Superfícies com singularidades não isoladas

Otoniel Nogueira da Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Otoniel Nogueira da Silva

Superfícies com singularidades não isoladas

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Profa. Dr. Maria Aparecida Soares Ruas

Coorientador: Prof. Dr. Jawad Snoussi

USP – São Carlos
Abril de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S634s Silva, Otoniel Nogueira da
Superfícies com singularidades não isoladas /
Otoniel Nogueira da Silva; orientador Maria Aparecida
Soares Ruas; coorientador Jawad Snoussi. - São
Carlos - SP, 2017.
130 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

I. Ruas, Maria Aparecida Soares, orient. II.
Snoussi, Jawad, coorient. III. Título.

Otoniel Nogueira da Silva

Surfaces with non-isolated singularities

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dr. Maria Aparecida Soares Ruas

Co-advisor: Prof. Dr. Jawad Snoussi

USP – São Carlos

April 2017

Não há ramo da matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa vir a ser aplica-
do, mais cedo ou mais tarde,
aos fenômenos do mundo
real.

(Lobachevsky)

Irmãos, quanto a mim, não
julgo que o haja alcançado,
mas uma coisa faço, e é que,
esquecendo-me das coisas
que atrás ficam, e avançando
para as que estão diante de
mim, prossigo para o alvo,
pelo prêmio da soberana
vocação de Deus em Cristo
Jesus.

(Filipenses 3. 13-14)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, a Ele toda honra e toda glória. Obrigado Senhor, por ter me sustentado por todo este caminho.

A minha amada esposa Núbia que esteve ao meu lado durante todo esses anos de doutorado, por ter me apoiado com muito amor, paciência e companheirismo, pelas alegrias e problemas compartilhados, obrigado por estar na minha vida. A toda minha família que sempre torceu por mim, muito obrigado, amo todos vocês.

A todos os professores que tive até aqui, os professores da escola estadual Segismundo Pereira, em especial aos mestres Alexandre (in memoriam) e Marcelo que foram os primeiros a me incetivar a prosseguir nesse sonho, os professores da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em especial aos professores Valdair Bonfim, Geraldo Botelho e Cícero Carvalho, e também aos professores do ICMC/USP. Agradeço a Deus pela oportunidade de ter estudado aqui no ICMC, tendo contato com matemáticos de tão alto nível.

Entre os professores do ICMC, gostaria de agradecer em especial aos professores Ton Marar, Marcelo Saia, Nivaldo Grulha, Victor Hugo Jorge Perez e Eduardo Tengan, que por várias vezes dispuseram do seu tempo para tirar minhas dúvidas sempre com muita dedicação, e por sempre acreditarem no meu trabalho, muito obrigado.

Agradeço aos professores Aldício Miranda, Alexandre Fernandes, Terence Gaffney, Juan José Nuño-Ballesteros, Guillermo Peñafort-Sanchis, David Trotman e Gert-Martin Greuel pelas conversas e sugestões matemáticas.

Tive o privilegio de ser orientado por dois grandes matemáticos, Profa. Cidinha e Prof. Jawad. Foi uma honra ter trabalhado com esses grandes nomes da matemática. Muito obrigado pela paciência, pelo apoio nos momentos em que eu achava que não conseguiria, pela disposição para auxiliar-me na pesquisa, pela amizade, confiança, compreensão, sugestões e leitura de cada linha deste trabalho. Além de aprender matemática, aprendi com vocês muito sobre humildade,

trabalho e respeito. Vocês foram muito mais do que orientadores, obrigado.

Aos meus amigos de doutorado, Martin, Sidnei, Patrícia, Rafaella, Jackson, Lito, Victor, Thiago, Pedro, Rodolfo, Carol, a aos meus amigos da igreja, Erick, Gesana, Rawlilson, Sheila e Jhonathan.

Aos funcionários do ICMC/USP e aos funcionários do Instituto de Matemáticas da UNAM em Cuernavaca, muito obrigado.

Aos professores, Mark Spivakovsky, Juan José Nuño-Ballesteros e Marcelo Escudeiro por fazerem parte da minha banca de doutorado.

A Capes pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho, muito obrigado.

A minha amada esposa Núbia e
aos meus pais Oracildo e Marta.

Ao meu tio Horácio, a minha avó
Geralda, as minhas irmãs Miriam
e Anaísa, a meu cunhado Cleiton
e a meus lindos sobrinhos Maria-
na, Samuel e Giovana, com muito
amor e carinho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos famílias de curvas genericamente reduzidas. Estendemos para o caso genericamente reduzido alguns resultados conhecidos para famílias de curvas reduzidas como a equivalência entre a Whitney equisingularidade e a resolução simultânea forte da família e a equivalência entre a Whitney equisingularidade e a constância do número de Milnor e da multiplicidade de cada curva X_t da família.

Estudamos também a equisingularidade topológica e a Whitney equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados. Em ([51]), Ruas apresentou uma conjectura cujo enunciado diz que se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação finitamente determinado, então um desdobramento F a 1-parâmetro de f é topologicamente trivial se, e somente se F é Whitney equisingular se, e somente se o número de Milnor $\mu(D(f_t))$ de $D(f_t)$ é constante, onde $D(f_t)$ é a curva de pontos duplos de f_t . Apresentamos contra-exemplos que mostram como esta conjectura pode falhar. Mostramos também uma classe de famílias de germes aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ em que a conjectura é verdadeira. No caso em que f é homogênea e de coposto 1, mostramos também algumas fórmulas para a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $f(D(f))$, o número de Milnor da seção transversal $\mu_1(f(\mathbb{C}^2))$ e o invariante $J(f)$ em termos dos graus de f .

Em [44], Nuño-Ballesteros e Jorge Pérez apresentam alguns resultados sobre germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ com $n \geq 3$. Quando f é finitamente determinado, a curva dos pontos duplos $D(f)$ de f tem uma estrutura de curva genericamente reduzida. Apresentamos uma outra forma de abordar alguns problemas descritos em [44] usando resultados sobre curvas genericamente reduzidas.

Palavras-chave: Equisingularidade, trivialidade topológica, Whitney equisingularidade, conjectura de Ruas, conjectura de Zariski.

Abstract

In this work, we study families of generically reduced curves. We extend to the generically reduced case some results known for families of reduced curves as the equivalence between Whitney equisingularity and strong simultaneous resolution of the family and the equivalence between Whitney equisingularity and the constancy of the Milnor number and the multiplicity of each curve X_t of the family.

We also study the topological triviality and the Whitney equisingularity of families of surfaces in $\mathbb{C}^3$ parametrized by $\mathcal{A}$ -finitely determined map germs. In [51], Ruas presented a conjecture whose statement says that if $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ is a finitely determined map germ, then a 1-parameter unfolding $F = (f_t, t)$ of f is topological trivial if and only if it is Whitney equisingular if and only if the Milnor number $\mu(D(f_t))$ is constant, where $D(f_t)$ is the double point curve of f_t . We present counter-examples that show how the conjecture can fail. We also show a class of families of map germs $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ in which the conjecture is true. We also give formulas for the multiplicity of the image of the double point curve $f(D(f))$, the Milnor number of the transversal generic section $\mu_1 f(\mathbb{C}^2)$ and the invariant $J(f)$ in terms of degrees of f in the case in which f is homogeneous and has corank 1.

In [44], Nuño-Ballesteros and Jorge Pérez give some results in the case of families of map germs $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ with $n \geq 3$. When f is finitely determined, the double point curve $D(f)$ of f is a generically reduced curve. We present another way of approaching some problems in [44] using results on generically reduced curves.

Key-words: Equisingularity, topological triviality, Whitney equisingularity, Ruas's conjecture, Zariski's conjecture.

Sumário

Lista de figuras	XIX
Introdução	1
1. Preliminares	5
1.1. Germes	5
1.2. Germes de espaços analíticos	6
1.3. Estratificação de Whitney	10
1.4. Espaços analíticos Cohen-Macaulay	12
1.5. O método de Mond e Pellikaan	14
1.6. Teoria de singularidades	15
1.7. Germes de aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$	17
1.8. O espaço de pontos duplos $D(f)$	20
1.9. Estabilidade e determinação finita	23
1.10. Algumas fórmulas para germes $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$	25
2. Normalização de espaços analíticos	27
2.1. Anéis normais	27
2.2. Germes de espaços analíticos normais	29
3. Equisingularidade de famílias de curvas	35
3.1. Famílias de curvas reduzidas	37
3.1.1. Deformações planas de germes de curvas reduzidas	37
3.1.2. Invariantes de curvas reduzidas	39
3.1.3. Resolução simultânea muito fraca, fraca e forte	41

3.1.4.	Trivialidade topológica	43
3.1.5.	Whitney equisingularidade	44
3.2.	Famílias de curvas genericamente reduzidas	47
3.2.1.	Curvas genericamente reduzidas	47
3.2.2.	Famílias	49
3.2.3.	Invariantes de curvas genericamente reduzidas	51
3.2.4.	Deformações equinormalizáveis e resolução simultânea muito fraca . . .	53
3.2.5.	Trivialidade topológica e resolução simultânea fraca	54
3.2.6.	Whitney equisingularidade e resolução simultânea forte	59
3.2.7.	O critério do discriminante de Zariski	64
4.	Equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$	67
4.1.	Componente de identificação e de dobra de $D(f)$	68
4.2.	Famílias de germes de aplicações finitamente determinados	70
4.3.	Whitney equisingularidade de famílias de superfícies	73
4.3.1.	A conjectura de Ruas	74
4.4.	A busca de contra-exemplos	76
4.4.1.	O caso de coposto 2	77
4.4.2.	Aplicações de dobra dupla	77
4.4.3.	O 1º contra-exemplo	80
4.4.4.	Aplicações da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$	82
4.4.5.	O 2º e o 3º contra-exemplos	89
4.4.6.	Algumas fórmulas	96
4.4.7.	Uma classe em que a conjectura é verdadeira	100
4.4.8.	A conjectura de Zariski	101
5.	Equisingularidade de famílias de aplicações de $\mathbb{C}^n$ para $\mathbb{C}^{2n-1}$	107
5.1.	Espaço de pontos múltiplos e determinação finita	108
5.2.	Os invariantes e algumas fórmulas	111
5.3.	Whitney equisingularidade	115
5.4.	Equisingularidade na normalização	119
	Referências Bibliográficas	125

Lista de Figuras

1.1. Germe de espaço analítico irredutível e não irredutível	8
1.2. Falha da condição (a) de Whitney	11
1.3. Falha da condição (b) de Whitney	12
1.4. Superfície que não é Cohen-Macaulay	13
1.5. Singularidades estáveis de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$	18
1.6. Estabilização de H_2	22
1.7. A coisa	22
2.1. Normalização de uma curva singular não irredutível	31
2.2. Uma normalização suave de uma superfície singular	31
2.3. A normalização de uma superfície pode ser singular	32
3.1. Deformações central e não central de uma curva	38
3.2. Cúspide de Whitney: $X = V(x^3 + y^2 - t^2x^2)$	43
3.3. Família de curvas planas que não é topologicamente trivial	44
3.4. As condições (R_k) e (S_k) de Serre para curvas	48
3.5. Difeomorfismo entre $(X, 0)$ e $(X', 0)$	49
4.1. Componentes de identificação de $D(f)$	68
4.2. Componentes de dobra de $D(f)$	69
4.3. Componentes de identificação e de dobra de $D(f)$	70

Introdução

A teoria de equisingularidade de uma família de espaços analíticos foi primeiramente estudada por Oscar Zariski [66] em 1960. Zariski iniciou um programa de estudos em equisingularidade com o objetivo de compreender as relações entre os invariantes de diferentes naturezas (topológicos, diferenciais, numéricos, homológicos e algébricos) de um germe singular. O primeiro caso estudado foi o de hipersuperfícies.

Diferentes conceitos podem ser usados para descrever a ideia de que todas as fibras de uma família de espaços analíticos tenham singularidades “similares”. Alguns destes conceitos consistem em medir algum invariante numérico e pedir a constância deste invariante ao longo de um subespaço. Entre os conceitos mais conhecidos podemos citar a trivialidade topológica, Whitney equisingularidade, Bi-Lipschitz equisingularidade, (a)-regularidade, (b)-regularidade, Whitney equisingularidade fraca, entre outros. Recomendamos o excelente artigo expositório de J. Lipman [30] para uma visão geral dos problemas de equisingularidade.

Neste trabalho, estudamos a trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de famílias de curvas genericamente reduzidas em $\mathbb{C}^n$. Também estudamos o caso especial de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ e o caso de famílias de n -espaços analíticos em $\mathbb{C}^{2n-1}$, com $n \geq 3$, ambos parametrizados por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. Em [15], Lê Công-Trình descreveu invariantes que controlam a trivialidade topológica de uma família de curvas genericamente reduzidas (veja também [22]). Um dos nossos objetivos é estudar invariantes que controlam a Whitney equisingularidade de famílias de curvas genericamente reduzidas.

No caso em que $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é uma família de germes de aplicações finitamente determinados, com $n \geq 2$, f_t é a normalização da imagem $f_t(\mathbb{C}^n)$ que é um espaço analítico de dimensão n em $\mathbb{C}^{2n-1}$ cujo conjunto singular é uma curva. Nosso objetivo é estudar invariantes que controlam a trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade dessas famílias bem como as relações entre esses invariantes.

No capítulo 1, relembramos alguns conceitos básicos como o de espaços analíticos, es-

tratificação de Whitney, espaços analíticos Cohen-Macaulay, procurando fornecer o mínimo necessário para uma boa compreensão dos resultados dos demais capítulos.

No capítulo 2, exploramos o conceito de normalização de espaços analíticos. Seguindo [28], apresentamos o teorema que garante a existência da normalização para qualquer espaço analítico reduzido. Apresentamos também outras propriedades dos espaços analíticos normais, como o resultado que diz que um espaço de dimensão 1 é normal se, e somente se é não singular. Concluimos o capítulo 1 dando o critério de Serre para a normalidade de um espaço analítico X em termos de propriedades do anel local $\mathcal{O}_X$. A importância de destacarmos a teoria dos espaços analíticos normais em uma parte separada do capítulo 1 se deve do fato de que a normalização é um conceito específico muito útil para o estudo da trivialidade topológica de uma família de espaços analíticos.

No capítulo 3, estudamos o caso de famílias de curvas genericamente reduzidas em $\mathbb{C}^n$ (definição 3.28). Iniciamos nosso estudo com uma breve recordação do caso de famílias de curvas reduzidas seguindo as referências [6] e [12], em seguida apresentamos alguns resultados no caso genericamente reduzido.

Consideramos uma superfície S com uma projeção genérica $p : S \rightarrow \mathbb{C}$ sobre a reta complexa, e pensaremos nesta superfície como uma família de curvas $p^{-1}(t) := X_t$ da projeção p . A fibra especial $p^{-1}(0)$ pode ter uma componente de dimensão zero mergulhada. Isto sempre ocorre quando a superfície descrita pela família de curvas não é Cohen-Macaulay (veja Proposição 1.26). Quando trabalhamos com famílias de curvas que não são interseções completas e com superfícies que são imagens de parametrizações a 1-parâmetro de famílias de curvas, é natural encontrar este tipo de situação.

Quando a fibra especial tem uma componente mergulhada, precisamos adaptar as definições dos invariantes envolvidos no caso reduzido para este caso. Brückner e Greuel em [10] deram uma outra definição do invariante delta e do número de Milnor de uma curva genericamente reduzida que generalizam os conceitos apresentados em [12], que utilizamos em nosso trabalho.

Nossos principais resultados neste capítulo são a equivalência entre a Whitney equisingularidade, resolução simultânea forte e a constância dos invariantes $\mu(X_t)$ e $m_0(X_t)$, onde $\mu(X_t)$ e $m_0(X_t)$ são o número de Milnor e a multiplicidade de Hilbert-Samuel do germe de curva X_t na origem.

No capítulo 4, estudamos a equisingularidade topológica e a Whitney equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados.

Graças aos trabalhos de Teissier no início da década de 80 ([57] e [59]), temos uma caracterização da Whitney equisingularidade através da constância de uma sequência finita de multiplicidades polares. Alguns anos depois, em 1993 Gaffney em [18] descreveu condições

necessárias e suficientes para a Whitney equisingularidade de famílias de germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Zariski mostrou em ([66]) que se X é uma família de curvas planas (em particular, X é uma família de hipersuperfícies), então X é topologicamente trivial se, e somente se X é Whitney equisingular. Assim, temos a seguinte pergunta natural:

Pergunta: Se $X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ é uma família de hipersuperfícies, em que condições a equisingularidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X ?

Para famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ com singularidades isoladas, Briançon e Speder apresentaram em [7] o primeiro exemplo de uma família topologicamente trivial para o qual a Whitney equisingularidade não se verifica. Entretanto, para famílias de superfícies parametrizadas por germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, a trivialidade topológica da família é controlada pela constância do número de Milnor $\mu(D(f_t))$ onde $D(f_t)$ é a curva de pontos duplos de f_t (veja [51] e [4]). Nesse caso, temos a particularidade de que a família de curvas de pontos duplos $D(f_t)$ é uma família de curvas planas, assim a trivialidade topológica da família f_t implica a Whitney equisingularidade da família de curvas $D(f_t)$. É natural então pensarmos em que condições a Whitney equisingularidade da família de curvas $D(f_t)$ implica na Whitney equisingularidade da família f_t .

Ruas em 1994 [51] conjecturou que no caso de famílias de hipersuperfícies X_t em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados a trivialidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X , e ainda mais, conjecturou que o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade nesse caso é o número de Milnor $\mu(D(f_t))$ da curva de pontos duplos de f_t , mais precisamente,

Conjectura 0.1. ([51]) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f . Então, F é topologicamente equisingular se, e somente se F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu(D(f_t))$ é constante.*

Tentativas sem sucesso de provar esta conjectura foram apresentadas em [13] e [50], e assim esta conjectura permaneceu aberta durante quase 25 anos.

Damos uma resposta completa para esta conjectura. Apresentamos contra-exemplos mostrando como uma família de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ pode ser topologicamente trivial e não ser Whitney equisingular. Damos também uma classe de famílias de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ para qual a conjectura é sempre verdadeira.

Mostramos também algumas fórmulas para a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $f(D(f))$, o número de Milnor da seção transversal $\mu_1(f(\mathbb{C}^2))$ e o invariante $J(f)$ em

termos dos graus de f , no caso em que f é homogênea e de coposto 1. Finalizamos este capítulo com uma prova da famosa conjectura de Zariski para a multiplicidade no caso de famílias de superfícies que são parametrizadas por germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinados, homogêneos e de coposto 1. A maioria dos resultados originais deste capítulo podem ser encontrados em [52].

No capítulo 5, estudamos famílias de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ $\mathcal{A}$ -finitamente determinados, com $n \geq 3$. Em [44], Nuño-Ballesteros e Jorge Perez estudam a Whitney equisingularidade de famílias nesse caso. Fizemos uma nova abordagem de alguns problemas descritos em [44], mostramos por exemplo, que a seguinte fórmula

$$\mu(D(f)) = \mu(D^2(f))$$

é válida para qualquer germe de aplicação finitamente determinado f , desde que $D(f)$ seja definida com uma estrutura analítica apropriada. Em seguida, apresentamos um exemplo de uma família $F = (f_t, t)$ μ -constante, onde f é quase-homogênea e a deformação f_t adiciona apenas termo de grau pesado menor do que os pesos de f . Este exemplo mostra que deformações μ -constante de germes de aplicações quase-homogêneas não precisam ser sempre realizadas deformando f por termos de graus pesados maiores ou iguais aos de f . Finalizamos este capítulo e também este trabalho com um estudo sobre a trivialidade topológica da família f_t através do conceito de equisingularidade na normalização, introduzido por Fernández de Bobadilla e Pe Pereira em [4]

Por último, destacamos a importância dos resultados e exemplos do capítulo 3 na resolução da conjectura de Ruas (capítulo 4, seção 4.3.1). Observamos que os exemplos da seção 4.4.5 foram inspirados no Exemplo 3.50. A importância do capítulo 3 para o capítulo 5, é que germes de curvas genericamente reduzidas podem surgir como sendo o conjunto de pontos duplos $D(f)$ de germes de aplicações finitamente determinados $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, com $n \geq 3$, e informações sobre a topologia de $f(\mathbb{C}^n)$ podem ser obtidas através de propriedades da curva $D(f)$.

Preliminares

Pretendemos neste capítulo dar uma breve introdução aos principais conceitos usados, como espaços analíticos, estratificação de Whitney e espaços analíticos Cohen-Macaulay, procurando fornecer o mínimo necessário para uma boa compreensão dos resultados dos capítulos a seguir. Este capítulo é apenas expositório e todos os resultados descritos a seguir são conhecidos. Ao longo deste trabalho, todos os espaços são considerados sobre o corpo dos números complexos, no entanto, sempre usamos desenhos (reais) para ilustrar a geometria desses espaços.

1.1. Germes

Iniciamos nosso estudo com um conceito muito importante, o conceito de germe.

Definição 1.1. *Seja X um espaço topológico.*

(a) *Dado um subconjunto $S \subset X$, dizemos que dois subconjuntos $Y_1, Y_2 \subset X$ definem o mesmo germe ao longo de S se existe uma vizinhança aberta U de S em X , tal que*

$$Y_1 \cap U = Y_2 \cap U.$$

*Isto define uma relação de equivalência sobre o conjunto de subconjuntos de X . Uma classe de equivalência é chamada de **germe** (ao longo de S) e o germe representado por $Y \subset X$ é denotado por (Y, S) . Quando S é um conjunto discreto, germes ao longo de S são chamados de germes em S . Quando $S = \{x\}$, denotamos o germe da forma $(Y, \{x\})$ simplesmente por (Y, x) .*

(b) *Dizemos que um germe (Y, S) está contido em um germe (Y', S) (denotado por $(Y, S) \subset (Y', S)$), se existem representantes Z e Z' de (Y, S) e (Y', S) respectivamente, satisfazendo $Z \subset Z'$. Definimos $(Y, S) \cap (Y', S) = (Y \cap Y', S)$ e $(Y, S) \cup (Y', S) = (Y \cup Y', S)$. Note que estas operações não dependem da escolha de representantes.*

Definição 1.2. Considere um subconjunto $S \subset X$ e duas aplicações $f_1 : U_1 \rightarrow Y$ e $f_2 : U_2 \rightarrow Y$, onde U_1, U_2 são vizinhanças abertas de S e X e Y são espaços topológicos.

(a) Dizemos que f_1 e f_2 definem o mesmo germe ao longo de S se existe alguma vizinhança aberta $U \subset U_1 \cap U_2$ de S , tal que

$$f_1|_U = f_2|_U.$$

Novamente, isto define uma relação de equivalência sobre o conjunto de aplicações $U \rightarrow Y$ definidas em torno de S .

(b) Uma classe de equivalência é chamada de **germe de aplicação** (ao longo de S) e o germe de aplicação representado por f é denotado por (f, S) .

(c) Um germe de homeomorfismo (resp. germe injetivo, germe de isomorfismo, etc) é um germe que admite um representante que é um homeomorfismo (resp. injetivo, isomorfismo, etc).

(d) Dado um germe de aplicação (f, S) , representada por $f : X \rightarrow Y$, o subconjunto $f(S) \subset Y$ está bem definido. Sendo assim, um morfismo de germes

$$f : (X, S) \rightarrow (Y, T)$$

é um germe de aplicação f ao longo de S tal que $f(S) \subset T$.

(e) Um germe de aplicação sobre um conjunto finito S , satisfazendo $f(S) = \{y\}$ para algum $y \in Y$, é chamado de **multigerme**. Um **monogerme** em x é um germe de aplicação da forma (f, x) .

1.2. Germes de espaços analíticos

Um dos nossos principais objetos de estudo é o conjunto de zeros de séries analíticas em $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Assumimos os resultados que mostram a equivalência entre funções holomorfas de várias variáveis (em torno de $0 \in \mathbb{C}^n$) e os elementos de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ (veja [25] ou [28]).

Teorema 1.3. ([25]) O anel $\mathcal{O}_n$ dos germes de funções holomorfas de n variáveis é isomorfo ao anel de séries complexas de potências convergentes em n variáveis $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Assim, denotamos uma função holomorfa ou uma série convergente da mesma maneira. Um dos nossos objetivos é estudar a natureza de certos espaços analíticos na vizinhança de algum ponto fixado em $\mathbb{C}^n$, o qual sem perda de generalidade consideraremos a origem.

Definição 1.4. *Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$, onde U é uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}^n$.*

(a) *Um espaço analítico é um conjunto $X \subset U$ com a propriedade de que para todo ponto $p \in U$, existe uma vizinhança aberta U_p de p em U e um número finito de funções holomorfas $f_{p_1}, \dots, f_{p_k}$ definidas em U_p tais que*

$$X \cap U_p := \{x \in U_p : f_{p_1}(x) = \dots = f_{p_k}(x) = 0\}.$$

Usamos a notação $V(f_{p_1}, \dots, f_{p_k}) := \{x \in U_p : f_{p_1}(x) = \dots = f_{p_k}(x) = 0\}$, para denotar os zeros de $f_{p_1}, \dots, f_{p_k}$ em U_p .

(b) *Seja $I = (f_1, \dots, f_s) \subset \mathcal{O}_n$ um ideal, onde cada f_i está definida em U . Definimos o germe de espaço analítico $(X, 0)$ como*

$$(X, 0) := (V(I), 0).$$

Note que $(V(I), 0) = \cap_{i=1}^s (V(f_i), 0) = \cap_{i=1}^s (\{p \in U \mid f_i(p) = 0\}, 0)$.

(c) *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de espaço analítico. Definimos o ideal $I(X, 0)$ de $(X, 0)$ como*

$$I(X) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid (X, 0) \subset (V(f), 0)\}.$$

(d) *Dizemos que um germe de espaço analítico $(X, 0)$ é irredutível quando para quaisquer germes de espaços analíticos $(X_1, 0)$ e $(X_2, 0)$ tais que $X = X_1 \cup X_2$, então $X = X_1$ ou $X = X_2$.*

Proposição 1.5. *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico, então existem um inteiro positivo r e $X_1, \dots, X_r$ germes de espaços analíticos irredutíveis em torno de x , com X_i não contido em X_j , para todo $i \neq j$, tais que $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$. Os germes de espaço analítico $(X_i, 0)$ são unicamente determinados, a menos da ordem, e são chamados de componentes irredutíveis de $(X, 0)$.*

Exemplo 1.6. *Considere os germes de espaço analítico $(W_1, 0) = V(X^2 - Y^2Z)$ e $(W_2, 0) = V(XY)$, onde (X, Y, Z) é o sistema de coordenadas canônico de $\mathbb{C}^3$. O germe W_1 é conhecido como guarda-chuva de Whitney e é irredutível, enquanto que W_2 é um germe de espaço analítico formado por dois planos que se intersectam transversalmente. As componentes irredutíveis de W_2 são $W_2^1 = V(X)$ e $W_2^2 = V(Y)$.*

Figura 1.1: Germe de espaço analítico irredutível e não irredutível

Definição 1.7. Sejam $(X, 0) = V(I) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^m, 0)$ germes de espaços analíticos.

(a) Dizemos que $g : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é um germe de função analítica se para algum representante (que em geral também chamamos de g) $g : A \rightarrow \mathbb{C}$, tem-se que g é a restrição de alguma aplicação analítica $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ao conjunto aberto A .

(b) Dizemos que $\varphi = (f_1, \dots, f_m) : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ é um germe de aplicação analítica se cada f_i é um germe de função analítica. A aplicação $\varphi : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ é chamada de isomorfismo se φ possui uma inversa analítica.

(c) Definimos o anel local de funções sobre $(X, 0)$ como

$$\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_n / I.$$

(d) Definimos o germe de espaço analítico reduzido $(X_{red}, 0)$ como o germe dado por $(X_{red}, 0) := V(\sqrt{I})$. Assim, o anel local de funções sobre $(X_{red}, 0)$ é dado por

$$\mathcal{O}_{X_{red}} := \mathcal{O}_n / \sqrt{I}.$$

O famoso teorema a seguir nos mostra que o ideal $I(X)$ é na verdade um ideal radical. Mais precisamente, dado $(X, 0) = V(I)$ tem-se que $I(X)$ é justamente o ideal radical $\sqrt{I}$. Assim, o anel local $\mathcal{O}_{X_{red}} = \mathcal{O}_n / I(X)$.

Teorema 1.8. ([24], Hilbert's Nullstellensatz - versão local) Seja I um ideal de $\mathcal{O}_n$. Então $I(X) = \sqrt{I}$, onde $\sqrt{I}$ é o ideal radical de I , ou seja, o ideal $\{f \in \mathcal{O}_n \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n \in I\}$.

Observação 1.9. Seja I um ideal de $\mathcal{O}_n$ e considere o germe de espaço analítico $(X, 0) = (V(I), 0)$. Existe uma equivalência de categorias entre a categoria dos germes de espaços analíticos reduzidos e a categoria dos ideais radicais em $\mathcal{O}_n$.

Um espaço reduzido em geral tem excelentes propriedades, no entanto, para algumas aplicações que iremos desenvolver nos demais capítulos, vamos precisar da informação contida no ideal I que define o espaço X , que em geral não é um ideal radical.

Por exemplo, seja (X, Y, Z) o sistema de coordenadas canônicas em $\mathbb{C}^3$ e considere o germe de espaço analítico $(X, 0)$ definido pelo ideal $I = (XZ, YZ, Z^2, Y^3 - X^4)$. Note que $(X, 0)$ é uma curva em $\mathbb{C}^3$, temos que o anel local de $(X, 0)$ é

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_3/I \simeq \frac{\mathbb{C}\{X, Y, Z\}}{(XZ, YZ, Z^2, Y^3 - X^4)}$$

que não é um anel reduzido, no entanto, essa estrutura analítica de $(X, 0)$ herdada de I em alguns casos possui propriedades interessantes. No exemplo acima é possível definir por exemplo o número de Milnor do germe de curva $(X, 0)$ (veja capítulo 3), nesse caso $\mu((X, 0)) = 4$. Note que $(X_{\text{red}}, 0) = V(Z, Y^3 - X^4)$ e que $\mu(X_{\text{red}}, 0) = 6$. Portanto, de um certo modo a informação contida no ideal I é perdida ao considerarmos a estrutura analítica reduzida $(X_{\text{red}}, 0)$ de $(X, 0)$.

Definição 1.10. (a) Seja $(Y, 0)$ um germe de espaço analítico e (X, S) um multigerme de espaço analítico. Uma aplicação $\varphi : (X, S) \rightarrow (Y, 0)$ é dada por um conjunto de aplicações $\varphi_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, 0)$ para $i = 1, \dots, n$.

(b) Mais geralmente, seja $(Y, S') = (Y_1, y_1) \sqcup \dots \sqcup (Y_m, y_m)$ um outro multigerme de espaço analítico. Uma aplicação $\varphi : (X, S) \rightarrow (Y, S')$ é dada por um conjunto de aplicações $\varphi : (X_i, x_i) \rightarrow (Y_{\alpha(i)}, y_{\alpha(i)})$, para $i = 1, \dots, n$ e com $\alpha(i) \in \{1, \dots, m\}$.

Vamos agora definir o conceito de aplicação finita, que é de grande importância em toda a teoria deste trabalho.

Definição 1.11. Seja $\varphi : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ uma aplicação entre germes de espaços analíticos. Dizemos que φ é finita se existe um representante de φ que é uma aplicação fechada e tal que para cada $y \in Y$, o conjunto $\varphi^{-1}(y)$ tem cardinalidade finita.

Agora definimos a noção de dimensão de um germe de espaço analítico em termos do anel local.

Definição 1.12. Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico e $(\mathcal{O}_{X,0}, \mathcal{M}_X)$ o anel local de (X, x) . A dimensão (de Krull) de $(X, 0)$ é o supremo do comprimento k de cadeias de ideais primos em $\mathcal{O}_{X,x}$

$$p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_k.$$

Outro conceito importante é o de ponto singular de um espaço analítico.

Definição 1.13. *Seja (R, m) um anel local Noetheriano. Dizemos que R é um anel regular se o número mínimo de geradores de m é igual a dimensão de R .*

Definição 1.14. *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico e seja X um representante. Dizemos que $p \in X$ é um ponto regular (ou não singular) de X se o anel local $\mathcal{O}_X$ de X em p é regular. O ponto $p \in X$ é chamado de ponto singular se p não é regular. Se $0 \in (X, 0)$ é regular, dizemos que $(X, 0)$ é um germe regular (ou não singular, ou ainda, suave). Denotamos o conjunto singular de um germe de espaço analítico X por $\Sigma(X)$.*

Observação 1.15. *Existem várias equivalências da definição anterior. Uma equivalência interessante é o critério Jacobiano que identifica pontos singulares a partir do posto da matriz Jacobiana dos geradores de um determinado ideal. Uma outra equivalência que também é muito útil é aquela que diz que um ponto $0 \in X$ é regular se, e somente se $\mathcal{O}_{X,0} \simeq \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_k\}$ para algum k (veja [28]).*

1.3. Estratificação de Whitney

Introduziremos aqui a noção de estratificação de Whitney, introduzida por Whitney em [63] e amplamente utilizada desde então. Uma referência para este assunto é [20].

Seja X um espaço analítico em $\mathbb{C}^n$. Queremos “particionar” o espaço X em subconjuntos disjuntos $X_1, \dots, X_s$ tais que cada X_i seja um espaço analítico suave, os quais serão chamados de estratos. Mais formalmente temos:

Definição 1.16. *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$ um espaço analítico. Uma estratificação localmente finita $\mathcal{X}$ de X é uma partição de X em subconjuntos analíticos suaves X_α de $\mathbb{C}^n$ (chamados de estratos) tais que, para todo ponto de X existe uma vizinhança em $\mathbb{C}^n$ que encontra apenas um número finito de estratos.*

Definição 1.17. *Dizemos que a estratificação $\mathcal{X}$ de X satisfaz à condição de fronteira, se para dois estratos X_α e X_β , tais que $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$, então $X_\alpha \subset \overline{X_\beta}$.*

Condições de Whitney

Definição 1.18. *A estratificação $\mathcal{X}$ de X satisfaz às condições de Whitney se para todo par (X_α, X_β) de estratos, tais que X_β esteja no fecho de X_α e para todo ponto y de X_β tem-se que:*

(a) *Para toda sequência de pontos (x_i) de X_α convergindo para y , tal que o limite*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(X_\alpha) = T$$

existe na Grassmaniana correspondente, então T contém $T_y(X_\beta)$.

(b) Além disso, se para toda sequência y_i de pontos de X_β com limite y e tal que o limite de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = l$$

existe no espaço projetivo, então T contém l .

Estas são as chamadas condição (a) e condição (b) de Whitney.

Whitney mostrou em [63] que todo espaço analítico complexo admite uma estratificação satisfazendo as condições (a) e (b).

Definição 1.19. Uma estratificação Whitney regular $\mathcal{X}$ de X é uma estratificação que satisfaz a condição de fronteira e as condições (a) e (b) de Whitney.

Observação 1.20. A condição (b) implica na condição (a), enunciamos a condição (a) por motivos históricos. Além disso, estratificações (a) regulares satisfazem propriedades interessantes mesmo quando a condição (b) não se verifica.

Exemplo 1.21. A condição (a) de Whitney pode ser motivada observando o guarda-chuva de Whitney. Considere a estratificação $\{X \setminus \Sigma(X), \Sigma(X)\}$ de $X = V(x^2 - y^2 z) \subset \mathbb{C}^3$. Seja $(x_n) = (0, \frac{1}{n}, 0)$ com $n \in \mathbb{N}$, veja que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(X) = V(z).$$

enquanto que $T_0(\Sigma(X)) = V(x, y) \not\subset V(z)$. Logo, a condição (a) não é satisfeita no ponto $(0, 0, 0)$.

Figura 1.2: Falha da condição (a) de Whitney

Exemplo 1.22. A condição (b) de Whitney pode ser motivada observando uma superfície que descreveremos a seguir, chamada de *cúspide de Whitney*. Seja $X = V(z^3 + x^2 - z^2y^2) \subset \mathbb{C}^3$, veja que $\Sigma(X) = V(x, z)$. Considere a estratificação $\{X \setminus \Sigma(X), \Sigma(X)\}$, vamos analisar X na vizinhança da origem. Sejam $(x_n) = (0, -1/n, 1/n^2)$ e $(y_n) = (0, -1/n, 0)$, então

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(X) = V(z)$$

enquanto que o limite das direções $\overline{x_n y_n}$ quando $n \rightarrow \infty$ no plano projetivo é $(0 : 0 : 1)$, (onde a notação $(x : y : z)$ significa o conjunto formado por todos os vetores $v \in \mathbb{C}^3$ tais que $v = \lambda(x, y, z)$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ não nulo). Logo, a condição (b) não é satisfeita.

Figura 1.3: Falha da condição (b) de Whitney

1.4. Espaços analíticos Cohen-Macaulay

Nesta seção, seguindo [28] apresentamos os espaços analíticos Cohen-Macaulay (CM para abreviar). Vamos definir primeiramente o conceito de profundidade de um anel local.

Definição 1.23. Seja (R, m) um anel local.

(a) Uma sequência $f_1, \dots, f_r$ de elementos em m é chamado de sequência regular de comprimento r de R se f_1 não é um divisor de zero de R , e f_i não é um divisor de zero de $R/(f_1, \dots, f_{i-1})R$ para $i = 2, \dots, r$.

(b) A profundidade de R , denotada por $\text{depth}(R)$, é o supremo dos comprimentos de todas as sequências regulares de R .

(c) O anel R é chamado de Cohen-Macaulay, se $\text{depth}(R) = \dim(M)$. Se R não é local, então R é Cohen-Macaulay se a localização R_P é Cohen-Macaulay para todo primo $P \in R$.

(d) Um germe de espaço analítico $(X, 0) = (V(I), 0)$ é Cohen-Macaulay, se $\mathcal{O}_X$ é um anel Cohen-Macaulay.

Lema 1.24. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e suponha que $\text{depth}(R) = 0$. Então $\mathfrak{m}$ é um primo associado de R , isto é, existe $f \in R \setminus \{0\}$ tal que $\mathfrak{m}.f = 0$.*

Observação 1.25. *Geometricamente, no caso em que $R = \mathcal{O}_X$ é o anel local de um germe de espaço complexo $(X, 0)$, a profundidade de $\mathcal{O}_X$ é zero quando $\dim(R) = 0$, ou quando o ponto especial 0 é um ponto mergulhado. Mais geralmente, uma seção é uma hipersuperfície em X definida por um elemento $f \in \mathcal{O}_X$ que não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_X$, assim, a profundidade de um espaço analítico complexo em um ponto é o número de seções sucessivas que podemos tomar em X antes de obtermos um ponto mergulhado. Por exemplo, o espaço analítico $X = V(xz, yz)$.*

Figura 1.4: Superfície que não é Cohen-Macaulay

Note que X é reduzido e o elemento $z - x$ não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_X$, logo define uma seção $W = V(xz, yz, z - x)$ em X , agora considere o germe de espaço analítico $(W, 0)$, temos que o anel local de $(W, 0)$ é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{x, y\}/(x^2, xy)$, que não é Cohen-Macaulay. Geometricamente, W é uma reta com um ponto mergulhado na origem. Desta forma, $\text{depth}(\mathcal{O}_X) = 1$ enquanto que $\dim(\mathcal{O}_X) = 2$, logo X não é Cohen-Macaulay.

O seguinte resultado é bastante útil para verificar se um anel (ou espaço analítico) é Cohen-Macaulay.

Proposição 1.26. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Noetheriano local e seja $f \in \mathfrak{m}$ um elemento que não é um divisor de zero de R . Então:*

- (a) $\text{depth}(R/(f)) = \text{depth}(R) - 1$
- (b) R é Cohen-Macaulay se, e somente se $R/(f)$ é Cohen-Macaulay.

Proposição 1.27. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica e J um ideal de $\mathcal{O}_p$. Seja $f^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n$ o homomorfismo induzido por f e seja $I = f^*(J)$. Se $\mathcal{O}_p/J$ é Cohen-Macaulay e a codimensão de $V(I)$ é igual a codimensão de $V(J)$, então $\mathcal{O}_n/I$ também é Cohen-Macaulay.*

1.5. O método de Mond e Pellikaan

Seja R um anel comutativo com unidade e M um R -módulo de apresentação finita. Uma apresentação de M é uma sequência exata

$$R^p \xrightarrow{\lambda} R^q \xrightarrow{\alpha} M \longrightarrow 0$$

de R -módulos. Quando tal apresentação existe, dizemos que λ é uma matriz de apresentação do módulo.

Em geral, não é fácil contruir uma apresentação de um módulo. Considere um germe de aplicação analítica finita $f : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$, onde (X, x) é um multi-germe de espaço analítico Cohen-Macaulay e de dimensão n . Nesse caso, pelo teorema de preparação de Weierstrass temos que $\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo finito via f^* . Em [42], Mond e Pellikaan mostraram um algoritmo para a construção de uma apresentação de $f_*\mathcal{O}_{X,x}$. A seguir, vamos descrever brevemente este algoritmo.

Observação 1.28. *Note que se as classes $g_1, g_2, \dots, g_h$ em $\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{f^*(x_1, \dots, x_{n+1})}$ geram este anel como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, então $g_1, g_2, \dots, g_h$ geram $\mathcal{O}_{(X,x)}$ como um $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo, portanto é suficiente obtermos apenas as relações entre os g_i 's sobre $\mathcal{O}_{n+1}$.*

O algoritmo consiste no seguinte: Escolha uma projeção $\pi : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\tilde{f} = \pi \circ f$ também seja finita. Depois de uma mudança de coordenadas, podemos supor que $f(x) = (\tilde{f}(x), f_{n+1}(x))$ e como $\mathcal{O}_{X,x}$ é Cohen-Macaulay, então $\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre via $\tilde{f}^*$.

Então existem $\alpha_{ij} \in \mathcal{O}_n$, com $1 \leq i, j \leq h$ tais que

$$pg_i = \sum_{j=1}^h (\alpha_{ij} \circ \tilde{f}) g_j.$$

Como os germes g_j geram $\mathcal{O}_{X,x}$ sobre $\mathcal{O}_{n+1}$ via f^* , então

$$\begin{aligned} \lambda_{ij} &= \alpha_{ij} \circ \pi, \text{ se } i \neq j \\ \lambda_{ij} &= \alpha_{ij} \circ \pi - X_{n+1}, \end{aligned}$$

já que $f_{n+1} = X_{n+1} \circ f$ e $(X_1, \dots, X_{n+1})$ denota as coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ na meta. Portanto, $\lambda = \lambda_{ij}$ é uma matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_{X,x}$ como um $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo, e temos a sequência exata

$$\mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{n+1}^p \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0$$

No capítulo 4, usamos o algoritmo de Mond-Pellikaan para encontrar a matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$, onde $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação finitamente determinado. Para os cálculos, usamos o software Singular [65] e a implementação do algoritmo de Mond e Pellikaan dada por Hernandez, Miranda e Peñafort-Sanchis em [26]. Na página da web de Miranda [49], podemos encontrar uma biblioteca do Singular para calcular matrizes de apresentação baseados nos resultados de [26].

Observação 1.29. *Dado um morfismo finito de espaços complexos $f : X \rightarrow Y$, o módulo $f_*\mathcal{O}_X$ é um feixe coerente de $\mathcal{O}_Y$ -módulos e $\mathcal{F}_k(f) = \mathcal{F}_k(f_*\mathcal{O}_X)$ denota o k -ésimo feixe de ideais de Fitting (veja [42]). Note que o suporte de $\mathcal{F}_0(f)$ é justamente a imagem $f(X)$. Analogamente, se $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é um germe de aplicação finita, então denotamos por $F_k(f) = F_k(f_*\mathcal{O}_{X,x})$ o k -ésimo ideal de Fitting de $\mathcal{O}_{X,x}$ como um $\mathcal{O}_{Y,y}$ -módulo. Usamos os ideais de Fitting tanto para dar uma estrutura conveniente para alguns espaços quanto para calcularmos alguns invariantes, como o número de pontos triplos $T(f)$ de um germe de aplicação f .*

1.6. Teoria de singularidades

Nesta seção apresentamos as definições e principais resultados da teoria de singularidades que serão usados para o desenvolvimento deste trabalho. Estamos assumindo que o leitor já tenha algum conhecimento prévio, nos deixando livres para omitir fatos elementares. Para o leitor interessado recomendamos as excelentes referências [19], [55] e [61].

Um dos nossos principais objetivos é estudar localmente funções analíticas $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ e aplicações analíticas $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$, mais precisamente quando $p = 2n - 1$. Para isso, introduzimos uma certa relação de equivalência no espaço das funções (resp. aplicações) definidas num aberto contendo a origem de $\mathbb{C}^n$ (resp. abertos em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$).

Definição 1.30. *Sejam $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, dizemos que f é equivalente à g , se f e g definem o mesmo germe de aplicação com relação ao conjunto $S = \{0\}$. As classes de equivalência (os germes), são denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ (ou simplesmente por f se não houver risco de confusão). Observemos que $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano local cujo ideal maximal é dado por $\mathcal{M}_n := \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$.*

Definição 1.31. *Denotamos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ e por $\mathcal{O}_{n,p}^0$ o conjunto dos germes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.*

Proposição 1.32. *$\mathcal{O}_{n,p}$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de posto p .*

Uma das metas da teoria de singularidades é classificar germes de $\mathcal{O}_{n,p}$ sob relações de equivalência em $\mathcal{O}_{n,p}$ dadas por ações de grupos. Para o estudo de singularidades de aplicações de $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ introduzimos a seguinte noção de equivalência:

Definição 1.33. (a) O grupo $\mathcal{A}$ é o grupo dos pares de germes de difeomorfismos (h, k) , tais que $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

(b) Dois germes $f, g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{C}^p, 0) \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

comuta.

Definição 1.34. Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ tem **posto** r em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ (denotado por $\text{rank}(f_x) = r$) se a diferencial df_x de f em x tem posto r . Dizemos também que f tem **coposto** k (denotado por $\text{corank}(f_x) = k$), onde $k = n - \text{rank}(f_x)$. Dizemos que x é um **ponto regular** de f (ou que f é regular em x) se $\text{corank}(f_x) = 0$. Caso contrário, dizemos que x é um **ponto singular** de f (ou que f é singular em x). O coposto de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é o coposto no ponto $0 \in \mathbb{C}^n$ de um representante de f .

Definição 1.35. Dizemos que duas aplicações $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ tem o mesmo **k-jato** em um ponto $x \in \mathbb{C}^n$ se $f(x) = g(x)$ e as expansões em séries de Taylor até ordem k (para algum sistema de coordenadas locais) $j^k f(x)$ e $j^k g(x)$ de f e g no ponto x coincidem.

Definição 1.36. Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é **k-determinado** se dado qualquer germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com o mesmo **k-jato** de f em $0 \in \mathbb{C}^n$, tem-se que g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f . Um germe de aplicação é **$\mathcal{A}$ -finitamente determinado** se é **k-determinado** para algum k . Como neste trabalho usamos apenas o grupo $\mathcal{A}$, omitimos o prefixo $\mathcal{A}$, e dizemos apenas que um germe de aplicação é **finitamente determinado**.

Definição 1.37. Um **desdobramento** de um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um multigerme

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0)$$

da forma $F(x, s) = (f_s(x), s)$, com $f_0(x) = f(x)$. Dois desdobramentos F e F' são $\mathcal{A}$ -equivalentes se existem desdobramentos das aplicações identidade sobre $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$

$$\begin{array}{c} \Phi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) \\ e \\ \Psi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0), \end{array}$$

tais que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, S \times \{0\}) & \xrightarrow{F'} & (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^r, 0) \end{array}$$

comuta.

Definição 1.38. (a) Dizemos que um desdobramento F de f é **trivial** se F é $\mathcal{A}$ -equivalente ao desdobramento constante $I(x, s) = (f(x), s)$, que algumas vezes denotamos por $f \times \text{id}$.

(b) Um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é **estável** se todo desdobramento de f é trivial.

Informalmente falando, um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável se sua $\mathcal{A}$ -classe não muda após um perturbação pequena.

Definição 1.39. Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é **$\mathcal{A}$ -estável**, se para todo $y \in \mathbb{C}^p$, o multigerme de f em $f^{-1}(y)$ é estável.

Vamos relembrar um resultado muito conhecido, a caracterização geométrica da determinação finita de germes de aplicações.

Teorema 1.40. ([61], **Crterio geomtrico de Mather-Gaffney**) *Um germe de aplicao $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ finitamente determinado se, e somente se, para todo representante f (de f) existe uma vizinhana U de 0 em $\mathbb{C}^n$ e uma vizinhana V de 0 em $\mathbb{C}^p$, com $f(U) \subset V$, tal que para todo $y \in V \setminus \{0\}$, o conjunto $S = f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)$ finito e $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ estvel.*

1.7. Germes de aplicaes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$

Vamos descrever nesta seo uma parte importante dos conceitos que usaremos no captulo 4. Os germes de aplicaes finitamente determinados $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ podem ser aproximados por aplicaes estveis f_s , e a informao sobre a topologia de tais aproximaes pode ser obtida em termos de invariantes que podem ser calculados atravs da aplicao f original. Em [39], Mond define os invariantes 0-estveis, a saber, o nmero de pontos tripls $T(f)$

de f_s e o número de guarda-chuvas de Whitney $C(f)$ de f_s . D. Mond mostra também como podemos calcular estes números em termos da aplicação f . Estes dois invariantes juntamente com $\mu(D(f))$, o número de Milnor da curva de pontos duplos de f , formam um conjunto completo de invariantes para os germes de aplicações $\mathcal{A}$ -simples. Nas próximas duas subseções, seguindo [39] descrevemos estes três invariantes, $C(f)$, $T(f)$ e $\mu(D(f))$.

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finito. Pelo resultado clássico de Whitney ([64]), sabemos que as singularidades estáveis nestas dimensões são guarda-chuvas de Whitney, pontos triplos e pontos duplos transversais.

Figura 1.5: Singularidades estáveis de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$

Neste caso, o Teorema 1.40 implica que $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se para todo representante f existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^2$ tal que as únicas singularidades de $f(U) \setminus \{0\}$ são pontos duplos transversais. Na próxima definição, vamos definir os invariantes $C(f)$ e $T(f)$ usando uma estabilização de f , para isto, vamos fazer o uso de um bom representante para um desdobramento F do germe de aplicação f no sentido de [31].

Definição 1.41. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Seja $F(x, s) = (f_s(x), s)$ uma estabilização de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado e seja $F : U \times T \rightarrow \mathbb{C}^3 \times T$ um bom representante de F no sentido de [31], onde U e T são vizinhanças abertas de 0 em $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}$, respectivamente, definimos*

$$C(f) = \# \{ \text{guarda-chuvas de Whitney de } f_s \} \quad e \quad T(f) = \# \{ \text{pontos triplos de } f_s \},$$

para $s \neq 0$.

Como estamos nas boas dimensões no sentido de Mather, uma estabilização de f sempre existe. Adiamos falar sobre um exemplo para ilustrar a definição acima até a próxima subseção em que definimos o conjunto $D(f)$ de pontos duplos de f . Daremos um exemplo de uma estabilização de um germe de aplicação finitamente determinado com um ponto triplo e dois guarda-chuvas de Whitney (veja Exemplo 1.50).

Em [39], Mond mostra que $C(f)$ e $T(f)$ são invariantes analíticos de f e descreve fórmulas para o cálculo destes invariantes.

Teorema 1.42. ([41], Teorema 2.4 e [42], Teorema 4.3) *Os invariantes analíticos $C(f)$ e $T(f)$ de f podem ser calculados da seguinte forma abaixo:*

$$C(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{Rf}, \quad T(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)}$$

onde Rf é o ideal de ramificação de f , isto é, Rf é o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz jacobiana de f .

Estas fórmulas também implicam que o número de guarda-chuvas de Whitney e o número de pontos triplos estão bem definidos na definição 1.41, isto é, a definição 1.41 independe da escolha da estabilização e do parâmetro s .

Exemplo 1.43. *Consideremos o germe de aplicação $f(x, y) = (x, y^2, x^2y - y^7)$. Vejamos que*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(2y, x^2 - 7y^6, 4xy^2)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x\}}{(x^2)} = 2.$$

Usando o método de Mond e Pellikaan (veja seção 1.5), temos que a seguinte matriz é uma matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_2$:

$$f_*\mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} Z & -X^2 + Y^3 \\ -X^2Y + Y^4 & Z \end{pmatrix}$$

Logo temos que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathcal{F}_2(f)} = \frac{\mathcal{O}_3}{(1)} = 0.$$

Concluimos que $C(f) = 2$ e $T(f) = 0$. Na verdade, f tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$, e é fácil ver que se f é um germe de aplicação de $\mathbb{C}^2$ para $\mathbb{C}^3$ finitamente determinado com símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$, então f não tem pontos triplos. No caso em que f tem coposto 2, é conhecido que o valores mínimos para $C(f)$ e $T(f)$ são 3 e 1, respectivamente, veja [35] ou [47].

1.8. O espaço de pontos duplos $D(f)$

Nesta seção, vamos descrever o espaço de pontos duplos que usamos nos capítulos 4 e 5, por esta razão, seguindo [39] vamos descrever o caso geral em que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, onde $n < p$.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto aberto e $n < p$. Iremos agora definir o conjunto dos pontos duplos de f , denotado por $D^2(f)$. Denote as diagonais de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^p$ por Δ_n e Δ_p , e denote os esquemas de ideais definindo Δ_n e Δ_p por $\mathcal{I}_n$ e $\mathcal{I}_p$. Escrevemos os pontos de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ na forma (x, x') . Então, para cada $i = 1, \dots, p$, temos que

$$f_i(x) - f_i(x') \in \mathcal{I}_n,$$

logo existem $\alpha_{ij}(x, x')$, com $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq n$, tais que

$$f_i(x) - f_i(x') = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(x, x')(x_j - x'_j).$$

Se $f(x) = f(x')$ e $x \neq x'$, então todo menor $n \times n$ da matriz $\alpha = [\alpha_{ij}]$ se anula em (x, x') . Denotamos por $\mathcal{R}_n(\alpha)$ o ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2n}}$ gerado pelos menores $n \times n$ de α .

Definição 1.44. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ como acima, então o levantamento do espaço de pontos duplos de f é o espaço complexo*

$$D^2(f) := V((f \times f)^*\mathcal{I}_p + \mathcal{R}_n(\alpha)).$$

Apesar do fato de que o ideal $\mathcal{R}_n(\alpha)$ depende da escolha das funções coordenadas de f , em [39] Mond mostrou que $(f \times f)^*\mathcal{I}_p + \mathcal{R}_n(\alpha)$ não depende, e logo $D^2(f)$ está bem definida. Note que em um ponto (x, x') que não está na diagonal Δ_n , $\mathcal{I}^2(f)$ é gerado pelas funções $f_i(x) - f_i(x')$. Ainda mais, a restrição de $\mathcal{I}^2(f)$ à diagonal Δ_n é o ideal gerado pelos menores $n \times n$ da matriz jacobiana de f , logo $\Delta_n \cap D^2(f)$ é justamente o conjunto singular de f . Daremos agora a definição de $D^2(f)$ para germes de aplicações.

Definição 1.45. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação finito, onde $n \leq p$. Denotemos por I_p e $R_n(\alpha)$ os talos dos feixes em 0 de $\mathcal{I}_p$ e $\mathcal{R}_n(\alpha)$. Tomando um representante de f , definimos o levantamento dos pontos duplos do germe de aplicação f como o germe de espaço complexo*

$$D^2(f) := V((f \times f)^*I_p + R_n(\alpha)).$$

Apresentaremos agora algumas propriedades de espaço complexo $D^2(f)$. A proposição a seguir é uma consequência de alguns resultados em [11].

Proposição 1.46. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica com $n \leq p$. Então $D^2(f)$ tem dimensão maior ou igual a $2n - p$. Ainda mais, a igualdade implica que $D^2(f)$ é Cohen-Macaulay.*

A seguinte proposição é uma consequência de [44].

Proposição 1.47. *Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é finita e genericamente 1-a-1, então $D^2(f)$ é Cohen-Macaulay e tem dimensão $n - 1$.*

Uma vez que o levantamento do espaço de pontos duplos $D^2(f)$ de f está definido, podemos agora considerar a sua imagem $D(f) := p_1(D^2(f))$ em $\mathbb{C}^2$ pela projeção $p_1 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ no primeiro fator. A estrutura analítica mais apropriada para $D(f)$ é a estrutura dada através de ideais de Fitting, pois essa estrutura nos permite analisar propriedades do espaço $D(f)$ herdadas pelas propriedades de $D^2(f)$, como veremos no teorema 1.49.

Definição 1.48. (a) *Seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação finita, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^p$ são conjuntos abertos. Seja $p_1|_{D^2(f)} : D^2(f) \subset U \times U \rightarrow U$ a restrição da projeção p_1 ao conjunto $D^2(f)$. O espaço de pontos duplos $D(f)$ é o espaço complexo*

$$D(f) = V(\mathcal{F}_0(p_1|_{D^2(f)})).$$

Note que temos uma igualdade de conjuntos $D(f) := p_1(D^2(f))$.

(b) *Dado um germe de aplicação finito $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, o espaço de pontos duplos $D(f)$ de f é o germe espaço complexo*

$$D(f) = V(F_0(p_1|_{D^2(f)}))$$

isto é, o anel local de $D(f)$ é dado por $\mathcal{O}_{D(f)} = \frac{\mathcal{O}_n}{(F_0(p_1|_{D^2(f)}))}$.

Teorema 1.49. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação finito e genericamente 1-a-1. Então $D(f)$ é reduzido se, e somente se $D^2(f)$ é reduzido e a projeção $p_1 : D^2(f) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é genericamente 1-a-1.*

Damos agora o exemplo prometido na subseção anterior para ilustrar o conceito de pontos triplos e guarda-chuvas de Whitney de uma estabilização de f .

Exemplo 1.50. *Considere o germe de aplicação finitamente determinado*

$$f(x, y) = (x, y^3, xy + y^5).$$

Este germe de aplicação é conhecido como singularidade H_2 de Mond e também foi estudado por Marar. Em [31], Marar descreve uma estabilização para f dada por

$$f_t(x, y) = (x, y^3 - ty, xy + y^5 - ty^3).$$

Note que f_t é estável e tem um ponto triplo e dois guardas-chuvas de Whitney.

Figura 1.6: Estabilização de H_2

Apenas por curiosidade, para um determinado valor de t , a imagem (real) da estabilização f_t da singularidade H_2 é a escultura que se encontra no pátio do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo (Usp).

Figura 1.7: A coisa

Vamos agora definir mais dois espaços relacionados com o espaço dos pontos duplos de $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Seja G um grupo finito agindo linearmente sobre $\mathbb{C}^N$. Esta ação induz uma estrutura analítica sobre o quociente $\mathbb{C}^N/G$ tal que o anel local em um ponto $z \in \mathbb{C}^N$ é dado por

$$\mathcal{O}_{N,z}^G = \{h \in \mathcal{O}_{N,z} \mid gh = h, \forall g \in G\}.$$

Assumamos agora que $I \subset \mathcal{O}_{N,z}$ é um ideal G -invariante, isto é, I é invariante pela ação de G . Então G age também sobre o germe de conjunto analítico $X = V(I) \subset (\mathbb{C}^N, z)$ e também induz uma estrutura analítica sobre X/G com anel local

$$\mathcal{O}_X^G = \{h \in \mathcal{O}_X \mid gh = h, \forall g \in G\}.$$

onde $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{N,z}/I$. Além disso, existe um mergulho natural de $\mathcal{O}_X^G$ em $(\mathbb{C}^N/G, z)$, já que

$$\mathcal{O}_X^G \equiv \mathcal{O}_{N,z}^G/I^G$$

onde $I^G = I \cap \mathcal{O}_{N,z}^G$. E ainda, $\mathcal{O}_X^G$ é um subanel de $\mathcal{O}_X$, o que implica que se X é reduzido então X/G também é reduzido.

Definição 1.51. Consideremos uma aplicação $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, então o ideal dos pontos duplos $\mathcal{I}^2(f)$ é S_2 -invariante, onde consideramos a ação do grupo $S_2 = \mathbb{Z}/(2)$ sobre $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ dada por $\tau(x, y, x', y') = (x', y', x, y)$. Desta forma, podemos definir o espaço quociente complexo $D^2(f)/S_2$. Analogamente, se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação, seja $I^2(f)$ o talo do feixe de ideais $\mathcal{I}^2(f)$ que também é S_2 invariante, assim, podemos definir o germe de espaço complexo $D^2(f)/S_2$.

Definição 1.52. Seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação finita, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ e $V \subset \mathbb{C}^p$ são subconjuntos abertos. O espaço de pontos duplos na imagem é o espaço complexo.

$$f(D(f)) = V(\mathcal{F}_1(f)).$$

Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação finita, então $f(D(f)) = V(\mathcal{F}_1(f))$ denota o germe dos pontos duplos na imagem.

Notemos que a imagem de $D(f)$ (como conjunto) coincide com o conjunto $f(D(f))$ definido acima. Quando $p = n + 1$ e f é uma aplicação finita e genericamente 1-a-1, $f(D(f))$ é uma variedade determinantal, em particular Cohen-Macaulay, veja [42] para uma prova deste fato e outras propriedades interessantes do espaço $f(D(f))$.

1.9. Estabilidade e determinação finita

Seguindo [32] e [35], vamos descrever agora condições em termos dos espaços de pontos múltiplos $D^k(f)$ para que um germe de aplicação seja estável ou finitamente determinado. Vamos iniciar nosso estudo lembrando alguns resultados de Mond e Marar em [32] para o caso em que f tem coposto 1.

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação de coposto 1 com $n < p$. Pela $\mathcal{A}$ -equivalência, f pode ser escrita na forma $f(x, y) = (x, f_n(x, y), \dots, f_p(x, y))$, com $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{C}$. Nesse caso, o levantamento do espaço de pontos duplos é dado por

$$D^2(f) = V \left(x_1 - x'_1, \dots, x_{n-1} - x'_{n-1}, \frac{f_n(x, y) - f_n(x, y')}{y - y'}, \dots, \frac{f_p(x, y) - f_p(x, y')}{y - y'} \right).$$

Definimos agora o espaço de pontos múltiplos $D^k(f)$ para um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de coposto 1 com $n < p$.

Definição 1.53. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação de coposto 1 com $n < p$, e escrevemos f na forma*

$$f(x, y) = (x, f_n(x, y), \dots, f_p(x, y))$$

com $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ e $y \in \mathbb{C}$. Definimos o feixe de ideais $\mathcal{I}_p^k(f)$ em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-1+k}}$ como sendo o ideal gerado pelos $(p - n + 1)(k - 1)$ geradores $h_{j,i}^k = l_{j,i}^k / r_{j,i}^k$, onde $l_{j,i}^k$ e $r_{j,i}^k$ são definidos como

$$l_{j,i}^k = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{i-1} & f_j(x, y_1) & y_1^{i+1} & \cdots & y_1^{k-1} \\ & \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{i-1} & f_j(x, y_k) & y_k^{i+1} & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$r_{j,i}^k = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{k-1} \\ & \vdots & & \\ 1 & y_k & \cdots & y_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Denotemos por I_p^k o talo do feixe $\mathcal{I}_p^k$ no ponto 0. Tomando um representante de f , definimos o espaço dos pontos k -múltiplos $D^k(f)$ como o germe de espaço complexo

$$D^k(f) := V(I_p^k).$$

As propriedades de estabilidade e determinação finita de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $n < p$, podem ser caracterizadas através da geometria dos pontos k -múltiplos.

Teorema 1.54. ([32], Teorema 2.14) (1) *Uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow V \subset \mathbb{C}^p$ finita e de coposto 1 é estável se, e somente se $D^k(f)$ é suave de dimensão $p - k(p - n)$, para todo $k \geq 2$.*

(2) *Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ de coposto 1 é finitamente determinado se, e somente se $D^k(f)$ é uma interseção completa com singularidade isolada (ICIS) de dimensão $p - k(p - n)$ quando $p - k(p - n) \geq 0$, ou $D^k(f) = \{0\}$ quando $p - k(p - n) < 0$.*

Quando $(n, p) = (2, 3)$, o teorema anterior diz que uma aplicação f é estável se, e somente se $D^2(f)$ é uma curva suave, $D^3(f)$ é suave de dimensão 0 e $D^4(f) = \emptyset$. Também, um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 1 é finitamente determinado se, e somente se $D^2(f)$ é uma ICIS de dimensão 1, $D^3(f)$ é uma ICIS de dimensão 0 e $D^4(f) = \emptyset$. Em [35], Marar, Nuño-Ballesteros e Peñafort-Sanchis estenderam este teorema para o caso em que $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ tem coposto 2. O número de Milnor de $D(f)$ é conhecido como *número de Mond*.

Teorema 1.55. ([35], Teorema 3.3) *Seja $f : U \rightarrow V$ uma aplicação finita, onde $U \subset \mathbb{C}^2$ e $V \subset \mathbb{C}^3$ são conjuntos abertos. Então, f é estável se, e somente se $D^2(f)$ é uma curva suave e a projeção $p_1 : D^2(f) \rightarrow U$ é uma imersão com cruzamentos normais.*

Teorema 1.56. ([35], Teorema 3.4) *Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado se, e somente se $D^2(f)$ é um germe de curva reduzida e a projeção $p_1 : D^2(f) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é genericamente 1-a-1.*

Corolário 1.57. ([35], Corolário 3.5) *Um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado se, e somente se $\mu(D(f))$ é finito.*

1.10. Algumas fórmulas para germes $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$

O seguinte teorema fornece relações entre os invariantes $C(f)$, $T(f)$, $\mu(D^2(f))$, $\mu(D^2(f)/S_2)$, $\mu(D(f))$ e $\mu(f(D(f)))$. Estas relações foram primeiramente mostradas em [32] para o caso em que f tem coposto 1. Estas fórmulas também são verdadeiras para o caso em que f tem coposto 2 ([35]).

Teorema 1.58. ([32], Teorema 3.4 e [35], Teorema 4.3) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Então*

- (a) $\mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) + 6T(f)$
- (b) $\mu(D^2(f)) = 2\mu(D^2(f)/S_2) + C(f) - 1$,
- (c) $\mu(D(f)) = 2\mu(f(D(f))) + C(f) - 2T(f) - 1$

O seguinte teorema devido a Mond nos permite calcular os invariantes $C(f)$, $T(f)$ e $\mu(D(f))$ de um germe de aplicação finitamente determinado quase-homogêneo em termos dos pesos e dos graus de f .

Teorema 1.59. ([40]) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação quase-homogêneo do tipo $(d_1, d_2, d_3; \omega_1, \omega_2)$. Se $\epsilon = d_1 + d_2 + d_3 - \omega_1 - \omega_2$ e $\delta = d_1 d_2 d_3 / (\omega_1 \omega_2)$, então o número*

$C(f)$ de cross-caps, o número $T(f)$ de pontos triplos, o número de Milnor $\mu(D(f))$ da curva de pontos duplos e a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f são dados em termos dos pesos e graus de f , da seguinte forma:

$$C(f) = \frac{1}{\omega_1\omega_2}((d_2 - \omega_1)(d_3 - \omega_2) + (d_1 - \omega_2)(d_3 - \omega_2) + (d_1 - \omega_1)(d_2 - \omega_1)),$$

$$T(f) = \frac{1}{6\omega_1\omega_2}(\delta - \epsilon)(\delta - 2\epsilon) + \frac{C(f)}{3}, \quad \mu(D(f)) = \frac{1}{\omega_1\omega_2}(\delta - \epsilon - \omega_1)(\delta - \epsilon - \omega_2),$$

$$\mathcal{A}_e - cod(f) = \frac{1}{2}(\mu(D(f)) - 4T(f) + C(f) - 1).$$

Normalização de espaços analíticos

Neste capítulo exploramos o conceito de normalização de espaços analíticos. Seguindo [28], apresentamos o teorema que garante a existência da normalização para qualquer espaço analítico reduzido. Apresentamos também outras propriedades dos espaços analíticos normais, como o resultado que diz que um espaço de dimensão 1 é normal se, e somente se é não singular. Finalmente, concluímos o capítulo dando o critério de Serre para a normalidade de um espaço analítico X em termos de propriedades do anel local $\mathcal{O}_X$. Este capítulo também é expositório e todos os resultados a seguir são conhecidos na literatura. O leitor mais interessado pode consultar também as excelentes referências [25], [21] e [62].

2.1. Anéis normais

Extensões finitas e integrais de anéis generalizam os conceitos de extensões finitas e algébricas de corpos, sendo portanto conceitos importantes no estudo de anéis comutativos. Além disso, há diversas aplicações destes conceitos na geometria algébrica e teoria dos números. A seguir, todos os anéis serão comutativos, Noetherianos e com unidade.

Definição 2.1. *Sejam R, S anéis e suponha que $R \subset S$.*

- (a) *Dizemos que S é uma extensão finita de R se S é um R -módulo finitamente gerado.*
- (b) *Dizemos que um elemento $x \in S$ é integral sobre R se x satisfaz uma equação da forma*

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

onde $a_i \in R$.

Proposição 2.2. ([2]) *Seja $R \subset S$ uma extensão de anéis. São equivalentes:*

- (a) $x \in S$ é integral sobre R .
- (b) $R[x]$ é um R -módulo finitamente gerado.
- (c) $R[x]$ está contido em um subanel A de S tal que A é um R -módulo finitamente gerado.
- (d) Existe um $R[x]$ -módulo fiel M que é finitamente gerado como R -módulo.

Corolário 2.3. ([2]) Seja $\overline{R}_S := \{ x \in S \mid x \text{ é integral sobre } R \}$. Então $\overline{R}_S$ é um subanel de S que contém R .

- Definição 2.4.** (a) Chamamos o anel $\overline{R}_S$ do corolário anterior de fecho integral de R em S .
 (b) Dizemos que S é uma extensão integral de R se $\overline{R}_S = S$.
 (c) Dizemos que R é integralmente fechado em S se $\overline{R}_S = R$.
 (d) Dizemos que R é integralmente fechado se R é integralmente fechado no seu anel total de frações $\text{Frac}(R)$.
 (e) Dizemos que R é normal se R é reduzido e é integralmente fechado.

Definição 2.5. Seja R um anel reduzido e considere a extensão $R \subset \text{Frac}(R)$. O anel

$$\overline{R} := \{ x \in \text{Frac}(R) \mid x \text{ é integral sobre } R \}$$

é chamado de normalização de R .

Corolário 2.6. ([28]) Seja $R \subset S$ uma extensão de anéis e seja $\overline{R}_S$ o fecho integral de R em S . Então $\overline{R}_S$ é integralmente fechado em S . Em particular, a normalização $\overline{R}$ do anel R é um anel normal.

Exemplo 2.7. (a) Considere o seguinte anel

$$R = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(y^2 - x^3)}.$$

Este anel não é normal. O elemento $t = \frac{y}{x} \in \text{Frac}(R)$ é raiz do polinômio $p(W) = W^2 - x$, logo t é integral sobre R . Por outro lado, note que $R \simeq \mathbb{C}\{t^2, t^3\}$, logo $t \notin R$. Assim, R não é integralmente fechado.

(b) Considere o seguinte anel

$$R = \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(xy)}.$$

Este anel também não é normal. De fato, considere o elemento $x + y \in R$. Pela caracterização dos divisores de zero de um anel em termos de primos associados do ideal (0) (veja [28]), temos que $x + y$ não é um divisor de zero de R pois $x + y \notin (x)$ e $x + y \notin (y)$. Seja

$u = x/(x + y) \in \text{Frac}(R)$. Agora note que $u = u^2$, portanto u é integral sobre R , no entanto, $u \notin R$.

(c) Considere $R = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, temos que R é um anel normal. Em particular, todo anel regular é normal.

(d) Considere o seguinte anel

$$R = \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x^2 + y^2 - z^2)}$$

R é um anel normal que não é regular.

Note que se R não é um domínio, sempre podemos encontrar um elemento (não nulo) em $\text{Frac}(R)$ que é integral sobre R e não está em R . Este fato é uma consequência do seguinte resultado:

Proposição 2.8. ([28]) *Seja R um anel local, Noetheriano e normal. Então R é um domínio.*

2.2. Germes de espaços analíticos normais

Definição 2.9. Dizemos que um germe de espaço analítico $(X, 0)$ é normal se o anel local $\mathcal{O}_X$ é normal.

A seguinte proposição segue imediatamente da Proposição 2.8.

Proposição 2.10. ([28]) *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico normal. Então $(X, 0)$ é irredutível.*

Relembre do capítulo anterior (seção 1.1) que se $S = \{x_1, \dots, x_n\}$, então podemos pensar em um multigerme de espaço analítico (X, S) como sendo uma união disjunta

$$(X, \bar{x}) = (X_1, x_1) \sqcup \dots \sqcup (X_n, x_n)$$

de germes de espaços analíticos. O anel $\mathcal{O}_X$ é, por definição, dado por

$$\mathcal{O}_X = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_i}$$

A seguir, S sempre denotará um conjunto discreto de pontos.

Definição 2.11. *Seja $(X, S) = \sqcup_{j=1}^n (X_i, x_i)$ um multigerme e seja $(Y, 0)$ um germe. Seja $\varphi : (X, S) \rightarrow (Y, 0)$ uma aplicação analítica e seja $\varphi_i : (X_i, x_i) \rightarrow (Y, 0)$.*

(a) *Dizemos que a aplicação φ é finita se mediante a aplicação*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_Y &\rightarrow \mathcal{O}_X \\ b &\mapsto (\varphi_1^*(b), \dots, \varphi_n^*(b)) \end{aligned}$$

tem-se que $\mathcal{O}_X$ é um $\mathcal{O}_Y$ -módulo finitamente gerado. Equivalentemente, φ é finita se cada φ_i é finita.

(b) *Suponha que φ seja uma aplicação finita. Dizemos que φ é genericamente $s - a - 1$ se existe um germe de hipersuperfície $(D, 0) \subset (Y, 0)$ (isto é, $(D, 0)$ é uma hipersuperfície em $(Y, 0)$) tal que para representantes suficientemente pequenos de Y e D , tem-se que para todo $p \in Y \setminus D$, a cardinalidade de $\varphi^{-1}(p)$ é s .*

(c) *Dizemos que o multigerme (X, S) é normal se $\mathcal{O}_X$ é um anel normal.*

Observação 2.12. *Para encontrar a cardinalidade de $\varphi^{-1}(p)$ temos que somar a cardinalidade de cada $\varphi_j^{-1}(p)$. Assim, a seguinte proposição é natural.*

Proposição 2.13. ([28]) *Seja $(X, S) = \sqcup_{i=1}^r (X_i, x_i)$ um multigerme de espaço complexo.*

(a) *O anel $\mathcal{O}_{X,S}$ tem exatamente r ideais maximais.*

(b) *(X, S) é normal se, e somente se o germe (X_i, x_i) é normal para todo i .*

Enfim, estamos em condições de definir o importante conceito de normalização de um germe de espaço analítico reduzido.

Definição 2.14. *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico reduzido. Uma normalização de $(X, 0)$ é um par $((\overline{X}, S), n)$ onde $(\overline{X}, S)$ é um multigerme normal e $n : (\overline{X}, S) \rightarrow (X, 0)$ é uma aplicação finita e genericamente 1-a-1. Algumas vezes nos referimos apenas ao espaço analítico $(\overline{X}, S)$ como sendo a normalização de $(X, 0)$, outras vezes nos referimos apenas à aplicação n .*

Exemplo 2.15. *Considere o germe de espaço analítico $(X, 0) = (V(x^2 - y^2), 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$. Então, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, y\}/(x^2 - y^2)$. Considere duas cópias de $(\mathbb{C}, 0)$ com parâmetros t_1 e t_2 , respectivamente. Sejam*

$$\begin{aligned} n_1 : (\mathbb{C}, 0) &\rightarrow (X, 0), \quad t_1 \mapsto (t_1, t_1), \\ n_2 : (\mathbb{C}, 0) &\rightarrow (X, 0), \quad t_2 \mapsto (t_2, -t_2). \end{aligned}$$

Definindo $(\bar{X}, \bar{0}) = (\mathbb{C}, 0) \sqcup (\mathbb{C}, 0)$, temos que este espaço é a normalização de $(X, 0)$ e a aplicação $n = (n_1, n_2)$ é a aplicação de normalização de $(X, 0)$. Este exemplo ilustra o fato de que a normalização de uma curva não irredutível é uma união de curvas não singulares.

Figura 2.1: Normalização de uma curva singular não irredutível

Exemplo 2.16. Considere o germe de espaço analítico $(X, 0) = (V(z^2 - x^4y + 2x^2y^4 - y^7), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$. Então, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, y\}/(z^2 - x^4y + 2x^2y^4 - y^7)$. Considere (t, u) como um sistema de coordenadas de $\mathbb{C}^2$, então o germe de espaço analítico $(\bar{X}, 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$ é a normalização de $(X, 0)$, e a aplicação de normalização é dada por $n(t, u) = (t, u^2, t^2u - u^7)$.

Figura 2.2: Uma normalização suave de uma superfície singular

Note que nos dois exemplos acima, a normalização de $(X, 0)$ é na verdade uma resolução de singularidades de $(X, 0)$. No entanto, a normalização pode não resolver todas as singularidades, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.17. Considere o germe de espaço analítico $(X, 0) = (V(x^2 + y^4 + y^3z^2), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$. Então, $\mathcal{O}_X = \mathbb{C}\{x, y\}/(x^2 - y^4 + y^3z^2)$. Considere (t_1, t_2, t_3) como um sistema de coordenadas de um outro $\mathbb{C}^3$, então o germe de espaço analítico $(\bar{X}, 0) = (V(t_1^2 + t_2^2 + t_2t_3^2), 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ é a normalização de $(X, 0)$, e a aplicação de normalização é dada por $n(t_1, t_2, t_3) = (t_1t_2, t_2, t_3)$. Note que $(\bar{X}, 0)$ é singular (veja Figura 2.3).

Como vimos no exemplo anterior, o processo de normalizar um espaço analítico singular $(X, 0)$ pode não resolver todas as singularidades de $(X, 0)$, isto é, o espaço $(\bar{X}, \bar{0})$ nem sempre

é suave, contudo, as singularidades de $(\bar{X}, \bar{0})$ são em um certo sentido mais simples do que as singularidades de $(X, 0)$. Esta propriedade pode ser expressa pela seguinte proposição.

Figura 2.3: A normalização de uma superfície pode ser singular

Proposição 2.18. ([62]) *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico reduzido e seja $(\bar{X}, \bar{0})$ a sua normalização. Então o conjunto singular de $(\bar{X}, \bar{0})$ tem codimensão maior ou igual a 2.*

Seja $(X, 0)$ um espaço analítico reduzido, o seguinte teorema diz que uma normalização de $(X, 0)$ sempre existe.

Teorema 2.19. (Existência da normalização, [28]) *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico reduzido. Então, existe uma normalização $n : (\bar{X}, S) \rightarrow (X, 0)$ de $(X, 0)$.*

O seguinte teorema mostra que a normalização de um germe de espaço analítico $(X, 0)$ é única, além de outras propriedades interessantes da normalização.

Teorema 2.20. (Propriedades da normalização, [28]) *Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico reduzido e $n : (W, S') \rightarrow (X, 0)$ uma normalização de $(X, 0)$.*

(a) *O anel $\mathcal{O}_W$ é a normalização do anel $\mathcal{O}_X$. Em particular, a normalização de $(X, 0)$ é única e será denotada por $(\bar{X}, \bar{0})$.*

(b) *$\dim(\bar{X}, \bar{0}) = \dim(X, 0)$.*

(c) *Se $(X, 0)$ é irredutível, o multigerme $(\bar{X}, \bar{0})$ é um germe de espaço analítico irredutível, e podemos denotá-lo por $(\bar{X}, 0)$.*

Vamos agora apresentar um resultado que será importante na demonstração de um dos resultados deste trabalho, veja a demonstração do Teorema 4.42.

Teorema 2.21. ([28], **Propriedade Universal da normalização**) *Sejam $(X, 0)$ um germe de espaço analítico reduzido e $n : (\bar{X}, \bar{0}) \rightarrow (X, 0)$ sua normalização. Seja (Y, S) um multigerme normal e $\varphi : (Y, S) \rightarrow (X, 0)$ uma aplicação de multigerme. Então, existe uma única aplicação de multigerme $\bar{\varphi} : (Y, S) \rightarrow (\bar{X}, \bar{0})$ que faz com que o seguinte diagrama seja comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} (Y, S) & \xrightarrow{\exists! \bar{\varphi}} & (\bar{X}, \bar{0}) \\ & \searrow \varphi & \downarrow n \\ & & (X, 0) \end{array}$$

Como vimos nos exemplos acima, uma curva singular não é normal, além disso, a normalização de uma curva é um multigerme de curva suave. Estas propriedades estão no próximo teorema.

Teorema 2.22. ([28]) *Seja $R = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}/I$ um domínio de dimensão 1. Então a normalização $\bar{R}$ é isomorfa a $\mathbb{C}\{t\}$. Assim, um germe de curva analítica reduzido $(X, 0)$ é normal se, e somente se $(X, 0)$ é não singular.*

Definição 2.23. *Seja R um anel e $P \subset R$ um ideal primo. A altura $ht(P)$ de P é definida como a dimensão do anel local R_P ou, equivalentemente, o maior comprimento n de uma cadeia (numerada a partir do zero)*

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$

de ideais primos em R .

Finalizamos este capítulo com uma caracterização dos germes de espaços analíticos normais dada por Serre em termos de propriedades do anel local.

Definição 2.24. *Seja R um anel Noetheriano e $k \leq \dim(R)$ um inteiro não-negativo.*

(a) *Dizemos que R satisfaz a condição (R_k) de Serre, se para todo ideal primo P em R de altura no máximo k , o anel local R_P é um anel local regular.*

(b) *Dizemos que R satisfaz a condição (S_k) de Serre, se para todo ideal primo P em R , $\text{depth}(R_P) \geq \min\{k, ht(P)\}$.*

Definição 2.25. *Dizemos que um germe de espaço analítico $(X, 0)$ satisfaz a condição (R_k) (resp. (S_k)) de Serre se o anel local $\mathcal{O}_X$ satisfaz a condição (R_k) (resp. (S_k)) de Serre.*

Observação 2.26. (a) A propriedade (S_0) sempre é satisfeita para qualquer anel (resp. germe de espaço analítico).

(b) A propriedade (S_1) é equivalente a: o anel não tem ideais primos mergulhados associados com o ideal (0) (resp. o germe de espaço analítico não tem componentes mergulhadas). Logo um anel reduzido é S_1 .

(c) A propriedade (S_2) significa respectivamente que: se $(X, 0)$ é um germe de espaço analítico e $(D, 0)$ é uma hipersuperfície em $(X, 0)$ definida por um elemento h que não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_{X,0}$, então $(D, 0)$ não tem componentes mergulhadas.

(d) Em geral, um anel R satisfaz a propriedade (S_n) para todo n (onde $n \leq \dim(R)$) se, e somente se, R é Cohen-Macaulay.

(e) Dizer que um germe de espaço analítico $(X, 0)$ satisfaz a condição (R_k) , é equivalente a dizer que $(X, 0)$ é regular em codimensão k , isto é, se para qualquer subgerme $(D, 0) \subset (X, 0)$ de espaço analítico de $(X, 0)$ de codimensão menor ou igual que k em $(X, 0)$, tem-se que $(D, 0)$ contém pelo menos um ponto não singular de $(X, 0)$.

Teorema 2.27. (Critério de normalidade de Serre, [28])

(a) Um anel R é normal se, e somente se R satisfaz as condições R_1 e S_2 de Serre.

(b) Um germe de espaço analítico $(X, 0)$ é normal se, e somente se $\mathcal{O}_X$ satisfaz as condições R_1 e S_2 de Serre.

Como consequência do critério de Serre para germes de espaços analíticos normais, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.28. Seja $(X, 0)$ um germe de espaço analítico singular de dimensão 2 (superfície). Então $(X, 0)$ é normal se, e somente se $(X, 0)$ é Cohen-Macaulay e x é uma singularidade isolada.

Equisingularidade de famílias de curvas

A inspiração para os resultados deste capítulo foram os artigos [10] e [15] que foram os primeiros trabalhos sobre famílias de curvas genericamente reduzidas (veja também [22]).

A teoria de equisingularidade de uma família de espaços analíticos foi primeiramente estudada por Oscar Zariski ([66]) em 1960. O primeiro caso estudado foi o de hipersuperfícies. Diferentes conceitos podem ser usados para descrever a ideia de que todas as fibras de uma família de espaços analíticos tenham singularidades “similares”. Alguns destes conceitos consistem em medir algum invariante numérico e pedir a constância deste invariante ao longo de um subespaço. Recomendamos o excelente artigo expositório de J. Lipman [30] para uma visão geral dos problemas de equisingularidade.

Neste capítulo, estudamos o caso de famílias de curvas genericamente reduzidas em $\mathbb{C}^n$ (definição 3.28). Iniciamos nosso estudo com uma breve recordação do caso de famílias de curvas reduzidas seguindo as referências [6] e [12], em seguida apresentamos alguns resultados no caso genericamente reduzido. Consideramos uma superfície S com uma projeção genérica $p : S \rightarrow \mathbb{C}$ sobre a reta complexa, e pensaremos nesta superfície como uma família de curvas $p^{-1}(t) := X_t$ da projeção p . A fibra especial $p^{-1}(0)$ pode ter uma componente de dimensão zero mergulhada. Isto sempre ocorre quando a superfície descrita pela família de curvas não é Cohen-Macaulay (veja Proposição 1.26). Quando trabalhamos com famílias de curvas que não são interseções completas e com superfícies que são imagens de parametrizações a 1-parâmetro de famílias de curvas, é natural encontrar este tipo de situação. Os exemplos que damos neste capítulo mostram como é natural encontrarmos superfícies que não são Cohen-Macaulay.

Quando a fibra especial tem uma componente mergulhada, precisamos adaptar as definições dos invariantes envolvidos no caso reduzido para este caso. Por exemplo, Brücker e Greuel em [10] deram uma outra definição do delta invariante e do número de Milnor de uma curva genericamente reduzida que generalizam os conceitos apresentados em [12].

Ao longo deste capítulo damos exemplos, alguns tem o objetivo de ilustrar os conceitos

que aparecem no texto e outros para dar contra-exemplos de conjecturas naturais que ocorrem no desenvolvimento da teoria. O leitor encontrará um exemplo (dado por Bobadilla, Snoussi e Spivakovsky em [5]) de uma superfície Whitney regular ao longo do seu conjunto singular e que não é Cohen-Macaulay e alguns exemplos ilustrando como alguns critérios de equisingularidade são mais fortes que outros.

Nosso principal propósito neste capítulo é estender alguns critérios de equisingularidade descritos em [6] e [12] que podem ser expressos sem pedir que as fibras sejam necessariamente reduzidas. Mais precisamente, consideramos a resolução simultânea muito fraca (ou equinormalização), resolução simultânea fraca, resolução simultânea forte, trivialidade topológica, Whitney equisingularidade e o critério do discriminante de Zariski. Todas estas noções de equisingularidade foram bem estudadas no caso reduzido. No início do artigo [6], Briançon, Galligo e Granger descrevem um resumo de todas as relações entre os critérios de equisingularidade no caso reduzido. Assuma que $(X, 0)$ é uma superfície equidimensional reduzida. No caso genericamente reduzido, temos as seguintes relações entre os critérios de equisingularidade:

(a) foi mostrado por Brücker e Greuel em [10].

(b) e (c) foram mostrados por Lê Công-Trình em [15].

(d) foi mostrado por Greuel em [22].

(g) foi mostrado por Bobadilla, Snoussi e Spivakovsky em [5].

(e) (Teorema 3.57) e (f) (Teorema 3.54) são as nossas contribuições.

Observamos que quando X é irredutível, então X_t é conexa para todo t (veja [22]), nesse caso na equivalência (d) a hipótese de conexidade é imediata.

Nossos principais resultados são a equivalência entre a Whitney equisingularidade, resolução simultânea forte e a constância dos invariantes $\mu(X_t)$ e $m_0(X_t)$, onde $\mu(X_t)$ e $m_0(X_t)$ são o número de Milnor e a multiplicidade de Hilbert-Samuel do germe de curva X_t na origem, para famílias de curvas genericamente reduzidas.

Observamos que é natural encontrar problemas de equisingularidade em que uma família de curvas genericamente reduzidas está envolvida. No Exemplo 54 de [3], a superfície $(X, 0)$ parametrizada pela aplicação $n : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, 0) \subset (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ definida por

$$n(u, t) = (u^3, u^4, tu, t)$$

aparece como sendo o conjunto singular de uma família de superfícies em $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$.

A superfície $(X, 0)$ pode ser vista como uma família de curvas genericamente reduzida mediante a projeção $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ no último fator, com fibra $p^{-1}(t) := X_t$. Bobadilla mostra que esta família de curvas é topologicamente trivial, o que é um fato surpreendente já que a fibra especial X_0 é uma curva singular de multiplicidade 3, enquanto que as fibras genéricas X_t são todas suaves. Com a ajuda dos resultados de [15] e [22], damos uma outra prova deste fato em termos da constância do número de Milnor da curva X_t . Além disso, apresentamos também uma classe de novos exemplos deste tipo (veja Exemplo 3.50).

Destacamos também a importância dos resultados e exemplos deste capítulo na resolução da conjectura de Ruas (capítulo 4, seção 4.3.1). Observamos que os exemplos da seção 4.4.5 foram inspirados no Exemplo 3.50. A importância para o capítulo 5, é que germes de curvas genericamente reduzidas podem surgir como sendo o conjunto de pontos duplos $D(f)$ de germes de aplicações finitamente determinados $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, com $n \leq 3$, e informações sobre f podem ser obtidas através de propriedades da curva $D(f)$.

3.1. Famílias de curvas reduzidas

Nesta seção, seguindo [6] e [12] recordaremos os principais resultados sobre critérios de equisingularidade de famílias de curvas reduzidas.

3.1.1. Deformações planas de germes de curvas reduzidas

Seja $(X_0, 0)$ um germe de curva reduzida em $(\mathbb{C}^n, 0)$ definida pelo ideal $I_0 = (f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, e seja X um germe de superfície em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ definido pelo ideal I de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n, t\}$ gerado pelos elementos $(F_1, \dots, F_k)$ tais que $F_i(x_1, \dots, x_n, 0) = f_i(x_1, \dots, x_n)$, isto é, X é uma **deformação de X_0** .

Denotamos por p a restrição à X da projeção canônica de $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ sobre o último fator $(\mathbb{C}, 0)$, e quando p for plana, isto é, quando o anel

$$\mathcal{O}_X = \frac{\{x_1, \dots, x_n, t\}}{I}$$

é um $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo plano, dizemos que X é uma **deformação plana a 1-parâmetro** de X_0 .

O lema a seguir nos fornece uma caracterização das deformações planas no caso de famílias de curvas reduzidas.

Lema 3.1. ([6], Lema 1.1) *Se X é uma deformação a 1-parâmetro de uma curva reduzida X_0 , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) X é uma deformação plana.
- (b) X é Cohen Macaulay.
- (c) X é de dimensão pura 2.

Seja $(X, 0)$ uma deformação plana a um parâmetro de um germe de curva reduzida $(X_0, 0)$ e seja X um representante de $(X, 0)$. Denotamos por $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ o germe de aplicação tal que $F^{-1}(0) = X$, para algum representante do germe F (que também denotaremos por F). Seja $F : U \times T \rightarrow \mathbb{C}$ um representante do germe F , onde U é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$ e T é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

Definição 3.2. *Dizemos que uma deformação X de X_0 é **central** se $X_t \setminus \{(0, \dots, 0, t)\}$ é suave para todo $t \in T$ e $x \in U \setminus \{(0, \dots, 0, t)\}$. Diremos que uma componente irredutível X^i de X é **essencial** se X^i contém o eixo t .*

Figura 3.1: Deformações central e não central de uma curva

Uma pergunta natural é: considere uma deformação plana central X de uma curva reduzida X_0 e considere uma componente irredutível X^i de X , então é verdade que X^i contém $\Sigma(X)$?

Esta pergunta pode ser respondida pela seguinte proposição:

Proposição 3.3. ([6], Prop. 1.6) *Se X é uma deformação plana central de X_0 , todas as componentes irredutíveis de X são essenciais.*

3.1.2. Invariantes de curvas reduzidas

Vamos recordar o invariante δ , o número de Milnor e a multiplicidade de uma curva reduzida com singularidade isolada.

Definição 3.4. *Sejam $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa reduzida, $x \in C$ um ponto singular isolado e $n : (\overline{C}, \overline{x}) \rightarrow (C, x)$ a aplicação de normalização (local). O número*

$$\delta(C, x) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{n_* \mathcal{O}_{\overline{C}, \overline{x}}}{\mathcal{O}_{C, x}} \right)$$

é chamado de delta-invariante de C em x . Se C tem apenas um número finito de pontos singulares, então o número

$$\delta(C) := \sum_{x \in \Sigma(C)} \delta(C, x)$$

é chamado de delta-invariante de C .

Definição 3.5. *Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa reduzida e $x \in C$ um ponto singular isolado. Definimos o número de Milnor de C como*

$$\mu(C, x) := 2\delta(C, x) - r(C, x) + 1$$

onde $r(C, x)$ é o número de componentes irredutíveis de (C, x) .

Observação 3.6. *A definição clássica no número de Milnor de uma curva reduzida $C \subset \mathbb{C}^n$ foi introduzida em [12] e usa conceitos como o módulo dualizante de Grothendieck que não iremos abordar neste trabalho. Mais precisamente,*

$$\mu(C^{\text{red}}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{coker}(cl \circ d),$$

onde $d : \mathcal{O}_{C^{\text{red}}} \rightarrow \Omega_{C^{\text{red}}}$ é o operador diferencial, $\Omega_{C^{\text{red}}}$ é o módulo das 1-formas holomorfas sobre C^{red} , $cl : \Omega_{C^{\text{red}}} \rightarrow \omega_{C^{\text{red}}}$ é a aplicação de classe e $\omega_{C^{\text{red}}}$ é o módulo dualizante de Grothendieck. Com esta definição, Buchweitz e Greuel mostram que a seguinte fórmula (que historicamente é conhecida como fórmula de Milnor e válida para curvas planas):

$$\mu(C, x) = 2\delta(C, x) - r(C, x) + 1$$

também é válida para curvas não planas em $\mathbb{C}^n$.

Definição 3.7. *Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa e seja $x \in C$. Definimos a multiplicidade $m_0(C)$ de C no ponto x como a multiplicidade de Hilbert-Samuel*

$$m_0(C, x) := e(m, \mathcal{O}_{C,x})$$

do ideal maximal m do anel local $\mathcal{O}_{C,x}$ de C em x .

Observação 3.8. Se C é uma curva em $\mathbb{C}^n$ e $x \in C$, então após uma mudança de coordenadas podemos sempre supor que x é a origem. Assim, neste trabalho iremos sempre calcular a multiplicidade de uma curva na origem e iremos usar a notação $m_0(C)$ para a multiplicidade de C na origem.

A fórmula que aparece na seguinte proposição é conhecida como fórmula aditiva de Serre para a multiplicidade.

Proposição 3.9. ([36], Teorema 14.7) Seja (A, m) um anel Noetheriano local de dimensão d . Seja M um A -módulo finito e $q \subset A$ um ideal m -primário. Seja $\{p_1, \dots, p_r\}$ o conjunto de todos os primos minimais de A tais que $\dim(A/p_i) = d$. Então

$$e(q, M) = \sum_{i=1}^r e(\bar{q}_i, A/p_i) \cdot l(M_{p_i})$$

onde $\bar{q}_i$ denota a imagem de q em A/p_i e $l(M_{p_i})$ denota o comprimento de M_{p_i} como um A_{p_i} -módulo.

Podemos caracterizar os anéis Cohen-Macaulay em termos de propriedades sobre a multiplicidade de Hilbert-Samuel. Seja (A, m) um anel Noetheriano local de dimensão r . Se $a_1, \dots, a_r$ geram um ideal m -primário, dizemos que o ideal $I = (a_1, \dots, a_r)$ é um sistema de parâmetros de A . Um ideal de A é chamado de **ideal de parâmetros** se ele pode ser gerado por um sistema de parâmetros (veja [36]).

Proposição 3.10. ([36], Teorema 17.11) As seguintes condições sobre um anel local Noetheriano (A, m) são equivalentes:

- (1) A é Cohen-Macaulay.
- (2) $l(A/q) = e(q)$ para todo ideal de parâmetros q de A .
- (3) $l(A/q) = e(q)$ para algum ideal de parâmetros q de A .

Observamos que se (A, m) é um anel local Noetheriano e q é um ideal de parâmetros de A , então em geral temos que $l(A/q) \geq e(q)$.

Vamos dar agora algumas definições que iremos precisar nas próximas seções. Iniciamos com a definição do número de Milnor de um germe de função finito $f : (C, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, onde $(C, 0)$ é uma curva reduzida.

Definição 3.11. *Seja $f : (C, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função finito, onde $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é uma curva reduzida. O número de Milnor de f é definido como*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\omega_{C,0}}{df \wedge \mathcal{O}_{C,0}}$$

onde, $df \wedge : \mathcal{O}_{C,0} \rightarrow \omega_{C,0}$ denota a composição de $df : \mathcal{O}_{C,0} \rightarrow \Omega_{C,0}$ com a aplicação de classe $c_{X,0} : \Omega_{X,0} \rightarrow \omega_{X,0}$ (para detalhes, veja [43]).

Definição 3.12. *Seja $(C, 0)$ um germe de curva reduzida em $(\mathbb{C}^n, 0)$. A primeira multiplicidade polar de $(C, 0)$ é definida em [46] como:*

$$m_1(C, 0) = \mu(p|_{C,0}),$$

onde $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica.

Definição 3.13. *Seja $(W, 0)$ um germe de espaço analítico em $\mathbb{C}^n$ e suponha que $0 \in W$. Definimos o cone tangente de Whitney $C_4(W, 0)$ como o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{C}^n$ satisfazendo a seguinte condição: $v \in C_4(W, 0)$ se existem uma sequência de pontos $(z_j) \in W \setminus \Sigma(W)$ e uma sequência de vetores $(v_j) \in T_{z_j}W$ tais que $(z_j) \rightarrow 0$ e $(v_j) \rightarrow v$ quando $j \rightarrow \infty$ (veja [62]).*

3.1.3. Resolução simultânea muito fraca, fraca e forte

Em [56], Teissier introduziu os conceitos de “*resolução simultânea muito fraca, fraca e forte*” para uma família de curvas reduzidas.

Definição 3.14. (a) *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (T, 0)$ um germe de morfismo plano com fibras reduzidas, onde T é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que p (ou que X) admite uma **resolução simultânea muito fraca** se para todo representante suficientemente pequeno, existe um morfismo $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ modificação própria de X satisfazendo as seguintes condições:*

(TF1) *O morfismo $p \circ \pi : \hat{X} \rightarrow T$ é uma submersão analítica, isto é, $p \circ \pi$ é plano e para todo $t \in T$, a fibra $\hat{X}_t = (p \circ \pi)^{-1}(t)$ é suave.*

(TF2) *Para todo $t \in T$, o morfismo induzido $\pi : \hat{X}_t \rightarrow X_t$ é uma resolução de singularidades de X_t .*

(b) *Se as condições (TF1), (TF2) e a condição (FA) abaixo forem satisfeitas, dizemos que p (ou que X) admite uma **resolução simultânea fraca**.*

(FA) *Existe um germe de homeomorfismo $\varphi : (\pi^{-1}(T), 0)_{red} \rightarrow (\pi^{-1}(0) \times T, 0)_{red}$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi^{-1}(T), 0)_{red} & \xrightarrow{\varphi} & (\pi^{-1}(0) \times T, 0)_{red} \\
 \searrow p \circ \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & (T, 0) &
 \end{array}$$

Onde “red” significa que estamos considerando a estrutura reduzida do espaço analítico e pr_1 é a projeção no segundo fator.

(c) Se as condições (TF1), (TF2) e a condição (FA') abaixo forem satisfeitas, dizemos que p (ou que X) admite uma **resolução simultânea forte**.

(FA') Existe um germe de isomorfismo $\varphi : (\pi^{-1}(T), 0) \rightarrow (\pi^{-1}(0) \times T, 0)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi^{-1}(T), 0) & \xrightarrow{\varphi} & (\pi^{-1}(0) \times T, 0) \\
 \searrow p \circ \pi & & \swarrow pr_1 \\
 & (T, 0) &
 \end{array}$$

Em [56], Teissier mostrou que se existe $\pi : \hat{X} \rightarrow X$ nas condições da definição acima, então π é necessariamente a aplicação de normalização de X . Ele mostrou também que X admite uma resolução simultânea muito fraca se, e somente se o delta invariante $\delta(X_t)$ é constante em uma vizinhança T de $0 \in \mathbb{C}$. Mais precisamente temos:

Teorema 3.15. ([56], Teorema 1) *Seja $p : X \rightarrow T \subset \mathbb{C}$ uma deformação plana central de um germe de curva reduzida X_0 , e seja $n : \hat{X} \rightarrow X$ a aplicação de normalização:*

- (1) $p \circ n$ é plano e $\delta((\hat{X}_0)) = \delta(X_0) - \delta(X_t)$ para todo $t \in T \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno.
- (2) As seguintes condições são equivalentes:

- (a) X admite uma resolução simultânea muito fraca.
- (b) $\delta(X_t) = \delta(X_0)$ para todo $t \in T$ suficientemente pequeno.

Exemplo 3.16. *Considere a curva reduzida $X_0 = V(x^3 + y^2) \subset \mathbb{C}^2$ e considere a deformação $X = V(x^3 + y^2 - t^2 x^2) \subset \mathbb{C}^2 \times T$ de X_0 . Note que X é uma família plana de curvas reduzidas, e X também é central. Além disso, a normalização de X é dada pela aplicação:*

$$\begin{aligned}
 n : (\mathbb{C} \times T, 0) &\rightarrow (X, 0) \subset (\mathbb{C}^2 \times T, 0) \\
 (u, t) &\mapsto (-u^2 + t^2, -u^3 + t^2 u, t).
 \end{aligned}$$

Note que n é uma resolução simultânea muito fraca de X , pois $\delta(X_t) = 1$ para todo $t \in T$.

Figura 3.2: Cúspide de Whitney: $X = V(x^3 + y^2 - t^2x^2)$

3.1.4. Trivialidade topológica

Definição 3.17. *Seja $(X, 0)$ um germe de superfície em $\mathbb{C}^n$ e considere $p : (X, 0) \rightarrow (T, 0)$, onde $T \subset \mathbb{C}$ é uma vizinhança da origem e p é a projeção no primeiro fator. Dizemos que X é **topologicamente equisingular** (ou **topologicamente trivial**) se existe um germe de homeomorfismo $h : (X, 0) \rightarrow (X_0 \times T, 0)$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} (X, 0) & \xrightarrow{h} & (X_0 \times T, 0) \\ p \downarrow & & \swarrow pr_1 \\ & & T \end{array}$$

onde pr_1 é a projeção no último fator.

Já que o germe de homeomorfismo h , se existir, é definido apenas sobre $(X, 0)$ e não em todo $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$, dizemos às vezes que X é abstratamente topologicamente trivial ou que X é topologicamente trivial no sentido abstrato. Quando h é um germe de homeomorfismo definido em todo $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$, isto é, $h : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$, então às vezes dizemos que X é topologicamente trivial no sentido mergulhado. Quando não houver risco de confusão vamos apenas dizer que X é topologicamente trivial.

Teissier mostrou que o conceito de resolução simultânea fraca é equivalente ao conceito de equisingularidade topológica que definimos acima. Em [12], Buchweitz e Greuel mostraram que uma condição necessária e suficiente para que X seja topologicamente trivial é que o número de Milnor $\mu(X_t)$ seja constante para todo $t \in T$.

Teorema 3.18. ([12] e [56]) *Seja $p : X \rightarrow T \subset \mathbb{C}$ uma deformação plana central de um germe de curva reduzida $(X_0, 0)$. Vamos denotar a fibra genérica por X_t e o número de componentes irredutíveis de X_t por $r(X_t)$. Então para T suficientemente pequeno as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\mu(X_t)$ é constante para todo $t \in T$.

(b) $\delta(X_t)$ e $r(X_t)$ são constantes.

(c) p admite uma resolução simultânea fraca.

(d) X é topologicamente trivial.

Exemplo 3.19. Quando uma família de curvas X é topologicamente trivial, o homeomorfismo h “trivializa” as fibras da família X no sentido que as curvas X_t tenham o mesmo tipo topológico para todo $t \in T$. Por exemplo, vamos considerar novamente a deformação $X = V(x^3 + y^2 - t^2x^2) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ de $X_0 = V(x^3 + y^2) \subset \mathbb{C}^2$ do Exemplo 3.16. Já vimos no Exemplo 3.16 que n é uma resolução simultânea muito fraca de X , no entanto, temos que $r(X_t) = 2$ se $t \neq 0$ e $r(X_t) = 1$ se $t = 0$, portanto X não admite uma resolução simultânea fraca, assim não existe um germe de homeomorfismo h que trivializa a família X e logo X não é topologicamente equisingular.

Figura 3.3: Família de curvas planas que não é topologicamente trivial

3.1.5. Whitney equisingularidade

No capítulo 1, vimos as condições de Whitney sobre um espaço analítico estratificado X em $\mathbb{C}^n$. No caso de famílias de curvas podemos enunciar as condições de Whitney da seguinte forma:

Definição 3.20. Seja $p : X \rightarrow T$ uma deformação plana central de um germe de curva reduzida $X_0 \subset \mathbb{C}^n$. Dizemos que esta deformação satisfaz as **condições de Whitney no ponto 0** se a seguinte condição ocorre:

Sejam (x_i) e (t_i) seqüências de pontos em $X \setminus T$ e T respectivamente, ambas convergindo para 0. Se a seqüência de planos tangentes $(T_{x_i}X)$ converge para o plano T , e se a seqüência $(\overline{x_i t_i})$ de retas contendo os pontos x_i, t_i converge para uma reta L , então $L \subset T$.

Agora estamos em condições de definir o conceito de Whitney equisingularidade de uma família de curvas reduzidas.

Definição 3.21. Dizemos que a deformação plana central $p : X \rightarrow T$ satisfaz as condições de Whitney ao longo de T em uma vizinhança de 0 se as condições de Whitney são satisfeitas em uma vizinhança de 0 em T . Neste caso, dizemos que $\{X \setminus T, T\}$ é uma **estratificação Whitney regular de X** ou que X é **Whitney equisingular**.

O seguinte teorema nos dá uma caracterização da Whitney equisingularidade de uma família de curvas reduzidas em termos da constância da multiplicidade e do número de Milnor de cada curva X_t , da constância de $m_1(X_t, 0)$, da dimensão do cone $C_4(X, 0)$ de Zariski e em termos da existência de uma resolução simultânea forte.

Teorema 3.22. ([6], [46], [54] e [56]) Seja $p : X \rightarrow T$ uma deformação plana central de um germe de curva reduzida $X_0 \subset \mathbb{C}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é Whitney equisingular.
- (b) A multiplicidade $m_0(X_t)$ e o número de Milnor $\mu(X_t)$ são constantes em T .
- (c) $m_1(X_t, 0)$ é constante em T .
- (d) $\dim(C_4(X, 0)) = 2$.
- (e) X admite uma resolução simultânea forte.

A seguir, apresentamos um exemplo dado em [12] de uma família de curvas que é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular. Este exemplo foi construído por J.P.G. Henry.

Exemplo 3.23. Defina $X_t \subset \mathbb{C}^3$ pelas equações

$$xy - tz = 0 \quad e \quad z^6 + x^{15} + y^{10} = 0$$

X_t é quase-homogênea, $(X_0, 0)$ é uma interseção completa e $(X_t, 0)$, $t \neq 0$, é uma curva plana singular. Temos que, $\mu(X_t, 0) = 126$ para todo t , $m(X_0, 0) = 12$ enquanto que $m(X_t, 0) = 10$ para $t \neq 0$.

Vamos apresentar outro exemplo de uma família de curvas que é uma interseção completa, topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular. Esta família de curvas aparece como o conjunto de pontos duplos $D^2(f)/S_2$ da família de germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por $f(x, y) = (x, x^2y - y^7, y^4 + txy)$ dada por Nuño-Ballesteros em uma conversa durante um congresso.

Exemplo 3.24. Defina $X_t \subset \mathbb{C}^3$ pelas equações

$$y^3 + 2yz + tx = 0 \quad e \quad x^2 + y^6 + y^4z + y^2z^2 + z^3 = 0.$$

X_t é quase-homogênea, $(X_0, 0)$ é uma interseção completa. Temos que, $\mu(X_t, 0) = 10$ para todo t , $m(X_0, 0) = 4$ enquanto que $m(X_t, 0) = 3$ para $t \neq 0$.

Exemplo 3.25. Considere a curva reduzida $X_0 = V(y^2 - xz, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subset \mathbb{C}^3$.

(a) Considere a deformação $p_1 : X \rightarrow T$ de X_0 dada por:

$$X = V(y^2 - xz + txy - t^2x^2 + 2t^3z + t^4y, yz - x^3 + ty^2 + 2txz + t^2xy, \\ z^2 - x^2y + 2tyz + t^2y^2) \subset \mathbb{C}^3 \times T.$$

Temos que $\mathcal{O}_X$ é Cohen-Macaulay, logo pelo Lema 3.1 temos que X é uma deformação plana de X_0 , um cálculo também mostra que X é central. Temos que X admite uma resolução simultânea fraca que é dada pela normalização de X que é dada por $n : (\mathbb{C} \times T, 0) \rightarrow (X, 0)$, definida por $n(u, t) = (u^3 + tu^2, u^4, u^5, t)$. Logo X é topologicamente trivial. Seja (X, Y, Z, t) um sistema de coordenadas locais para $\mathbb{C}^3 \times T$ e considere o anel local:

$$\mathcal{O}_{n^*(X, Y, Z)} = \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{(u^3 + tu^2, u^4, u^5)}.$$

Note que este anel local não é Cohen-Macaulay, pois todos os elementos do ideal maximal de $\mathcal{O}_{n^*(X, Y, Z)}$ são divisores de zero (veja observação 1.25). Note que X não é Whitney equisingular. De fato, temos que $\mu(X_t) = 4$ para todo t , e $m(X_t) = 2$ para $t \neq 0$ enquanto que $m(X_0) = 3$, segue então que X é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

(b) Agora considere a deformação $p_2 : W \rightarrow T$ de X_0 dada por:

$$W = V(y^2 - xz + tyz, yz - x^3 + tz^2 + 2tx^2y - t^2xy^2, z^2 - x^2y + 2txy^2 - t^2y^3) \subset \mathbb{C}^3 \times T.$$

Novamente temos que $\mathcal{O}_W$ é Cohen-Macaulay, logo pelo Lema 3.1 temos que W é uma deformação plana de X_0 , um cálculo também mostra que W é central. Analogamente ao item anterior, temos que W admite uma resolução simultânea fraca que é dada pela normalização de W , onde a normalização de W é dada por $n : (\mathbb{C} \times T, 0) \rightarrow (W, 0)$ definida por $n(u, t) = (u^3 + tu^4, u^4, u^5, t)$, logo W também é topologicamente trivial. Novamente seja (X, Y, Z, t) um sistema de coordenadas locais para $\mathbb{C}^3 \times T$ e considere o anel local:

$$\mathcal{O}_{n^*(X, Y, Z)} = \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{(u^3 + tu^4, u^4, u^5)}.$$

Note que este anel local é Cohen-Macaulay. Além disso, temos que X é Whitney equisingular. De fato, temos que $\mu(X_t) = 4$ para todo t , e $m(X_t) = 3$ para todo t .

Observação 3.26. Inspirados no exemplo acima, considere $p : X' \rightarrow T$ uma deformação plana central de uma curva reduzida $X'_0 \subset \mathbb{C}^m$ e suponha que X' seja topologicamente trivial e irredutível. Seja $n : \mathbb{C} \times T \rightarrow X'$ a aplicação de normalização de X' e sejam $(X_1, \dots, X_m, t)$ um sistema de coordenadas locais em $\mathbb{C}^m \times T$. Observamos que a propriedade do anel local $\mathcal{O}_2/n^*(X_1, \dots, X_m)$ ser Cohen-Macaulay está diretamente ligada ao fato de X ser Whitney equisingular. Mais precisamente, na Proposição 3.58 mostramos que nessas condições temos que:

X é Whitney equisingular se, e somente se $\mathcal{O}_2/n^*(X_1, \dots, X_m)$ é Cohen-Macaulay.

Este resultado será enunciado para o caso de famílias de curvas genericamente reduzidas (não necessariamente irredutíveis). Em particular, a Proposição 3.58 também é válida para o caso de famílias de curvas reduzidas.

3.2. Famílias de curvas genericamente reduzidas

3.2.1. Curvas genericamente reduzidas

No capítulo 2 definimos as condições de Serre para todo inteiro não-negativo k (veja Definição 2.24). Vamos recordar a seguir as condições de Serre (R_k) e (S_k) , com $k = 1$.

Definição 3.27. Sejam R um anel Noetheriano.

- (a) Dizemos que R satisfaz a condição de Serre (R_1) se para todo ideal primo P em R de altura no máximo 1, R_P é um anel local regular.
- (b) Dizemos que R satisfaz a condição Serre (S_1) se para todo ideal primo P em R , a profundidade de R_P é pelo menos igual a $\min\{1, \text{ht}(P)\}$.

Note que se $\dim(R) = 1$, então R é Cohen-Macaulay se, e somente se R satisfaz a condição de Serre S_1 . Para efeito de simplificação, diremos algumas vezes apenas que R é R_k ou S_k em vez de dizer que R satisfaz a condição de Serre (R_k) ou (S_k) .

Definição 3.28. Seja $(X_0, 0)$ um germe de curva em $(\mathbb{C}^n, 0)$ definida por um ideal $I_0 = (f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$. Dizemos que $(X_0, 0)$ é **genericamente reduzido** se o anel local $\mathcal{O}_{X_0}$ de $(X_0, 0)$ satisfaz a condição de Serre R_0 .

Alguns autores usam a terminologia “germe de curva com singularidade isolada”, mas preferimos adotar a terminologia “germe de curva genericamente reduzida” para incluirmos naturalmente também o caso reduzido, já que toda curva reduzida também é genericamente reduzida.

Note que se $(X_0, 0)$ é genericamente reduzido, $\mathcal{O}_{X_0}$ pode não ser Cohen-Macaulay (ou equivalentemente, $\mathcal{O}_{X_0}$ pode não satisfazer a condição S_1). Quando X_0 é genericamente reduzido e é Cohen-Macaulay, então X_0 é reduzido (veja [23]). Em geral, X_0 é reduzido se, e somente se $\mathcal{O}_{X_0}$ é R_0 e S_1 .

Teorema 3.29. ([23], Teorema 4.5.2) *Um anel Noetheriano A é reduzido se, e somente se A é R_0 e S_1 .*

Exemplo 3.30. *Temos quatro possibilidades para uma curva em relação às condições de Serre R_0 e S_1 . Na figura abaixo, temos alguns exemplos de curvas planas satisfazendo ou não as condições de Serre R_0 e S_1 .*

Figura 3.4: As condições (R_k) e (S_k) de Serre para curvas

Note que as curvas C_3 e C_4 não satisfazem a condição de Serre S_1 , isto implica na existência de uma componente mergulhada de dimensão zero. Na geometria algébrica esta componente mergulhada é popularmente conhecida como um “ponto gordo” da curva. O caso da curva C_1 é o caso reduzido enquanto que o caso da curva C_4 é o caso genericamente reduzido.

3.2.2. Famílias

Analogamente ao caso de famílias de curvas reduzidas, definimos as famílias planas de curvas genericamente reduzidas.

Definição 3.31. *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de superfície complexa reduzida com singularidade isolada ou com um conjunto singular $\Sigma(X)$ suave e de dimensão 1. Considere uma projeção genérica $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Dizemos que a superfície X é uma deformação plana a 1-parâmetro da curva $X_0 := p^{-1}(0)$, se a projeção p é uma aplicação plana, isto é, se o anel local $\mathcal{O}_X$ de $(X, 0)$ é um $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo plano.*

Observação 3.32. (a) *Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de superfície complexa reduzida e suponha que o conjunto singular $\Sigma(X)$ de $(X, 0)$ seja suave e de dimensão 1. Então, existe um germe de biholomorfismo*

$$\Phi : (X, 0) \rightarrow (X', 0)$$

tal que $\Sigma(X') = \{(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{C}^{n+1}, t \in T \subset \mathbb{C}\}$ onde T é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$, isto é, $\Sigma(X')$ é o eixo t (veja [59]).

Figura 3.5: Difeomorfismo entre $(X, 0)$ e $(X', 0)$.

Desta forma, usando um biholomorfismo apropriado, podemos sempre assumir que $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é projeção de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ no último fator e que o conjunto singular de $(X, 0)$ é

$$\Sigma(X) = \{(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{C}^{n+1}, t \in T \subset \mathbb{C}\}.$$

(b) De agora em diante, consideramos que $(X, 0)$ é um germe de superfície complexa reduzida em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ com singularidade isolada ou com conjunto singular suave $\Sigma(X)$ que identificaremos com o último eixo de $\mathbb{C}^{n+1}$, isto é, $\Sigma(X) = \{(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{C}^{n+1}, t \in T \subset \mathbb{C}\}$. Assumimos também que a projeção $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é a restrição a $(X, 0)$ da projeção de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ no último fator e que p é uma aplicação plana.

Note que nessas condições, apesar da fibra especial $X_0 = p^{-1}(0)$ ser uma curva genericamente reduzida, as fibras genéricas $X_t := p^{-1}(t)$, com $t \neq 0$, são todas reduzidas. (veja [15]).

(c) Sempre consideramos também um bom representante (no sentido de [12], p.248) de X com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$ tal que $X_t \setminus \{\sigma(t)\}$ é suave para todo $t \in T$, e por um abuso de notação, denotamos o germe $(X_t, \sigma(t))$ por $(X_t, 0)$, ou simplesmente por (X_t) .

Se $(X_0, 0)$ é reduzida, então p é plana se, e somente se $(X, 0)$ é uma superfície Cohen-Macaulay (veja Lema 3.1). Quando $(X_0, 0)$ é uma curva genericamente reduzida (e não reduzida), a superfície $(X, 0)$ não é Cohen-Macaulay. Um resultado para o caso genericamente reduzido análogo ao Lema 3.1 é o seguinte:

Lema 3.33. *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. São equivalentes:*

- (a) $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana.
- (b) o elemento t não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_X$.

Demonstração: Considere o morfismo $p^* : \mathbb{C}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_X$ induzido por p . Já que $\mathbb{C}\{t\}$ é um anel local regular, $\{t\}$ é um conjunto minimal de geradores do ideal maximal de $\mathbb{C}\{t\}$ e $p^*(t) = t$, logo por [23] Teorema B.8.11 temos que $\mathcal{O}_X$ é um $\mathbb{C}\{t\}$ -módulo plano se, e somente se t não é um divisor de zero de $\mathcal{O}_X$. ■

Exemplo 3.34. *Seja $(X, 0)$ a superfície parametrizada pela aplicação:*

$$n : (u, t) \mapsto (u^3, u^4, tu^5, t)$$

que pode ser vista como uma família de curvas espaciais se degenerando em uma cúspide. O conjunto singular da superfície $(X, 0)$ é a curva $(\{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{C})$. Considere a projeção linear no último fator

$$p : \mathbb{C}^4 \rightarrow \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{C}.$$

Se usamos coordenadas locais (x, y, z, t) no espaço ambiente, a superfície $(X, 0)$ pode ser definida pelo seguinte ideal

$$I = (xz - ty^2, yz - tx^3, z^2 - t^2x^2y, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, t\}.$$

Esta superfície é reduzida e $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana a 1 parâmetro da curva $(X_0, 0)$ definida pelo ideal

$$I_0 = (xz, yz, z^2, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z\}.$$

Note que $(X_0, 0)$ tem uma componente mergulhada na origem. Concluimos que $(X_0, 0)$ não é reduzida, no entanto ela é genericamente reduzida. Em consequência, $(X, 0)$ é uma superfície que não é Cohen-Macaulay.

3.2.3. Invariantes de curvas genericamente reduzidas

Como vimos no caso reduzido, para uma curva reduzida podemos associar um número δ (veja [12]), que é um número finito e é um invariante topológico. Para curvas genericamente reduzidas, Brückner e Greuel apresentaram em [10] uma definição similar para o número δ que generaliza a definição anterior para curvas reduzidas.

Seguindo [10], vamos recordar nesta seção o invariante δ e o número de Milnor de uma curva genericamente reduzida com uma singularidade isolada na origem.

Definição 3.35. Para uma curva complexa C , denotamos por C^{red} a curva C com estrutura reduzida e por $i : C^{\text{red}} \rightarrow C$ a inclusão. Denotamos por $n^{\text{red}} : \bar{C} \rightarrow C^{\text{red}}$ a normalização da curva reduzida C^{red} , e chamamos a composição $n := i \circ n^{\text{red}} : \bar{C} \rightarrow C$ de normalização da curva C . Temos a aplicação induzida

$$n^* : \mathcal{O}_C \rightarrow n_*\mathcal{O}_{\bar{C}}.$$

Observação 3.36. Note que a normalização $n := i \circ n^{\text{red}} : (\hat{C}, \bar{0}) \rightarrow (C, 0)$ de um germe de curva genericamente reduzida $(C, 0)$ na definição acima tem as propriedades de uma normalização no sentido clássico, isto é, n satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) n é holomorfa, própria, sobrejetora sobre $(C, 0)$ e com fibras finitas.
- (b) $(\hat{C}, \bar{0})$ é uma curva analítica normal.
- (c) A restrição $n|_{(\hat{C} \setminus \{n^{-1}(0)\}, \bar{0})}$ é um biholomorfismo sobre $(C \setminus \{0\}, 0)$.

Definição 3.37. Seja $C \subset \mathbb{C}^n$ uma curva complexa e $x \in C$ um ponto singular isolado. Como anteriormente, denote por C^{red} sua redução e seja $n^{\text{red}} : \bar{C} \rightarrow C^{\text{red}}$ a aplicação de normalização da curva C^{red} . O número

$$\epsilon(C, x) := \dim_{\mathbb{C}} H_{\{x\}}^0(\mathcal{O}_C)$$

é chamado de *épsilon-invariante* de C em x , onde $H_{\{x\}}^0(\mathcal{O}_C)$ denota a cohomologia local, e

$$\delta(C, x) := \delta(C^{\text{red}}, x) - \epsilon(C, x)$$

é chamado de *delta-invariante* de C em x . Se C tem apenas um número finito de pontos singulares então o número

$$\delta(C) := \sum_{x \in \Sigma(C)} \delta(C, x)$$

é chamado de *delta-invariante* de C . Definimos o *número de Milnor* de $(C, 0)$ como

$$\mu(C, x) = 2\delta(C, x) - r(C, x) + 1$$

onde $r(C, x)$ é o número de ramos de C em x (veja [10]). Das definições acima segue que,

$$\mu(C, x) = \mu(C^{\text{red}}, x) - 2\epsilon(C, x).$$

Observação 3.38. Uma das propriedades do caso reduzido é que $\delta(C^{\text{red}}, x) \geq 0$ e $\delta(C^{\text{red}}, x) = 0$ se, e somente se o germe (C^{red}, x) é suave. Contudo, quando C é genericamente reduzido e singular em um ponto x , podemos ter que $\delta(C, x) \leq 0$, e portanto também podemos ter que $\mu(C, x) \leq 0$.

A 0-cohomologia local do anel local $(\mathcal{O}_{C,x}, m_x)$ é definida como

$$H_{\{x\}}^0(\mathcal{O}_C) = \{f \in \mathcal{O}_{C,x} \mid \text{existe um } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } (m_x)^n f = 0_{\mathcal{O}_{C,x}}\}.$$

Se $C = V(I)$, onde I é um ideal de $\mathcal{O}_n$, uma forma equivalente (veja [15]) de calcularmos o invariante $\epsilon(C)$ de uma curva genericamente reduzida é usando o fato de que

$$\epsilon(C, x) = \dim_{\mathbb{C}} H_{\{x\}}^0(\mathcal{O}_C) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I}.$$

Exemplo 3.39. Calculamos neste exemplo o δ -invariante, o número de Milnor e a multiplicidade em 0 da curva $(X_0, 0) \subset \mathbb{C}^3$ do Exemplo 3.34 definida pelo ideal

$$I_0 = (xz, yz, z^2, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z\}.$$

Veja que

$$(xz, yz, z^2, y^3 - x^4) = (z, y^3 - x^4) \cap (xz, x^4, y, z^2)$$

logo a curva singular $(X_0, 0)$ é a união da curva C^{red} com um ponto mergulhado não reduzido na origem. Temos que $\delta(X_0^{\text{red}}, 0) = 3$ e que

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \sqrt{I_0}/I_0 = 1$$

onde $\sqrt{I_0} = (z, y^3 - x^4)$. Portanto, temos que $\delta(X_0, 0) = 2$, $\mu(X_0, 0) = 4$ e um simples cálculo nos mostra que a multiplicidade de X_0 em 0 é 3.

3.2.4. Deformações equinormalizáveis e resolução simultânea muito fraca

Recordaremos agora a definição de deformações equinormalizáveis seguindo Chiang-Hsieh-Lipman [14] e Kollár [29].

Definição 3.40. (a) *Seja $f : X \rightarrow S$ um morfismo de espaços complexos. Uma normalização simultânea de f é um morfismo $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que*

- (1) σ é finita,
- (2) $\tilde{f} := f \circ \sigma : \tilde{X} \rightarrow S$ é normal, isto é, para cada $z \in \tilde{X}$, $\tilde{f}$ é plano em z e a fibra $\tilde{X}_{\tilde{f}(z)} := \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(z))$ é normal,
- (3) a aplicação induzida $\sigma_s : \tilde{X}_s := \tilde{f}^{-1}(s) \rightarrow X_s$ é bimeromorfa para cada $s \in f(X)$.

(b) *O morfismo f é chamado de equinormalizável se a normalização $n : \hat{X} \rightarrow X$ é uma normalização simultânea de f . Dizemos que f é equinormalizável em $x \in X$ se a restrição de f a alguma vizinhança de x é equinormalizável. Se $f : (X, x) \rightarrow (S, s)$ é um morfismo de germes, então uma normalização simultânea de f é um morfismo n de um multigerme $(\hat{X}, n^{-1}(x))$ para (X, x) tal que algum representante de n é uma normalização simultânea de um representante de f . O germe f é equinormalizável se algum representante de f é equinormalizável.*

Como vimos anteriormente, no caso reduzido temos a noção de *resolução simultânea muito fraca* (cf. [6]), para o caso genericamente reduzido temos a seguinte definição:

Definição 3.41. *Dizemos que $p : (X, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma resolução simultânea muito fraca se p é equinormalizável.*

A generalização do item (b) do Teorema 3.15 para o caso de famílias de curvas genericamente reduzidas é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.42. ([10] e [22]) *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma família plana de curvas genericamente reduzidas com fibra especial $(X_0, 0)$. Então p é equinormalizável se, e somente se é δ -constante e $(X, 0)$ é de dimensão pura 2.*

Observação 3.43. *Se uma família de curvas genericamente reduzidas $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma resolução simultânea muito fraca podemos dizer que a normalização $n : \hat{X} \rightarrow X$ é uma normalização em família no sentido em que a restrição $n|_{\hat{X}_t} : \hat{X}_t \rightarrow X_t$ é a aplicação de normalização de X_t para $t \neq 0$ e $n|_{\hat{X}_0} : \hat{X}_0 \rightarrow X_0$ é a normalização de X_0 no sentido da definição 3.35, logo neste caso $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma parametrização em família, isto é, X é a imagem direta reduzida do morfismo.*

$$n : \prod_{j=1}^r (\mathbb{C}_j, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$$

definido por n elementos $z_i = z_i(u_j, t) \in \prod_{j=1}^r \mathbb{C}\{u_j, t\}$ ($1 \leq i \leq n$):

$$n^j(u_j, t) = (z_1(u_j, t), \dots, z_n(u_j, t), t)$$

onde o morfismo induzido por $t = 0$ é a normalização de X_0 no sentido da normalização 3.35.

Exemplo 3.44. Considere $(X, 0)$ o germe de superfície do Exemplo 3.34 definida pelo ideal

$$I = (xz - ty^2, yz - tx^3, z^2 - t^2x^2y, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, t\}.$$

Temos que $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana do germe de curva $(X_0, 0)$ e pelo Exemplo 3.39 temos que $\delta(X_0, 0) = 2$. Agora, para $t \neq 0$ temos que X_t é definida pelo ideal

$$I_t = (xz - ty^2, yz - tx^3, z^2 - t^2x^2y, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z\}.$$

Temos que a curva $(X_t^{\text{red}}, 0)$ é parametrizada por

$$n_t : u \mapsto (u^3, u^4, tu^5).$$

Então $\delta(X_t^{\text{red}}, 0) = 2$. Note que I_t é radical, então $\epsilon(X_t, 0) = 0$ conseqüentemente $(X_t, 0)$ é reduzida e $\delta(X_t, 0) = 2$. Logo $\delta(X_t, 0) = 2$ para todo t , então $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma resolução simultânea muito fraca.

3.2.5. Trivialidade topológica e resolução simultânea fraca

Nesta seção, usamos a noção de resolução simultânea fraca para famílias de curvas genericamente reduzidas. Se X não é um espaço reduzido, dizemos que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma resolução de singularidades se a aplicação induzida $\pi : \tilde{X} \rightarrow X^{\text{red}}$ é uma resolução de singularidades (no sentido clássico). Assim, as noções de resolução simultânea fraca (resp. forte), trivialidade topológica e Whitney equisingularidade do caso reduzido são análogas para o caso genericamente reduzido.

As ideias apresentadas nesta seção se originaram do trabalho de Lê Công-Trình em [15]. Recentemente, Greuel nos enviou um artigo ([22], pre-print) que ele escreveu sobre este assunto onde ele dá uma formulação correta do Teorema 4.5 em [15] sobre a equivalência entre a constância do número de Milnor e a constância do invariante delta e do número de ramos. A seguir, apresentamos este teorema.

Teorema 3.45. ([15], Teorema 4.5 e [22] Teorema 8.7) *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de um germe de curva singular $(X_0, 0)$ e $p : X \rightarrow T$ um bom representante com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$, tal que $X_t \setminus \sigma(t)$ seja suave para todo $t \in T$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $(X, 0)$ é de dimensão pura 2 e f admite uma resolução simultânea fraca;
- (2) $(X, 0)$ é de dimensão pura 2 e o $\delta(X_t, \sigma(t))$ e $r(X_t, \sigma(t))$ são constantes;
- (3) o número de Milnor $\mu(X_t, \sigma(t))$ é constante e X_t é conexa para todo $t \in T$;
- (4) X é topologicamente trivial.

Observação 3.46. Todas as equivalências do Teorema 3.45 foram mostradas por Lê Công-Trình em [15]. Recentemente, em [22], Greuel deu uma formulação correta da equivalência entre (3) e (4), adicionando a hipótese de conexidade.

Observamos que os resultados deste capítulo foram feitos independentemente de [22]. Durante a realização do estudo dos resultados deste capítulo, usamos como referência principal os resultados de Lê Công-Trình em [15]. Recentemente, tomamos conhecimento de [22] (pre-print).

Observamos também que se X é irredutível, então X_t é conexa (veja por exemplo, [22]). Assim, nesse caso o Teorema 3.45 pode ser escrito da seguinte forma:

Teorema 3.47. Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de um germe de curva singular $(X_0, 0)$ e $p : X \rightarrow T$ um bom representante com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$, tal que $X_t \setminus \sigma(t)$ seja suave para todo $t \in T$. Suponha que $(X, 0)$ seja irredutível, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f admite uma resolução simultânea fraca;
- (2) $\delta(X_t, \sigma(t))$ e $r(X_t, \sigma(t))$ são constantes;
- (3) O número de Milnor $\mu(X_t, \sigma(t))$ é constante;
- (4) X é topologicamente trivial.

Exemplo 3.48. (a) Considere novamente $(X, 0)$ o germe de superfície do Exemplo 3.34 definida pelo ideal

$$I = (xz - ty^2, yz - tx^3, z^2 - t^2x^2y, y^3 - x^4) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, t\}.$$

Pelo Exemplo 3.34 temos que $\mu(X_0, 0) = 4$ e pelo Exemplo 3.44 temos que $\delta(X_t, 0) = 2$. Já que o número de ramos de $(X_t, 0)$ é 1, pela fórmula de Milnor temos que $\mu(X_t, 0) = 4$, então $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma resolução simultânea fraca.

(b) Considere agora a deformação $(X', 0)$ de $(X_0, 0)$ definida pelo ideal

$$I = (xz - ty^2, yz - tx^3 - t^4x^2, z^2 - t^2x^2y - t^5xy, y^3 - x^4 - t^3x^3) \subset \mathbb{C}\{x, y, z, t\}.$$

Temos que $(X', 0)$ é um superfície reduzida que tem uma normalização suave dada por

$$n(u, t) = (u^3 - t^3, u^4 - ut^3, tu^5 - t^4u^2, t).$$

Note que $\delta(X'_t, 0) = 2$ para todo t suficientemente pequeno, então $(X', 0)$ admite uma resolução simultânea muito fraca. Contudo, note que $(n^{-1}(T))^{\text{red}} \not\cong (n^{-1}(0))^{\text{red}} \times T$ então $(X', 0)$ não admite uma resolução simultânea fraca. De fato, já que $n^{-1}(T) = V(u^3 - t^3)$ então $(X'_t, 0)$ tem 3 ramos para $t \neq 0$, logo pela fórmula de Milnor (no caso reduzido) temos que $\mu(X'_t, 0) = 2$ para todo $t \neq 0$, enquanto que $\mu(X'_0, 0) = 4$. Este exemplo nos mostra que resolução simultânea muito fraca não implica resolução simultânea fraca.

Exemplo 3.49. Em [3], a superfície $(X, 0)$ parametrizada pelo germe de aplicação $n : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (X, 0) \subset (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ definida por

$$n(u, t) = (u^3, u^4, tu, t)$$

aparece como sendo o conjunto singular de uma família de superfícies em $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$.

A superfície $(X, 0)$ pode ser vista como uma família de curvas genericamente reduzidas mediante a projeção $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ no último fator, com fibra $p^{-1}(t) := X_t$. Bobadilla mostra que esta família de curvas é topologicamente trivial, o que é um fato surpreendente já que a fibra especial X_0 é uma curva singular de multiplicidade 3, enquanto que as fibras genéricas X_t são todas suaves. Vamos agora usar os resultados anteriores para dar uma outra prova de que a família $(X, 0)$ é topologicamente trivial. Escolhendo um bom representante $p : X \rightarrow T$ e denotando as coordenadas de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$ por (x, y, z, t) , temos que

$$X = V(xz - ty, y^3 - x^4, y^2z - tx^3, yz^2 - t^2x^2, z^3 - t^3x^3) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Assim, a fibra especial é dada por

$$X_0 = V(I) = V(xz, y^3 - x^4, y^2z, yz^2, z^3) \subset \mathbb{C}^3.$$

Logo, o invariante $\epsilon(X_0, 0)$ é dado por

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(y^3 - x^4, z)}{(xz, y^3 - x^4, y^2z, yz^2, z^3)} = 3$$

já que os monômios z, z^2 e yz geram $\sqrt{I}/I$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Note que X_t é conexa para todo t pois X é localmente irreduzível ([22], Prop. 8.3). Temos também que $\mu(X_t) = 0$ para todo t , logo pelo Teorema 3.45 segue que X é topologicamente trivial.

Exemplo 3.50. *Inspirados no exemplo anterior, apresentamos agora um outro exemplo com as mesmas propriedades do exemplo de família de curvas genericamente reduzidas que é topologicamente trivial, a fibra especial X_0 é uma curva singular de multiplicidade 2, enquanto que as fibras genéricas X_t são todas suaves. Considere a superfície $(X, 0)$ dada pela parametrização*

$$n(u, t) = (u^2, u^3, tu, t).$$

Escolhendo um bom representante $p : X \rightarrow T$, temos que

$$X = V(y^2 - x^3, xz - ty, yz - tx^2, z^2 - t^2x) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Assim, a fibra especial é dada por

$$X_0 = V(I) = V(y^2 - x^3, xz, yz, z^2) \subset \mathbb{C}^3.$$

Logo, o invariante $\epsilon(X_0, 0)$ é dado por

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(y^2 - x^3, z)}{(y^2 - x^3, xz, yz, z^2)} = 1$$

já que o monômio z gera $\sqrt{I}/I$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial.

Novamente temos que X_t é conexa para todo t pois X é localmente irreduzível. Temos também que $\mu(X_t) = 0$ para todo t , logo pelo Teorema 3.45 segue que X é topologicamente trivial.

Seguindo as ideias dos exemplos acima, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.51. *Seja $(X, 0)$ uma das superfícies parametrizadas abaixo. Então, a família de curvas genericamente reduzidas $(X, 0)$ tem as seguintes propriedades: é topologicamente trivial, a fibra especial X_0 é uma curva singular e as fibras genéricas X_t são todas suaves.*

(a) $n(u, t) = (u^2, u^m, tu, t)$ onde m é ímpar.

(b) $n(u, t) = (u^3, u^m, tu, t)$ onde m não é um múltiplo de 3.

Demonstração: Em ambos os itens, temos que X_t é conexa para todo t pois X é localmente irreduzível (veja [22], Prop. 8.3). Temos também que cada fibra X_t é suave para $t \neq 0$, logo pelo Teorema 3.45, basta mostrar que $\mu(X_0) = 0$.

(a) Escreva $m = 2k - 1$ e escolha um bom representante $p : X \rightarrow T$. Temos que

$$X = V(y^2 - x^{2k-1}, yz - tx^k, z^2 - t^2x, x^{k-1} - ty) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Assim, a fibra especial é dada por

$$X_0 = V(I) = V(y^2 - x^{2k-1}, yz, z^2, x^{k-1}z) \subset \mathbb{C}^3.$$

Logo, o invariante $\epsilon(X_0, 0)$ é dado por

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(y^2 - x^{2k-1}, z)}{(y^2 - x^{2k-1}, yz, z^2, x^{k-1}z)} = k - 1$$

já que os monômios $z, xz, x^2z, \dots, x^{k-2}z$ geram $\sqrt{I}/I$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Como $\mu(X_0^{red}) = 2k - 2$ e $\mu(X_0) = \mu(X_0^{red}) - 2\epsilon(X_0)$ segue que $\mu(X_0) = 0$.

(b) Vamos dividir em dois casos.

Caso (b.1): Suponha que $m = 3k + 1$ e escolha um bom representante $p : X \rightarrow T$. Temos que

$$X = V(x^kz - ty, y^3 - x^{3k+1}, yz^2 - t^2x^{k+1}, z^3 - t^3x, y^2z - tx^{2k+1}) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Assim, a fibra especial é dada por

$$X_0 = V(I) = V(x^kz, y^3 - x^{3k+1}, yz^2, z^3, y^2z) \subset \mathbb{C}^3.$$

Logo, o invariante $\epsilon(X_0, 0)$ é dado por

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(y^3 - x^{3k+1}, z)}{(x^kz, y^3 - x^{3k+1}, yz^2, z^3, y^2z)} = 3k$$

já que os monômios x^az, x^ayz, x^az^2 com $a = 0, \dots, k - 1$ geram $\sqrt{I}/I$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Já que $\mu(X_0^{red}) = 6k$, temos que $\mu(X_0) = 0$.

Caso (b.2): Suponha que $m = 3k + 2$ e escolha um bom representante $p : X \rightarrow T$. Temos que

$$X = V(yz - tx^{k+1}, z^3 - t^3x, y^3 - x^{3k+2}, x^{2k+1}z - ty^2, x^kz^2 - t^2y) \subset \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}.$$

Assim, a fibra especial é dada por

$$X_0 = V(I) = V(yz, z^3, y^3 - x^{3k+2}, x^{2k+1}z, x^kz^2) \subset \mathbb{C}^3.$$

Logo, o invariante $\epsilon(X_0, 0)$ é dado por

$$\epsilon(X_0, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\sqrt{I}}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{(y^3 - x^{3k+2}, z)}{(yz, z^3, y^3 - x^{3k+2}, x^{2k+1}z, x^kz^2)} = 3k + 1$$

já que os monômios x^az, x^bz^2 com $a = 0, \dots, 2k$ e $b = 0, \dots, k - 1$ geram $\sqrt{I}/I$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Já que $\mu(X_0^{red}) = 6k + 2$, temos que $\mu(X_0) = 0$. ■

Observação 3.52. Usando o mesmo procedimento da prova da Proposição 3.51, podemos produzir outros exemplos de famílias de curvas parametrizadas por $n(u, t) = (u^n, u^m, tu, t)$ onde n e m são coprimos, com as mesmas propriedades do Exemplo 3.49. A dificuldade é sobre o número de equações que definem $(X, 0)$, que cresce a medida que n e m crescem.

3.2.6. Whitney equisingularidade e resolução simultânea forte

Vamos iniciar esta seção com um exemplo dado por Bobadilla, Snoussi e Spivakovsky em [5]) de uma superfície Whitney regular ao longo do seu conjunto singular e que não é Cohen-Macaulay.

Exemplo 3.53. Considere a superfície $(X, 0)$ do Exemplo 3.34 parametrizada pela aplicação

$$n : (u, t) \mapsto (u^3, u^4, tu^5, t).$$

Considere a projeção linear no último fator $r : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Afim de provar a condição (b), note que é suficiente provar a condição (a) e que para toda sequência de pontos (p_n) no parte regular de S convergindo para a origem, a sequência de retas passando por p_n e $r(p_n)$ converge para uma reta contida no limite T de espaços tangentes $T_{p_n}S$. A matriz Jacobiana de n é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^5 & 1 \\ 3u^2 & 4u^3 & 5tu^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Em cada ponto não singular p_n de S o plano tangente pelas linhas da matriz Jacobiana em p_n . O limite dos planos tangentes a S em p_n contém o vetor $(0, 0, 0, 1)$, que gera a reta tangente do lugar singular de S em 0 . Logo a condição (a) de Whitney é verificada.

Seja l_n a reta contendo os pontos $p_n = n(u_n, t_n)$ e $r(p_n)$. A direção de l_n é dada pelo vetor $(u_n^3, u_n^4, t_n u_n^5, 0)$. Depois de dividirmos por u_n^3 , observamos que todas essas retas, independentemente da escolha de t_n e u_n convergem para a reta l gerada pelo vetor $(1, 0, 0, 0)$.

Por outro lado, o espaço tangente T_{p_n} é gerado pelos vetores $(0, 0, u_n^5, 1)$ e $(3u_n^2, 4u_n^3, 5t_n u_n^4, 0)$. Dividindo o segundo vetor por u_n^2 , observamos que todos esses espaços tangentes, independentemente da escolha de u_n e t_n convergem para o espaço linear gerado pelos vetores $(0, 0, 0, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ que contém a reta l . Logo a superfície X é Whitney equisingular.

No caso reduzido, temos que X é Whitney equisingular se, e somente se o número de Milnor $\mu(X_t, \sigma(t))$ e a multiplicidade $m_0(X_t, \sigma(t))$ são constantes para todo $t \in T$. Agora, vamos mostrar uma generalização desse resultado para o caso genericamente reduzido.

Teorema 3.54. Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de um germe de curva singular $(X_0, 0)$ e $p : X \rightarrow T$ um bom representante com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$, tal que $X_t \setminus \sigma(t)$ seja suave para todo $t \in T$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) $(X, 0)$ é Whitney equisingular;
- (2) o número de Milnor $\mu(X_t, \sigma(t))$ e a multiplicidade $m_0(X_t, \sigma(t))$ são constantes para todo $t \in T$;

A ideia principal da prova do Teorema 3.54 é o seguinte lema:

Lema 3.55. *Seja $C = V(I) \subset \mathbb{C}^n$ uma curva genericamente reduzida, $0 \in C$ um ponto singular isolado de C e considere $C_{red} = V(\sqrt{I})$ a curva C com estrutura reduzida. Então:*

$$m_0(C) = m_0(C_{red}).$$

Demonstração: Seja $m = (x_1, \dots, x_n)$ o ideal maximal de $\mathcal{O}_C$ e $\mathcal{O}_{C_{red}}$, e seja $\{p_1, \dots, p_r\}$ o conjunto de todos os primos minimais de $\mathcal{O}_C$. Para todo $j = 1, \dots, r$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_C \simeq \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{(I)} & \xrightarrow{\pi_1} & \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{(\sqrt{I})} \simeq \mathcal{O}_{C_{red}} \\ \pi_2 \downarrow & \swarrow \pi_3 & \\ \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{(p_j)} & & \end{array}$$

onde π_1, π_2 e π_3 são morfismos quocientes. Logo, temos que $\mathcal{O}_C/(p_j) \simeq \mathcal{O}_{C_{red}}/(p_j)$, então $e(\overline{m}_j, \mathcal{O}_C/(p_j)) = e(\overline{m}_j, \mathcal{O}_{C_{red}}/(p_j))$ para todo $j = 1, \dots, r$, onde $\overline{m}_j$ denota a imagem de m em $\mathcal{O}_C/p_j$ e $\mathcal{O}_{C_{red}}/p_j$ por π_2 e π_3 , respectivamente.

Temos que $\mathcal{O}_C$ e $\mathcal{O}_{C_{red}}$ satisfazem a condição R_0 de Serre e p_j tem altura 0, então as localizações $\mathcal{O}_{C_{p_j}}$ e $\mathcal{O}_{C_{red}p_j}$ são anéis locais Noetherianos regulares, logo eles são também domínios. Já que $\mathcal{O}_{C_{p_j}}$ e $\mathcal{O}_{C_{red}p_j}$ são Artinianos, logo eles são corpos e temos que $\mathcal{O}_{C_{p_j}} \simeq \mathcal{O}_{C_{red}p_j} \simeq \mathbb{C}$, então $l(\mathcal{O}_{C_{p_j}}) = l(\mathcal{O}_{C_{red}p_j}) = 1$. Pela Proposição 3.9 temos que

$$\begin{aligned} m_0(C) &= e(m, \mathcal{O}_C) = \sum_{j=1}^r e(\overline{m}_j, \mathcal{O}_C/p_j) \cdot l(\mathcal{O}_{C_{p_j}}) = \\ &= \sum_{j=1}^r e(\overline{m}_j, \mathcal{O}_{C_{red}}/p_j) \cdot l(\mathcal{O}_{C_{red}p_j}) = e(m, \mathcal{O}_{C_{red}}) = m_0(C_{red}) \end{aligned}$$

como queríamos provar. ■

Demonstração: (do Teorema 3.54) Pelo Lema 3.55, podemos provar a afirmação essencialmente da mesma maneira que no caso reduzido (veja [6], Teorema III.3). Incluímos a prova aqui para completarmos a demonstração.

(1) $\Rightarrow$ (2) Já que X é Whitney equisingular, então X é topologicamente equisingular e pelo Teorema 3.45 temos que $\mu(X_t, \sigma(t))$ é constante. A constância de $m_0(X_t, \sigma(t))$ segue por um resultado de Hironaka, (veja [27], Corolário. 6.2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Já que $\mu(X_t, \sigma(t))$ é constante, pelo Teorema 3.45 temos que $\delta(X_t, \sigma(t))$ é constante, logo pela observação 3.43 X admite uma parametrização em família

$$n : \prod_{j=1}^r (\mathbb{C}_j, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0).$$

Para $j = 1, \dots, r$, denote por X^j a componente irredutível de X que é a imagem de $n_j : (\mathbb{C}_j, 0) \times (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$. Já que a multiplicidade $m_0(X_t, \sigma(t))$ é constante e a multiplicidade de X_t é a soma das multiplicidades de cada componente X^j , pela semi-continuidade superior temos que a multiplicidade m_j de X^j é constante para todo j . Para um j fixado, realizando uma mudança de coordenadas se necessário, podemos assumir que o eixo x_1 seja tangente a X^j em uma vizinhança de 0 e podemos escrever n_j como:

$$x_1(u_j, t) = u_j^{m_j}(1 + th_1(u_j, t)) \quad x_i(u_j, t) = u_j^{l_i} \varphi_i(u_j) + tu_j^{m_j} h_i(u_j, t)$$

onde $i = 2, \dots, n$, $l_i > m_j$, $\varphi_i \in \mathbb{C}\{u_j\}$ e $h_i \in \mathbb{C}\{u_j, t\}$.

Seja p um ponto em $X \setminus T$ de coordenadas $(x_1(u_j, t), \dots, x_n(u_j, t), t)$, onde p converge para 0. O limite dos espaços tangentes a X contém o limite dos vetores

$$\frac{1}{m_j u_j^{m_j-1}} \frac{\partial n^j}{\partial u_j}(p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial n^j}{\partial t}(p)$$

quando u_j e t convergem para 0, isto é, os vetores $(0, \dots, 0, 1)$ e $(1, 0, \dots, 0)$.

Então, a condição (a) de Whitney é satisfeita. Para condição (b) de Whitney, note que

$$\frac{1}{u_j^{m_j}} (x_1(u_j, t), \dots, x_n(u_j, t))$$

converge para $(1, 0, \dots, 0)$, e podemos ver de maneira análoga que a condição (b) de Whitney é satisfeita ■

Exemplo 3.56. Considere novamente a superfície $(X, 0)$ do Exemplo 3.53 parametrizada pela aplicação

$$n : (u, t) \mapsto (u^3, u^4, tu^5, t).$$

Temos que X_t é conexa para todo t e do Exemplo 3.48, temos que $\mu(X_t) = 4$ para todo t . Note que $m_0(X_t) = 3$ para todo t , logo $(X, 0)$ é Whitney equisingular, como foi verificado no Exemplo 3.53.

No caso reduzido, temos que X é Whitney equisingular se, e somente se X admite uma resolução simultânea forte. Agora, mostraremos uma generalização deste resultado para o caso genericamente reduzido.

Teorema 3.57. *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de um germe de curva singular $(X_0, 0)$ e $p : X \rightarrow T$ um bom representante com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$, tal que $X_t \setminus \sigma(t)$ seja suave para todo $t \in T$. Suponha que $(X, 0)$ seja de dimensão pura 2. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $(X, 0)$ é Whitney equisingular;
- (2) $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ admite uma resolução simultânea forte.

De uma forma independente, Greuel em [22] estudou a equivalência entre resolução simultânea forte e resolução simultânea fraca com a hipótese de multiplicidade constante. Para provar este teorema, vamos precisar do seguinte proposição:

Proposição 3.58. *Seja $p : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma deformação de um germe de genericamente reduzida $(X_0, 0)$ e $p : X \rightarrow T$ um bom representante com uma seção $\sigma : T \rightarrow X$, tal que $X_t \setminus \sigma(t)$ seja suave para todo $t \in T$. Assuma que $(X, 0)$ seja de dimensão pura 2 e que $(X, 0)$ seja topologicamente trivial. Seja $(X_1, \dots, X_m, t)$ um sistema de coordenadas locais para $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}$. Seja $(X^j, 0)$ uma componente irredutível de $(X, 0)$ e $n_j : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (X^j, 0)$ a aplicação de normalização $(X^j, 0)$. Então:*

- (a) o ideal (t) em $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$ é um ideal gerado por um sistema de parâmetros e

$$\sum_j l \left(\frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m), t)} \right) = m_0(X_0, \sigma(0)) \quad e$$

$$\sum_j e \left(t, \frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m))} \right) = m_0(X_t, \sigma(t)) \text{ para } t \neq 0.$$

- (b) X é Whitney equisingular se, e somente se $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$ é Cohen-Macaulay para todo $j = 1, \dots, r$, onde r é o número de componentes irredutíveis de X .

Demonstração: (a) Considere $n_j : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (X^j, 0)$ definido por

$$n_j(u_j, t) = (z_1(u_j, t), \dots, z_m(u_j, t), t)$$

a aplicação de normalização de $(X^j, 0)$, então a restrição $n_j : (\mathbb{C} \times \{0\}, 0) \rightarrow (X_0^j, 0)$ é o germe de aplicação da normalização da curva $(X_0^j, 0)$ com uma estrutura reduzida. Depois de uma mudança de coordenadas, podemos supor que $z_1(u_j, 0) = u_j^{s_1} \cdot \alpha_1(u_j), \dots, z_m(u_j, 0) = u_j^{s_m} \cdot \alpha_m(u_j)$, onde $\alpha_i(u_j) \in \mathbb{C}\{u_j\}$, $\alpha_i(0) \neq 0$ e $s_1 \leq \dots \leq s_m$, então $m_0(X_0^j, \sigma(0)) = s_1$. Já que X é topologicamente trivial, temos que $\sqrt{n_j^*(X_1, \dots, X_m)} = (u_j)$, isto implica que o ideal (t) é um ideal gerado por um sistema de parâmetros de $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$. Então

$$\begin{aligned} l\left(\frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m), t)}\right) &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{u_j\}}{(u_j^{s_1} \cdot \alpha_1(u_j), \dots, u_j^{s_m} \cdot \alpha_m(u_j))}\right) = \\ &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{u_j\}}{(u_j^{s_1})}\right) = s_1 = m_0(X_0^j, \sigma(0)). \end{aligned}$$

Já que X é topologicamente trivial, temos que o ideal $(n_j^*(X_1, \dots, X_m))$ em $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$ tem apenas o ideal (u_j) como ideal primo minimal. Então, pela Proposição 3.9 temos que

$$e\left(t, \frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m))}\right) = e\left(t, \frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m), u_j)}\right) \cdot l\left(\frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m))}(u_j)\right).$$

Note que

$$e\left(t, \frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m), u_j)}\right) = e(t, \mathbb{C}\{t\}) = 1.$$

Considere $n_j : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (X^j, 0)$ o germe de aplicação da normalização de $(X^j, 0)$, escreva n_j como

$$n_j(u_j, t) = (u_j^{s_1} \cdot \alpha_1(u_j) + u_j^{\beta_1} \psi_1(u_j, t), \dots, u_j^{s_m} \cdot \alpha_m(u_j) + u_j^{\beta_m} \psi_m(u_j, t)),$$

onde $\alpha_i(u_j) \in \mathbb{C}\{u_j\}$, $\alpha_i(0) \neq 0$ e $\psi_i(0, t) \neq 0$. Logo, existe u^k tal que $k = s_j$ ou $k = \beta_j$ e $k = \min\{s_1, \dots, s_m, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ para algum j , ainda mais, temos que $m_0(X_t^j, \sigma(0)) = k$ para $t \neq 0$. Logo,

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m))}(u_j)\right) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{u_j, t\}}{(u^k)}(u_j)\right) = k = m_0(X_t^j, \sigma(t)) = k$$

já que a multiplicidade de X_t em $\sigma(0)$ é a soma das multiplicidades de X_t^j em $\sigma(t)$ o resultado segue.

(b) Já que o ideal (t) é um ideal de parâmetros, temos pelo item (a), Proposição 3.10 e Teorema 3.54 que $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$ é Cohen-Macaulay para todo j se, e somente se

$$l\left(\frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m), t)}\right) = e\left(t, \frac{\mathcal{O}_2}{(n_j^*(X_1, \dots, X_m))}\right)$$

se, e somente se $m_0(X_0^j, \sigma(0)) = m_0(X_t^j, \sigma(t))$ para todo j , se, e somente se X^j é Whitney equisingular para todo j , se, e somente se X é Whitney equisingular. ■

Demonstração: (do Teorema 3.57) (1) $\Rightarrow$ (2) Seja X^j uma componente irredutível de X , é suficiente provar que X^j admite uma resolução simultânea forte para todo j , logo podemos assumir que X é irredutível. Já que X é Whitney equisingular, X admite uma parametrização em família

$$n : (\mathbb{C}, 0) \times T \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$$

definida por $n(u, t) := (x_1(u, t), \dots, x_n(u, t), t)$, onde $x_i(u, t) \in \mathbb{C}\{u, t\}$. Seja $(X_1, \dots, X_n, t)$ um sistema de coordenadas locais para $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, logo a imagem inversa de T por n é definida em uma vizinhança do 0 pelo ideal $(x_1(u, t), \dots, x_n(u, t)) = n^*(X_1, \dots, X_n)$.

Já que X é topologicamente trivial temos que $\sqrt{n^*(X_1, \dots, X_n)} = (u)$, logo $n^*(X_1, \dots, X_n)$ é um ideal (u) -primário. Já que $\mathcal{O}_2/n^*(X_1, \dots, X_n)$ é Cohen-Macaulay, $n^*(X_1, \dots, X_n)$ não tem primos associados mergulhados. Então segue que $n^*(X_1, \dots, X_n) = (u^m)$, onde m é a multiplicidade de X_0 . Logo, a afirmação segue pelo isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\mathcal{O}_{n^{-1}(0) \times T} \simeq \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{n^*(X_1, \dots, X_n, t)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{w\} \simeq \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{u^m} \simeq \mathcal{O}_{n^{-1}(T)}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Podemos assumir que X é irredutível. Suponha que X admite uma resolução simultânea forte, então X é topologicamente trivial e $n^{-1}(T)$ é isomorfo a $(n^{-1}(0)) \times T$, isto implica que

$$\mathcal{O}_{n^{-1}(0) \times T} \simeq \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{n^*(X_1, \dots, X_n, t)} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{w\} \simeq \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{(n^*(X_1, \dots, X_m))} \simeq \mathcal{O}_{n^{-1}(T)}.$$

Já que $\mathcal{O}_{n^{-1}(0) \times T}$ é Cohen-Macaulay então temos que $\mathcal{O}_2/n_j^*(X_1, \dots, X_m)$ é Cohen-Macaulay, logo o resultado segue pela Proposição 3.58. ■

3.2.7. O critério do discriminante de Zariski

Para finalizar este capítulo e completar a discussão dos diversos critérios de equisingularidade apresentados no diagrama na introdução, apresentamos o resultado que garante equivalência entre o critério do discriminante de Zariski e a Whitney equisingularidade para famílias de curvas genericamente reduzidas dado por Bobadilla, Snoussi e Spivakovsky em [5].

Definição 3.59. *Seja $(X, 0)$ um germe de superfície complexa e $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ aplicação finita. O lugar crítico de π é o conjunto de pontos em X onde a aplicação π não induz um isomorfismo local. O discriminante de π é a imagem do lugar crítico de π .*

Note que o lugar singular de uma superfície X é sempre um subconjunto do lugar crítico de qualquer aplicação finita de X para $\mathbb{C}^2$. O critério do discriminante de Zariski em dimensão dois pode ser enunciado da seguinte maneira:

Definição 3.60. *Seja $(X, 0)$ um germe de superfície complexa com um lugar singular suave $\Sigma(X)$ de dimensão 1. Dizemos que $(X, 0)$ satisfaz o **critério do discriminante de Zariski** se toda aplicação finita induzida por uma projeção genérica linear do espaço ambiente para $\mathbb{C}^2$ tem discriminante suave, considerando a estrutura reduzida.*

O discriminante de uma aplicação pode ser visto com uma estrutura algébrica usando ideais de Fitting como em [58]. O critério do discriminante de Zariski pode ser enunciado em termos da constância da multiplicidade do discriminante. O seguinte teorema nos mostra que Whitney equisingularidade é equivalente ao critério do discriminante de Zariski para superfícies. Esta equivalência já foi mostrada para interseções completas, ainda em dimensão 2, por Briançon, Galligo e Granger em [[6], Teorema III.5].

Teorema 3.61. ([5], Teorema 3.1) *Seja $(X, 0)$ um germe de superfície complexa reduzida e irredutível com um lugar singular suave $\Sigma(X)$ e de dimensão 1. A superfície X é Whitney equisingular se, e somente se satisfaz o critério do discriminante de Zariski.*

Equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$

Neste capítulo, estudamos a equisingularidade topológica e a Whitney equisingularidade de famílias de superfícies em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados.

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Dado um desdobramento a 1-parâmetro $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ de f definido por $F(x, t) = (f_t(x), t)$, assumimos que F preserva a origem, isto é, $f_t(0) = 0$ para todo t . Desta forma, temos uma família a 1-parâmetro de germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$.

Em um trabalho de 1994 ([51]), Ruas apresentou uma conjectura (4.16) cujo enunciado diz que se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é um germe de aplicação finitamente determinado, então um desdobramento F a 1-parâmetro de f é topologicamente trivial se, e somente se F é Whitney equisingular se, e somente se o número de Milnor $\mu(D(f_t))$ de $D(f_t)$ é constante, onde $D(f_t)$ é a curva de pontos duplos de f_t .

O objetivo deste capítulo é dar uma resposta completa para esta conjectura. Apresentamos contra-exemplos que mostram como uma família $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ pode ser topologicamente trivial e não ser Whitney equisingular. Mostramos também uma classe de famílias de germes aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ em que a conjectura de Ruas é verdadeira.

Iniciamos nosso estudo com uma descrição da teoria necessária para o estudo e um resumo dos principais resultados anteriores já conhecidos sobre a trivialidade topológica e a Whitney equisingularidade de uma família de germes aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Discutiremos novamente a conjectura de Ruas na seção 4.3. Os resultados originais deste capítulo podem ser encontrados em [52].

4.1. Componente de identificação e de dobra de $D(f)$

Vamos iniciar nosso estudo realizando nesta seção um estudo dos tipos de componentes irredutíveis que podem ocorrer na curva de pontos duplos $D(f)$ de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado.

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e considere a curva de pontos duplos $D(f)$ de f . A restrição $f|_{D(f)} : D(f) \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1. Seja $D(f)^j$ uma componente irredutível de $D(f)$ e considere a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$. Observamos que existem dois tipos distintos de componentes irredutíveis $D(f)^j$ de $D(f)$ em relação ao grau da restrição de f ao conjunto $D(f)^j$.

Caso (a): A restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 1-a-1. Nesse caso, existe uma outra componente irredutível $D(f)^i$ com $i \neq j$ tal que $f(D(f)^i) = f(D(f)^j)$ e a restrição de f a $D(f)^i$ também é genericamente 1-a-1. Por exemplo, considere a aplicação

$$f(x, y) = (x, y^2, x^2y - y^7).$$

Temos que $D(f) = V(x^2 - y^6)$, logo $D(f)$ tem duas componentes irredutíveis dada por $D(f)^1 = V(x - y^3)$ e $D(f)^2 = V(x + y^3)$. Note que a restrição de f ao conjunto $D(f)^i$ com $i = 1, 2$ é uma aplicação genericamente 1-a-1. Além disso, $f(D(f)^1) = f(D(f)^2) = f(D(f)) = V(Z, X^2 - Y^3) \subset \mathbb{C}^3$. Assim, podemos pensar que f “identifica” as componentes $D(f)^1$ e $D(f)^2$ em uma curva na imagem em $\mathbb{C}^3$.

Figura 4.1: Componentes de identificação de $D(f)$

Caso (b): A restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1. Por exemplo, considere a aplicação

$$f(x, y) = (x, y^2, xy).$$

Nesse exemplo, $D(f)$ é uma curva irreduzível dada por $D(f) = V(x)$ e a restrição de f a $D(f)$ (que é a única componente irreduzível) é genericamente 2-a-1. Assim, nesse caso podemos pensar que f é uma aplicação de recobrimento duplo não ramificado fora da origem quando restrita a uma componente $D(f)^j$ de $D(f)$ cuja aplicação $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ seja genericamente 2-a-1.

Figura 4.2: Componentes de dobra de $D(f)$

Inspirados nos exemplos acima, vamos dar agora a seguinte definição:

Definição 4.1. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e considere a curva uma componente irreduzível $D(f)^j$ da curva de pontos duplos $D(f)$ de f .*

(a) *Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 1-a-1, dizemos que $D(f)^j$ é uma **componente de identificação** de $D(f)$.*

(b) *Se a restrição $f|_{D(f)^j} : D(f)^j \rightarrow \mathbb{C}^3$ é uma aplicação genericamente 2-a-1, dizemos que $D(f)^j$ é uma **componente de dobra** de $D(f)$.*

Finalizamos esta seção com um último exemplo mostrando que a curva de pontos duplos $D(f)$ de um germe de aplicação finitamente determinado pode ter componentes irreduzíveis tanto de identificação quanto de dobra, isto é, os dois casos podem ocorrer em uma única $D(f)$.

Exemplo 4.2. *Considere a aplicação $f(x, y) = (x, y^2, xy^3 - x^3y)$. Nesse exemplo, $D(f) = V(xy^2 - x^3)$. Logo $D(f)$ tem três componentes irreduzíveis dadas por*

$$D(f)^1 = V(x), \quad D(f)^2 = V(x + y) \quad \text{e} \quad D(f)^3 = V(x - y).$$

Note que $D(f)^1$ é uma componente de dobra enquanto que $D(f)^2$ e $D(f)^3$ são componentes de identificação. Além disso, $f(D(f)^1) = V(Z, X)$ e $f(D(f)^2) = f(D(f)^3) = V(Z, Y - X^2)$.

Figura 4.3: Componentes de identificação e de dobra de $D(f)$

4.2. Famílias de germes de aplicações finitamente determinados

Definição 4.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Um desdobramento a 1-parâmetro de f é um germe de aplicação $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ da forma $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$ tal que $f_t(0) = 0$ e $f_0 = f$.*

Dado um desdobramento F de f , podemos definir o espaço dos pontos duplos $D^2(F)$ que será considerado em $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$ ao invés de $((\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}), 0)$, pois no caso em que f é finitamente determinado, estamos interessados em pensar no conjunto $D(F)$ como uma família de curvas $\pi : D(F) \rightarrow T$ com fibra $\pi^{-1}(t) = D(f_t)$. Consideraremos também os espaços $D^2(F)/S_2$ em $((\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C})/S_2, 0)$, $D(F)$ em $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$ e $F(D(F))$ em $(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$.

Proposição 4.4. ([13], Proposição 4.3) *Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Então, as projeções $D^2(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $D(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $D^2(F)/S_2 \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $F(D(F)) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são deformações planas das curvas $D^2(f)$, $D(f)$, $D(f)/S_2$ e $f(D(f))$, respectivamente. Ainda mais, se F é uma estabilização, então a projeção $\pi : D^2(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma suavização de $D^2(f)$.*

Definição 4.5. *Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Dizemos que F é μ -constante se $\mu(D(f_t))$ é constante ao longo de T , para $t \in T$, onde T é uma vizinhança pequena de 0 em $\mathbb{C}$.*

Definição 4.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Consideremos um desdobramento a 1-parâmetro $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ de f definido por $F(x, t) = (f_t(x), t)$ e considere $I(x, t) = (f(x), t)$ o desdobramento trivial de f . Dizemos*

que F é **topologicamente equisingular** ou que F é **topologicamente trivial** se existem germes de homeomorfismos:

$$G_1 : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \quad e \quad G_2 : (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$$

tais que G_1 e G_2 são desdobramentos de germes das aplicações identidade $g_1 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ e $g_2 : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Isto é,

$$\begin{aligned} G_1(x, t) &= (g_1(x, t), t), \quad g_1(x, 0) = x, \quad g_1(0, t) = 0 \\ G_2(x, t) &= (g_2(x, t), t), \quad g_2(x, 0) = x, \quad g_2(0, t) = 0 \end{aligned}$$

e o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \\ G_1 \uparrow & & \downarrow G_2 \\ (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{I} & (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0) \\ & \text{desdobramento} & \\ & \text{trivial de } f & \end{array}$$

Em geral, é muito difícil verificar diretamente pela definição se um desdobramento F de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado é topologicamente trivial. A seguir, apresentamos uma caracterização da trivialidade topológica de famílias de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dada por R. Bedregal, K. Houston e M.A.S. Ruas em [13] e independentemente por Bobadilla e Pe Pereira em [4], veja Teorema 4.11. Vamos precisar de algumas definições.

As próximas duas definições foram dadas por T. Gaffney em [18] para um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Restringiremos estas definições ao caso em que $(n, p) = (2, 3)$.

Definição 4.7. Dizemos que F é um desdobramento bom de f se existem vizinhanças U de 0 em $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ e W de 0 em $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$, tais que as seguintes condições ocorrem:

- (a) $F^{-1}(\{0\} \times T) = \{0\} \times T$, isto é, F mapeia $U \setminus (\{0\} \times T)$ em $W \setminus (\{0\} \times T)$.
- (b) Para todo $(z_0, t_0) \in W \setminus (\{0\} \times T)$ a aplicação $f_{t_0} : (\mathbb{C}^2, S) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é estável, onde $S = F^{-1}(z_0, t_0) \cap \Sigma F \cap U$ (que é um conjunto finito) e ΣF denota o conjunto singular do desdobramento F .

Definição 4.8. Se existe um arco de curva $\alpha(s) = (x(s), y(s), t(s))$ em $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$, contendo 0 em seu fecho, tal que $(x(s), y(s))$ é um guarda-chuva de Whitney de $f_{t(s)}$, então dizemos que F tem um arco de curva de singularidades de guarda-chuvas de Whitney passando pela origem. Analogamente, podemos definir um arco de curva de singularidades de pontos triplos passando pela origem. Veja seção 1.7 para a definição do conjunto de pontos triplos $T(f)$ e do conjunto de guarda-chuvas de Whitney $C(f)$.

A seguinte proposição é um caso particular da Proposição 3.6 de [18].

Proposição 4.9. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento bom de f . Então, as seguintes condições são equivalentes:

(a) $C(f_t)$ e $T(f_t)$ são constantes.

(b) F não tem curvas de singularidades de guarda-chuvas de Whitney ou pontos triplos passando pela origem.

Definição 4.10. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de f . Dizemos que F é um desdobramento excelente se F é um desdobramento bom e os invariantes $C(f_t)$ e $T(f_t)$ são constantes ao longo de T .

Teorema 4.11. ([13], Teorema 5.1) Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento topologicamente trivial de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado. Então

(a) Os números de Milnor

$$\mu(D(f_t)), \mu(D^2(f_t)), \mu(D^2(f_t)/S_2) \text{ e } \mu(f_t(D(f_t)))$$

são constantes.

(b) Os invariantes $C(f_t)$ e $T(f_t)$ são constantes.

Em particular, F é um desdobramento μ -constante de f .

Também em [13], temos um interessante resultado que caracteriza a equisingularidade topológica de F através do número de Milnor $\mu(D(f_t))$. Este resultado também pode ser obtido como um corolário dos principais resultados de [4].

Teorema 4.12. ([13], Teorema 6.2, [4], Corolário 32) Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) F é topologicamente equisingular.

(2) F é μ -constante.

Corolário 4.13. *Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Se $\mu(D(f_t))$ é constante, então $C(f_t)$ e $T(f_t)$ são constantes.*

A prova do corolário acima usa fórmulas do Teorema 1.58.

4.3. Whitney equisingularidade de famílias de superfícies

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Um desdobramento excelente F de f tem uma estratificação natural cujos estratos na fonte são

$$\{\mathbb{C}^2 \setminus D(F), D(F) \setminus T, T\}$$

e na meta, os estratos são:

$$\{\mathbb{C}^3 \setminus F(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}), F(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}) \setminus \overline{F(D(F))}, F(D(F)) \setminus T, T\}.$$

Notemos que F preserva a estratificação acima, isto é, F mapeia um estrato da fonte em um estrato correspondente na meta.

Definição 4.14. *Dizemos que F é Whitney equisingular se existe um representante de F que admite uma estratificação Whitney regular tal que as estratificações na fonte e na meta acima são Whitney equisingulares ao longo de T .*

Pelo segundo lema de isotopia de Thom para aplicações analíticas complexas ([20], Teorema 5.2), temos que todo desdobramento F de f que é Whitney equisingular também é topologicamente equisingular. É conhecido que a recíproca não é verdadeira (veja Exemplo 5.19).

Graças aos trabalhos de Teissier no início da década de 80 ([57] e [59]), temos uma caracterização da Whitney equisingularidade através da constância de uma sequência finita de multiplicidades polares. Alguns anos depois, em 1993 Gaffney em [18] descreveu condições necessárias e suficientes para a Whitney equisingularidade de famílias de germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Para famílias $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, Gaffney mostrou o seguinte resultado que caracteriza a Whitney equisingularidade em termos da constância de dois invariantes no caso em que f tem coposto 1 e três invariantes no caso geral:

Teorema 4.15. ([18], Teorema 8.7 e Corolário 8.9) *Se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado e F é um desdobramento a 1 parâmetro de f , então:*

(a) F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu(D(f_t))$, $m_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ são constantes.

(b) Se f tem coposto 1, F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu(D(f_t))$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ são constantes.

Onde $m_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$ é a primeira multiplicidade polar de $f_t(\mathbb{C}^2)$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ é a multiplicidade de Hilbert-Samuel $e(m_{f_t(D(f_t))}, \mathcal{O}_{f_t(D(f_t))})$ e $m_{f_t(D(f_t))}$ é o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_{f_t(D(f_t))}$ de $f_t(D(f_t))$.

Observamos que em [18], o Teorema 4.15 é enunciado em termos do invariante

$$e_D(f) = \mu(D(f)) + 2m_0(f(D(f))) - 1.$$

4.3.1. A conjectura de Ruas

Seja $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ uma família de curvas planas. Relembre do capítulo 3 que nesse caso, graças ao resultado clássico de Zariski ([66]) temos que X é topologicamente trivial se, e somente se X é Whitney equisingular. Assim, temos a seguinte pergunta natural:

Pergunta: Se $X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ é uma família de hipersuperfícies, em que condições a equisingularidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X ?

Já mencionamos anteriormente que se F é Whitney equisingular então F também é topologicamente equisingular. Ruas em 1994 [51] conjecturou que no caso de um famílias de hipersuperfícies X_t em $\mathbb{C}^3$ parametrizadas por aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados a equisingularidade topológica de X é equivalente a Whitney equisingularidade de X , e ainda que o único invariante necessário e suficiente para caracterizar a Whitney equisingularidade nesse caso é o número de Milnor $\mu(D(f_t))$ da curva de pontos duplos de f_t , mais precisamente,

Conjectura 4.16. ([51]) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento a 1 parâmetro de f . Então, F é topologicamente equisingular se, e somente se F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu(D(f_t))$ é constante.*

Tentativas sem sucesso de provar esta conjectura foram apresentadas em [13] e [50], e assim esta conjectura permaneceu aberta durante quase 25 anos. A seguir, daremos uma resposta completa para este problema. Apresentamos alguns contra-exemplos mostrando como uma família de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ pode ser topologicamente trivial e não ser Whitney equisingular. Damos também uma classe de famílias de germes de aplicações

$f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ onde a conjectura é sempre verdadeira.

Vamos introduzir a seguinte notação para uma superfície (S, s) em $\mathbb{C}^3$:

(1) Se (S, s) é um germe de espaço complexo, denotamos por $m_0(S, s)$ a multiplicidade de Hilbert-Samuel de (S, s) .

(2) Tome uma reta genérica $L \subset \mathbb{C}^3$ e considere uma projeção linear $\pi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tal que $L = \ker \pi$. A curva polar com respeito à L é definida como $P(S) = \overline{\Sigma(\pi|_{S_{reg}})}$.

(3) A multiplicidade polar é a multiplicidade da curva polar em x , isto é, $m_1(S, s) = m_0(P(S), s)$. É conhecido que $m_1(S, s)$ está bem definida e não depende de L , desde que L seja genérica.

(4) O número de Milnor transversal é definido como $\mu_1(S, s) = \mu(S \cap H, s)$, onde $H \subset \mathbb{C}^3$ é um plano genérico. Novamente, $\mu_1(S, s)$ não depende de H , desde que H seja genérico.

Seguindo [34], seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação holomorfa finito e genericamente 1-a-1. No caso em que f tem coposto 1 a imagem da diferencial $df_0(\mathbb{C}^2)$ é uma reta em $\mathbb{C}^3$ passando pela origem. Dizemos que um plano $H_0 \subset \mathbb{C}^3$ passando pela origem é *genérico* para f se as seguintes condições ocorrem:

- (1) $H_0 \cap df_0(\mathbb{C}^2) = \{0\}$ (se f tem coposto 1).
- (2) $H_0 \cap f(D(f)) = \{0\}$.
- (3) $H_0 \cap C_0(f(D(f))) = \{0\}$.
- (4) H_0 e $C_0(f(\mathbb{C}^2))$ são transversais.

Onde $C_0(X)$ denota o cone tangente de Zariski de X . O conjunto dos planos genéricos para f é um subconjunto aberto não vazio da variedade Grasmanniana de planos de $\mathbb{C}^3$ na topologia de Zariski.

Em [34], Marar e Nuño-Ballesteros mostraram que no caso em que f tem coposto 1 a Whitney equisingularidade de f_t pode ser caracterizada pela constância de três invariantes $C(f_t)$, $J(f_t)$ e $T(f_t)$, onde $J(f_t)$ é o número de tacnoides que aparecem em uma perturbação genérica da seção transversal de f_t .

Teorema 4.17. ([34], Corolário 4.7) *Seja F um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ de coposto 1. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) F é Whitney equisingular.

(b) $C(f_t)$, $J(f_t)$ e $T(f_t)$ são constantes.

Observação 4.18. Também em [34], eles mostram que se $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é finitamente determinado, então $C(f) + 2J(f) + 6T(f) = \mu(D(f)) + 2m_0(f(D(f))) - 1$. Portanto, a constância dos invariantes do lado esquerdo da igualdade ocorre se, e somente se $\mu(D(f))$ e $m_0(f(D(f)))$ são constantes.

Um resultado interessante em [18] é o seguinte lema:

Lema 4.19. ([18], Proposição 8.4 e [35], Lema 5.2) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. Se $H_0 \subset \mathbb{C}^3$ é um plano genérico para f , $Y_0 = H_0 \cap f(\mathbb{C}^2)$ e $\tilde{Y}_0$ é a curva plana em $(\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $\tilde{Y}_0 = f^{-1}(H_0)$, temos que:*

$$(a) \ m_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = \mu(\tilde{Y}_0, 0) + m_0(f(\mathbb{C}^2), 0) - 1.$$

$$(b) \ \mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = \mu(\tilde{Y}_0, 0) + 2 \cdot m_0(f(D(f)), 0).$$

O item (b) foi mostrado em [35]. Neste artigo, Marar, Nuño-Ballesteros e Peñafort-Sanchis também mostraram que a Whitney equisingularidade de f_t pode ser caracterizada pela constância de apenas dois invariantes, $\mu(D(f_t))$ e $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$.

Teorema 4.20. ([35], Teorema 5.3) *Seja F um desdobramento a 1-parâmetro de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$. Então, F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu(D(f_t))$ e $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0)$ são constantes.*

Vamos adotar a seguinte notação, $(Y_t, 0) := (f_t(\mathbb{C}^2) \cap H, 0)$ e $(\tilde{Y}_t, 0) := (f_t^{-1}(H), 0)$.

4.4. A busca de contra-exemplos

Esta é a principal seção deste capítulo, vamos apresentar agora um estudo para encontrarmos contra-exemplos para a conjectura de Ruas. Apresentamos essencialmente três contra-exemplos, cada um desses exemplos tem uma característica distinta mostrando como a conjectura pode falhar.

Queremos mostrar que existe um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ e um desdobramento $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}, 0)$ que é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular. Temos que as aplicações de coposto 1 são relativamente mais simples do que as aplicações do coposto 2, no entanto, vamos começar nosso estudo analisando o caso em que f tem coposto 2. O contra-exemplo no caso de coposto 2 foi encontrado primeiro. Além disso, as ideias envolvidas nesse caso são relativamente mais simples quando comparadas com as ideias dos outros dois contra-exemplos que apresentaremos na subseção 4.4.5.

4.4.1. O caso de coposto 2

Dado um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinado e de coposto 2, a primeira dificuldade em produzir um contra-exemplo é garantir que o desdobramento F seja topologicamente trivial. Em [16], J. Damon mostra que se f é quase-homogênea e F adiciona apenas termos de graus pesados maiores ou iguais aos de f , então F é topologicamente trivial. Assim, vamos procurar por uma aplicação f que seja quase-homogênea, ou em particular, homogênea, e assim podemos utilizar este resultado para garantir a trivialidade topológica de F .

Outra dificuldade é encontrar uma aplicação f quase-homogênea de coposto 2 conveniente. As três características: finitamente determinado, quase-homogêneas e coposto 2, criam fortes restrições e exemplos são difíceis de encontrar. Exemplos de aplicações de coposto 2 finitamente determinados são recentes.

Quando f é homogêneo, podemos encontrar em [8] e [9] resultados que garantem a existência de exemplos finitamente determinados, mas claramente existem fortes restrições para a construção destes exemplos.

Um dos primeiros trabalhos que exibem classes de exemplos de germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ finitamente determinados e de coposto 2 é o artigo [33]. Neste trabalho, Marar e Nuño-Ballesteros introduzem a classe de *aplicações de dobra dupla*. Vamos estudar a seguir esta classe de exemplos.

4.4.2. Aplicações de dobra dupla

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação e suponha que f tenha coposto 1. Sempre podemos realizar mudanças de coordenadas na fonte e na meta tais que f tenha a forma $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$. Para germes de aplicações de coposto 2, não temos nenhuma forma normal disponível na literatura. Contudo, para algumas classes especiais de germes de aplicações de coposto 2 existem algumas formas normais, por exemplo, a classe das *aplicações de dobra dupla*, isto é, os germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ da forma $f(x, y) = (x^2, y^2, p(x, y))$. De fato, realizando mudanças de coordenadas e usando o teorema de preparação de Malgrange, qualquer germe de aplicação de dobra dupla pode ser escrito na forma

$$f(x, y) = (x^2, y^2, xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2) + xyp_3(x^2, y^2)).$$

Em [33], Marar e Nuño-Ballesteros mostraram o seguinte resultado:

Proposição 4.21. ([33], Proposição 3.1) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de dobra dupla. Se f é escrito na forma $f(x, y) = (x^2, y^2, xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2) +$*

$xyp_3(x^2, y^2)$), então:

(a) A curva de pontos duplos $D(f)$ de f é dada por

$$D(f) = V((yp_3 + p_1)(xp_3 + p_2)(xp_1 + yp_2))$$

com $p_i = p_i(x^2, y^2)$.

(b) Se f é finitamente determinado, então p_1 e p_2 devem ser ambos não nulos.

(c) Se f é homogêneo e d_i é o grau do polinômio p_i , $i = 1, 2, 3$ então $d_1 = d_2 = d$ e $p_3 = 0$. Ainda mais, se p_1, p_2 e o produto p_1p_2 tem todos uma singularidade isolada na origem, então o número de Mond de f é $36d^2$.

(d) A matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é dada por

$$\begin{pmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ Xp_1 & -Z & Xp_3 & p_2 \\ Yp_2 & Yp_3 & -Z & p_1 \\ XYp_3 & Yp_2 & Xp_1 & -Z \end{pmatrix}$$

Nossa estratégia é encontrar um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ que seja quase-homogêneo e finitamente determinado. No entanto, em [33], Marar e Nuño-Ballesteros mostraram que não existem germes de aplicações de dobra dupla finitamente determinados e quase-homogêneos com pesos distintos para x e y , isto é, exceto no caso homogêneo.

Teorema 4.22. ([33], Teorema 3.4) *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de dobra dupla quase-homogêneo dado por $f(x, y) = (x^2, y^2, p(x, y))$. Se f é finitamente determinado, então f é homogêneo e o grau de $p(x, y)$ é ímpar.*

O seguinte exemplo dado em [33] mostra que germes de aplicações de dobra dupla, finitamente determinados e homogêneos ocorrem.

Exemplo 4.23. *Dado qualquer número inteiro $d = 2k + 1$, o germe de aplicação*

$$f(x, y) = (x^2, y^2, x(x^{2k} + y^{2k}) + y(x^{2k} - y^{2k}))$$

é finitamente determinado e homogêneo.

Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de dobra dupla, finitamente determinado e homogêneo, e $F = (f_t(x, y), t)$ um desdobramento topologicamente trivial de f . Já que F é topologicamente trivial, então F é Whitney equisingular se, e somente se $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2))$ é constante. Agora, lembre-se que

$$\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2)) = \mu(\tilde{Y}_t, 0) + 2m_0(f_t(D(f_t))).$$

Os invariantes $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ são semicontínuos superiormente, logo temos que $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2))$ não é constante se, e somente se $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ ou $m_0(f_t(D(f_t)))$ não são constantes. Note que em geral, não é uma tarefa fácil calcular a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $m_0(f_t(D(f_t)))$. Como o número de Milnor $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ é mais fácil de ser calculado, vamos optar por procurar uma deformação F de f que seja topologicamente trivial e tal que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não seja constante.

Os seguintes dois lemas serão úteis para o estudo de um desdobramento de uma aplicação de dobra dupla.

Lema 4.24. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado com singularidade isolada na origem. Então,*

$$\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 0 \Leftrightarrow f \text{ tem coposto } 1.$$

Demonstração: *Sejam $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$ e $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ uma projeção genérica definida por $p(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$, onde $a, b, c \neq 0$. Logo, $\tilde{Y}_0 = V(h)$, onde $h(x, y) = af_1(x, y) + bf_2(x, y) + cf_3(x, y)$, e ainda mais, é fácil ver analisando as diferenciais de f e h que*

$$\mu(\tilde{Y}_0, 0) = \mu(h(x, y), 0) = 0 \Leftrightarrow (\tilde{Y}_0, 0) \text{ é suave}$$

Então, $(\tilde{Y}_0, 0)$ é suave se, e somente se alguma função coordenada $f_i(x, y)$ de f é regular em 0, depois de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, podemos assumir que a primeira função coordenada de f é regular em 0 e f é dada por $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ com $p, q \in m_2^2$. ■

Lema 4.25. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 2. Se f é um germe de aplicação de dobra dupla, então $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 1$.*

Demonstração: *Já que f é um germe de aplicação de dobra dupla, podemos escrever f como $f(x, y) = (x^2, y^2, x \cdot p_1(x^2, y^2) + y \cdot p_2(x^2, y^2) + xy \cdot p_3(x^2, y^2))$. Seja $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ uma projeção genérica definida por $p(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$, onde $a, b, c \neq 0$. Logo, $\tilde{Y}_0 = V(h)$, onde $h(x, y) = ax^2 + by^2 + cx \cdot p_1(x^2, y^2) + cy \cdot p_2(x^2, y^2) + cxy \cdot p_3(x^2, y^2)$. Como o grau de $x \cdot p_1(x^2, y^2) + y \cdot p_2(x^2, y^2) + xy \cdot p_3(x^2, y^2)$ é maior que 2, a projeção $l : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $l(X, Y, Z) = aX + bY$ onde $a, b \neq 0$ é uma projeção genérica. Logo, $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = \mu(h')$, onde $h'(x, y) = ax^2 + by^2$, então $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 1$. ■*

Observação 4.26. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de dobra dupla, finitamente determinado, homogêneo e de coposto 2. Seja F um desdobramento a 1-parâmetro de f e suponha que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não seja constante. Pelo Lema 4.25, temos que $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 1$, como estamos supondo que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ não seja constante, então $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 0$, logo pelo Lema 4.24 segue que f_t tem coposto 1 para $t \neq 0$. Além disso, f tem coposto 2, então existe pelo menos um ponto triplo em uma estabilização de f . Escreva*

$$f_t(x, y) = (x^2 + g_1(x, y, t), y^2 + g_2(x, y, t), xp_1(x^2, y^2) + yp_2(x^2, y^2) + xyp_3(x^2, y^2) + g_3(x, y, t))$$

já que f_t tem coposto 1 para $t \neq 0$, suponha sem perda de generalidade que $f_t(x, y)$ é regular na variável x . Logo, $g_i(x, y, t) = \tilde{g}_i(x, y, t) + \alpha x$ com $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$ para algum i e temos as seguintes possibilidades:

$$(a.1) \quad g_1(x, y, t) = \tilde{g}_1(x, y, t) + \alpha x$$

$$(a.2) \quad g_2(x, y, t) = \tilde{g}_2(x, y, t) + \alpha x$$

$$(a.3) \quad g_3(x, y, t) = \tilde{g}_3(x, y, t) + \alpha x$$

Note que F não pode ser topologicamente trivial, por exemplo, nos casos (a.1) e (a.3). De fato, nesses caso f_t tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$ para $t \neq 0$, logo $T(f_t) = 0$ para todo $t \neq 0$. Já que $\mu(D(f_t))$ constante implica que $T(f_t)$ é constante, temos que F não pode ser topologicamente trivial. O caso (a.2) também não é muito promissor. Temos então a necessidade de procurar exemplos mais degenerados em outras classes.

4.4.3. O 1º contra-exemplo

Proposição 4.27. *Considere a família $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por:*

$$f_t(x, y) = (x^2 + txy, x^2y + xy^2 + y^3, x^5 + y^5).$$

Então f é finitamente determinado, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 2$ enquanto que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 1$ para $t \neq 0$, logo F não é Whitney equisingular. Ainda mais, $m_0(f_t(D(f_t))) = 22$ e $m_0(f_t(\mathbb{C}^2)) = 6$ para todo t , $\mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 46$ enquanto que $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 45$ para $t \neq 0$, $m_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 7$ enquanto que $m_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 6$ para $t \neq 0$.

Demonstração: Vamos mostrar que f é finitamente determinado, para isto denote por (x, y, x', y') um ponto em $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ e por q^n a função polinomial $q^n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $q^n(w, w') = w^n + w^{n-1}w' + \dots + ww'^{n-1} + w'^n$. Tome um representante $f : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ suficientemente pequeno do germe f . O ideal dos pontos duplos $\mathcal{I}^2(f)$ é dado por $h_1, \dots, h_6 \in \mathbb{C}\{x, y, x', y'\}$, onde:

$$\begin{aligned}
h_1(x, y, x', y') &= (x + x')(x - x') \\
h_2(x, y, x', y') &= q^4(y, y')(x + x') \\
h_3(x, y, x', y') &= q^4(x, x')(x - x') + q^4(y, y')(y - y') \\
h_4(x, y, x', y') &= (x + x') \left(2q^2(y, y') + (x + x')(y + y') + (x^2 + x'^2) \right) \\
h_5(x, y, x', y') &= q^4(y, y') \left((y + y')(x + x') + (y^2 + y'^2) \right) \\
&\quad - q^4(x, x') \left(2q^2(y, y') + (x + x')(y + y') + (x^2 + x'^2) \right) \\
h_6(x, y, x', y') &= \left((y + y')(x + x') + (y^2 + y'^2) \right) (x - x') \\
&\quad + \left(2q^2(y, y') + (x + x')(y + y') + (x^2 + x'^2) \right) (y - y')
\end{aligned}$$

A projeção $p_1 : D^2(f) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, é justamente $(x, y, x', y') \mapsto (x, y)$. Vamos usar a biblioteca em [49], desenvolvida para o programa Singular, para calcular uma matriz de apresentação de $(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})$. O ideal $\mathcal{F}_0(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})$ é o ideal gerado pelo determinante da seguinte matriz 22×22 de apresentação de $(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})$,

$$\begin{pmatrix}
y & -1 & 0 \\
0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x^2 & g_{14} & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x^3 & x^2 & x & x^2 & g_{14} & x^2 & x & 0 & x & 1 & x & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & g_{14} & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & x^2 & g_{14} & x^2 & x & 0 & x & 1 & x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & g_{14} & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & g_{36} & 0 & g_1 & 0 & g_{38} & g_2 & 0 & xy & 0 & x^2 & x & x^2 & g_{15} & x^2 & x & 0 & -x & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & g_{42} & -x^2y & 0 & 0 & g_{39} & 0 & g_3 & -x^3 & x^2 & -x & -x^2 & 0 & 0 & g_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & g_{37} & 0 & -g_1 & 0 & -x^3 & -x^2 & 0 & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & 0 & y & x & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & g_5 & 0 & g_6 & 0 & -x^4 & g_7 & g_{42} & g_8 & g_{21} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} & 0 & g_{27} & 0 & g_{28} & g_{17} & g_{29} & g_{20} \\
0 & 0 & g_{41} & 0 & g_{40} & 0 & -x^4 & g_9 & 0 & -g_1 & x^4 & -x^3 & g_{19} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & x & g_{14} & x \\
0 & 0 & g_{11} & 0 & g_{12} & 0 & x^4 & g_{13} & 2x^4 & g_{14} & g_{22} & g_{35} & g_{15} & g_{30} & g_{31} & 0 & g_{32} & 0 & g_{33} & g_{34} & g_{29} & g_{18}
\end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_1 &= x^2y + xy^2 & g_2 &= 2x^2 + xy & g_3 &= x^2 + xy & g_4 &= \frac{7}{10}x^3y + \frac{11}{10}xy^3 \\
g_5 &= \frac{-9}{10}x^2y^2 - \frac{9}{5}xy^3 & g_6 &= \frac{-13}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2y + \frac{2}{5}xy^2 & g_7 &= \frac{-11}{10}x^2y - \frac{3}{2}xy^2 & g_8 &= -2x^3 - 2x^2y \\
g_9 &= \frac{-3}{10}x^3y - \frac{9}{10}xy^3 & g_{10} &= \frac{11}{10}x^2y^2 + \frac{11}{10}xy^3 & g_{11} &= \frac{7}{10}x^3 - \frac{7}{10}x^2y - \frac{8}{5}xy^2 & g_{12} &= \frac{9}{10}x^2y + \frac{3}{2}xy^2 \\
g_{13} &= \frac{17}{5}x^2 - xy & g_{14} &= x + y & g_{15} &= 2x + y & g_{16} &= -x + y \\
ag_{17} &= \frac{-7}{5}x + y & g_{18} &= \frac{17}{10}x + y & g_{19} &= -x^2 - xy & g_{20} &= \frac{-13}{10}x \\
g_{21} &= \frac{11}{10}x^4 & g_{22} &= \frac{-9}{10}x^4 & g_{23} &= \frac{7}{5}x^3 & g_{24} &= \frac{13}{5}x^2 \\
g_{25} &= \frac{19}{10}x^3 & g_{26} &= \frac{6}{5}x^2 & g_{27} &= \frac{-14}{5}xy & g_{28} &= \frac{13}{10}x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{29} &= \frac{x}{10} & g_{30} &= \frac{-21}{10}x^3 & g_{31} &= \frac{4}{5}x^2 & g_{32} &= \frac{11}{5}xy & g_{33} &= \frac{-17}{10}x^2 & g_{34} &= \frac{8}{5}x & g_{35} &= \frac{8}{5}x^3 \\ g_{36} &= -xy^2 & g_{37} &= xy^2 & g_{38} &= 2x^3 & g_{39} &= 2x^2 & g_{40} &= -x^2y^2 & g_{41} &= -x^3y & g_{42} &= -2x^4 \end{aligned}$$

Logo

$$D(f) = V(\mathcal{F}_0(p_*\mathcal{O}_{D^2(f)})) = V(3x^{22} + 4x^{21}y + 8x^{20}y^2 + 22x^{19}y^3 + 57x^{18}y^4 + 120x^{17}y^5 + 154x^{16}y^6 + 82x^{15}y^7 - 141x^{14}y^8 - 484x^{13}y^9 - 790x^{12}y^{10} - 988x^{11}y^{11} - 1064x^{10}y^{12} - 1098x^9y^{13} - 1102x^8y^{14} - 1026x^7y^{15} - 837x^6y^{16} - 578x^5y^{17} - 333x^4y^{18} - 160x^3y^{19} - 65x^2y^{20} - 20xy^{21} - 5y^{22}).$$

Note que $\mathcal{F}_0(p_*\mathcal{O}_{D^2(f)})$ é uma função homogênea de grau 22 e com a ajuda do programa de computador Singular podemos verificar que $D(f)$ tem uma singularidade isolada na origem, logo $\mu(D(f)) = 441$ e conseqüentemente f é finitamente determinado. Agora, considere o desdobramento a 1-parâmetro $F = (f_t, t)$ de f

$$f_t(x, y) = (x^2 + txy, x^2y + xy^2 + y^3, x^5 + y^5).$$

Temos que f é homogêneo e que F apenas adiciona termos de mesmo grau. Isto implica que F é topologicamente equisingular por [16]. Escolha constantes a, b e c em $\mathbb{C}$ com $a \neq 0$ tais que a projeção $p : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $p(X, Y, Z) = aX + bY + cZ$ seja genérica para f . Desta forma, a família $(\tilde{Y}_t, 0)$ é dada por

$$(\tilde{Y}_t, 0) = V(a(x^2 + txy) + b(x^2y + xy^2 + y^3) + c(x^5 + y^5)).$$

Logo, $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 2$ e $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 1$ para $t \neq 0$, conseqüentemente F não é Whitney equisingular. Observamos que $m_0(f_t(D(f_t)))$ é constante, a saber, $m_0(f_t(D(f_t))) = 22$ para todo t . Ainda mais, temos que $m_0(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 6$ para todo t , $\mu_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 46$, $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 45$ para $t \neq 0$, $m_1(f(\mathbb{C}^2), 0) = 7$ e $m_1(f_t(\mathbb{C}^2), 0) = 6$ para $t \neq 0$. ■

É possível estender a ideia do exemplo acima a uma família de contra-exemplos da forma

$$f(x, y) = (x^m, y^n, p(x, y)).$$

4.4.4. Aplicações da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$

Nesta seção, estudamos aplicações da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$. Uma aplicação desta forma é conhecida como aplicação de reflexão. Estas aplicações foram estudadas recentemente por Peñafort-Sanchis no interessante trabalho [48]. Nesse artigo, são obtidos

novos importantes resultados sobre determinação finita e estabilidade. A seguir, vamos usar um método diferente do apresentado em [48] para estudar as aplicações da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$, seguindo de perto as ideias do trabalho de Marar e Nuño-Ballesteros em [33].

Dado um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, lembre-se que definimos $D(f) = (F_0(p_1|_{D^2(f)}))$. Uma forma alternativa de obter uma função $\lambda(x, y) \in \mathcal{O}_2$ que define $D(f)$ (isto é, $D(f) = V(\lambda(x, y))$), é utilizar a seguinte proposição:

Proposição 4.28. ([8], Proposição 2.5) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um germe de aplicação finita, e considere a imagem de f como um germe de hipersuperfície em $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ definida pelos zeros de $F : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Suponha ainda que f é uma imersão em $\mathbb{C}^n \setminus A$, onde A é um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ de codimensão 2. Então, para algum germe de função holomorfa $\lambda : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ temos que $\lambda \Delta_i = \pm \frac{\partial F}{\partial x_i}(f)$, onde Δ_i é o determinante da matriz obtida deletando a i -ésima linha da matriz Jacobiana de f . Ainda mais, $\lambda(x, y) = 0$ é uma função que define a curva de pontos duplos $D(f) \subset \mathbb{C}^n$.*

Em particular, dado um germe de aplicação finito $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, escrito na forma

$$f(x, y) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$$

então uma função $\lambda(x, y)$ que define $D(f) \subset \mathbb{C}^2$ é obtida definindo $\lambda(x, y) = F_Z^*/\eta$, onde F_Z^* é a derivada parcial de $F(X, Y, Z)$ com relação a variável Z restrita a imagem de f , isto é, $F_Z^* = F_Z(X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$ e η é o determinante 2×2 da matriz das derivadas parciais de X e Y

$$\eta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Como no caso das aplicações de dobra dupla, através de mudanças de coordenadas na fonte e na meta, e usando o teorema de preparação de Malgrange, toda aplicação da forma $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} f(x, y) = & (x^n, y^m, xp_1 + x^2p_2 + \cdots + x^{n-1}p_{n-1} + \\ & yp_n + xyp_{n+1} + \cdots + x^{n-1}yp_{n+(n-1)} + \\ & y^2p_{2n} + xy^2p_{2n+1} + \cdots + x^{n-1}y^2p_{2n+(n-1)} + \\ & \vdots \\ & y^{m-1}p_{(m-1)n} + xy^{m-1}p_{(m-1)n+1} + \cdots + x^{n-1}y^{m-1}p_{(m-1)n+(n-1)}) \end{aligned}$$

com $p_i = p_i(x^n, y^m)$. A seguinte proposição será muito útil no estudo de valores particulares de (n, m) de aplicações da forma acima. Na procura de contra-exemplos, esta proposição tem facilitado uma boa parte dos cálculos envolvidos.

Proposição 4.29. *Seja $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$ um germe de aplicação. Se f é escrita na forma*

$$\begin{aligned} f(x, y) = & (x^n, y^m, xp_1 + x^2p_2 + \cdots + x^{n-1}p_{n-1} + \\ & yp_n + xyp_{n+1} + \cdots + x^{n-1}yp_{n+(n-1)} + \\ & y^2p_{2n} + xy^2p_{2n+1} + \cdots + x^{n-1}y^2p_{2n+(n-1)} + \\ & \vdots \\ & y^{m-1}p_{(m-1)n} + xy^{m-1}p_{(m-1)n+1} + \cdots + x^{n-1}y^{m-1}p_{(m-1)n+(n-1)}) \end{aligned}$$

com $p_i = p_i(x^n, y^m)$, então uma matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é dada por

$$M(f) = \begin{pmatrix} A & C_1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} \\ B_1 & A & C_1 & C_2 & \vdots \\ B_2 & B_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & B_2 & \ddots & & C_2 \\ & & \ddots & & C_1 \\ B_{m-1} & \cdots & & B_2 & B_1 & A \end{pmatrix}_{nm \times nm}$$

onde A, B_j e C_j são matrizes $n \times n$, com $1 \leq j \leq m-1$ definidas por

$$A = \begin{pmatrix} -Z & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ Xp_{n-1} & -Z & p_1 & p_2 & \vdots \\ Xp_{n-2} & Xp_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & Xp_{n-2} & \ddots & & p_2 \\ & & \ddots & & p_1 \\ Xp_1 & \cdots & & Xp_{n-2} & Xp_{n-1} & -Z \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$B_j = \begin{pmatrix} Yp_{(m-j)n} & Yp_{(m-j)n+1} & \cdots & & Yp_{(m-j)n+(n-1)} \\ XYp_{(m-j+1)n-1} & Yp_{(m-j)n} & Yp_{(m-j)n+1} & & \\ & XYp_{(m-j+1)n-1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & Yp_{(m-j)n+1} \\ XYp_{(m-j+1)n-(n-1)} & \cdots & & XYp_{(m-j+1)n-1} & Yp_{(m-j)n} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

$$C_j = \begin{pmatrix} p_{nj} & p_{nj+1} & \cdots & & p_{nj+(n-1)} \\ Xp_{nj+(n-1)} & p_{nj} & p_{nj+1} & & \\ & Xp_{nj+(n-1)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & p_{nj+1} \\ Xp_{nj+1} & \cdots & & Xp_{nj+(n-1)} & p_{nj} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

com $p_i = p_i(X, Y)$.

Demonstração: Dado $f(x, y) = (x^n, y^m, p(x, y))$, onde $p = p(x, y)$ está escrito como acima, vamos usar o método explicado na seção 1.5 para encontrar uma matriz de apresentação $M(f)$ de $f_*\mathcal{O}_2$. Como a aplicação $\tilde{f} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\tilde{f}(x, y) = (x^n, y^m)$ é finita, então

$$\begin{aligned} g_0 &= 1, \quad g_1 = x, \quad \cdots, \quad g_{n-1} = x^{n-1} \\ g_n &= y, \quad g_{n+1} = xy, \quad \cdots, \quad g_{n+(n-1)} = x^{n-1}y \\ &\vdots \\ g_{(m-1)n} &= y^{m-1}, \quad g_{(m-1)n+1} = xy^{m-1}, \quad \cdots, \quad g_{(m-1)n+(n-1)} = x^{n-1}y^{m-1} \end{aligned}$$

são geradores de $f_*\mathcal{O}_2$. Precisamos encontrar $a_{ij} \in \mathcal{O}_2$ onde $0 \leq i, j \leq mn - 1$ satisfazendo

$$pg_i = \sum_{j=1} \tilde{f}(a_{ij})g_j.$$

Seja $P_i \in \mathcal{O}_2$ tal que $p_i = \tilde{f}_*(P_i)$, isto é, $P_i = p_i(X, Y)$. Para $i = 0$, temos que

$$pg_i = \sum_{j=1} (\alpha_{ij} \circ \tilde{f})g_j.$$

Para $i = 0$, temos que

$$pg_0 = xp_1 + x^2p_2 + \cdots + x^{n-1}y^{m-1}p_{(m-1)n+(n-1)} = \\ 0.g_0 + \tilde{f}(P_1)g_1 + \tilde{f}(P_2)g_2 + \cdots + g_{(m-1)n+(n-1)}\tilde{f}(P_{(m-1)n+(n-1)}).$$

Assim, os elementos da primeira linha são

$$-Z, P_1, P_2, \dots, P_{(m-1)n+(n-1)}.$$

Aplicando o mesmo procedimento, podemos calcular pg_i para $i = 1, \dots, mn - 1$. Substituindo $P_i = p_i(X, Y)$ obtemos a matriz $M(f)$ acima. ■

Vamos estudar o caso $(n, m) = (2, 3)$. Nesse caso, temos que toda aplicação da forma $f(x, y) = (x^2, y^3, p(x, y))$ pode ser escrita na forma

$$f(x, y) = (x^2, y^3, xp_1 + yp_2 + xyp_3 + y^2p_4 + xy^2p_5)$$

com $p_i = p_i(x^2, y^3)$. Um resultado análogo ao caso das aplicações de dobra dupla é o seguinte:

Proposição 4.30. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação da forma $f(x, y) = (x^2, y^3, p(x, y))$. Escreva f na forma $f(x, y) = (x^2, y^3, xp_1 + yp_2 + xyp_3 + y^2p_4 + xy^2p_5)$. Então:*

(a) *A matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é dada por*

$$\begin{pmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ Xp_1 & -Z & Xp_3 & p_2 & Xp_5 & p_4 \\ Xp_4 & Yp_5 & -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ XYp_5 & Yp_4 & Xp_1 & -Z & Xp_3 & p_2 \\ Yp_2 & Yp_3 & Yp_4 & Yp_5 & -Z & p_1 \\ XYp_3 & Yp_2 & XYp_5 & Yp_4 & Xp_1 & -Z \end{pmatrix}$$

com $p_i = p_i(X, Y)$.

(b) *A curva de pontos duplos $D(f)$ é definida por $D(f) = V(\lambda(x, y))$, onde*

$$\lambda(x, y) = h_1(x, y)h_2(x, y)h_3(x, y)$$

e $h_i(x, y)$ é definido como

$$h_1(x, y) = (p_1 + yp_3 + y^2p_5)$$

$$h_2(x, y) = (p_5x + p_4)^2y^2 + (p_5x + p_4)(p_3x + p_2)y + (p_3x + p_2)^2$$

$$h_3(x, y) = (4p_1^2 + 2p_1p_3y + (p_3^2 + 2p_1p_5)y^2 - p_3p_5y^3 + p_5^2y^4)x^2 + (6p_1p_2y + 6p_1p_4y^2 + 3(p_3p_4 + p_2p_5)y^3)x + 3(p_2^2y^2 + p_2p_4y^3 + p_4y^4).$$

(c) Se f é finitamente determinado, então $p_1 \neq 0$ e um dos itens abaixo ocorre:

(c.1) $p_2(0, 0) \neq 0$ e $p_j = 0$ para $j \geq 3$, nesse caso, f tem coposto 1.

(c.2) $p_2, p_3 \neq 0$ e $p_4, p_5 = 0$.

(c.3) $p_2, p_4 \neq 0$ e $p_3, p_5 = 0$.

(c.4) $p_2, p_5 \neq 0$ e $p_3, p_4 = 0$.

(c.5) $p_3, p_4 \neq 0$ e $p_2, p_5 = 0$.

(c.6) Apenas um p_j é nulo, com $j \geq 2$.

(c.7) Nenhum p_j é nulo.

Em outras palavras, se $p_1, p_3, p_5 \neq 0$ e $p_2 = p_4 = 0$ ou se $p_1, p_4, p_5 \neq 0$ e $p_2 = p_3 = 0$, então f não é finitamente determinado.

Demonstração: (a) A matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é obtida usando a Proposição 4.29.

(b) A imagem de f é definida por $f(\mathbb{C}^2) = V(F(X, Y, Z))$, onde F é o determinante da matriz de apresentação de $f_*\mathcal{O}_2$ (veja [42]). Assim, temos que $F(X, Y, Z) = Z^6 + q_4Z^4 + q_3Z^3 + q_2Z^2 + q_1Z + q_0$, onde

$$\begin{aligned} q_4 &= -3Xp_1^2 - 6Yp_2p_4 - 6XYp_3p_5, \\ q_3 &= -2Yp_2^3 - 6XYp_2p_3^2 - 12XYp_1p_2p_4 - 2Y^2p_4^3 - 12XYp_1p_2p_5 - 6XY^2p_4p_5^3, \\ q_2 &= 3X^2p_1^4 - 18XYp_1p_2^2p_3 + 9Y^2p_2^2p_4^2 - 6X^2Yp_1p_3^3 - 9XY^2p_3^2p_4^2 - 18XY^2p_1p_4^2p_5 - \\ &\quad 9XY^2p_2^2p_5^2 - 6X^2Y^2p_1p_5^3 + 9X^2Y^2p_3^2p_5^2, \\ q_1 &= -6XYp_1^2p_2^3 + 6Y^2p_2^4p_4 - 18X^2Yp_1^2p_2p_3^2 + 12X^2Yp_1^3p_3p_4 - 6XY^2p_1^2p_4^3 + 6Y^3p_2p_4^4 + \\ &\quad 12X^2Yp_1^3p_2p_5 - 12XY^2p_2^3p_3p_5 - 6X^2Y^2p_3^4p_4 + 12X^2Y^2p_2p_3^3 - 12XY^3p_3^3p_4p_5 + \\ &\quad 12X^2Y^3p_3p_4p_5^3 - 6X^2Y^3p_2p_5^4, \\ q_0 &= Y^2p_2^6 - X^3p_1^6 - 6X^2Yp_1^3p_2^2p_3 - 3XY^2p_2^4p_3^2 + 6X^2Yp_1^4p_2p_4 + 12XY^2p_1p_2^3p_3p_4 - \\ &\quad 9XY^2p_1^2p_2^2p_4^2 + 2Y^3p_2^3p_4^3 - 6XY^2p_1p_2^4p_5 - 2X^3Yp_1^3p_3^3 + 3X^2Y^2p_2^2p_3^4 - 12X^2Y^2p_1p_2p_3^3p_4 + \\ &\quad 9X^2Y^2p_1^2p_3^2p_4^2 + 6XY^3p_2p_3^2p_4^3 - 6XY^3p_1p_3p_4^4 + Y^4p_4^6 + 6X^3Yp_1^4p_3p_5 - 6X^2Y^2p_1^3p_4^2p_5 - \\ &\quad 18XY^3p_2^2p_3^2p_4p_5 + 12XY^3p_1p_2p_3^3p_5 + 9X^2Y^2p_1^2p_2^2p_5^2 + 6XY^3p_2^2p_4p_5^2 + X^3Y^2p_3^6 + \\ &\quad 6X^3Y^2p_1p_3^4p_5 - 6X^2Y^3p_3^3p_4p_5 - 9X^3Y^2p_1^2p_3^2p_5^2 + 18X^2Y^3p_2p_3^2p_4p_5^2 - 3XY^4p_4^4p_5^2 - 2X^3Y^2p_1^3p_5^3 - \\ &\quad 6X^2Y^3p_2^2p_3p_5^3 - 12X^2Y^3p_1p_2p_4p_5^3 - 2X^3Y^3p_3^3p_5^3 + 6X^3Y^3p_1p_3p_5^4 + 3X^2Y^4p_4^2p_5^4 - X^3Y^4p_5^6. \end{aligned}$$

Agora usamos a Proposição 4.28, derivamos F com relação à Z e realizamos as substituições

$X = x^2, Y = y^3$ e $Z = xp_1 + yp_2 + xyp_3 + y^2p_4 + xy^2p_5$ para obtermos F_Z^* , isto é, a derivada de F restrita a imagem de f . Assim, $F_Z^* = h_1h_2h_3h_4h_5$, onde

$$h_1(x, y) = (p_1 + yp_3 + y^2p_5)$$

$$h_2(x, y) = (p_5x + p_4)^2y^2 + (p_5x + p_4)(p_3x + p_2)y + (p_3x + p_2)^2$$

$$h_3(x, y) = (4p_1^2 + 2p_1p_3y + (p_3^2 + 2p_1p_5)y^2 - p_3p_5y^3 + p_5^2y^4)x^2 + (6p_1p_2y + 6p_1p_4y^2 + 3(p_3p_4 + p_2p_5)y^3)x + 3(p_2^2y^2 + p_2p_4y^3 + p_4y^4)$$

$$h_4 = x$$

$$h_5 = y^2$$

Logo, $D(f) = V(F_Z^*/\eta) = (F_Z^*/(xy^2)) = V(h_1h_2h_3)$.

(c) Se $p_1 = 0$, então $D(f)$ é dada por $D(f) = V(y^3h(x, y))$, onde h depende dos p_i , logo $D(f)$ não é reduzida e portanto f não pode ser finitamente determinado.

Suponha agora que $p_1 \neq 0$:

- Se $p_2 \neq 0$ e $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$, então

$$D(f) = V(p_1p_2^2(4p_1^2x^2 + 6p_1p_2xy + 3p_2^2y^2)).$$

Logo $p_2(0, 0) \neq 0$, caso contrário $D(f)$ não seria reduzida. Como consequência, f tem coposto 1.

- Se $p_3, p_5 \neq 0$ e $p_2, p_4 = 0$, então

$$D(f) = V(x^3h_1(p_5y^2 + p_3p_5xy + p_3^2x)(4p_1^2 + 2p_1p_3y + p_3^2y^2 + 2p_1p_2y^2 - p_3p_5y^3 + p_5^2y^4)).$$

- Se $p_4, p_5 \neq 0$ e $p_2, p_3 = 0$, então

$$D(f) = V(y^2(p_5x + p_4)^2h_1h_3).$$

Assim, nos casos acima, $D(f)$ não é reduzida, e portanto f não é finitamente determinado. ■

Vamos ver um exemplo em que $p_1, p_2, p_4 \neq 0$ e $p_3 = p_5 = 0$.

Exemplo 4.31. Considere a família f_t definida por

$$f_t(x, y) = (x^2 + ty^2, y^3, x(x^6 + y^6) + y(x^6 - y^6) + y^2(x^2y^3)).$$

Então, usando argumentos análogos aos usados na seção anterior e também a proposição anterior temos que f é finitamente determinado, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = 2$ enquanto que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 1$ para $t \neq 0$, logo F não é Whitney equisingular.

Observação 4.32. Em [48], Peñafort-Sanchis mostrou que se n, m, k são coprimos em pares, então o germe de aplicação

$$f(x, y) = (x^n, y^m, (x + y)^k)$$

é finitamente determinado. Assim, sejam $2 \leq n < m < k$ coprimos em pares e considere o germe de aplicação $f(x, y) = (x^n, y^m, (x + y)^k)$. Uma maneira de conseguir uma classe de contra-exemplos para a conjectura com a propriedade de que $\mu(\tilde{Y}_0, 0) > \mu(\tilde{Y}_t, 0)$ com $t \neq 0$, é considerar a seguinte deformação:

$$f(x, y) = (x^n + ty^n, y^m, (x + y)^k).$$

Novamente vamos usar o argumento que f é homogênea e a deformação adiciona apenas um termo de mesmo grau na primeira função coordenada, a família f_t é topologicamente trivial, além disso temos que

$$\mu(\tilde{Y}_0, 0) = (n - 1)(m - 1) > (n - 1)(n - 1) = \mu(\tilde{Y}_t, 0)$$

para $t \neq 0$, logo f_t não é Whitney equisingular.

4.4.5. O 2º e o 3º contra-exemplos

Até agora, mostramos que $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2))$ pode variar quando F é topologicamente trivial, mostrando exemplos em que $\mu(\tilde{Y}_t, 0)$ varia. Mesmo que $\mu(D(f_t))$ seja constante, a multiplicidade da imagem da curva de pontos duplos $m_0(f_t(D(f_t)))$ também pode variar. Vamos dar exemplos tanto no caso de coposto 1 quanto no caso de coposto 2 deste fato.

A seguinte proposição foi inspirada na Proposição 3.51.

Proposição 4.33. Considere a família $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por

$$f_t(x, y) = (x^3, y^5, x^2 - xy + y^2 + tx^2).$$

Então f é finitamente determinado, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, $m_0(f(D(f))) = 23$ enquanto que $m_0(f_t(D(f_t))) = 22$ para $t \neq 0$, logo F não é Whitney equisingular. Ainda mais, $\mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = 47$ enquanto que $\mu_1(f_t(\mathbb{C}^2)) = 45$ para $t \neq 0$.

Demonstração: De fato, vamos mostrar que f é finitamente determinado, usando a Proposição 4.29, temos que uma matriz de apresentação para $f_*\mathcal{O}_2$ como um $\mathcal{O}_3$ –módulo é dada por

$$\begin{pmatrix} -Z & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -Z & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & -X & 0 & 0 \\ 0 & -Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z & 0 \\ -XY & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & -Z \end{pmatrix}$$

Logo, temos que

$$f(\mathbb{C}^2) = V(F(X, Y, Z)) = V(Y^6 + 15XY^5Z + 2X^5Y^3 + 90X^2Y^4Z^2 + 15X^6Y^2Z + 245X^3Y^3Z^3 - 3Y^4Z^5 + X^{10} + 15X^7YZ^2 + 300X^4Y^2Z^4 - 80XY^3Z^6 - 5X^8Z^3 + 72X^5YZ^5 - 345X^2Y^2Z^7 + 10X^6Z^6 - 270X^3YZ^8 + 3Y^2Z^{10} - 10X^4Z^9 - 60XYZ^{11} + 5X^2Z^{12} - Z^{15}).$$

A derivada de F com relação à variável Z restrita à imagem de F , que denotamos por F_Z^* , é dada por

$$\begin{aligned} F_Z^* = & 81x^{24}y^4 - 648x^{23}y^5 + 2889x^{22}y^6 - 9072x^{21}y^7 + 22311x^{20}y^8 - 45036x^{19}y^9 + \\ & 76968x^{18}y^{10} - 113304x^{17}y^{11} + 145672x^{16}y^{12} - 165076x^{15}y^{13} + 166501x^{14}y^{14} - \\ & 150753x^{13}y^{15} + 123894x^{12}y^{16} - 93297x^{11}y^{17} + 64996x^{10}y^{18} - 41905x^9y^{19} + 24865x^8y^{20} - \\ & 13280x^7y^{21} + 6230x^6y^{22} - 2450x^5y^{23} + 775x^4y^{24} - 175x^3y^{25} + 25x^2y^{26}. \end{aligned}$$

Dividindo por $\eta(x, y) = x^2y^4$, encontramos uma função $\lambda(x, y)$ homogênea de grau 22 que define $D(f)$.

$$\begin{aligned} D(f) = & V(81x^{22} - 648x^{21}y + 2889x^{20}y^2 - 9072x^{19}y^3 + 22311x^{18}y^4 - 45036x^{17}y^5 + \\ & 76968x^{16}y^6 - 113304x^{15}y^7 + 145672x^{14}y^8 - 165076x^{13}y^9 + 166501x^{12}y^{10} - 150753x^{11}y^{11} + \\ & 123894x^{10}y^{12} - 93297x^9y^{13} + 64996x^8y^{14} - 41905x^7y^{15} + 24865x^6y^{16} - 13280x^5y^{17} + \\ & 6230x^4y^{18} - 2450x^3y^{19} + 775x^2y^{20} - 175xy^{21} + 25y^{22}). \end{aligned}$$

Com a ajuda de um computador, podemos verificar que $D(f)$ é reduzida e $\mu(D(f)) = 441$, logo f é finitamente determinado. Agora considere a seguinte deformação

$$f_t(x, y) = (x^3, y^5, x^2 - xy + y^2 + tx^2).$$

Como f é homogênea e a deformação f_t adiciona apenas um termo de mesmo grau na terceira função coordenada, segue que f_t é topologicamente trivial. Novamente podemos usar o Teorema 4.29 para calcular uma matriz de apresentação de $f_{t*}\mathcal{O}_2$ como um $\mathcal{O}_3$ módulo, e assim podemos calcular a equação que define $f_{t*}\mathcal{O}_2$. A matriz de apresentação de $f_{t*}\mathcal{O}_2$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -Z & 0 & 1+t & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ gX & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & gX & -Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1+t & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gX & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1+t & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1+t & 0 & -1 & 0 \\ 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & X & 0 & 0 \\ 0 & Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z & 0 & 1+t \\ 0 & 0 & Y & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z & 0 \\ -XY & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gX & -Z \end{pmatrix}$$

onde $g = (1+t)$, logo

$$f_t(\mathbb{C}^2) = V(F_t(X, Y, Z)) = V(Y^6 + h_1XY^5Z + h_2X^5Y^3 + h_3X^2Y^4Z^2 + h_4X^6Y^2Z + h_4X^3Y^3Z^3 - 3Y^4Z^5 + h_6X^{10} + h_7X^7YZ^2 + h_8X^4Y^2Z^4 + h_9XY^3Z^6 + h_{10}X^8Z^3 + h_{11}X^5YZ^5 + h_{12}X^2Y^2Z^7 + h_{13}X^6Z^6 + h_{14}X^3YZ^8 + 3Y^2Z^{10} + h_{15}X^4Z^9 + h_{16}XYZ^{11} + h_{17}X^2Z^{12} - Z^{15})$$

onde

$$h_1(x, y) = 30t + 15$$

$$h_2(x, y) = 15t^7 - 35t^6 - 147t^5 - 135t^4 - 20t^3 + 30t^2 + 15t + 2$$

$$h_3(x, y) = 30t^3 + 315t^2 + 315t + 90$$

$$h_4(x, y) = 15t^9 - 90t^8 - 735t^7 - 1785t^6 - 2070t^5 - 1125t^4 - 75t^3 + 225t^2 + 105t + 15$$

$$h_5(x, y) = 375t^4 + 1600t^3 + 2145t^2 + 1215t + 245$$

$$h_6(x, y) = t^{15} + 15t^{14} + 105t^{13} + 455t^{12} + 1365t^{11} + 3003t^{10} + 5005t^9 + 6435t^8 + 6435t^7 + 5005t^6 + 3003t^5 + 1365t^4 + 455t^3 + 105t^2 + 15t + 1$$

$$h_7(x, y) = -90t^{10} - 750t^9 - 2745t^8 - 5760t^7 - 7560t^6 - 6300t^5 - 3150t^4 - 720t^3 + 90t^2 + 90t + 15$$

$$h_8(x, y) = 135t^6 + 1260t^5 + 3900t^4 + 5775t^3 + 4500t^2 + 1800t + 300$$

$$h_9(x, y) = 15t - 80$$

$$h_{10}(x, y) = -5t^{12} - 60t^{11} - 330t^{10} - 1100t^9 - 2475t^8 - 3960t^7 - 4620t^6 - 3960t^5 - 2475t^4 - 1100t^3 - 330t^2 - 60t - 5$$

$$h_{11}(x, y) = 135t^7 + 1035t^6 + 3222t^5 + 5310t^4 + 4995t^3 + 2655t^2 + 720t + 72$$

$$h_{12}(x, y) = 90t^3 + 45t^2 - 330t - 345$$

$$h_{13}(x, y) = 10t^9 + 90t^8 + 360t^7 + 840t^6 + 1260t^5 + 1260t^4 + 840t^3 + 360t^2 + 90t + 10$$

$$h_{14}(x, y) = -225t^3 - 720t^2 - 765t - 270$$

$$h_{15}(x, y) = -10t^6 - 60t^5 - 150t^4 - 200t^3 - 150t^2 - 60t - 10$$

$$h_{16}(x, y) = -45t - 60$$

$$h_{17}(x, y) = 5t^3 + 15t^2 + 15t + 5$$

Vamos considerar o plano H definido por $X - Z = 0$ que nesse exemplo é genérico para f . Assim, a família de curvas $(H \cap f_t(\mathbb{C}^2)) = ((Y_0)_t, 0)$ é definida nas coordenadas U e W (no plano $X - Z = 0$) pela seguinte equação

$$\begin{aligned} ((Y_0)_t) = V(W^6 + h_1U^2W^5 + h_2U^5W^3 + h_3U^4W^4 + h_4U^7W^2 + h_5U^6W^3 - 3U^5W^4 + \\ h_6U^{10} + h_7U^9W + h_8U^8W^2 + h_9U^7W^3 + h_{10}U^{11} + h_{11}U^{10}W + h_{12}U^9W^2 + h_{13}U^{12} + \\ h_{14}U^{11}W + 3U^{10}W^2 + h_{15}U^{13} + h_{16}U^{12}W + h_{17}U^{14} - U^{15}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\mu(Y_0, 0) = 47$ enquanto que $\mu(Y_t, 0) = 45$ para $t \neq 0$, logo f_t não é Whitney equisingular. Note que $\mu(\tilde{Y}_t, 0) = 1$ para todo t . Além disso, usando a fórmula do item (b) do Lema 4.19, temos que $m_0(f(D(f))) = 23$ enquanto que $m_0(f_t(D(f_t))) = 22$ para $t \neq 0$.

Veja também que $D(f) = V(\prod_{j=1}^{22}(x - \alpha_j y))$, onde todos os $\alpha_j \in \mathbb{C}$ são distintos. A curva de pontos duplos $D(f)$ tem 22 componentes de identificação, logo $f(D(f))$ tem 11 componentes irredutíveis. A imagem de uma componente irredutível $D(f)^j$ de $D(f)$ pode ser parametrizada pela seguinte aplicação

$$g_j(y) = (\alpha_j^3 y^3, y^5, (\alpha_j^2 - \alpha_j + 1)y^2)$$

logo a multiplicidade de $f(D(f)^j)$ é igual a 2 sempre que $(\alpha_j^2 - \alpha_j + 1)y^2 \neq 0$. Uma das principais ideias deste exemplo é que f foi construída para que existam duas componentes irredutíveis de $D(f)$, digamos, $D(f)^1$ e $D(f)^2$ tais que

$$(x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) = x^2 - xy + y^2$$

e que são componentes de identificação de $D(f)$, isto é, $f(D(f)^1) = f(D(f)^2)$. Assim, $m_0(f(D(f)^j)) = 2$ para todo $j \neq 1, 2$ e $m_0(f(D(f)^1)) = m_0(f(D(f)^2)) = 3$, já que $\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1 =$

$\alpha_2^2 - \alpha_2 + 1 = 0$. Logo a multiplicidade de $f(D(f))$ é 23. Agora, quando consideramos a deformação f_t , todas as imagens $f_t(D(f_t)^j)$ tem multiplicidade 2, já que as componentes $D(f)^1$ e $D(f)^2$ não sofrem deformações e a última função coordenada de f agora é $f_3(x, y) = x^2 - xy + y^2 + tx^2$. ■

Para o caso em que f tem coposto 1, iremos precisar da seguinte proposição:

Proposição 4.34. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação de coposto 1. Se f pode ser escrito na forma*

$$f(x, y) = (x, y^4, yp_1(x, y^4) + y^2p_2(x, y^4) + y^3p_3(x, y^4)).$$

Então

(a) A matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_2)$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é dada por

$$\begin{pmatrix} -Z & p_1 & p_2 & p_3 \\ Yp_3 & -Z & p_1 & p_2 \\ Yp_2 & Yp_3 & -Z & p_1 \\ Yp_1 & Yp_2 & Yp_3 & -Z \end{pmatrix}$$

onde $p_i = p_i(X, Y)$.

(b) A imagem de $\mathbb{C}^2$ pela aplicação f é dada por

$$f(\mathbb{C}^2) = V(Z^4 - 2YZ^2(p_2^2 + 2p_1p_3) + Y^2(p_2^4 - 4p_1p_2^2p_3 + 2p_1^2p_3^2) + Y(-p_1^4 - 4Zp_1^2p_2 - 4YZp_2p_3^2 - Y^2p_3^4))$$

onde $p_i = p_i(X, Y)$.

(c) A curva de pontos duplos $D(f)$ de f é dada por

$$D(f) = V((p_1 + y^2p_3)(p_1^2 + 2yp_1p_2 + 2y^2p_2^2 + 2y^3p_2p_3 + y^4p_3^2))$$

onde $p_i = p_i(x, y^4)$.

(d) A imagem da curva de pontos duplos é dada por $f(D(f)) = V(g_1g_2g_3g_4)$, onde $g_i(X, Y, Z)$ são

$$\begin{aligned}
g_1 &= Z^3 - Yp_1^2p_2 - YZp_2^2 - 2YZp_1p_3 - Y^2p_2p_3^2 \\
g_2 &= Z^2p_1 + Yp_1p_2^2 - Yp_1^2p_3 + 2YZp_2p_3 + Y^2p_3^3 \\
g_3 &= Zp_1^2 + Z^2p_2 - Yp_2^3 + 2Yp_1p_2p_3 + YZp_3^2 \\
g_4 &= p_1^3 + 2Zp_1p_2 + Z^2p_3 + Yp_2^2p_3 - Yp_1p_3^2
\end{aligned}$$

onde $p_i = p_i(X, Y)$.

(e) Se f é finitamente determinado, então p_1 é não nulo.

Demonstração: A prova segue seguindo o mesmo procedimento da demonstração da Proposição 4.30, apenas observe que para o item (d), a curva de pontos duplos na imagem $f(D(f))$ é dada por $f(D(f)) = V(\mathcal{F}_1(f_*\mathcal{O}_2))$. ■

A seguinte proposição também foi inspirada na Proposição 3.51.

Proposição 4.35. *Considere a família*

$$f_t(x, y) = (x, y^4, y(x^5 + xy^4) + y^2(y^4) + y^3(ty^4)).$$

Então f é finitamente determinado, $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial, $m_0(f(D(f))) = 9$ enquanto que $m_0(f_t(D(f_t))) = 8$ para $t \neq 0$, logo F não é Whitney equisingular. Ainda mais, $\mu(D(f_t)) = 196$ para todo t , $J(f) = 39$ enquanto que $J(f_t) = 38$ para $t \neq 0$, logo $\mu(D(f_t))$ constante não implica que $J(f_t)$ seja constante.

Demonstração: De fato, pela Proposição 4.34, temos que $D(f)$ é uma curva homogênea de grau 15 dada por

$$D(f) = V(x^{15} + 3x^{11}y^4 + 2x^{10}y^5 + 3x^7y^8 + 4x^6y^9 + 2x^5y^{10} + x^3y^{12} + 2x^2y^{13} + 2xy^{14}).$$

Note que $D(f)$ tem singularidade isolada, e $\mu(D(f)) = 196 = (14)^2$, assim f é finitamente determinado. Além disso, $f(D(f))$ é dada pelas seguintes equações

$$\begin{aligned}
f(D(f)) = V(YZ^2 - Y^4 + X^2Y^2Z + 2X^6YZ + X^{10}Z, & Z^3 - Y^3Z - X^2Y^4 - 2X^6Y^3 - X^{10}Y^2, \\
& 2XY^2Z + X^3Y^3 + 2X^5YZ + 3X^7Y^2 + 3X^{11}Y + X^{15}, \\
& 2XY^4 - X^3Y^2Z + X^5Z^2 + X^5Y^3 - 2X^7YZ - X^{11}Z).
\end{aligned}$$

Logo, $m_0(f(D(f))) = 9$. Agora considere a seguinte deformação de f :

$$f_t(x, y) = (x, y^4, y(x^5 + xy^4) + y^2(y^4) + y^3(ty^4)).$$

Como f é homogênea e f_t é uma deformação de f que adiciona apenas um termo de grau maior, segue que f_t é topologicamente trivial. Além disso, $f_t(D(f_t))$ é dada pelas seguintes equações

$$\begin{aligned} f_t(D(f_t)) = & V(YZ^2 - Y^4 + X^2Y^2Z + 2X^6YZ + X^{10}Z + 2tXY^4 + t^2Y^3Z + 2tX^5Y^3, \\ & Z^3 - Y^3Z - X^2Y^4 - 2X^6Y^3 - X^{10}Y^2 - 2tXY^3Z - t^2Y^5 - 2tX^5Y^2Z, \\ & 2XY^2Z + X^3Y^3 + 2X^5YZ + 3X^7Y^2 + 3X^{11}Y + X^{15} + tYZ^2 + tY^4 - t^2XY^4 - t^2X^5Y^3, \\ & 2XY^4 - X^3Y^2Z + X^5Z^2 + X^5Y^3 - 2X^7YZ - X^{11}Z + 2tY^3Z - 3tX^2Y^4 - t^2XY^3Z + \\ & t^3Y^5 - 4tX^6Y^3 - tX^{10}Y^2). \end{aligned}$$

Logo, podemos verificar que $m_0(f_t(D(f_t))) = 8$ para $t \neq 0$. Assim, f_t é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

A equação que define $f_t(\mathbb{C}^2)$ é dada por

$$\begin{aligned} f_t(\mathbb{C}^2) = & V(Z^4 - 2Y^3Z^2 + Y^6 - 4X^2Y^4Z - X^4Y^5 - 8X^6Y^3Z - 4X^8Y^4 - 4X^{10}Y^2Z - \\ & 6X^{12}Y^3 - 4X^{16}Y^2 - X^{20}Y + t(-4XY^3Z^2 - 4XY^6 - 4X^5Y^2Z^2 - 4X^5Y^5) + t^2(-4Y^5Z + \\ & 2X^2Y^6 + 4X^6Y^5 + 2X^{10}Y^4) + t^4(-Y^7)). \end{aligned}$$

Note que $X = 0$ não é um plano genérico para f , assim vamos considerar o plano H definido por $X - Y = 0$ que nesse exemplo é genérico para f . Assim, a equação da família de curvas $(H \cap f_t(\mathbb{C}^2)) = ((Y_0)_t)$ é definida nas coordenadas u e v pela seguinte equação

$$\begin{aligned} ((Y_0)_t) = & V(v^4 - 2u^3v^2 + u^6 - 4u^6v - u^9 - 8u^9v - 4u^{12} - 4u^{12}v - 6u^{15} - 4u^{18} - u^{21} - \\ & 4tu^4v^2 - 4tu^7 - 4t^2u^5v + 2t^2u^8 - 4tu^7v^2 - t^4u^7 - 4tu^{10} + 4t^2u^{11} + 2t^2u^{14}). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\mu((Y_0, 0)) = 18$ enquanto que $\mu(Y_t, 0) = 16$ para $t \neq 0$. Observamos também que $D(f)^1 = V(x)$ é a única componente de dobra de $D(f)$, todas as outras componentes $D(f)^j$ com $j = 2, \dots, 14$ são componentes de identificação, logo $f(D(f))$ tem 8 componentes irreduzíveis. Note que $m_0(f(D(f)^1)) = 2$, enquanto que $m_0(f(D(f)^j)) = 1$ para $j = 2, \dots, 14$. A deformação f_t deforma a componente $D(f)^1$ de tal forma que $m_0(f_t(D(f_t)^1)) = 1$ para $t \neq 0$. ■

Finalizamos esta seção com a tabela 4.1 que mostra todos os contra-exemplos da conjectura obtidos neste trabalho, o leitor pode verificar os detalhes de cada exemplo seguindo a mesma rotina realizada nos contra-exemplos da conjectura que descrevemos acima.

Família de germes de aplicações	$\mu(\tilde{Y}_0, 0)$	$\mu(\tilde{Y}_t, 0)$	$m_0(f(D(f)))$	$m_0(f_t(D(f_t)))$
Coposto 1				
$(x, y^4, x^5y + xy^5 + y^6 + ty^7)$	0	0	9	8
$(x, y^4, x^9y + xy^9 + y^{10} + ty^{11})$	0	0	15	14
$(x, y^4, x^{13}y + xy^{13} + y^{14} + ty^{15})$	0	0	21	20
$(x, y^4, x^{17}y + xy^{17} + y^{18} + ty^{19})$	0	0	27	26
$(x, y^6, x^7y + xy^7 + y^8 + ty^9)$	0	0	20	18
$(x, y^6, x^{13}y + xy^{13} + y^{14} + ty^{15})$	0	0	35	33
$(x, x^2y^2 + y^8, xy^7 + x^3y + y^{10} + ty^{11})$	0	0	34	31
Coposto 2				
$(x^2 + txy, x^2y + xy^2 + y^3, x^5 + y^5)$	2	1	22	22
$(x^3, y^5, x^2 - xy + y^2 + tx^2)$	1	1	23	22
$(x^n + ty^n, y^m, (x + y)^k)$				
(com $2 \leq n < m < k$ e n, m, k coprimos em pares) e $d = nmk - n - m - k + 2$	$(n-1)(m-1)$	$(n-1)^2$	$\frac{dn}{2}$	$\frac{dn}{2}$

Tabela 4.1: Contra-exemplos para a conjectura 4.16

4.4.6. Algumas fórmulas

Inspirados nos exemplos da seção anterior, vamos nesta seção apresentar algumas fórmulas para os invariantes $m_0(f(D(f)))$, $\mu_1(f(\mathbb{C}^2))$ e $J(f)$ no caso em que f é finitamente determinado, homogênea e de coposto 1. Vamos precisar do seguinte lema.

Lema 4.36. *Seja $\alpha : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação holomorfa definida por*

$$\alpha(t) = (a_1 t^{m_1}, a_2 t^{m_2}, \dots, a_n t^{m_n}),$$

onde U é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}$, suficientemente pequena. Então α é uma aplicação genericamente d -a-1 sobre sua imagem, onde $d = \text{mdc}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, o máximo divisor comum de $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Demonstração: Suponha primeiramente que $\text{mdc}(m_1, \dots, m_n) = 1$, sejam $b \neq 0 \in \alpha(U)$ e $c \neq 0 \in U$ tais que $\alpha(c) = b$. Note que $\alpha^{-1}(b)$ consiste no conjunto de todos os pontos da forma $z = |c|\xi$, onde $\xi = e^{i\theta}$ é uma raiz da unidade tal que θ pertence ao conjunto A abaixo:

$$A = \left\{ \theta = \frac{2\pi k_j}{m_j} \in \mathbb{R} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}, 0 \leq k_i < m_i \text{ e } \frac{k_i}{m_i} = \frac{k_j}{m_j} \text{ para } i \neq j \right\}.$$

Como $\text{mdc}(m_1, \dots, m_n) = 1$, o conjunto A consiste apenas do elemento $\theta = 0$. Assim, α é genericamente 1-a-1. Para o caso em que $\text{mdc}(m_1, \dots, m_n) = d \neq 1$, escreva $m_1 = dq_1, \dots, m_n = dq_n$ e considere as aplicações $\beta : U \rightarrow \mathbb{C}$ e $\gamma : V \rightarrow \mathbb{C}^n$, onde $V = \beta(U)$, definidas por

$$\beta(t) = t^d \quad \text{e} \quad \gamma(z) = (a_1 z^{q_1}, \dots, a_n z^{q_n}).$$

Como U é uma vizinhança suficientemente pequena da origem, $\beta(t) \in U$ para todo $t \in U$, logo $\alpha = \gamma \circ \beta$.

Note que β é genericamente d -a-1, como $\text{mdc}(q_1, \dots, q_n) = 1$ temos que α é genericamente d -a-1. ■

Proposição 4.37. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, homogêneo e de coposto 1. Escreva f na forma $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ e denote por n e m os graus de p e q , respectivamente, como $2 \leq n \leq m$.*

(a) $D(f)$ é um germe de curva homogêneo com d ramos suaves onde $d = nm - n - m + 1$ e

$$D(f) = V\left(\prod_{i=1}^d (x - \alpha_i y)\right)$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

(b) d é ímpar se, e somente se n e m são ambos pares.

(c) Se n e m são ambos pares, então $\text{mdc}(n, m) = 2$, caso contrário f não é finitamente determinado. Nesse caso, $D(f)$ tem $d - 1$ componentes de identificação, $D(f)^j = V(x)$ é a única componente de dobra de $D(f)$ e temos que:

$$\begin{aligned} m_0(f(D(f))) &= \frac{nm - m}{2} & \mu_1(f(\mathbb{C}^2)) &= nm - m \\ J(f) &= \frac{m^2 n + mn^2 - m^2 - 7mn - n^2 + 6m + 7n - 6}{2}. \end{aligned}$$

(d) Se n e m não são ambos pares, então todas as d componentes de $D(f)$ são de identificação. Nesse caso, temos que

$$m_0(f(D(f))) = \frac{nm - n - m + 1}{2} \quad \mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = nm - n - m + 1$$

$$J(f) = \frac{m^2n + mn^2 - m^2 - 7mn - n^2 + 6m + 6n - 5}{2}.$$

Demonstração: (a) A prova de que $D(f)$ é homogênea e de que $d = nm - n - m + 1$ segue de ([41], Proposition 1.15). Assim, $D(f) = V(\lambda(x, y))$, onde $\lambda(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau d . Desta forma, podemos escrever

$$\lambda(x, y) = \prod_{i=1}^d (\beta_i x - \gamma_i y), \quad \text{com } \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}.$$

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ um representante de f e suponha que uma componente irredutível de $D(f)$ seja $D(f)^1 = V(y)$. Considere a aplicação $n_1 : U_1 \rightarrow U$, definida por $n_j(t) = (t, 0)$, onde U_1 é uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}$ suficientemente pequena. A aplicação $f \circ n_1$ é genericamente 1-a-1, logo $D(f)^1$ é uma componente de identificação de $D(f)$. No entanto, qualquer outra componente $D(f)^i$ de $D(f)$ é dada por $D(f)^i = V(x - \alpha_i y)$, onde $\alpha_i = \gamma_i / \beta_i$, assim $f(D(f)^1) \cap f(D(f)^i) = \{0\}$, uma contradição. Assim, podemos reescrever λ na forma

$$\lambda = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i y),$$

já que $\beta_i \neq 0$, para todo i .

(b) Escreva $n = 2a$ e $m = 2b$, logo $nm - n - m + 1 = (2a)(2b) - (2a) - (2b) + 1$ que é ímpar. Suponha agora que $n = 2a$ e $m = 2b + 1$, assim $(2a)(2b + 1) - (2a) - (2b + 1) + 1 = 4ab - 2b$ que é par. Por último, suponha que $n = 2a + 1$ e $m = 2b + 1$, assim $(2a + 1)(2b + 1) - (2a + 1) - (2b + 1) + 1 = 4ab - 2$ que é par.

(c) Considere a parametrização $n_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^2$ de cada componente $D(f)^j = V(x - \alpha_j y)$ de $D(f)$, definida por $n_j(t) = (\alpha_j, -t)$. Se $\alpha_j \neq 0$, então $f \circ n_j$ é uma aplicação genericamente 1-a-1, e logo $D(f)^j$ é uma componente de identificação de $D(f)$. Como n e m são ambos pares, então d é ímpar, logo $D(f)$ tem $d - 1$ componentes de identificação e pelo menos uma componente de dobra, digamos $D(f)^1$, que necessariamente é dada por $D(f)^1 = V(x)$. Escreva f na forma

$$f(x, y) = (x, a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n, b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + \cdots + b_m y^m).$$

Note que $a_n \neq 0$ ou $b_m \neq 0$, caso contrário f não seria finita. Assim, temos três casos:

(a) $f \circ n_1(t) = (a_n t^n, b_m t^m)$, se $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$

(b) $f \circ n_1(t) = (a_n t^n, 0)$, se $a_n \neq 0$ e $b_m = 0$

(c) $f \circ n_1(t) = (0, b_m t^m)$, se $a_n = 0$ e $b_m \neq 0$

Vamos analisar cada caso.

Caso (a): Seja $c = \text{mdc}(n, m)$, a aplicação composta $f \circ n_1$ é genericamente c -a-1, logo $c = 2$, caso contrário f tem pelo menos uma curva de pontos triplos, e portanto não é finitamente determinado. Como $n \leq m$, segue que $m_0(f(D(f)^1)) = \frac{n}{2}$.

Caso (b): Temos que $f \circ n_1(t) = (a_n t^n, 0)$ é uma aplicação 2-a-1, logo $n = 2$. Podemos realizar mudanças de coordenadas na fonte e na meta (veja [38]) tais que f possa ser escrita na forma

$$f(x, y) = (x, y^2, yh(x, y^2))$$

onde $h(x, y^2)$ é um polinômio homogêneo de grau $m - 1$. Como $2 = n \leq m$, segue que $m_0(f(D(f)^1)) = \frac{n}{2} = 1$.

Caso (c): Esse caso é análogo ao caso anterior.

Assim, em qualquer caso, temos que $\text{mdc}(n, m) = 2$ e $m_0(f(D(f)^1)) = \frac{n}{2}$. Logo

$$m_0(f(D(f))) = \left(\frac{d-1}{2} \right) + \frac{n}{2} = \frac{nm - n}{2}.$$

Utilizando as fórmulas do Lema 4.19, da Observação 4.18 e do Teorema 1.59, obtemos as correspondentes fórmulas para $\mu_1(f(\mathbb{C}^2))$ e $J(f)$.

(d) Considere novamente a parametrização $n_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^2$ de cada componente $D(f)^j = V(x - \alpha_j y)$ de $D(f)$, definida por $n_j(t) = (\alpha_j, -t)$. Se $\alpha_j \neq 0$, então $f \circ n_j$ é uma aplicação genericamente 1-a-1, e logo $D(f)^j$ é uma componente de identificação de $D(f)$. Assim, se exista alguma componente de dobra de $D(f)$, a única possibilidade é quando $\alpha_j = 0$, logo $D(f)$ só pode ter uma componente de dobra. Como n e m não são ambos pares, então d é par. Já que o número de componentes de identificação de $D(f)$ sempre é par, então $D(f)$ também tem um número par de componentes de dobra, assim a única possibilidade é que todas as componentes de $D(f)$ sejam de identificação. Assim, como a imagem de cada componente de identificação é uma curva suave em $\mathbb{C}^3$, temos que

$$m_0(f(D(f))) = \frac{nm - n - m + 1}{2} = \frac{d}{2}.$$

Novamente utilizando as fórmulas do Lema 4.19, da Observação 4.18 e do Teorema 1.59, obtemos as correspondentes fórmulas para $\mu_1(f(\mathbb{C}^2))$ e $J(f)$. ■

Proposição 4.38. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definido por $f(x, y) = (x^n, y^m, (x + y)^k)$, onde n, m e k são coprimos em pares. Se $n < m < k$, então $D(f)$ tem $d = nmk - n - m - k + 2$ componentes irredutíveis, todas suaves e de identificação. E ainda mais*

$$m_0(f(D(f))) = \frac{dn}{2} \quad e \quad \mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = (n - 1)(m - 1) + dn.$$

Demonstração: Segue de ([41], Proposition 1.15) que $D(f)$ é um germe de curva homogênea com $d = nmk - n - m - k + 2$ componentes irredutíveis suaves. Note que d é sempre par, além disso todas as componentes de $D(f)$ são de identificação. De fato, seja $D(f)^j = V(\beta_j x - \gamma_j y)$ uma componente de $D(f)$ e considere a sua parametrização $n_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^2$. Como n, m, k são coprimos em pares, a aplicação composta $f \circ n_j$ sempre é uma aplicação genericamente 1-a-1, portanto $D(f)^j$ é uma componente de identificação de $D(f)$. Segue deste fato que $V(x)$ e $V(y)$ não podem ser componentes de $D(f)$. Assim, a imagem de cada curva $D(f)^j$ pela f é uma curva em $\mathbb{C}^3$ de multiplicidade n , logo

$$m_0(f(D(f))) = \frac{dn}{2}.$$

Já que $\mu(\tilde{Y}_0, 0) = (n - 1)(m - 1)$, usando o Lemma 4.19, obtemos que

$$\mu_1(f(\mathbb{C}^2)) = (n - 1)(m - 1) + dn. \quad \blacksquare$$

4.4.7. Uma classe em que a conjectura é verdadeira

Vamos agora apresentar uma classe de germes de aplicações em que a conjectura é verdadeira. Antes, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 4.39. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1 e seja $F = (f_t, t)$ um desdobramento a 1-parâmetro topologicamente trivial de f . Se todas as componentes irredutíveis de $f(D(f))$ são suaves, então F é Whitney equisingular.*

Demonstração: Como a multiplicidade de cada componente irredutível $m_0(f(D(f)^j))$ é um invariante semicontínuo superiormente, já que $m_0(f(D(f)^j)) = 1$ para cada j , segue que para qualquer deformação topologicamente trivial $F = (f_t, t)$ de f tem-se que $m_0(f_t(D(f_t)))$ é constante, consequentemente f_t é Whitney equisingular. ■

Teorema 4.40. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado de coposto 1 e homogêneo, escreva f na forma $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$ e sejam n e m os graus de p e q , respectivamente. Seja $F = (f_t, t)$ um desdobramento a 1-parâmetro topologicamente trivial de f . Se $\text{mdc}(n, m) \neq 2$, então F é Whitney equisingular.*

Demonstração: Pela Proposição 4.37, temos que todas as componentes de $D(f)$ são de identificação. Além disso, a imagem de cada componente $D(f)^j$ pela f é uma curva suave em $\mathbb{C}^3$, logo o resultado segue do Lema 4.39. ■

4.4.8. A conjectura de Zariski

Inspirados nos resultados das seções anteriores, vamos dar uma prova para uma pequena classe de exemplos da famosa conjectura de Zariski para a multiplicidade cujo o enunciado diz o seguinte:

Conjectura de Zariski: Seja $X \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ uma família de hipersuperfícies em $\mathbb{C}^n$. Se X é topologicamente trivial, então a multiplicidade $m_0(X_t, 0)$ é constante em uma vizinhança da origem.

Vamos precisar dos seguintes resultados auxiliares.

Lema 4.41. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, de coposto 1. E seja $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$ um desdobramento a 1-parâmetro topologicamente trivial de f . Então*

(a) *o ideal (t) em $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$ é um ideal gerado por um sistema de parâmetros e*

$$m_0(f(\mathbb{C}^2)) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z), t)}\right) \quad e \quad m_0(f_t(\mathbb{C}^2)) = e\left(t, \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}\right) \text{ para } t \neq 0.$$

(b) *$m_0(f_t(\mathbb{C}^2))$ é constante se, e somente se $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$ é Cohen-Macaulay,*

onde (x, y, t) são as coordenadas de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$ e (X, Y, Z, t) são as coordenadas de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}$.

Demonstração: (a) Temos que F é topologicamente trivial, logo $V(F^*(X, Y, Z)) = T$, onde $T \simeq (0, 0) \times \mathbb{C}$. Assim,

$$\sqrt{F^*(X, Y, Z)} = (x, y),$$

logo $x^n, y^m \in (F^*(X, Y, Z))$ para algum $n, m \in \mathbb{N}$. Logo, $\sqrt{(t)} = (x, y, t)$ em

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}$$

e assim (t) é um sistema de parâmetros. Já que f é finitamente determinado, f é a normalização de sua imagem $f(\mathbb{C}^2)$, logo

$$m_0(f(\mathbb{C}^2)) = e(f^*(X, Y, Z), \mathbb{C}\{x, y\})$$

(veja [18]). Como f tem coposto 1, temos que $F^*(X, Y, Z) = (x, y^k)$ para algum k , assim

$$e(f^*(X, Y, Z), \mathbb{C}\{x, y\}) = e((x, y^k), \mathbb{C}\{x, y\}) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x, y^k)}\right) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z), t)}\right).$$

Agora, escrevendo $f_t(x, y) = (x + h_1(x, y, t), p(x, y) + h_2(x, y, t), q(x, y) + h_3(x, y, t))$, após uma mudança de coordenadas podemos assumir que $h_1 = 0$, assim já que f_t é birracional sobre sua imagem segue que

$$\begin{aligned} m_0(f_t(\mathbb{C}^2)) &= e(f_t^*(X, Y, Z), \mathbb{C}\{x, y\}) = e((x, y^s), \mathbb{C}\{x, y\}) = \\ &= l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(x, y^s)}\right) = l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}_{(x, y)}}{(F^*(X, Y, Z))}\right) = e\left(t, \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}\right) \end{aligned}$$

para algum $s \geq 1$.

(b) Já que o ideal (t) é um ideal de parâmetros, temos pelo item (a), Proposição 3.10 que $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$ é Cohen-Macaulay se, e somente se

$$l\left(\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z), t)}\right) = e\left(t, \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}\right) \text{ para } t \neq 0.$$

se, e somente se $m_0(f(\mathbb{C}^2)) = m_0(f_t(\mathbb{C}^2))$, para todo t . ■

Teorema 4.42. *Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e seja $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$ um desdobramento a 1-parâmetro topologicamente trivial de f . Suponha que algum representante de F tenha uma componente irredutível $f_t(D(f_t)^j)$ com multiplicidade constante, então*

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}$$

é um anel Cohen-Macaulay.

Demonstração: Seja $F : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ um representante de F e $D(F)^j$ uma componente irredutível de $D(F)$ tal que $F(D(F)^j)$ seja uma componente irredutível de $F(D(F))$ com multiplicidade constante. Suponha que U seja suficientemente pequeno tal que as famílias de curvas $p : D(F) \rightarrow T$ e $p : F(D(F)) \rightarrow T$ sejam boas no sentido de [12], onde T é uma vizinhança aberta de 0 em $\mathbb{C}$.

Note que as fibras especiais de $D(F)^j$ e $F(D(F)^j)$, em geral, são genericamente reduzidas. Além disso, como F é topologicamente trivial, então $D(F)^j$ e $F(D(F)^j)$ são topologicamente triviais, logo pelo Teorema 3.45 suas normalizações são superfícies suaves.

Sejam $n_1 : U_1 \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow D(F)^j$ e $n_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ as aplicações de normalização de $D(F)^j$ e $F(D(F)^j)$, respectivamente, onde U_1 e U_2 são vizinhanças abertas de 0 em $\mathbb{C}^2$. Considere a restrição de F a $D(F)^j$ que por um abuso de notação também denotaremos por F . Como $F : D(F)^j \rightarrow F(D(F)^j)$ é sobrejetora e finita, segue da Propriedade Universal da normalização (Teorema 2.20) que existe uma aplicação $\tilde{F} : U_1 \rightarrow U_2$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\tilde{F}} & U_2 \\ n_1 \downarrow & & \downarrow n_2 \\ D(F)^j & \xrightarrow{F} & F(D(F)^j) \end{array}$$

comuta.

Sejam $I_{D(F)^j} \subset \mathbb{C}\{x, y, t\}$ e $I_{F(D(F)^j)} \subset \mathbb{C}\{X, Y, Z, t\}$ os ideais que definem $D(F)^j$ e $F(D(F)^j)$, respectivamente. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo de anéis locais induzido do diagrama acima:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\{u, t\} & \xleftarrow{\tilde{F}^*} & \mathbb{C}\{s, t\} \\ n_1^* \uparrow & & \uparrow n_2^* \\ \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(I_{D(F)^j})} & \simeq \mathcal{O}_{D(F)^j} \xleftarrow{F^*} \mathcal{O}_{F(D(F)^j)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{X, Y, Z, t\}}{(I_{F(D(F)^j)})} \end{array}$$

Como a multiplicidade da família de curvas $F(D(F)^j)$ é constante, esta família é Whitney equisingular, logo pelo Teorema 3.58 temos que o anel

$$\frac{\mathbb{C}\{s, t\}}{n^*(X, Y, Z)} \quad (4.1)$$

é Cohen-Macaulay.

Como a codimensão (em $\mathbb{C}^2$) dos conjuntos analíticos $V(n^*(X, Y, Z))$ e $V(\tilde{F}(n^*(X, Y, Z)))$ é a mesma, pela Proposição 1.27, temos que o anel

$$\frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{\tilde{F}(n^*(X, Y, Z))} \quad (4.2)$$

é Cohen-Macaulay. Pela comutatividade do diagrama, segue que

$$\frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{n_1^*(F^*(X, Y, Z))} \quad (4.3)$$

também é Cohen-Macaulay. Como a dimensão do anel em 4.3 é 1 e $V(n_1^*(F^*(X, Y, Z))) = 0 \times T \subset \mathbb{C}^2$, então t não é um divisor de zero de 4.3.

Como F é topologicamente trivial então F é excelente, logo $V(F^*(X, Y, Z)) = T \simeq (0, 0) \times T \subset \mathbb{C}^3$. Além disso, $T \subset D(F)^j$. Note agora que $I_{D(F)^j} \subset F^*(X, Y, Z)$, caso contrário, $(0, 0) \times T \not\subset D(F)^j$. Assim, podemos definir os morfismos quocientes

$$q_1 : \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{I_{D(F)^j}} \rightarrow \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{F^*(X, Y, Z)} \quad e \quad q_2 : \mathbb{C}\{u, t\} \rightarrow \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{n_1^*(F^*(X, Y, Z))} \quad (4.4)$$

Considere o morfismo composto $q_2 \circ n_1^*$, como $q_2(n_1^*(F^*(X, Y, Z))) = 0$ em 4.3, existe um único morfismo φ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{I_{D(F)^j}} & \xrightarrow{n_1^*} & \mathbb{C}\{u, t\} \xrightarrow{q_2} \frac{\mathbb{C}\{u, t\}}{n_1^*(F^*(X, Y, Z))} \\ q_1 \downarrow & \nearrow \exists! \varphi & \\ \frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{F^*(X, Y, Z)} & & \end{array}$$

Além disso, $\varphi(h(x, y, t) \bmod(F^*(X, Y, Z))) = q_2(n_1^*(h(x, y, t) \bmod(I_{D(F)^j})))$, logo $\varphi(t \bmod(F^*(X, Y, Z))) = t \bmod(n_1^*(F^*(X, Y, Z)))$.

Suponha que $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$ não seja Cohen-Macaulay, então o elemento t é um divisor de zero de $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$, logo existe $g \neq 0$ tal que $g \cdot t = 0$ em $\mathbb{C}\{x, y, t\}/F^*(X, Y, Z)$. Logo, $0 = \varphi(0) = \varphi(gt) = \varphi(g)t$. Como $g \notin F^*(X, Y, Z)$, então $\varphi(g) \neq 0$, assim t é um divisor de zero de $\mathbb{C}\{u, t\}/n_1^*(F^*(X, Y, Z))$, uma contradição. Portanto,

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{F^*(X, Y, Z)}$$

é Cohen-Macaulay. ■

Teorema 4.43. *Considere a classe dos germes de aplicações finitamente determinados de posto 1 e homogêneos. Se f está nesta classe, então para qualquer desdobramento topologicamente trivial $F(x, y, t) = (f_t(x, y), t)$ de f tem-se que $m_0(f_t(\mathbb{C}^2))$ é constante.*

Demonstração: Tome um representante de f que também chamaremos de f da forma $f(x, y) = (x, p(x, y), q(x, y))$. Seja n, m os graus de p e q , e vamos assumir que $n, m \geq 2$, caso contrário f seria uma imersão. Temos que $D(f) = V(\lambda(x, y))$ onde $\lambda(x, y)$ é uma função polinomial homogênea de grau $d = nm - n - m + 1$ (veja [40]). Além disso, como f é finitamente determinado, temos que

$$\lambda(x, y) = \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i y)$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ são todos distintos. Assim, temos que $D(f)$ possui d componentes irredutíveis suaves. Para cada $j = 1, \dots, d$, vamos denotar por $D(f)^j$ a componente irredutível definida por $x - \alpha_j y$, isto é, $D(f)^j = V(x - \alpha_j y)$. Se $n = m = 2$, então $d = 1$ e logo $D(f)$ é uma curva suave. Assim, f é estável e portanto f é equivalente a $\tilde{f}(x, y) = (x, y^2, xy)$. Nesse caso, qualquer deformação F topologicamente trivial de f também é Whitney equisingular. Agora suponha que $n \leq m$ e $m \geq 3$, assim existe $\alpha_j \neq 0$, logo a imagem da componente $D(f)^j$ pela f é uma curva de multiplicidade 1 em $\mathbb{C}^3$, a componente irredutível $f(D(f)^j)$ de $f(D(f))$ é suave. Como a multiplicidade de cada componente irredutível $m_0(f(D(f)^j))$ é um invariante semicontínuo superiormente, segue que para qualquer deformação topologicamente trivial f_t de f tem-se que $m_0(f_t(D(f_t)^j)) = 1$ para todo t . Logo, pelo Teorema 4.42 temos que

$$\frac{\mathbb{C}\{x, y, t\}}{(F^*(X, Y, Z))}$$

é um anel Cohen-Macaulay. Pelo Lema 4.41 temos que $m_0(f_t(\mathbb{C}^2))$ é constante. ■

Equisingularidade de famílias de aplicações de $\mathbb{C}^n$ para $\mathbb{C}^{2n-1}$

Neste capítulo, estudamos famílias de germes de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ $\mathcal{A}$ -finitamente determinados. Vimos no capítulo 4 que dado um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, temos a seguinte fórmula (Teorema 1.58) que relaciona o número de Milnor das curvas $D(f)$ e $D^2(f)$:

$$\mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) + 6T(f) \quad (5.1)$$

Quando $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é um germe de aplicação finitamente determinado e $n \geq 3$, então f não tem pontos triplos estritos, isto é, $T(f) = 0$. Assim, esperamos que a fórmula 5.1 para o caso em que $n \geq 3$ seja

$$\mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) \quad (5.2)$$

No entanto, quando consideramos a estrutura reduzida de $D(f)$, a equação 5.2 nem sempre se verifica (veja Teorema 5.10). Dando uma outra estrutura analítica apropriada para $D(f)$, seguindo [44] mostramos que f é finitamente determinado se, e somente se $D(f)$ é uma curva genericamente reduzida. Assim podemos considerar o número de Milnor de $D(f)$ como na definição 3.37, e mostramos que de fato temos que $\mu(D(f)) = \mu(D^2(f))$, como esperado.

Consideramos também $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e um desdobramento a 1 parâmetro $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ de f definido por $F(x, t) = (f_t(x), t)$. Novamente iremos assumir que F preserva a origem, isto é, $f_t(0) = 0$ para todo t . Estudamos alguns exemplos que mostram que um desdobramento F topologicamente trivial pode não ser Whitney equisingular, com $n \geq 3$.

5.1. Espaço de pontos múltiplos e determinação finita

Seguindo [44], iniciamos nosso estudo com uma discussão sobre o espaço de pontos múltiplos de uma aplicação holomorfa e condições para a determinação finita de f .

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ uma aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é um conjunto aberto e $n \leq p$. Dado $k \geq 1$, definimos o conjunto dos pontos k -múltiplos, $D^k(f)$, como o fecho em U^k do conjunto

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in U^k \mid f(x_i) = f(x_j), x_i \neq x_j, \text{ para todo } i \neq j\}.$$

Recorde da seção 1.8 que definimos o levantamento do espaço de pontos duplos $D^2(f)$ de f com uma estrutura analítica como sendo o espaço complexo dado por

$$D^2(f) := V((f \times f)^* \mathcal{I}_p + \mathcal{R}_n(\alpha)).$$

E se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação finito, onde $n \leq p$, tomando um representante de f , definimos o levantamento dos pontos duplos do germe de aplicação f como o germe de espaço complexo

$$D^2(f) := V((f \times f)^* I_p + R_n(\alpha)).$$

Vamos considerar agora o caso em que $p = 2n - 1$ e $n \geq 3$. As duas seguintes proposições foram mostradas em [32] para o caso particular em que f tem coposto 1 e em [44] para o caso geral.

Proposição 5.1. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ um germe de aplicação holomorfa, onde $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto aberto e $n \geq 3$. Então f é estável se, e somente se $D^2(f)$ é uma curva suave e $D^3(f) = \emptyset$.*

Proposição 5.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finita, onde $n \geq 3$. Então f é finitamente determinado se, e somente se $D^2(f)$ é um germe de curva reduzida e $D^3(f)$ é vazio ou $D^3(f) = \{0\}$.*

Consideramos agora a imagem de $D^2(f)$ pela projeção $p_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ no primeiro fator. Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é finita, então a restrição de p_1 a $D^2(f)$ também é finita, logo a imagem $D(f) := p_1(D^2(f)) \subset \mathbb{C}^n$ é um germe de curva analítica. Contudo, precisamos dar uma estrutura analítica apropriada para $D(f)$. Como no caso de germes de aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$, definimos

$$D(f) := V(\mathcal{F}_0(p_{1*} \mathcal{O}_{D^2(f)})),$$

isto é, o anel local de $D(f)$ é dado por $\mathcal{O}_{D(f)} = \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{F}_0(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})}$, onde $\mathcal{F}_0(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})$ é o 0-ideal de Fitting do $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ -módulo $p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)}$.

Note que novamente temos a igualdade $V(D(f)) = p_1(D^2(f))$ como conjuntos, no entanto, $D(f)$ pode não ser reduzida se p_1 não é um-a-um ou se $D^2(f)$ não é reduzida. Além disso, nossa definição de $D(f)$ difere sutilmente da definição dada em [44] pelo fato que nossa definição permite que $D(f)$ tenha uma componente mergulhada na origem.

Exemplo 5.3. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação do tipo $\Sigma^{1,0}$. Assim, a hipótese de que f tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$ implica que podemos escolher um sistema de coordenadas tal que*

$$f(x, y) = (x, y^2, yg(x, y^2)),$$

onde $x \in \mathbb{C}^{n-1}$, $y \in \mathbb{C}$ e $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, $g(x, y) = (g_1(x, y), \dots, g_{n-1}(x, y))$.

Denote por $(x_1, \dots, x_{n-1}, y, x'_1, \dots, x'_{n-1}, y')$ as coordenadas em $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, logo $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $x' = (x'_1, \dots, x'_{n-1})$. Assim, temos que o anel local de $D^2(f)$ é dado por

$$\mathcal{O}_{D^2(f)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_{n-1}, y, x'_1, \dots, x'_{n-1}, y'\}}{(x_1 - x'_1, \dots, x_{n-1} - x'_{n-1}, y + y', g_1(x, y^2), \dots, g_{n-1}(x, y^2))}.$$

Considere agora a projeção $p : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ no primeiro fator, isto é, $p(x, y, x', y') = (x, y)$.

Note que

$$\frac{\mathcal{O}_{D^2(f)}}{p^*(x, y)} \simeq \mathbb{C}$$

logo, $h_1 = 1$ gera $\mathcal{O}_{D^2(f)}$ como um $\mathcal{O}_n$ -módulo. Desta forma, uma matriz de apresentação para $p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)}$ é dada por:

$$p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)} = \begin{pmatrix} g_1(x, y^2) \\ \vdots \\ g_{n-1}(x, y^2) \end{pmatrix}$$

Assim, $D(f) = V(\mathcal{F}_0(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)})) = V(g_1(x, y^2), \dots, g_{n-1}(x, y^2))$. Além disso, a imagem de $D(f)$ é dada por $f(D(f)) = V(g_1(X, Y), \dots, g_{n-1}(X, Y), Z)$, onde $X \in \mathbb{C}^{n-1}$, $Y \in \mathbb{C}$ e $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Observação 5.4. Note que se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é um germe de aplicação do tipo $\Sigma^{1,0}$, então $D(f)$ é uma interseção completa, podendo eventualmente ter singularidade não isolada no caso em que $D(f)$ não é reduzida. Assim, nesse caso $D(f)$ é Cohen-Macaulay e logo não tem uma componente mergulhada. Logo, se f é do tipo $\Sigma^{1,0}$ nossa definição de $D(f)$ coincide com a definição dada em [44].

A seguinte proposição foi mostrada em [44] considerando a estrutura analítica de $D(f)$ sem um ponto mergulhado na origem, isto é, considerando que $D(f) = V(\mathcal{F}_0(p_{1*}\mathcal{O}_{D^2(f)}))^*$, onde X^* denota a união das componentes de X de dimensão máxima. Apenas adaptamos este resultado para a nossa definição de $D(f)$, isto é, fizemos uma releitura deste resultado (veja [44], Corollary 1).

Proposição 5.5. *Seja $U \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto aberto com $n \geq 3$. Então*

- (a) *Um germe de aplicação holomorfa $f : U \subset \mathbb{C}^{2n-1}$ é estável se, e somente se $D(f)$ é uma curva suave.*
- (b) *Um germe de aplicação holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é finitamente determinado se, e somente se $D(f)$ é um germe de curva genericamente reduzida.*

Demonstração: A demonstração é essencialmente a mesma dada em [44]. Note que se f é estável, então f tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$, assim a definição de $D(f)$ dada em [44] coincide com a nossa definição e a prova segue como em [44]. Escrevemos a prova para completarmos a demonstração.

(a) *A prova segue da Proposição 5.1. De fato, se f é estável, então $D^2(f)$ é uma curva suave e $D^3(f) = \emptyset$, isto implica que $p_1 : D^2(f) \rightarrow D(f)$ é um-a-um. Ainda mais, tomando formas normais para p_1 podemos ver claramente que p_1 também é regular, logo p_1 é de fato um homeomorfismo e consequentemente, $D(f)$ também é suave. Reciprocamente, se $D(f)$ é suave, então $D^2(f)$ é também suave e $p_1 : D^2(f) \rightarrow D(f)$ é um-a-um. Isto implica que $D^3(f) = \emptyset$ e assim temos que f é estável.*

(b) *Segue do item (a) e do critério de Mather-Gaffney para determinação finita que f é finitamente determinado se, e somente se $D(f)$ é uma curva com singularidade isolada. Logo, isto é equivalente a dizer que f é finitamente determinado se, e somente se $D(f)$ é uma curva genericamente reduzida.* ■

5.2. Os invariantes e algumas fórmulas

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado. As curvas $D^2(f)$ e $D(f)_{red}$ são reduzidas enquanto que $D(f)$ é uma curva genericamente reduzida. Logo, podemos considerar os seguintes números de Milnor

$$\mu(D^2(f)), \mu(D(f)_{red}) \text{ e } \mu(D(f)),$$

que são $\mathcal{A}$ -invariantes de f .

Observação 5.6. Quando f é finitamente determinado a imagem da curva de pontos duplos $D(f)$ de f é uma curva analítica em $\mathbb{C}^{2n-1}$ que denotaremos por $f(D(f))$.

Exceto o caso em que f tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$ (veja Exemplo 5.3), uma questão natural é como podemos dar uma estrutura analítica conveniente para $f(D(f))$?

A estrutura mais natural seria aquela dada pelo primeiro ideal de Fitting da matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_n)$, como no caso das aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$. No entanto, pouco é conhecido sobre o comportamento da estrutura analítica dada pelos ideais de Fitting de $f_*(\mathcal{O}_n)$ quando $n \geq 3$.

Em geral, se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é finita e $p - n \geq 2$, não existe ainda um algoritmo como no caso de aplicações finitas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ para calcularmos efetivamente a matriz de apresentação de $f_*(\mathcal{O}_n)$. Assim, como em [44] vamos considerar $f(D(f))$ do ponto de vista geométrico, desta forma podemos considerar alguns conceitos geométricos que podem ser definidos sem a necessidade de uma estrutura analítica sobre $f(D(f))$, por exemplo, as multiplicidades polares $m_0(f(D(f)))$ e $m_1(f(D(f)))$. Quando houver a necessidade de dar uma estrutura analítica para $f(D(f))$, podemos considerar a estrutura reduzida.

Analogamente ao caso das aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^3, 0)$, podemos também definir a curva quociente $D^2(f)/S_2$ quando $n \geq 3$. Nesse caso, a estrutura considerada para $D^2(f)/S_2$ é a reduzida.

Definição 5.7. Dado um desdobramento F de f , definimos a superfície dos pontos duplos $D^2(F)$ em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$. Definimos também os espaços complexos $D(F)$ em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$, $F(D(F))$ em $(\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ e $D^2(F)/S_2$ em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}/S_2, 0)$.

Observação 5.8. Naturalmente $D(F) = V(\mathcal{F}_0(p_*\mathcal{O}_{D^2(F)}))$. No entanto, $D(F)$ pode não ser uma superfície reduzida, mesmo se cada f_t for finitamente determinado. Consideramos agora a projeção no último fator $\pi : D(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, os ideais de Fitting tem a propriedade da compatibilidade com relação a mudança de base (veja [23]), assim temos que a estrutura analítica das fibras de π coincide com a estrutura analítica das curvas $D(f_t)$ dada por cada ideal $\mathcal{F}_0(p_*\mathcal{O}_{D^2(f_t)})$ individualmente, isto é, $\pi^{-1}(t) = D(f_t)$. Desta forma, $\pi : D(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana da curva $D(f)$.

Para as famílias $\pi : D^2(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $\tau : D^2(F)/S_2 \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ temos o seguinte lema.

Lema 5.9. ([44]) *Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ com $n \geq 3$. Então $\pi : D^2(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $\tau : D^2(F)/S_2 \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são deformações planas de $D^2(f)$ e $D^2(f)/S_2$, respectivamente. Ainda mais, se F é uma estabilização, então π e τ são suavizações, isto é, as curvas $D^2(f_t)$ e $D^2(f_t)/S_2$ são suaves para $t \neq 0$.*

Da Proposição 1.58, quando $n = 2$ e f é finitamente determinado temos as seguintes relações:

- (a) $\mu(D(f)) = \mu(D^2(f)) + 6T(f)$
- (b) $\mu(D^2(f)) = 2\mu(D^2(f)/S_2) + C(f) - 1$,
- (c) $\mu(D(f)) = 2\mu(f(D(f))) + C(f) - 2T(f) - 1$

Em [44], Nuño-Ballesteros e Jorge Perez mostraram que o item (b) da Proposição 1.58 também vale para o caso em que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é finitamente determinado e $n \geq 3$.

A dificuldade em mostrar o item (a) considerando as estruturas reduzidas $D(F)^{red}$ e $D(f)^{red}$ é o fato de não podermos garantir que $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ seja uma deformação plana da curva $D(f)^{red}$. De fato, veja o seguinte teorema.

Teorema 5.10. ([44]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, com $n \geq 3$. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- (1) $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana de $D(f)^{red}$, para todo desdobramento F de f ,
- (2) $\mu(D(f)_{red}) = \mu(D^2(f))$,
- (3) $D(f)^{red}$ e $D^2(f)$ são biholomorfas,
- (4) f tem símbolo de Boardman $\Sigma^{1,0}$.

Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado e considere a aplicação de redução da estrutura analítica $\rho : D(F) \rightarrow D(F)^{red}$ de $D(F)$. Considere ainda a projeção no último fator $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$,

$$D(F) \xrightarrow{\rho} D(F)^{red} \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$$

Note que as fibras genéricas de π são todas reduzidas, isto é, $\pi^{-1}(0) = D(f_t)^{red}$ para $t \neq 0$. No entanto, mesmo que $D(F)$ seja uma superfície reduzida, $D(F)$ pode não ser Cohen-Macaulay, logo a fibra especial $\pi^{-1}(0)$ pode ser uma curva genericamente reduzida e sua estrutura analítica pode diferir da estrutura analítica reduzida $D(f)^{red}$ de $D(f)$.

Por outro lado, o problema de $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ não ser uma deformação plana de $D(f)^{red}$ pode ser contornado ao trocarmos $D(f)^{red}$ pela fibra $\pi^{-1}(0) = D(F) \cap \{t = 0\}$. Como em [44], vamos denotar este germe de espaço complexo por $D_F(f)$, isto é, $\pi^{-1}(0) = D_F(f)$ e como as fibras genéricas de π são reduzidas, por abuso de notação, denotamos $\pi^{-1}(0) = D(f_t)^{red}$ para $t \neq 0$.

Lema 5.11. ([44]) *Seja F um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. Então $D_F(f)$ é o germe de uma curva com singularidade isolada e $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação plana de $D_F(f)$ com fibra genérica $\pi^{-1}(t) = D(f_t)^{red}$ para $t \neq 0$.*

Para bons representantes $\pi : D(F)^{red} \rightarrow T$ e $\pi : D(F) \rightarrow T$ (no sentido de [10]), como estas famílias são planas, temos a seguinte relação entre os números de Milnor de $\mu(D(f))$, $\mu(D_F(f))$, $\mu(D(f_t))$ e $\mu(D(f_t)^{red})$ ([22], Teorema 8.5):

$$\mu(D(f)) - \mu(D(f_t)) = \mu(D_F(f)) - \mu(D(f_t)^{red}) = 1 - \chi(D(f_t)), \text{ com } t \in T \setminus \{0\}$$

onde $\chi(X)$ é a característica de Euler de X .

Assim, pelas observações que fizemos acima, estamos em condições de mostrar a seguinte proposição.

Proposição 5.12. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, com $n \geq 3$. Então:*

- (a) $\mu(D(f)) = \mu(D^2(f))$
- (b) $\mu(D(f)^{red}) = \mu(D^2(f)) + 2\epsilon(D(f))$

Demonstração: Seja F uma estabilização de f . Temos que ambas as famílias de curvas $\pi : D^2(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ e $\pi : D(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ são deformações planas das curvas $D^2(f)$ e $D(f)$, respectivamente. Fixe um representante suficientemente pequeno $F : U \times D \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1} \times D$, onde D e U são vizinhanças de 0 em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}$, respectivamente, tais que $\pi : D^2(F) \rightarrow D$ e $\pi : D(F) \rightarrow D$ sejam bons representantes no sentido de [10] e [12]. Assim para todo $t \in D$, temos por ([12], Teorema 4.2.2) e ([10], Lema 3.1.2) que

$$\mu(D^2(f), 0) - \sum_{(x, x') \in D^2(f_t)} \mu(D^2(f_t), (x, x')) = 1 - \chi(D^2(f_t))$$

$$\mu(D(f), 0) - \sum_{x \in D(f_t)} \mu(D(f_t), x) = 1 - \chi(D(f_t)).$$

Como F é uma estabilização de f , temos que

$$\sum_{x \in D(f_t)} \mu(D(f_t), x) = \sum_{(x, x') \in D^2(f_t)} \mu(D^2(f_t), (x, x')) = 0.$$

Já que $p_1 : D^2(f_t) \rightarrow D(f_t)$ é um biholomorfismo para $t \neq 0$, temos que $\chi(D^2(f_t)) = \chi(D(f_t))$, logo $\mu(D^2(f)) = \mu(D(f))$. Usando a fórmula

$$\mu(D(f)) = \mu(D(f)^{red}) - 2\epsilon(D(f))$$

temos a prova do item (b). ■

Exemplo 5.13. Considere o seguinte germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^5, 0)$ definido por

$$f(x, y, z) = (x, y, z^3, z^4 + xz, z^5 + yz).$$

Vamos mostrar que f é finitamente determinado. Como f tem coposto 1, utilizando a mesma notação da definição 1.53 temos que

$$D^3(f) = V(y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3, y_1 + y_2 + y_3, -y_1^2y_2 - y_1^2y_3 - y_1y_2^2 - 2y_1y_2y_3 - y_1y_3^2 - y_2^2y_3 - y_2y_3^2 + x, y_1^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2^2 + y_2y_3 + y_3^2, -y_1^3y_2 - y_1^3y_3 - y_1^2y_2^2 - 2y_1^2y_2y_3 - y_1^2y_3^2 - y_1y_2^3 - 2y_1y_2^2y_3 - 2y_1y_2y_3^2 - y_1y_3^3 - y_2^3y_3 - y_2^2y_3^2 - y_2y_3^3 + y, y_1^3 + y_1^2y_2 + y_1^2y_3 + y_1y_2^2 + y_1y_2y_3 + y_1y_3^2 + y_2^3 + y_2^2y_3 + y_2y_3^2 + y_3^3) = \{0\} \subset \mathbb{C}^5$$

Enquanto que

$$D^2(f) = V(x - x', y - y', z^2 + zz' + z'^2, x + z^3 + z^2z' + zz'^2 + z'^3, y + z^4 + z^3z' + z^2z'^2 + zz'^3 + z'^4) \subset (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3, 0).$$

Note que o anel local de $D(f)$ é isomorfo ao anel

$$\mathcal{O}_{D^2(f)} \simeq \frac{\mathbb{C}\{z, z'\}}{(z^2 + zz' + z'^2)}.$$

Logo, $D^2(f)$ é uma curva reduzida. Segue então pela Proposição 5.2 que f é finitamente determinado. Além disso, $D^2(f)$ tem duas componentes irredutíveis e é uma singularidade de Morse, logo $\mu(D^2(f)) = 1$ e então $\mu(D(f)) = 1$.

Considere a restrição ao conjunto $D^2(f)$ da projeção $p : (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, definida por $p(x, y, z, x', y', z') = (x, y, z)$. A matriz de apresentação de $p_*\mathcal{O}_{D^2(f)}$ como um $\mathcal{O}_3$ -módulo é

$$\begin{pmatrix} x + z^3 & 0 \\ 0 & x + z^3 \\ y + z^4 & -x \\ xz^2 & xz + y + z^4 \end{pmatrix}$$

Assim,

$$D(f) = V(\mathcal{F}_0(p_*\mathcal{O}_{D^2(f)})) = V(xy + yz^3 + xz^4 + z^7, x^2z^2 + xz^5, x^2 + 2xz^3 + z^6, xy + x^2z + yz^3 + 2xz^4 + z^7, -x^2 - xz^3, -y^2 - xyz - x^2z^2 - 2yz^4 - xz^5 - z^8)$$

Note que $D(f)$ é uma curva genericamente reduzida. Temos que $D(f)^{red} = V(x + z^3, y^2 + yz^4 + z^8)$. Assim, $D(f)^{red}$ tem duas componentes suaves dadas por $D(f)_1^{red} = V(x + z^3, ay - bz^4)$ e $D(f)_2^{red} = V(x + z^3, by - az^4)$, onde $a = (-1 + i\sqrt{3})/2$ e $b = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Assim, como

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{(x + z^3, ay - bz^4, by - az^4)} = 4$$

segue da fórmula ([12], Corollary 1.2.3) que $\mu(D(f)^{red}) = 7$. Por outro lado, outro cálculo mostra que $\epsilon(D(f)) = 3$.

5.3. Whitney equisingularidade

Nesta seção, seguindo [44] vamos estudar a Whitney equisingularidade de famílias de aplicações $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. Recordamos os conceitos de um desdobramento bom e excelente, introduzidos por Gaffney em [18].

Definição 5.14. *Seja F um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, com $n \geq 3$.*

- (a) Dizemos que F é μ -constante se $\mu(D(f_t)^{red}) = \mu(D_F(f))$ para todo $t \neq 0$.
- (b) Dizemos que F é bom se existe um representante $F : U \times D \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1} \times D$, tal que $f_t^{-1}(0) = \{0\}$ e $f_t : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ é estável para todo $t \in D$.
- (c) Dizemos que F é excelente se é bom e $C(f_t)$ é constante.

Observamos que a definição de um desdobramento F topologicamente trivial é análoga a definição dada em 4.6 para o caso $n = 2$.

Teorema 5.15. ([44], Theorem 3) *Seja F um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, com $n \geq 3$. As seguintes afirmações são*

equivalentes:

- (a) F é μ -constante.
- (b) F é excelente e $D^2(F)$ é uma família de curvas μ -contante.
- (c) $D^2(F)$ é uma família de curvas μ -constante e $D^3(F) = \emptyset$.

Ainda mais, se F é topologicamente trivial, então F é μ -constante.

Observação 5.16. Já que $\mu(D(f)) - \mu(D(f_t)) = \mu(D_F(f)) - \mu(D(f_t)^{red})$, então $\mu(D(f_t))$ é constante se, e somente se $\mu(D(f_t)^{red}) = \mu(D_F(f))$ para todo t . Assim, uma forma equivalente de dar a noção de desdobramento μ -constante é usar a família de curvas $\pi : D(F) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, ao invés da família de curvas $\pi : D(F)^{red} \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Outra consequência desta observação é que se $\mu(D(f_t))$ é constante, então F também é excelente.

Como no caso de famílias de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$, um desdobramento excelente F de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ tem uma estratificação natural (veja [18]). Tome um representante $F : U \times T \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ tal que $f^{-1}(0) = \{0\}$ e $f : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1}$ seja uma imersão estável. Os estratos na fonte são

$$\{U \setminus D(F), D(F) \setminus T, T\}$$

e na meta, os estratos são:

$$\{\mathbb{C}^{2n-1} \setminus F(U \times T), F(U \times T) \setminus \overline{F(D(F))}, F(D(F)) \setminus T, T\}.$$

Novamente notemos que F preserva a estratificação acima, isto é, F leva cada estrato da fonte ao estrato correspondente na meta. Dizemos que F é *Whitney equisingular* se existe um representante de F que admite as estratificações na fonte e na meta acima, e essas estratificações são Whitney equisingulares ao longo de T .

Os seguintes resultados sobre a Whitney equisingularidade são conhecidos.

Teorema 5.17. ([44]) *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ um germe de aplicação finitamente determinado, com $n \geq 3$ e seja F um desdobramento μ -contante de f . Então F é Whitney equisingular se, e somente se $m_0(D(f_t))$, $m_0(f_t(D(f_t)))$ e $m_{2i-1}(f_t(\mathbb{C}^n))$, $i = 1, 2, \dots, k$ são constantes, onde $k = (n+1)/2$ se n é ímpar ou $k = n/2$ se n é par e $m_j(f_t(\mathbb{C}^n))$ é a j -ésima multiplicidade polar de $f_t(\mathbb{C}^n)$.*

Vea [18] para detalhes sobre as multiplicidades polares. No caso em que f tem coposto 1 ou 2, temos o seguinte resultado.

Corolário 5.18. ([44]) *Nas condições do Teorema 5.17, se f tem coposto 1 ou 2, então F é Whitney equisingular se, e somente se $m_1(f_t(\mathbb{C}^n))$, $m_0(D(f_t))$ e $m_0(f_t(D(f_t)))$ são constantes.*

Como no caso de aplicações de $(\mathbb{C}^2, 0)$ para $(\mathbb{C}^3, 0)$, uma extensão natural da conjectura de Ruas para o caso em que $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ é finitamente determinado e $n \geq 3$ é:

Pergunta: Um desdobramento F de f que é topologicamente trivial é sempre Whitney equisingular?

Essa pergunta foi respondida em [44] pelo seguinte exemplo:

Exemplo 5.19. *Seja $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^5, 0)$ um germe de aplicação definido por $f(x, y, z) = (x, y, z^2, z(xy), z(z^{12} + x^{15} + y^{10}))$ e considere um desdobramento a 1-parâmetro $F = (f_t, t)$ de f , onde*

$$f_t(x, y, z) = (x, y, z^2, z(xy - tz^2), z(z^{12} + x^{15} + y^{10})).$$

Temos que

$$D(f_t) = V(xy - tz^2, z^{12} + x^{15} + y^{10}) \text{ e } f_t(D(f_t)) = V(XY - tZ, Z^6 + X^{15} + Y^{10}, U, V).$$

Assim, um cálculo mostra que: $\mu(D(f_t)) = 276$ para todo t , $m_0(D(f_0)) = 22$ enquanto que $m_0(D(f_t)) = 20$ para $t \neq 0$. Ainda mais, $\mu(f_t(D(f_t))) = 126$ (com a estrutura reduzida) para todo t , $m_0(f_0(D(f_0))) = 12$ enquanto que $m_0(f_t(D(f_t))) = 10$ para $t \neq 0$.

Logo, F é μ -constante mas não é Whitney equisingular. Note que f é quase-homogênea e o desdobramento F adiciona apenas termos de mesmo grau. Isto implica que F é topologicamente trivial por [16].

Note que no exemplo acima, $D(F)$ e $F(D(F))$ são famílias de curvas reduzidas que são topologicamente triviais e não são Whitney equisingulares. Agora vamos apresentar um outro exemplo em que $D(F)$ é Whitney equisingular e $F(D(F))$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular. Este exemplo foi inspirado na família de curvas do Exemplo 5.13.

Exemplo 5.20. *Seja $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^5, 0)$ um germe de aplicação definido por*

$$f(x, y, z) = (x, y, z^2, z(y^3 + 2yz^2), z(x^2 + y^6 + y^4z^2 + y^2z^4 + z^6))$$

e considere um desdobramento a 1-parâmetro $F = (f_t, t)$ de f , onde

$$f_t(x, y, z) = (x, y, z^2, z(y^3 + 2yz^2 + tx), z(x^2 + y^6 + y^4z^2 + y^2z^4 + z^6)).$$

Temos então que

$$D(f_t) = V(y^3 + 2yz^2 + tx, x^2 + y^6 + y^4z^2 + y^2z^4 + z^6) \text{ e} \\ f_t(D(f_t)) = V(y^3 + 2yz + tx, x^2 + y^6 + y^4z + y^2z^2 + z^3, U, V).$$

Assim, um cálculo mostra que: $\mu(D(f_t)) = 25$ e $m_0(D(f_0)) = 6$ para todo t , logo $D(F)$ é Whitney equisingular. Ainda mais, $\mu(f_t(D(f_t))) = 10$ (com a estrutura reduzida) para todo t , $m_0(f_0(D(f_0))) = 4$ enquanto que $m_0(f_t(D(f_t))) = 3$ para $t \neq 0$, assim $F(D(F))$ é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Logo, F é μ -constante mas não é Whitney equisingular. Novamente temos que f é quase-homogênea e o desdobramento F adiciona apenas termos de mesmo grau. Isto implica que F é topologicamente trivial por [16].

De forma análoga, podemos generalizar este exemplo para qualquer $n \geq 3$. Denote por $g_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ definida por

$$g_t(x_1, \dots, x_n) = (x_2^3 + 2x_2x_n + tx_1, x_1^2 + x_2^6 + x_2^4x_n + x_2^2x_n^2 + x_n^3, x_4, \dots, x_n).$$

E defina $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ por

$$f_t(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^2, x_n g_t(x_1, \dots, x_n)).$$

Temos então que

$$D(f_t) = V(x_2^3 + 2x_2x_n^2 + tx_1, x_1^2 + x_2^6 + x_2^4x_n^2 + x_2^2x_n^4 + x_n^6) \text{ e} \\ f_t(D(f_t)) = V(X_2^3 + 2X_2X_n + tX_1, X_1^2 + X_2^6 + X_2^4X_n + X_2^2X_n^2 + X_n^3, X_4, \dots, X_{2n-1}).$$

Assim, os valores dos invariantes de $D(F)$ e $F(D(F))$ são os mesmos do caso em que $n = 3$ para qualquer $n \geq 3$. Logo F é topologicamente trivial mas não é Whitney equisingular.

Note que neste trabalho usamos frequentemente o fato de que se f é quase-homogênea e f_t é uma deformação por termos de graus pesados maiores ou iguais aos graus pesados das funções coordenadas de f , isto é, f_t é uma deformação “upper”, então $F = (f_t, t)$ é topologicamente trivial. No caso $n = 2$, trivialidade topológica de F é equivalente a constância do número de Milnor da curva de pontos duplos $\mu(D(f_t))$, logo uma deformação f_t “upper” de f implica na constância do número de Milnor $\mu(D(f_t))$. Uma pergunta natural é se f_t é uma deformação por pesos de graus pesados menores do que os de f , isto é, f_t é “lower”, então $\mu(D(f_t))$ pode ser constante?

A seguir, vamos apresentar um exemplo que mostra que a resposta para esta pergunta é afirmativa no caso em que $n = 3$.

Exemplo 5.21. Considere o germe de aplicação $f(x, y, z) = (x, y, z^3, z^4 + xz, z^5 + yz)$ do Exemplo 5.13 e considere deformação de f dada por

$$f_t(x, y, z) = (x, y, z^3, z^4 + xz + tz^2, z^5 + yz).$$

Note que f é quase-homogêneo e f_t é uma deformação por um termo de grau pesado menor do que os pesos de f . Além disso, já que $\mu(D^2(f_t)) = 1$, segue que $\mu(D(f_t)) = 1$ para todo t . Logo f_t é “lower” e $\mu(D(f_t))$ é constante.

5.4. Equisingularidade na normalização

Nesta seção, vamos iniciar um estudo sobre a trivialidade topológica de famílias de germes de aplicações finitamente determinados $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. A inspiração dos resultados desta seção é o artigo de Fernández de Bobadilla e Pe Pereira [4] em que eles estudam a trivialidade topológica de uma família de superfícies em $\mathbb{C}^3$ através de sua normalização. Eles introduzem o conceito de equisingularidade na normalização para uma família de superfícies $X_t := \varphi_t^{-1}(0)$, onde $\varphi_t : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma família de funções holomorfas. Eles provam que em alguns casos a família φ_t é equisingular na normalização se, e somente se φ_t é topologicamente trivial.

Note que se $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ é um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$, então F é a normalização da imagem $X := F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$. Assim, vamos considerar o caso de famílias de germes de n -espaços analíticos em $(\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$ parametrizados por germes de aplicações $\mathcal{A}$ -finitamente determinados. Note que neste caso, o conjunto singular $\Sigma(X)$ e a família de curvas de pontos duplos na imagem $F(D(F))$ coincidem como conjuntos e $F^{-1}(\Sigma(X))$ coincide com o conjunto $D(F)$.

Inspirados em [4], vamos introduzir a noção de equisingularidade na normalização e uma noção mais fraca de que a trivialidade topológica para F , a saber, a trivialidade topológica abstrata.

Definição 5.22. Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. Sejam $(X, 0)$ e $(X_t, 0)$ os germes na origem das imagens $F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C})$ e $f_t(\mathbb{C}^n)$, respectivamente.

(a) Dizemos que X é abstratamente topologicamente trivial se existe um germe de homeomorfismo:

$$G : (X, 0) \rightarrow (X_0 \times \mathbb{C}, 0)$$

tal que $(G(F(D(F))), 0) = (f(D(f)) \times \mathbb{C}, 0)$ e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{F} & (X, 0) \\
 & \searrow p_2 & \downarrow G \\
 & & (X_0 \times \mathbb{C}, 0) \\
 & & \downarrow p_1 \\
 & & (\mathbb{C}, 0)
 \end{array}$$

onde p_1 é a restrição a $(X_0 \times \mathbb{C}, 0)$ da projeção de $\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}$ no último fator, e p_2 é a projeção de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ no último fator. .

(b) Dizemos que F é abstratamente topologicamente trivial no sentido forte se existem germes de homeomorfismos:

$$G_1 : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \quad e \quad G_2 : (F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}), 0) \rightarrow (f(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}, 0)$$

tais que

(b.1) G_1 é um desdobramento da aplicação identidade $g_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, isto é,

$$G_1(x, t) = (g_1(x, t), t), \quad g_1(x, 0) = x, \quad g_1(0, t) = 0$$

(b.2) O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{F} & (F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}), 0) \\
 G_1 \uparrow & & \downarrow G_2 \\
 (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{I} & (f(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}, 0)
 \end{array}$$

onde I é o desdobramento trivial de f , isto é, $I(x, t) = (f(x), t)$.

(c) Dizemos que F (ou ainda que $X = F(U \times T)$) é equisingular na normalização se existe um germe de homeomorfismo

$$\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$$

tal que

(c.1) O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{\alpha} & (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \\
F \downarrow & & \nearrow p_2 \\
(F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}), 0) & & \\
p_1 \downarrow & \nwarrow & \\
(\mathbb{C}, 0) & &
\end{array}$$

onde p_1 é a restrição a X da projeção de $\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}$ no último fator, e p_2 é a projeção de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ no último fator.

(c.2) $(\alpha(F^{-1}(0 \times \mathbb{C})), 0) = (0 \times \mathbb{C}, 0)$.

(c.3) α trivializa a família de curvas de pontos duplos $D(F)$ de F , isto é, $(\alpha(D(F)), 0) = (D(f) \times \mathbb{C}, 0)$.

Lema 5.23. ([4], Lemma 5) *Seja $h : X_1 \rightarrow X_2$ um homomorfismo entre espaços analíticos reduzidos preservando o conjunto singular, isto é, h leva o conjunto singular de X_1 no conjunto singular de X_2 . Seja $n_1 : \hat{X}_1 \rightarrow X_1$ e $n_2 : \hat{X}_2 \rightarrow X_2$ as aplicações de normalização. Existe um único homomorfismo $g : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ levantando h , isto é; que faz o seguinte diagrama comutar:*

$$\begin{array}{ccc}
\hat{X}_1 & \xrightarrow{g} & \hat{X}_2 \\
n_1 \downarrow & & \downarrow n_2 \\
X_1 & \xrightarrow{h} & X_2.
\end{array}$$

Como em [4], temos a seguinte proposição que relaciona as diversas noções de equisingularidade.

Proposição 5.24. *Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$.*

(a) *Se F é topologicamente trivial, então F é abstratamente topologicamente trivial no sentido forte.*

(b) *Se F é abstratamente topologicamente trivial no sentido forte, então F é abstratamente topologicamente trivial.*

(c) *Se F é abstratamente topologicamente trivial, então F é equisingular na normalização.*

(d) *Se F é equisingular na normalização, então a família de curvas $D(F)$ é μ -constante.*

Demonstração: A prova dos itens (a) e (b) seguem diretamente da definição. Tome um representante $F : U \times T \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1} \times T$ suficientemente pequeno tal que o representante

$\pi : D(F) \rightarrow T$ da família de curvas de pontos duplos seja bom no sentido de [22]. Assim, o homeomorfismo α da equisingularidade na normalização trivializa a família de curvas de pontos duplos $D(F)$, logo pelo Teorema 3.45 temos que $D(F)$ é μ -constante, e assim provamos o item (d).

A prova do item (c), segue como na prova da Proposição 6 de [4], basta observar que se F é abstratamente topologicamente trivial, temos um homeomorfismo

$$G : F(U \times T) \rightarrow f(U) \times T$$

que preserva o lugar singular, isto é, tal que $G(F(D(F))) = f(D(f)) \times T$. Assim, pelo Lema 5.23 temos que existe um único homomorfismo $\hat{G} : U \times T \rightarrow U \times T$ levantando G e que faz com que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U \times T & \xrightarrow{\hat{G}} & U \times T \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(U \times T) & \xrightarrow{G} & f(U) \times T \end{array}$$

seja comutativo.

Então, basta tomar $\alpha = \hat{G}$ na definição de equisingularidade na normalização. ■

Corolário 5.25. *Se F é topologicamente trivial, então F é equisingular na normalização.*

Observação 5.26. *Como vimos no capítulo 4, se $n = 2$ então F é topologicamente trivial se, e somente se $\mu(D(f_t))$ é constante. Ainda mais, nesse caso vale a volta do Corolário 5.25, e logo F é equisingular na normalização se, e somente se $\mu(D(f_t))$ é constante. Assim, quando $n \geq 3$ é natural esperar que a equisingularidade na normalização seja caracterizada pela constância do número de Milnor da curva de pontos duplos $D(f_t)$.*

Recorde que no caso em que $n \geq 3$, $D(F)$ é uma família de curvas genericamente reduzidas. Em geral, se $\pi : X \rightarrow T$ é uma família de curvas genericamente reduzidas, a constância do número de Milnor de X_t na origem não implica a trivialidade topológica da família X (veja [22] Exemplo 9.11(4)).

No entanto, no caso em que X é a família de pontos duplos $D(F)$, temos que a restrição da projeção de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ no primeiro fator ao espaço $D^2(F)$ é uma aplicação genericamente 1-a-1 sobre o espaço $D(F)$. Assim, o número de componentes irredutíveis de $D(f_t)$ é o mesmo que de $D^2(f_t)$.

Suponha que $\mu(D(f_t))$ seja constante. Pela Proposição 5.12, temos que $\mu(D^2(f_t))$ é constante e logo $r(D^2(f_t))$ é constante, então $r(D(f_t))$ também é constante. Pela fórmula de Milnor

segue que $\delta(D(f_t))$ é constante e pelo Teorema 3.45, temos que $D(F)$ é topologicamente trivial. Assim, um exemplo de uma família de curvas genericamente reduzidas X que é μ -constante e que não é topologicamente trivial não pode ocorrer quando X for uma família de curvas de pontos duplos $D(F)$.

Uma versão mais fraca da volta do Corolário 5.25 pode ser dada da seguinte forma:

“Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1} \times \mathbb{C}, 0)$ um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n-1}, 0)$. Se F é equisingular na normalização, então F é abstratamente topologicamente trivial no sentido forte.”

Esboço da prova: Suponha que F seja equisingular na normalização, então existe um germe de homeomorfismo $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ que trivializa a família de curvas de pontos duplos $D(F)$ de F , isto é, $(\alpha(D(F)), 0) = (D(f) \times \mathbb{C}, 0)$. Usando a técnica do “average” para homeomorfismos, podemos levantar α a um homeomorfismo $\tilde{\alpha} : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ definido por $\tilde{\alpha}(x, x', t) = (\alpha(x, t), \alpha(x', t), t)$ que trivializa $D^2(F)$ e que induz um homeomorfismo $\alpha_{Av} : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$.

Já que F é um germe de homeomorfismo em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \setminus D(F), 0)$, então o germe de homeomorfismo α_{Av} induz um germe de homeomorfismo $G : (F(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}), 0) \rightarrow (f(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}, 0)$ que trivializa X e é uma extensão do homeomorfismo $\hat{G} : (F(D(F)), 0) \rightarrow (f(D(f)) \times \mathbb{C}, 0)$ que está bem definido pela construção de α_{Av} . Assim, X é abstratamente topologicamente trivial.

Para provarmos que se F é equisingular na normalização então F é topologicamente trivial basta estendermos o homeomorfismo $G_2 : F(U \times T) \rightarrow f(U) \times T$ proveniente da trivialidade topológica abstrata no sentido forte para um homeomorfismo no espaço ambiente $\tilde{G}_2 : \mathbb{C}^{2n-1} \times T \rightarrow \mathbb{C}^{2n-1} \times T$.

Observamos que se X é uma família de curvas reduzidas ou genericamente reduzidas que é topologicamente trivial, então os homeomorfismos dados nos Teoremas 3.18 e 3.45 são homeomorfismos sobre X e não sobre o espaço ambiente. Uma maneira natural de provar que a equisingularidade na normalização de F implica na trivialidade topológica de F , e também que a equisingularidade na normalização é controlada pela constância do número de Milnor $\mu(D(f_t))$, é estender o homeomorfismo das famílias de curvas (topologicamente triviais) $D(F)$ e $F(D(F))$ para o espaço ambiente. Assim, chegamos aos seguintes problemas:

Problema 1: Seja F um desdobramento de um germe de aplicação finitamente determinado $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$. Se $\mu(D(f_t))$ é constante, então F é topologicamente trivial?

Este problema foi proposto em [44] por Nuño-Ballesteros e Jorge Pérez. Duas abordagens foram realizadas para a solução deste problema, a primeira via integração de campo de vetores

e a segunda através de extensões de homeomorfismos de famílias de curvas. Assim, este problema deu origem a outra questão que vamos descrever a seguir.

Problema 2: A trivialidade topológica de uma família de curvas significa a existência de um homeomorfismo $h : (X, \sigma(T)) \rightarrow (X_0 \times T, T)$ sobre T .

Em [12] temos que o homeomorfismo h existe se, e somente se existem homeomorfismos $h_t : (B_\epsilon, X_0, 0) \rightarrow (B_\epsilon, X_t, \sigma(t))$ para todo $t \in T$. Conjecturamos que os homeomorfismos $h_t, t \in T$, podem ser “colados” em um único homeomorfismo. Precisamente, a questão é quando existe um homeomorfismo

$$h : (B_\epsilon \times T, X, \sigma(T)) \rightarrow (B_\epsilon \times T, X_0 \times T, T)$$

sobre T ?

Esta questão é puramente topológica, independentemente de X e X_0 serem reduzidos ou não (veja [22], Conjecture 1).

Recentemente, conforme citado por Greuel em ([22], Conjecture 1, pág 76) Fernández de Bobadilla afirmou que esta conjectura tem uma resposta positiva. Na seção 2 de seu artigo [3] ele introduziu a noção de “cuts” e uma técnica de trivialização topológica. Usando os mesmos argumentos de sua generalização do Teorema de Timourian a conjectura segue, segundo Bobadilla.

Deixamos este problema bem como a conjectura de que a trivialidade topológica é controlada pela constância do número de Milnor da curva de pontos duplos $D(f_t)$ para estudos posteriores.

Referências Bibliográficas

- [1] V.I. ARNOLD; A. VARCHENKO; S. GOUSSEIN-ZADÉ. *Singularités des applications différentiables*. v. 1. Moscou: Mir, 1986.
- [2] M. ATIYAH; I. MACDONALD. *Introduction to Commutative Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley, 1969. 128 p.
- [3] J.F. de BOBADILLA. *Topological equisingularity of function germs with 1–dimensional critical set*. Preprint: arXiv: math/0603508v4 [math.AG] 20 Oct 2006.
- [4] J. F. de BOBADILLA; M. PE PEREIRA. *Equisingularity at the normalisation*. Journal of Topology, Londres v.1, n.4 p. 879-909, 2008.
- [5] J. F. BOBADILLA; J. SNOUSSI; M. SPIVAKOVSKY. *Equisingularity in one parameter families of generically reduced curves*. Preprint: arXiv:1405.6760v1, [math.AG] 27 May 2014.
- [6] J. BRIANÇON; A. GALLIGO; M. GRANGER. *Deformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites*. Mémoires de la Société Mathématique de France, Paris, sér. 2, v. 1, 69 p. 1980.
- [7] J. BRIANÇON; J.-P. SPEDER. *La trivialité topologique n’implique pas les conditions de Whitney*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 280 (1975), no. 6, Aiii, A365-A367.
- [8] J.W. BRUCE; W.L. MARAR. *Images and varieties*. Journal of Mathematical Sciences, São Paulo, v. 82, n. 5, p. 3633-3641. 1996.
- [9] J.W. BRUCE; M.A.S. RUAS; M.J. SAIA. *A note on determinacy*. Proceedings of the American Mathematical Society, Washington, v. 115, n. 3, 865-871 p. 1992.

- [10] C. BRÜCKER; G. -M. GREUEL. *Deformationen isolierter Kurvensingularitäten mit eingebetteten Komponenten*. Manuscripta Mathematica. v. 70, n. 1, p. 93-114. 1990.
- [11] D.A. BUCHSBAUM; D. EISENBUD. *Generic Free Resolutions and a Family of Generically Perfect Ideals*. Advances in Mathematics, New York, v.18 n.3, p. 245-301. 1975.
- [12] R.O. BUCHWEITZ; G.M. GREUEL. *The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities*. Inventiones mathematicae, v. 58, p. 241-281.1980.
- [13] R. CALLEJAS-BEDREGAL; K. HOUSTON; M.A.S. RUAS. *Topological Triviality of Families of Singular Surfaces*. Preprint: arXiv: math/0611699v1 [math.CV] 22 Nov 2006.
- [14] H-J. CHIANG-HSIEH; J. LIPMAN. *A numerical criterion for simultaneous normalization*. Duke Math. J., v. 133, n. 2, p. 347-390. 2006.
- [15] LÊ CÔNG-TRÌNH. *Equinormalizability and topological triviality of deformations of isolated curve singularities over smooth base spaces*. Kodai Mathematical Journal, v. 38, n. 3, p. 642-657. 2015.
- [16] J. DAMON. *Topological triviality and versality for subgroups of A and K : II. Sufficient conditions and applications*. Nonlinearity, v.5, n.2, p. 373-412. 1992.
- [17] L. DUNG-TRÀNG; M. LEJEUNE; B. TEISSIER. *Sur un critère d'équisingularité*. Paris: C.R. Acad. sér. A, v. 271, p. 1065-1067. 1970.
- [18] T. GAFFNEY. *Polar multiplicities and equisingularity of map germs*. Topology, v. 32, n. 1, p. 185-223, 1993.
- [19] C. G. GIBSON. *Singular points of smooth mappings*. Londres: Pitman, 1979. 239 p.
- [20] C. G. GIBSON; K. WIRTHMÜLLER; A. A. du PLESSIS; E. J. N. LOOIJENGA. *Topological stability of smooth mappings*. Springer- Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 552. 1976. 154 p.
- [21] S. GRECO. *Normal Varieties*. (Institutiones Mathematicae). Academic Press Inc, 1979. 72 p.
- [22] G-M. GREUEL. *Equisingular and Equinormalizable Deformations of Isolated Non Normal Singularities*. Preprint, 2017.
- [23] G.-M. GREUEL; C. LOSSEN; E. SHUSTIN. *Introduction to Singularities and Deformations*. Springer-Verlag, 2000. 471 p.

- [24] P. GRIFFITHS; J. HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. New York: Wiley-Interscience (John Wiley & Sons) 1978. 813 p.
- [25] R.C. GUNNING. *Introduction to holomorphic functions of several variables*. v. II, Belmont: Wadsworth, 1990. 218 p.
- [26] M. E. HERNANDES; A. J. MIRANDA; G. PEÑAFORT-SANCHIS. *A presentation matrix algorithm for $f_*\mathcal{O}_{X,x}$* . Preprint, 2013.
- [27] H. HIRONAKA. *Normal cones in analytic Whitney stratifications*. Publications Mathématiques de l'IHÉS . v. 36, p. 127-138. 1969.
- [28] T.de JONG; G. PFISTER. *Local Analytic Geometry: Basic Theory and Applications*. In: Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. 382 p.
- [29] J. KOLLÁR. *Simultaneous normalization and algebra husks*, Asian J. Math., v. 15 n. 3, p. 437-450, 2011.
- [30] J. LIPMAN. *Equisingularity and Simultaneous Resolution of Singularities*. Progress in Mathematics, v. 181, 485-505 p. 2000.
- [31] W. L. MARAR. *Mapping fibrations and multiple point schemes*. 1989. 120 f. Tese (Doutorado em Filosofia) Instituto de Matemática da Universidade de Warwick.
- [32] W.L. MARAR; D. MOND. *Multiple point schemes for corank 1 maps*. J. London Math. Soc. sér. 2, v. 39, n. 3, p. 553-567. 1989.
- [33] W. L. MARAR; J. J. NUÑO-BALLESTEROS. *A note on finite determinacy for corank 2 map germs from surfaces to 3-space*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 145, n. 1, p. 153-163. 2008.
- [34] W. L. MARAR; J. J. NUÑO-BALLESTEROS. *Slicing corank 1 map germs from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$* . Quart. J. Math. v. 65, p. 1375-1395, 2014.
- [35] W. L. MARAR, J. J. NUÑO-BALLESTEROS, G. PEÑAFORT-SANCHIS. *Double point curves for corank 2 map germs from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$* . Topology Appl., v. 159, n.2, p. 526-536. 2012.
- [36] H. MATSUMURA. *Commutative ring theory*. Tradução de M. Reid. Cambridge Univ. Press, 1986. 320 p.
- [37] J. MILNOR; P. ORLIK. *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*. Topology, v. 9, p. 385-393. 1970.

- [38] D. MOND. *On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$* . Proc. London Math., sér. 3, v. 50, n. 2, p. 333-369, 1985.
- [39] D. MOND. *Some remarks on the geometry and classification of germs of map from surfaces to 3-space*. Topology, v. 26, n. 3, p. 361-383.1987.
- [40] D. MOND. *The number of vanishing cycles for a quasihomogeneous mapping from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$* . Oxford: Quart. J. Math., v. 42, n. 1, p. 335-345.1991.
- [41] D. MOND. *Vanishing cycles for analytic maps*. Separata de: D. MOND; J. MONTALDI (Eds.). Singularity Theory and its Applications: Warwick 1989 Parte I: Geometric Aspects of Singularities. Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 1462, p. 221-234. 1991.
- [42] D. MOND; R. PELLIKAAN. *Fitting ideals and multiple points of analytic mappings*. Separata de: E. R. de ARELLANO (Ed.). Algebraic Geometry and Complex Analysis, Patzcuaro 1987. Springer- Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 1414, p. 107-161. 1989.
- [43] D. MOND; D. van STRATEN. *Milnor number equals Tjurina number for functions on space curves*. J. London Math. Soc. v.63, n.1, p. 177-187. 2001.
- [44] J.J. NUÑO-BALLESTEROS; V. H. JORGE-PÉREZ. *Finite determinacy and Whitney equisingularity of map germs from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^{2n-1}$* . Manuscripta Mathematica. v. 128, p. 389-410. 2009.
- [45] J.J. NUÑO-BALLESTEROS; M.J. SAIA. *Multiplicity of Boardman strata and deformations of map germs*. Glasgow Math. J., v. 40, n.1, p. 21-32. 1998.
- [46] J.J.NUÑO-BALLESTEROS; J.N. TOMAZELLA. *The Milnor number of a function on a space curve germ*. Bull. London Math. Soc. v. 40, p. 129-138, 2008.
- [47] G. PEÑAFORT-SANCHIS. *Multiple point spaces of finite holomorphic maps*. 2015. 126 f. Tese (Doutorado Internacional em Matemática) Faculdade de Ciências Matemáticas da Universidade de Valência, 2015.
- [48] G. PEÑAFORT-SANCHIS. *Reflection Maps*. Preprint: ArXiv: 1609.03222v1 [math.AG] 11 sep 2016.
- [49] presmatrix.txt (Biblioteca para Software Singular). Disponível em: <https://sites.google.com/site/aldicio>. Acesso em: 03 fev. 2017.
- [50] M.A.S. RUAS. *Equimultiplicity of topologically equisingular families of parametrized surfaces in $\mathbb{C}^3$* . Preprint: 2013, arXiv:1302.5800v1 [math.CV] 23 Feb 2013.

- [51] M.A.S. RUAS. *On the equisingularity of families of corank 1 generic germs*. Differential Topology, Foliations and Group Action. Contemporary Mathematics, V.161, p. 113-121. 1994.
- [52] M.A.S. RUAS; O.N. SILVA. *Whitney equisingularity of families of surfaces in $\mathbb{C}^3$* . Preprint: arXiv:1608.08290v1 [math.CV] 30 Aug 2016.
- [53] O.N. SILVA; J. SNOUSSI. *Whitney equisingularity in one parameter families of generically reduced curves*. Preprint, 2016.
- [54] J. STUTZ. *Equisingularity and equisaturation*. Amer. Journ. of Math., v. 94, n. 4, p. 1269-1281. 1972.
- [55] F. TARI. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*. Notas Didáticas do ICMC n. 34. São Carlos, ICMC-USP, 1999. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/Portal/conteudo/806/737/notas-didaticas>. Acesso em: 03 fev. 2017.
- [56] B. TEISSIER. *Résolution simultanée : II. Résolution simultanée et cycles évanescents*. Separata de: A. DEMAZURE; H. PINKHAM; B. TEISSIER. Séminaire sur les Singularités des Surfaces: Palaiseau 1976-1977, Springer- Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 777, p. 82-146. 1980.
- [57] B. TEISSIER. *Sur la classification des singularités des espaces analytiques complexes*. Separata de: Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Warszawa 1983. Warszawa: PWN, Vol. 1, p. 763-781. 1984.
- [58] B. TEISSIER. *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*. Separata de: P. HOLM. Real and complex singularities, Oslo 1976. Proc. Nordic summer school 1976. Sijthoff and Noordhoff 1978, p.565-677.
- [59] B. TEISSIER. *Variétés polaires II: Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*. Separata de: J. M. AROCA; R. BUCHWEITZ; M. GIUSTI; M. MERLE. Algebraic Geometry: La Rábida, 1981, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., sér. 961, p. 314-491. 1982.
- [60] D. TROTMAN. *Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications*. Ann. Sci. École Norm. Sup., v. 12, n. 4, p. 453-463. 1979.
- [61] C. T. C. WALL. *Finite determinacy of smooth map-germs*. Bull. London Math. Soc., v. 13, n. 6, p. 481-539. 1981.

- [62] H. WHITNEY. *Complex Analytic Varieties*. Princeton: Addison Wesley, 1972. 399 p.
- [63] H. WHITNEY. *Tangents to an Analytic Variety*. Ann. Math. v. 81, n. 3, p. 496-549. 1965.
- [64] H. WHITNEY. *The Singularities of a Smooth n -Manifold in $(2n-1)$ -Space*. Ann. Math. sér. 2, v.45, n. 2, p. 247-293, 1944.
- [65] D. WOLFRAM; G. M. GREUEL; G. PFISTER; H. SCHÖNEMANN. *Singular 4-0-2. A computer algebra system for polynomial computations*. 2015. Disponível em: <http://www.singular.uni-kl.de>. Acesso em: 03 fev. 2017.
- [66] O. ZARISKI. *Collected Papers, vol. IV*, MIT Press, Cambridge, 1979. 640 p.
- [67] O. ZARISKI. *Studies in Equisingularity II*. Equisingularity in Codimension 1 (and Characteristic Zero). Amer. J. Maths., v. 87, n. 4, p. 972-1006. 1965.
- [68] O. ZARISKI. *Studies in Equisingularity I*. Equivalent Singularities of Plane Algebroid Curves. Amer. J. Maths., v. 87, n. 2, p. 507-536. 1965.