m}(I-P_m) & p/ n < m. \end{cases}$$

Então, temos:

3 - LEMA

Se $\{T_n\}$ tem dicotomia discreta em J e se $\{y_n\}_{n \in J}$ é limitada, $\{x_n\}_{n \in J}$ é uma solução limitada de $x_{n+1} + T_n x_n + y_n$ se e só se

a) Se $J = Z_+^P$, $x_n = T_{n,m} P_m x_m + \sum_{k=m}^{\infty} G_{n,k+1} y_k$, $n \geq m$ e $m, n \in Z_+^P$.

b) Se $J = Z_-^P$, $x_n = T_{n,m}(I-P_m)x_m + \sum_{k=-\infty}^{m-1} G_{n,k+1} y_k$, $n < m$ e $m, n \in Z_-^P$.

c) Se $J = Z$, vide Lema 4.

Prova:

a) Sabemos que se x_r é uma solução limitada de $x_{r+1} = T_r x_r + y_r$,

$$x_r = T_{r,n} x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{r,k+1} y_k \quad r \geq n \quad r, n \in Z_+^P$$

e então

$$T_{n,r}(I-P_r)x_r = (I-P_n)x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{n,k+1}(I-P_{k+1})y_k$$

e como $\|T_{n,r}(I-P_r)x_r\| \leq M\theta^{r-n}\|x_r\|$, $\{x_r\}$ limitada, temos

$$\|T_{n,r}(I-P_r)x_r\| \rightarrow 0 \quad \text{se } r \rightarrow \infty$$

e

$$\sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1}(I-P_{k+1})y_k \quad \text{converge.}$$

Deste modo

$$0 = (I-P_n)x_n + \sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1}(I-P_{k+1})y_k.$$

Ainda p/ $n \geq m$

$$P_n x_n = T_{n,m} P_m x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k$$

e

$$x_n = P_n x_n + (I - P_n) x_n = T_{n,m} P_m x_m + \sum_{k=m}^{\infty} G_{n,k+1} y_k.$$

Para ver que $\{x_n\}$ é solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ note que

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \|T_{n,m} P_m x_m\| + \sum_{k=m}^{\infty} M \theta^{n-k-1} \|y_k\| \\ &\leq M \theta^{n-m} \|x_m\| + \left(\sum_{k=m}^{\infty} M \theta^{n-k-1} \right) \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^P} \|y_k\| \\ &< M \|x_m\| + M \cdot \frac{1+\theta}{1-\theta} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^P} \|y_k\| < \infty \end{aligned}$$

b) Se $\{x_n\}$ é solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$, então

$$P_n x_n = T_{n,m} P_m x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k, \quad n \geq m \text{ em } \mathbb{Z}_-^P,$$

onde $\|T_{n,m} P_m x_m\| \leq M \theta^{n-m} \|x_m\| \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow -\infty$ e

$\sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k$ é convergente. Deste modo

$$P_n x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k$$

e

$$(I - P_m) x_m = T_{m,n} (I - P_n) x_n + \sum_{k=n}^{m-1} T_{m,k+1} (I - P_{k+1}) y_k \quad m > n$$

Donde

$$(I - P_n) x_n = T_{n,m} (I - P_m) x_m - \sum_{k=n}^{m-1} T_{n,k+1} (I - P_{k+1}) y_k \quad n < m$$

Daí

$$x_n = (I - P_n) x_n + P_n x_n = T_{n,m} (I - P_m) x_m + \sum_{k=-\infty}^{m-1} G_{n,k+1} y_k$$

Para ver que $\{x_n\}$ dada da forma acima é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$, note que

$$\|x_n\| < M \|x_m\| + M \frac{1+\theta}{1-\theta} \sup_n \|y_k\|$$

4 - LEMA

Se $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta e $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset X$ é limitada, então existe uma única solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ que é dada por $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k$.

Prova:

Em primeiro lugar mostraremos que se $\{x_n\}$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$ então $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k$. Partiremos de

$$x_n = T_{n,m} x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} y_k, \quad n \geq m.$$

Então:

$$(1) P_n x_n = T_{n,m} P_m x_m + \sum_{k=m}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k, \quad n \geq m$$

$$(2) (I - P_r) x_r = T_{r,n} (I - P_n) x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{r,k+1} (I - P_{k+1}) y_k, \quad r \geq n.$$

De (1) sabendo-se que

$$\|T_{n,m} P_m x_m\| \leq M \theta^{n-m} \|x_m\|$$

e que $\{x_n\}$ é limitada, $\theta < 1$, temos que

$$\|T_{n,m} P_m x_m\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad m \rightarrow -\infty$$

e a série

$$\sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k$$

é convergente. Deste modo

$$(3) P_n x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k$$

De (2) segue que

$$T_{n,r} (I - P_r) x_r = (I - P_n) x_n + \sum_{k=n}^{r-1} T_{r,k+1} (I - P_{k+1}) y_k$$

como $\|T_{n,r} (I - P_r) x_r\| \leq M \theta^{r-n} \|x_r\| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$

e

$\sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} (I-P_{k+1}) y_k$ converge, temos:

$$(4) (I-P_n)x_n = - \sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} (I-P_{k+1}) y_k .$$

Deste modo

$$x_n = P_n x_n + (I-P_n)x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k - \sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} (I-P_{k+1}) y_k$$

e

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k .$$

Devemos agora mostrar que $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + y_n$. De fato:

$$x_{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n+1,k+1} y_k$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=-\infty}^n T_{n+1,k+1} P_{k+1} y_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} T_{n+1,k+1} (I-P_{k+1}) y_k$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n+1,k+1} P_{k+1} y_k - \sum_{k=n}^{\infty} T_{n+1,k+1} (I-P_{k+1}) y_k + y_n$$

$$x_{n+1} = T_n \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} T_{n,k+1} P_{k+1} y_k - \sum_{k=n}^{\infty} T_{n,k+1} (I-P_{k+1}) y_k \right) + y_n$$

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n$$

Ainda:

$$\|x_n\| \leq \sum_{k=-\infty}^{n-1} \|T_{n,k+1} P_{k+1} y_k\| + \sum_{k=n}^{\infty} \|T_{n,k+1} (I-P_{k+1}) y_k\|$$

$$\|x_n\| \leq M \sum_{k=-\infty}^{n-1} \theta^{n-k-1} \sup_{-\infty < n < \infty} \|y_n\| + M \sum_{k=n}^{\infty} \theta^{k+1-n} \sup_{-\infty < n < \infty} \|y_n\|$$

$$\|x_n\| \leq M \frac{1+\theta}{1-\theta} \sup_{-\infty < n < \infty} \|y_n\|$$

e $\{x_n\}$ é limitada. □

5 - TEOREMA

Assuma que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência em $L(X)$. As seguin

tes afirmativas são equivalentes:

- i) $\{T_n\}$ tem dicotomia discreta em Z
- ii) Para cada sequência limitada $\{f_n\}_{n \in Z} \subset X$, existe uma única solução limitada $\{x_n\}_{n \in Z}$ de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, $n \in Z$.

Prova:

O Lema 4 mostra $i) \Rightarrow ii)$. Devemos mostrar $ii) \Rightarrow i)$. Consideremos $B = \ell_\infty(Z, X)$ como o espaço de Banach das sequências limitadas $\hat{x} = \{x_n\}_{n \in Z}$ de elementos de X com a norma $\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{n \in Z} \|x_n\|$. Vamos fazer esta demonstração em várias etapas.

(a) A primeira delas consiste em mostrar que a aplicação L com domínio consistindo de todos os $\hat{x} \in B$ tais que $L\hat{x} \in B$, definida por

$$\{x_n\} \xrightarrow{L} \{x_{n+1} - T_n x_n\}, \quad n \in Z,$$

tem inversa limitada. De fato: Se $\{f_n\} \in B$ e se $\{x_n\}$ é a única solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, $n \in Z$, então

$$L^{-1}\{f_n\} = \{x_n\}$$

então L^{-1} existe e está definida $\forall \hat{x} \in B$. Se mostrarmos que L é fechada, do teorema do Gráfico Fechado seguirá o requerido. Mostremos que L é fechada. Seja $\hat{v}_k = \{x_n^k\}_{n \in Z} \in D(L)$ e $\hat{v}_k \rightarrow \hat{v} \in B$, $L\hat{v}_k \rightarrow \hat{w} \in B$. Devemos mostrar que $\hat{v} = \{x_n\}_{n \in Z} \in D(L)$ e que $\hat{w} = \{x_{n+1} - T_n x_n\}_{n \in Z}$. Isto segue de:

$$\hat{v}_k = \{x_n^k\}_{n \in Z} \rightarrow \{x_n\}_{n \in Z} = \hat{v} \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

$$L\hat{v}_k = \{x_{n+1}^k - T_n x_n^k\}_{n \in Z} \rightarrow \hat{w} \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

Daí

$$T_n x_n = x_{n+1} - \hat{w}_n + \hat{v}_n \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

mas

$$T_n x_n^k \rightarrow T_n x_n \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Segue que

$$\{T_n x_n^k\}_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{T_n x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{e da unicidade do limite} \quad \{T_n x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = -\hat{w} + \{x_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

ou seja

$$\hat{w} = \{x_{n+1} - T_n x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Donde $L\hat{v} \in B$, $v \in D(L)$ e $\hat{w} = L\hat{v}$, ainda, L é fechada.

(b) A segunda etapa consiste em dar uma forma de representação para $G = L^{-1}$, para sequências quase nulas. Seja $f = \{\dots, 0, x, 0, \dots\}$ com x na $(m-1)$ -ésima posição. Definamos

$$G_{n,m}x = \{Gf\}_n$$

Então se $f = \{\dots, 0, x_1, x_2, 0, \dots\}$, com x_1 na $(m-1)$ -ésima posição

$$\{Gf\}_n = \{Gf_1\}_n + \{Gf_2\}_n = G_{n,m}x_1 + G_{n,m+1}x_2$$

onde $f_1 = \{\dots, 0, x_1, 0, \dots\}$ e $f_2 = f - f_1$. Deste modo se $\{f_n\}$ é uma sequência quase nula

$$(Gf)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}f_k$$

Note que $G_{n,m} \in L(X)$ e $\|G_{n,m}\|_{L(X)} \leq \|G\|_{L(B)}$ pois se $f = \{\dots, 0, x, 0, \dots\}$ com x na $(m-1)$ -ésima posição, então

$$(Gf)_n = G_{n,m}x$$

$$\text{e } \|G_{n,m}x\|_X = \|(Gf)_n\|_X \leq \|Gf\|_B \leq \|G\|_{L(B)} \|f\|_B = \|G\|_{L(B)} \|x\|_X.$$

$$\text{Daí } \|G_{n,m}\|_{L(X)} \leq \|G\|_{L(B)}.$$

(c) A próxima etapa consiste em definir as projeções P_m . Note que $(Gf)_n = x_n$ deve obedecer $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ da definição de G e se $f = \{\dots, 0, x, 0, \dots\}$ com x na $(m-1)$ -ésima posição, então

$$(Gf)_n = x_n = G_{n,m}x$$

deve satisfazer $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$. Daí

$$G_{n+1,m}x = T_n G_{n,m}x + f_n$$

ou seja

$$G_{n+1,m} = T_n G_{n,m} \quad p/ \quad n \neq m-1 \quad (1)$$

e

$$G_{m,m} + T_{m-1}G_{m-1,m} = I \quad (2)$$

Definimos então $P_m = G_{m,m}$.

d) No que segue estaremos interessados em mostrar que para $n \geq m$ $G_{n,m} = T_{n,m}P_m$ e $p/ \quad n < m$ $T_{m,n}G_{n,m} = -(I-P_m)$.

Começemos com $n \geq m$ e vamos proceder por indução. Para $n = m$ a relação é trivialmente verdadeira, suponha que para al gum $k \geq m$

$$G_{k,m} = T_{k,m}P_m$$

então

$$G_{k+1,m} = T_k G_{k,m} \quad \text{pois} \quad k \geq m \Rightarrow k \neq m-1 \quad e$$

$$G_{k+1,m} = T_k G_{k,m} = T_k T_{k,m}P_m = T_{k+1,m}P_m$$

como queríamos.

Vamos agora mostrar a segunda relação, isto é, para $n < m$ $T_{m,n}G_{n,m} = -(I-P_m)$. Sabemos que $p/ \quad n = m-1$ ((2))

$$T_{m,m-1}G_{m-1,m} = T_{m-1}G_{m-1,m} = G_{m,m} - I = -(I-P_m)$$

Suponha que $p/ \quad n = k < m$

$$T_{m,k}G_{k,m} = -(I-P_m)$$

então

$$T_{m,k-1}G_{k-1,m} = T_{m,k}T_{k-1}G_{k-1,m} \stackrel{(1)}{=} T_{m,k}G_{k,n} = -(I-P_m)$$

como queríamos.

e) Suponha que $x_{n+1} = T_n x_n$, $n \geq m$ define uma sequência limitada e mostremos que $(I - P_m)x_m = 0$.

Vamos começar colocando $x_n = 0$ para $n < m$ e então

$$\begin{cases} x_{n+1} = T_n x_n & \text{p/ } n \neq m-1 \\ x_m - T_{m-1} x_{m-1} = x_m \end{cases}$$

então x_n é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ onde

$f = \{\dots, 0, x_m, 0, \dots\}$ com x_m na $(m-1)$ -ésima posição e como

$$y_n = G_{n,m} x_m$$

também é solução de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, segue que

$$x_n = G_{n,m} x_m$$

em particular

$$x_m = G_{m,m} x_m = P_m x_m \Rightarrow (I - P_m)x_m = 0$$

f) Mostremos agora que P_m é uma projeção. Para qualquer $x \in X$ seja $x_n = G_{n,m} x$, então $x_{n+1} = T_n x_n$ p/ $n \geq m$, desde que $G_{n+1,m} x = T_n G_{n,m} x$ p/ $n \geq m$ ($n > m-1$). Ainda, $\{x_n\}$ é uma sequência limitada, desde que $\|x_n\| \leq \|G\| \|x\|$. Segue da etapa anterior que $(I - P_m)G_{m,m} x = 0 = (I - P_m)P_m x$, isto é

$$P_m x = P_m^2 x \quad \forall \quad x \in X$$

g) Nosso próximo passo é verificar que $P_{m+1} T_m x = T_m P_m x$ quando $(I - P_m)x = 0$. De fato:

$$0 = (I - P_m)x = (I - G_{m,m})x \Rightarrow x = G_{m,m} x = x_m$$

e desde que $x_{n+1} = T_n x_n$ p/ $n \geq m+1$ define uma sequência limitada, temos:

$$(I - P_{m+1})x_{m+1} = 0$$

então

$(I-P_{m+1})T_m x = (I-P_{m+1})T_m x_m = (I-P_{m+1})x_{m+1} = 0 = T_m(I-P_m)x \Rightarrow P_{m+1}T_m x = T_m P_m x$
e temos a comutatividade requerida.

h) Antes de mostrar a comutatividade para os $x \in X$ tais que $P_m x = 0$ vamos mostrar que $T_n|_{N(P_n)} : N(P_n) \rightarrow N(P_{n+1})$ é um isomorfismo.

Suponha que $\{x_n, n \leq m\}$ é limitada e $x_{n+1} = T_n x_n$ para $n < m$, coloquemos $x_n = 0$ para $n > m$. Então $\{x_n\}$, assim construída é solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ onde:

$f = \{\dots, 0, -T_m x_m, 0, \dots\}$ com $-T_m x_m$ na m -ésima posição
logo

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} f_k = -G_{n,m+1} T_m x_m \quad \forall n$$

em particular

$$0 = x_{m+1} = -G_{m+1,m+1} T_m x_m = -P_{m+1} T_m x_m$$

e $T_m x_m \in N(P_{m+1})$.

Suponha agora que $x \in N(P_m)$ e seja $y_n = G_{n,m} x$; então $\{y_n\}$ é limitada e $y_{n+1} = T_n y_n$, para $n < m-1$. Então $T_{m-2} y_{m-2} = y_{m-1}$ e da argumentação acima $y_{m-1} = T_{m-2} y_{m-2} \in N(P_{m-1})$. Note, ainda, que $y_m = G_{m,m} x = P_m x = 0$ desde que $x \in N(P_m)$ e $-x = -(I-P_m)x = y_m - x = (G_{m,m} - I)x \underset{(2)}{=} T_{m-1} G_{m-1,m} x = T_{m-1} y_{m-1} \in T_{m-1}(N(P_{m-1}))$.

Mostramos até aqui que se $x \in N(P_m)$ então $x \in T_{m-1}(N(P_{m-1}))$, isto é:

$$N(P_m) \subset T_{m-1}(N(P_{m-1})) \quad (3)$$

Considere $\bar{y}_n = y_n$ para $n < m-1$ e $\bar{y}_{n+1} = T_n \bar{y}_n$ para $n+1 \geq m-1$, então $\bar{y}_m = T_{m-1} y_{m-1} = -x$, como mostrado acima e $\bar{y}_n$ é limitada para $n \leq m$. Segue que $T_m \bar{y}_m = -T_m x \underset{(3)}{\in} N(P_{m+1})$, ainda, se $T_m x = 0$ então

$$\bar{y}_{m+1} = T_m \bar{y}_m = -T_m x = 0$$

e $\bar{y}_n = 0$ para $n > m$, ou seja $\bar{y}$ é limitado para $n \geq m$ e $\bar{y}_{m+1} = T_m \bar{y}_m$ donde

$$(I - P_m) \bar{y}_m = 0 \quad \text{isto é} \quad (I - P_m)x = x = 0.$$

Isto mostra que $T_m|_{N(P_m)}$ é injetora e $T_m(N(P_m)) \subset N(P_{m+1})$ como $N(P_{m+1}) \stackrel{(3)}{=} T_m(N(P_m))$ segue que $T_m|_{N(P_m)} : N(P_m) \rightarrow N(P_{m+1})$ é isomorfismo.

Nós agora podemos escrever

$$G_{n,m} = -T_{n,m}(I - P_m) \quad p/ \quad n < m$$

$$G_{n,m} = T_{n,m}P_m \quad p/ \quad m \leq n$$

j) Mostremos que se $P_m x = 0$ então $T_m P_m x = P_{m+1} T_m x$, de fato: $T_m P_m x = 0$ e como $T_m x \in N(P_{m+1})$ sempre que $x \in N(P_m)$ temos que $P_{m+1} T_m x = 0$ e então $T_m P_m x = P_{m+1} T_m x$ sempre que $x \in N(P_m)$.

Juntando os itens (g) e (j) obtemos da linearidade de T_n que

$$T_n P_n = P_{n+1} T_n.$$

Até aqui mostramos i) e ii) da definição de dicotomia, partiremos agora p/ a verificação das demais condições.

k) Seja $x \in X$. Se $T_{n,m} x = 0$ para algum $n \geq m$, então $T_{p,m} x = 0$ para $p \geq n$, ainda se $T_{n,m} P_m x \neq 0$ então

$$\phi_k^{-1} = \|T_{k,m} P_m x\| > 0, \quad m \leq k \leq n$$

e

$$\sum_{k=m}^n \frac{G_{n,k}}{T_{n,k} P_k} \frac{v_k}{T_{k,m} P_m x \phi_k} = T_{n,m} P_m x \sum_{k=m}^n \phi_k$$

com $\|v_k\| = 1$. Tomemos $f = \{\dots, 0, v_m, \dots, v_n, 0, \dots\}$ com v_m na $(m-1)$ ª posição, então $\|f\| = 1$ e

$$\left\| \sum_{k=m}^n G_{n,k} v_k \right\| = \left\| \sum_{k=m}^n G_{n,k+1} f_k \right\| = \|(Gf)_n\| \leq \|G\| \cdot \|f\| = \|G\|$$

ainda

$$\phi_n^{-1} \sum_{k=m}^n \phi_k \leq \|G\| \Rightarrow \frac{-1}{\phi_n^{-1} \sum_{k=m}^n \phi_k} \leq -\|G\|^{-1} \quad \text{e} \quad \|G\| > 1$$

e se

$$\psi_n = \sum_{k=m}^n \phi_k$$

temos

$$\psi_{n-1} = \sum_{k=m}^{n-1} \phi_k = \sum_{k=m}^n \phi_k - \phi_n = \psi_n \left(1 - \frac{1}{\phi_n^{-1} \sum_{k=m}^n \phi_k}\right) \leq \psi_n (1 - \|G\|^{-1})$$

deste modo

$$\phi_n \geq \|G\|^{-1} \sum_{k=m}^n \phi_k = \|G\|^{-1} \psi_n \geq \|G\|^{-1} (1 - \|G\|^{-1})^{-1} \psi_{n-1}$$

e

$$\phi_n \geq \|G\|^{-1} (1 - \|G\|^{-1})^{-(n-m)} \psi_m = \|G\|^{-1} (1 - \|G\|^{-1})^{-(n-m)} \phi_m$$

ou

$$\phi_n^{-1} \leq \|G\| (1 - \|G\|^{-1})^{n-m} \phi_m^{-1}$$

Daí

$$\|T_{n,m} P_m x\| = \phi_n^{-1} \leq \|G\| (1 - \|G\|^{-1})^{n-m} \|P_m x\| = \|G\| (1 - \|G\|^{-1})^{n-m} \|G_{m,m} x\|$$

$$\|T_{n,m} P_m x\| \leq \|G\|^2 (1 - \|G\|^{-1})^{n-m} \|x\| \quad n \geq m \quad (4)$$

Isto foi provado assumindo que o lado esquerdo de (4) fosse não nulo mas é trivialmente verdadeiro em caso contrário.

e) Semelhantemente se $\rho_n^{-1} = \|T_{n,m}(I - P_m)x\| > 0$ p/ $n < m$ então

$$\sum_{k=n+1}^m \overbrace{T_{n,k}(I - P_k)}^{G_{n,k}} \overbrace{T_{k,m}(I - P_m)x}^{v_k} \rho_k = T_{n,m}(I - P_m)x \sum_{k=n+1}^m \rho_k$$

seja $\psi_n = \sum_{k=n+1}^m \rho_k$. Procedendo como antes obtemos

$$\|T_{n,m}(I-P_m)x\| \leq (1 + \|G\|)^2 \left(\frac{\|G\|}{1 + \|G\|} \right)^{m-n} \|x\| \quad p/ \quad n < m \quad (5)$$

As desigualdades (4) e (5) juntamente com o fato que

$$M = (1 + \|G\|)^2 > \|G\|^2$$

e

$$\theta = \frac{\|G\|}{1 + \|G\|} \geq 1 - \|G\|^{-1}$$

implicam que $\{T_n\}$ tem dicotomia discreta com constantes M e $\theta < 1$.

□

6 - COROLÁRIO

Se $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta. Então, as projeções $\{P_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ são unicamente determinadas.

Prova:

Suponha que $\{P_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{Q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ são duas famílias de projeções associadas a $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Seja $f = \{\dots, 0, x, 0, \dots\}$ com x na $(m-1)$ ª posição. Então se $\{x_n\}$ é a única solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, temos:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} f_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{n,k+1} f_k = G_{n,m} x = \tilde{G}_{n,m} x$$

onde:

$$G_{n,m} = \begin{cases} T_{n,m} P_m & p/ \quad n \geq m \\ -T_{n,m}(I-P_m) & p/ \quad n < m \end{cases} \quad e \quad \tilde{G}_{n,m} = \begin{cases} T_{n,m} Q_m & p/ \quad n \geq m \\ -T_{n,m}(I-Q_m) & p/ \quad n < m \end{cases}.$$

Em particular

$$x_m = G_{m,m} x = \tilde{G}_{m,m} x$$

e

$$P_m x = Q_m x \quad \forall x \in X$$

7 - COROLÁRIO

Para $b > 0$. Seja $Bb = \{\{x_n\} \in \ell_\infty(X, Z) \text{ com } \sup_{n \in \mathbb{Z}} \{\|x_n\| b^n\} < \infty\}$.

Suponha que para $0 < \theta_1 < 1$, $\theta_1 \leq b \leq 1/\theta_1$ e qualquer $\{f_n\} \in Bb$, exista uma única solução $\{x_n\}$ em Bb de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$, $-\infty < n < \infty$. Se $\{G_{n,m}\}$ é a correspondente função de Green, então

$$\|G_{n,m}\| \leq M \theta_1^{|n-m|}$$

Prova:

Se $x, f \in Bb$, $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ e $y_n = x_n b^n$, $g_n = f_n b^n$, então $y, g \in B_1$ e $y_{n+1} = b^{n+1} x_{n+1} = b(b^n T_n x_n + b^n f_n) = b T_n y_n + b g_n$. Então para qualquer $\{b g_n\} \in B_1 = \ell_\infty(X, Z)$ $y_{n+1} = b T_n y_n + b g_n$ tem uma única solução limitada $\{b^n x_n\}$ e portanto $\{b T_n\}$ tem dicotomia discreta cuja função de Green é

$$\{b^{n-m} G_{n,m}\}$$

e

$$\|G_{n,m}\| \leq \|G\| b^{n-m}$$

pondo $b = \theta_1$ e $b = \theta_1^{-1}$, obtemos:

$$\|G_{n,m}\| \leq M \theta_1^{|n-m|}.$$

□

8 - LEMA

Se $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 < r < r_1 \leq 1$

$$b < (r_1 - r) / (1 + r r_1)$$

e $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ é uma sequência não negativa em $\mathbb{R}$ com $g_n = O(r_1^{|n|})$ quando $|n| \rightarrow \infty$, e

$$g_n \leq a r_1^{|n|} + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} g_k \quad \text{para todo } n.$$

Então

$$g_n \leq ar_1^{|n|} / [1 - b(1+rr_1)/(r_1-r)] \quad \text{para todo } n.$$

Prova:

Seja $f_n = g_n / r_1^{|n|}$, então

$$f_n \leq a + b \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} r_1^{|k|-|n|} f_k \leq a + b \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} r_1^{|k|-|n|} \|f\|_{\infty}.$$

$$\text{Logo } \|f\|_{\infty} \leq a + b \cdot \frac{1+rr_1}{r_1-r} \cdot \|f\|_{\infty} \Rightarrow \|f\|_{\infty} \leq \frac{a}{1-b \frac{1+rr_1}{r_1-r}}. \text{ Deste}$$

$$\text{modo } f_n = g_n / r_1^{|n|} \leq \|f\|_{\infty} \leq \frac{a}{1-b \frac{1+rr_1}{r_1-r}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad e$$

$$g_n \leq \frac{a}{1-b \frac{1+rr_1}{r_1-r}} \cdot r_1^{|n|} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

□

9 - TEOREMA

Suponha que $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L(X)$ tem dicotomia discreta com constantes M , $\theta < 1$. Se $M_1 > M$ e $\theta < \theta_1 < 1$, existe $\varepsilon > 0$ (dependendo sō de M , M_1 , θ e θ_1) tal que, qualquer sequên-
cia $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L(X)$ com $\sup_n \|T_n - S_n\| < \varepsilon$, tem dicotomia dis-
creta com constantes M_1 e θ_1 .

Prova:

$x_{n+1} = S_n x_n + f_n$ tem uma ũnica soluçāo limitada para ca-
da $f = \{f_n\}$ limitada se e sō se $x_{n+1} = T_n x_n + (S_n - T_n)x_n + f_n$
tem uma ũnica soluçāo limitada para cada f limitada se e sō se

$$(*) \quad x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} \{(S_k - T_k)x_k + f_k\}$$

tem uma ũnica soluçāo limitada para cada f limitada. Para ver

que a equação (*) tem uma única solução limitada, note que se

$$G: \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R}) \rightarrow \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R})$$

$$(Gf)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} f_k$$

se $x = \{x_n\}$ e se

$$(Hx)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} \{(S_k - T_k)x_k\}$$

então a equação (*) torna-se

$$(I-H)x = Gf. \quad (1)$$

Queremos mostrar que para cada f limitada a equação acima nos fornece um único x limitado. De fato

$$G: \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R}) \rightarrow \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R})$$

é limitada, ainda

$$H: \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R}) \rightarrow \ell_{\infty}(Z, \mathbb{R})$$

é tal que

$$\|H\|_{L(\ell_{\infty})} \leq \sup_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G_{n,k+1}(S_k - T_k)\| \leq \epsilon M \frac{1+\theta}{1-\theta} < 1$$

para oportuna escolha de ϵ . Segue que $I-H$ é inversível com inversa limitada e

$$x = (I-H)^{-1}Gf \in \ell_{\infty}(Z, X).$$

Segue que para oportuna escolha de ϵ $x_{n+1} = S_n x_n + f_n$ tem uma única solução limitada para cada f limitada. Logo $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes $\bar{M}$ e $\bar{\theta}$.

Seja $\tilde{G}_{n,m}$ a função de Green associada a $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ então para todo n, m ,

$$\tilde{G}_{n,m} = G_{n,m} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(S_k - T_k)\tilde{G}_{k,m},$$

pois se $f = \{\dots, 0, x, 0, \dots\}$ com x na $(m-1)$ ª posição, temos

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{n,k+1} f_k = \tilde{G}_{n,m} x \quad e$$

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} \{ (S_k - T_k) x_k + f_k \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} (S_k - T_k) \tilde{G}_{k,m} x + G_{n,m} x .$$

Isto mostra que $\{\tilde{G}_{n,m}\}$ é um ponto fixo de

$$T\{\tilde{G}_{n,m}\} = \{G_{n,m}\} + \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} (S_k - T_k) \tilde{G}_{k,m} \right\} .$$

Ainda, T é contração, pois

$$T(\{\tilde{G}_{n,m}\} - \{\tilde{G}_{n,m}\}) \leq M \varepsilon \frac{1+\theta}{1-\theta} \|\{\tilde{G}_{n,m}\} - \{\tilde{G}_{n,m}\}\| \quad e$$

$$\frac{1+\theta}{1-\theta} < \frac{1+\theta}{1-\theta/\theta_1} < \frac{\theta_1^{-1} + \theta}{1-\theta/\theta_1} = \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1 - \theta} \Rightarrow M \varepsilon \frac{1+\theta}{1-\theta} < M \varepsilon \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1 - \theta} < 1 ,$$

para oportuna escolha de ε .

Segue que T tem um único ponto fixo em $\ell_{\infty}(Z, L(X))$. Mostremos que se $B_{\theta_1} = \{g = \{g_n\} \in \ell_{\infty}(Z, L(X)) : h = \{\frac{g_n}{\theta_1^{|n|}}\} \in \ell_{\infty}(Z, L(X))\}$ com a norma $\|g\|_{\theta_1} = \sup_n \frac{\|g_n\|}{\theta_1^{|n|}}$ então $T : B_{\theta_1} \rightarrow B_{\theta_1}$ está bem definida e é uma contração neste espaço. Seja $\{g_n\} \in B_{\theta_1}$ e mostremos que $T\{g_n\} \in B_{\theta_1}$,

$$T\{g_n\} = \{G_{n,m}\} + \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} (S_k - T_k) g_n \right\}$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\|(T\{g_n\})_n\|}{\theta_1^{|n|}} &\leq \frac{M \theta^{|n-m|}}{\theta_1^{|n|}} + M \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta^{|n-k-1|} \frac{\|g_k\|}{\theta_1^{|k|}} \cdot \theta_1^{|k|-|n|} \\ &\leq M \theta^{-|m|} + M \varepsilon \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1 - \theta} \cdot \sup_k \frac{\|g_k\|}{\theta_1^{|k|}} = K < \infty \end{aligned}$$

e

$$\sup_n \frac{\|(T\{g_n\})_n\|}{\theta_1^{|n|}} \leq K < \infty \Rightarrow T\{g_n\} \in B_{\theta_1} .$$

O fato que B_{θ_1} é um espaço de Banach é um exercício simples de análise funcional. Ainda T é obviamente uma contração desde que $M \varepsilon (1+\theta\theta_1)/(\theta_1 - \theta) < 1$. Segue que T tem um único

ponto fixo em B_{θ_1} e este deve coincidir com $\{\tilde{G}_{n,m}\}$. Isto mostra que $\{\tilde{G}_{n,m}\} \in B_{\theta_1}$.

Estamos agora em condições de usar o lema anterior para

$$\|\tilde{G}_{n,m}\| \leq M \theta_1^{|n-m|} + M \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} \theta_1^{|n-k-1|} \|\tilde{G}_{k,m}\|$$

e obtemos:

$$\|\tilde{G}_{n,m}\| \leq M \theta_1^{|n-m|} / \left(1 - M \varepsilon \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1-\theta}\right) \leq M_1 \theta_1^{|n-m|}$$

e a condição sobre ε é que

$$0 \leq \frac{M}{1 - M \varepsilon \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1-\theta}} \leq M_1,$$

o que implica

$$M \varepsilon \frac{1+\theta}{1-\theta} < M \varepsilon \frac{1+\theta\theta_1}{\theta_1-\theta} < 1.$$

□

10 - TEOREMA

Suponha que $\{T_n^{(k)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta para $k=1,2$ e as funções de Green satisfazem

$$\|G_{n,m}^{(k)}\| \leq M \theta^{|n-m|} \quad (\theta < 1).$$

a) Se $\|T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\| \leq \varepsilon$ para $|n-m| \leq N$ e $\|T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\| \leq B$ para todo n , então

$$\|p_m^{(1)} - p_m^{(2)}\| \leq \frac{2M^2}{1-\theta^2} (\varepsilon + B \theta^{2N+1})$$

b) Se $b < \theta^{-2}$ e $\|T_n^{(1)} - T_n^{(2)}\| \leq \varepsilon b^{|n-m|}$ para todo n , então:

$$\|p_m^{(1)} - p_m^{(2)}\| \leq \theta(1+b)M^2\varepsilon/(1-b\theta^2)$$

Prova:

Seja $x_n = G_{n,m}^{(1)} z$, $y_n = G_{n,m}^{(2)} z$ e $z \in X$. Então

$$x_{n+1} - T_n^{(2)} x_n = \begin{cases} (T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) x_n, & n \neq m-1 \\ (T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) x_n + z, & n = m-1 \end{cases}$$

e

$$y_{n+1} - T_n^{(2)} y_n = \begin{cases} 0, & n \neq m-1 \\ z, & n = m-1 \end{cases}.$$

Donde se $z_n = x_n - y_n$, temos $z_{n+1} = T_n^{(2)} z_n + (T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) x_n$ e desde que $\{f_n\} = \{(T_n^{(1)} - T_n^{(2)}) x_n\}$ é limitada, temos:

$$z_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}^{(2)} (T_k^{(1)} - T_k^{(2)}) G_{k,m}^{(1)} z$$

Assim:

$$\|z_m\| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} M \theta^{|m-k-1|} \|T_k^{(1)} - T_k^{(2)}\| M \theta^{|m-k|}$$

$$a) \|z_m\| \leq \sum_{|k-m| \leq N} M^2 \epsilon \theta^{|m-k-1|} \theta^{|m-k|} + \sum_{|k-m| > N} M^2 B \theta^{|m-k-1|} \theta^{|m-k|}$$

$$\|z_m\| \leq M^2 \epsilon \sum_{|k| \leq N} \theta^{|k+1|+|k|} + M^2 B \sum_{|k| > N} \theta^{|k+1|+|k|}$$

$$\|z_m\| \leq \|z\| [M^2 \epsilon (\theta^{2N-1} + \dots + \theta + \theta^3 + \dots + \theta^{2N-1}) + M^2 B (\dots + \theta^{2N+3} + \theta^{2N+1} + \theta^{2N+1} + \theta^{2N+3} + \dots)]$$

e

$$\|z_m\| \leq (2M^2 \epsilon \theta \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k} + 2M^2 B \theta^{2N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k}) \cdot \|z\| = \frac{2M^2}{1-\theta^2} (\epsilon \theta + B \theta^{2N+1}) \|z\|$$

Note que

$$\|z_m\| = \|G_{m,m}^{(1)} z - G_{m,n}^{(2)} z\| = \|(P_m^{(1)} - P_m^{(2)}) z\|.$$

Isto mostra a afirmativa a).

$$b) \|z_m\| \leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \epsilon M^2 \theta^{|m-k-1|} \theta^{|m-k|} \cdot b^{|m-k|} \right) \|z\| = \left(\epsilon M^2 \sum_{-\infty}^{\infty} \theta^{|k+1|+|k|} b^{|k|} \right) \|z\|$$

$$\|z_m\| \leq \epsilon M^2 \left(\sum_{-\infty}^{-1} \theta^{-2k-1} b^{-k} + \sum_0^{\infty} \theta^{2k+1} b^k \right) \|z\|$$

$$\|z_m\| \leq \epsilon M^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k+1} b^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{2k+1} b^k \right) \|z\| = \epsilon M^2 \theta (1+b) \sum_{k=0}^{\infty} (\theta^2 b)^k \|z\|$$

e

$$\|z_m\| \leq \varepsilon M^2 \theta \frac{1+b}{1-b\theta^2} \|z\|$$

o que mostra a afirmativa b) .

11 - LEMA

Suponha que $\{T_n\}_{n \geq 0}$ tenha dicotomia discreta com constantes M e $\theta < 1$ e que $G_{n,m}$, $m, n \geq 0$, é a correspondente função de Green.

Defina $P_n = P_0$ e

$$T_n = \theta(I - P_0) + \theta^{-1}P_0$$

para $n < 0$. Mostre que $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M e $\theta < 1$.

Prova:

Devemos verificar as condições da definição 1 para $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

i) $T_n P_n = P_{n+1} T_n$ p/ $n \geq 0$ por hipótese. Se $n < 0$, temos

$$T_n P_n = (\theta(I - P_0) + \theta^{-1}P_0)P_0 = P_0(\theta(I - P_0) + \theta^{-1}P_0) = P_{n+1} T_n.$$

ii) $T_n|_{N(P_n)}$ é um isomorfismo de $N(P_n)$ sobre $N(P_{n+1})$ para $n \geq 0$. Se $n < 0$, então

$$T_n|_{N(P_0)} x = T_n(I - P_0)x = \theta(I - P_0)x = \theta x$$

que é um isomorfismo de $N(P_n) = N(P_0)$ sobre $N(P_{n+1}) = N(P_0)$.

iii) $\|T_{n,m} P_m x\| \leq M \theta^{n-m} \|x\|$ para $n \geq m \geq 0$, por hipótese.

Se $n \geq 0 > m$, temos

$$T_{n,m} = T_{n,0} T_{0,m} \quad \text{e} \quad P_m = P_0$$

$$T_{0,m} P_m = T_{-1} \dots T_m P_0 = T_{-1} \dots T_{m-1} \theta^{-1} P_0 = \theta^{-m} P_0$$

Daí

$$\|T_{n,m}P_m x\| = \|T_{n,0} \theta^{-m} P_0 x\| \leq M \theta^n \theta^{-m} \|x\| = M \theta^{n-m} \|x\|$$

Se $0 > n \geq m$

$$T_{n,m}P_m x = \theta^{n-m} P_0 x$$

e

$$\|T_{n,m}P_m x\| \leq \|P_0\| \theta^{n-m} \|x\| \leq M \theta^{|n-m|} \|x\|$$

iv) Se $m > n \geq 0$ temos que $\|T_{n,m}(I-P_m)x\| \leq M \theta^{m-n} \|x\|$, por hipótese. Se $m \geq 0 > n$, temos:

$$\begin{aligned} T_{n,m}(I-P_m)x &= T_{n,0} T_{0,m}(I-P_m)x \\ &= (T_{0,n}|_{N(P_0)})^{-1} T_{0,m}(I-P_m)x \\ &= (\theta^n I|_{N(P_0)})^{-1} T_{0,m}(I-P_m)x \\ &= \theta^{-n} T_{0,m}(I-P_m)x \end{aligned}$$

e

$$\|T_{n,m}(I-P_m)x\| \leq \theta^{-n} \|T_{0,m}(I-P_m)x\| \leq M \theta^{m-n} \|x\|$$

Se $0 > m > n$, temos:

$$T_{n,m}(I-P_m)x = \theta^{m-n}(I-P_0)x$$

e

$$\|T_{n,m}(I-P_m)x\| \leq M \theta^{m-n} \|x\|.$$

□

Se supomos que $\{T_n\}_{n \leq 0}$ tem dicotomia discreta com constantes M e $\theta < 1$, $T_0|_{N(P_0)}$ é um isomorfismo sobre um subespaço V de X e $TR(P_0) \subset W$ onde $V \oplus W = X$ e se P é a projeção de núcleo V e imagem W . Defina $P_n = P$ e

$$T_n = \theta^{-1}(I-P) + \theta P \quad p/ \quad n > 0$$

Deste modo $\{T_n\}_{-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes $\bar{M}$, $\theta < 1$.

12 - TEOREMA

Suponha que $\{T_n\}_{n \geq 0}$ tenha dicotomia discreta com constantes M , $\theta < 1$. Se $M_1 > M$ e $\theta < \theta_1 < 1$, existe $\varepsilon > 0$ (dependendo sô de M , M_1 , θ e θ_1) tal que qualquer sequência $\{S_n\}_{n \geq 0}$ em $L(X)$ com $\sup_{n \geq 0} \|S_n - T_n\| < \varepsilon$, tem dicotomia discreta com constantes M_1 e θ_1 .

Prova:

Extenda $\{T_n\}_{n \geq 0}$ como no lema 11 a $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e se $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é como acima, extenda $\{S_n\}_{n \geq 0}$ a $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ da seguinte forma

$$S_n = T_n \quad \text{p/ } n < 0.$$

Segue do teorema 9 que $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M_1 e $\theta_1 < 1$ sempre que

$$0 \leq \frac{M}{1 - M \varepsilon \frac{1 + \theta \theta_1}{\theta_1 - \theta}} < 1.$$

Isto mostra, em particular que $\{S_n\}_{n \geq 0}$ tem dicotomia discreta, com constantes M_1 e $\theta_1 < 1$.

13 - TEOREMA

Suponha que $\{P_n\}$, $\{\tilde{P}_n\}$ são sequências limitadas de projeções em $L(X)$, $\{T_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ é uma sequência limitada em $L(X)$, com

$$T_n P_n = \tilde{P}_{n+1} T_n$$

$$R(T_n(I - P_n)) = R(I - \tilde{P}_{n+1})$$

$$\|T_n x\| \leq \theta \|x\| \quad \text{se } P_n x = x$$

$$\|T_n x\| \geq \theta^{-1} \|x\| \quad \text{se } P_n x = 0.$$

Para $0 < \theta < 1$. Se $\|I - P\| \leq M$, $\|\tilde{P}\| \leq M$, $\|I - \tilde{P}\| \leq M$ e

se $\theta < \theta_1 < 1$ e $M_1 > M$, existe $\epsilon > 0$ (dependendo sō de θ, θ_1, M, M_1 e $\sup_k \|T_k\|$) tal que se $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset L(X)$, $\|P_n - \tilde{P}_n\| < \epsilon$ e $\|T_n - S_n\| < \epsilon$ para todo n , então $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M_1 e θ_1 .

Prova:

Seja $W_n = (I - \tilde{P}_n)(I - P_n) + \tilde{P}_n P_n$, então

$$\tilde{P}_n W_n = \tilde{P}_n P_n = W_n P_n;$$

$$\|I - W_n\| = \|\tilde{P}_n(\tilde{P}_n - P_n) + (P_n - \tilde{P}_n)P_n\| \leq 2M\epsilon.$$

Se $2M\epsilon < 1$ então W_n tem inversa limitada, com

$$\|W_n^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - 2M\epsilon}.$$

Defina $\tilde{T}_n = T_n W_n^{-1}$; então

$$\tilde{T}_n \tilde{P}_n = \tilde{T}_n \tilde{P}_n W_n W_n^{-1} = \tilde{T}_n W_n P_n W_n^{-1} = T_n W_n^{-1} W_n P_n W_n^{-1} = T_n P_n W_n^{-1}.$$

então

$$\tilde{T}_n \tilde{P}_n = T_n P_n W_n^{-1} = \tilde{P}_{n+1} T_n W_n^{-1} = \tilde{P}_{n+1} \tilde{T}_n$$

e

$$R(\tilde{T}_n(I - \tilde{P}_n)) = \tilde{T}_n(I - \tilde{P}_n)X = T_n(I - P_n)W_n^{-1}X = T_n(I - P_n)X = R(T_n(I - P_n)) = R(I - \tilde{P}_{n+1})$$

Se $\tilde{P}_n x = x$, então $\tilde{P}_n x = W_n P_n W_n^{-1} x = x \Rightarrow P_n W_n^{-1} x = W_n^{-1} x$ e

$$\|\tilde{T}_n x\| = \|T_n W_n^{-1} x\| \leq \theta \|W_n^{-1} x\| \leq \frac{\theta}{1 - 2M\epsilon} \|x\|$$

Se $\tilde{P}_n x = 0$, então $P_n W_n^{-1} x = 0$ e

$$\frac{\|W_n^{-1}\|}{1 - \|W_n^{-1}\| \|W_n - I\|} \geq 1 \Rightarrow \|W_n^{-1}\| \geq \frac{1}{1 + \|W_n - I\|} \geq \frac{1}{1 + 2M\epsilon}$$

ainda

$$\|\tilde{T}_n x\| = \|T_n W_n^{-1} x\| \geq \theta \|W_n^{-1} x\| \geq \theta(1 + 2M\epsilon)^{-1} \|x\|.$$

Se $\theta_2 = \frac{\theta}{1 - 2M\epsilon} = \theta + \frac{\theta 2M\epsilon}{1 - 2M\epsilon} < 1$, nōs temos

para $n \geq m$

$$\|\tilde{T}_{n,m} \tilde{P}_m x\| \leq \theta_2^{n-m} \|\tilde{P}_m x\| \leq M \theta_2^{n-m} \|x\|$$

para $n < m$

$$\|\tilde{T}_{n,m} (I - \tilde{P}_m) x\| \leq \theta_2^{m-n} \|(I - \tilde{P}_m) x\| \leq M \theta_2^{m-n} \|x\|$$

Portanto $\{\tilde{T}_n\}$ tem dicotomia discreta com constantes M , B_2 e

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_n - S_n\| &= \|T_n W_n^{-1} - T_n + T_n - S_n\| \leq \\ &\leq \epsilon + \|T_n\| \|W_n^{-1} - I\| \leq \epsilon \left(1 + \frac{2M}{1 - 2M\epsilon} \sup_k \|T_k\|\right) \end{aligned}$$

Se ϵ é suficientemente pequeno $\theta_2 = \theta + o(\epsilon) < \theta_1 < 1$ e do teorema 2 $\{S_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M_1 e θ_1 .

CAPÍTULO III

DICOTOMIA EXPONENCIAL PARA FAMÍLIAS DE OPERADORES DE EVOLUÇÃO

No decorrer deste capítulo consideraremos X um espaço de Banach e $L(X)$ o espaço das transformações lineares e contínuas de X em X .

Na seção III.1 definimos família de operadores de evolução e apresentamos uma equação de evolução que dá origem a uma tal família.

Na seção III.2 introduzimos o conceito de dicotomia exponencial, damos exemplos e mostramos a sua preservação por perturbações integralmente pequenas, para a equação

$$\dot{x} = (A+B(t))x$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo, $t \rightarrow B(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é limitada e $t \rightarrow B(t)x$ contínua para todo $x \in X$.

1 - OPERADORES DE EVOLUÇÃO

1.1 - DEFINIÇÃO

Uma família $\{T(t, \tau), t \geq \tau\} \subset L(X)$ é dita uma "família de operadores de evolução" se satisfaz:

- i) $T(\tau, \tau) = I$, $T(t, \tau)T(\tau, \sigma) = T(t, \sigma)$ para $t \geq \tau \geq \sigma$.
- ii) $(t, \tau) \rightarrow T(t, \tau)x$ é contínua para $t \geq \tau$ e para $x \in X$.

1.2 - LEMA

Se $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$, $t \rightarrow B(t)x$ é contínua para todo $x \in X$. Então, para cada $t_0 > \tau$ o conjunto

$$\{\|B(t)\|, \tau \leq t \leq t_0\}$$

é limitado.

Prova:

Seja $A = \{\|B(t)\|, \tau \leq t \leq t_0\}$ e para cada $x \in X$ seja $A(x) = \{\|B(t)x\|, \tau \leq t \leq t_0\}$. Para cada $x \in X$ segue da continuidade de $t \rightarrow B(t)x$ que $A(x)$ é limitado e portanto, do princípio da limitação uniforme que A é limitado.

1.3 - LEMA

Seja $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$, $t \rightarrow B(t)x$ contínua para cada $x \in X$. Se $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ é contínua, então $t \rightarrow B(t)x(t)$ é contínua.

Prova:

Seja $t \in \mathbb{R}$ fixado, então

$$\begin{aligned} \|B(t+h)x(t+h) - B(t)x(t)\| &= \|B(t+h)(x(t+h) - x(t)) - (B(t+h) - B(t))x(t)\| \\ &\leq \|B(t+h)\| \cdot \|x(t+h) - x(t)\| + \|(B(t+h) - B(t))x(t)\|. \end{aligned}$$

Como $\|B(s)\| \leq M$ para s em uma vizinhança de t e

$$\|x(t+h) - x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0 ,$$

$$\|(B(t+h) - B(t))x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0 .$$

Temos que $B(t+h)x(t+h) \rightarrow B(t)x(t)$ quando $h \rightarrow 0$ e que a aplicação $t \rightarrow B(t)x(t)$ é contínua.

□

1.4 - LEMA

Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$ então para todo g em $C([t_0, T], X)$ a equação

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s, w(s)) ds ;$$

onde, $f: [t_0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua em t e uniformemente Lipschitz na segunda variável; tem uma única solução w em $C([t_0, T], X)$.

Prova:

Seja $G: C([t_0, T], X) \rightarrow C([t_0, T], X)$ onde em $C([t_0, T], X)$ colocamos a norma do $\sup$. Este espaço é um espaço de Banach. Seja L a constante de Lipschitz, $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ e

$$(Gw)(t) = g(t) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s, w(s)) ds$$

então

$$\|(Gw)(t) - (Gu)(t)\| \leq ML \int_{t_0}^t \|w(s) - u(s)\| ds \leq ML(t - t_0) \|u - w\|_{\infty}$$

onde

$$M = \sup_{0 \leq u \leq T - t_0} \|e^{Au}\| .$$

Por indução, temos:

$$\|(G^n w)(t) - (G^n u)(t)\| \leq \frac{M^n L^n}{n!} (t - t_0)^n \|w - u\|_{\infty}$$

e

$$\|Gw - Gu\|_{\infty} \leq \frac{M^n L^n (T - t_0)^n}{n!} \|w - u\|_{\infty} .$$

Como $\frac{M^n L^n (T-t_0)^n}{n!} \rightarrow 0$ quando, segue do teorema do ponto fixo de Banach que existe um único $w \in C([t_0, T], X)$ satisfazendo:

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} f(s, w(s)) ds .$$

□

1.5 - TEOREMA

Assuma que A gera o C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$, $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$ e que $t \mapsto B(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$ para cada $x \in X$.

Então

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A+B(t))x, & t > \tau \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução mild $x(t)$, $t \geq \tau$ que depende linearmente e continuamente de $x(\tau)$. A família de operadores definida por $x(t) = T(t, \tau)x(\tau)$ é uma "família de operadores de evolução" que dizemos, associada a $\dot{x} = (A+B(t))x$.

Prova:

Seja $t_0 > \tau$ e considere $C([\tau, t_0], X)$ com a norma do sup.

Defina $G: C([\tau, t_0], X) \rightarrow C([\tau, t_0], X)$ por

$$(Gx)(t) = e^{A(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)ds, \quad \tau \leq t \leq t_0 .$$

É claro que se $x \in C([\tau, t_0], X)$ então Gx está bem definido e pertence a $C([\tau, t_0], X)$. Ainda, pelo lema 1.2

$$\|B(t)x(t) - B(t)y(t)\| \leq L \|x(t) - y(t)\|, \quad \tau \leq t \leq t_0$$

onde

$$L = \sup_{\tau \leq t \leq t_0} \|B(t)\| .$$

O lema 1.4 implica que G tem um único ponto fixo $\tilde{x}: [\tau, t_0] \rightarrow X$, $\tilde{x} \in C([\tau, t_0], X)$ e $\tilde{x}(\tau) = (Gx)(\tau) = x_0$. Seja $x(t)$ dada da seguinte forma. Para cada $\bar{t} \geq \tau, \bar{t} \in J$ $t_0 \geq \bar{t} \geq \tau$ e $x(t) = \tilde{x}(\bar{t})$ onde $\tilde{x}$ é a única solução mild do p.v.i. dado em $[\tau, t_0]$. Então $x: [\tau, \infty) \rightarrow X$ é solução mild do p.v.i. dado e é única.

Denotemos esta solução por $x(t, \tau, x_0)$, é claro da unicidade que quaisquer que sejam x_0 e y_0 em X e α, β escalares, temos:

$$x(t, \tau, \alpha x_0 + \beta y_0) = \alpha x(t, \tau, x_0) + \beta x(t, \tau, y_0) .$$

Ainda

$$\|x(t, \tau, x_0)\| \leq M \|x_0\| + ML \int_{\tau}^t \|x(s)\| ds$$

onde, escolhemos t_0 tal que $\tau \leq t \leq t_0$, M é como no lema 1.4 e L como acima. Segue da desigualdade de Gronwall que

$$(*) \quad \|x(t, \tau, x_0)\| \leq M e^{(t-\tau)ML} \|x_0\| .$$

Se definimos $T(t, \tau)x_0 = x(t, \tau, x_0)$ para todo $x_0 \in X$, $t \geq \tau$. Então $\{T(t, \tau), t \geq \tau\} \subset L(X)$ e

$$T(\tau, \tau)x_0 = x_0 ,$$

$T(t, \tau)T(\tau, \sigma)x_0$ é a solução que em $t = \tau$ vale $T(\tau, \sigma)x_0$ e $T(t, \sigma)x_0$ é a solução que em $t = \tau$ vale $T(\tau, \sigma)x_0$. Segue da unicidade que

$T(t, \tau)T(\tau, \sigma)x_0 = T(t, \sigma)x_0$, $t \geq \tau \geq \sigma$ e $x_0 \in X$, ou seja

$$T(t, \tau)T(\tau, \sigma) = T(t, \sigma), \quad t \geq \tau \geq \sigma .$$

Para verificar que $\{T(t, \tau), t \geq \tau\}$ é uma família de operadores de evolução devemos mostrar que $(t, \tau) \rightarrow T(t, \tau)x$ é contínua para cada $x \in X$, $t \geq \tau$. Note que:

$$a) \quad \|T(t, \tau)x_0 - x_0\| \leq \|e^{A(t-\tau)}x_0 - x_0\| + \int_{\tau}^t \|e^{A(t-s)}B(s)x(s)\| ds \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow \tau$

$$b) \quad t \geq r \geq w \Rightarrow \|T(t, r)x_0 - T(t, w)x_0\| = \|T(t, r)(I - T(r, w)x_0)\| \rightarrow 0$$

quando $r \rightarrow w$ uniformemente para t em compactos de $\mathbb{R}$ (de (*))

$$c) \quad t \geq s \geq r \Rightarrow \|T(t, r)x_0 - T(s, r)x_0\| = \|(T(t, s) - I)T(s, r)x_0\| \rightarrow 0$$

quando $t \rightarrow s$ (de a)).

Considere agora $\|T(t, w)x - T(s, r)x\|$. Então, ou $t \geq s$ ou $s \geq t$. Cada destas possibilidades se divide em outras três, do seguinte modo:

$$1) \quad t \geq s \geq r \geq w \quad \text{ou} \quad t \geq s \geq w \geq r \quad \text{ou} \quad t \geq w \geq s \geq r$$

$$2) \quad s \geq t \geq w \geq r \quad \text{ou} \quad s \geq t \geq r \geq w \quad \text{ou} \quad s \geq r \geq t \geq w$$

No caso 1) temos:

$$\begin{aligned} \|T(t, w)x - T(s, r)x\| &= \|T(t, w)x - T(t, r)x + T(t, r)x - T(s, r)x\| \\ &\leq \|T(t, w)x - T(t, r)x\| + \|T(t, r)x - T(s, r)x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $(t, w) \rightarrow (s, r)$ para cada das possibilidades de 1), usando b) e c).

No caso 2)

$$\|T(t, w)x - T(s, r)x\| \leq \|T(t, w)x - T(s, w)x\| + \|T(s, w)x - T(s, r)x\| \rightarrow 0$$

quando $(t, w) \rightarrow (s, r)$ para cada das possibilidades de 2), usando b) e c).

Isto conclui a demonstração que $\{T(t, \tau), t \geq \tau\}$ é uma família de operadores de evolução.

□

1.6 - LEMA

Suponha que A gera o C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\} \subset L(X)$

e que $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$. Se para cada $x \in X$, $t \rightarrow B(t)x$ é continuamente diferenciável de $\mathbb{R}$ em X , então a solução mild $u(t)$ de $\dot{x} = (A+B(t))x$, $x(t_0) = u_0$, $u_0 \in D(A)$ é continuamente diferenciável.

Prova:

É claro, do lema 1.2, que $t \rightarrow B(t)x$ é uniformemente Lipschitz contínua na segunda variável sobre compactos de $\mathbb{R}$. Logo o p.v.i.

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x \\ x(t_0) = u_0 \end{cases}$$

tem uma única solução mild $u(t)$ sobre $[t_0, T]$, $T > t_0$, satisfazendo

$$u(t) = e^{A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) u(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Segue imediatamente do lema 1.3 que $B(s)x(s)$ é contínua e ainda se

$$g(t) = e^{A(t-t_0)} B(t_0) u(t_0) + A e^{A(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \dot{B}(s) u(s) ds$$

então $g \in C([t_0, T], X)$. Seja w a única solução de

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) w(s) ds$$

em $C([t_0, T], X)$.

Se $w_h(t) = h^{-1}(u(t+h) - u(t)) - w(t)$, então

$$\begin{aligned} w_h(t) = & \{h^{-1}[e^{A(t+h-t_0)} u_0 - e^{A(t-t_0)} u_0 - h A e^{A(t-t_0)} u_0]\} + \\ & + \{h^{-1}[\int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t+h-s)} B(s) u(s) ds - h e^{A(t-t_0)} B(t_0) u_0]\} + \end{aligned}$$

$$+ \{ h^{-1} [\int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s+h) u(s+h) ds - \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) u(s) ds - \\ - h \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} \dot{B}(s) u(s) ds - h \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) w(s) ds] \}$$

é claro que a 1ª e a 2ª chaves na soma anterior tendem a zero quando $h \rightarrow 0^+$. Para mostrar que $w_h(t)$ tem mesmo comportamento, chamemos $\epsilon(h)$ a expressão dentro da 3ª chave.

$$\epsilon(h) = h^{-1} [\int_{t_0}^t e^{A(t-s)} (B(s+h)(u(s+h) - u(s)) - hB(s)w(s)) ds] + \\ + h^{-1} [\int_{t_0}^t e^{A(t-s)} ((B(s+h) - B(s))u(s) - h\dot{B}(s)u(s)) ds]$$

mas. É possível encontrar r , tal que

$$B(s+h)x - B(s)x = h\dot{B}(r)x, \quad s < r < s+h$$

donde

$$\epsilon(h) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} [B(s) \frac{u(s+h)-u(s)}{h} + \dot{B}(r)(u(s+h)-u(s)) - B(s)w(s)] ds + \\ + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} (\dot{B}(\tilde{r}) - \dot{B}(s))u(s) ds$$

e

$$\epsilon(h) = \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} B(s) w_h(s) ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} [(\dot{B}(\tilde{r}) - \dot{B}(s))u(s) - \dot{B}(r)(u(s+h) - u(s))] ds$$

e a última integral tende a zero quando $h \rightarrow 0^+$. Assim

$$\|w_h(t)\| \leq n(h) + M \int_{t_0}^t \|w_h(s)\| ds \quad \forall t \in [t_0, T]$$

onde $M = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \sup_{t_0 \leq s \leq t} \|e^{A(t-s)} B(s)\|$ e $n(h)$ é constante em t e tende a zero quando $h \rightarrow 0^+$.

Segue da desigualdade de Gronwal que

$$\|w_h(t)\| \leq n(h) e^{(t-t_0)M} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0^+.$$

Isto mostra que $u(t)$ tem derivada à direita igual a $w(t)$, con

tínua. Então u é continuamente diferenciável no intervalo limitado $[t_0, T]$. Da forma como construímos a solução em $[t_0, \infty]$ segue que a única solução mild $u: [t_0, \infty) \rightarrow X$ de

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x \\ x(t_0) = u_0 \end{cases}$$

é continuamente diferenciável.

□

1.7 - TEOREMA

Suponha que A gera o C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\} \subset L(X)$ e que $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$. Se para cada $x \in X$, $t \rightarrow B(t)x$ é continuamente diferenciável de $\mathbb{R}$ em X , então a solução mild $T(t, \tau)x_0$ de

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x \\ x(\tau) = x_0 \in D(A) \end{cases}$$

é também estrita. A aplicação $t \rightarrow AT(t, \tau)x_0$ é contínua, com

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, \tau)x_0 = AT(t, \tau)x_0 + B(t)T(t, \tau)x_0, \quad t \geq \tau.$$

Prova:

Devemos em primeiro lugar mostrar que nestas condições

$$T(t, \tau)D(A) \subset D(A).$$

Sabemos que se $x_0 \in D(A)$, $t \rightarrow T(t, \tau)x_0$ é continuamente diferenciável, pelo lema 1.6. Ainda, se $x(t) = T(t, \tau)x_0$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{e^{Ah}T(t, \tau)x_0 - T(t, \tau)x_0}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ e^{Ah} [e^{A(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)] - \right. \\ &\quad \left. - [e^{A(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)}B(s)x(s)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{A(t-\tau)} \frac{1}{h} (e^{Ah} x_0 - x_0) + \frac{1}{h} \left\{ \int_{\tau}^t e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds - \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds \right\} \\
 &= e^{A(t-\tau)} h^{-1} (e^{Ah} x_0 - x_0) + \frac{1}{h} \left\{ \int_{\tau-h}^{t-h} e^{A(t-s)} B(s+h) x(s+h) ds - \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds \right\} \\
 &= e^{A(t-\tau)} h^{-1} (e^{Ah} x_0 - x_0) + \frac{1}{h} \int_{\tau-h}^{\tau} e^{A(t-s)} B(s+h) x(s+h) ds - \frac{1}{h} \int_{t-h}^t e^{A(t-s)} B(s+h) x(s+h) ds \\
 &\quad + \frac{1}{h} \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} [B(s+h) x(s+h) - B(s) x(s)] ds \\
 &= e^{A(t-\tau)} h^{-1} (e^{Ah} x_0 - x_0) + \frac{1}{h} \int_{\tau}^{\tau+h} e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds \\
 &+ \frac{1}{h} \left\{ \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} [B(s+h) x(s+h) - B(s+h) x(s)] ds + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} [B(s+h) - B(s)] x(s) ds \right\} \\
 &\rightarrow A e^{A(t-\tau)} x_0 + e^{A(t-\tau)} B(\tau) x_0 - B(t) x(t) + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} \dot{B}(s) x(s) ds + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) \dot{x}(s) ds
 \end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Logo $T(t, \tau) D(A) \subset D(A)$.

Mostremos que

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, \tau) x_0 = A T(t, \tau) x_0 + B(t) T(t, \tau) x_0, \quad t \geq \tau.$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{h} \{ T(t+h, \tau) x_0 - T(t, \tau) x_0 \} = \\
 &= e^{A(t-\tau)} \frac{1}{h} [e^{Ah} x_0 - x_0] + \frac{1}{h} \left[\int_{\tau}^{t+h} e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds - \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds \right] \\
 &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)} B(s) x(s) ds + \frac{1}{h} [e^{Ah} - I] (e^{A(t-\tau)} x_0) + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)} B(s) x(s) ds \\
 &\rightarrow A T(t, \tau) x_0 + B(t) T(t, \tau) x_0
 \end{aligned}$$

$T(t, \tau) x$ tem derivada lateral a direita dada por

$$A T(t, \tau) x_0 + B(t) T(t, \tau) x_0.$$

Como $T(t, \tau) x_0$ é continuamente diferenciável, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t} T(t, \tau) x_0 = A T(t, \tau) x_0 + B(t) T(t, \tau) x_0$$

e

$$t \rightarrow AT(t, \tau)x_0$$

é contínua.

Do que mostramos segue que $T(t, \tau)x_0$ é solução estrita do p.v.i. dado.

□

1.8 - TEOREMA

Suponha que A gera o C_0 -semigrupo $\{e^{At}, t \geq 0\}$ e que $\{B(t), t \in \mathbb{R}\} \subset L(X)$.

a) Se para todo $x \in X$ $t \rightarrow B(t)x$ é contínua e $f: [\tau, \infty) \rightarrow X$ é contínua, a única solução mild de

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x + f(t), & t > \tau \\ x(\tau) = x_0 \in X \end{cases}$$

é

$$x(t) = T(t, \tau)x_0 + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds.$$

b) Se $t \rightarrow B(t)x$ é continuamente diferenciável para todo $x \in X$ e f é continuamente diferenciável, para $x_0 \in D(A)$ esta solução mild é também estrita.

Prova:

a) Verifiquemos que $x(t)$ dada da forma acima é solução mild do p.v.i. dado. Devemos mostrar que para cada $\xi \in X'$

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle = \langle A'\xi, x(t) \rangle + \langle \xi, B(t)x(t) + f(t) \rangle, \quad t > \tau.$$

De fato:

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, T(t, \tau)x_0 \rangle = \langle A'\xi, T(t, \tau)x_0 \rangle + \langle \xi, B(t)T(t, \tau)x_0 \rangle$$

pois $T(t, \tau)x_0$ é solução mild de $\dot{x} = (A+B(t))x$, $x(\tau) = x_0$.

Vamos mostrar que $\langle \xi, \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds \rangle$ é diferenciável para $t > \tau$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[\int_{\tau}^{t+h} \langle \xi, T(t+h, s) f(s) \rangle ds - \int_{\tau}^t \langle \xi, T(t, s) f(s) \rangle ds \right] = \\ &= \int_{\tau}^t \frac{1}{h} \langle \xi, T(t+h, s) f(s) - T(t, s) f(s) \rangle ds + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \langle \xi, T(t+h, s) f(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Ainda, do fato que $T(t, s) f(s)$ é solução mild de $\dot{x} = (A+B(t))x$, $x(s) = f(s)$,

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, T(t, s) f(s) \rangle = \langle A' \xi, T(t, s) f(s) \rangle + \langle \xi, B(t) T(t, s) f(s) \rangle$$

Logo

$$\frac{d^+}{dt} \langle \xi, \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds \rangle = \int_{\tau}^t [\langle A' \xi, T(t, s) f(s) \rangle + \langle \xi, B(t) T(t, s) f(s) \rangle] ds$$

Como o lado direito da igualdade acima é contínuo, segue que

$$\frac{d}{dt} \langle \xi, \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds \rangle = \langle A' \xi, \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds \rangle + \langle \xi, B(t) \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle$$

E

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \xi, x(t) \rangle &= \langle A' \xi, T(t, \tau) x_0 \rangle + \int_{\tau}^t \langle \xi, T(t, s) f(s) \rangle ds + \\ &+ \langle \xi, B(t) [T(t, \tau) x_0 + \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds] \rangle + \langle \xi, f(t) \rangle \\ &= \langle A' \xi, x(t) \rangle + \langle \xi, B(t) x(t) + f(t) \rangle \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$x(t) = T(t, \tau) x_0 + \int_{\tau}^t T(t, s) f(s) ds$$

é solução mild de $\dot{x} = (A+B(t))x + f(t)$, $x(\tau) = x_0$.

A unicidade segue do seguinte fato: Sejam $x(t)$ e $u(t)$ soluções mild do p.v.i.

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x + f(t) & t > \tau \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

Então $u - x$ é solução mild de

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B(t))x \\ x(\tau) = 0 \end{cases}$$

segue da unicidade que $u - x = 0$.

b) Devemos mostrar aqui que a solução mild

$$x(t) = T(t, \tau)x_0 + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds$$

é continuamente diferenciável e isto implica que $x(t)$ é solução estrita pelo teorema I.2.5, item 4.

A solução mild do p.v.i. dado é

$$x(t) = e^{A(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A(t-s)}(B(s)x(s) + f(s))ds = e^{A(t-\tau)}x_0 + w(t)$$

Para mostrar que $x(t)$ é continuamente diferenciável devemos encontrar $\dot{x}$ e verificar que este é contínuo. É claro que $e^{A(t-\tau)}x_0$ é continuamente diferenciável. Para encontrar $\dot{w}(t)$ procedemos formalmente como segue (para $\tau = 0$).

$$u(t) = \dot{w}(t) = Aw(t) + B(t)w(t) + f(t)$$

$$\dot{u}(t) = Au(t) + \dot{B}(t)w(t) + B(t)u(t) + \dot{f}(t)$$

e esta equação tem uma única solução mild satisfazendo $u(0) = f(0)$, que é dada por:

$$u(t) = e^{At}f(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)u(s) + \dot{B}(s)w(s) + \dot{f}(s)]ds$$

Seja

$$R_h(t) = w(t+h) - w(t) - hu(t)$$

$$\begin{aligned} R_h(t) &= \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s+h)w(s+h) - B(s)w(s+h) - h\dot{B}(s)w(s) + f(s+h) - f(s) - h\dot{f}(s)]ds \\ &+ \int_0^t e^{A(t-s)}[B(s)w(s+h) - B(s)w(s)]ds - h \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)u(s)ds \\ &+ e^{At} \int_0^h \{ e^{A(h-s)}[B(s)w(s) + f(s)] - f(0) \} ds \end{aligned}$$

$$R_h(t) = h \int_0^t e^{A(t-s)} \left\{ \int_0^1 [\dot{B}(\theta(s+h) + (1-\theta)s)w(s+h) - \dot{B}(s)w(s) + \dot{f}(\theta(s+h) + (1-\theta)s) - \dot{f}(s)] d\theta \right\} ds \\ + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s) [w(s+h) - w(s) - hu(s)] ds + e^{At} \int_0^h \{ e^{A(h-s)} [B(s)w(s) + f(s)] - f(0) \} ds$$

A soma da primeira com a terceira integral nesta última forma de $R_h(t)$ chamamos $n(h)$. Note que

$$\frac{n(h)}{h} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0^+$$

Logo

$$\|R_h(t)\| \leq \|n(h)\| + \int_0^t b \|R_h(s)\| ds$$

onde b é uma constante real positiva.

Segue da desigualdade de Gronwal, que:

$$\frac{\|R_h(t)\|}{h} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad h \rightarrow 0^+.$$

Isto mostra que $w(t)$ é diferenciável com derivada $u(t)$ contínua, como queríamos.

□

2 - DICOTOMIAS EXPONENCIAIS

Suponha que a equação $\dot{x} = A(t)x$ dê origem a uma família de operadores de evolução $\{T(t,s), t \geq s\}$ em $J \subset \mathbb{R}$. Aqui J é um intervalo e em geral $J = \mathbb{R}$ ou $J = (w, \infty)$ ou $J = (-\infty, w)$.

2.1 - DEFINIÇÃO

A equação $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre J com expoente $\beta > 0$ e constante M se existem projeções $\{P(t), t \in J\} \subset L(X)$, tais que:

$$i) T(t,s)P(s) = P(t)T(t,s), \quad t \geq s \quad \text{em} \quad J;$$

- ii) A restrição $T(t,s)|_{N(P(s))}$, $t \geq s$ é um isomorfismo de $N(P(s))$ sobre $N(P(t))$, definimos $T(s,t)$ como a transformação inversa $(T(t,s)|_{N(P(s))})^{-1} : R(P(t)) \rightarrow R(P(s))$.
- iii) $\|T(t,s)P(s)\| \leq M e^{-\beta(t-s)}$ para $t \geq s$ em J
- iv) $\|T(t,s)(I-P(s))\| \leq M e^{-\beta(s-t)}$ para $s \geq t$ em J , onde $T(t,s)$ é definido em ii).

2.2 - EXEMPLO

Se $\|T(t,s)\| \leq M e^{-\beta(t-s)}$ para $t \geq s > \tau$ e $\beta > 0$, temos o que chamamos dicotomia trivial sobre (τ, ∞) com projeções $P(t) = I$, $t \in (\tau, \infty)$.

2.3 - EXEMPLO

Se $A(t) = -A$ é um operador setorial e para algum $\beta > 0$ $\sigma(A)$ é disjunto do eixo imaginário, então $\dot{x} = Ax$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$.

O teorema I.1.24 nos diz que A gera semigrupo analítico $\{e^{At}, t \geq 0\}$. Então a equação $\dot{x} = Ax$ está associada a seguinte família de operadores de evolução

$$\{e^{A(t-s)}, t \geq s\} \subset L(X).$$

O espectro de A pode ser representado geometricamente na forma a seguir, para algum $\beta > 0$.

Seja $P = 0$ se $\sigma_+ = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > \beta\} = \emptyset$ e

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

se $\sigma_+ \neq \emptyset$. A projeção P , pelo teorema 0.7, decompõe o espaço X em $X = X_+ \oplus X_-$, onde $X_+ = R(P)$ e $X_- = N(P)$, e o operador A em $A|_{X_+}$ limitado e em $-A|_{X_-}$ setorial (esta última afirmativa é claro da figura). Ainda

$$\sigma(A|_{X_+}) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > \beta\}$$

$$\sigma(A|_{X_-}) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < -\beta\}$$

Pelo teorema da aplicação espectral $\sigma(e^{(A|_{X_+})t}) = e^{t\sigma(A|_{X_+})} = \{u : |u| > e^{\beta t}\}$. Segue que $\sigma(e^{(-A|_{X_+})t}) = \{u : |u| < e^{-\beta t}\}$ e $r_{\sigma}(e^{(-A|_{X_+})t}) < e^{-\beta t}$, donde

$$\|e^{(-A|_{X_+})t}\| \leq M e^{-\beta t} \quad \text{para } t \geq 0$$

ou seja

$$\|e^{(A|_{X_+})t}\| \leq M e^{-\beta|t|} \quad \text{para } t \leq 0.$$

Segue do fato que $-A|_{X_-}$ é setorial e do teorema I.1.24 que

$$\|e^{(A|_{X_-})t}\| \leq M e^{-\delta t} \quad \text{para } t \geq 0.$$

Resta mostrar que $e^{(A|_{X_{\pm}})t} = e^{At}|_{X_{\pm}}$. Isto segue de:

$$e^{At}|_{X_+} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right) |_{X_+} = \sum_{k=0}^{\infty} (A|_{X_+})^k \frac{t^k}{k!} = e^{(A|_{X_+})t}$$

e de I.1.24

$$e^{At}|_{X_-} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} |_{X_-} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A|_{X_-})^{-1} d\lambda$$

$$e^{At}|_{X_-} = e^{(A|_{X_-})t}.$$

Os resultados aqui obtidos implicam agora que $\{e^{A(t-s)}, t \geq s\}$ é uma família de operadores de evolução que para $P(t) = P$ satisfaz as condições da definição 2.1.

2.4 - EXEMPLO

Se $A(t) = -A$ é um operador setorial tal que $\sigma(A)$ é disjunto da faixa $\{\lambda \in \mathbb{C} : -\delta \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \delta\}$ então $\dot{x} = Ax$ tem dicotomia exponencial com expoente δ .

Quando $T(t,s)(I-P(s))$ é definido para $t < s$ pelo item ii) da definição 2.1 então $T(t,s)T(s,\tau)(I-P(\tau)) = T(t,\tau)(I-P(\tau))$ e $T(t,s)(I-P(s)) = (I-P(t))T(t,s)$ sobre $N(P(s))$ para quaisquer t,s,τ em J . De fato:

a) Se $t \geq s \geq \tau$ isto é claramente verdadeiro.

b) Se $t < s < \tau$ então

$$T(t,s)T(s,\tau)(I-P(\tau)) = (T(s,t)|_{N(P(t))})^{-1} (T(\tau,s)|_{N(P(s))})^{-1} (I-P(\tau))$$

$$T(t,s)T(s,\tau)(I-P(\tau)) = (T(\tau,s)|_{N(P(s))} T(s,t)|_{N(P(t))})^{-1} (I-P(\tau))$$

$$T(t,s)T(s,\tau)(I-P(\tau)) = (T(\tau,t)|_{N(P(t))})^{-1}(I-P(\tau)) = T(t,\tau)(I-P(\tau))$$

c) Se $t \geq s < \tau$ então:

Para $t \geq \tau$

$$T(t,s) = T(t,\tau)T(\tau,s) \Rightarrow T(t,\tau)|_{N(P(\tau))} = T(t,s)(T(\tau,s)|_{N(P(s))})^{-1}$$

e

$$T(t,\tau)|_{N(P(\tau))} = T(t,s)T(s,\tau) .$$

Para $t < \tau$

$$T(\tau,s) = T(\tau,t)T(t,s) \Rightarrow T(s,\tau) = T(s,t)T(t,\tau)$$

se

$$T(t,\tau) = T(t,s)T(s,\tau)$$

d) Se $t < s \geq \tau$ temos:

$$\text{para } t \geq \tau \quad T(t,\tau) = T(t,s)T(s,\tau)|_{N(P(\tau))} ;$$

$$\text{para } t < \tau \quad T(t,\tau) = T(t,s)T(s,\tau)|_{N(P(\tau))} ,$$

de modo análogo.

O próximo teorema mostra que a definição de dicotomia exponencial dada nesta seção é equivalente a definição usualmente encontrada para espaços de dimensão finita.

2.5 - TEOREMA

Suponha que $t \rightarrow A(t) \in L(X)$ é contínua e a equação diferencial $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre J . Se $M(t)$ é uma solução em $L(X)$ de $\dot{M} = A(t)M$ e $M(t_0)$ tem inversa limitada para algum $t_0 \in J$. Então $M(t)^{-1}$ existe e é limitado para todo t . Os operadores de evolução são dados por $T(t,s) = M(t)M^{-1}(s)$ e existe constante $C \geq 0$ e projeção constante E tais que

$$\|M(t)EM^{-1}(s)\| \leq Ce^{-\beta(t-s)} \quad \text{para } t \geq s \quad \text{em } J.$$

e

$$\|M(t)(I-E)M^{-1}(s)\| \leq Ce^{-\beta(s-t)} \quad \text{para } s \geq t \quad \text{em } J.$$

Reciprocamente, se existe projeção E tal que as condições acima se verificam, então $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial.

Prova:

Em primeiro lugar, mostremos que $M(t)$ é inversível para todo $t \in J$. Considere a seguinte equação auxiliar em $L(X)$.

$$\dot{Z} = -ZA(t).$$

Definimos

$$U(t)Z = -ZA(t)$$

então $U(t) : L(X) \rightarrow L(X)$ e $t \rightarrow U(t)$ é contínua, logo existe uma única solução Z de

$$\begin{cases} \dot{Z} = U(t)Z \\ Z(t_0) = M(t_0)^{-1} \end{cases}$$

Daí:

$$R_1(t) = Z(t)M(t) \Rightarrow \dot{R}_1(t) = -Z(t)A(t)M(t) + Z(t)A(t)M(t) = 0$$

$$R_2(t) = M(t)Z(t) \Rightarrow \dot{R}_2(t) = A(t)M(t)Z(t) - M(t)Z(t)A$$

ou seja

$$\begin{cases} \dot{R}_2(t) = AR_2 - R_2A \\ R_2(t_0) = I \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{R}_1(t) = 0 \\ R_1(t_0) = I \end{cases}$$

A única solução dos p.v.i. acima é $R_1(t) = R_2(t) = I$. Logo

$$Z(t)M(t) = M(t)Z(t) = I$$

ou seja

$$Z(t) = M(t)^{-1}.$$

Nesta situação a família de operadores de evolução é definida por $T(t,s) = M(t)M(s)^{-1}$, desde que $T(t,s)x_0$ é a solução do p.v.i.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(s) = x_0 \end{cases}$$

Como $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial, seja $P(t)$, $t \in J$ uma família de projeções satisfazendo as condições de dicotomia e seja

$$E(t) = M^{-1}(t)P(t)M(t)$$

e mostremos que $E(t)$ é uma projeção constante. É claro que $E^2 = E$ e da condição i) da definição 2.1, temos

$$M(t)M^{-1}(s)P(s) = P(t)M(t)M^{-1}(s), \quad t \text{ e } s \text{ em } J$$

donde

$$M^{-1}(s)P(s)M(s) = M^{-1}(t)P(t)M(t), \quad t \text{ e } s \text{ em } J$$

e

$$E(t) = E$$

é uma projeção constante.

As condições iii) e iv) da definição 2.1 implicam as estimativas requeridas da seguinte forma

$$(*) \quad \|T(t,s)P(s)\| = \|M(t)EM(s)^{-1}\|,$$

$$\|T(t,s)(I-P(s))\| = \|M(t)(I-E)M(s)^{-1}\|.$$

A parte recíproca do teorema deve ser mostrada verificando as condições da definição 2.1. Então, definindo $P(t) = M(t)EM(t)^{-1}$

$$i) \quad T(t,s)P(s) = M(t)M(s)^{-1}M(s)EM(s)^{-1} = M(t)EM(s)^{-1}$$

$$P(t)T(t,s) = M(t)EM(t)^{-1}M(t)M(s)^{-1} = M(t)EM(s)^{-1}$$

$$ii) T(t,s)(I-P(s))(X) = (I-P(t))T(t,s)(X) = (I-P(t))(X) = N(P(t))$$

Logo

$$T(t,s)(N(P(s))) = N(P(t)) .$$

Ainda $T(t,s)$ é obviamente injetiva, limitada e com inversa limitada. Isto mostra que

$$T(t,s)|_{N(P(s))} : N(P(s)) \rightarrow N(P(t))$$

é isomorfismo.

iii) e iv) são imediatas das igualdades (*).

□

Nos teoremas a seguir estaremos interessados em obter uma expressão para soluções limitadas em J de

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

quando f é limitada em J e $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre J .

2.6 - LEMA

Suponha que A_0 gera um C_0 -semigrupo sobre X , que $t \rightarrow A(t) - A_0 : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores e que $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre J com expoente β e constante M . Então se $\{P(t), t \in \mathbb{R}\}$ é uma família de projeções da definição de dicotomia, temos:

$$i) \|P(t)\| \leq M$$

$$ii) \text{ Se } G(t,s) = \begin{cases} T(t,s)P(s) & \text{para } t \geq s \text{ em } J \\ -T(t,s)(I-P(s)) & \text{para } t < s \text{ em } J . \end{cases}$$

Então

$$\|G(t,s)\| \leq M e^{-\beta|t-s|}, \text{ para } t,s \text{ em } J .$$

Prova:

Imediata da definição de dicotomia exponencial. □

2.7 - TEOREMA

Suponha que $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$. Então a família $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de projeções, associada à dicotomia, é unicamente determinada.

Prova:

Mostremos em primeiro lugar que

$$R(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ é limitada para } t \geq t_0\}$$

onde $\{T(t, t_0), t \geq t_0\}$ é a família de operadores de evolução associada à equação $\dot{x} = A(t)x$.

Suponha que $x \in R(P(t_0))$, então

$$\|T(t, t_0)x\| = \|T(t, t_0)P(t_0)x\| \leq M e^{-\beta(t-t_0)}$$

e $T(t, t_0)x$ é limitado para $t \geq t_0$.

Suponha agora que $x \notin R(P(t_0))$, então

$$T(t, t_0)x = T(t, t_0)P(t_0)x + T(t, t_0)(I-P(t_0))x$$

e $T(t, t_0)P(t_0)x$ é limitada para $t \geq t_0$. Ainda

$$\begin{aligned} \|(I-P(t_0))x\| &= \|T(t_0, t)(I-P(t))T(t, t_0)(I-P(t_0))x\| \\ &\leq M e^{-\beta(t-t_0)} \|T(t, t_0)(I-P(t_0))x\|. \end{aligned}$$

Daí

$$\|T(t, t_0)(I-P(t_0))x\| \geq M^{-1} e^{\beta(t-t_0)} \|(I-P(t_0))x\| \rightarrow \infty$$

quando $t \rightarrow +\infty$. Segue a igualdade requerida.

Seja $x \in X$ e $t_1 < t_0$. Se existir um único $y \in X$ tal que

$$T(t, t_1)y = x$$

definimos

$$T(t_1, t_0)x = y .$$

Em particular se $x \in N(P(t_0))$, para todo $t \leq t_0$, temos

$$T(t, t_0)x = (T(t_0, t)|_{N(P(t))})^{-1}x .$$

Mostremos que

$$N(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ está definido para todo } t \leq t_0 \text{ e é limitada para } t \leq t_0\} .$$

É claro que se $x \in N(P(t_0))$ então $T(t, t_0)x$ está definida e é limitada para $t \leq t_0$.

Suponha que $x \notin N(P(t_0))$, então fazendo

$$y = P(t_0)x$$

$$z = (I - P(t_0))x$$

temos que se $T(t, t_0)x$ está definido para $t \leq t_0$ então, como $T(t, t_0)z$ está definido para $t \leq t_0$ devemos ter $T(t, t_0)y$ definido para $t \leq t_0$. Desde que $T(t, t_0)z$ é limitado para $t \leq t_0$, devemos mostrar que $T(t, t_0)y$ não é limitado para $t \leq t_0$. De fato:

$$\begin{aligned} P(t_0)x &= P(t_0)T(t_0, t)T(t, t_0)P(t_0)x \\ &= T(t_0, t)P(t)T(t, t_0)P(t_0)x , \end{aligned}$$

donde:

$$\|P(t_0)x\| \leq M e^{-\beta(t_0-t)} \|T(t, t_0)P(t_0)x\|$$

e

$$\|T(t, t_0)P(t_0)x\| \geq M^{-1} e^{\beta(t_0-t)} \|P(t_0)x\| \rightarrow \infty \text{ se } t \rightarrow -\infty .$$

Deste modo

$$T(t, t_0)x$$

não é limitado para $t \leq t_0$. Segue a igualdade requerida.

Seja agora $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{Q(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ duas famílias de projeções associadas à dicotomia sobre $\mathbb{R}$ de $\dot{x} = A(t)x$. Então, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$R(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ é limitado para } t \geq t_0\} = R(Q(t_0))$$

e

$$N(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ está definido para } t \leq t_0 \text{ e é limitado para } t \leq t_0\} \\ = N(Q(t_0)).$$

Segue que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, temos:

$$P(t_0) = Q(t_0).$$

□

O teorema a seguir utiliza os resultados obtidos, no teorema 1.8 onde as seguintes identificações são feitas:

$$A = A_0 \quad \text{e}$$

$$B(t) = A(t) - A_0$$

2.8 - TEOREMA

Suponha que A_0 gera C_0 -semigrupo sobre X , $t \mapsto A(t) - A_0 : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores e $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente $\beta > 0$. Para qualquer função contínua e limitada f existe uma única solução mild limitada de

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad -\infty < t < \infty$$

e esta solução é dada por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s)ds, \quad -\infty < t < \infty.$$

Prova:

Em primeiro lugar mostraremos que se $x(t)$ é uma solução

limitada de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ então

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds .$$

De fato, sabemos que

$$\|T(\tau,t)(I-P(t))x(t)\| \leq M e^{-\beta(t-\tau)}\|x(t)\| , \quad t \geq \tau .$$

A limitação de $x(t)$ implica que

$$\|T(\tau,t)(I-P(t))x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty ,$$

ainda

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t,s)f(s)ds , \quad t \geq \tau ,$$

implica

$$(I-P(t))x(t) = T(t,\tau)(I-P(\tau))x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t,s)(I-P(s))f(s)ds$$

e

$$T(\tau,t)(I-P(t))x(t) = (I-P(\tau))x(\tau) + \int_{\tau}^t T(\tau,s)(I-P(s))f(s)ds . \quad (1)$$

Note que

$$\left\| \int_{\tau}^t T(\tau,s)(I-P(s))f(s)ds \right\| \leq ML \int_{\tau}^t e^{-\beta(s-\tau)}ds = \frac{ML}{-\beta} [e^{-\beta(t-\tau)} - 1]$$

onde $L = \sup \{\|f(t)\| , t \in \mathbb{R}\}$. Ainda

$$\int_{\tau}^{\infty} T(t,s)(I-P(s))f(s)ds$$

está bem definida. Logo, fazendo $t \rightarrow \infty$ na expressão (1), temos:

$$(I-P(\tau))x(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} T(\tau,s)(I-P(s))f(s)ds \quad (2)$$

Sabemos ainda que $\|T(t,\tau)P(\tau)x(\tau)\| \leq M e^{-\beta(t-\tau)}\|x(\tau)\|$, $t \geq \tau$. Então, do fato que $f(t)$ e $x(t)$ são limitadas, segue que:

$$\|T(t,\tau)P(\tau)x(\tau)\| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \tau \rightarrow -\infty$$

e

$$\int_{-\infty}^t T(t,s)P(s)f(s)ds$$

está bem definida. Logo, em

$$P(t)x(t) = T(t,\tau)P(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t,s)P(s)f(s)ds ,$$

fazendo $\tau \rightarrow -\infty$, obtemos:

$$P(t)x(t) = \int_{-\infty}^t T(t,s)P(s)f(s)ds \quad (3)$$

Juntando (2) a (3) resulta

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds$$

A unicidade segue agora, imediatamente.

Resta mostrar que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds ,$$

que está obviamente bem definida, é uma solução mild limitada de

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) .$$

Isto é, devemos mostrar que $x(t)$ satisfaz

$$x(t) = T(t,\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t,s)f(s)ds , \quad t \geq \tau \text{ em } \mathbb{R} .$$

De fato:

$$\begin{aligned} T(t,\tau) \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau,s)f(s)ds &= T(t,\tau) \int_{-\infty}^{\tau} T(\tau,s)P(s)f(s)ds - T(t,\tau) \int_{\tau}^{\infty} T(\tau,s)(I-P(s))f(s)ds = \\ &= - \int_{\tau}^t T(t,s)P(s)f(s)ds - \int_{\tau}^t T(t,s)(I-P(s))f(s)ds + \\ &+ \int_{-\infty}^t T(t,s)P(s)f(s)ds - \int_t^{\infty} T(t,s)(I-P(s))f(s)ds = \\ &= - \int_{\tau}^t T(t,s)f(s)ds + \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds . \end{aligned}$$

Logo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds = T(t,\tau) \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau,s)f(s)ds + \int_{\tau}^t T(t,s)f(s)ds$$

ou

$$x(t) = T(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds .$$

A limitação segue de:

$$\|x(t)\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|G(t, s)\| L ds = \frac{2ML}{\beta}$$

□

Os próximos teoremas visam obter expressões para soluções que são limitadas em $[t_0, \infty)$ $((-\infty, t_0])$, da equação

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

a qual supomos ter dicotomia exponencial sobre $[t_0, \infty)$ $((-\infty, t_0])$.

2.9 - TEOREMA

Se A_0 gera C_0 -semigrupo sobre X , $t \mapsto A(t) - A_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores, $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $[t_0, \infty)$. Então, para qualquer função $f : [t_0, \infty) \rightarrow X$ contínua e limitada sobre $[t_0, \infty)$ temos que $x : [t_0, \infty) \rightarrow X$ é uma solução mild limitada de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ se e só se

$$x(t) = T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t G(t, s)f(s)ds, \quad t \geq t_0 .$$

Prova:

Se $x(t)$ é solução de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, limitada em $[t_0, \infty)$

$$x(t) = T(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds, \quad t \geq \tau \geq t_0 ,$$

donde

$$(I - P(t))x(t) = T(t, \tau)(I - P(\tau))x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)(I - P(s))f(s)ds, \quad t \geq \tau \geq t_0 ,$$

e

$$T(\tau, t)(I - P(t))x(t) = (I - P(\tau))x(\tau) + \int_{\tau}^t T(\tau, s)(I - P(s))f(s)ds, \quad t \geq \tau \geq t_0.$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ na expressão acima obtemos

$$(I - P(\tau))x(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} T(\tau, s)(I - P(s))f(s)ds. \quad (1)$$

Ainda

$$P(t)x(t) = T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t T(t, s)P(s)f(s)ds. \quad (2)$$

Tomando em (1) $t = \tau$ e adicionando a (2) obtemos:

$$x(t) = T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)f(s)ds.$$

Resta mostrar que se

$$x(t) = T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)f(s)ds$$

então $x(t)$ é solução mild de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, limitada em $[t_0, \infty)$. De fato, a limitação segue de:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|T(t, t_0)P(t_0)x(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|T(t, s)P(s)\| L ds + \int_t^{\infty} \|T(t, s)(I - P(s))\| L ds \\ \|x(t)\| &\leq M e^{-\beta(t-t_0)} \|x(t_0)\| + \frac{ML}{\beta} [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] + \frac{ML}{\beta} \end{aligned}$$

$$\|x(t)\| \leq M \|x(t_0)\| + \frac{2ML}{\beta}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Para ver que $x(t) = T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)f(s)ds$ é solução mild de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, note que, para $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} T(t, \tau)x(\tau) &= T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + T(t, \tau) \int_{t_0}^{\tau} T(\tau, s)P(s)f(s)ds - T(t, \tau) \int_{\tau}^{\infty} T(\tau, s)(I - P(s))f(s)ds \\ &= T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t T(t, s)P(s)f(s)ds - \int_t^{\infty} T(t, s)(I - P(s))f(s)ds - \\ &\quad - \int_{\tau}^t T(t, s)(I - P(s))f(s)ds - \int_{\tau}^t T(t, s)P(s)f(s)ds \\ &= T(t, t_0)P(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t, s)f(s)ds - \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds = x(t) - \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds, \end{aligned}$$

ou seja

$$x(t) = T(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds .$$

□

2.10 - TEOREMA

Se A_0 gera C_0 -semigrupo sobre X , $t \rightarrow A(t) - A_0 : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores, $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $(-\infty, t_0]$. Então, para qualquer função $f : (-\infty, t_0] \rightarrow X$ contínua e limitada sobre $(-\infty, t_0]$ temos que $x : (-\infty, t_0] \rightarrow X$ é uma solução mild limitada de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ se e só se

$$x(t) = T(t, t_0)(I - P_0)x(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} G(t, s)f(s)ds , \quad t \leq t_0$$

Prova:

Se $x(t) : (-\infty, t_0] \rightarrow X$ é solução mild de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$, então

$$x(t) = T(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds \quad t_0 \geq t \geq \tau$$

donde

$$P(t)x(t) = T(t, \tau)P(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)P(s)f(s)ds$$

fazendo $\tau \rightarrow -\infty$ obtemos

$$P(t)x(t) = \int_{-\infty}^t T(t, s)P(s)f(s)ds . \quad (1)$$

Ainda

$$(I - P(t_0))x(t_0) = T(t_0, t)(I - P(t))x(t) + \int_t^{t_0} T(t_0, s)(I - P(s))f(s)ds$$

então

$$T(t, t_0)(I - P(t_0))x(t_0) = (I - P(t))x(t) + \int_t^{t_0} T(t, s)(I - P(s))f(s)ds$$

e

$$(I - P(t))x(t) = T(t, t_0)(I - P(t_0))x(t_0) - \int_t^{t_0} T(t, s)(I - P(s))f(s)ds \quad (2)$$

Adicionando (1) a (2), obtemos:

$$x(t) = P(t)x(t) + (I-P(t))x(t) = T(t, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} G(t, s)f(s)ds, \quad t \leq t_0.$$

Resta mostrar que

$$x(t) = T(t, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} G(t, s)f(s)ds, \quad t \leq t_0$$

é uma solução mild limitada de $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ em $(-\infty, t_0]$, note que para $t_0 \geq t \geq \tau$.

$$\begin{aligned} T(t, \tau)x(\tau) &= T(t, \tau)T(\tau, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) + T(t, \tau) \int_{-\infty}^{t_0} G(\tau, s)f(s)ds \\ &= T(t, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) - \int_{\tau}^{t_0} T(t, s)(I-P(s))f(s)ds + \int_{-\infty}^{\tau} T(t, s)P(s)f(s)ds \\ &= T(t, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) - \int_{\tau}^{t_0} T(t, s)(I-P(s))f(s)ds + \int_{-\infty}^t T(t, s)P(s)f(s)ds - \\ &\quad - \int_{\tau}^t T(t, s)(I-P(s))f(s)ds - \int_{\tau}^t T(t, s)P(s)f(s)ds \\ &= T(t, t_0)(I-P(t_0))x(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} G(t, s)f(s)ds - \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds \end{aligned}$$

ou seja

$$x(t) = T(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t T(t, s)f(s)ds \quad \text{para } t_0 \geq t \geq \tau.$$

Para ver que $x(t)$ é limitada em $(-\infty, t_0]$, note que:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq M e^{-\beta(t_0-t)} \|x(t_0)\| + \int_{\tau}^{t_0} M e^{-\beta(s-t)} L ds + \int_{-\infty}^{\tau} M e^{-\beta(t-s)} L ds, \quad t \leq t_0 \\ \|x(t)\| &\leq M \|x(t_0)\| \frac{ML}{\beta} [1 - e^{-\beta(t_0-t)}] + \frac{ML}{\beta} \leq M \|x(t_0)\| + \frac{2ML}{\beta}, \quad t \leq t_0. \end{aligned}$$

ou seja

$$\sup \{ \|x(t)\|, \quad t \in (-\infty, t_0] \} \leq M \|x(t_0)\| + \frac{2ML}{\beta}.$$

2.11 - COROLÁRIO

Se A_0 gera C_0 -semigrupo sobre X , $t \mapsto A(t).A_0: \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é contínua na topologia forte dos operadores, $\dot{x} = A(t)x$ tem

dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$. Então, a única solução mild limitada de $\dot{x} = A(t)x$ é a nula.

Prova:

Imediata do Teorema 2.8, pondo $f = 0$.

Nossos próximos resultados relacionam dicotomia discreta e dicotomia exponencial.

2.12 - LEMA

Se $\{T(t,s), t \geq s\} \subset L(X)$ é uma família de operadores de evolução com dicotomia exponencial (com expoente β e constante M) e $\ell > 0$, então para qualquer $t_0 \in \mathbb{R}$, $\{T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M , $\theta = e^{-\beta\ell}$.

Prova:

Seja $P(t)$ a família de projeções associada a dicotomia de $T(t,s)$.

Definimos

$$T_n = T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$P_n = P(t_0+n\ell), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Mostremos agora que as condições de dicotomia discreta estão satisfeitas

$$\begin{aligned} i) \quad T_n P_n &= T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell) P(t_0+n\ell) \\ &= P(t_0+(n+1)\ell) T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell) \\ &= P_{n+1} T_n \end{aligned}$$

$$ii) \quad T_n|_{N(P_n)} : N(P_n) \rightarrow N(P_{n+1}) \text{ é um isomorfismo.}$$

$$\begin{aligned}
 iii) \quad \|T_{n,m} P_m x\| &= \|T_{n-1} \dots T_m P_m x\| \\
 &= \|T(t_0+n\ell, t_0+(n-1)\ell) \dots T(t_0+(m+1)\ell, t_0+m\ell) P(t_0+m\ell) x\| \\
 &= \|T(t_0+n\ell, t_0+m\ell) P(t_0+m\ell) x\| \\
 &\leq M e^{-\beta\ell(n-m)} \|x\| = M \theta^{n-m} \|x\|, \quad n \geq m
 \end{aligned}$$

onde $\theta = e^{-\beta\ell}$.

$$\begin{aligned}
 iv) \quad \|T_{n,m} (I - P_m) x\| &= \|(T(t_0+m\ell, t_0+n\ell) (I - P(t_0+n\ell)))^{-1} x\| \\
 &= \|T(t_0+n\ell, t_0+m\ell) (I - P(t_0+m\ell)) x\| \\
 &\leq M e^{-\beta\ell(m-n)} = M \theta^{m-n} \|x\|
 \end{aligned}$$

onde $\theta = e^{-\beta\ell}$.

Isto mostra que $\{T_n\}$ tem dicotomia discreta com constantes M e $\theta = e^{-\beta\ell}$.

□

O teorema a seguir opera como uma interface entre dicotomia discreta e dicotomia exponencial, nesta ordem.

2.13 - TEOREMA

Suponha que $\{T(t,s), t \geq s\}$ é uma família de operadores de evolução associada a $\dot{x} = A(t)x$, com

$$L = \sup_{0 \leq t-s \leq \ell} \|T(t,s)\| < \infty$$

onde ℓ, M e θ são constantes positivas com $\theta = e^{-\beta\ell} < 1$. Se para cada t_0 , $T_n(t_0) = \{T(t_0 + (n+1)\ell, t_0 + n\ell), -\infty < n < \infty\}$ tem dicotomia discreta com constantes M e θ , então

$$\{T(t,s), t \geq s\}$$

tem dicotomia exponencial com expoente β e constante $K.M$, onde

$$K = \sup_{0 \leq t-s \leq \ell} \{ \|T(t,s)\| e^{\beta(t-s)} \}$$

Prova:

Suponha que $\{P_n(t_0)\}$ é a família de projeções associada à dicotomia discreta de $\{T(t_0+(n+1)\ell, t_0+n\ell)\}$ e defina $P(t_0) = P_0(t_0)$.

Mostremos que $P_k(t) = P_0(t+k\ell)$. É claro que $T_n(t+k\ell)$ tem dicotomia discreta com projeções $P_n(t+k\ell)$ e também é claro que $T_n(t+k\ell) = T_{n+k}(t)$. Sendo assim $T_n(t+k\ell)$ tem dicotomia discreta com projeções $P_{n+k}(t)$. Segue da unicidade das projeções que $P_{n+k}(t) = P_n(t+k\ell)$. Em particular $P_k(t) = P_0(t+k\ell)$.

Nós agora mostraremos que

$$P(t+n\ell)T(t+n\ell, t+k\ell) = T(t+n\ell, t+k\ell)P(t+k\ell),$$

por indução.

Para $n = k+1$, temos:

$$\begin{aligned} T((t+k\ell)+k, t+k\ell)P_0(t+k\ell) &= P_1(t+k\ell)T(t+(k+1)\ell, t+k\ell) \\ &= P_0((t+k\ell)+k)T(t+(k+1)\ell, t+k\ell) \\ &= P_0(t+(k+1)\ell)T(t+(k+1)\ell, t+k\ell) \end{aligned}$$

isto é

$$P(t+(k+1)\ell)T(t+(k+1)\ell, t+k\ell) = T(t+(k+1)\ell, t+k\ell)P(t+k\ell).$$

Se a igualdade requerida é válida para $n = j$, então

$$\begin{aligned} T(t+(j+1)\ell, t+k\ell)P(t+k\ell) &= T(t+(j+1)\ell, t+k\ell)P_0(t+k\ell) \\ &= T(t+(j+1)\ell, t+j\ell)P(t+j\ell)T(t+j\ell, t+k\ell) \\ &= P_0(t+(j+1)\ell)T(t+(j+1)\ell, t+j\ell)T(t+j\ell, t+k\ell) \\ &= P(t+(j+1)\ell)T(t+(j+1)\ell, t+k\ell). \end{aligned}$$

Demonstraremos que

$$\|T(t,s)P(s)\| \leq K M e^{-\beta(t-s)}, \text{ para } t \geq s.$$

Seja n um número natural tal que $s + n\ell \leq t < s + (n+1)\ell$, então:

$$\begin{aligned} \|T(t,s)P(s)\| &\leq \|T(t,s+n\ell)\| \|T(s+n\ell,s)P(s)\| \\ &\leq \|T(t,s+n\ell)\| M \theta^n = \|T(t,s+n\ell)\| M e^{-\beta n\ell} \\ &\leq \|T(t,s+n\ell)\| e^{-\beta(n\ell-(t-s))} M e^{-\beta(t-s)} \\ &\leq K M e^{-\beta(t-s)}, \end{aligned}$$

como queríamos.

Suponha que $x \in N(P(s))$ e $t \leq s$. Definimos

$$T(t,s)x = T(t,s+n\ell)(T(s,s+n\ell)|_{N(P(s+n\ell))})^{-1}x$$

onde n é escolhido tal que $s + (n+1)\ell > t \geq s + n\ell$. Mostremos que $T(t,s)$ assim definido satisfaz

$$\|T(t,s)(I-P(s))x\| \leq K M e^{-\beta(s-t)} \|x\|$$

De fato:

$$\begin{aligned} \|T(t,s)(I-P(s))x\| &\leq \|T(t,s+n\ell)\| \|(T(s,s+n\ell)|_{N(P(s+n\ell))})^{-1}(I-P(s))x\| \\ &\leq \|T(t,s+n\ell)\| M \theta^{-n} \|x\| = \|T(t,s+n\ell)\| M e^{\beta n\ell} \|x\| \\ &\leq \|T(t,s+n\ell)\| e^{\beta n\ell + \beta(s-t)} M e^{-\beta(s-t)} \|x\| \\ &\leq K M e^{-\beta(s-t)} \|x\| \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que

$$R(P(t_0)) = \{x \in X : T(t,t_0)x \text{ é limitada para } t \geq t_0\}.$$

Se $x \in R(P(t_0)) \Rightarrow P(t_0)x = x \Rightarrow$

$$\|T(t,t_0)x\| = \|T(t,t_0)P(t_0)x\| \leq K M e^{-\beta(t-t_0)}$$

portanto $T(t,t_0)x$ é limitada para $t \geq t_0$.

Suponha agora que $x \notin R(P(t_0))$, então

$$T(t, t_0)x = T(t, t_0)P(t_0)x + T(t, t_0)(I - P(t_0))x ,$$

como $T(t, t_0)P(t_0)x$ é limitado para $t \geq t_0$, se queremos mos trar que $T(t, t_0)x$ não é limitado para $t \geq t_0$, basta mostrar que $T(t, t_0)(I - P(t_0))x$ é ilimitado para $t \geq t_0$. De fato:

$$\|T(t_0, t_0 + n\ell)(I - P(t_0 + n\ell))v\| \leq M e^{-\beta n\ell} \|v\|, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad v \in X,$$

seja $v = T(t_0 + n\ell, t_0)(I - P(t_0))x$. Então

$$\begin{aligned} \|(I - P(t_0))x\| &= \|T(t, t_0 + n\ell)(I - P(t_0 + n\ell))T(t_0 + n\ell, t_0)(I - P(t_0))x\| \\ &\leq M e^{-\beta n\ell} \|T(t_0 + n\ell, t_0)(I - P(t_0))x\| \end{aligned}$$

Portanto

$$\|T(t_0 + n\ell, t_0)(I - P(t_0))x\| \geq M^{-1} e^{\beta n\ell} \|(I - P(t_0))x\|$$

logo $T(t, t_0)(I - P(t_0))x$ não é limitado para $t \geq t_0$ e portanto $T(t, t_0)x$ não é limitado para $t \geq t_0$.

O próximo passo é mostrar que

$$T(t, t_0)R(P(t_0)) \subset R(P(t)). \quad \text{De fato:}$$

se $P(t_0)x = x \Rightarrow T(t, t_0)x$ é limitada para $t \geq t_0 \Rightarrow$ para ca da $t \geq t_0$ temos que $T(s, t)T(t, t_0)x$ é limitada para $s \geq t$. Segue que $T(t, t_0)x \in R(P(t))$.

Verifiquemos que $T(t, t_0)$ é injetiva sobre $N(P(t_0))$ pa
ra $t \geq t_0$. Suponha que $\exists x \in N(P(t_0))$, $x \neq 0$ tal que $T(t, t_0)x = 0$, seja $t_0 + n\ell \geq t$, então $T(t_0 + n\ell, t_0)x = T(t_0 + n\ell, t)T(t, t_0)x = 0$. Logo $T(t_0 + n\ell, t_0)$ não é injetiva so
bre $N(P(t_0))$, o que é absurdo. Note ainda que $T(s, t)$ é inje
tiva sobre $T(t, t_0)N(P(t_0))$ para $s \geq t \geq t_0$, desde que se
existe $y \in T(t, t_0)N(P(t_0))$, $y \neq 0$ tal que $T(s, t)y = 0$ para
algum $s \geq t$, seja $t_0 + n\ell \geq s$ e $x \in N(P(t_0))$ tal que
 $T(t, t_0)x = y$. Daí

$$\begin{aligned} T(t_0+n\ell, t_0)x &= T(t_0+n\ell, s)T(s, t_0)x = T(t_0+n\ell, s)T(s, t)T(t, t_0)x \\ &= T(t_0+n\ell, s)T(s, t)y = 0 \end{aligned}$$

e $T(t_0+n\ell, t_0)$ não é injetiva sobre $N(P(t_0))$, o que é absurdo, logo $T(s, t)$ é injetiva sobre $T(t, t_0)N(P(t_0))$, $s \geq t \geq t_0$.

Seja $x \in X$ e $t_1 < t_0$. Se existir um único $y \in X$ tal que

$$T(t_0, t_1)y = x$$

definimos

$$T(t_1, t_0)x = y.$$

Em particular se $x \in N(P(t_0))$, para todo $t \leq t_0$, temos:

$$T(t, t_0)x = T(t, t_0+n\ell)T(t_0+n\ell, t_0)x,$$

onde $0 \leq t-t_0+n\ell < \ell$.

Mostremos que

$$N(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ está definida para todo } t \leq t_0 \text{ e é limitada para } t \leq t_0\}$$

É claro que se $x \in N(P(t_0))$ então $T(t, t_0)x$ está definida e é limitada para $t \leq t_0$.

Suponha agora que $x \notin N(P(t_0))$, então fazendo

$$y = P(t_0)x$$

$$z = (I-P(t_0))x$$

temos que se $T(t, t_0)x$ está definido para $t \leq t_0$. Então temos:

$T(t, t_0)z$ e $T(t, t_0)x$ definidos $\Rightarrow T(t, t_0)y$ está definido.

Devemos mostrar que $T(t, t_0)P(t_0)x$ é ilimitado para $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned} P(t_0)x &= T(t_0, t_0+n\ell)T(t_0+n\ell, t_0)P(t_0)x \\ &= T(t_0, t_0+n\ell)P(t_0+n\ell)T(t_0+n\ell, t_0)P(t_0) \end{aligned}$$

onde $t_0+n\ell \leq t_0$, da definição de $T(t, t_0)P(t_0)x$,

$$\|P(t_0)x\| \leq M e^{+\beta n\ell} \|T(t_0+n\ell, t_0)P(t_0)x\|$$

e

$$\|T(t_0+n\ell, t_0)P(t_0)x\| \geq M^{-1} e^{-\beta n\ell} \|P(t_0)x\| \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow -\infty.$$

Daí $T(t, t_0)P(t_0)x$ é ilimitado para $t \leq t_0$. Portanto $T(t, t_0)x$ é ilimitado para $t \leq t_0$, desde que $T(t, t_0)(I-P(t_0))x$ é limitado para $t \leq t_0$. Logo:

$$N(P(t_0)) = \{x \in X : T(t, t_0)x \text{ está definida para } t \leq t_0 \text{ e é limitada para } t \leq t_0\}.$$

Mostremos agora que $T(t, t_0)N(P(t_0)) \subset N(P(t))$ para $t \geq t_0$. De fato, para $t \leq t_0$, temos que se $x \in N(P(t_0))$ então $T(s, t)T(t, t_0)x$ é limitada para $s \leq t \Rightarrow T(t, t_0)x \in N(P(t))$ para $t \leq t_0$. Para mostrar que $T(t, t_0)N(P(t_0)) \subset N(P(t))$ para $t \geq t_0$. Note que, sobre $N(P(t_0))$, temos:

$$T(t, t_0) = T(t, t_0+n\ell)T(t_0+n\ell, t_0)$$

onde $t_0+n\ell \geq t$. Então

$$T(t, t_0)N(P(t_0)) = T(t, t_0+n\ell)N(P(t_0+n\ell)) \subset N(P(t)).$$

Se tomamos $x \in N(P(t))$ qualquer, então $y = T(t_0, t)x \in N(P(t_0))$ e $T(t, t_0)y = x$. Isto mostra que

$$T(t, t_0)|_{N(P(t_0))} : N(P(t_0)) \rightarrow N(P(t)) \text{ é isomorfismo.}$$

Ainda

$$T(t, t_0)P(t_0)x = P(t)T(t, t_0)x \text{ para } x \in N(P(t_0)), t \geq t_0$$

e

$$T(t, t_0)(I-P(t_0))x = (I-P(t))T(t, t_0)x \text{ para } x \in R(P(t_0)), t \geq t_0$$

ou

$$T(t, t_0)P(t_0)x = P(t)T(t, t_0)x \text{ para } x \in R(P(t_0)), t \geq t_0$$

Logo, da linearidade, segue que

$$T(t, t_0)P(t_0) = P(t)T(t, t_0), t \geq t_0.$$

Isto conclui a demonstração que $\{T(t, t_0), t \geq t_0\}$ tem dicotomia exponencial com expoente β e constante M .

□

O teorema a seguir utiliza os resultados que relacionam dicotomia discreta e exponencial, dados nesta seção, e o Teorema II.2, de preservação de dicotomia discreta, para obter um resultado de preservação de dicotomia exponencial.

2.14 - TEOREMA

Suponha que $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente β e constante M e a correspondente família de operadores de evolução $\{T(t, s), t \geq s\}$ satisfaz

$$L = \sup \{ \|T(t, s)\|, 0 \leq t - s \leq 1 \} < \infty.$$

Se $0 < \beta_1 < \beta$ e $M_1 > M$, existe $\epsilon > 0$ (dependendo somente de β, β_1, M, M_1 e L) tal que, qualquer equação cuja família de operadores de evolução $\{S(t, s), t \geq s\}$ satisfaz

$$\sup \{ \|T(t, s) - S(t, s)\|, 0 \leq t - s \leq 1 \} \leq \epsilon$$

tem dicotomia exponencial com expoente β_1 e constante M_1 .

Prova:

Seja $\ell > 0$ tal que $M e^{-\beta \ell} < e^{-\beta_1 \ell}$. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ seja $t_n = t_0 + n\ell$ com n inteiro. É claro que $\{T(t_{n+1}, t_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tem dicotomia discreta com constantes M e $\theta = e^{-\beta \ell}$. Note que:

$$\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|T(t, s) - S(t, s)\| \leq \epsilon$$

Suponha que $0 \leq t - s \leq \ell$ e seja $t_k \in [s, t]$ tal que $t_k = s + k\ell$ onde k é inteiro, $k \geq 0$ e $t_{k+1} > t$. Então:

$$\|T(t, s) - S(t, s)\| = \|[T(t, t_k) - S(t, t_k)]S(t_k, s) - T(t, t_k)[S(t_k, s) - T(t_k, s)]\|$$

ainda

$$\|T(t, t_k) - S(t, t_k)\| \leq \epsilon \quad \text{desde que} \quad 0 \leq t - t_k < 1$$

e

$$\|S(t_k, s)\| = \|S(t_k, t_k-1)S(t_k-1, t_k-2) \dots S(s+1, s)\| \leq (L + \epsilon)^k.$$

Daí

$$\|T(t, s) - S(t, s)\| \leq (L + \epsilon)^k \epsilon + L \|S(t_k, s) - T(t_k, s)\|,$$

procedendo da mesma forma obtemos:

$$\begin{aligned} \|T(t_k, s) - S(t_k, s)\| &= \|[T(t_k, t_k-1) - S(t_k, t_k-1)]S(t_k-1, s) - \\ &- T(t_k, t_k-1)[S(t_k-1, s) - T(t_k-1, s)]\| \leq (L + \epsilon)^{k-1} \epsilon + L \|S(t_k-1, s) - T(t_k-1, s)\|. \end{aligned}$$

Segue que:

$$\|T(t, s) - S(t, s)\| \leq [(L + \epsilon)^k + L(L + \epsilon)^{k-1} + \dots + L^k] \epsilon \leq c_\ell \epsilon, \quad 0 \leq t - s \leq \ell$$

Deste modo,

$$\|T(t_{n+1}, t_n) - S(t_{n+1}, t_n)\| \leq c_\ell \epsilon \quad \text{para todo} \quad n.$$

Como $M_1 > M$ e $1 > \theta_1 = e^{-\beta_1 \ell} > e^{-\beta \ell} = \theta$, temos que $\{S(t_{n+1}, t_n)\}$ tem dicotomia discreta com constantes M_1 e θ_1 , para oportuna escolha de ϵ , uniformemente em t_0 .

Segue do Teorema 2.13 que $\{S(t, s), t \geq s\}$ tem dicotomia exponencial com constante $K.M_1$ e expoente β_1 . Seja $\tilde{G}(t, s)$ a correspondente função de Green, então:

$$\|\tilde{G}(t, s)\| \leq M_1 e^{-\beta_1 |t-s|}$$

quando $k = \frac{(t-s)}{\ell}$ é inteiro, bastando fazer $s = t_0$ e $t = t_0 + k\ell$.

Suponha que $G(t, s)$ é a função de Green associada a $T(t, s)$ e note que:

$$\tilde{G}_{n,m} - G_{n,m} = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} (S_k - T_k) \tilde{G}_{k,m}$$

onde

$$\tilde{G}_{n,m} = \tilde{G}(t_n, t_m), G(n, m) = G(t_n, t_m), S_k = S(t_{k+1}, t_k) \quad \text{e} \quad T_k = T(t_{k+1}, t_k).$$

Então

$$\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\| \leq c.\epsilon \quad \text{quando} \quad \frac{t-s}{\ell} \text{ é inteiro.}$$

Assim, para $t \geq s$

$$\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\| = \|(S(t,r) - T(t,r))\tilde{G}(r,s) + T(t,r)(\tilde{G}(r,s) - G(r,s))\|$$

onde r está entre t e s e é tal que $0 \leq t-r \leq \ell$ e $\frac{r-s}{\ell}$ é inteiro. Portanto:

$$\|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\| \leq c_\ell \in M_1 + \sup\{\|T(t,r)\|, 0 \leq t-r \leq \ell\}.c.\epsilon,$$

para $s \geq t$ escolhemos r tal que $0 \leq r-s \leq \ell$ e $\frac{r-t}{\ell}$ é inteiro. Logo:

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\| &= \|(\tilde{G}(t,r) - G(t,r))T(r,s)(I-P(s)) - \tilde{G}(t,r)(T(r,s) - S(r,s)(I-P(s)))\| \\ &\leq \sup_{0 \leq r-s \leq \ell} \|T(r,s)(I-P(s))\| c.\epsilon + c_\ell \in M_1 M. \end{aligned}$$

Daí, para ϵ suficientemente pequeno e para $0 \leq |t-s| \leq \ell$, temos que

$$\begin{aligned} e^{\beta_1|t-s|} \|\tilde{G}(t,s)\| &\leq e^{\beta_1|t-s|} \|G(t,s)\| + e^{\beta_1|t-s|} \|\tilde{G}(t,s) - G(t,s)\| \\ &\leq M e^{-(\beta-\beta_1)|t-s|} + e^{\beta_1\ell} R\epsilon \leq M_1. \end{aligned}$$

Em particular se $|t-s| = \ell$, temos

$$e^{\beta\ell} \|\tilde{G}(t,s)\| \leq M e^{-(\beta-\beta_1)\ell} + e^{\beta_1\ell} R\epsilon \leq 1,$$

da escolha de ℓ e para ϵ suficientemente pequeno, segue

$$\|\tilde{G}(t,s)\| \leq e^{-\beta\ell}.$$

Suponha agora que t e s são quaisquer, r está entre t e s e é tal que $|t-r| \leq \ell$ e $\frac{r-s}{\ell} = m+1$, inteiro. Então

$$G(t,s) = G(t,r)G(r,r+\ell) \dots G(r+m\ell,s)$$

e

$$\|G(t,s)\| \leq \|G(t,r)\| e^{-\beta_1|\ell(m+1)|} \leq M_1 e^{-\beta_1|t-r|} e^{-\beta_1|r-s|} = M_1 e^{-\beta_1|t-s|},$$

onde a última igualdade segue do fato que r está entre t e s .

□

2.15 - TEOREMA

Suponha que A_0 gera C_0 -semigrupo, $t \rightarrow A(t) - A_0 : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ satisfazendo $t \rightarrow (A(t) - A_0)x$ é limitada e contínua para cada $x \in X$ e $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente $\beta > 0$ e constante M . Se $0 < \beta_1 < \beta$ e $M_1 > M$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $t \rightarrow B(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ satisfazendo $t \rightarrow B(t)x$ contínua e limitada para todo $x \in X$ e

$$\int_{t_0}^{t_1} \|B(t)\| dt \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t_1 - t_0 \leq 1$$

a equação

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x$$

tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente β_1 e limite M_1 .

Prova:

Em primeiro lugar note que, se $\{T(t,s), t \geq s\}$ e $\{S(t,s), t \geq s\}$ são as famílias de operadores de evolução associadas a $\dot{x} = A(t)x$ e a $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$, respectivamente, temos:

$$T(t,\tau)x_0 = e^{A_0(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A_0(t-s)}(A(s) - A_0)T(s,\tau)x_0 ds, \quad t \geq \tau$$

$$S(t,\tau)x_0 = e^{A_0(t-\tau)}x_0 + \int_{\tau}^t e^{A_0(t-s)}(A(s) + B(s) - A_0)S(s,\tau)x_0 ds, \quad t \geq \tau$$

Ainda

$$\|T(t,\tau)x_0\| \leq M_0 \|x_0\| + \int_{\tau}^t M_1 \|T(s,\tau)x_0\| ds, \quad 0 \leq t - \tau \leq 1$$

onde

$$M_0 = \sup \{\|e^{A_0 s}\|, 0 \leq s \leq 1\}, \quad M_1 = M_0 \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t) - A_0\|,$$

segue da desigualdade de Gronwall que

$$\|T(t, \tau)\| \leq M_0 e^{M_I} = L, \quad 0 \leq t - \tau \leq 1.$$

De modo completamente análogo

$$\|S(t, \tau)\| \leq L', \quad 0 \leq t - \tau \leq 1.$$

Em seguida note que:

$$\begin{aligned} \|T(t, \tau)x_0 - S(t, \tau)x_0\| &= \left\| \int_{\tau}^t e^{A_0(t-s)} (A(s) - A_0) T(s, \tau)x_0 ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\tau}^t e^{A_0(t-s)} (A(s) - A_0 + B(s)) S(s, \tau)x_0 ds \right\| \\ &\leq \int_{\tau}^t M_I \|T(s, \tau)x_0 - S(s, \tau)x_0\| ds + \int_{\tau}^t M_0 L' \|B(s)x_0\| ds \\ &\leq M_0 L' \varepsilon \|x_0\| + M_I \int_{\tau}^t \|T(s, \tau)x_0 - S(s, \tau)x_0\| ds, \quad 0 \leq t - \tau \leq 1. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Gronwall

$$\|T(t, \tau) - S(t, \tau)\| \leq M_0 L' \varepsilon e^{M_I(t-\tau)} \leq M_0 L' e^{M_I} \varepsilon, \quad 0 \leq t - \tau \leq 1.$$

Do teorema 2.13 concluímos que

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x$$

tem dicotomia exponencial com expoente $\beta_1 > 0$ e limite M_1 .

2.16 - TEOREMA

Suponha que A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0 -semi grupo, Λ um conjunto e para cada $(t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \Lambda$ $A(t, \lambda) - A_0 \in L(X)$, $t \rightarrow A(t, \lambda) - A_0$ limitada em $\mathbb{R}$ uniformemente em $\lambda \in \Lambda$, com $t \rightarrow A(t, \lambda) - A_0$ contínua na topologia forte dos operadores para cada $\lambda \in \Lambda$. Se para cada $\lambda \in \Lambda$, $\dot{x} = A(t, \lambda)x$ tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente $\beta > 0$ e constante M independentes de λ . Se $0 < \beta_1 < \beta$, $M < M_1$ e $\ell > 0$ é tal que $M e^{-\beta \ell} < e^{-\beta_1 \ell}$. Se

$$t \rightarrow A(t) - A_0$$

é contínua e limitada na topologia forte dos operadores e há uma função $\lambda(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \Lambda$ com

$$\int_{t_0}^{t_1} \|A(t) - A(t, \lambda(t_0))\| dt \leq \varepsilon$$

para $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \ell$ e

$$\|P_{\lambda(t_0 - \ell)}(t_0) - P_{\lambda(t_0)}(t_0)\| \leq \varepsilon$$

para todo t_0 . Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Então

$$\dot{x} = A(t)x$$

tem dicotomia exponencial sobre $\mathbb{R}$ com expoente β_1 e limite M_1 .

Prova:

Seja $t_n = t_0 + n\ell$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $\lambda_n = \lambda(t_n)$ com $P_n = P_{\lambda_n}(t_n)$, $\tilde{P}_n = P_{\lambda_{n-1}}(t_n)$, $T_n = T_{\lambda_n}(t_{n+1}, t_n)$ e $\theta = Me^{-\beta\ell}$. Então $T_n P_n = \tilde{P}_{n+1} T_n$, $T_n|_{N(P_n)}$ é isomorfismo de $N(P_n)$ sobre $N(\tilde{P}_{n+1})$,

$$\|T_n x\| \leq \theta \|x\|, \text{ se } P_n x = x$$

e

$$\|x\| = \|T_{\lambda_n}(t_n, t_{n+1}) T_n x\| \leq \theta \|T_n x\|, \text{ se } P_n x = 0.$$

Ainda, se $T(t, s)$ é a família de operadores de evolução associada a $\dot{x} = A(t)x$, então

$$T(t, t_0)x = e^{A_0(t-t_0)} x + \int_{t_0}^t e^{A_0(t-s)} (A(s) - A_0) T(s, t_0)x ds$$

e

$$T_{\lambda}(t, t_0)x = e^{A_0(t-t_0)} x + \int_{t_0}^t e^{A_0(t-s)} (A(s, \lambda) - A_0) T(s, t_0)x ds$$

Daí

$$\begin{aligned} T(t, t_0)x - T_\lambda(t, t_0)x &= \int_{t_0}^t e^{A_0(t-s)} (A(s) - A(s, \lambda)) T(s, t_0)x \, ds + \\ &+ \int_{t_0}^t e^{A_0(t-s)} A(s, \lambda) [T(s, t_0) - T_\lambda(s, t_0)]x \, ds \end{aligned}$$

e

$$\|T(t, \tau) - T_{\lambda(\tau)}(t, \tau)\| \leq K_1 \varepsilon + K_2 \int_{\tau}^t \|T(s, \tau) - T_{\lambda(\tau)}(s, \tau)\| \, ds, \quad 0 \leq t - \tau \leq \ell.$$

Segue da desigualdade de Gronwall, que

$$\|T(t, \tau) - T_{\lambda(\tau)}(t, \tau)\| \leq K_1 e^{K_2 \ell} \varepsilon, \quad 0 \leq t - \tau \leq \ell.$$

Tomando $\tau = t_0 + n\ell$ e $t = t_0 + (n+1)\ell$, temos:

$$\|T(t_{n+1}, t_n) - T_n\| \leq k \varepsilon, \quad \text{uniformemente em } n.$$

Ainda, se $\tilde{t}_0 = t_0 + n\ell$

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}_n - P_n\| &= \|P_\lambda(t_0 + (n-1)\ell)(t_0 + n\ell) - P_\lambda(t_0 + n\ell)(t_0 + n\ell)\| \\ &= \|P_\lambda(\tilde{t}_0 - \ell)(\tilde{t}_0) - P_\lambda(\tilde{t}_0)(\tilde{t}_0)\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Segue do teorema II.4 que $T(t_{n+1}, t_n)$ tem dicotomia discreta com constantes M_1 e $\theta_1 = e^{-\beta_1 \ell}$. Segue do Teorema 2.13 que $\dot{x} = A(t)x$ tem dicotomia exponencial com expoente β_1 . Para ver que a constante $\tilde{e} M_1$ procedemos como no teorema 2.14.

B I B L I O G R A F I A

- [1] - A. Pazy: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations - Springer Verlag, 1983.
- [2] - D. Henry: Evolution Equations in Banach Spaces - Notas de Curso - IME - USP, 1981.
- [3] - D. Henry: Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics (840) - Springer Verlag, 1981.
- [4] - A.E. Taylor: Introduction to Functional Analysis - Wiley, 1961.
- [5] - T. Kato: Perturbation Theory for Linear Operator - Springer Verlag, 1976.