Sobre a geometria diferencial do cross-cap no
3-espço Euclidiano

Martín Barajas Sichacá

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Martín Barajas Sichacá

Sobre a geometria diferencial do cross-cap no 3-espço Euclidiano

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Farid Tari

USP – São Carlos
Março de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S634s Sichacá, Martín Barajas
Sobre a geometria diferencial do cross-cap
no 3-espço Euclidiano / Martín Barajas Sichacá;
orientador Farid Tari. - São Carlos - SP, 2017.
149 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Cross-cap. 2. singularidades. 3. projeções.
4. aplicações dobra. 5. equações diferenciais
implícitas. I. Tari, Farid, orient. II. Título.

Martín Barajas Sichacá

**On the differential geometry of the cross-cap in the
Euclidean 3-space**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the degree
of the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Farid Tari

**USP – São Carlos
March 2017**

*Este trabalho é dedicado à minha família,
em particular à minha mãe,
Mariela.*

AGRADECIMENTOS

Começo agradecendo ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Farid Tari pela orientação, paciência e muitas dicas que enriqueceram minha vida pessoal e profissional.

Agradeço à Profa. Ana Claudia Nabarro pela valiosa colaboração no último capítulo deste trabalho e pela amizade.

Agradeço à minha família que sempre me apoiou. Em especial à minha mãe Mariela quem sempre me deu forças para continuar, aos meus irmãos e sobrinhos.

Aos meus colegas e amigos Camila, Patricia, Otoniel, Sidnei, Jorge, Leandro, Jackson, Mostafa, Lito, Paulo, Jorge, Yutaro, que se converteram na minha família e fizeram do ICMC minha casa.

Agradeço a Aydee pela companhia, ajuda, apoio e boas conversas.

De forma especial agradeço à Lorena pelas muitas conversas em companhia de café e pão de queijo. Obrigado pelos muitos momentos especiais compartilhados.

Aos professores e funcionários do ICMC por toda a ajuda e atenção.

A todas as pessoas que esqueci de citar, mas que de alguma maneira contribuíram no desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

*“Geometria é a arte de pensar bem
desenhando mal.”
(Henri Poincaré)*

RESUMO

Nesta tese estudamos a geometria diferencial do cross-cap usando ferramentas da teoria de singularidades. Estudamos curvas definidas sobre uma superfície regular que captam o contato da superfície com planos e esferas e estendemos o estudo para o cross-cap. Consideramos os fenômenos locais que ocorrem genericamente na família de projeções ortogonais do cross-cap e obtemos informações detalhadas sobre as bifurcações da projeção do conjunto dos pontos duplos juntamente com a do contorno aparente. Estudamos as simetrias reflexuais infinitesimais do cross-cap através das singularidades da família das aplicações dobra e damos uma caracterização geométrica das mesmas. Finalmente, consideramos dualidade nas equações diferenciais binárias que definem as curvas assintóticas e as linhas de curvatura sobre o cross-cap. Estudamos o conjunto dos pontos onde ocorrem as inflexões de tais curvas e a relação deste conjunto com o conjunto sub-parabólico e flecnodal.

Palavras-chave: Cross-cap, singularidades, projeções, aplicações dobra, equações diferenciais implícitas.

ABSTRACT

In this thesis we study the differential geometry of the cross-cap using singularity theory. We study curves on a regular surface that capture the contact of the surface with planes and spheres and extend our study to the cross-cap. We deal with local phenomena that occur generically in the family of orthogonal projection of the cross-cap and obtain detailed information about the bifurcations of the projection of double point curve together with the profile. We study the infinitesimal reflectional symmetry of a cross-cap via the singularities of the fold maps and give a geometrical characterization of these maps. Finally, we consider the duality in the binary differential equations of the asymptotic curves and of the curvature lines on a cross-cap. We study the inflection set of this curves and their relation with the subparabolic set and the flecnodal curve.

Key-words: Cross-cap, singularities, projections, folding maps, implicit differential equations.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	21
2.1	Sobre a geometria diferencial Euclidiana em $\mathbb{R}^3$	21
2.1.1	<i>Curvas</i>	21
2.1.2	<i>Superfícies</i>	21
2.2	Ferramentas da teoria de singularidades	24
2.2.1	<i>O espaço de jatos</i>	25
2.2.2	<i>Singularidades de germes de aplicações suaves</i>	26
2.2.3	<i>Os grupos de Mather</i>	27
2.2.4	<i>Espaços tangentes às $\mathcal{G}$-órbitas</i>	28
2.2.5	<i>Determinação finita</i>	29
2.2.6	<i>Desdobramentos versais</i>	30
2.2.7	<i>Transversal completa</i>	31
2.2.8	<i>Germes simples e módulos</i>	33
2.2.9	<i>Sobre os critérios de reconhecimento de singularidades</i>	33
2.3	Grupos geométricos de Damon	34
2.4	Germes de funções	34
2.4.1	<i>Discriminantes e os conjuntos de bifurcação</i>	35
2.5	Contato entre subvariedades	36
2.5.1	<i>Transversalidade e genericidade</i>	37
2.5.2	<i>A família de funções altura</i>	38
2.5.3	<i>A família de funções distância ao quadrado</i>	39
2.5.4	<i>A família de projeções a hiperplanos</i>	41
2.6	A geometria diferencial do cross-cap	42
3	DIREÇÕES ADMISSÍVEIS	47
3.1	Direções f -admissíveis	47
3.2	Direções h_v -admissíveis	51
3.3	Direções d_a -admissíveis	56
3.4	Direções admissíveis no cross-cap	59
4	PROJEÇÕES ORTOGONAIS	65

4.1	Ferramentas e notação	65
4.2	Classificação de submersões pela ação de $\mathcal{A}(X)$	69
4.3	Bifurcações no contorno aparente e na projeção da c.p.d.	70
4.3.1	$\mathcal{A}(X)$ - <i>dobra</i>	72
4.3.2	$\mathcal{A}(X)$ - <i>cúspide</i>	73
4.3.3	$\mathcal{A}(X)$ - <i>rabo de andorinha</i>	76
4.3.4	$\mathcal{A}(X)$ - <i>sharksfin</i>	81
4.3.5	$\mathcal{A}(X)$ - <i>deltoide</i>	86
4.4	Transversalidade das $\mathcal{A}(X)$ -órbitas e genericidade	87
5	APLICAÇÕES DOBRA	91
5.1	A família de aplicações dobra	91
5.2	Aplicações dobra sobre o cross-cap	94
5.3	Caso (i) ($\beta \neq 0$)	97
5.3.1	<i>Caso (i)-(a)</i>	97
5.3.2	<i>Caso (i)-(b)</i>	98
5.4	Caso (ii) ($\beta = 0$)	99
5.4.1	<i>Caso (ii)-(a)</i>	99
5.4.2	<i>Caso (ii)-(b)</i>	100
5.4.3	<i>Caso (ii)-(c)</i>	100
5.5	Caso (iii) ($\beta = \gamma = 0$)	100
5.6	Geometria das aplicações dobra	104
5.7	Genericidade das singularidades da família	112
6	DUALIDADE NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPLÍCITAS	113
6.1	Transformada de Legendre	113
6.2	Equações diferenciais implícitas	115
6.2.1	<i>Equações diferenciais binárias</i>	115
6.3	EDB sobre o cross-cap	116
6.4	Transformada de Legendre de uma EDB	118
6.5	Inflexões nas soluções das EDB's sobre o cross-cap	120

APÊNDICE A CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES DAS P. O. C. 129

A.1	Demonstração do Teorema 4.9	129
A.1.1	<i>Os 1-jatos</i>	130
A.1.2	<i>Os 2-jatos</i>	134
A.1.3	<i>Os 3-jatos</i>	136

REFERÊNCIAS	145
-----------------------	-----

INTRODUÇÃO

O estudo da geometria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ tem uma longa e bem sucedida história. Diferentes abordagens tem sido consideradas para o estudo destes objetos matemáticos. De fato, as superfícies em $\mathbb{R}^3$ podem ser obtidas de várias formas, por exemplo, elas podem ser dadas implicitamente, ou seja por uma equação da forma $h(u, v, w) = 0$, para alguma função suave $h : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, ou explicitamente, através de uma família de parametrizações (ver [20, 21, 56]). O Teorema de Sard ([29, 35]) afirma que o conjunto dos $c \in \mathbb{R}$ nos quais o conjunto $h(u, v, w) = c$ deixa de ser uma superfície suave, tem medida de Lebesgue nula. Então é natural pensar que quase todas (“genericamente”) as superfícies dadas implicitamente sejam suaves.

Um exemplo de grande interesse é o guarda-chuva de Whitney, o qual é uma superfície dada implicitamente pela equação $h(u, v, w) = v^2 - u^2w$. Em particular, o guarda-chuva de Whitney não é “genérico” neste sentido, isto é, devido ao fato de que não é suave na origem. Uma representação gráfica desta superfície é dada na Figura 1.

Figura 1 – Guarda-chuva de Whitney

Considere o germe $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$, dado por $f(x, y) = (x, xy, y^2)$. A imagem de f é o guardachuva de Whitney sem a sua “alça” (a semi-reta dada por $u = v = 0$ e $w < 0$). Vamos chamar de cross-cap à imagem de qualquer germe g que é $\mathcal{A}$ -equivalente a f .

O cross-cap aparece nos trabalhos de Hassler Whitney como uma singularidade estável de germes de aplicações de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$. É bem conhecido que o cross-cap é uma superfície singular. Isto leva em que as ferramentas clássicas para o estudo das superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ não podem ser aplicadas no cross-cap numa vizinhança da origem.

No entanto, uma maneira alternativa de estudar a geometria de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ é por meio da teoria de contato. Ao longo das últimas décadas tem sido considerado o estudo das superfícies utilizando técnicas da teoria de singularidades. Esta nova abordagem produziu muitos resultados interessantes (ver por exemplo [32]). Na literatura, este estudo é conhecido como geometria diferencial genérica.

O estudo da geometria genérica de superfícies singulares tem chamado a atenção de muitos matemáticos nos últimos anos. Recentemente, em [49] os autores consideram a geometria diferencial da “borda cuspidal” e em [19], é considerado o estudo da geometria do cross-cap no 3-espço de Minkowski.

O estudo da geometria diferencial do cross-cap no 3-espço Euclidiano começou com os trabalhos de J. W. Bruce e J. West ([16, 60]). Mais adiante aparecem muitos outros

Figura 2 – Classificação geométrica do cross-cap usando isometrias na meta. Na esquerda o cross-cap elíptico, no centro o cross-cap parabólico e na direita o cross-cap hiperbólico. ([16, 60])

trabalhos sobre esta superfície (ver na Seção 2.6). Não obstante, a geometria genérica de superfícies singulares ainda possui muitos “segredos”, os quais estamos interessados em entender.

Desta maneira, esta tese está organizada da seguinte forma.

No Capítulo 2, apresentamos alguns resultados básicos e bem conhecidos da geometria diferencial de curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$ e uma introdução à teoria de singularidades.

No Capítulo 3, introduzimos o conceito de direção admissível associado a um germe de função $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$. Estabelecidas as características destas direções, consideramos germes de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e, sobre estes, as funções altura e distância ao quadrado (defi-

nidas na Seção 2.5). A finalidade é estudar curvas sobre uma superfície com a propriedade de captar o contato da superfície com planos e esferas.

No Capítulo 4 estudamos as projeções ortogonais do cross-cap. Para isto, consideramos a $\mathcal{A}(X)$ -classificação de germes de submersões de $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ (dada em [60]), e através da composta com a parametrização do cross-cap estandar, obtemos informações da bifurcação da projeção da curva dos pontos duplos junto com a do contorno aparente.

O Capítulo 5 é dedicado ao estudo das aplicações dobra sobre o cross-cap. Para isto, consideramos a restrição da família de aplicações dobra a um cross-cap geométrico (como definido na Seção 2.6), e através da ação do grupo $\mathcal{A}$, obtemos uma lista das singularidades que acontecem nos membros da família. Também estudamos a geometria associada às aplicações dobra sobre o cross-cap.

No Capítulo 6 estudamos as inflexões das curvas assintóticas e linhas de curvatura definidas sobre um cross-cap, perto do ponto de cross-cap. De fato, aproveitamos os resultados dados para as configurações topológicas locais destas folhações ([46, 48, 58, 60]), e aplicamos uma transformada de Legendre em $\mathbb{R}^3$ para obter informações sobre a existência dessas curvas.

Finalmente, no Apêndice A, é apresentada uma prova do Teorema 4.9 (classificação de germes de submersões de $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ sob a ação do grupo $\mathcal{A}(X)$, [60]), o qual é a ferramenta principal no estudo do Capítulo 4.

Ao longo desta tese foi usado o software Maple para fazer cálculos simbólicos. Nos Capítulos 4 e 6 também foram usados os pacotes computacionais *MapR2R2* e *ODEinR2* respectivamente ([43, 44]).

PRELIMINARES

Neste capítulo recordamos de alguns resultados de geometria diferencial e teoria das singularidades necessários. Em cada subseção, citamos referências de notações e onde podem ser encontradas as provas dos resultados.

2.1 Sobre a geometria diferencial Euclidiana em $\mathbb{R}^3$

Ao longo desta tese usaremos algumas definições e resultados básicos da geometria de curvas e superfícies no 3-espaco Euclidiano. A notação tem sido tomada de [20] e as provas podem ser encontradas em [20, 56].

2.1.1 *Curvas*

Definição 2.1. *Uma curva diferenciável parametrizada, é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real $\mathbb{R}$, em $\mathbb{R}^3$.*

Se a curva da definição anterior satisfaz $\frac{d}{dt}\alpha(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, então a curva é chamada de regular.

Ao longo desta tese consideraremos tanto curvas regulares como curvas não regulares. A teoria clássica para curvas que usaremos pode ser encontrada em [20, 56].

2.1.2 *Superfícies*

Definição 2.2. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$, é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$, e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

- X é diferenciável,
- X é homeomorfismo,
- para todo $q \in U$, dX_q é injetiva,

onde dX_q denota a diferencial de X em q .

Análogo ao caso de curvas, ao longo desta tese, consideraremos também superfícies não regulares.

Definição 2.3. Para uma superfície regular S e $p \in S$, consideramos todas as curvas definidas sobre S passando por p . Definimos o plano tangente à S em p , denotado como $T_p S$ como o espaço vetorial de dimensão 2 que contém todos os vetores tangentes à família de curvas no ponto p .

Em coordenadas locais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$ e, de fato, os vetores $X_u(q) = \frac{\partial}{\partial u} X(q)$ e $X_v(q) = \frac{\partial}{\partial v} X(q)$, onde $X(q) = p$ formam uma base para $T_p S$. Assim, temos que o conjunto $\{X_u, X_v, N\}$ constitui um referencial sobre S , onde $N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$ é chamado de vetor normal a S .

Definição 2.4. Seja $w \in T_p S$, a forma quadrática $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$I(w) = \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \geq 0,$$

é chamada de Primeira Forma Fundamental em p .

Consideremos $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, $p \mapsto N(p)$, onde $\mathbb{S}^2$ é a 2-esfera de centro a origem e raio 1. Esta aplicação assim definida é chamada aplicação normal de Gauss. É bem conhecido que a diferencial da aplicação de Gauss num ponto p , $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, é uma aplicação linear auto-adjunta.

Definição 2.5. Seja $w \in T_p S$, a forma quadrática $II : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$II(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle,$$

é chamada a Segunda Forma Fundamental de S em p .

Definição 2.6. Seja α uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, definida sobre uma superfície S e passando por $p \in S$, k é a curvatura de α em p e $\cos(\theta) = \langle n(s), N(s) \rangle$, onde $n(s)$ é o vetor normal de α e $N(s)$ é a restrição do normal N a α .

(a) O número $k_n = k \cos(\theta)$, é chamado a curvatura normal de α em p .

(b) O número $k_g = k \sin(\theta)$, é chamado a curvatura geodésica de α em p .

Para curvas definidas sobre S temos o triedro de Darboux que damos na seguinte definição.

Definição 2.7. Consideremos uma curva regular α , parametrizada pelo comprimento de arco s , sobre uma superfície S . Definimos o triedro de Darboux pelas seguintes relações:

- $T(s) = \alpha'(s)$,
- $(N \times T)(s)$,
- $N(s) = N(\alpha(s))$, vetor normal a S ao longo de α .

Análogo às equações de Frenet, temos para este triedro as equações de Darboux:

- $T'(s) = k_g(s)(N \times T)(s) + k_n(s)N(s)$,
- $(N \times T)'(s) = -k_g(s)T(s) - \tau_g(s)N(s)$,
- $N'(s) = -k_n(s)T(s) + \tau_g(s)(N \times T)(s)$,

onde, $\tau_g(s) = \langle N'(s), (N \times T)(s) \rangle$. A função τ_g é chamada torção geodésica.

Através das funções k_n , k_g e τ_g podemos definir alguns elementos geométricos que serão usados.

Definição 2.8. Seja α uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco s , sobre uma superfície S e $w \in T_p S$. Dizemos que

- (i) w é uma direção assintótica se $k_n(w) = 0$,
- (ii) α é uma linha assintótica se $\alpha'(s)$ é uma direção assintótica para todo $s \in I$ (longe do pontos parabólicos).
- (iii) w é uma direção principal se $\tau_g(w) = 0$,
- (iv) α é uma linha de curvatura se $\alpha'(s)$ é uma direção principal para todo $s \in I$ (longe do pontos umbílicos).

A configuração local das linhas assintóticas e das linhas de curvatura perto das singularidades dos campos de direções (pontos de cúspide de Gauss e pontos umbílicos respetivamente, ver Figuras 3 e 4) tem sido estudada por vários autores, ver [2, 10, 14, 25, 30, 32].

As linhas assintóticas são dadas pela seguinte equação diferencial binária (EDB)

$$ldu^2 + 2mdudv + ndv^2 = 0,$$

e as linhas de curvatura por

$$(mE - lF)du^2 + (nE - lG)dudv + (nF - mG)dv^2 = 0.$$

Definição 2.9. Para uma superfície regular S , definimos

(a) a curvatura Gaussiana $K(p) = \det(-dN_p)$,

(b) e a curvatura média $H(p) = \text{traço}(-dN_p)$.

Se S é dada através de uma parametrização X , temos que

$$K(u, v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(u, v) \quad \text{e} \quad H(u, v) = \frac{1}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}(u, v).$$

Os pontos sobre a superfície são classificados usando a curvatura Gaussiana da seguinte forma:

$$\text{para } p \in S, \quad \begin{cases} p \text{ é elíptico} & \text{se } K(p) > 0, \\ p \text{ é parabólico} & \text{se } K(p) = 0, \\ p \text{ é hiperbólico} & \text{se } K(p) < 0. \end{cases}$$

Das equações de Darboux é fácil ver que o vetor $w \in T_p S$ é direção principal se, e somente se, $-dN_p(w) = k_n(w)w$. Assim, as direções principais são autovetores de $-dN_p$ (Teorema de Olinde Rodrigues [21, 56]).

Definição 2.10. Sejam w_1 e w_2 os autovetores de $-dN_p$. Os autovalores associados $k_i = k_n(w_i)$ $i = 1, 2$ são chamados de curvaturas principais.

Definição 2.11. Um ponto $p \in S$ é chamado umbílico se $k_1(p) = k_2(p)$.

Definição 2.12. Um ponto parabólico $p \in S$ é chamado Cúspide de Gauss se o vetor tangente à curva parabólica em p é simultaneamente direção principal e assintótica.

Nas Figuras 3 e 4 são mostradas as configurações genéricas das folhações principais e assintóticas perto das singularidades.

2.2 Ferramentas da teoria de singularidades

Continuamos apresentando agora os conceitos básicos da teoria de singularidades que são fundamentais para o desenvolvimento desta tese. As definições e resultados nesta seção são tomados das seguintes referências [3, 9, 11, 26, 29, 32, 37, 59] e a notação de [32].

Figura 3 – Linhas de curvatura perto de pontos umbílicos (Umbílicos Darbouxianos).

Figura 4 – Curvas assintóticas perto de pontos de cúspide de Gauss.

2.2.1 O espaço de jatos

Definição 2.13. *Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo um ponto $p \in \mathbb{R}^n$.*

- (i) *Dizemos que X é equivalente a Y em p se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de p , tal que $X \cap U = Y \cap U$. Isto define uma relação de equivalência entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo p , a qual é chamada de germe de X em p e denotado por X, p (ou (X, p)).*
- (ii) *Dados $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações, dizemos que f é equivalente a g se existe uma vizinhança $U \subset X \cap Y$ com $p \in U$, tal que $f|_U = g|_U$. Esta é também uma relação de equivalência e definimos um germe em p de uma aplicação suave como uma classe de equivalência sobre esta relação. Denotamos o germe de uma aplicação suave em p como $f : \mathbb{R}^n, p \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

As vezes precisaremos que os elementos da classe tenham a mesma imagem em p , a saber q , então escrevemos

$$f : \mathbb{R}^n, p \rightarrow \mathbb{R}^m, q.$$

Denotamos por $\mathcal{E}_n$ o conjunto dos germes na origem de $\mathbb{R}^n$, de funções suaves $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{E}_n = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é um germe de uma função suave}\}. \quad (2.1)$$

Com a soma e o produto, o $\mathcal{E}_n$ torna-se uma $\mathbb{R}$ -álgebra comutativa com unidade. $\mathcal{E}_n$ é também um anel local com ideal maximal $\mathcal{M}_n$, o qual é o conjunto de germes suaves que se anulam na origem. Mais precisamente,

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}. \quad (2.2)$$

Para um inteiro positivo k , a k -ésima potência de $\mathcal{M}_n$ é denotada por $\mathcal{M}_n^k$. Se $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n, 0$, temos que $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes de funções $x_i, i = 1, \dots, n$, isto é,

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{E}_n \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_n^k = \mathcal{E}_n \{x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}. \quad (2.3)$$

O conjunto de todos os germes de aplicações suaves $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é denotado por $\mathcal{E}_{n,m}$. Este é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre, assim

$$\mathcal{E}_{n,m} = \underbrace{\mathcal{E}_n \times \cdots \times \mathcal{E}_n}_{m\text{-vezes}} = (\mathcal{E}_n)^m.$$

Denotamos por $\mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{E}_{n,m} = (\mathcal{M}_n^{k+1})^m$ o conjunto de aplicações $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$, com derivadas parciais de ordem menor ou igual do que k nulas na origem.

O espaço de k -jatos de germes de aplicações suaves $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ é definido como

$$J^k(n, m) = \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m} / \mathcal{M}_n^{k+1} \mathcal{E}_{n,m}.$$

A aplicação $j^k : \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m} \rightarrow J^k(n, m)$ designa a cada germe f seu k -jato, o qual é denotado por $j^k f$. O conjunto $J^k(n, m)$ pode ser identificado com o conjunto de m -uplas de polinômios em n -variáveis de grau menor ou igual à k sem termos constantes. Dado $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$, $j^k f$ corresponde ao seu polinômio de Taylor de grau k na origem.

2.2.2 Singularidades de germes de aplicações suaves

Dado $p \in U$ e uma aplicação suave $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dizemos que a aplicação f é singular em p se

$$\text{rank}(df_p) < \min(n, m),$$

onde df_p é a aplicação linear dada pela diferencial da f no ponto p . O ponto p é chamado ponto singular de f .

Definição 2.14. *Nas condições acima definimos:*

- (i) O conjunto singular de f , denotado por Σ_f (ou simplesmente Σ), é o conjunto de pontos singulares da f , isto é

$$\Sigma_f = \{p \in U \mid \text{rank}(df_p) < \min(n, m)\}.$$

- (ii) O discriminante de f , denotado por Cr_f é o conjunto

$$Cr_f = \{p \in U \mid \text{rank}(df_p) < m\}.$$

- (iii) O discriminante de f , denotado por Δ_f (ou Δ), é a imagem do discriminante Cr_f por f , assim

$$\Delta_f = f(Cr_f).$$

2.2.3 Os grupos de Mather

É bem conhecido que a ação de um grupo G sobre uma variedade M (ver [32]) define uma relação de equivalência sobre M da seguinte forma: para x e y em M , dizemos que x é equivalente a y (denotado por $x \sim y$) se existe $g \in G$ para o qual $y = g \cdot x$. As classes de equivalência são chamadas de órbitas sobre a ação. Assim dado $x \in M$, a órbita em x sobre a ação de G é o conjunto

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

Denotamos por $\mathcal{R}$ o grupo de germes de difeomorfismos $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ (mudanças de coordenadas na fonte). O grupo $\mathcal{R}$ age suavemente sobre $\mathcal{E}_{n,m}$ da seguinte forma:

$$h \cdot f = f \circ h^{-1}, \quad (\text{ação à direita})$$

para $h \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{E}_{n,m}$. Analogamente, $\mathcal{L}$ é o grupo de germes de difeomorfismos $\mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$ (mudanças de coordenadas na meta) agindo suavemente sobre $\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ como segue:

$$k \cdot f = k \circ f, \quad (\text{ação à esquerda})$$

para $k \in \mathcal{L}$ e $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$. Denotamos agora por $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ o produto direto de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, o qual age suavemente sobre $\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ por

$$(h, k) \cdot f = k \circ f \circ h^{-1},$$

para $(h, k) \in \mathcal{A}$ e $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$. Assim, dado $g \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ dizemos que g é $\mathcal{A}$ -equivalente à f (denotado por $g \sim_{\mathcal{A}} f$) se existem germes de difeomorfismos $(h, k) \in \mathcal{A}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n, 0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m, 0 \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{R}^n, 0 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m, 0 \end{array} \quad (2.4)$$

Há um outro grupo muito importante, o grupo de contato $\mathcal{K}$. O grupo $\mathcal{K}$ é o conjunto de germes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0)$, os quais podem ser escritos na forma $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$, com $h \in \mathcal{R}$ e $H_1(x, 0) = 0$ para x perto a 0. O conjunto de germes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (0, 0)$ da forma (I_n, H) , onde I_n é o germe da identidade em $\mathbb{R}^n$, é denotado por $\mathcal{C}$. O grupo $\mathcal{K}$ é o produto semi-direto de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{C}$, assim $\mathcal{K} = \mathcal{R} \rtimes \mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ age suavemente sobre $\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$, como segue. Dados $f, g \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ e $(h, H) \in \mathcal{K}$, $g = (h, H) \cdot f$ se, e somente se

$$(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))).$$

Os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$, são conhecidos como os grupos de Mather.

Em geral, seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather e $f, g \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$. Então f e g são ditos $\mathcal{G}$ -equivalentes (denotado por $f \sim_{\mathcal{G}} g$) se eles estão na mesma $\mathcal{G}$ -órbita.

Seja $\mathcal{G}_k$ um subgrupo de um grupo de Mather $\mathcal{G}$ cujos elementos tem k -jato o germe da identidade. O grupo $\mathcal{G}_k$ é um subgrupo normal de $\mathcal{G}$. Defina $J^k \mathcal{G} = \mathcal{G} / \mathcal{G}_k$ o qual denotamos por $\mathcal{G}^{(k)}$. Os elementos de $J^k \mathcal{G}$ são k -jatos dos elementos de $\mathcal{G}$.

A ação de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ induz uma ação de $J^k \mathcal{G}$ sobre $J^k(n, m)$ como segue: para $j^k f \in J^k(n, m)$ e $j^k h \in J^k \mathcal{G}$,

$$j^k h \cdot j^k f = j^k(h \cdot f).$$

2.2.4 Espaços tangentes às $\mathcal{G}$ -órbitas

Definimos o espaço tangente θ_f a $\mathcal{E}_{n,m}$ em f como o $\mathcal{E}_n$ -módulo de germes de campos de vetores suaves ao longo de f . Assim, $\xi \in \theta_f$ se $\xi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow T(\mathbb{R}^m)$ e $\pi_m \circ \xi = f$, onde $\pi_m : T(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a projeção natural do fibrado tangente $T(\mathbb{R}^m)$ a $\mathbb{R}^m$.

Definimos $\theta_n = \theta_{1_{\mathbb{R}^n}}$, $\theta_m = \theta_{1_{\mathbb{R}^m}}$, onde $1_{\mathbb{R}^n}$ e $1_{\mathbb{R}^m}$ denotam os germes na origem da identidade em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente.

Para $f \in \mathcal{E}_{n,m}$, definimos o $\mathcal{E}_n$ -homomorfismo

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \phi &\mapsto df \circ \phi, \end{aligned} \tag{2.5}$$

e o $\mathcal{E}_m$ -homomorfismo (via o pull-back $f^* : \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_n$, $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ para $\alpha \in \mathcal{E}_m$)

$$\begin{aligned} wf : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \psi &\mapsto \psi \circ f. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Denotamos por $f^*(\mathcal{M}_m)$ o pull-back do ideal maximal em $\mathcal{E}_m$. Os espaços tangentes $L\mathcal{G} \cdot f$ às $\mathcal{G}$ -órbitas de f no germe f são definidos como segue:

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= tf(\mathcal{M}_n \theta_n), \\ L\mathcal{L} \cdot f &= wf(\mathcal{M}_m \theta_m), \\ L\mathcal{A} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f, \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \theta_f, \\ L\mathcal{K} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{C} \cdot f. \end{aligned}$$

Os elementos dos grupos de Mather deixam fixo a origem. Para considerar as singularida-

des longe da origem, definimos os espaços tangentes extendidos como segue:

$$\begin{aligned} L_e \mathcal{R} \cdot f &= tf(\theta_n), \\ L_e \mathcal{L} \cdot f &= wf(\theta_m), \\ L_e \mathcal{A} \cdot f &= L_e \mathcal{R} \cdot f + L_e \mathcal{L} \cdot f, \\ L_e \mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m)\theta_f, \\ L_e \mathcal{K} \cdot f &= L_e \mathcal{R} \cdot f + L_e \mathcal{C} \cdot f. \end{aligned}$$

Dado um sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_m)$ em $\mathbb{R}^m, 0$, os germes dos campos de vetores

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right) \circ f, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m} \right) \circ f$$

formam uma base livre para θ_f . Então θ_f pode ser identificado com $\mathcal{E}_{n,m}$ (θ_f é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre) e temos

$$\begin{aligned} L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \\ L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \\ L\mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} L_e \mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{E}_n \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}, \\ L_e \mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m) \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \\ L_e \mathcal{C} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_m) \cdot \mathcal{E}_n \cdot \{e_1, \dots, e_m\}, \end{aligned}$$

onde $e_1, \dots, e_m$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^m$ considerados como elementos de $\mathcal{E}_{n,m}$ e $(x_1, \dots, x_n)$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^n, 0$.

Definição 2.15. A codimensão da órbita ($\mathcal{G}$ -codimensão) de f é definida por

$$\text{cod}_{\mathcal{G}}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}}{L\mathcal{G} \cdot f} \right)$$

e a codimensão da órbita estendida ($\mathcal{G}_e$ -codimensão) de f é definida por

$$\text{cod}_{\mathcal{G}_e}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{E}_{n,m}}{L_e \mathcal{G} \cdot f} \right).$$

2.2.5 Determinação finita

Um germe f é dito ser k - $\mathcal{G}$ -determinado se, para qualquer outro germe g com $j^k g = j^k f$, tem-se que $g \sim_{\mathcal{G}} f$. O k -jato de f é então chamado de jato suficiente. O menor inteiro k com esta propriedade é chamado de grau de determinação de f . Um germe é dito ser $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se é k - $\mathcal{G}$ -determinado para algum inteiro k .

Teorema 2.16 ([59]). *Para cada f e $\mathcal{G}$ os seguintes enunciados são equivalentes:*

- (i) f é $\mathcal{G}$ -determinado,
- (ii) para algum k , $\mathcal{M}_n^k \mathcal{E}_{n,m} \subset L\mathcal{G} \cdot f$,
- (iii) $\text{cod}_{\mathcal{G}}(f) < \infty$,
- (iv) $\text{cod}_{\mathcal{G}_e}(f) < \infty$.

Quando $\mathcal{G} = \mathcal{A}$, o espaço tangente $L\mathcal{A} \cdot f$ tem uma estrutura mista e isto faz com que estimar o grau de determinação seja muito mais difícil.

O problema de calcular exatamente o grau de determinação de um germe foi resolvido em [9] considerando ações de subgrupos unipotentes de $\mathcal{G}$.

O Corolário 2.17 é o principal resultado de determinação em [9] e será muito usado ao longo desta tese.

Corolário 2.17 ([9]). *Se f satisfaz*

$$\mathcal{M}_n^l \mathcal{E}_{n,m} \subset L\mathcal{K} \cdot f + \mathcal{M}_n^{l+1} \mathcal{E}_{n,m}$$

e

$$\mathcal{M}_n^{r+1} \mathcal{E}_{n,m} \subset L\mathcal{A}_1 \cdot f + \mathcal{M}_n^{r+l+1} \mathcal{E}_{n,m},$$

então f é r - $\mathcal{A}_1$ -determinado.

2.2.6 Desdobramentos versais

Definição 2.18. *Seja $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$. Um desdobramento a p parâmetros (p, F) de f é um germe*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0) &\rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, (0, 0) \\ (x, u) &\mapsto (\bar{f}(x, u), u), \end{aligned}$$

com $\bar{f}(x, 0) = f(x)$. A família

$$\bar{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m, 0$$

é chamada de deformação a p parâmetros de f .

Definição 2.19. *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather e I a identidade em $\mathcal{G}$.*

- (i) *Um morfismo entre dois desdobramentos (p, F) e (q, G) é um par $(\alpha, \psi) : (p, F) \rightarrow (q, G)$ com $\alpha : \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathcal{G}, I$, $\psi : \mathbb{R}^p, 0 \rightarrow \mathbb{R}^q, 0$, tais que*

$$\bar{f}_u = \alpha(u) \cdot \bar{g}_{\psi(u)}.$$

O desdobramento (p, F) é dito induzido de (q, G) por (α, ψ) .

- (ii) Dois desdobramentos (p, F) e (q, G) são $\mathcal{G}$ -equivalentes se existe um morfismo $(\alpha, \psi) : (p, F) \rightarrow (q, G)$ onde ψ é invertível.
- (iii) Um desdobramento (p, F) de um germe f é dito $\mathcal{G}$ -versal se qualquer desdobramento (q, G) de f pode ser induzido de (p, F) .

Uma definição análoga pode ser dada para o grupo estendido $\mathcal{G}_e$, substituindo o grupo $\mathcal{G}$ por $\mathcal{G}_e$ na Definição 2.19.

O menor número p_0 de parâmetros para um desdobramento $\mathcal{G}$ -versal (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -versal) é justamente a $\text{cod}_{\mathcal{G}}(f)$ (respectivamente $\text{cod}_{\mathcal{G}_e}(f)$). Um desdobramento versal (p_0, F) é chamado desdobramento mini-versal. Os desdobramentos mini-versais são únicos por equivalência. Qualquer desdobramento versal é equivalente a uma suspensão de um desdobramento mini-versal.

A importância de um desdobramento $\mathcal{G}$ -mini-versal (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -mini-versal) de um germe, é que este fornece um $\mathcal{G}$ -modelo (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -modelo) de todas as possíveis deformações locais do germe f . Para mais detalhes ver [59].

Dado um desdobramento (p, F) de um germe $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$, denote por $\dot{F}_i$, $i = 1, \dots, p$, os germes em $\mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$, dados por

$$\dot{F}_i(x) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_i}(x, 0).$$

Teorema 2.20 (Critério infinitesimal,[59]). *Um desdobramento (p, F) de um germe $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ é $\mathcal{G}$ -versal se, e somente se,*

$$L\mathcal{G} \cdot f + \mathbb{R} \{ \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p \} = \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$$

e $\mathcal{G}_e$ -versal se, e somente se,

$$L\mathcal{G}_e \cdot f + \mathbb{R} \{ \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_p \} = \mathcal{E}_{n,m}.$$

Um desdobramento (p, F) de f é dito $\mathcal{G}$ -trivial (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -trivial) se é $\mathcal{G}$ -equivalente (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -equivalente) ao desdobramento constante (p, f) .

Um germe f é dito $\mathcal{G}$ -estável (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -estável) se todos os seus desdobramentos são triviais.

Teorema 2.21 ([59]). *Um germe f é $\mathcal{G}$ -estável (respectivamente $\mathcal{G}_e$ -estável) se, e somente se, $\text{cod}_{\mathcal{G}}(f) = 0$ (respectivamente $\text{cod}_{\mathcal{G}_e}(f) = 0$).*

2.2.7 Transversal completa

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather. A transversal completa é uma ótima ferramenta para obter as órbitas quando $\mathcal{G}$ age em $\mathcal{E}_{n,m}$. A principal referência para esta subseção é o artigo [9].

Vamos começar com este resultado dado por Mather que tem a ver com ação de grupos de Lie e cálculo de órbitas.

Lema 2.22 (Lema de Mather [38]). *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre uma variedade de dimensão finita M . Seja X uma subvariedade conexa de M . Então X está contida numa única órbita de G se, e somente se,*

- (i) *para cada $x \in X$, $T_x X \subset T_x(G \cdot x) = LG \cdot x$,*
- (ii) *$\dim T_x(G \cdot x)$ permanece constante para todo $x \in X$.*

O seguinte é um corolário do Lema de Mather (Lema 2.22).

Teorema 2.23 (Transversal Completa [9]). *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente sobre um espaço vetorial V , e seja $H \subset V$ um subespaço tal que*

$$g \cdot (\alpha + \beta) = g \cdot \alpha + \beta$$

para todo $\alpha \in V$ e $\beta \in H$. Então

- (i) *Para todo $\alpha \in V$ temos*

$$G \cdot \alpha \cap (\alpha + H) \supset \alpha + (T_\alpha G \cdot \alpha \cap H),$$

- (ii) *se $T \subset H$ é um subespaço tal que*

$$H \subset T + T_\alpha G \cdot \alpha$$

então para todo $\beta \in H$, $\alpha + \beta$ está na mesma órbita que $\alpha + \beta'$ para algum $\beta' \in T$.

O subespaço T é chamado de Transversal Completa.

Segue agora um resultado de classificação. A ideia básica é encontrar uma lista completa dos $k + 1$ -jatos com um k -jato dado. Podemos usar um processo indutivo para classificar germes de aplicações, e usando determinação finita saberemos onde parar.

Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather. O grupo $J^k \mathcal{G}$ (como definido na Seção 2.2.3) é um grupo de Lie que age suavemente sobre $J^k(n, m)$. Seja H^k o subespaço vetorial de $J^k(n, m)$ formado pelas m -uplas de polinômios homogêneos de grau k em n variáveis.

Corolário 2.24 (Transversal Completa para germes [9]). *Seja $\mathcal{G}$ um grupo de Mather. Considere $f \in \mathcal{M}_n \mathcal{E}_{n,m}$ e $T \subset H^{k+1}$ um subespaço vetorial de H^{k+1} , tais que*

$$H^{k+1} \subset L(J^{k+1} \mathcal{G}_1) \cdot j^{k+1} f + T.$$

Então, para todo $(k + 1)$ -jato $j^{k+1} g$ com $j^k g = j^k f$ temos que $j^{k+1} g$ está na mesma $J^{k+1} \mathcal{G}_1$ -órbita que $j^k f + t$, para algum $t \in T$.

2.2.8 Germes simples e módulos

Definição 2.25. (i) Seja X uma variedade e G um grupo de Lie agindo suavemente sobre X . A modalidade de um ponto $x \in X$ sobre a ação de G em X é o menor número m , tal que uma vizinhança suficientemente pequena de x pode ser coberta por um número finito de órbitas de uma família a m -parâmetros.

(ii) O ponto x é dito simples se a sua modalidade é 0, equivalentemente, uma vizinhança suficientemente pequena de x intersepta somente um número finito de órbitas.

Para um grupo de Mather $\mathcal{G}$, a $\mathcal{G}$ -modalidade de um germe de aplicação $\mathcal{G}$ -finitamente determinado é definida como a modalidade de um jato suficiente, no espaço de jatos e sobre a ação do grupo de jatos.

2.2.9 Sobre os critérios de reconhecimento de singularidades

Um outro problema clássico em teoria de singularidades é como reconhecer as singularidades de uma classificação considerada.

Em particular, para o caso de reconhecimento dos $\mathcal{A}$ -tipos de singularidades de germes de aplicações do plano no plano, existem alguns resultados clássicos (critérios para reconhecer singularidades estáveis [62]) e outros mais recentes (critérios para reconhecer alguns tipos de singularidades não estáveis [34, 54]), os quais serão muito usados ao longo desta tese.

Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ um germe suave com $\text{corank}(f) = 1$. Considere

$$\lambda(x, y) := \det(df_{(x,y)}),$$

e o campo de vetores η perto da origem, tal que $\eta|_{\lambda} = 0$, isto é, η gera o $\ker(df)$.

A Tabela 1 mostra os critérios de reconhecimento para germes de aplicações do plano no plano de corank 1 em termos de λ e η . Na Tabela 1 temos que $\eta^k \lambda = \eta(\eta^{k-1} \lambda)$

Dobra	$\eta\lambda \neq 0$.
Cúspide	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$.
Rabo de andorinha	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$.
Lábios	$d\lambda(0) = 0, \det(d^2\lambda)(0) > 0$.
Bicos	$d\lambda(0) = 0, \det(d^2\lambda)(0) < 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$.
Borboleta	$d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0$.
Gaivota	$d\lambda(0) = 0, \det(d^2\lambda)(0) < 0, \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$.
Ganso	$d\lambda(0) = 0, \text{rank}(d^2\lambda) = 1, \eta^2\lambda(0) \neq 0, \theta^3\lambda(0) \neq 0$.

Tabela 1 – Critério de reconhecimento de $\mathcal{A}$ -órbitas de germes de corank 1.

e θ é um campo de vetores tal que $\theta(x, y)$ gera o $\ker(d^2\lambda_{(x,y)})$.

Os critérios para os germes do tipo dobra e cúspide foram dados por Whitney em [62]. Os critérios para os outros germes na Tabela na 1, foram dados por Saji em [54]. Estes últimos ao longo desta tese serão chamados de Critérios de Saji.

Para o caso de germes de $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ usaremos o seguinte critério, dado por Whitney, para reconhecer as singularidades estáveis do tipo cross-cap.

Proposição 2.26 (Critério de Whitney). *Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ um germe tal que $f \sim (u, f_2(u, v), f_3(u, v))$, onde $f_2, f_3 \in \mathcal{M}_2^2$. Então f tem singularidade na origem do tipo cross-cap se, e somente se,*

$$((f_2)_{uv}(f_3)_{vv} - (f_2)_{vv}(f_3)_{uv})(0, 0) \neq 0.$$

2.3 Grupos geométricos de Damon

Os resultados sobre determinação finita, transversal completa e desdobramentos versais são estabelecidos para um dos grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{A}$. Mas, de fato em algumas outras situações é necessário considerar subgrupos daqueles grupos de Mather. Por exemplo, considerar germes de uma função sobre uma variedade $X, 0$ em $\mathbb{R}^n$. Assim, qualquer difeomorfismo relevante em $\mathcal{R}$ deve preservar o germe da variedade $X, 0$. Em [18], J. Damon mostrou que os resultados apresentados na Seção 2.2.2 são válidos para uma grande classe de subgrupos de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{A}$, os quais são chamados de grupos geométricos de Damon. Por exemplo, o subgrupo de $\mathcal{R}$ que preserva o germe da variedade $X, 0$ é um grupo geométrico de Damon ou simplesmente grupo geométrico. Para mais detalhes ver [18].

2.4 Germes de funções

Nesta seção consideraremos germes de funções (isto é quando $m = 1$). Dado um germe de função $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$, com singularidade em $p = (0, \dots, 0)$, dizemos que p é uma singularidade não degenerada se

$$\text{rank}(d^2 f_p) = n,$$

onde $d^2 f_p$ é a hessiana de f em p .

Teorema 2.27 (Lema de Morse). *Suponha que $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tem uma singularidade não degenerada na origem. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente à forma quadrática não degenerada*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Suponha agora que $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tem uma singularidade degenerada na origem. Considere o co-posto de f , denotado por $\text{corank}(f)$, e dado pelo número

$$\text{corank}(f) = n - \text{rank}(d^2 f_p).$$

Lema 2.28 (Lema de separação de Thom). *Suponha que $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tem uma singularidade com $\text{corank}(f) = r$ na origem. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente a um germe da forma*

$$g(x_1, \dots, x_r) + Q(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

onde $g \in \mathcal{M}_r^3$ e $Q(x_{r+1}, \dots, x_n) = \pm x_{r+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$.

Dados dois germes g_1 e g_2 em $\mathcal{M}_r^3$ e Q como no Lema 2.28, temos que $g_1 + Q$ e $g_2 + Q$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes se, e somente se, g_1 e g_2 são $\mathcal{R}$ -equivalentes. Assim, o Lema 2.28 reduz a dimensão da fonte onde a classificação é realizada.

A seguinte lista (Tabela 2) de germes simples de funções foi dada em [3] onde

Nome	Forma normal	$\mathcal{R}$ -cod.
$A_k^\pm, k \geq 0$	$\pm x_1^{k+1} + Q(x_2, \dots, x_n)$	k
$D_k^\pm, k \geq 4$	$x_1^2 x_2 \pm x_2^{k-1} + Q(x_3, \dots, x_n)$	k
E_6	$x_1^3 + x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	6
E_7	$x_1^3 + x_1 x_2^4 + Q(x_3, \dots, x_n)$	7
E_8	$x_1^3 + x_2^5 + Q(x_3, \dots, x_n)$	8

Tabela 2 – Germes simples de funções ([3]).

$$Q(x_{r+1}, \dots, x_n) = \pm x_{r+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Consideramos agora deformações de germes de funções. Para germes de funções é importante considerar o produto direto do grupo $\mathcal{R}$ com traslações, denotado $\mathcal{R}^+$.

Definição 2.29. *Duas famílias de germes de funções $F, G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ são P - $\mathcal{R}^+$ -equivalentes se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0)$ da forma $\Phi(x, u) = (\alpha(x, u), \psi(u))$ e um germe de função $c : \mathbb{R}^a, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$G(x, u) = F(\Phi(x, u)) + c(u).$$

Teorema 2.30. *Uma deformação $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ de um germe de uma função f em $\mathcal{M}_n$ é $\mathcal{R}^+$ -versal se, e somente se,*

$$L_e \mathcal{R} \cdot f + \mathbb{R} \{1, \dot{F}_1, \dots, \dot{F}_a\} = \mathcal{E}_n,$$

onde $\dot{F}_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$.

2.4.1 Discriminantes e os conjuntos de bifurcação

Para uma família a a -parâmetros F de germes de funções, associamos alguns germes de conjuntos como segue.

O conjunto de catástrofe C_F de uma família $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ é definido por

$$C_F = \left\{ (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \mid \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, u) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, u) = 0 \right\}.$$

O conjunto de bifurcação de F é definido por

$$B_F = \left\{ u \in \mathbb{R}^a, 0 \mid \exists (x, u) \in C_F \text{ e } \text{rank} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(x, u) \right) < n \right\}.$$

O discriminante de F é definido como

$$D_F = \left\{ u \in \mathbb{R}^a, 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, 0 \text{ e } F = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \text{ em } (x, u) \right\}.$$

Seja $\pi_{C_F} = \pi_2|_{C_F} : C_F \rightarrow \mathbb{R}^a, 0$, onde $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^a, 0$ é a projeção na segunda componente. O germe π_{C_F} é chamado de aplicação de catástrofe de F .

Proposição 2.31. *Sejam F e G duas famílias de germes de funções $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^a, (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tal que os seus conjuntos de catástrofe C_F e C_G são variedades suaves. Suponha que F e G são $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -equivalentes. Então as aplicações de catástrofe π_{C_F} e π_{C_G} são $\mathcal{A}$ -equivalentes. Mais ainda, existe um germe de difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $\phi(B_F) = B_G$.*

2.5 Contato entre subvariedades

A geometria de uma subvariedade num espaço ambiente Z depende da descrição das suas propriedades, as quais são invariantes sob a ação de um grupo de transformações de Z . Cada geometria tem sua classe de subvariedades modelo, as quais são invariantes sob a ação do grupo de transformações de Z (para mais detalhes ver [32]). Podemos então associar invariantes geométricos de uma subvariedade M através da comparação desta com os modelos, de tal forma que um invariante num ponto $p \in M$ se define como o invariante do modelo que melhor aproxime M em p .

Dedicamos esta seção para o conceito de contato entre subvariedades, sendo esta uma ferramenta da teoria de singularidades para estudar a geometria diferencial de uma subvariedade M em um espaço ambiente Z .

Definição 2.32. *Sejam $M_i, N_i, i = 1, 2$, subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(M_1) = \dim(M_2) = m$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2) = d$. Dizemos que o contato entre M_1 e N_1 em y_1 é do mesmo tipo que o contato entre M_2 e N_2 em y_2 se, existe um germe de difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n, y_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, y_2$, tal que $\Phi(M_1) = M_2$ e $\Phi(N_1) = N_2$. Neste caso, escrevemos $K(M_1, N_1, y_1) = K(M_2, N_2, y_2)$.*

A Definição 2.32 é local, assim o espaço ambiente $\mathbb{R}^n$ pode ser substituído por outra variedade qualquer Y .

Teorema 2.33. *Sejam $g_i : M_i, x_i \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ germes de imersões e $f_i : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^k, 0$ germes de submersões, com $N_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$. Então os pares (M_1, N_1) e (M_2, N_2) têm o mesmo tipo de contato na origem se, e somente se $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Proposição 2.34. *Sejam M_i , $i = 1, 2$, duas subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(M_1) = \dim(M_2) = n - 1$ e $g_i : M_i, x_i \rightarrow \mathbb{R}^n, y_i$ germes de imersões. Sejam $f_i : \mathbb{R}^n, y_i \rightarrow \mathbb{R}, 0$ germes de submersões. Então $K(g_1(M_1), \mathcal{F}_{f_1}; y_1) = K(g_2(M_2), \mathcal{F}_{f_2}; y_2)$ se, e somente se, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{R}^+$ -equivalentes, onde $\mathcal{F}_{f_i}$ denota a folheação regular*

$$\mathcal{F}_{f_i} = \{f_i^{-1}(c) \mid c \in \mathbb{R}, 0\}.$$

2.5.1 Transversalidade e genericidade

Definição 2.35. *Sejam X e Y variedades suaves, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave. Seja W uma subvariedade de Y e $x \in X$. Então dizemos que f intersecta W transversalmente em x (ou é transversal a W em x) se uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i) $f(x) \notin W$,
- (ii) $f(x) \in W$ e $T_{f(x)}Y = df_x(T_xX) + T_{f(x)}W$.

Se f é transversal a W para todo $x \in X$, dizemos que f é transversal a W e escrevemos $f \pitchfork W$.

Definição 2.36. *Um conjunto residual de um espaço topológico é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos.*

Teorema 2.37 (Teorema de Transversalidade de Thom [29]). *Sejam X e Y variedades suaves e Z uma subvariedade de $J^r(X, Y)$. Seja*

$$\mathcal{T}_Z = \{g \in C^\infty(X, Y) \mid j^r g \pitchfork Z\}.$$

Então o conjunto $\mathcal{T}_Z$ é residual de $C^\infty(X, Y)$ na topologia C^∞ . Mais ainda, se Z é um conjunto fechado de $J^r(X, Y)$, então $\mathcal{T}_Z$ é aberto em $C^\infty(X, Y)$.

O seguinte é uma variante do Teorema 2.37.

Teorema 2.38 ([29]). *Seja $g : X \rightarrow Y$ uma aplicação suave entre duas variedades suaves. Seja $Z \subset J^r(X, Y)$ uma subvariedade. Então o conjunto*

$$\mathcal{T}_Z = \{g \in C^\infty(X, Y) \mid j^r g \pitchfork Z\}$$

é um conjunto denso de $C^\infty(X, Y)$. Mas ainda, se Z é um conjunto fechado de $J^r(X, Y)$, então $\mathcal{T}_Z$ é aberto em $C^\infty(X, Y)$.

Definição 2.39. *Sejam X e Y variedades suaves. Uma propriedade (P) em $C^\infty(X, Y)$ é genérica se, o conjunto de todos os $g \in C^\infty(X, Y)$ satisfazendo (P) é residual de $C^\infty(X, Y)$ na topologia C^∞ .*

É claro que uma ferramenta forte para garantir genericidade é o Teorema 2.37 e as suas variações. Ao longo desta tese restringiremos, convenientemente se necessário, o espaço de funções e definiremos sempre genericidade em termos de transversalidade.

2.5.2 A família de funções altura

Um hiperplano em $\mathbb{R}^n$ está totalmente determinado (em uma forma precisa) por um vetor unitário $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $r \in \mathbb{R}$. Se $H(\mathbf{v}, r)$ denota tal hiperplano, então

$$H(\mathbf{v}, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, \mathbf{v} \rangle - r = 0\}.$$

Nós estamos interessados no contato de subvariedades com uma família de hiperplanos paralelos.

Desta forma, podemos considerar a família de funções altura $\mathcal{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{H}(y, \mathbf{v}) = \langle y, \mathbf{v} \rangle.$$

Dada uma imersão $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma subvariedade M em $\mathbb{R}^n$, consideramos a família de funções altura $H : M \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre M definida por

$$H(p, \mathbf{v}) = \mathcal{H}(g(p), \mathbf{v}) = \langle g(p), \mathbf{v} \rangle. \quad (2.7)$$

Para $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixo, denotamos por $h_{\mathbf{v}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $h_{\mathbf{v}}(p) = H(p, \mathbf{v})$. Segue do Teorema 2.33 que o contato de $g(M)$ com a família de hiperplanos paralelos determinada por $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ é medido pelas $\mathcal{K}$ -singularidades da função $h_{\mathbf{v}}$.

Teorema 2.40. (i) Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma curva suave C em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, a família H é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -versal.

(ii) Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma superfície M de dimensão 2 em $\mathbb{R}^n$, com $3 \leq n \leq 7$, a família H é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -versal.

Teorema 2.41. (i) Para uma curva genérica C imersa em $\mathbb{R}^n$, as $\mathcal{K}$ -singularidades locais de $h_{\mathbf{v}}$ são do tipo A_k , $k = 1, \dots, n$.

(ii) Para uma superfície genérica M imersa em $\mathbb{R}^3$, as $\mathcal{K}$ -singularidades locais de $h_{\mathbf{v}}$ são do tipo A_k , $k = 1, 2, 3$.

Para o caso no qual a curva (respectivamente superfície) está imersa em $\mathbb{R}^3$, tem-se a seguinte caracterização geométrica.

Proposição 2.42 ([11]). Seja C uma curva regular imersa em $\mathbb{R}^3$ e $h_{\mathbf{v}}$ um membro da família de funções altura sobre C .

- (i) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_1 se, e somente se, $v = \alpha n(p) + \beta b(p)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 0$.
- (ii) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_2 se, e somente se, $v = \pm b(p)$ e $\tau(p) \neq 0$.
- (iii) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_3 se, e somente se, $v = \pm b(p)$, $\tau(p) = 0$ e $\tau'(p) \neq 0$.
- (iv) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_k se, e somente se, $v = \pm b(p)$, $\tau(p) = \tau'(p) = \dots = \tau^{(k-3)}(p) = 0$ e $\tau^{(k-2)}(p) \neq 0$,

onde os vetores t, n, b são o triedro de Frenet sobre C e τ é a torção da curva.

Proposição 2.43 ([32]). *Seja S uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^3$ e h_v um membro da família de funções altura sobre S .*

- (i) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in S$ do tipo A_1 se, e somente se, $v = N(p)$ e p não é um ponto parabólico.
- (ii) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in S$ do tipo A_2 se, e somente se, $v = N(p)$, p é um ponto parabólico e não é ponto de cúspide de Gauss.
- (iii) h_v tem uma singularidade no ponto $p \in S$ do tipo A_3 se, e somente se, $v = N(p)$, p é um ponto de cúspide de Gauss.

2.5.3 A família de funções distância ao quadrado

Uma hiperesfera em $\mathbb{R}^n$ está determinada, de forma única, por seu centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e seu raio r . Seja

$$\mathbb{S}(\mathbf{a}, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - \mathbf{a}, y - \mathbf{a} \rangle - r^2 = 0\}$$

que denota tal esfera. Estamos interessados no contato de uma subvariedade com uma família de hiperesferas com o mesmo centro, então consideramos a família de funções distância ao quadrado $\mathcal{D} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\mathcal{D}(y, \mathbf{a}) = \langle y - \mathbf{a}, y - \mathbf{a} \rangle.$$

Dada uma imersão $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma subvariedade M em $\mathbb{R}^n$, consideramos a família de funções distância ao quadrado $D : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sobre M definida por

$$D(p, \mathbf{a}) = \mathcal{D}(g(p), \mathbf{a}) = \langle g(p) - \mathbf{a}, g(p) - \mathbf{a} \rangle. \quad (2.8)$$

Para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fixo, denotamos por $d_{\mathbf{a}} : M \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $d_{\mathbf{a}}(p) = D(p, \mathbf{a})$. Da Proposição 2.34 segue que o contato de M com a família de hiperesferas com o mesmo centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ é medido pelas $\mathcal{R}^+$ -singularidades da função $d_{\mathbf{a}}$.

Teorema 2.44. (i) Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma curva C em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ a família D é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -versal.

(ii) Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma superfície M de dimensão 2 em $\mathbb{R}^n$, com $3 \leq n \leq 6$, a família D é $P\text{-}\mathcal{R}^+$ -versal.

Teorema 2.45. (i) Para uma curva genérica C imersa em $\mathbb{R}^n$, as $\mathcal{K}$ -singularidades locais de d_a são do tipo A_k , $k = 1, \dots, n+1$.

(ii) Para uma superfície genérica M imersa em $\mathbb{R}^3$, as $\mathcal{K}$ -singularidades locais de d_a são do tipo A_k , $k = 1, 2, 3, 4$ ou D_4 .

Para o caso no qual a curva (respectivamente superfície) está imersa em $\mathbb{R}^3$, tem-se a seguinte caracterização geométrica.

Proposição 2.46 ([11]). Seja C uma curva regular imersa em $\mathbb{R}^3$ e d_a um membro da família de funções distância ao quadrado sobre C .

(i) d_a tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_1 se, e somente se, $\gamma - a = \alpha n(p) + \beta b(p)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \frac{1}{k(p)}$.

(ii) d_a tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_2 se, e somente se, $k(p) \neq 0$, $\gamma - a = -\frac{1}{k(p)}n(p) + \beta b(p)$ e $\beta \neq -\frac{k'(p)}{k^2(p)\tau(p)}$.

(iii) d_a tem uma singularidade no ponto $p \in C$ do tipo A_3 se, e somente se, $\gamma - a = -\frac{1}{k(p)}n(p) - \frac{k'(p)}{k^2(p)\tau(p)}b(p)$.

Onde os vetores t, n, b formam o triedro de Frenet sobre C , τ é a torção e k é a curvatura da curva.

Proposição 2.47 ([32]). Seja S uma superfície regular imersa em $\mathbb{R}^3$ e d_a um membro da família de funções distância ao quadrado sobre S .

(i) d_a tem uma singularidade no ponto $p \in S$ do tipo A_1 se, e somente se, $g - a = \lambda N(p)$, com $\lambda \neq -\frac{1}{k_i(p)}$, onde k_i $i = 1, 2$ são as curvaturas principais.

(ii) d_a tem uma singularidade no ponto $p \in S$ do tipo A_2 se, e somente se, p não é ponto umbílico e $g - a = -\frac{1}{k_i(p)}N(p)$.

Definição 2.48. Os pontos onde os membros da família de funções distância ao quadrado tem singularidade do tipo $A_{\geq 2}$ é chamado de conjunto focal (denotado por $\mathcal{F}$), e os pontos onde a família tem singularidade A_3 são chamados pontos ridge.

Genericamente os pontos ridge numa superfície regular formam uma curva. Existem pontos especiais onde os membros da família de funções distância ao quadrado tem singularidade do tipo A_4 ; nestes pontos a curva de ridge é tangente à linha de curvatura associada em p ([32]). Finalmente, temos nos pontos umbílicos não planos, a família de funções distância ao quadrado tem singularidade do tipo D_4 (para mas detalhes ver [32]).

2.5.4 A família de projeções a hiperplanos

Consideramos aqui o contato de subvariedades com retas. Vamos considerar o conjunto de todas as retas paralelas e representá-las pelo vetor de direção unitário $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$. O vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ é o kernel de uma aplicação linear de $\mathbb{R}^n$ à um espaço $(n-1)$ -dimensional V . Escolhemos V como sendo o hiperplano ortogonal a $\mathbf{v}$. Este é exatamente $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^{n-1}$, o espaço tangente à esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1}$ em $\mathbf{v}$. Definimos então a família de projeções a hiperplanos $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow T\mathbb{S}^{n-1}$, a qual é dada por

$$\mathcal{P}(y, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, y - \langle y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}).$$

Dada uma imersão $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma subvariedade M em $\mathbb{R}^n$, consideramos a família de projeções a hiperplanos $P : M \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow T\mathbb{S}^{n-1}$ sobre M definida por

$$P(p, \mathbf{v}) = \mathcal{P}(g(p), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, g(p) - \langle g(p), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}). \quad (2.9)$$

Segue do Teorema 2.33 que o contato de $g(M)$ com a família de retas paralelas a $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{n-1}$ é medido pelas $\mathcal{K}$ -singularidades da aplicação $P_{\mathbf{v}}$, dada por

$$P_{\mathbf{v}}(p) = g(p) - \langle g(p), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.$$

Dado um ponto $p_0 \in M$, podemos escolher uma parametrização local $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ de M em p_0 , com $x(0) = p_0$ (estamos supondo que $0 \in U$). Também identificamos $T\mathbb{S}^{n-1}$ com $\mathbb{R}^{n-1}$ e suponha que $P_{\mathbf{v}}(p_0) = 0$. Então a composta $P_{\mathbf{v}} \circ x$ é localmente um germe de aplicação $\mathbb{R}^m, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, 0$.

Em particular para uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, o Teorema 2.49 dá informação sobre o contato de M com retas.

Teorema 2.49 ([32]). *Para um conjunto aberto e denso de imersões de uma superfície M em $\mathbb{R}^3$, a família de projeções ortogonais é localmente $\mathcal{A}_e$ -versal. Na Tabela 3 estão as $\mathcal{A}$ -singularidades de $P_{\mathbf{v}}$.*

Definição 2.50. *Um ponto p no qual a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ tem singularidade do tipo rabo de andorinha é chamado de ponto flecnodal.*

A Tabela 4 mostra a caracterização geométrica das singularidades dos membros da família de projeções a planos do Teorema 2.49 num ponto p .

Nome	Forma normal	$\mathcal{A}_e$ -codimensão
Imersão	(x, y)	0
Dobra	(x, y^2)	0
Cúspide	$(x, xy + y^3)$	0
4_2 (Lábios/Bicos)	$(x, y^3 \pm x^2y)$	1
4_3 (Ganso)	$(x, y^3 \pm x^3y)$	2
5 (Rabo de andorinha)	$(x, xy + y^4)$	1
6 (Borboleta)	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	2
11_5 (Gaivota)	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	2

Tabela 3 – Singularidades locais de projeções de superfícies em $\mathbb{R}^3$ a planos. ([32])

Nome	Caracterização geométrica
Dobra	$\mathbf{v}$ é tangente a M em p .
Cúspide	p é um ponto hiperbólico e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p .
4_2 (Lábios/Bicos)	p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p .
4_3 (Ganso)	p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p , e a imagem da aplicação de Gauss do conjunto parabólico tem uma inflexão geodésica.
5 (Rabo de andorinha)	p é um ponto flecnodal e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p .
6 (Borboleta)	p é um ponto flecnodal, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p e tangente à curva flecnodal em p .
11_5 (Gaivota)	p é um ponto de cúspide de Gauss e $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p .

Tabela 4 – Caracterização geométrica das singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$. ([32])

2.6 A geometria diferencial do cross-cap

O objeto geométrico central de estudo desta tese é o cross-cap. Dedicamos esta seção para fazer uma breve revisão sobre a importância desta superfície e referenciar alguns dos trabalhos que já tem sido feitos sobre a mesma.

Hassler Whitney mostrou que as aplicações de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podem ter uma singularidade estável por mudanças de coordenadas suaves na fonte e na meta (ver [61]). Um modelo local desta singularidade é dada por

$$(x, y) \rightarrow (x, xy, y^2).$$

A imagem desta aplicação é uma superfície singular chamada de cross-cap (ver Figura 5). Outros autores também chamam esta superfície de guarda-chuva de Whitney.

O cross-cap também aparece em outros contextos, por exemplo como única singularidade genérica em superfícies regradadas (ver [33]).

Dado que o cross-cap é uma superfície singular estável, é natural se interessar em entender a sua geometria.

A geometria diferencial extrínseca do cross-cap no 3-espaco Euclidiano tem sido

Figura 5 – Cross-cap

estudada em [16, 22, 23, 24, 25, 31, 46, 48, 50, 58, 60]. Em [31] os autores consideraram também a suas propriedades intrínsecas. Em [19] é estudada a geometria diferencial do cross-cap no 3-espço de Minkowski.

Aproveitamos agora para dar alguns definições a resultados já mostrados anteriormente para esta superfície singular. A notação seguirá a referência [60] e as provas dos resultados podem ser encontradas em [22, 60].

Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ o germe definido por $f(x, y) = (x, xy, y^2)$. Note que

$$df_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

logo $df_{(0,0)}(\mathbb{R}^2) = \{(u, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid u \in \mathbb{R}\}$. Denotamos por X a superfície parametrizada por f , assim temos que $T_{(0,0,0)}X$ é exatamente o eixo e_1 , onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Denotamos por $N_{(0,0,0)}X$ o plano normal a X em $(0,0,0)$, o qual de fato tem dimensão 2.

Definição 2.51. *Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ o germe definido por $f(x, y) = (x, xy, y^2)$. Definimos um cross-cap como a imagem de qualquer germe $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ que é $\mathcal{A}$ -equivalente a f .*

É bem conhecido que f é $\mathcal{A}_e$ -estável e $2\text{-}\mathcal{A}_e$ -determinado. Em particular, o cross-cap parametrizado por f e denotado por X é chamado de cross-cap estandar. É claro que a dimensão do espaço tangente na origem de um cross-cap é 1, chamaremos este espaço tangente de direção tangente.

O cone tangente à uma superfície M num ponto $p \in M$ consiste de uma coleção de retas através de p , as quais definimos numa forma na qual passa a ser equivalente à posição limitante de secantes à M em p em geometria diferencial.

Lema 2.52. *O cone tangente a X em $(0,0,0)$, denotado por $CT_{(0,0,0)}X$ é o plano gerado por $\{e_1, e_3\}$.*

O cone tangente a X na origem (ver Figura 6) é um objeto geométrico muito importante para o nosso estudo, fora da origem este coincide com o plano tangente.

Figura 6 – Cone tangente ao cross-cap estandard na origem.

A Definição 2.51 envolve germes de difeomorfismos. É claro que, para preservar a geometria de um modelo, é necessario trocar difeomorfismos por isometrias nas mudanças de coordenadas na meta.

Proposição 2.53. *Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ o germe definido por $f(x, y) = (x, xy, y^2)$. Seja g um germe que é $\mathcal{A}$ -equivalente a f . Então usando germes de difeomorfismos na fonte e germes de isometrias na meta, podemos reduzir g à forma*

$$g'(x, y) = (x, xy + p(y), ax^2 + bxy + y^2 + q(x, y)), \quad (2.10)$$

onde a e b são constantes, $p \in \mathcal{M}_1^3$ e $q \in \mathcal{M}_2^3$.

Para fazer os cálculos escreveremos sempre $p(y) = p_3y^3 + p_4y^4 + O(5)$ e $q(x, y) = q_3(x, y) + q_4(x, y) + O(5)$, onde $q_i(x, y) = \sum_{j=0}^i q_{ij}x^i y^j$.

Ao longo desta tese chamaremos a um crosscap parametrizado como na equação (2.10) de cross-cap geométrico.

Através da Proposição 2.53 é dada uma classificação dos cross-caps desde o ponto de vista geométrico, a saber, um cross-cap geométrico é chamado elíptico (respectivamente hiperbólico) se o parâmetro “ a ” na equação (2.10) é positivo não nulo (respectivamente negativo não nulo) e é chamado parabólico se $a = 0$ (ver Figura 7). Assim, dizemos que um cross-cap geométrico é genérico se $a \neq 0$. De fato, esta caracterização tem sido induzida

pela singularidade na origem que acontece na pré-imagem do conjunto parabólico na fonte. Uma outra caracterização geométrica do cross-cap é considerada em [19, 50].

Figura 7 – Classificação de cross-caps usando isometrias na meta. À esquerda cross-cap elíptico, no centro cross-cap parabólico e à direita o cross-cap hiperbólico.

Note que escrevemos $j^3 p = p_3 y^3$ na equação (2.10), e tomamos C como sendo a pré-imagem do conjunto de pontos duplos, então C pode se escrever como $x = -p_3 y^2 + \psi(y)$, onde $\psi \in \mathcal{M}_1^3$.

Lema 2.54. *Para a família de cross-caps parametrizados pela forma normal dada na Proposição 2.53, o cone tangente é o plano gerado pelos vetores $\{e_1, e_3\}$.*

O conjunto singular do cross-cap é, de fato, o ponto de cross-cap e o conjunto de pontos duplos. De fato, a primeira forma fundamental classicamente definida para superfícies regulares se anula no ponto de cross-cap. Este fenômeno causa alguns problemas para definir de forma única o vetor normal ao cross-cap no ponto de cross-cap, isto é, não existe uma boa definição de tal vetor naquele ponto.

Com o objeto de estudar a geometria diferencial do cross-cap, usaremos a primeira forma fundamental clássica e uma segunda forma fundamental conveniente.

Para um cross-cap dado por uma parametrização $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$E = \langle g_u, g_u \rangle, \quad F = \langle g_u, g_v \rangle, \quad G = \langle g_v, g_v \rangle,$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental adaptada são

$$L = \langle \bar{N}, g_{uu} \rangle, \quad M = \langle \bar{N}, g_{uv} \rangle, \quad N = \langle \bar{N}, g_{vv} \rangle,$$

onde $\bar{N} = g_u \times g_v$ é um vetor ortogonal a g_u e g_v , mas não necessariamente unitário.

Com a segunda forma fundamental definida desta forma, é possível estudar as folheações principais e assintóticas definidas classicamente. Temos também que o conjunto parabólico do cross-cap é dado pela expressão

$$LN - M^2 = 0,$$

e assim calculando diretamente temos que $j^2(LN - M^2) = 4(ax^2 - y^2)$. Logo se o cross-cap é elíptico o conjunto parabólico consiste de duas curvas passando pelo ponto de cross-cap e se o cross-cap é hiperbólico, o conjunto parabólico é um ponto, a saber o ponto de cross-cap.

As linhas assintóticas sobre o cross-cap definidas pela equação

$$Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2 = 0,$$

foram estudadas em [58] para o caso elíptico e hiperbólico, e em [46, 47] para o caso parabólico. As inflexões das linhas assintóticas acontecem genericamente sobre o conjunto flecnodal para superfícies regulares. As projeções ortogonais do cross-cap tem sido estudadas em [60, 64] e em [64] é calculado o conjunto flecnodal de um cross-cap elíptico e mostrado que para o cross-cap hiperbólico o conjunto flecnodal é vazio.

As linhas de curvatura sobre o cross-cap, definidas por

$$(ME - LF)dx^2 + (NE - lG)dx dy + (NF - MG)dy^2 = 0,$$

tem sido estudadas em [24, 25, 58]. As inflexões das linhas de curvatura acontecem genericamente sobre o conjunto sub-parabólico para superfícies regulares, o qual corresponde à projeção na superfície do conjunto parabólico da superfície focal associada. O conjunto sub-parabólico do cross-cap tem sido estudado em [22].

Finalmente, temos que a estrutura local do conjunto focal do cross-cap tem sido estudado em [60] e os pontos ridge tem sido considerados em [22, 60].

DIREÇÕES ADMISSÍVEIS

A motivação para este capítulo aparece em [50], onde é mostrado que o contato do cross-cap elíptico com planos é captado através do contato das componentes do conjunto parabólico com o seus respectivos planos osculadores.

Perguntas interessantes aparecem com respeito ao estudo deste fenômeno. De fato, é natural perguntar sobre a existência de outras curvas com esta propriedade e se existe um resultado análogo para o caso no qual trocamos o cross-cap por uma superfície regular.

De fato, a Proposição 3.10 e o Corolário 3.11 nos diz que existe uma versão desse resultado para o caso onde consideramos uma superfície regular no lugar do cross-cap, além disso, a Proposição 3.15 e o Corolário 3.16 fornecem uma versão análoga para o caso do contato com esferas, isto é, existem curvas que captam o contato da superfície com esferas!. Finalmente, os Teoremas 3.21 e 3.25, e o Corolário 3.22 dão condições para a existência de outras curvas sobre o cross-cap com a propriedade de captar o contato da superfície através do seu contato com o respectivo plano osculador.

3.1 Direções f –admissíveis

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave onde $(0, 0) \in U$. Por definição temos que f tem uma singularidade na origem se a aplicação linear $df_{(0,0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetora. Isto é equivalente a ter $df_{(0,0)} = 0$. Dizemos que f tem uma singularidade degenerada na origem se, nas condições anteriores, a aplicação bilinear $d^2f_{(0,0)} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não é sobrejetora.

Dado $w_1 \in \mathbb{R}^2$ fixado, considere a aplicação linear $g_{w_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g_{w_1}(w_2) = d^2f_{(0,0)}(w_1, w_2)$. Note que $g_{w_1} = 0$ se, e somente se $d^2f_{(0,0)} \cdot (w_1, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^2$, isto é, $w_1 \in \ker(df_{(0,0)}^2)$. Quando a singularidade é não degenerada o $\ker(df_{(0,0)}^2)$ é trivial.

Vamos nos concentrar no caso onde $\ker(df_{(0,0)}^2)$ é não trivial.

Definição 3.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em uma vizinhança da origem, tal que f tem uma singularidade degenerada na origem. Dizemos que*

(i) $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é uma direção f -admissível se $w \in \ker(d^2 f_{(0,0)})$.

(ii) w é uma direção f -admissível de ordem k se w é direção f -admissível e satisfaz

$$d^3 f_{(0,0)} \cdot w^3 = \dots = d^{k+1} f_{(0,0)} \cdot w^{k+1} = 0 \quad e \quad d^{k+2} f_{(0,0)} \cdot w^{k+2} \neq 0.$$

Observação 3.2. *Impomos que a Definição 3.1 seja $\mathcal{R}$ -invariante, isto é, dado $\phi \in \mathcal{R}$ temos que w uma direção f -admissível de ordem k se, e somente se, a direção $\bar{w}$ associada $(f \circ \phi)$ é uma direção $(f \circ \phi)$ -admissível de ordem k .*

Seja γ uma curva tangente na origem a uma direção f -admissível w na Definição 3.1. Note que se consideramos a função $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(s) = f \circ \gamma(s), \tag{3.1}$$

esta β tem uma singularidade do tipo $A_{\geq 2}$ na origem.

Ao longo deste capítulo, vamos nos referir sempre a β como a função dada em (3.1).

Escrevemos a função f da seguinte forma

$$f(u, v) = a_{10}u + a_{11}v + a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \dots$$

A condição $df_{(0,0)} = 0$ é equivalente a $a_{10} = a_{11} = 0$, assim $(0,0)$ é ponto singular da f . Com uma conveniente mudança de coordenadas, podemos escrever a f como

$$\begin{aligned} f(u, v) = & a_{20}u^2 + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \\ & + a_{40}u^4 + a_{41}u^3v + a_{42}u^2v^2 + a_{43}uv^3 + a_{44}v^4 + \dots, \end{aligned} \tag{3.2}$$

assim

$$d^2 f_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2a_{20} & 0 \\ 0 & 2a_{22} \end{bmatrix}.$$

Então, a origem é uma singularidade degenerada se, e somente se, $a_{20}a_{22} = 0$. Suponha que $a_{20} = 0$, então o vetor $(1,0)$ define uma direção f -admissível. Voltando na função β definida em (3.1), estamos interessados também em estudar os casos nos quais a singularidade na origem é mais degenerada do que A_2 .

Lema 3.3. *Seja $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função tal que na origem g tem uma singularidade do tipo A_3^- . Então, por uma mudança de coordenadas conveniente, g pode ser escrita como $v(u^2 + v)$.*

Demonstração. Na Seção 2.4 é dada a forma normal dos germes de funções com singularidade A_k , assim temos que $g \sim_{\mathcal{R}} u^4 - v^2$. Suponha sem perda de generalidade que $g(u, v) = u^4 - v^2$, e considere a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} u = x \\ v = y + x^2. \end{cases}$$

Assim temos que $g \sim_{\mathcal{R}} -y(2x^2 + y)$, fazendo um escalamento em x e multiplicando por -1 o resultado segue. $\square$

Proposição 3.4. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em uma vizinhança da origem, tal que f tem uma singularidade do tipo A_3^- no $(0, 0)$ e denote por P_i ($i = 1, 2$) as parametrizações das componentes do conjunto $f^{-1}(0)$ com $P_i(0) = (0, 0)$. Considere w uma direção f -admissível e β como em (3.1). Então a singularidade na origem da função β é do tipo A_l , $l \geq 3$. Além disso, a singularidade de β é do tipo A_k , se e somente se, $j^{k-2}\gamma(s) = j^{k-2}P_i(s)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.3, podemos tomar f da seguinte forma

$$f(u, v) = v(u^2 + v). \quad (3.3)$$

Escrevemos $\gamma(s) = (s, \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(4))$ e $P_i(s) = (s, p_{i2} s^2 + p_{i3} s^3 + O(4))$. Da equação (3.3) podemos deduzir que a curva $(s, 0) \subset \{f^{-1}(0)\}$, associamos então a parametrização P_1 a essa curva e P_2 para a curva $(s, -s^2)$ (ver Figura 8).

Figura 8 – Conjunto $\{(j^4 f)^{-1}(0)\}$ localmente em $\mathbb{R}^2$.

Temos

$$\beta(s) = f \circ \gamma(s) = (\alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \dots)(s^2 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \dots).$$

Assim

$$\beta(s) = s^4(\alpha_2 + \alpha_3 s + \dots)(1 + \alpha_2 + \alpha_3 s + \dots),$$

e segue que β tem singularidade tipo $A_{\geq 3}$. Note que se $\alpha_2 = -1$ temos que

$$\beta(s) \sim_{\mathcal{R}} s^5(\alpha_3 + \alpha_4 s + \dots).$$

De fato $j^2\gamma = j^2P_2$, e a singularidade de β é do tipo A_k se, e somente se, $j^{k-2}\gamma = j^{k-2}P_2$. Agora se $\alpha_2 \neq -1$ temos que

$$\beta(s) \sim_{\mathcal{R}} s^4(\alpha_2 + \alpha_3 s + \dots).$$

Segue que a singularidade de β é do tipo A_k se, e somente se, $j^{k-2}\gamma = j^{k-2}P_1$. $\square$

No caso no qual $d^2f_{(0,0)} = 0_{2 \times 2}$, a singularidade de f tem coposto 2 e toda direção é f -admissível. Nestas condições temos os seguintes resultados.

Lema 3.5. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que f tem uma singularidade na origem do tipo $D_4^\pm$. Então, na origem existem 1 ou 3 direções f -admissíveis de ordem ≥ 2 .*

Demonstração. Como f tem uma singularidade na origem do tipo $D_4^\pm$, então $j^3f(u, v) \sim_{\mathcal{R}} u^3 \pm uv^2$. Suponha que

$$f(u, v) = u^3 \pm uv^2.$$

Temos que achar as condições nas quais um vetor $w \in \mathbb{R}^2$ satisfaz $d^3f_{(0,0)} \cdot w^3 = 0$. Seja $w = (w_1, w_2)$, assim

$$\begin{aligned} d^3f_{(0,0)} \cdot w^3 &= f_{uuu}(0,0)w_1^3 + 3f_{uuv}(0,0)w_1^2w_2 + 3f_{uvv}(0,0)w_1w_2^2 + f_{vvv}(0,0)w_2^3 \\ &= 6(w_1^3 \pm w_1w_2^2) \\ &= 6w_1(w_1^2 \pm w_2^2). \end{aligned}$$

Então existem 1 quando a singularidade é do tipo D_4^+ e 3 quando a singularidade é do tipo D_4^- direções admissíveis de ordem ≥ 2 na origem. $\square$

Proposição 3.6. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que f tem uma singularidade na origem do tipo $D_4^\pm$, e denote por P_i ($i = 1$ para o caso D_4^+ e $i = 1, 2, 3$ para o caso D_4^-), as parametrizações das componentes $f^{-1}(0)$ com $P_i(0)$ a origem. Seja w uma direção f -admissível de ordem ≥ 2 e β como em (3.1). Então a função β tem singularidade na origem do tipo A_l , $l \geq 3$. Além disso, a singularidade de β é do tipo A_k se, e somente se, $j^{k-2}\gamma(s) = j^{k-2}P_i(s)$.*

Demonstração. É suficiente provar o resultado para uma direção, para as outras é análogo. Seja f como no Lema 3.5 e considere a direção f -admissível de ordem ≥ 2 $w = (0, 1)$. Seja

$\gamma(s) = (\alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(4), s)$ e P_1 uma parametrização do conjunto $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \beta(s) = f \circ \gamma(s) &= (\alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + O(4))((\alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3)^2 \pm s^2 + O(7)) \\ &= s^4(\alpha_2 + \alpha_3 s + O(2))(\pm 1 + s^2(\alpha_2 + \alpha_3 s)^2 + O(5)) \\ &\sim_{\mathcal{R}} s^4(\alpha_2 + \alpha_3 s + O(2)). \end{aligned}$$

Assim, β tem uma singularidade na origem do tipo $A_{\geq 3}$, e segue que β tem uma singularidade na origem do tipo A_k se, e somente se, $j^{k-2}\gamma(s) = j^{k-2}P_1(s)$. $\square$

No que segue, vamos estudar a informação geométrica das direções admissíveis no caso de funções especiais.

3.2 Direções $h_{\mathbf{v}}$ -admissíveis

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local. Considere a família de funções altura sobre S , $H : S \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$H((u, v), \mathbf{v}) = \langle X(u, v), \mathbf{v} \rangle, \quad (3.4)$$

onde para $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ fixo, denotamos o membro da família como $h_{\mathbf{v}}$ como feito na Seção 2.5.

Note que a parametrização local X é um difeomorfismo local, logo a diferencial é um isomorfismo. Isto faz com que para cada direção $w \in \mathbb{R}^2$, exista uma única direção associada no $T_p S$ dada por $dX_{(0,0)}(w)$. Neste caso, não há perda de generalidade entre considerar direções admissíveis em U ou em $T_p S$.

Teorema 3.7. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$ e $w \in T_p S$, então temos que:*

- (i) *se w é $h_{\mathbf{v}}$ -admissível, então p é um ponto parabólico e w é uma direção assintótica.*
- (ii) *Se $h_{\mathbf{v}}$ tem coposto 1, w é $h_{\mathbf{v}}$ -admissível de ordem 2 se, e somente se, p é uma cúspide de Gauss.*

Demonstração. Suponha S numa carta de Monge em torno do $p = X(0, 0)$, isto é, $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$, onde

$$f(u, v) = a_{20}u^2 + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + O(4). \quad (3.5)$$

Nestas condições, $h_{\mathbf{v}}$ é singular na origem se, e somente se, $\mathbf{v} = N(0, 0) = (0, 0, 1)$, onde N é o vetor normal a S . Denotamos agora $\mathbf{v}$ como $N_0 = N(0, 0)$, assim

$$h_{N_0} = f(u, v). \quad (3.6)$$

De fato, para w ser h_{N_0} -admissível precisamos que $a_{20}a_{22} = 0$, isto implica que p é um ponto parabólico. Suponha agora $a_{20} = 0$ e $a_{22} \neq 0$, assim $w = (1, 0)$ e então $k_n(w) = 0$, isto é, w é uma direção assintótica. Agora temos que w é direção h_{N_0} -admissível de ordem ≥ 2 se, e somente se, $a_{30} = 0$. Nestas condições, temos que

$$f(u, v) = a_{22}v^2 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + a_{40}u^4 + a_{41}u^3v + a_{42}u^2v^2 + a_{43}uv^3 + a_{44}v^4 + O(5),$$

e considere o difeomorfismo local dado por

$$\phi(u, v) = \left(x, y - \frac{1}{2a_{22}} (a_{31}x^2 + a_{32}xy + a_{33}y^2) \right).$$

Assim temos que

$$f \sim_{\mathcal{R}} a_{22}y^2 + \left(a_{40} - \frac{1}{4} \frac{a_{31}^2}{a_{22}} \right) x^4 + A_{41}xy^3 + A_{42}x^2y^2 + A_{43}x^3y + A_{44}y^4 + O(5),$$

onde os A_{ij} são uma reparametrização dos coeficientes resultantes pela ação do difeomorfismo ϕ . Segue que w é uma direção $(h_{N_0} \circ \phi)$ -admissível de ordem 2 se, e somente se, $a_{31}^2 - 4a_{22}a_{40} \neq 0$, o que conclui a prova. $\square$

Proposição 3.8. *Suponha que a origem é ponto umbílico plano de S tal que a curvatura Gaussiana tem uma singularidade Morse neste ponto. Então, as separatrizes das linhas assintóticas de S em p são tangentes às direções h_{N_0} -admissíveis de ordem ≥ 2 .*

Demonstração. Seja X uma parametrização local numa carta de Monge como em (3.5). É bem conhecido que nestas condições f tem uma singularidade na origem do tipo $D_4^\pm$ e pelo Lema 3.5 existem 1 ou 3 direções h_{N_0} -admissíveis de ordem ≥ 2 as quais satisfazem

$$a_{30}w_{i1}^3 + a_{31}w_{i1}^2w_{i2} + a_{32}w_{i1}w_{i2}^2 + a_{33}w_{i2}^3 = 0, \quad (w_{i1}, w_{i2}) \in T_pS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Vamos mostrar que o 1-jato das separatrizes das linhas assintóticas satisfazem a equação (3.7). Para isto vamos usar a técnica chamada de *blow-up* usada em [10, 14] para analisar as soluções das equações diferenciais binárias. Consideremos

$$F(u, v, p) = l(u, v) + 2m(u, v)p + n(u, v)p^2, \quad (3.8)$$

onde $p = \frac{dv}{du}$ e l, m e n são os coeficientes da segunda forma fundamental de S .

Seja $\mathbb{M} = \{F^{-1}(0)\}$ e $\delta = m^2 - ln$. O conjunto $\Delta = \{\delta = 0\}$ é chamado de discriminante da F e as soluções da equação diferencial binária moram na região onde $\delta \geq 0$ (equivalentemente $K(u, v) \leq 0$). A condição na curvatura Gaussiana implica em que a função δ tem uma singularidade Morse na origem, assim o conjunto parabólico (equivalentemente neste caso ao discriminante Δ) é um ponto ou duas curvas se encontrando transversalmente. É mostrado em [10] que as soluções da equação (3.8) podem ser obtidas através da projeção das curvas integrais do campo levantado a $\mathbb{M}$

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial u} + pF_p \frac{\partial}{\partial v} - (F_u + pF_v) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Como $F_p(0, 0, p) = 0$, segue que as singularidades do campo ξ estão sobre o eixo p e são dadas através das raízes do polinômio ϕ em p ,

$$\phi(p) = F_u(0, 0, p) + pF_v(0, 0, p).$$

Por uma conta direta temos que,

$$\phi(p) = 6 \left(a_{30} + a_{31}p + a_{32}p^2 + a_{33}p^3 \right). \quad (3.9)$$

O resultado segue escrevendo $p = \frac{w_{i2}}{w_{i1}}$ em (3.7). $\square$

A Figuras 9 e 10 mostram as possíveis configurações das linhas assintóticas perto do ponto umbílico plano localmente.

Figura 9 – A função h_{N_0} tem uma singularidade do tipo D_4^+ . O conjunto parabólico é um ponto, neste caso existe uma única direção h_{N_0} -admissível tangente à separatriz.

Figura 10 – A função h_{N_0} tem uma singularidade do tipo D_4^- . O conjunto parabólico consiste de duas curvas com interseção transversal na origem. Neste caso existe três direções h_{N_0} -admissíveis tangentes às separatrizes.

Lema 3.9. *Considere uma curva C regular no espaço e $p \in C$ um ponto tal que a curvatura k de C não anula em p . Seja $\theta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de C com $\theta(0) = p$. Então a torção τ de C satisfaz*

$$\tau(p) = \dots = \frac{d^{r-3}}{dt^{r-3}} \tau(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\theta'(0), \theta''(0), \theta'''(0)| = \dots = |\theta'(0), \theta''(0), \theta^{(r)}(0)| = 0,$$

para $r > 3$, onde “ $|\cdot|$ ” denota o determinante da matriz formada pelos vetores $\theta'(0)$, $\theta''(0)$ e $\theta'''(0)$.

Demonstração. De fato, temos que

$$|\theta'(t) \times \theta''(t)|^2 \tau(t) = -|\theta'(t), \theta''(t), \theta'''(t)|.$$

Como a curvatura de k de C não anula em p , segue que $|\theta'(0) \times \theta''(0)| \neq 0$. Derivando com respeito à t temos

$$\left(|\theta'(t) \times \theta''(t)|^2\right)' \tau(t) + |\theta'(t) \times \theta''(t)|^2 \tau'(t) = -|\theta'(t), \theta''(t), \theta^{(4)}(t)|,$$

e avaliando em $t = 0$, segue o caso $r = 4$. Derivando de novo e supondo agora que $\tau(0) = \tau'(0) = 0$ temos

$$|\theta'(0) \times \theta''(0)|^2 \tau''(0) = -|\theta'(0), \theta''(0), \theta^{(4)}(0)| - |\theta'(0), \theta''(0), \theta^{(5)}(0)|.$$

Note que $\tau(0) = 0 \Rightarrow \theta'''(0) = \alpha_1 \theta'(0) + \beta_1 \theta''(0)$, também $\tau'(0) = 0 \Rightarrow \theta^{(4)}(0) = \alpha_2 \theta'(0) + \beta_2 \theta''(0)$, assim $|\theta'(0), \theta''(0), \theta^{(4)}(0)| = 0$ e segue o caso $r = 5$.

O resultado segue fazendo a mesma análise em cada derivada. $\square$

Proposição 3.10. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local de uma superfície em um ponto $p = X(0,0)$ parabólico não umbílico. Seja w uma direção h_{N_0} -admissível e γ uma curva tangente a w na origem. Considere a curva Γ sobre S , dada por $X \circ \gamma$, tal que a curvatura de Γ na origem não é nula. Então w é uma direção h_{N_0} -admissível de ordem ≥ 2 se, e somente se, a torção τ da curva Γ é nula em $(0,0)$. Por tanto, h_{N_0} sobre S tem singularidade $A_{\geq 3}$ se, e somente se, h_{N_0} sobre Γ tem singularidade $A_{\geq 3}$.*

Demonstração. Tomando X numa carta de Monge com f como na demonstração do Teorema 3.7, isto é

$$h_{N_0}(u, v) = f(u, v) = a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + O(4),$$

com $a_{22} \neq 0$. Temos que $w = (1, 0)$ e podemos parametrizar localmente a γ por $\gamma(t) = (t, v(t))$, onde $v(t) = \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + O(4)$. Assim, segue que

$$\Gamma(t) = (t, v(t), \beta(t)), \quad \text{onde } \beta \text{ é como em (3.1).}$$

Temos que a torção de Γ é nula na origem se, e somente se, $|\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''|(0) = 0$. Segue que

$$|\Gamma'(0), \Gamma''(0), \Gamma'''(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{dt}f(t, v(t))|_{t=0} \\ 0 & 2\alpha_2 & \frac{d^2}{dt^2}f(t, v(t))|_{t=0} \\ 0 & 6\alpha_3 & \frac{d^3}{dt^3}f(t, v(t))|_{t=0} \end{vmatrix}^T.$$

Como a direção $(1, 0)$ é assintótica e a curvatura de Γ (denotada por k_Γ) não é nula em 0, temos que $k_g(0) = \pm k_\Gamma(0) = 2\alpha_2 \neq 0$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t, v(t))|_{t=0} &= df_{(0,0)} \cdot (1, 0), \\ \frac{d^2}{dt^2}f(t, v(t))|_{t=0} &= d^2f_{(0,0)} \cdot (1, 0)^2 + df_{(0,0)} \cdot \gamma''(0), \\ \frac{d^3}{dt^3}f(t, v(t))|_{t=0} &= d^3f_{(0,0)} \cdot (1, 0)^3 + 3d^2f_{(0,0)} \cdot (\gamma'(0), \gamma''(0)) + df_{(0,0)} \cdot \gamma'''(0). \end{aligned}$$

Note que $df_{(0,0)} = (0,0)$ e $d^2f_{(0,0)} \cdot ((1,0), \gamma''(0)) = 0$, pois $(1,0)$ está no kernel de $d^2f_{(0,0)}$. Logo $\tau(0) = 0$ se, e somente se, $d^3f_{(0,0)} \cdot (1,0)^3 = 0$, isto é, pela Definição 3.1 w é uma direção h_{N_0} -admissível de ordem ≥ 2 . $\square$

Corolário 3.11. *Qualquer curva tangente à curva parabólica num ponto de cúspide de Gauss, tem torção nula no ponto, inclusive a curva parabólica.*

Corolário 3.12. *Se $a_{31}^2 - 4a_{22}a_{40} < 0$, então h_{N_0} sobre S tem singularidade A_3 se, e somente se, h_{N_0} sobre Γ tem singularidade A_3 .*

Demonstração. De fato a condição $a_{31}^2 - 4a_{22}a_{40} \neq 0$ implica que h_{N_0} sobre S tem singularidade A_3 na origem. Vamos verificar que $\tau'(0) \neq 0$. Como $\tau(0) = 0$, temos pelo Lema 3.9 que

$$\tau'(0) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad |\Gamma'(0), \Gamma''(0), \Gamma^{(iv)}(0)| = 0.$$

Segue que

$$|\Gamma'(0), \Gamma''(0), \Gamma^{(iv)}(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & 24\alpha_4 & \frac{d^4}{dt^4}f(t, v(t))|_{t=0} \end{vmatrix}^T$$

é nula na origem se, e somente se,

$$\frac{d^4}{dt^4}f(t, v(t))|_{t=0} = 24(a_{22}\alpha_2^2 + a_{31}\alpha_2 + a_{40}) = 0.$$

O discriminante em α_2 de $a_{22}\alpha_2^2 + a_{31}\alpha_2 + a_{40}$ é $a_{31}^2 - 4a_{22}a_{40}$, e quando é menor do que zero, temos que $\frac{d^4}{dt^4}f(t, v(t))|_{t=0}$ não é nula e o resultado segue. $\square$

Proposição 3.13. *Seja Γ como na Proposição 3.10 e w uma direção h_{N_0} -admissível de ordem ≥ 2 . Então $j^r(h_{N_0} \circ \gamma) = 0$ se, e somente se, o contato da curva no espaço Γ com o seu plano osculador tem singularidade na origem do tipo $A_{\geq r}$, $r \geq 3$.*

Demonstração. É claro que $j^k(h_{N_0} \circ \gamma) = 0$ se, e somente se, $j^k(f \circ \gamma) = 0$, equivalentemente, $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))|_{t=0} = \dots = \frac{d^k}{dt^k}(f \circ \gamma(t))|_{t=0} = 0$. Pela Proposição 3.10 a toção de Γ é nula em 0. Note que Γ satisfaz

$$|\Gamma'(0), \Gamma''(0), \Gamma^{(r)}(0)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 & 0 \\ 0 & (r!)\alpha_r & \frac{d^r}{dt^r}f \circ \gamma(t)|_{t=0} \end{vmatrix}^T = 2\alpha_2 \frac{d^r}{dt^r}f \circ \gamma(t)|_{t=0},$$

com $\alpha_2 \neq 0$. Assim, pelo Lema 3.9 o resultado segue. $\square$

3.3 Direções $d_{\mathbf{a}}$ -admissíveis

Considere um membro da família de funções distância ao quadrado $d_{\mathbf{a}}$, sobre uma superfície S , dado por

$$d_{\mathbf{a}}(p) = \langle p - \mathbf{a}, p - \mathbf{a} \rangle.$$

Teorema 3.14. *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização local da S com $X(0,0) = p$, $w \in T_p S$ e suponha que a função $d_{\mathbf{a}}$ sobre S tem coposto 1. Então,*

- (i) *se w é $d_{\mathbf{a}}$ -admissível em p , então w é uma direção principal em p associada à curvatura principal k_i e $\mathbf{a} = p + \frac{1}{k_i(0,0)}N(0,0)$.*
- (ii) *w é $d_{\mathbf{a}}$ -admissível de ordem ≥ 2 em p se, e somente se, as condições em (i) são satisfeitas e p é ponto ridge.*

Demonstração. Para a parte (i) temos que

$$d(d_{\mathbf{a}}(0,0)) = 2 \langle dX_{(0,0)}, p - \mathbf{a} \rangle,$$

então

$$d(d_{\mathbf{a}}(0,0)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p - \mathbf{a} = \lambda N(0,0), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Também

$$\begin{aligned} d^2(d_{\mathbf{a}}(0,0)) &= 2 \left(\langle d^2 X_{(0,0)}, p - \mathbf{a} \rangle + \langle dX_{(0,0)}, dX_{(0,0)} \rangle \right) \\ &= 2 \left(\lambda \begin{bmatrix} l(0,0) & m(0,0) \\ m(0,0) & n(0,0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(0,0) & F(0,0) \\ F(0,0) & G(0,0) \end{bmatrix} \right) \\ &= 2 \begin{bmatrix} \lambda l(0,0) + E(0,0) & \lambda m(0,0) + F(0,0) \\ \lambda m(0,0) + F(0,0) & \lambda n(0,0) + G(0,0) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $d_{\mathbf{a}}$ tem coposto 1, temos que p não é um ponto umbílico. Logo podemos tomar X como uma parametrização cujas curvas coordenadas são as linhas de curvatura da S . Desta forma $m = F = 0$, e $\det(d^2(d_{\mathbf{a}}(0,0))) = 0$ se, e somente se,

$$\lambda^{-1} = -\frac{l(0,0)}{E(0,0)} \quad \text{ou} \quad \lambda^{-1} = -\frac{n(0,0)}{G(0,0)},$$

isto é, $\lambda = -\frac{1}{k_i(0,0)}$, $i = 1, 2$, onde k_i é uma das duas curvaturas principais. Suponha que $\lambda = -\frac{1}{k_1(0,0)}$, então $w = (1, 0)$ é uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível e, de fato, é uma direção principal associada à curvatura principal k_1 .

Para a parte (ii), temos que analisar quando $d^3(d_{\mathbf{a}}(0,0)) \cdot w^3 = 0$ nas condições da parte (i). Note que

$$d^3(d_{\mathbf{a}}(0,0)) \cdot w^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (d_{\mathbf{a}})_{uuu}(0,0) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}(d_{\mathbf{a}})_u(0,0) &= 2 \langle X_u(0,0), p - \mathbf{a} \rangle \\ &= 2 \left\langle X_u(0,0), -\frac{1}{k_1(0,0)} N(0,0) \right\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d_{\mathbf{a}})_{uu}(0,0) &= 2 (\langle X_{uu}(0,0), p - \mathbf{a} \rangle + \langle X_u(0,0), X_u(0,0) \rangle) \\ &= 2 \left(\left\langle X_{uu}(0,0), -\frac{1}{k_1(0,0)} N(0,0) \right\rangle + E(0,0) \right) \\ &= 2 \left(-\frac{l(0,0)}{k_1(0,0)} + E(0,0) \right) \\ &= 2 \left(-l(0,0) \left(\frac{E(0,0)}{l(0,0)} \right) + E(0,0) \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d_{\mathbf{a}})_{uuu}(0,0) &= 2 (\langle X_{uuu}(0,0), p - \mathbf{a} \rangle + 3 \langle X_u(0,0), X_{uu}(0,0) \rangle) \\ &= 2 \left(-\frac{\Gamma_{11}^1(0,0)l(0,0) + l_u(0,0)}{k_1(0,0)} + 3\Gamma_{11}^1(0,0)E(0,0) \right) \\ &= 2 \left(-\frac{l_u(0,0)}{k_1(0,0)} + 2\Gamma_{11}^1(0,0)E(0,0) \right),\end{aligned}$$

onde os Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel. Então, $(d_{\mathbf{a}})_{uuu}(0,0) = 0$ se, e somente se, $\frac{l_u(0,0)}{k_1(0,0)} = 2\Gamma_{11}^1(0,0)E(0,0)$, equivalentemente

$$l_u(0,0) = k_1(0,0)E_u(0,0).$$

Mas temos $l(u,v) = k_1(u,v)E(u,v)$, portanto $l_u(0,0) = (k_1)_u(0,0)E(0,0) + k_1(0,0)E_u(0,0)$ e assim

$$(d_{\mathbf{a}})_{uuu}(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1)_u(0,0)E(0,0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (k_1)_u(0,0) = 0,$$

a qual é a condição para $p = X(0,0)$ ser ponto ridge. $\square$

Como antes, seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva com $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma'(0) = w$ sendo uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível. Considere a curva $\Gamma(s) = X \circ \gamma(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco e tal que a sua curvatura não se anula em $s = 0$. Nestas condições temos

Proposição 3.15. *O contato da curva Γ na origem com a família de esferas com o mesmo centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tem singularidade de tipo $A_{\geq 3}$ se, e somente se, a origem é um ponto sobre a curva ridge.*

Demonstração. Note que para $d_{\mathbf{a}}(t) := d_{\mathbf{a}}(\gamma(t)) = \langle X \circ \gamma(t) - \mathbf{a}, X \circ \gamma(t) - \mathbf{a} \rangle$. Logo

$$\begin{aligned} d'_{\mathbf{a}}(0) &= \underbrace{d(d_{\mathbf{a}}(0, 0))}_{=0} \cdot w = 0, \\ d''_{\mathbf{a}}(0) &= \underbrace{d^2(d_{\mathbf{a}}(0, 0))}_{=0} \cdot w^2 + \underbrace{d(d_{\mathbf{a}}(0, 0))}_{=0} \cdot \gamma''(0) = 0, \\ d'''_{\mathbf{a}}(0) &= d^3(d_{\mathbf{a}}(0, 0)) \cdot w^3 + 3 \underbrace{d^2(d_{\mathbf{a}}(0, 0)) \cdot (w, \gamma''(0))}_{=0} + \underbrace{d(d_{\mathbf{a}}(0, 0))}_{=0} \cdot \gamma'''(0). \end{aligned}$$

Portanto

$$d'''_{\mathbf{a}}(0) = 0 \Leftrightarrow d^3(d_{\mathbf{a}}(0, 0)) \cdot w^3,$$

a qual é condição para w ser uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível de ordem 2. Então aplicando o Teorema 3.14 o resultado segue. $\square$

Corolário 3.16. *Nas condições da Proposição 3.15, considere S numa carta de Monge $X(u, v) = (u, v, f(u, v))$ com f como em (3.2), com $\mathbf{a} = (0, 0, -\frac{1}{2a_{20}})$ e $a_{30} = 0$. Então se $a_{31}^2 - 4(a_{20} - a_{22})(a_{20}^3 - a_{40}) < 0$ temos que o contato da curva Γ na origem com a família de esferas com o mesmo centro $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ tem singularidade de tipo A_3 se, e somente se, a origem é um ponto sobre a curva de ridge no qual o ridge é transversal à direção principal associada.*

Demonstração. É bem conhecido que a condição para que a superfície S seja ponto ridge que não é rib (equivalentemente singularidade A_3 no ponto da função $d_{\mathbf{a}}$) é dada por $a_{31}^2 - 4(a_{20} - a_{22})(a_{20}^3 - a_{40}) \neq 0$. Temos também que $w = (1, 0)$ e seja $\gamma(t) = (t, \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + O(4))$. Segue que nestas condições

$$d_{\mathbf{a}}^{(iv)}(0) = (a_{20} - a_{22})\alpha_2^2 - a_{31}\alpha_2 + a_{20}^3 - a_{40},$$

polinômio de grau 2 em α_2 com discriminante dado por

$$a_{31}^2 - 4(a_{20} - a_{22})(a_{20}^3 - a_{40}).$$

Assim, se o discriminante for negativo, segue que $d_{\mathbf{a}}^{(iv)}(0) \neq 0$ e o resultado segue. $\square$

Corolário 3.17. *Se w é uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível de ordem ≥ 3 . Então na origem a curva ridge é tangente à direção principal associada.*

Proposição 3.18. *Suponha que a função $d_{\mathbf{a}}$ tem uma singularidade $D_4^{\pm}$ na origem. Então, as separatrizes das linhas de curvatura de S na origem são tangentes às direções $d_{\mathbf{a}}$ -admissíveis de ordem ≥ 2 .*

Demonstração. A prova deste resultado é análoga à apresentada para a Proposição 3.8. $\square$

3.4 Direções admissíveis no cross-cap

Nas seções anteriores estudamos as direções $h_{\mathbf{v}}$ -admissíveis e $d_{\mathbf{a}}$ -admissíveis em superfícies regulares. Agora vamos a estudar o caso quando a superfície é um cross-cap.

Consideremos, então, a superfície cross-cap $\mathcal{S}$ parametrizada por

$$X(u, v) = (u, uv + p(v), v^2 + au^2 + q(u, v)), \quad (3.10)$$

onde $p(v) \in \mathcal{M}_1^4$ e $q(u, v) \in \mathcal{M}_2^3$.

Seja $h_{\mathbf{v}}$ um membro da família de funções altura sobre $\mathcal{S}$ dada por

$$h_{\mathbf{v}}(u, v) = \langle X(u, v), \mathbf{v} \rangle. \quad (3.11)$$

Como no ponto de cross-cap o espaço tangente a $\mathcal{S}$ tem dimensão 1, a parametrização da superfície numa vizinhança desse ponto não é difeomorfismo e perdemos a bijeção entre um aberto do plano e a superfície. Agora consideremos as direções admissíveis só em $\mathbb{R}^2$. É conveniente definir o conjunto pré-parabólico (CPP) (como em [50]) que é a pré-imagem em $U \subset \mathbb{R}^2$ do conjunto parabólico em $\mathcal{S}$ pela parametrização X .

Proposição 3.19. *No cross-cap hiperbólico, não há direções $h_{\mathbf{v}}$ -admissíveis na origem.*

Demonstração. Temos que $h_{\mathbf{v}}$ é singular se, e somente se, $\mathbf{v} = (0, y, z)$ para algum y, z . Assim $\det(d^2(h_{\mathbf{v}}(0, 0))) = 4az^2 - y^2$. Como $a < 0$ temos que a singularidade é sempre do tipo A_1^+ e então não é degenerada, o que conclui a demonstração. $\square$

Note que, se $a > 0$ temos duas direções degeneradas dadas por $4az^2 - y^2 = 0$, isto é $y = \pm 2\sqrt{a}z$ (ver Figura 11). Logo se $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\pm} = (0, \pm 2\sqrt{a}, 1)$ temos que existem direções $h_{\mathbf{v}^{\pm}}$ -admissíveis na origem.

Figura 11 – Duas direções degeneradas $\mathbf{v}^{\pm}$ contidas no plano normal a $\mathcal{S}$ na origem $N_{(0,0,0)}\mathcal{S}$.

Temos

$$h_{\mathbf{v}^\pm}(u, v) = \left(\sqrt{a}u \pm v\right)^2 \pm 2\sqrt{a}p(v) + q(u, v) + O(5),$$

e

$$d^2(h_{\mathbf{v}^\pm}(0, 0)) = \begin{bmatrix} 2a & \pm 2\sqrt{a} \\ \pm 2\sqrt{a} & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo a direção $(1, \mp\sqrt{a})$ é uma direção $h_{\mathbf{v}^\pm}$ -admissível de ordem ≥ 1 .

Vamos estudar agora a ordem de admissibilidade das direções $(1, \mp\sqrt{a})$ associadas a $\mathbf{v}^\pm$.

Proposição 3.20. *Seja $\mathcal{S}$ um cross-cap elíptico e $p = (0, 0, 0)$. Então a direção $(1, \mp\sqrt{a})$ é uma direção $h_{\mathbf{v}^\pm}$ -admissível de ordem 2 em p se, e somente se, $h_{\mathbf{v}^\pm}$ tem singularidade tipo A_3 na origem.*

Demonstração. Foi mostrado em [50] que a função $h_{\mathbf{v}^\pm}$ tem singularidade tipo A_3 na origem se, e somente se,

$$q_3(1, \mp\sqrt{a}) = 0 \quad \text{e} \quad \left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)^2 - 4\left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right) \neq 0.$$

Note que

$$\begin{aligned} d^3(h_{\mathbf{v}^\pm})(0, 0) \cdot (1, \mp\sqrt{a})^3 &= ((h_{\mathbf{v}^\pm})_{uuu} \mp 3\sqrt{a}(h_{\mathbf{v}^\pm})_{uuv} + 3a(h_{\mathbf{v}^\pm})_{uvv} \mp a\sqrt{a}(h_{\mathbf{v}^\pm})_{vvv})(0, 0) \\ &= q_{uuu}(0, 0) \mp 3\sqrt{a}q_{uuv}(0, 0) + 3aq_{uvv}(0, 0) \mp a\sqrt{a}q_{vvv}(0, 0) \\ &= 6(q_{30} \mp \sqrt{a}q_{31} + aq_{32} \mp a\sqrt{a}q_{33}). \end{aligned}$$

Assim, $d^3(h_{\mathbf{v}^\pm})(0, 0) \cdot (1, \mp\sqrt{a})^3 = 0$ se, e somente se,

$$q_3(1, \mp\sqrt{a}) = q_{30} \mp \sqrt{a}q_{31} + aq_{32} \mp a\sqrt{a}q_{33} = 0. \quad (3.12)$$

Agora consideramos o germe de difeomorfismo $\varphi_\mp(u, v) = (u, v \mp \sqrt{a}u)$ e usando $\varphi_\mp$ temos que

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{v}^\pm} \circ \varphi_\mp(u, v) &= v^2 + \left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)u^2v + A_{32}uv^2 + A_{33}v^3 + \\ &\quad + \left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right)u^4 + A_{41}u^3v + A_{42}u^2v^2 + A_{43}uv^3 + A_{44}v^4, \end{aligned}$$

onde os A_{3i} dependem dos q_{3j} da parametrização do cross-cap. Segue que $(1, 0)$ é uma direção $(h_{\mathbf{v}^\pm} \circ \varphi_\mp)$ -admissível de ordem ≥ 2 . Fazendo uma nova mudança de coordenadas podemos ver que

$$h_{\mathbf{v}^\pm} \circ \varphi_\mp \sim_{\mathcal{R}} v^2 + \left(\left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right) - \frac{1}{4}\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)^2\right)u^4.$$

É fácil ver que $d^4(h_{\mathbf{v}^\pm} \circ \varphi_\mp)(0, 0) \cdot (1, 0)^4 = 0$ se, e somente se,

$$\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)^2 - 4\left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right) = 0$$

o que conclui a prova. $\square$

Teorema 3.21. *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave com $\gamma(0) = (0, 0)$ e considere a curva suave sobre um cross-cap elíptico $\Gamma := X \circ \gamma$. Considere as direções $h_{\mathbf{v}^\pm}$ -admissíveis $(1, \mp\sqrt{a})$ de ordem ≥ 2 . Então, a curva Γ tem contato do tipo $A_{\geq 3}$ na origem com o seu plano osculador se, e somente se, γ é tangente a $(1, \mp\sqrt{a})$. Em particular, as componentes do conjunto pré-parabólico satisfazem esta condição.*

Demonstração. Temos que verificar que, nestas condições, a curva Γ tem torção nula na origem. Sem perda de generalidade seja $\gamma(t) = (t, \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots)$. Assim Γ satisfaz

$$\tau(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\Gamma'(0), \Gamma''(0), \Gamma'''(0)| = 0,$$

isto é, se, e só se,

$$12 \left(-\alpha_2 \left(\alpha_1^2 - a \right) + \alpha_1 \left(q_{30} + q_{31}\alpha_1 + q_{32}\alpha_1^2 + q_{33}\alpha_1^3 \right) \right) = 0. \quad (3.13)$$

Note que a equação (3.13) pode ser resolvida por $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, mas esta solução impõe condições no 2-jato da γ o qual não queremos. Assim, quando $\alpha_2 \neq 0$ temos que

$$\tau(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \pm\sqrt{a},$$

e o resultado segue. □

Corolário 3.22. *Nas condições do Teorema 3.21, se*

$$\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33} \right)^2 - 4 \left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a}) \right) < 0,$$

então Γ tem contato A_3 com seu plano osculador na origem.

Demonstração. De fato temos que

$$\tau'(0) = 48\sqrt{a} \left(\alpha_2^2 + \left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33} \right) \alpha_2 + \left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a}) \right) \right), \quad (3.14)$$

o qual é um polinômio de grau 2 em α_2 cujo discriminante é dado por

$$\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33} \right)^2 - 4 \left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a}) \right),$$

e o resultado segue. □

Corolário 3.23. *Nas condições do Corolário 3.22, a curva Γ tem contato A_3 com seu plano osculador na origem se, e só se, $h_{\mathbf{v}^\pm}$ tem singularidade A_3 na origem.*

A Figura 12 mostra uma família de curvas tangentes à direção $h_{\mathbf{v}^\pm}$ -admissível $(1, \mp\sqrt{a})$ e as respectivas imagens sobre o cross-cap elíptico, em particular, todas essas curvas tem torção nula na origem.

Figura 12 – À esquerda em azul o 1-jato do CPP e em vermelho e laranja curvas tangentes à direção $h_{v\pm}$ -admissível $(1, \pm\sqrt{a})$. À direita a imagem das curvas sobre um cross-cap elíptico através da parametrização X .

Observação 3.24. Consideremos de novo as curvas γ e Γ do Teorema 3.21. Temos que, a curvatura de Γ na origem (denotada por k_Γ) é dada por

$$k_\Gamma(0) = 2((\alpha_1^2 + a)^2 + \alpha_1^2)^{\frac{1}{2}},$$

isto é, a curvatura de Γ na origem nunca se anula. Esta propriedade vale para qualquer curva suave sobre um crosscap genérico passando pela origem.

Podemos então analisar o comportamento da torção de Γ perto da origem a través do Lema 3.9.

Temos que

$$j^3(k^2(s)\tau(s)) = 12\eta_0 + 48\eta_1 s + 24\eta_2 s^2 + 240\eta_3 s^3,$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \alpha_1 q_3(1, \alpha_1) + \alpha_2(\alpha_1^2 - a), \\ \eta_1 &= \alpha_1 q_4(1, \alpha_1) + \alpha_2(q_3(1, \alpha_1) - q_{30} + 2q_{33}\alpha_1^3 + q_{32}\alpha_1^2) + \alpha_3(\alpha_1^2 - a) + \alpha_1\alpha_2^2 - \\ &\quad - p_4\alpha_1^4(\alpha_1^2 + a), \\ \eta_2 &= 5\alpha_1 q_3(1, \alpha_1) + \alpha_2(3q_4(1, \alpha_1) + 20q_{44}\alpha_1^4 + 15q_{43}\alpha_1^3 + 10q_{42}\alpha_1^2 + 5q_{41}\alpha_1) + \\ &\quad + \alpha_3(2q_3(1, \alpha_1) + 10q_{33}\alpha_1^3 + 5q_{32}\alpha_1^2 - 5q_{30} + 10\alpha_1\alpha_2) - 5p_5\alpha_1^5(\alpha_1^2 + a) + \\ &\quad + p_4(-3\alpha_1^4 q_3(1, \alpha_1) - 20\alpha_1^3 \alpha_2(\alpha_1^2 + a) - 6\alpha_1^5 \alpha_2) - 5\alpha_4(\alpha_1^2 - a) + 3\alpha_2^3 + \\ &\quad + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}(3q_3(1, \alpha_1) + 21q_{33}\alpha_1^3 + 8q_{32}\alpha_1^2 - 3q_{30}), \\ \eta_3 &= \alpha_1 q_6(1, \alpha_1) + \alpha_2(q_5(1, \alpha_1) + 5q_{54}\alpha_1^4 + 3q_{53}\alpha_1^3 + 2q_{52}\alpha_1^2 + q_{51}\alpha_1) + \alpha_3(q_4(1, \alpha_1) + \\ &\quad + 3q_{44}\alpha_1^4 + 2q_{43}\alpha_1^3 + q_{42}\alpha_1^2 - q_{40} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}q_3(1, \alpha_1) + 8q_3 3\alpha_1^2 \alpha_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}q_{30} + 3q_{32}\alpha_1 \alpha_2 - \\ &\quad - 4p_4\alpha_1^3(a + \alpha_1^2) - 2\alpha_2^2) + \alpha_4(q_3(1, \alpha_1) + q_{33}\alpha_1^3 - q_{31}\alpha_1 - 2q_{30} + 2\alpha_1\alpha_2) + \alpha_1\alpha_3^2 + \\ &\quad + \alpha_5(\alpha_1^2 - a) + p_4(-\alpha_1^3 \alpha_2 q_3(1, \alpha_1) - 6\alpha_1^2 \alpha_2^2(\alpha_1^2 + a) - 8\alpha_1^4 \alpha_2^2) - p_6\alpha_1^6(\alpha_1^2 + a) + \\ &\quad + p_5(-\alpha_1^5 q_3(1, \alpha_1) - \alpha_1^4 \alpha_2(7\alpha_1^2 + 5a)) + \alpha_2^3(q_{32} + 4\alpha_1 q_{33}) + \\ &\quad + \alpha_2^2\left(\frac{1}{\alpha_1}q_4(1, \alpha_1) - \frac{q_{40}}{\alpha_1} + 5q_{43}\alpha_1^2 + 2q_{42}\alpha_1 + 9q_{44}\alpha_1^3\right); \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\tau(0) = 0 &\Leftrightarrow \eta_0 = 0, \\ \tau(0) = \tau'(0) = 0 &\Leftrightarrow \eta_0 = \eta_1 = 0, \\ \tau(0) = \tau'(0) = \tau''(0) = 0 &\Leftrightarrow \eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = 0, \\ \tau(0) = \tau'(0) = \tau''(0) = \tau'''(0) = 0 &\Leftrightarrow \eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0.\end{aligned}$$

Vamos considerar o caso em que a curva Γ tem contato $A_{\geq 3}$ com o seu plano osculador. De fato, a equação (3.14) mostra que se a expressão

$$\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)^2 - 4\left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right) > 0$$

(a qual corresponde ao discriminante de (3.14) em α_2) existem curvas sobre o cross-cap, que tem contato $A_{\geq 4}$ com o seu plano osculador, mas a função $h_{\mathbf{v}^\pm}$ tem singularidade A_3 .

A condição para que o cross-cap tenha contato com um dos planos degenerados no ponto de cross-cap do tipo A_4 é dada em [50], a qual é a seguinte

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left(3q_{30} + 2\sqrt{a}q_{31} + aq_{32}\right). \quad (3.15)$$

A condição em (3.15) é equivalente a

$$\left(q_{31} \mp 2\sqrt{a}q_{32} + 3aq_{33}\right)^2 - 4\left(\pm 2p_4\sqrt{a}a^2 + q_4(1, \mp\sqrt{a})\right) = 0,$$

isto é, que α_2 seja raiz de multiplicidade 2 da equação (3.14). Então, neste caso existe uma única possibilidade (até o 2 jato de γ) para a curva Γ . Temos então o seguinte resultado.

Teorema 3.25. *A curva Γ sobre um cross-cap elíptico tem contato na origem com o seu plano osculador do tipo $A_{\geq 4}$ se, e somente se, $j^2\gamma = j^2P_{CPP}$, onde P_{CPP} é uma parametrização de uma das componentes do conjunto pré-parabólico.*

Consideremos agora um cross-cap $\mathcal{S}$ parametrizado como na Proposição 2.53, cuja parametrização denotaremos de novo como X .

Seja $d_{\mathbf{a}}$ um membro da família de funções distância ao quadrado sobre o crosscap

$$d_{\mathbf{a}}(u, v) = \langle X(u, v) - \mathbf{a}, X(u, v) - \mathbf{a} \rangle. \quad (3.16)$$

Como mostrado em [22, 60], a função $d_{\mathbf{a}}$ tem singularidade em $p = X(0, 0) = (0, 0, 0)$ de tipo $A_{\geq 1}$ se $\mathbf{a} = (0, y, z)$, isto é, $\mathbf{a} \in N_p\mathcal{S}$. Tem singularidade $A_{\geq 2}$ se além disso

$$\det(d^2(d_{\mathbf{a}}(0, 0))) = 2(2az^2 - z) - (y + bz)^2 = 0. \quad (3.17)$$

A expressão (3.17) define uma cônica contida no plano normal, chamada de cônica focal e denotada por $\mathcal{C}_a$ (ver [22, 60]).

Condição	Tipo de cross-cap	Equação da cônica focal	Tipo da cônica focal
$a < 0$	Hiperbólico	$-4a(z - \frac{1}{4a})^2 + (y + bz)^2 = -\frac{1}{4a}$	Elipse
$a = 0$	Parabólico	$-\frac{1}{2}(y + bz)^2 = z$	Parábola
$a > 0$	Elíptico	$4a(z - \frac{1}{4a})^2 - (y + bz)^2 = \frac{1}{4a}$	Hipérbola

Tabela 5 – Cônicas focais

Figura 13 – Em azul as cônicas focais contidas no plano $N_p S$ para os cross-caps do tipo hiperbólico, parabólico e elíptico respectivamente.

Dependendo da escolha de “ a ” na parametrização do crosscap, a cônica focal é uma das cônicas dadas na Tabela 5 (ver também a Figura 13).

Pela definição, temos que se $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_a$ então existe uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível w , dada por $w = (-(d_{\mathbf{a}})_{vv}(0,0), (d_{\mathbf{a}})_{uv}(0,0)) = (\alpha, \beta)$. Suponha sem perda de generalidade $\beta \neq 0$ e tome $\gamma(t) = (t, -\frac{\alpha}{\beta}t + \lambda_2 t^2 + \lambda_3 t^3 + O(4))$ e $\Gamma(t) = X \circ \gamma(t)$. Então temos, análogo à Proposição 3.15, o seguinte resultado

Lema 3.26. *O contato da curva Γ com esferas na origem tem singularidade de tipo A_3 se, e somente se, w é uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível de ordem 2.*

Demonstração. A prova é análoga à apresentada na Proposição 3.15. □

Seja $w = (\alpha, \beta)$ uma direção $d_{\mathbf{a}}$ -admissível de ordem 2 na origem. Então

$$(d_{\mathbf{a}})_{uuu}(0,0)\alpha^3 + 3(d_{\mathbf{a}})_{uuv}(0,0)\alpha^2\beta + 3(d_{\mathbf{a}})_{uvv}(0,0)\alpha\beta^2 + (d_{\mathbf{a}})_{vvv}(0,0)\beta^3 = 0, \quad (3.18)$$

onde os $(d_{\mathbf{a}})_{ijk}(0,0)$ em (3.18) dependem de potências quadráticas em y, z . Então, fixando o sinal de “ a ” podemos parametrizar a cônica focal gerando então um polinômio de grau 4 no parâmetro da cônica. Assim podemos concluir que há, no máximo 4 direções $d_{\mathbf{a}}$ -admissíveis de ordem 2, tal como foi mostrado em [22, 60] para singularidades do tipo A_3 da função distância ao quadrado.

PROJEÇÕES ORTOGONAIS

Neste capítulo, consideramos as projeções ortogonais do cross-cap em planos.

A família de projeções sobre um cross-cap foi inicialmente estudada em [60], onde é dada a $\mathcal{A}$ -classificação das singularidades de $\mathcal{A}_e - \text{cod} \leq 2$ que acontecem nos membros da família.

Para o estudo da geometria plana obtida através do contato do cross-cap com planos, os autores em [16, 60] introduziram o grupo $\mathcal{R}(X)$ de germes de difeomorfismos em $(\mathbb{R}^3, 0)$ que preservam o $\mathcal{A}$ -modelo X do crosscap. Classificaram os germes de submersões de $(\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sob a ação do grupo $\mathcal{R}(X)$ e deduziram informações geométricas do cross-cap e seu dual.

O contato do cross-cap com retas também é de interesse. Resultados nesta direção foram obtidos em [64], onde os autores estudaram as projeções ortogonais do cross-cap associadas aos germes de $\mathcal{A}_e - \text{cod} = 2$. O estudo das deformações do contorno aparente (discriminante da projeção) pela ação do grupo $\mathcal{A}$, não leva em consideração a interação entre o contorno aparente e a projeção do conjunto de pontos duplos do cross-cap.

No entanto, a ação natural a considerar é do grupo $\mathcal{A}(X) = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{L}$.

Nosso objetivo, neste capítulo, é considerar uma ação de um sub-grupo de $\mathcal{A}$ que nos permite captar a projeção dos pontos duplos. Nesta direção, os Teoremas 4.12, 4.13 e 4.14 mostram como é a bifurcação da projeção do conjuntos de pontos duplos juntamente com a do contorno aparente.

4.1 Ferramentas e notação

Nesta seção, daremos as definições e teoremas clássicos necessários para o estudo deste capítulo e que não se encontram no Capítulo 2.

Definição 4.1. *Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ uma subvariedade (regular ou singular). Dizemos que um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ preserva W se $\phi(W)$ e W são iguais como germes na origem, isto é, $(\phi(W), 0) = (W, 0)$.*

Denotamos por $\mathcal{R}(X)$ o grupo dos difeomorfismos que preservam o modelo estandar do cross-cap. Como é natural, definimos o grupo $\mathcal{A}(X) := \mathcal{R}(X) \times \mathcal{L}$ e o grupo $\mathcal{K}(X) := \mathcal{R}(X) \times \mathcal{C}$. Assim, dizemos que dois germes suaves $f, g \in \mathcal{E}_{3,2}$ são $\mathcal{A}(X)$ -equivalentes (respectivamente $\mathcal{K}(X)$ -equivalentes) se existem $(\phi, \varphi) \in \mathcal{A}(X)$ tais que $\phi \in \mathcal{R}(X)$, $\varphi \in \mathcal{L}$ (respectivamente $(\phi, \varphi) \in \mathcal{K}(X)$ tais que $\phi \in \mathcal{R}(X)$, $\varphi \in \mathcal{C}$) e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3, 0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2, 0 \\ \downarrow \phi & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^3, 0 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2, 0 \end{array}$$

Um método de aproximação infinitesimal é dado por integração de campos de vetores tangentes à X para produzir difeomorfismos que preservam X (para mais detalhes ver [60]).

Proposição 4.2 ([16, 60]). *O $\mathcal{E}_3$ -módulo de germes na origem de campos de vetores em $\mathbb{R}^3$ que são tangentes ao cross-cap é gerado por*

$$\xi_1 = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \quad \xi_2 = v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w}, \quad \xi_3 = u^2 \frac{\partial}{\partial v} + 2v \frac{\partial}{\partial w} \quad e \quad \xi_4 = v \frac{\partial}{\partial u} + uw \frac{\partial}{\partial v}.$$

Pelo teorema da forma local das submersões (ver [35]), sabemos que dada uma submersão $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ e um conveniente sistema de coordenadas, tal que, f pode ser visto como uma projeção ortogonal com kernel $\mathbf{v}$. Em outras palavras, $f \sim_{\mathcal{A}} P_{\mathbf{v}}$, onde $P_{\mathbf{v}}$ é um membro da família de projeções ortogonais dada na Seção 2.5.

Logo, para o estudo da geometria obtida através do contato do cross-cap com retas, é natural considerar a classificação dos germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ que são submersões, pela ação do grupo $\mathcal{A}(X)$, e agir de forma análoga como foi feito em [16, 60], onde usaram o grupo $\mathcal{R}(X)$ para estudar a geometria obtida pelo contato do cross-cap com planos.

As ferramentas básicas usadas para a classificação de germes de funções suaves pela ação de um subgrupo de um grupo de Mather que preserva alguma subvariedade, foram desenvolvidas em [18]. Tais subgrupos de difeomorfismos são conhecidos na literatura como grupos geométricos de Damon (Seção 2.3).

Dado que $\mathcal{A}(X)$ é um grupo geométrico de Damon, os teoremas de determinação finita e desdobramentos continuam válidos.

Definição 4.3. Um germe $f \in \mathcal{E}_{3,2}$ é dito $k\text{-}\mathcal{A}(X)$ -determinado se todos os germes com o mesmo k -jato que f são $\mathcal{A}(X)$ -equivalentes à f . Dizemos que $f \in \mathcal{E}_{3,2}$ é finitamente $\mathcal{A}(X)$ -determinado se é $k\text{-}\mathcal{A}(X)$ -determinado para algum k .

Os espaços tangentes à órbita associada a um germe $f \in \mathcal{E}_{3,2}$, são definidos como na Seção 2.2.4, isto é,

$$T\mathcal{A}(X) \cdot f = T\mathcal{R}(X) \cdot f + T\mathcal{L} \cdot f \quad \text{e} \quad T\mathcal{K}(X) \cdot f = T\mathcal{R}(X) \cdot f + TC \cdot f,$$

para os grupos $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{K}(X)$ respectivamente. Também a $\mathcal{A}(X)$ -codimensão é definida como sendo

$$\mathcal{A}(X) - \text{cod}(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot f}.$$

Em [16, 60], foi mostrado que $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}_e(X)$, conseqüentemente $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}_e(X)$.

Da mesma forma como na Seção 2.2, enunciamos alguns resultados que serão necessários.

Proposição 4.4 ([18]). Um germe $f \in \mathcal{E}_{3,2}$ é finitamente $\mathcal{A}(X)$ -determinado se, e somente se,

$$\mathcal{M}_3^k \mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{A}(X) \cdot f$$

para algum k .

Definição 4.5. Definimos o grupo $\mathcal{A}_1(X)$ como um subgrupo de $\mathcal{A}(X)$ tal que, para $\phi \in \mathcal{A}_1(X)$, tem-se que $j^1\phi(0)$ é a identidade.

Teorema 4.6 ([9]). Seja $U \subseteq \mathcal{A}(X)$ um subgrupo com $\mathcal{A}_1(X) \subset U$ e J^1U unipotente. Se um germe suave $f : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ satisfaz $\mathcal{M}_3^{r+1} \mathcal{E}_{3,2} \subset TU \cdot f$, então este é $r\text{-}\mathcal{A}(X)$ -determinado.

Corolário 4.7 ([9]). Se $f : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ satisfaz

$$\mathcal{M}_3^l \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{K}(X) \cdot f + \mathcal{M}_3^{l+1} \mathcal{E}_{3,2}$$

e

$$\mathcal{M}_3^{k+1} \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f + \mathcal{M}_3^{k+l+1} \mathcal{E}_{3,2}$$

então f é $k\text{-}\mathcal{A}_1(X)$ -determinado.

O Corolário 4.7 é a ferramenta principal para a $\mathcal{A}(X)$ -determinação finita. Para a classificação precisaremos do Lema de Mather e o Teorema da transversal completa (Lema 2.22 e Teorema 2.23, respectivamente). Finalmente, as definições de desdobramento e versalidade são análogas às dadas no Capítulo 2, mas considerando agora o grupo $\mathcal{A}(X)$. Seguindo estas definições temos o seguinte resultado:

Teorema 4.8 (Critério infinitesimal [18]). *Um desdobramento a p parâmetros $F(x, u)$ de f é $\mathcal{A}(X)$ -versal se, e somente se, as velocidades iniciais*

$$\frac{\partial}{\partial u_1} F(x, 0), \dots, \frac{\partial}{\partial u_p} F(x, 0) \quad \text{geram} \quad \frac{\mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot f}.$$

Para a classificação, vamos precisar de mudanças de coordenadas lineares em $\mathcal{R}(X)$. Estes germes são obtidos integrando o 1-jato dos campos de vetores da Proposição 4.2.

Começamos então com ξ_1 . Temos que,

$$j^1 \xi_1 = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \quad \text{induz o sistema} \quad \begin{cases} \dot{u} = u \\ \dot{v} = v \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad \text{com condição inicial} \quad \begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} u(t) = u_0 e^t \\ v(t) = v_0 e^t \\ w(t) = w_0. \end{cases}$$

Então, para este vetor podemos associar o difeomorfismo dado por $\varphi_1(u, v, w) = (e^t u, e^t v, w)$.

Analogamente, para ξ_2

$$j^1 \xi_2 = v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = v \\ \dot{w} = 2w \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

(note que a condição inicial é a mesma em todos os casos) cuja solução é dada por

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = v_0 e^t \\ w(t) = w_0 e^{2t} \end{cases}$$

e $\varphi_2(u, v, w) = (u, e^t v, e^{2t} w)$.

Da mesma maneira, para ξ_3

$$j^1 \xi_3 = v \frac{\partial}{\partial w} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = v \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} u(t) = u_0 \\ v(t) = v_0 \\ w(t) = w_0 + v_0 t \end{cases}$$

com $\varphi_3(u, v, w) = (u, v, w + tv)$.

Finalmente temos para ξ_4

$$j^1 \xi_4 = v \frac{\partial}{\partial u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = 0 \\ \dot{w} = 0 \end{cases} \quad \text{cuja solução é} \quad \begin{cases} u(t) = u_0 + v_0 t \\ v(t) = v_0 \\ w(t) = w_0 \end{cases}$$

com $\varphi_4(u, v, w) = (u + tv, v, w)$.

Vamos considerar mais dois difeomorfismos que serão importantes na hora de reduzir as formas normais. De fato, para

$$\varphi_5(u, v, w) = (-u, -v, w) \quad \text{e} \quad \varphi_6(u, v, w) = (u, -v, w);$$

é muito simples verificar que preservam o cross-cap.

Reescrevemos a lista de germes de difeomorfismos lineares em $\mathcal{R}(X)$:

- $\varphi_1(u, v, w) = (e^\lambda u, e^\lambda v, w)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\varphi_2(u, v, w) = (u, e^\mu v, e^{2\mu} w)$, $\mu \in \mathbb{R}$,
- $\varphi_3(u, v, w) = (u, v, w + \eta v)$, $\eta \in \mathbb{R}$,
- $\varphi_4(u, v, w) = (u + \gamma v, v, w)$, $\gamma \in \mathbb{R}$,
- $\varphi_5(u, v, w) = (-u, -v, w)$,
- $\varphi_6(u, v, w) = (u, -v, w)$.

Ao longo deste capítulo usaremos a notação φ_i , $i = 1, \dots, 6$, para nos referir a um dos difeomorfismos da lista anterior.

4.2 Classificação de submersões pela ação de $\mathcal{A}(X)$

A classificação de germes de submersões pela ação do grupo $\mathcal{A}(X)$ foi dada em [60], e corresponde ao seguinte Teorema.

Teorema 4.9 ([60]). *As órbitas da ação de $\mathcal{A}(X)$ sobre $\mathcal{E}_{3,2}$ dos germes de submersões de codimensão menor ou igual a 2 são mostrados na Tabela 6. O parâmetro “a” nas formas*

	Germe	$\mathcal{A}(X)$ -cod. do germe	Condição
I	(u, w)	0	
II	$(v, u + w)$	1	
III	$(v + u^3, w \pm u^2 + au^3)$	2	$a^2 - 4 \neq 0$
IV	$(u + w^2 + aw^3, v + w^2)$	2	$a \neq 0$

Tabela 6 – Submersões de $\mathcal{A}(X)$ -cod ≤ 2 .

normais III e IV na Tabela 6 é um módulo e a condição dada é necessária para o germe ser finitamente determinado.

Na demonstração do Teorema 4.9 dada em [60], são mostradas as contas feitas até obter os dois primeiro germes da lista, e para o resto é usado um pacote computacional.

Neste trabalho, apresentamos os cálculos completos usados para obter uma demonstração do Teorema 4.9, a qual pode ser encontrada no Apêndice A.

Teorema 4.10. *Os seguintes são desdobramentos $\mathcal{A}(X)$ -versais dos germes do Teorema 4.9.*

- I. $F_1(u, v, w) = (u, v)$, este germe é estável,
- II. $F_2(u, v, w, \alpha) = (u + w, v + \alpha u)$,
- III. $F_3^\pm(u, v, w, a, \alpha, \beta) = (v + u^3 + \alpha u, w \pm u^2 + au^3 + \beta u)$,
- IV. $F_4(u, v, w, a, \alpha, \beta) = (u + w^2 + aw^3 + \alpha w, v + w^2 + \beta w)$.

Demonstração. Este resultado é uma consequência direta das contas na prova do Teorema 4.9. □

4.3 Bifurcações no contorno aparente e na projeção da curva dos pontos duplos

Dada a classificação no Teorema 4.9, para cada germe de submersão f_i , $i = 1, 2, 3, 4$, existe um vetor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{S}^2$ tal que $f_i \sim_{\mathcal{A}} P_{\mathbf{v}_i}$, onde $P_{\mathbf{v}_i}$ é um membro da família de projeções ortogonais, então vamos estudar a família de projeções ortogonais sobre o cross-cap estandar.

Considere a parametrização do cross-cap estandar $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $X(x, y) = (x, xy, y^2)$. Assim, as projeções do cross-cap são germes de aplicações da forma

$$P_{\mathbf{v}_i} \circ X : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0. \quad (4.1)$$

Chamaremos ao conjunto singular da aplicação (4.1) de contorno gerador (denotado por Σ), e o discriminante de contorno aparente (denotado por Δ).

Um fato interessante que precisa ser levado em consideração é o seguinte. Para o estudo da bifurcação do contorno aparente das projeções do cross-cap e sua interação com a projeção do conjunto dos pontos duplos são consideradas as seguintes três relações de equivalência.

O grupo $\mathcal{A}$ foi considerado em [60, 64] para dar informação sobre as bifurcações do contorno aparente. Ali foi mostrado que os membros da família de projeções ortogonais sobre o cross-cap podem ter singularidades do tipo como nas Tabelas 7 e 8. Para reconhecer estes tipos de singularidades usaremos os critérios de Saji (dados em [54]).

O segundo é o grupo $\mathcal{A}(X)$, o qual foi introduzido em [60]. Associamos os germes no Teorema 4.9 os nomes dados na Tabela 9. Usaremos este grupo para obter informações

Forma normal	Tipo	$\mathcal{A}_e$ -cod. do germe
(x, y^2)	dobra	0
$(x, xy + y^3)$	cúspide	0
$(x, x^2y + y^3)$	lábios	1
$(x, -x^2y + y^3)$	bicos	1
$(x, xy + y^4)$	rabo de andorinha	1

Tabela 7 – Formas normais de germes de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -cod ≤ 1 .

Forma normal	Tipo	$\mathcal{A}_e$ -cod. do germe
$(x^2 + y^3, y^2 + x^3)$	sharksfin	2
$(x^2 - y^2 + x^3, xy)$	deltoide	2

Tabela 8 – Formas normais de germes de coposto 2 e $\mathcal{A}_e$ -cod = 2.

sobre o contorno aparente e a projeção do conjunto de pontos duplos no ponto de cross-cap.

Forma normal	Tipo	$\mathcal{A}(X)$ -cod. do germe
(u, w)	$\mathcal{A}(X)$ -dobra	0
$(v, u + w)$	$\mathcal{A}(X)$ -cúspide	1
$(v + u^3, w + u^2 + au^3)$	$\mathcal{A}(X)$ -sharksfin	2
$(v + u^3, w - u^2 + au^3)$	$\mathcal{A}(X)$ -deltoide	2
$(u + w^2 + aw^3, v + w^2)$	$\mathcal{A}(X)$ -rabo de andorinha	2

Tabela 9 – $\mathcal{A}(X)$ -classificação de germes de submersões de $\mathcal{A}(X)$ -cod ≤ 2 ([60]).

Finalmente, consideraremos a $\mathcal{B}$ -equivalência, a qual foi introduzida em [12]. O grupo $\mathcal{B}$ é um grupo geométrico de Damon o qual, no estudo de projeção de superfícies preserva o bordo. Mais precisamente, seja $(Y, 0)$ denotando o germe na origem do par $Y = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times \{0\})$. Consideremos as coordenadas (x, y) sobre $\mathbb{R}^2$, e $\mathbb{R} \times \{0\}$ o eixo x . Naturalmente, isto corresponde a uma variedade com bordo, cujo interior é tomado como os pontos em $\mathbb{R}^2$ com $y > 0$. Sejam $f_1, f_2 : (Y, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dizemos que f_1 e f_2 são $\mathcal{B}$ -equivalentes (denotado por $f_1 \sim_{\mathcal{B}} f_2$) se existem germes de difeomorfismos

$$h : (Y, 0) \rightarrow (Y, 0), \quad H : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

tal que h preserva $(Y, 0)$, e o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (Y, 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H \\ (Y, 0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

Claramente $\mathcal{B}$ é um subgrupo do grupo $\mathcal{A}$.

Em nosso estudo vamos precisar dos germes de coposto 1 e $\mathcal{B}$ -cod ≤ 1 obtidos em [12] (ver Tabela 10).

Forma normal	Nome	$\mathcal{B}$ -cod. da órbita
$(x, xy + y^2)$	semi-dobra	0
$(x, xy + y^3)$	semi-cúspide	1
$(x, y^2 + \varepsilon x^2 y)$	semi-lábios ($\varepsilon = 1$)	1
	semi-bicos ($\varepsilon = -1$)	
$(y + x^3, x^2)$	cúspide no bordo	1

Tabela 10 – Formas normais de germes de $\mathcal{B}$ -cod ≤ 1 , ($\varepsilon = \pm 1$)([12])

Seja $f : (X, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de coposto 1, então consideramos (como feito em [54]) as funções

$$\lambda = \det(df_{(0,0)}) \quad \text{e} \quad \eta = \ker(df_{(0,0)}).$$

Nas Figuras 14, 15, 16 e 17, é mostrado o contorno gerador e aparente para as $\mathcal{B}$ -singularidades da Tabela 10 ([12]). A relação geométrica na fonte entre o conjunto singular da f , Σ , η e o eixo x é usada como critério para o reconhecimento dos diferentes $\mathcal{B}$ -tipos.

Note que a parte tracejada nas figuras das projeções é a imagem pela projeção da parte “virtual” na fonte, isto é aquela parte de Σ com $y < 0$.

Assim, usaremos o grupo $\mathcal{B}$ para obter informação sobre a interação do contorno aparente e a projeção do conjunto de pontos duplos perto do ponto de cross-cap.

Figura 14 – Na esquerda, o contorno gerador Σ e o vetor η são transversais cada um ao eixo x . Na direita, a realização da semi-dobra.

Figura 15 – Na esquerda, o contorno gerador Σ e o vetor η são transversais ao eixo x , mas tangentes entre eles. Na direita, a transição da semi-cúspide.

4.3.1 $\mathcal{A}(X)$ -dobra

Consideremos então o germe $\mathcal{A}(X)$ -estável (u, w) . Seja

$$F(x, y) := F_1 \circ X(x, y) = (x, y^2),$$

Figura 16 – Na esquerda, o contorno gerador Σ é tangente ao eixo x e está na região $y \leq 0$ quando $\varepsilon = 1$ (semi-lábios), e está na região $y \geq 0$ quando $\varepsilon = -1$ (semi-bicos). Na direita, a transição da semi-lábios (acima) e semi-bicos (abaixo).

Figura 17 – Na esquerda, o contorno gerador Σ é transversal ao eixo x e o vetor η é tangente ao eixo x . Na direita, a transição do cúspide no bordo.

onde F_1 é como no Teorema 4.10. O germe F tem uma $\mathcal{A}$ -singularidade do tipo dobra na origem, Σ é o eixo x e a projeção do conjunto de pontos duplos é o semi-eixo $y \geq 0$. Assim, a projeção do conjunto de pontos duplos encontra o contorno aparente no ponto de cross-cap transversalmente, (ver Figuras 18 e 19).

Figura 18 – Contorno gerador (à esquerda) e aparente (à direita) no tipo $\mathcal{A}(X)$ -dobra.

4.3.2 $\mathcal{A}(X)$ -cúspide

Para o germe $(u + w, v)$, seja

$$F(x, y, \alpha) := F_2 \circ X(x, y) = (x + y^2, xy + \alpha x),$$

Figura 19 – Realização de uma $\mathcal{A}(X)$ -dobra para um modelo de cross-cap elíptico.

onde F_2 é como no Teorema 4.10 e α é o parâmetro do desdobramento. Quando $\alpha = 0$, F é $\mathcal{A}$ -equivalente a uma cúspide na origem, e a projeção do conjunto de pontos duplos encontra o ponto de cúspide no ponto de cross-cap. Quando $\alpha \neq 0$, F_2 é $\mathcal{A}(X)$ -equivalente a uma $\mathcal{A}(X)$ -dobra, mas existe um ponto suficientemente perto da origem sobre o conjunto de pontos duplos tal que F é $\mathcal{B}$ -equivalente a uma semi-dobra. De fato, temos que

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y(y + \alpha)\} \quad (\text{ver Figura 20}),$$

e Σ encontra o eixo y transversalmente no ponto $(0, -\alpha)$. Segue que $\eta(0, -\alpha) = (-2\alpha, -1)$ e o tangente à Σ no ponto $(0, -\alpha)$ é paralelo a $(-2\alpha, 1)$.

Figura 20 – O conjunto singular Σ encontra transversalmente o eixo y no ponto $(0, -\alpha)$.

Assim, se $\alpha \neq 0$ temos que no ponto $(0, -\alpha)$ Σ , o eixo y e o vetor η são transversais entre si, logo pelo critério dado na Figura 14, em $(0, -\alpha)$ F é $\mathcal{B}$ -equivalente a uma semi-dobra. As Figuras 21 e 22 mostram como acontece e a realização da $\mathcal{A}(X)$ -cúspide.

Observação 4.11. Para as $\mathcal{A}(X)$ -singularidades não aparecem imagens virtuais como no caso das $\mathcal{B}$ -singularidades em [12]. De fato, a pré-imagem da curva dos pontos duplos

Figura 21 – Transição do $\mathcal{A}(X)$ -cúspide. Contorno gerador (acima) e contorno aparente (abaixo).

Figura 22 – Transição do $\mathcal{A}(X)$ -cúspide acontecendo em um cross-cap elíptico.

é uma curva especial na fonte que não é bordo. No entanto, em [57] o autor considera a projeção de superfícies suaves por partes (duas superfícies) unidas por uma curva a qual chama de cresta. Ali é mostrado que quando as superfícies se encontram transversalmente e a projeção da cresta é suave, uma das superfícies pode ser ignorada. Assim, o estudo nesse caso se reduz à projeção da outra superfície com a cresta como o seu bordo. No caso do cross-cap, longe do ponto de cross-cap e ao longo do conjunto dos pontos duplos, a superfície pode ser pensada localmente como uma interseção transversal de 4 superfícies suaves ao longo da curva dos pontos duplos. De fato, os difeomorfismos que preservam o cross-cap, em particular preservam a curva dos pontos duplos, e isto justifica o uso do grupo $\mathcal{B}$.

4.3.3 $\mathcal{A}(X)$ -rabo de andorinha

Para o germe $(u + w^2 + aw^3, v + w^2)$, seja

$$F(x, y, \alpha, \beta) := F_4 \circ X(x, y) = (x + y^4 + ay^6 + \alpha y^2, xy + y^4 + \beta y^2), \quad (4.2)$$

onde F_4 é dado pelo Teorema 4.10, α e β são os parâmetros do desdobramento. Quando $\alpha = \beta = 0$, o germe F é $\mathcal{A}$ -equivalente ao rabo de andorinha no ponto de cross-cap, no qual encontra a curva de pontos duplos transversalmente. O diagrama de bifurcação B_F da família F possui estratos associados a singularidades dos tipos $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{B}$ de codimensão 1.

O Teorema 4.12 mostra a forma explícita dos estratos em termos dos parâmetros α e β . Em particular, o diagrama de bifurcação B_F tem dos tipos topológicos diferentes dependendo do sinal do módulo na forma normal (para $a < 0$ ver Figura 23 e para $a > 0$ ver Figura 24).

Teorema 4.12. *O diagrama de bifurcação B_F da família F em (4.2), consiste nas seguintes 7 curvas suaves passando na origem*

- (i) $\mathcal{A}(X)$ -cúspide: $\beta = 0$ (estratos 2 e 20 nas Figuras 23 e 24),
- (ii) rabo de andorinha: $\beta = \frac{3}{8}\alpha^2 + O(3)$ (estratos 8 e 10 nas Figuras 23 e 24),
- (iii) semi-lábios e semi-bicos: $\beta = \frac{1}{8}\alpha^2 + O(3)$ (estratos 4 e 16 nas Figuras 23 e 24),
- (iv) semi-cúspide: $\beta = -\frac{1}{4}\alpha^3 + O(4)$ (estratos 8 e 18 nas Figuras 23 e 24),
- (v) cúspide no bordo: $\alpha = \beta - \frac{3}{4}a\beta^2$, $\beta < 0$ (estrato 22 na Figura 23 e 24 na Figura 24),
- (vi) o multi-germe $\mathcal{A}(X)$ -dobra+dobra: $\beta = \frac{1}{4}\alpha^2 + O(3)$ (estratos 6 e 14 nas Figuras 23 e 24),
- (vii) o multi-germe de autointerseção da curva de pontos duplos no ponto de cross-cap: $\alpha = \beta - a\beta^2$, $\beta < 0$ (estrato 24 na Figura 23 e 22 na Figura 24).

Figura 23 – Bifurcação da singularidade $\mathcal{A}(X)$ -rabo de andorinha para $a < 0$.

Figura 24 – Bifurcação da singularidade $\mathcal{A}(X)$ -rabo de andorinha para $a > 0$.

Demonstração. (i) Como $\mathcal{A}(X)$ -cúspide é 1-determinado, é suficiente trabalhar com o 1-jato. Temos

$$j^1 F_4 = (u + \alpha w, v + \beta w) \sim_{\mathcal{A}(X)} \begin{cases} (u, w) & \text{se } \beta \neq 0 \quad (\mathcal{A}(X)\text{-dobra}), \\ (u + w, v) & \text{se } \beta = 0 \quad (\mathcal{A}(X)\text{-cúspide}). \end{cases}$$

(ii) Para o estrato de rabo de andorinha usaremos o critério de Saji ([54]). Seja

$$\lambda = \det(dF) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 4y^3 + 6ay^5 + 2\alpha y \\ y & x + 4y^3 + 2\beta y \end{bmatrix} \right)$$

e $\eta = -(4y^3 + 6ay^5 + 2\alpha y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. O estrato de rabo de andorinha é dado pelas equações

$$\lambda = \eta\lambda = \eta(\eta\lambda) = 0 \quad \text{e} \quad \eta(\eta(\eta\lambda)) \neq 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned} \lambda &= x + 4y^3 + 2\beta y - 4y^4 - 6ay^6 - 2\alpha y^2, \\ \eta\lambda &= -20y^3 - 42ay^5 - 6\alpha y + 12y^2 + 2\beta, \\ \eta(\eta\lambda) &= -60y^2 - 210ay^4 - 6\alpha + 24y, \\ \eta(\eta(\eta\lambda)) &= -840ay^3 - 120y + 24. \end{aligned}$$

Note que neste caso, $\eta\lambda$ e $\eta(\eta\lambda)$ não dependem de x . Desta forma, encontramos as expressões de α e β tal que $\eta\lambda = \eta(\eta\lambda) = 0$, estas são

$$\alpha = -10y^2 - 35ay^4 + 4y \quad \text{e} \quad \beta = -84ay^5 - 20y^3 + 6y^2. \quad (4.3)$$

Eliminando y em (4.3) obtemos a forma desejada

$$\beta = \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{5}{32}\alpha^3 + O(4).$$

Finalmente, note que para (x, y) em uma vizinhança suficientemente pequena da origem temos que $\eta(\eta(\eta\lambda)) \neq 0$.

(iii) A singularidade semi-lábios-bicos acontece sobre um ponto $(0, y)$ sobre o eixo y na fonte quando o Σ é tangente nesse ponto ao eixo y e η é transversal ao Σ (ver [12]). Assim, temos que o estrato de semi-lábios-bicos está dado pelas seguintes equações

$$x = \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0,$$

com

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Leftrightarrow x = -(4y^3 + 2\beta y - 4y^4 - 6ay^6 - 2\alpha y^2), \\ x = 0 &\Leftrightarrow \beta = y(3ay^4 + 2y^2 - 2y + \alpha), \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda = 36ay^5 - 12y^2 - 2\beta + 16y^3 + 4\alpha y. \quad (4.4)$$

Substituindo o valor de β em (4.4), obtemos α e β em função de y tais que $\lambda = \frac{\partial}{\partial y}\lambda = 0$. Estes são dados por

$$\alpha = 4y - 6y^2 - 15ay^4 \quad \text{e} \quad \beta = 2y^2 - 4y^3 - 12ay^5,$$

e eliminando y chegamos em

$$\beta = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha^3 + O(4).$$

- (iv) Seguindo os critérios de reconhecimento de singularidades dados em [12], temos que o estrato de semi-cúspide está dado pelas equações

$$x = \lambda = \eta\lambda = 0.$$

Segue que

$$\eta\lambda = -20y^3 - 42ay^5 - 6\alpha y + 12y^2 + 2\beta,$$

e usando as expressões obtidas no item (iii), obtemos α e β como funções de y

$$\alpha = -4y^2 - 9ay^4 + 2y \quad \text{e} \quad \beta = -6ay^5 - 2y^3.$$

Eliminamos y , obtendo a expressão desejada

$$\beta = -\frac{1}{4}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^4.$$

- (v) O estrato de cúspide no bordo está caracterizado por ser o vetor η paralelo ao eixo y num ponto da forma $(0, y)$ com $y \neq 0$ na fonte ([12]). Mais precisamente, o estrato está dado pelas equações

$$x = \lambda = 0 \quad \text{e} \quad 4y^3 + 6ay^5 + 2\alpha y = 0.$$

Obtemos então, como antes, expressões para α e β

$$\alpha = -2y^2 - 3ay^4 \quad \text{e} \quad \beta = -2y^2,$$

de onde deduzimos que necessariamente $\beta < 0$. Eliminando y chegamos na expressão desejada

$$\alpha = \beta - \frac{3}{4}\alpha\beta^2, \quad \beta < 0.$$

- (vi) Para o multi-germe $\mathcal{A}(X)$ -dobradobrada, vamos fazer a seguinte análise. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(y) = F(-(4y^3 + 2\beta y - 4y^4 - 6ay^6 - 2\alpha y^2), y)$ uma parametrização do

contorno aparente Δ . Vamos caracterizar em termos de α e β a expressão $\gamma(y) = 0$ com $y \neq 0$. De fato, temos que

$$\gamma(y) = (y(-2\beta + 3\alpha y - 4y^2 + 5y^3 + 7ay^5), y^2(-\beta + 2\alpha y - 3y^2 + 4y^3 + 6ay^5)) = (0, 0),$$

equivalentemente, temos o sistema

$$\begin{bmatrix} 3y & -2 \\ 2y & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-4y^2 + 5y^3 + 7ay^5) \\ -(-3y^2 + 4y^3 + 6ay^5) \end{bmatrix},$$

cujo determinante da matriz associada é $y \neq 0$. Assim obtemos α e β e, como antes, eliminando y obtemos

$$\beta = \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{1}{8}\alpha^3 + O(4).$$

- (vii) Finalmente, para o multi-germe de autointerseção da curva de pontos duplos no ponto de cross-cap, consideremos uma parametrização da curva de pontos duplos $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\tau(y) := F(0, y) = (y^4 + ay^6 + \alpha y^2, y^4 + \beta y^2).$$

A curva de pontos duplos se auto intersecta quando $\tau(y) = 0$ para $y \neq 0$, isto é, quando

$$\alpha = -(y^2 + ay^4) \quad \text{e} \quad \beta = -y^2.$$

Eliminando y , temos

$$\alpha = \beta - a\beta^2, \quad \beta < 0,$$

o que completa a prova. □

4.3.4 $\mathcal{A}(X)$ -sharksfin

Para o germe $(v + u^3, w + u^2 + au^3)$, seja

$$F(x, y, \alpha, \beta) := F_3^+ \circ X(x, y) = (xy + x^3 + \alpha x, y^2 + x^2 + ax^3 + \beta x), \quad (4.5)$$

onde F_3^+ é dado pelo Teorema 4.10, α e β são os parâmetros do desdobramento. Quando $\alpha = \beta = 0$ o contorno aparente consiste de duas cúspides se encontrando no ponto de cross-cap com a curva de pontos duplos (ver [64]). O diagrama de bifurcação B_F da família F possui estratos associados a singularidades dos tipos $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{B}$ de codimensão 1.

O Teorema 4.13 mostra a forma explícita dos estratos em termos dos parâmetros α e β . Em particular, o diagrama de bifurcação B_F tem dois tipos topológicos diferentes dependendo do módulo na forma normal (para $|a| > 2$ ver Figura 25 e para $|a| < 2$ ver Figura 26).

Figura 25 – Bifurcação da singularidade $\mathcal{A}(X)$ -sharksfin para $|a| > 2$.

Figura 26 – Bifurcação da singularidade $\mathcal{A}(X)$ -sharksfin para $|a| < 2$.

(i) $\mathcal{A}(X)$ -cúspide: $\alpha = 0$ (estratos 10 e 26 nas Figuras 25 e 26),

(ii) bicos: $\beta_{\pm} = H_{\pm}(\alpha) - \frac{27}{64}(a \mp 1)(a \mp 2)(2a \pm 1)\alpha^4 + O(5)$ (estratos 6, 14, 22 e 30 nas Figuras 25 e 26),

(iii) rabo de andorinha: $\beta_{\pm} = H_{\pm}(\alpha) - \frac{1}{256}(a \mp 2)(215a^2 \mp 104a - 112)\alpha^4 + O(5)$ (estratos 8, 12, 20 e 32 na Figura 25 e 4, 12, 24 e 32 na Figura 26),

(iv) semi-cúspide: $\beta = 0$ (estratos 2 e 18 nas Figuras 25 e 26),

(v) o multi-germe $\mathcal{A}(X)$ -dobrada+dobrada: $\beta_{\pm} = \pm 2\alpha - (a \mp 2)\alpha^2 + O(3)$, onde $H_{\pm}(\alpha)$ é dado por

$$H_{\pm}(\alpha) = \pm 2\alpha - \frac{3}{4}(a \mp 2)\alpha^2 \mp \frac{9}{16}a(a \mp 2)\alpha^3$$

Demonstração. (i) Como foi feito no Teorema 4.12, usamos o fato que $\mathcal{A}(X)$ -cúspide é 1-determinado e consideramos o 1-jato da F_3^+ . Então

$$j^1 F_3^+ = (v + \alpha u, w + \beta u) \sim_{\mathcal{A}(X)} \begin{cases} (u, w) & \text{se } \alpha \neq 0 \quad (\mathcal{A}(X)\text{-dobra}), \\ (u + w, v) & \text{se } \alpha = 0 \quad (\mathcal{A}(X)\text{-cúspide}). \end{cases}$$

$$\lambda = \det(dF) = \det \left(\begin{bmatrix} y + 3x^2 + \alpha & x \\ 2x + 3ax^2 + \beta & 2y \end{bmatrix} \right)$$
$$\lambda = d\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \det(d^2\lambda) < 0 \quad ([54]).$$
$$\begin{aligned}\lambda &= 2y^2 + 6yx^2 + 2y\alpha - 2x^2 - 3ax^3 - \beta x, \\ d\lambda &= (12xy - 4x - 9ax^2 - \beta, 4y + 6x^2 + 2\alpha).\end{aligned}$$
$$\beta = 12xy - 4x - 9ax^2 \quad \text{e} \quad \alpha = -2y - 3x^2.$$
$$x^2 - y^2 + 3ax^3 - 6x^2y = 0.$$
$$\beta_{\pm} = H_{\pm}(\alpha) - \frac{27}{64}(a \mp 1)(a \mp 2)(2a \pm 1)\alpha^4 + O(5).$$

- (iii) Para o estrato de rabo de andorinha adicionalmente precisamos as condições $\eta(\eta\lambda) = 0$ e $\eta(\eta(\eta\lambda)) \neq 0$, segue

$$\eta(\eta\lambda) = 18yx^2 - 8x^2 - 27ax^3 - \beta x - 54x^4 + 8y^2 + 14y\alpha + 6\alpha^2.$$

Das equações

$$\lambda = \eta(\eta\lambda) = 0$$

obtemos

$$\alpha_{\pm} = -y \pm (-2yx^2 + 9x^4 + x^2 + 4ax^3)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\beta_{\pm} = 6xy - 2x - 3ax^2 \pm 2y(9x^2 + 4ax - 2y + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Substituindo em $\eta\lambda = 0$, chegamos na seguinte expressão

$$2x - 2xy + 7ax^2 + 18x^3 \pm (6x^2 + 2y)(9x^2 + 4ax + 1 - 2y)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

a qual, numa vizinhança da origem, para $y \neq 0$ podemos, em termos de y , dar uma solução da forma

$$y_{\pm} = \mp x \mp \frac{3}{2}(a \pm 2)x^2 + \frac{1}{2}(a \pm 2)(2a \mp 5)x^3 \mp \frac{1}{4}(a \pm 2)(a \mp 4)(4a \mp 1)x^4 + O(5).$$

Agora, substituindo em $\alpha_{\pm}$ e $\beta_{\pm}$, e eliminando x obtemos

$$\beta_{\pm} = H_{\pm}(\alpha) - \frac{1}{256}(a \mp 2)(215a^2 \mp 104a - 112)\alpha^4 + O(5).$$

Temos que

$$j^2\eta(\eta(\eta\lambda)) = 14\alpha^2 + 30\alpha y + \beta x + (60\alpha + 16)x^2 + 16y^2,$$

e se verifica que nas condições dadas para $\lambda = \eta\lambda = \eta(\eta\lambda) = 0$ que $\eta(\eta(\eta\lambda)) \neq 0$.

- (iv) Para o estrato de semi-cúspide, precisamos

$$x = \lambda = \eta\lambda = 0.$$

Temos localmente que $x = 0$ se, e somente se $y = -\alpha$, neste caso $\alpha \neq 0$. Substituindo nas expressões para $\lambda = \eta\lambda = 0$, temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} 4\alpha x + \beta + 2x + 3ax^2 + 4x^3 = 0, \\ 8\alpha x + \beta + 4x + 9ax^2 + 16x^3 = 0. \end{cases}$$

Consideramos a resultante entre os polinômios dados por $\lambda = 0$ e $\eta\lambda = 0$ o qual é dado por

$$-16\beta \left(32 - 9a^2 - 12(3a^2 - 16)\alpha + 27a(a - 2)(a + 2)\beta + \dots \right).$$

Como $a \neq \pm 2$ temos que perto da origem no plano (α, β) , $\lambda = 0$ e $\eta\lambda = 0$ são satisfeitas se, e somente se, $\beta = 0$.

(v) O estrato do multi-germe $\mathcal{A}(X)$ -dobra+dobra é dado pelas seguintes expressões

$$\lambda = 0 \quad \text{e} \quad F(x, y) = (0, 0) \quad \text{com} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

De $F(x, y) = (0, 0)$ obtemos

$$\alpha = -y - x^2 \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{y^2 + x^2 + ax^3}{x}.$$

Sustituindo em $\lambda = 0$

$$y^2 + 4yx^2 - x^2 - 2ax^3 = 0 \quad \text{e} \quad \text{então} \quad y_{\pm} = -2x^2 \pm x(4x^4 + 2ax + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalmente substituindo $y_{\pm}$ em α e β , e de novo eliminando x obtemos

$$\beta_{\pm} = \pm 2\alpha - (a \mp 2)\alpha^2 + O(3).$$

□

4.3.5 $\mathcal{A}(X)$ -deltoide

Para o germe $(v + u^3, w - u^2 + au^3)$, seja

$$F(x, y, \alpha, \beta) := F_3^- \circ X(x, y) = (xy + x^3 + \alpha x, y^2 - x^2 + ax^3 + \beta x), \quad (4.6)$$

onde F_3^- é dado pelo Teorema 4.10, α e β são os parâmetros do desdobramento. Este germe não possui $\mathcal{A}$ -órbitas adjacentes de $\mathcal{A}_e$ -cod=1 e qualquer perturbação pequena dá uma aplicação estável, cujo contorno aparente é um deltoide (ver [64]). O diagrama de bifurcação B_F possui estratos associados a singularidades dos tipos $\mathcal{A}(X)$ e $\mathcal{B}$ de codimensão 1 (ver Figura 27).

Figura 27 – Realização das singularidades do tipo deltoide num cross-cap hiperbólico

O Teorema 4.14 mostra a forma explícita dos estratos em termos dos parâmetros α e β . Neste caso, os diagramas de bifurcação associados aos diferentes valores do parâmetro de módulo a são difeomorfos (ver Figura 28).

Teorema 4.14. *O diagrama de bifurcação B_F da família F em (4.6) consiste nas seguintes 2 curvas suaves passando pela origem:*

- (i) $\mathcal{A}(X)$ -cúspide: $\alpha = 0$ (Figura 27 à esquerda),
- (ii) semi-cúspide: $\beta = 0$ (Figura 27 à direita).

Demonstração. A prova deste resultado é análoga à apresentada no Teorema 4.13 para a obtenção dos estratos (i) e (iv) ($\mathcal{A}(X)$ -cúspide e semi-cúspide respectivamente). $\square$

Figura 28 – Bifurcação da singularidade $\mathcal{A}(X)$ -deltoide.

4.4 Transversalidade das $\mathcal{A}(X)$ -órbitas e genericidade

Nesta seção retomamos as ideias dos autores em [16, 60] para mostrar que os resultados obtidos neste capítulo são genéricos (ver Definição 4.17).

Como antes, $(X, 0)$ denota o crosscap estandar em $\mathbb{R}^3$ e seja $\bar{\phi} : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ um germe de difeomorfismo que leva X num crosscap geométrico $\bar{\phi}(X)$.

Seja $f : \mathbb{R}^3 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de aplicações parametrizadas por alguma variedade Z , a qual desejamos aplicar ao crosscap geométrico. Então podemos considerar a família

$$\begin{aligned} f_{\bar{\phi}} : \mathbb{R}^3 \times Z &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, z) &\mapsto f(\bar{\phi}(x), z) = f_{\bar{\phi}z}. \end{aligned}$$

Estudando esta família sobre o crosscap estandar podemos descrever a interação entre o crosscap geométrico e as fibras da família de aplicações $f_z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definição 4.15. Chamamos de P_k o conjunto de aplicações polinomiais $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de grau menor o igual do que k e sem elementos constantes, assim os elementos de P_k preservam a origem. Denotamos por V_k uma vizinhança aberta da identidade em P_k tal que os elementos de V_k são perturbações da identidade.

Considere a família

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 \times Z \times V_k &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, z, p) &\mapsto f(\bar{\phi}(x), z) = f_z(p \circ \bar{\phi}(x)) \end{aligned}$$

Teorema 4.16. Se os germes $f_z : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2)$ são todas submersões, então o k -jato da aplicação de extensão

$$j_1^k F : Z \times V_k \rightarrow J^k(3, 2),$$

dado pela avaliação do k -jato da F no ponto $(0, 0, 0)$, é uma submersão.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o difeomorfismo $\bar{\phi}$ é a identidade (id_3). Para $P \in P_k$, considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow J^k(3, 2)$ dada por $\gamma(s) = id_3 + s \cdot P$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\gamma}{ds}(0) \right) \cdot j_1^k F = P \cdot j_1^k F &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{j_1^k F(z, \gamma(s)) - j_1^k F(z, \gamma(0))}{s} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{j_1^k [f_z(x + s \cdot P) - f_z(x)]}{s} \\ &= j^k [d(f_z)(x) \cdot P]. \end{aligned}$$

Como f_z é uma submersão, temos que $P \cdot j_1^k F$ é sobrejetora e, assim, $j_1^k F$ é uma submersão. $\square$

Note que, dada uma subvariedade W em $J^3(3, 2)$, o Teorema 4.16 garante que o conjunto dos polinômios $p \in V_k$, tais que $j_1^k F \pitchfork W$, é denso em V_k . Denotaremos este conjunto por V_k^D .

Definição 4.17. Dizemos (para este capítulo) que uma propriedade sobre o cross-cap é genérica se vale para cross-caps da forma $p \circ \bar{\phi}(X)$ para $p \in V_k^D$.

Agora estamos em condições de enunciar um resultado sobre genericidade. No que segue, usaremos o fato que cada aplicação na família f_z é uma submersão. Podemos estratificar $J^3(3, 2)$ em estratos correspondentes às órbitas dos germes singulares, submersões do tipo I, II, III, IV (no Teorema 4.9) e as órbitas de $(u, v), (v, w)$. De fato, os germes do tipo I, II, III, IV tem $\mathcal{A}(X)$ -codimensão menor o igual a 2, e os outros germes tem $\mathcal{A}(X)$ -codimensão maior a 2.

Teorema 4.18. *Seja $f : \mathbb{R}^3 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de aplicações parametrizada por alguma variedade Z . Suponha que cada membro f_z , da família f é uma submersão na origem para cada $z \in Z$ e a dimensão de Z é menor ou igual a 2. Definimos a família de aplicações $f_{\bar{\phi}}$ por*

$$\begin{aligned} f_{\bar{\phi}} : \mathbb{R}^3 \times Z &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, z) &\mapsto f(\bar{\phi}(x), z) = f_{\bar{\phi}z} \quad . \end{aligned}$$

Então genericamente a aplicação $f_{\bar{\phi}z}$ na origem é $\mathcal{A}(X)$ -equivalente a um germe do tipo I, II, III, IV (germes relevantes). Genericamente as aplicações $f_{\bar{\phi}z}$ são $\mathcal{A}(X)$ -versalmente desdobradas pela família $f_{\bar{\phi}}$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.16 e para $p \in V_3^D$, temos que

$$j^3 f(p \circ \bar{\phi}, z) \pitchfork \mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z} \quad .$$

Como $\bar{\phi}(X)$ é um crosscap geométrico, podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = id_3$. Então

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(j^3 f(\bar{\phi}, z) \right) \big|_{z_0} (T_{z_0} Z) + T_{j^3 f(\bar{\phi}, z_0)} \mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0} = J^3(3, 2). \quad (4.7)$$

Como

$$\dim \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(j^3 f(\bar{\phi}, z) \right) \big|_{z_0} (T_{z_0} Z) \right) \leq 2,$$

temos que a $\mathcal{A}(X)$ -cod($f_{\bar{\phi}z_0}$) ≤ 2 e então, genericamente, $f_{\bar{\phi}z_0}$ é $\mathcal{A}(X)$ -equivalente a um germe do tipo I, II, III, IV .

Finalmente, a equação (4.7) também pode ser escrita da seguinte forma

$$T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0} + \left(T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0} \right)^\perp = \mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2},$$

assim temos que,

$$\left(T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0} \right)^\perp \subseteq \frac{\partial}{\partial z} \left(j^3 f(\bar{\phi}, z) \right) \big|_{z_0} (T_{z_0} Z).$$

Para algum sistema de coordenadas em Z , temos que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(j^3 f_{\bar{\phi}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1} \left(j^3 f_{\bar{\phi}} \right), \frac{\partial}{\partial z_2} \left(j^3 f_{\bar{\phi}} \right) \right),$$

e assim, como

$$\left(T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0} \right)^\perp = \frac{\mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0}},$$

segue que

$$\frac{\mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot f_{\bar{\phi}z_0}} \subseteq \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} \left(j^3 f_{\bar{\phi}} \right), \frac{\partial}{\partial z_2} \left(j^3 f_{\bar{\phi}} \right) \right\}.$$

Logo, pelo Teorema 4.8 (critério infinitesimal) concluímos que a família $f_{\bar{\phi}}$ desdobra $\mathcal{A}(X)$ -versalmente a aplicação $f_{\bar{\phi}z}$. $\square$

APLICAÇÕES DOBRA

Neste capítulo estudaremos a geometria do cross-cap considerando suas simetrias dadas por reflexões (infinitesimais). Uma forma natural de abordar este estudo é usando aplicações dobra como em [17].

Dedicamos às Seções 5.1 e 5.2 para definir a família de aplicações dobra sobre o cross-cap e estudar as suas singularidades. Mais precisamente, para um cross-cap geométrico, o Teorema 5.6 dá uma lista das singularidades que acontecem genericamente nos membros da família de aplicações dobra. A prova do Teorema 5.6 é feita ao longo das Seções 5.3, 5.4 e 5.5.

Na Seção 5.6 consideramos as informações geométricas obtidas através da análise das singularidades das aplicações dobra sob o cross-cap. Assim, o Teorema 5.14 caracteriza geometricamente as singularidades que acontecem na mesma.

Finalmente, na Seção 5.7 é estudada a genericidade das singularidades da família.

5.1 A família de aplicações dobra

Dado um plano W no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ com vetor normal unitário η , a aplicação dobra $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, em relação a W , é definida como

$$f(p) = q + \lambda^2 \eta, \quad (5.1)$$

onde q é a projeção ortogonal de p ao plano W ao longo de η e λ é a distância de p a W . Assim, temos que p e a sua reflexão $-p$ com respeito a W tem a mesma imagem por f (ver Figura 29).

Definição 5.1. *Dada uma superfície Y em $\mathbb{R}^3$, definimos a aplicação dobra sobre Y , como a restrição de f a Y , $f|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

Figura 29 – Aplicação dobra

A Figura 30 mostra um exemplo de uma aplicação dobra sobre uma superfície regular.

Figura 30 – Exemplo de uma aplicação dobra sob uma superfície regular. A aplicação dobra tem uma singularidade B_1 .

A ideia como feito em [17], é que as singularidades de $f|_Y$ correspondem a simetrias dadas por reflexões (infinitesimais) de Y com respeito ao plano W . Naturalmente, estamos interessados em todas as simetrias reflexõais num ponto $p \in Y$, logo devemos considerar a família de aplicações dobra parametrizada pelo conjunto de todos os plano em $\mathbb{R}^3$.

Como em [17], seja Z uma 3-variedade que parametriza todos os planos em $\mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$ a família de aplicações dobra dada por

$$F(x, z) = f_z(x),$$

onde f_z é a aplicação dobra em relação ao plano definido por z .

Também, para um mergulho $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^3$, definimos a família de aplicações dobra $F_g : Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}^3$, sobre Y , como a restrição da família F a Y . Assim

$$F_g(p, z) = f_z(p).$$

É provado em [17] que para um conjunto residual de mergulhos $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^3$, a família de aplicações dobra F_g é genérica¹ e os membros da família de aplicações dobra tem singularidades $\mathcal{A}$ -equivalentes a uma das singularidades da Tabela 11.

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -codimensão	
imersão	$(x, y, 0)$	0	
cross-cap	(x, y^2, xy)	0	
$B_k^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^{2k+1})$	k	$1 \leq k \leq 3$
$S_k^\pm$	$(x, y^2, y^3 \pm x^{k+1}y)$	k	$2 \leq k \leq 3$
$C_k^\pm$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^k y)$	k	$k = 3$

Tabela 11 – As singularidades genéricas das aplicações dobra sob uma superfície regular ([17]).

Também, é mostrado em [17] que existe uma relação de dualidade entre o conjunto de bifurcação da família de aplicações dobra sobre uma superfície regular Y e a união do conjunto focal e o conjunto de simetria da superfície Y . Mas precisamente, a Tabela 12 mostra a relação entre as singularidades da família de aplicações dobra sobre Y e a geometria do conjunto focal de Y .

Sing. Apl. Dobra	Geometria do conjunto focal
B_1	ponto suave do conjunto focal
B_2	ponto no cúspidal edge do conjunto focal
B_3	ponto de cuspide no conjunto focal no fecho do conjunto parabólico sobre o conjunto de simetria
S_2	ponto parabólico suave do conjunto focal
S_3	cúspide de Gauss suave do conjunto focal
C_3	ponto de interseção entre o cúspidal edge e o conjunto parabólico no conjunto focal

Tabela 12 – Relação entre as singularidades da família de aplicações dobra sobre uma superfície Y e geometria do conjunto focal de Y ([17]).

Definição 5.2 ([17, 63]). *Seja S uma superfície regular e $\mathcal{F}$ o conjunto focal de S . O conjunto de pontos na superfície S , os quais correspondem ao conjunto parabólico do conjunto focal $\mathcal{F}$, são chamados pontos sub-parabólicos.*

A Tabela 12 mostra que a família de aplicações de dobra capta a geometria plana e redonda do conjunto focal. Em particular temos que a curva sub-parabólica (Definição 5.2) e a curva de ridge (Definição 2.48) sobre a superfície são obtidas como o conjunto dos pontos onde um membro da família de aplicações de dobra tem singularidade tipo S_2 e B_2 , respectivamente.

¹ Em [17] genericidade faz referência com transversalidade de subvariedades no espaço de jatos.

5.2 Aplicações dobra sobre o cross-cap

Vamos parametrizar a 3-variedade formada pelo conjunto de todos os planos em $\mathbb{R}^3$ como segue. Dados $\eta_0 \in \mathbb{S}^2$ e $\delta_0 \in \mathbb{R}$, associamos um único plano $P_{(\eta_0, \delta_0)}$ dado por

$$P_{(\eta_0, \delta_0)} = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, \eta_0 \rangle = \delta_0\},$$

onde η_0 é o vetor normal ao plano $P_{(\eta_0, \delta_0)}$. Para $\eta_0 \in \mathbb{S}^2$ fixo, temos que os planos $P_{(\eta_0, \delta)}$ e $P_{(\eta_0, \delta_0)}$ são paralelos e estão a uma distancia $|\delta - \delta_0|$. Segue que o conjunto de todos os planos em $\mathbb{R}^3$ pode ser parametrizado localmente por $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Como antes, dado um plano $P_{(\eta, \delta)}$, a aplicação dobra com respeito $P_{(\eta, \delta)}$ é dada por

$$f_{(\eta, \delta)}(p) = q + \lambda^2 \eta \quad (5.2)$$

onde q é a projeção de p em $P_{(\eta, \delta)}$ e $p = q + \lambda \eta$. Como $q \in P_{(\eta, \delta)}$ temos que $\langle p - \lambda \eta, \eta \rangle = \delta$, logo $\lambda = \langle \eta, p \rangle - \delta$. Assim, temos que

$$f_{(\eta, \delta)}(p) = p + (\langle \eta, p \rangle - \delta) (\langle \eta, p \rangle - \delta - 1) \eta. \quad (5.3)$$

Consideramos agora a família de aplicações dobra $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(p, \eta, \delta) := f_{(\eta, \delta)}(p),$$

onde a aplicação $f_{(\eta, \delta)}$ é como na equação (5.3).

Seja $\mathcal{W}$ um cross-cap geométrico, com parametrização $g : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ dada como em (2.10). Definimos a família de aplicações dobra sobre $\mathcal{W}$, $F : \mathcal{W} \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, como

$$F(p, \eta, \delta) := f_{(\eta, \delta)}(p), \quad p \in \mathcal{W}.$$

Assim de (5.3) temos que

$$F(u, v, \eta, \delta) = g(u, v) + (\langle \eta, g(u, v) \rangle - \delta) (\langle \eta, g(u, v) \rangle - \delta - 1) \eta. \quad (5.4)$$

Como o cross-cap é singular na origem, esperamos encontrar alguns fenômenos mas degenerados do que no caso regular.

Lema 5.3. *Para todo $(\eta, \delta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, o germe $f_{(\eta, \delta)} : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ é singular na origem.*

Demonstração. É suficiente ver que para qualquer $(\eta, \delta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, a derivada parcial $(f_{(\eta, \delta)})_v$ se anula na origem, o que implica que a aplicação não tem posto máximo nesse ponto. Temos então que

$$(f_{(\eta, \delta)})_v(0, 0) = g_v(0, 0) + \langle \eta, g_v(0, 0) \rangle (2 \langle \eta, g(0, 0) \rangle - 2\delta - 1) \eta.$$

Como $g_v(0, 0) = (0, 0, 0)$, segue que $(f_{(\eta, \delta)})_v(0, 0) = (0, 0, 0)$ e então

$$\text{rank} \left(d(f_{(\eta, \delta)})_{(0,0)} \right) \leq 1,$$

o que completa a prova. □

Queremos agora as $\mathcal{A}$ -singularidades dos membros da família de aplicação dobra sobre o cross-cap.

Daqui para frente tomamos o vetor $\eta = (\alpha, \beta, \gamma)$ satisfazendo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, e $g(0, 0) = p$.

Teorema 5.4. *O germe $f_{(\eta, \delta)}$ tem singularidade mais degenerada do que cross-cap se, e somente se, $\delta = 0$.*

Demonstração. Temos que

$$j^1 f_{(\eta, \delta)}(u, v) \sim \left((1 - (1 + 2\delta)\alpha^2)u, \alpha\beta(1 + 2\delta)u, \alpha\gamma(1 + 2\delta)u \right),$$

assim quando $(1 - (1 + 2\delta)\alpha^2) \neq 0$ o germe satisfaz que $j^1 f_{(\eta, \delta)}(u, v) \sim (u, 0, 0)$.

Seguindo a análise temos que para $f_{(\eta, \delta)} = ((f_1)_{(\eta, \delta)}, (f_2)_{(\eta, \delta)}, (f_3)_{(\eta, \delta)})$,

$$\left(((f_2)_{(\eta, \delta)})_{uv} ((f_3)_{(\eta, \delta)})_{vv} - ((f_2)_{(\eta, \delta)})_{vv} ((f_3)_{(\eta, \delta)})_{uv} \right) (0, 0) = \frac{2\delta}{2\alpha^2\delta + \alpha^2 - 1}.$$

Assim, pelo Critério de Whitney (Proposição 2.26) o resultado segue.

Um análise análogo mostra que quando $(1 - (1 + 2\delta)\alpha^2) = 0$ e $\delta \neq 0$, a singularidade na origem do germe $f_{(\eta, \delta)}$ é sempre do tipo cross-cap. $\square$

Uma parte do Teorema 5.4 pode ser mostrada com um argumento geométrico. Sabemos que fora da origem a aplicação de dobra é um germe de difeomorfismo em $\mathbb{R}^3$. Logo, se o plano não passa pela origem, a restrição do germe vai levar o cross-cap inicial em um outro.

O seguinte resultado dá uma condição necessária e suficiente para que um membro da família de aplicações dobra tenha corank 2.

Proposição 5.5. *O germe $f_{(\eta, 0)}$ tem corank 2 se, e somente se, η é paralelo à direção tangente no cross-cap.*

Demonstração. Da prova do Lema 5.3 temos que $(f_{(\eta, 0)})_v(0, 0) = (0, 0, 0)$. Vamos analisar então a outra derivada parcial $(f_{(\eta, 0)})_u$ na origem. Temos que

$$\begin{aligned} (f_{(\eta, 0)})_u(0, 0) &= g_u(0, 0) + \langle \eta, g_u(0, 0) \rangle (2 \langle \eta, g(0, 0) \rangle - 1) \eta \\ &= e_1 - \langle \eta, e_1 \rangle \eta, \end{aligned}$$

onde $e_1 = (1, 0, 0)$. Segue que $(f_{(\eta, 0)})_u(0, 0) = (0, 0, 0)$ se, e somente se, $\eta = \pm e_1$. $\square$

Vamos nos concentrar no caso no qual as singularidades dos germes $f_{(\eta, \delta)}$ são não estáveis, isto é, pelo Teorema 5.4 nos germes da forma $f_{(\eta, 0)}$.

Daqui para frente vamos denotar $F(u, v, \eta, 0)$ por $F(u, v, \eta)$ e $f_{(\eta, 0)}$ por f_η .

O Teorema 5.6 dá uma lista das singularidades que ocorrem nos membros da família de aplicações dobra.

Teorema 5.6. *Os membros da família de aplicações dobra sobre um cross-cap geométrico $\mathcal{W}$ tem singularidade na origem não estável $\mathcal{A}$ -equivalentes a um dos seguintes tipos.*

(i) Se $\beta \neq 0$ (neste caso $\eta \pitchfork TC_p\mathcal{W}$)

Tipo	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -cod.	Condição
$B_2^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^5)$	2	$\alpha \neq 0, \gamma \neq p_3\alpha$
$B_3^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^7)$	3	$\alpha \neq 0, \gamma = p_3\alpha$
$B_4^\pm$	$(x, y^2, x^2y \pm y^9)$	4	pode ocorrer em pontos isolados sobre $\alpha \neq 0, \gamma = p_3\alpha$
$C_3^\pm$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^3y)$	3	$\alpha = 0$ e $\Phi(\beta, \gamma) \neq 0$
$C_4^\pm$	$(x, y^2, xy^3 \pm x^4y)$	4	$\alpha = 0$ e $\Phi(\beta, \gamma) = 0$
$F_{1,0}$	$(x, y^2, x^3y + Axy^5 + By^7)$	4	$\beta = 1$ e $4A^3 + 27B^2 \neq 0$

onde

$$\Phi(\beta, \gamma) = -2b\beta^3 + (4a - b^2 + 2)\beta^2\gamma + \gamma^3, \quad (5.5)$$

e o germe $F_{1,0}$ é unimodular.

(ii) Se $\beta = 0$ (neste caso $\eta \subset TC_p\mathcal{W}$) e $\gamma \neq 0$

Tipo	Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -cod.	Condição
P_3	$(x, xy + y^3, xy^2 + ky^4)$	3	$\alpha \neq 0, \alpha \neq -p_3\gamma, k \neq \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$
$P_4(\frac{1}{2})$	$(x, xy + y^3, xy^2 + \frac{1}{2}y^4)$	4	$\alpha \neq 0, \alpha \neq -p_3\gamma$ e $\Psi(\frac{1}{2}) = 0$
$P_4(\frac{3}{2})$	$(x, xy + y^3, xy^2 + \frac{3}{2}y^4)$	4	$\alpha \neq 0, \alpha \neq -p_3\gamma$ e $\Psi(\frac{3}{2}) = 0$
$P_4(1)$	$(x, xy + y^3, xy^2 + y^4)$	4	$\alpha \neq 0, \alpha \neq -p_3\gamma$ e $\Psi(1) = 0$
R_4	$(x, xy + y^6 + Ay^7, xy^2 + y^4 + By^6)$	4	$\alpha \neq 0, \alpha = -p_3\gamma$
T_4	$(x, xy + y^3, y^4)$	4	$\gamma = 1$

onde

$$\Psi(k) = (2k - 1)\alpha^2 + 2kp_3\alpha\gamma - \gamma^2. \quad (5.6)$$

A família de germes do tipo P_3 é unimodular e o germe do tipo R_4 é bi-modular.

(iii) Se $\beta = \gamma = 0$, o germe f_η tem corank 2 em p e é $\mathcal{A}$ -equivalente a

Forma Normal	$\mathcal{A}_e$ -cod.	Condição
$(x^2, xy + y^3, y^2 + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + y^3)$	6	$\Theta(A, B, C) \neq 0$

onde

$$\begin{aligned}\Theta(A, B, C) = & -8640A^2 - 655360A^3 - 245760A^2B - 92160A^2C + 3840AB^2 + \\ & + 5760ABC - 1280B^3 - 163840A^2C^2 + 184320AB^2C + \\ & + 51200ABC^2 - 1280AC^3 - 34560B^4 - 11520B^3C + \\ & + 320B^2C^2 - 10240AC^4 + 2560B^2C^3.\end{aligned}$$

Este germe é tri-modular e a condição $\Theta(A, B, C) \neq 0$ é necessária para que o germe seja 3- $\mathcal{A}$ -determinado.

Demonstração. Para os casos (i) e (ii) consideramos a ação do grupo $\mathcal{A}$, levando o germe inicial a alguma forma normal dos germes dados na lista de Mond em [41] para germes de corank 1. A forma normal no caso (iii) é nova, pois o germe é de corank 2 e não foi tratado em [41]. Usamos o software Maple para ajudar nas contas.

Consideremos inicialmente o 2-jato de f_η o qual satisfaz

$$j^2 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(2)}} \left(u - \frac{\alpha(\beta + b\gamma)}{1 - \alpha^2} uv - \frac{\alpha\gamma}{1 - \alpha^2} v^2, \gamma((\gamma - b\beta)uv - \beta v^2), -\beta((\gamma - b\beta)uv - \beta v^2) \right).$$

Então, pela forma dada temos 3 casos

$$j^2 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(2)}} \begin{cases} (u, v^2, 0) & \text{se } \beta \neq 0 \text{ e } \alpha \neq \pm 1 \text{ (caso (i))}, \\ (u, uv, 0) & \text{se } \beta = 0 \text{ } \alpha \neq \pm 1 \text{ (caso (ii))}, \\ (u^2, uv, v^2) & \text{se } \alpha = \pm 1 \text{ (caso (iii))}, \end{cases}$$

os quais estudamos separadamente.

5.3 Caso (i) ($\beta \neq 0$)

Para este caso temos que o 3-jato satisfaz

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u, v^2, \alpha u^2 v),$$

logo este caso deve ser sub-dividido em mais dois casos, a saber

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} \begin{cases} (u, v^2, u^2 v) & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ (caso (i)-(a))}, \\ (u, v^2, 0) & \text{se } \alpha = 0 \text{ (caso (i)-(b))}. \end{cases}$$

5.3.1 Caso (i)-(a)

Neste caso temos que

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u, v^2, u^2 v),$$

onde $\Phi(\beta, \gamma) = -2b\beta^3 + (4a - b^2 + 2)\beta^2\gamma + \gamma^3$. Logo, temos que o germe f_η tem singularidade do tipo $C_3^\pm$ se, e somente se $\Phi(\beta, \gamma) \neq 0$. A equação $\Phi(\beta, \gamma) = 0$ é um polinômio homogêneo de grau 3 em α e β , o qual genericamente define três direções. Nestas direções o germe f_η não é mais 4- $\mathcal{A}$ -determinado ([40, 41]). Assim, para $\Phi(\beta, \gamma) = 0$ consideramos o 5-jato de f_η , o qual satisfaz

$$j^5 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(5)}} (u, v^2, uv^3 + \Lambda u^4 v),$$

onde Λ depende somente dos coeficientes da parametrização do cross-cap, e genericamente não se anula. Segue que

$$j^5 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(5)}} (u, v^2, uv^3 \pm u^4 v),$$

e, neste caso o germe tem singularidade do tipo $C_4^\pm$.

Quando $\alpha = \gamma = 0$, temos que $\eta = (0, 1, 0)$, e

$$j^7 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(7)}} (x, y^2, x^3 y + Axy^5 + By^7),$$

onde A e B dependem somente dos coeficientes da parametrização do cross-cap e genericamente são não nulos. O germe f_η é unimodular e tem singularidade do tipo $F_{1,0}$ se $4A^3 + 27B^2 \neq 0$.

5.4 Caso (ii) ($\beta = 0$)

Neste caso temos que

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} \left(u, uv + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + p_3 \right) v^3, \alpha uv^2 \right),$$

logo temos de novo três casos:

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} \begin{cases} (u, uv + v^3, uv^2) & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha + p_3\gamma \neq 0 \text{ (caso (ii)-(a))}, \\ (u, uv, uv^2) & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha + p_3\gamma = 0 \text{ (caso (ii)-(b))}, \\ (u, uv + v^3, 0) & \text{se } \alpha = 0 \text{ (caso (ii)-(c))}. \end{cases}$$

5.4.1 Caso (ii)-(a)

O germe não é 3- $\mathcal{A}$ -determinado ([40, 41]), então consideramos o 4-jato

$$j^4 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} (u, uv + v^3, uv^2 + kv^4),$$

onde $k = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha(\alpha + p_3\gamma)}$. Sabemos que neste caso o germe f_η tem singularidade de um dos seguintes tipos:

$$j^4 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} \begin{cases} (u, uv + v^3, uv^2 + kv^4) & P_3 \text{ se } k \neq \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \\ (u, uv + v^3, uv^2 + \frac{1}{2}v^4) & P_4(\frac{1}{2}) \text{ se } k = \frac{1}{2}, \\ (u, uv + v^3, uv^2 + v^4) & P_4(1) \text{ se } k = 1, \\ (u, uv + v^3, uv^2 + \frac{3}{2}v^4) & P_4(\frac{3}{2}) \text{ se } k = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Note que o caso $k = 0$ não acontece, porém a singularidade tipo $P_4(0)$ também não acontece. A condição para ocorrer cada uma destas singularidades no germe f_η é dada pela equação

$$2k(\alpha^2 + p_3\alpha\gamma) - 1 = 0 \quad \text{com a restrição} \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1,$$

a qual denotamos por Ψ e tem a forma

$$\Psi(k) = (2k - 1)\alpha^2 + 2kp_3\alpha\gamma - \gamma^2.$$

Temos que Ψ é um polinômio homogêneo em α e γ de grau 2, com discriminante $4(p_3^2k^2 + 2k - 1)$, o qual para os valores de $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ é positivo. Assim, em cada caso $\Psi(k) = 0$ fornece duas direções as quais caracterizam as singularidades do tipo $P_4(k)$, $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

5.4.2 Caso (ii)-(b)

Quando $\alpha + p_3\gamma = 0$, o germ f_η não é 3- $\mathcal{A}$ -determinado ([40, 41]). Então, pela sua forma devemos considerar o seu 7-jato o qual é dado por

$$j^7 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(7)}} (u, uv + v^6 + Av^7, uv^2 + v^4 + Bv^6),$$

onde A e B são parâmetros de módulo e só depende dos coeficientes da parametrização, os quais genericamente não se anulam. Neste caso o germe f_η tem singularidade do tipo R_4 (note que este germe acontece para um único plano).

5.4.3 Caso (ii)-(c)

Este caso ocorre quando $\gamma = 1$ (equivalentemente $\alpha = \beta = 0$), isto é, $\eta = (0, 0, 1)$. Temos que

$$j^4 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} (u, uv + v^3, \Gamma v^4),$$

onde Γ depende somente dos coeficientes da parametrização do cross-cap, e genericamente não se anula. Nesta condições, o germe f_η é 4- $\mathcal{A}$ -determinado e tem singularidade do tipo T_4 com forma normal dada por

$$j^4 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} (u, uv + v^3, v^4).$$

A Figura 32 mostra a estratificação da esfera nas órbitas nas quais ocorrem as singularidades do tipo P_3 , $P_4(\frac{1}{2})$, $P_4(\frac{3}{2})$, $P_4(1)$, R_4 e T_4 .

5.5 Caso (iii) ($\beta = \gamma = 0$)

Finalmente, resta estudar o caso em que $\alpha = 1$, equivalentemente $\eta = (1, 0, 0)$. Neste caso, a aplicação dobra associada a η tem a forma

$$f_\eta(u, v) = (u^2, uv + p(v), au^2 + buv + v^2 + q(u, v)). \quad (5.7)$$

Figura 32 – Estratificação da esfera com singularidades que ocorrem quando $\beta = 0$.

Vamos mostrar que o germe f_η é 3- $\mathcal{A}$ -determinado quando $\Theta \neq 0$ usando o Corolário 2.17. Considere o 2-jato do germe f_η , o qual satisfaz

$$j^2 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(2)}} (u^2, uv, v^2).$$

É fácil ver que os elementos da forma $(u^{2k+1}, 0, 0) \notin T\mathcal{A} \cdot (j^2 f_\eta)$ para nenhum $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$, logo o germe não é 2- $\mathcal{A}$ -determinado.

Tomemos agora o 3-jato do germe f_η , o qual é dado por

$$j^3 f_\eta(u, v) = (u^2, uv + p_3 v^3, au^2 + buv + v^2 + q_{30} u^3 + q_{31} u^2 v + q_{32} uv^2 + q_{33} v^3).$$

Usando o seguinte germe de difeomorfismo $h_1(x, y, z) = (x, y, z - ax - by)$ temos que

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u^2, uv + p_3 v^3, v^2 + q_{30} u^3 + q_{31} u^2 v + q_{32} uv^2 + (q_{33} - bp_3) v^3),$$

e agora com $\lambda_1(u, v) = (\mu u, \mu v)$ e $h_2(x, y, z) = (\frac{1}{\mu^2} x, \frac{1}{\mu^2} y, \frac{1}{\mu^2} z)$, para $\mu = \frac{1}{p_3}$ temos que

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u^2, uv + v^3, v^2 + Q_{30} u^3 + Q_{31} u^2 v + Q_{32} uv^2 + Q_{33} v^3),$$

onde $Q_{30} = \frac{q_{30}}{p_3}$, $Q_{31} = \frac{q_{31}}{p_3}$, $Q_{32} = \frac{q_{32}}{p_3}$ e $Q_{33} = \frac{q_{33} - bp_3}{p_3}$. Por último tome $\lambda_2(u, v) = (\mu^2 u, \mu v)$ e $h_3(x, y, z) = (\frac{1}{\mu^4} x, \frac{1}{\mu^3} y, \frac{1}{\mu^2} z)$, e para $\mu = \frac{1}{Q_{33}}$ temos que

$$j^3 f_\eta \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u^2, uv + v^3, v^2 + Au^3 + Bu^2 v + Cuv^2 + v^3),$$

onde $A = \frac{Q_{30}}{Q_{33}^4}$, $B = \frac{Q_{31}}{Q_{33}^3}$ e $C = \frac{Q_{32}}{Q_{33}^2}$. De agora em diante consideraremos o germe

$$g(u, v) = (u^2, uv + v^3, v^2 + Au^3 + Bu^2 v + Cuv^2 + v^3), \quad (5.8)$$

onde A , B e C são parâmetros de módulo, isto é, que não podem ser eliminados pela ação do grupo $\mathcal{A}$. Para mostrar que g é 3- $\mathcal{A}$ -determinado pelo Corolário 2.17, devemos mostrar que

$$\mathcal{M}_2^l \mathcal{E}_{2,3} \subset TK \cdot g + \mathcal{M}_2^{l+1} \mathcal{E}_{2,3}$$

e

$$\mathcal{M}_2^4 \mathcal{E}_{2,3} \subset T\mathcal{A}_1 \cdot g + \mathcal{M}_2^{l+4} \mathcal{E}_{2,3}.$$

É facil ver que $\mathcal{M}_2^2 \mathcal{E}_{2,3} \subset T\mathcal{K} \cdot g + \mathcal{M}_2^3 \mathcal{E}_{2,3}$. Para a segunda parte considere as seguintes expressões, onde “ $\sim$ ” denota a igualdade módulo $\mathcal{M}_2^6 \mathcal{E}_{2,3} + \mathbb{R} \{(u^4, 0, 0), (0, u^4, 0), (0, 0, u^4)\}$.

1. $u^4 g_u \sim (2u^5, u^4 v, 0),$
2. $u^3 v g_u \sim (2u^4 v, u^3 v^2, 0),$
3. $u^2 v^2 g_u \sim (2u^3 v^2, u^2 v^3, 0),$
4. $uv^3 g_u \sim (2u^2 v^3, uv^4, 0),$
5. $v^4 g_u \sim (2uv^4, v^5, 0),$
6. $u^4 g_v \sim (0, u^5, 2u^4 v),$
7. $u^3 v g_v \sim (0, u^4 v, 2u^3 v^2),$
8. $u^2 v^2 g_v \sim (0, u^3 v^2, 2u^2 v^3),$
9. $uv^3 g_v \sim (0, u^2 v^3, 2uv^4),$
10. $v^4 g_v \sim (0, uv^4, 2v^5),$
11. $u^3 g_u \sim (0, u^3 v, 3Au^5 + 2Bu^4 v + Cu^3 v^2),$
12. $u^2 v g_u \sim (2u^3 v, u^2 v^2, 3Au^4 v + 2Bu^3 v^2 + Cu^2 v^3),$
13. $uv^2 g_u \sim (2u^2 v^2, uv^3, 3Au^3 v^2 + 2Bu^2 v^3 + Cuv^4),$
14. $v^3 g_u \sim (2uv^3, v^4, 3Au^2 v^3 + 2Buv^4 + Cv^5),$
15. $u^3 g_v \sim (0, 3u^3 v^2, 2u^3 v + Bu^5 + 2Cu^4 v + 3u^3 v^2),$
16. $u^2 v g_v \sim (0, u^3 v + 3u^2 v^3, 2u^2 v^2 + Bu^4 v + 2Cu^3 v^2 + 3u^2 v^3),$
17. $uv^2 g_v \sim (0, u^2 v^2 + 3uv^4, 2uv^3 + Bu^3 v^2 + 2Cu^2 v^3 + 3uv^4),$
18. $v^3 g_v \sim (0, uv^3 + 3v^5, 2v^4 + Bu^2 v^3 + 2Cuv^4 + 3v^5),$
- (a) $(19,20,21) \ g_3^2 e_i \sim (v^4 + 2Au^3 v^2 + 2Bu^2 v^3 + 2Cuv^4 + 2v^5) e_i, \ i = 1, 2, 3,$
- (b) $(22,23,24) \ g_1 g_3 e_i \sim (u^2 v^2 + Au^5 + Bu^4 v + Cu^3 v^2 + u^2 v^3) e_i, \ i = 1, 2, 3,$
- (c) $(25,26,27) \ g_2 g_3 e_i \sim (uv^3 + Au^4 v + Bu^3 v^2 + Cu^2 v^3 + uv^4 + v^5) e_i, \ i = 1, 2, 3,$
- (d) $(28,29,30) \ g_1 g_2 e_i \sim (u^3 v + u^2 v^3) e_i, \ i = 1, 2, 3,$

onde os e_i correspondem à base canônica de $\mathbb{R}^3$. As expressões acima induzem uma matriz de ordem 30×30 , cujo determinante denotamos por Θ . Escrevemos Θ como uma função nas variáveis A, B, C , a qual é dada por

$$\begin{aligned}\Theta(A, B, C) = & -8640A^2 - 655360A^3 - 245760A^2B - 92160A^2C + 3840AB^2 + \\ & + 5760ABC - 1280B^3 - 163840A^2C^2 + 184320AB^2C + 51200ABC^2 - \\ & - 1280AC^3 - 34560B^4 - 11520B^3C + 320B^2C^2 - 10240AC^4 + \\ & + 2560B^2C^3.\end{aligned}$$

Portanto o germe g é 3- $\mathcal{A}$ -determinado se, e somente se, $\Theta(A, B, C) \neq 0$.

Finalmente, para a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de g consideremos as seguintes expressões, onde “ $\sim$ ” denota a igualdade módulo $\mathcal{M}_2^4\mathcal{E}_{2,3} + \mathbb{R}\{(u^2, 0, 0), (0, u^2, 0), (0, 0, u^2)\}$.

1. $u^2g_u \sim (2u^3, u^2v, 0)$,
2. $uv g_u \sim (2u^2v, uv^2, 0)$,
3. $v^2g_u \sim (2uv^2, v^3, 0)$,
4. $u^2g_v \sim (0, u^3, 2u^2v)$,
5. $uv g_v \sim (0, u^2v, 2uv^2)$,
6. $v^2g_v \sim (0, uv^2, 2v^3)$,
7. $ug_u \sim (0, uv, 3Au^3 + 2Bu^2v + Cuv^2)$,
8. $vg_u \sim (2uv, v^2, 3Au^2v + 2Buv^2 + Cv^3)$,
9. $ug_v \sim (0, 3uv^2, 2uv + Bu^3 + 2Cu^2v + 3uv^2)$,
10. $vg_v \sim (0, uv + 3v^3, 2v^2 + Bu^2v + 2Cuv^2 + 3v^3)$,
11. $g_u \sim (2u, v, 3Au^2 + 2Buv + Cv^2)$,
12. $g_u \sim (0, u + 3v^2, 2v + Bu^2 + 2Cuv + 3v^2)$,
- (a) (13,14,15) $g_2e_i \sim (uv + v^3)e_i, i = 1, 2, 3$,
- (b) (16,17,18) $g_3e_i \sim (v^2 + Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + v^3)e_i, i = 1, 2, 3$.

Temos que $J^3(2, 3)$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão 27, mas como já temos 3 elementos nele, e as 18 equações acima são linearmente independentes, segue que a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de g é 6, o que completa a prova. $\square$

Proposição 5.7. *A família de aplicações dobra sobre o cross-cap $F(u, v, \eta, \delta) = f_{(\eta, \delta)}(u, v)$ não desdobra $\mathcal{A}_e$ -versalmente nenhum dos germes do Teorema 5.6.*

Demonstração. Dado $\eta_0 \in \mathbb{S}^2$ fixo considere então o germe $f_{(\eta_0,0)}$. Seja (η, δ) uma perturbação de $(\eta_0, 0)$ com $|\delta| < \epsilon$ (ϵ suficientemente pequeno e não nulo) e η suficientemente perto de η_0 . Temos pelo Teorema 5.4 que o germe $f_{(\eta,\delta)}$ tem singularidade cross-cap na origem. Logo, se $\alpha \neq 1$

$$F(u, v, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \delta) \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} f_{(\eta_0,0)} + \delta(0, 0, uv) + h(u, v, \lambda_i) = (u, v^2, \delta uv) + O(3) & \text{se } \beta \neq 0, \\ f_{(\eta_0,0)} + \delta(0, 0, v^2) + h(u, v, \lambda_i) = (u, uv, \delta v^2) + O(3) & \text{se } \beta = 0, \end{cases}$$

onde $h(u, v, \lambda_i)$ é uma aplicação polinomial de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nas variáveis u e v com $h(0, 0, \lambda_i) = (0, 0, 0)$, os λ_i são os coeficientes da deformação e cada monômio é de grau maior o igual do que 3. Sabemos que $(0, 0, v) \notin T\mathcal{A} \cdot f_{(\eta_0,0)}$, onde $f_{(\eta_0,0)}$ é um germe do Teorema 5.6. Assim, temos que

$$(0, 0, v) \notin T\mathcal{A} \cdot f_{(\eta_0,0)} + \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \delta}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} \right\}$$

e o resultado segue. O caso $\alpha = 1$ é análogo. $\square$

5.6 Geometria das aplicações dobra

Nesta seção nos concentraremos em estudar a geometria associada à família de aplicações dobra sobre o cross-cap.

Precisamos de algumas definições.

Seja $\theta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave dada da forma $\theta(t) = (t, a_1 t + a_2 t^2 + \dots)$ com $a_1 \neq 0$, e considere $\mu(t) := g \circ \theta(t)$ sua imagem sobre o cross-cap. É provado em [60] que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{N} |_{\mu}(t)) = \left(0, \frac{-(b + 2a_1)}{((b + 2a_1)^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}}, \frac{a_1}{((b + 2a_1)^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}}} \right),$$

onde $\mathbf{N}$ é um vetor normal unitário sobre $\mathcal{W} \setminus (0, 0, 0)$. Note que $\lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{N} |_{\mu}(t)) \in N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$ (plano normal ao cross-cap na origem). Também é mostrado em [60] que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu'(t) = (a_1, 0, 0).$$

Portanto, a curva μ tem vetor normal limitante paralelo a $(0, -(b + 2a_1), a_1)$ e vetor tangente limitante paralelo a $(1, 0, 0)$.

Definição 5.8. Definimos a aplicação normal limitante $NL : \mathbb{R}^2 \rightarrow N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$ do cross-cap como

$$NL(v_1, v_2) = (0, -(bv_1 + 2v_2), v_1). \quad (5.9)$$

Temos que, dado $v \in \mathbb{R}^2$ na fonte, a aplicação normal limitante associa a v um outro vetor $NL(v) \in N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$. Assim, ao vetor tangente na origem à curva θ , corresponde um único vetor no plano normal ao cross-cap na origem (ver Figura 33).

Figura 33 – Aplicação normal limitante do cross-cap.

Proposição 5.9. A aplicação normal limitante (5.9) induz uma bijeção entre $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^1 \subset N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$.

Demonstração. Segue do fato que a aplicação normal limitante é uma transformação linear injetiva. $\square$

Corolário 5.10. Seja $\varpi_w(t) = (wt^2 + w_3t^3 + \dots, t)$ uma família de curvas suaves parametrizadas por w . Então, $NL(\varpi'_w(0))$ é paralelo ao vetor $(0, 1, 0)$.

Demonstração. Segue de fazer $v_1 = 0$ na equação (5.9). $\square$

Note que a imagem das curvas $\varpi_w(t)$ sobre o cross-cap dão curvas com singularidade na origem. De fato

$$j^3(g \circ \varpi_w)(t) = (wt^2 + w_3t^3, (w + p_3)t^3, t^2 + (bw + q_33)t^3),$$

e todas as curvas têm a mesma direção normal limitante. Em particular, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (g \circ \varpi_w)'(t) = (2w, 0, 2) \in CT_{(0,0,0)}\mathcal{W},$$

onde $CT_{(0,0,0)}\mathcal{W}$ denota o cone tangente ao cross-cap na origem (definido na Seção 2.6). Assim, a tangente limitante do cross-cap muda com o parâmetro w da curva plana.

Definição 5.11. Para cada curva da família $\varpi_{\kappa_2}(t) = (\kappa_2t^2 + w_3t^3 + \dots, t)$ parametrizada por κ_2 , consideramos as coordenadas $(\kappa_2, 1) \in \mathbb{R}^2$ e definimos a aplicação tangente limitante do cross-cap, $TL : \mathbb{R}^2 \rightarrow CT_{(0,0,0)}\mathcal{W}$ por

$$TL(\kappa_2, 1) = (\kappa_2, 0, 1). \quad (5.10)$$

Figura 34 – Aplicação tangente limitante do cross-cap.

Note que κ_2 corresponde à curvatura na origem das curvas $\varpi_{\kappa_2}(t)$. Assim, temos que para cada curva da forma $\varpi_{\kappa_2}(t) = (\kappa_2 t^2, t)$, corresponde uma única direção no cone tangente $CT_{(0,0,0)}\mathcal{W}$ dada por $(\kappa_2, 0, 1)$ (ver Figura 34).

A ideia é captar a geometria de algumas singularidades das aplicações dobra através das aplicações normal limitante e tangente limitante do cross-cap.

Observação 5.12. Na Seção 2.5 e ao início deste capítulo foram definidos os conceitos de ponto ridge e ponto sub-parabólico (respectivamente) sobre uma superfície regular S . É bem conhecido ([32, 53]) que, em pontos não umbílicos e considerando uma parametrização de S cujas curvas coordenadas são linhas de curvatura, a curva ridge e o conjunto sub-parabólico são caracterizados através das derivadas direcionais (ao longo das direções principais) das curvaturas principais. Mais precisamente, seja S uma superfície regular, $p \in S$, $k_i(p)$ as curvaturas principais de S em p , e $\mathbf{v}_i \in T_p S$, $i = 1, 2$ as respectivas direções principais em p . Então

(i) p é ponto sub-parabólico de S , relativo a $\mathbf{v}_i$ se $(\mathbf{v}_i k_j)(p) = 0$, $i \neq j$.

(ii) p é ponto ridge de S , relativo a $\mathbf{v}_i$ se $(\mathbf{v}_i k_i)(p) = 0$.

Em [22] os autores definem os conjuntos ridge e sub-parabólico sobre o cross-cap como a caracterização dada na Observação 5.12 e obtiveram o seguinte resultado.

Proposição 5.13 ([22]). Considere um cross-cap geométrico $\mathcal{W}$, k_i e $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2$, as curvaturas principais e as suas respectivas direções principais definidas sobre a parte regular do cross-cap e $w = (w_1, w_2)$ um vetor na origem de $\mathbb{R}^2$ com $w_1^2 + w_2^2 = 1$. Então,

- (i) Existe pelo menos 1 e no máximo 3 curvas sub-parabólicas relativas a $\mathbf{v}_2$, chegando no ponto de cross-cap, cujo 1-jato no domínio satisfaz

$$2w_1^3 + 3bw_1^2w_2 + (b^2 + 2a + 1)w_1w_2^2 + abw_2^3 = 0. \quad (5.11)$$

- (ii) Não existem curvas sub-parabólicas relativas a $\mathbf{v}_1$ chegando no ponto de cross-cap.
 (iii) Existem no máximo 4 curvas ridge relativas a $\mathbf{v}_1$, cujo 1-jato no domínio satisfaz

$$q_{30}w_2^4 + q_{31}w_1w_2^3 + q_{32}w_1^2w_2^2 + (q_{33} - bp_3)w_1^3w_2 - 2p_3w_1^4 = 0.$$

- (iv) Existem no máximo 2 curvas ridge relativos a $\mathbf{v}_2$, cujo 1-jato no domínio satisfaz

$$(bw_2 + 2w_1)w_2 = 0. \quad (5.12)$$

Teorema 5.14 (Caracterização geométrica). *As singularidades na origem dos membros da família de aplicações dobra sobre o cross-cap têm as seguintes caracterizações.*

- (i) As singularidades C_4 correspondem às aplicações dobra em relação aos planos gerados pela direção tangente do cross-cap e os normais limitantes $NL(w_i)$, onde os w_i são tangentes às componentes do conjunto sub-parabólico na origem.
- (ii) As singularidades $F_{1,0}$ e T_4 correspondem às aplicações dobra em relação aos planos gerados pela direção tangente do cross-cap e os normais limitantes $NL(w_i)$, onde os w_i são tangentes às componentes do conjunto ridge relativos a $\mathbf{v}_2$. Em particular, a singularidade $F_{1,0}$ corresponde a uma aplicação dobra em relação ao cone tangente $CT_{(0,0,0)}\mathcal{W}$.
- (iii) As singularidades $P_4(\frac{1}{2})$ correspondem às aplicações dobra em relação aos planos gerados pelos vetores $NL(0,1)$ e o tangente limitante associado à pré-imagem da curva de pontos duplos.
- (iv) As singularidades $P_4(\frac{3}{2})$ correspondem às aplicações dobra em relação aos planos gerados pelos vetores $NL(0,1)$ e o tangente limitante associado às separatrizes das folheações principais.
- (v) As singularidades R_4 correspondem às aplicações dobra em relação ao plano normal à tangente limite da curva de pontos duplos.
- (vi) As singularidades de corank 2 correspondem às aplicações dobra em relação ao plano normal $N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$.

Demonstração. A ideia da prova consiste no uso das aplicações normal e tangente limitantes sobre as expressões já conhecidas ([22, 58]).

- (i) Pelo Teorema 5.6 as singularidades do tipo C_4 ocorrem em aplicações dobra sobre o cross-cap em relação a planos normais a η , onde $\eta = (0, \beta, \gamma)$ satisfaz $\Phi(\beta, \gamma) = 0$ (equação (5.5)). Pela Proposição 5.13, as direções tangentes ao conjunto sub-parabólico são dadas pela equação (5.11). Consideramos a aplicação normal limitada

$$NL(v_1, v_2) = \left(0, \underbrace{-(bv_1 + 2v_2)}_{\sigma}, \underbrace{v_1}_{\rho} \right).$$

Reescrevemos a equação (5.11) usando as coordenadas σ, ρ como segue

$$\begin{cases} v_1 = \rho, \\ v_2 = -\frac{1}{2}(\sigma + b\rho), \end{cases}$$

a qual resulta na equação

$$-4(\sigma^3 + (4a - b^2 + 1)\sigma\rho^2 + 2b\rho^3) = 0. \quad (5.13)$$

Como a direção tangente está gerando cada plano neste caso, é necessário considerar as direções normais às direções definidas pela equação 5.13. Assim, consideramos a mudança de coordenadas dada por $h(u, v) = (v, -u)$ e aplicando em 5.13 obtemos

$$-4(-2b\sigma^3 + (4a - b^2 + 1)\sigma^2\rho + \rho^3) = 0,$$

o qual define os vetores normais aos planos nos quais as aplicações dobra tem singularidade C_4 . Temos que esta primeira parte segue agora de fazer $\sigma = \beta$ e $\rho = \gamma$ e assim concluir que os vetores normais aos planos nos quais as aplicações dobra tem singularidade C_4 satisfazem $\Phi(\beta, \gamma) = 0$.

O outros casos são análogos. Para os casos (iii) e (v) precisa levar a consideração que o 2-jato da pré-imagem da curva de pontos duplos do cross-cap é dado por $u = -p_3v^2$. Finalmente, para o caso (iv), foi provado em [58] que as separatrizes das folheações principais são dadas por $u = \mu_i v^2 + \dots$, onde os μ_i são as raízes da equação $\mu^2 + 3p_3\mu - 2 = 0$. $\square$

Vamos voltar nossa atenção na equação $\Phi(\beta, \gamma) = 0$ (equação (5.5)), onde

$$\Phi(\beta, \gamma) = -2b\beta^3 + (4a - b^2 + 2)\beta^2\gamma + \gamma^3.$$

Este é um polinômio homogêneo de grau 3 em β e γ , o qual fornece no mínimo 1 e no máximo 3 direções. Consideramos então o discriminante Δ de Φ , o qual é dado por

$$\Delta(a, b) = -4((-b^2 + 4a + 2)^3 + 27b^2).$$

É fácil ver que no ponto $(a, b) = (-\frac{1}{2}, 0)$ a curva $\Delta = 0$ tem uma cúspide e, em geral é simétrica com respeito do eixo $b = 0$ (ver Figura 35). Assim, escrevemos “ a ” em função

de “ b ” fora do ponto de cúspide, e pela análise anterior é suficiente para $b > 0$. Temos então que

$$a(b) = \frac{1}{4} \left(-3b^{\frac{2}{3}} + b^2 - 2 \right), \quad \text{satisfazendo} \quad \Delta(a(b), b) = 0.$$

Segue que

$$\frac{da(b)}{db} = \frac{(b^{\frac{2}{3}} - 1)(b^{\frac{2}{3}} + 1)}{2b^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad b = \pm 1.$$

Também, para $b > 1$ segue que $\frac{d}{db}a(b) > 0$, o que nos diz que a função é sempre crescente nessas regiões.

A Figura 35 mostra a estratificação no plano dos parâmetros a, b onde acontecem, para a escolha dos pontos no plano, 1 ou 3 raízes simples de (5.5)

Figura 35 – Para pontos na região (I) existem 3 curvas sub-parabólicas chegando na origem e para a região (II) existe só 1. Sobre a curva vermelha ($\Delta = 0$) as soluções de $\Phi(\beta, \gamma) = 0$ tem multiplicidade.

Os autores em [17, 63] mostraram que existe uma relação entre o conjunto de bifurcação da família de aplicações dobra e o conjunto focal do cross-cap. Em [60] é estudada a estrutura local do cross-cap perto do ponto do cross-cap, mas nesse estudo não é mostrada a estrutura do conjunto focal contendo a cônica focal $\mathcal{C}_a$ (definida na Seção 3.4).

Retomamos então os resultados em [22, 60] sobre as singularidades da família de funções distância ao quadrado sobre o cross-cap. Nestes trabalhos é mostrado que, sobre a cônica focal existem cinco pontos para os quais a família de funções distância ao quadrado tem singularidade do tipo A_3 , mais um desses pontos é o ponto de cross-cap, onde o germe não é $\mathcal{A}$ -versalmente desdobrado pela família.

A ideia é obter informações do conjunto focal do cross-cap através do conjunto de bifurcação da família de aplicações dobra e vice-versa, quando nos aproximamos do ponto de cross-cap.

Proposição 5.15. *Seja $\mathcal{F}$ o conjunto focal de um cross-cap geométrico $\mathcal{W}$. Então, ao longo da cônica focal $\mathcal{C}_a$, o espaço tangente a $\mathcal{F}$ é constante e coincide com o plano normal $N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$.*

Demonstração. Consideremos a família de funções distância ao quadrado sobre o cross-cap dada na Seção 3.4, isto é

$$D : U \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{\mathbf{a}}(u, v) = \langle g(u, v) - \mathbf{a}, g(u, v) - \mathbf{a} \rangle,$$

e temos que $\mathcal{F} = B_D$, o qual está determinado pelas equações

$$\left(\frac{\partial D}{\partial u}, \frac{\partial D}{\partial v} \right) = (0, 0) \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} \right)^2 = 0.$$

Seja $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, assim temos que

$$j^1 \left(\frac{\partial D}{\partial u} \right) = -2\alpha_1 + (-4a\alpha_3 + 2)u + (-2b\alpha_3 - 2\alpha_2)v, \quad (5.14)$$

$$j^1 \left(\frac{\partial D}{\partial v} \right) = -2(b\alpha_3 + \alpha_2)u - 4\alpha_3v, \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} j^1 \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} \right)^2 \right) &= 4 \left(2\alpha_3(2a\alpha_3 - 1) - (\alpha_2 + b\alpha_3)^2 \right) + \\ &+ 8\alpha_3 (6q_{30}\alpha_3 - 2q_{31}(\alpha_2 + b\alpha_3) + q_{32}(2a\alpha_3 - 1)) u + \\ &+ 8 \left(2q_{31}\alpha_3^2 - 2q_{32}\alpha_3(\alpha_2 + b\alpha_3) + 3q_{33}\alpha_3(2a\alpha_3 - 1) + \right. \\ &+ \left. 3p_3\alpha_2(2a\alpha_3 - 1) \right) v. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Da equação (5.14) temos que $\alpha_1 = (-2a\alpha_3 + 1)u - (b\alpha_3 + \alpha_2)v$. Na equação (5.15) obtemos $u = -\frac{2\alpha_3}{\alpha_2 + b\alpha_3}v$. Substituímos a expressão para $u(v)$ (obtida de (5.15)), na equação (5.16), obtendo $v(\alpha_2, \alpha_3)$ tal que

$$j^1 \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial v^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial u \partial v} \right)^2 \right) (u(v(\alpha_2, \alpha_3)), v(\alpha_2, \alpha_3)) = 0.$$

Substituímos agora $v(\alpha_2, \alpha_3)$ na equação $u = -\frac{2\alpha_3}{\alpha_2 + b\alpha_3}v$, para obter $u(\alpha_2, \alpha_3)$. Finalmente, substituímos $u(\alpha_2, \alpha_3)$ e $v(\alpha_2, \alpha_3)$ na equação (5.14), concluindo que $\mathcal{F}$ pode ser parame- trizada localmente (numa vizinhança da cônica focal) como

$$\varphi(\alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1(\alpha_2, \alpha_3), \alpha_2, \alpha_3), \quad \text{com} \quad \alpha_1(\alpha_2, \alpha_3) = -\frac{1}{2} \frac{\Lambda_1(\alpha_2, \alpha_3)}{\Lambda_2(\alpha_2, \alpha_3)}, \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\alpha_2, \alpha_3) &= \left(2\alpha_3(2a\alpha_3 - 1) - (\alpha_2 + b\alpha_3)^2 \right)^2, \\ \Lambda_2(\alpha_2, \alpha_3) &= -3p_3\alpha_2^2 - 3(bp_3 + q_{33})\alpha_2\alpha_3 + (-3bq_{33} + 2q_{32})\alpha_3^2. \end{aligned}$$

As condições para que o $j^2\Lambda_2$ se anule estão nos coeficientes da parte de grau 3 da parametrização, assim que genericamente não se anula. Agora é fácil ver

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \varphi(\alpha_2, \alpha_3) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \varphi(\alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 1) \quad \text{para} \quad (\alpha_2, \alpha_3) \in \mathcal{C}_a,$$

o que completa a prova. $\square$

A Figura 36 mostra o caso quando consideramos um cross-cap hiperbólico junto com o plano normal $N_{(0,0,0)}\mathcal{W}$. Neste caso a cônica focal $\mathcal{C}_a$ é uma elipse.

Figura 36 – Vistas da superfície focal associada a um cross-cap hiperbólico perto da cônica focal, junto com o plano normal no ponto de cross-cap.

Considerando a relação de dualidade dada em [17, 63], temos que, ao dualizar a superfície focal $\mathcal{F}$, a informação sobre a cônica focal dualiza toda num único ponto.

Analisando os resultados obtidos, conjecturamos que o seguinte fato pode acontecer para um cross-cap geométrico, esperamos retomar futuramente este enunciado.

Conjetura 5.16. *As singularidades do tipo B_4 correspondem a aplicações dobra sobre o cross-cap em relação aos planos gerados pela direção tangente do cross-cap e os normais limitantes $NL(w_i)$, onde os w_i são tangentes às componentes do conjunto ridge relativos a v_1 .*

5.7 Genericidade das singularidades da família de aplicações dobra

A Proposição 5.7 afirma que a família de aplicações dobra não desdobra $\mathcal{A}_e$ -versalmente nenhuma das singularidades do Teorema 5.6. Mas, as singularidades nos membros da família de aplicações dobra ocorrem para um conjunto suficientemente grande de cross-caps geométricos. Para ver isto, vamos considerar a aplicação de Monge-Taylor como foi feito em [11].

Seja W_j^k o conjunto de polinômios em j variáveis satisfazendo $3 \leq \text{grau do polinômio} \leq k$. Dado um cross-cap geométrico $\mathcal{W}$, parametrizado por $g(u, v) = (u, uv + P(v), au^2 + buv + v^2 + Q(u, v))$, definimos a aplicação de Monge-Taylor $j^k\phi_g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow W_2^k \times W_2^k$, dada por

$$j^k\phi_g(u, v) = (uv + j^kP(v), au^2 + buv + v^2 + j^kQ(u, v)). \quad (5.18)$$

Podemos identificar os polinômios de (5.18) com os seus coeficientes, assim

$$j^k\phi_g(u, v) = (p_3, \dots, p_k, a, b, q_{30}, \dots, q_{kk}).$$

Então, por exemplo temos que um cross-cap geométrico é elíptico se, e somente se, ele corresponde a um ponto no estrato definido pela condição $a > 0$.

Dizemos que, uma condição no crosscap é genérica se a aplicação de Monge-Taylor é transversal à subvariedade definida pela condição.

Teorema 5.17. *As singularidades na origem dos membros da família de aplicações dobra sobre o cross-cap no Teorema 5.6 são genéricas.*

Demonstração. É suficiente ver que, as condições dadas para um membro da família de aplicações dobra sobre o cross-cap ter uma das singularidades do Teorema 5.6, definem conjuntos abertos no espaço de parâmetros. $\square$

DUALIDADE NAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS IMPLÍCITAS

Foi mostrado em [4] que no caso de superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$, o conjunto de pontos onde as linhas assintóticas têm uma inflexão geodésica (isto é, a curvatura geodésica nestes pontos se anula) corresponde a singularidades do tipo rabo de andorinha da família de projeções ortogonais. Da mesma forma, inflexões das linhas de curvatura correspondem a singularidades do tipo S_2 da família de aplicações de dobra (ver [17, 32, 63]).

Em [7, 15] é usado dualidade na equação diferencial binária (EDB), via transformação de Legendre para estudar as inflexões das curvas solução. Em [47, 48, 58, 60] foram dadas as configurações locais das linhas de curvatura e das linhas assintóticas perto do ponto de cross-cap para os cross-cap do tipo elíptico, parabólico e hiperbólico. Também, em [64] foi estudado o conjunto de pontos no cross-cap onde ocorre singularidade do tipo rabo de andorinha para a família de projeções ortogonais.

Neste capítulo estudaremos as inflexões geodésicas das linhas assintóticas e as inflexões das linhas de curvatura do cross-cap.

Desta maneira, o Teorema 6.9 mostra como é a estrutura do conjunto dos pontos de inflexão das linhas assintóticas dos cross-caps elíptico e hiperbólico, e o Teorema 6.12 fornece a estrutura local do conjunto de inflexões das linhas de curvatura.

6.1 Transformada de Legendre

Começamos com uma definição que será fundamental ao longo deste capítulo.

Definição 6.1 ([2]). *Seja f uma função na variável x e convexa. A transformada de Legendre desta função é uma nova função g , em uma nova variável p , a qual é construída*

da seguinte forma (ver Figura 37).

Figura 37 – Transformada de Legendre.

Considere o gráfico de f no plano (x, y) . Seja p um número dado. Desenhe a reta $y = px$. Tomamos o ponto $x = x(p)$, no qual o gráfico de f está mais longe da reta $y = px$ na direção vertical. Para cada p a função $F(x, p) = xp - f(x)$ tem um máximo, com respeito de x no ponto $x(p)$. Definimos

$$g(p) = F(x(p), p). \quad (6.1)$$

O ponto $x(p)$ é definido pela condição $\frac{\partial}{\partial x} F = 0$, isto é, $f'(x) = p$.

Exemplo 6.2. Vamos considerar o caso onde $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Como $F(x, p) = px - \frac{1}{2}x^2$ e $\frac{\partial}{\partial x} F = p - x$, segue que

$$g(p) = F(x(p), p) = \frac{1}{2}p^2.$$

A transformada de Legendre g de uma função f possui muitas propriedades interessantes, entre elas que g é uma involução. Para mais detalhes sobre a transformada ver [1, 2].

Além disso, a transformada de Legendre é um caso particular de uma construção geral em geometria projetiva (ver [2]).

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana suave. Uma reta no plano (x, y) está totalmente determinada pela sua inclinação e seu encontro com o eixo y . Vamos dualizar a curva γ . Suponha sem perda de generalidade $\gamma(x) = (x, y(x))$ e denotamos por L_x a reta tangente à γ em $\gamma(x)$. Temos que

$$L_x(s) = y'(x)s + (y(x) - xy'(x)).$$

Fazendo $y' = p$ e dualizando temos que

$$\gamma \quad \text{corresponde à curva} \quad (p : y - px : 1),$$

dada na carta $(u : v : 1)$ no espaço $\mathbb{R}P^2$.

Assim, vemos que salvo pelo sinal na segunda componente da dualização, a curva dual a γ é difeomorfa à imagem pela transformada de Legendre da mesma curva.

6.2 Equações diferenciais implícitas

Uma equação diferencial implícita (EDI) é uma equação da forma

$$F(x, y, p) = 0, \quad (6.2)$$

onde $p = \frac{dy}{dx}$ e F é uma função suave em $(x, y, p) \in \mathbb{R}^3$. Em pontos onde a derivada parcial $F_p = \frac{\partial}{\partial p} F \neq 0$, a equação (6.2) pode ser escrita localmente como $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ e estudada usando os métodos da teoria das equações diferenciais ordinárias. De fato, neste caso existe uma única direção que satisfaz a equação (6.2).

Quando $F_p = 0$ a equação pode definir localmente mais de uma direção no plano.

6.2.1 Equações diferenciais binárias

Uma classe particular das EDI's são as equações diferenciais binárias (EDB's), que são equações diferenciais da forma

$$a(x, y)dy^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dx^2 = 0, \quad (6.3)$$

onde a, b, c são funções suaves reais em (x, y) . Para este capítulo, vamos considerar EDB onde em particular $a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0$. Vamos impor que a origem seja singularidade isolada da EDB em (6.3).

Considerando a função $\delta(x, y) = b^2 - ac$, definimos o discriminante $\Delta := \delta^{-1}(0)$. De fato, na região onde $\delta > 0$ a equação (6.3) define duas direções transversais em cada ponto, nos pontos onde $\delta = 0$ define uma única direção e nenhuma direção quando $\delta < 0$. Mais precisamente temos que longe do discriminante a equação (6.3) define duas folheações $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$ ou nenhuma folheação. Desta forma, temos que as características locais importantes das soluções de (6.3) acontecem em pontos sobre $\delta = 0$.

Uma forma de estudar estas equações é pelo levantamento do campo bi-direcional definido no plano, a um campo ξ definido sobre a superfície

$$\mathbb{M} = \left\{ (x, y, (\alpha : \beta)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1 \mid a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 = 0 \right\}. \quad (6.4)$$

Junto com a superfície $\mathbb{M}$, consideramos a projeção natural $\pi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\pi(x, y, (\alpha : \beta)) = (x, y)$. O campo ξ é determinado pela restrição dos planos de contato associados à forma de contato canônica $dy - pdx$ em $\mathbb{R}^3$ ([2, 10, 14]).

Na carta $p = \frac{\beta}{\alpha}$ de $\mathbb{R}P^1$, reescrevemos a equação (6.3) como

$$F = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)p + c(x, y), \quad (6.5)$$

e, neste caso $\mathbb{M} = F^{-1}(0)$. (Precisamos considerar também a carta $q = \frac{\alpha}{\beta}$ e a equação $F = a(x, y) + 2b(x, y)q + c(x, y)q^2$.)

Proposição 6.3 ([10, 14]). *O campo levantado associado ao campo bi-direcional definido pela equação (6.3) pode ser escrito na forma*

$$\xi = F_p \frac{\partial}{\partial x} + p F_p \frac{\partial}{\partial y} - (F_x + p F_y) \frac{\partial}{\partial p}$$

onde F é como em (6.5).

Foi mostrado em [10, 14] que, quando a função discriminante δ tem uma singularidade na origem do tipo Morse, a superfície $\mathbb{M}$ é suave. As EDB's nas quais o discriminante tem uma singularidade de Morse são chamadas Morse tipo 2 (ver [15]). De fato, foi mostrado nestes trabalhos que para as EDB's Morse tipo 2 é possível reduzir, usando mudanças de coordenadas lineares, o 1-jato dos coeficientes da EDB a

$$ydy^2 + 2(b_1x + b_2y)dxdy + \varepsilon ydx^2 = 0, \quad (6.6)$$

onde $\varepsilon = \pm 1$ e $b_1 \neq 0$. Em particular, o caso quando $\varepsilon = -1$ também foi estudado em [30]. Neste caso, exceto para valores excepcionais no espaço de parâmetros (b_1, b_2) , as configurações locais das soluções da EDB são topologicamente equivalentes às mostradas na Figura 38. Estas configurações acontecem genericamente em pontos umbílicos como configuração das linhas de curvatura (ver por exemplo [25, 30]).

Figura 38 – Configurações genéricas da equação (6.6) para $\varepsilon = -1$.

6.3 EDB sobre o cross-cap

Sobre o cross-cap já tem sido estudadas as configurações locais das curvas que são definidas sobre a superfície por EDB's, a saber, linhas de curvatura, linhas assintóticas e curvas características (para mais detalhes ver [46, 48, 58, 60]).

Neste capítulo, vamos considerar só as linhas assintóticas e as linhas de curvatura.

Proposição 6.4 ([58]). *A equação das linhas assintóticas numa parametrização de um cross-cap é topologicamente equivalente a:*

1. $ydy^2 + 2xdxdy - ydx^2 = 0$, (Figura 39 à esquerda) em um cross-cap hiperbólico,
2. (i) $ydy^2 + 2(-x + y^2)dxdy + ydx^2 = 0$, (Figura 39, centro), ou
(ii) $ydy^2 + 2(-x + xy)dxdy + ydx^2 = 0$ (Figura 39, à direita),
em um cross-cap elíptico.

O tipo topológico é completamente determinado pelo 3-jato da parametrização da superfície.

Figura 39 – Configurações das linhas assintóticas no domínio de uma parametrização de um cross-cap. À esquerda para o cross-cap hiperbólico e no centro e à direita para o cross-cap elíptico.

Proposição 6.5 ([58]). *A equação das linhas de curvatura no domínio de uma parametrização de um cross-cap é topologicamente equivalente a*

$$-y^3 dy^2 - x dx dy + y dx^2 = 0 \quad (\text{Figura 40}). \quad (6.7)$$

Figura 40 – Configurações das linhas de curvatura no domínio de uma parametrização de um cross-cap. (A curva preta corresponde à pre-imagem da curva de pontos duplos).

Nos capítulos anteriores, não consideramos o cross-cap parabólico pois ele não é genérico no sentido da classificação via isometrias na meta como mencionado na Seção 2.6 (ver também [60]). Mais, os cross-cap parabólicos aparecem naturalmente na transição de um cross-cap elíptico para um hiperbólico. Neste capítulo, faremos algumas observações sobre fenômenos que podem acontecer no cross-cap parabólico.

Proposição 6.6 ([47, 48]). *A equação das curvas assintóticas no domínio de uma parametrização de um cross-cap parabólico é topologicamente equivalente a*

$$ydy^2 - 2xdxdy + y^2dx^2 = 0 \quad (\text{Figura 41}). \quad (6.8)$$

O tipo topológico é completamente determinado pelo 3-jato da parametrização da superfície.

Figura 41 – Configurações das linhas assintóticas no domínio de uma parametrização de um cross-cap parabólico.

É mostrado em [47, 48] que considerando a família a um parâmetro de cross-cap, cujo parâmetro “ a ” determina o tipo de cross-cap na classificação por isometrias, sobre o conjunto pre-parabólico ocorre uma transição de cúspide e a configuração local das linhas assintóticas são topologicamente como na Figura 42.

Figura 42 – Transição de cúspide no conjunto pre-parabólico e configurações locais das linhas assintóticas. Esquerda (cross-cap hiperbólico), centro (cross-cap parabólico) e direita (cross-cap elíptico).

6.4 Transformada de Legendre de uma EDB

No que segue, vamos aplicar a transformada de Legendre a uma EDB. A transformada de Legendre em $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$X = p, \quad Y = xp - y, \quad P = x, \quad (6.9)$$

e foi estudada em [7, 15]. A transformada de Legendre de uma EDI é uma outra EDI, mas em geral, a transformada de Legendre de uma EDB não é uma EDB. As curvas integrais da transformada de Legendre de uma EDI são duais àsquelas da EDI original (ver [7]).

Aplicamos a transformada de Legendre à superfície $\mathbb{M}$ para obter uma nova superfície em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\{(X, Y, P) : G(X, Y, P) = F(P, XP - Y, X) = 0\}. \quad (6.10)$$

Se $G_P \neq 0$ em um ponto (X_0, Y_0, P_0) correspondente a (x_0, y_0, p_0) , podemos escrever a equação diferencial $G = 0$ na forma $Y' = \frac{dY}{dX} = h(X, Y)$, e resolvê-la usando os métodos das EDO's, para obter a solução local procurada da equação original em (x_0, y_0, p_0) na forma parametrizada (ver [7])

$$(x, y) = (Y', XY' - Y).$$

Voltamos a nossa atenção à relação de dualidade que existe entre as soluções de uma EDB e as soluções da EDI dada pela transformada de Legendre. De fato, é bem conhecido que o dual de inflexões são cúspides (ver Figura 43).

Figura 43 – Família de curvas com inflexão dualiza em família de curvas com cúspide.

Em [7, 15] é usado dualidade para estudar as inflexões que acontecem nas soluções das EDB's.

Consideremos então G como na equação (6.10) e escrevemos $P = Y'$. Desta forma, derivando G com respeito a X temos

$$G_X = F_x Y'' + F_y (Y' + XY'' - Y') + F_p = Y''(F_x + XF_y) + F_p = 0,$$

assim quando $(F_x + XF_y) \neq 0$, $Y'' = 0$ se, e somente se $F_p = 0$. Para ter uma inflexão ordinária precisamos que $Y''' \neq 0$. Nestas condições calculamos a segunda derivada parcial de G em X

$$G_{XX} = Y'''(F_x + XF_y) + F_{pp} = 0,$$

o que mostra que um ponto de inflexão da curva $(X, Y(X))$ acontece se $F = F_p = 0$ e $F_{pp} \neq 0$. De fato, o conjunto definido pelas equações $F = F_p = 0$ corresponde ao conjunto singular da projeção $\pi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Assim, o problema de estudar as inflexões das

soluções da EDB inicial se converte em estudar o discriminante da respectiva projeção da superfície $G^{-1}(0)$. O Teorema 6.8 (i) verifica a afirmação anterior e se converte na ferramenta principal deste capítulo para estudar as inflexões das curvas mencionadas.

Observação 6.7. *Nas demonstrações dos resultados a seguir, de forma análoga como mostrado acima, vamos procurar as cúspides da transformada de Legendre da G para obtermos as inflexões da F .*

Teorema 6.8 ([7]). *Suponha que $F_x + pF_y \neq 0$.*

- (i) *Se $F_p = 0, F_{pp} \neq 0$ em (x_0, y_0, p_0) , então as curvas integrais perto de (x_0, y_0) são todas difeomorfas a cúspides.*
- (ii) *Se $F_p = F_{pp} = 0, F_{ppp} \neq 0, F_x F_{yp} - F_y F_{xp} \neq 0$ em (x_0, y_0, p_0) , então a família de curvas integrais perto de (x_0, y_0) é obtida como seções da projeção canônica da superfície rabo de andorinha (ver Figuras 44 e 45), com as cúspide ao longo do contorno aparente de $F^{-1}(0)$.*

Figura 44 – Rabo de andorinha.

Figura 45 – Transição do rabo de andorinha.

6.5 Inflexões nas soluções das EDB's sobre o cross-cap

Apresentamos agora os resultados principais deste capítulo. Começamos com os pontos de inflexão geodésica das linhas assintóticas.

Teorema 6.9. *Considere um cross-cap geométrico.*

- (i) *No cross-cap hiperbólico ($a < 0$) as linhas assintóticas não possuem inflexões perto do ponto de cross-cap.*
- (ii) *No cross-cap elíptico ($a > 0$) as linhas assintóticas possuem inflexões ao longo de duas curvas regulares as quais são tangentes às curvas parabólicas no ponto de cross-cap.*

Demonstração. Consideremos a parametrização do cross-cap como em (2.10) e a EDB que define as linhas assintóticas, isto é

$$Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2 = 0, \quad (6.11)$$

onde

$$\begin{aligned} L &= 2ax + 6q_{30}x^2 + 2q_{31}xy + 6ap_3y^2 + O(3), \\ M &= -2y + q_{31}x^2 + 3(bp_3 - q_{33})y^2 + O(3), \\ N &= 2x + 2q_{32}x^2 - 6(bp_3 - q_{33})xy - 6p_3y^2 + O(3). \end{aligned}$$

Vamos considerar $F(x, y, p) = L + 2Mp + Np^2 = 0$ com $p = \frac{dy}{dx}$ (a carta $q = \frac{dx}{dy}$ não fornece informações novas). O conjunto das inflexões das soluções da equação (6.11) é determinado pelas equações $G = G_P = 0$ e $G_{PP} \neq 0$, onde G corresponde à transformada de Legendre da F . Consideremos a aplicação $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H(x, y, p) = (F(x, y, p), F_x(x, y, p) + pF_y(x, y, p)).$$

Vamos mostrar que $(0, 0)$ é valor regular da H . Note que $H(0, 0, p) = (0, 2(-p^2 + a))$, logo vamos estudar o conjunto $H^{-1}(0, 0)$ perto dos pontos definidos por $a - p^2 = 0$. Se $a < 0$ então $a - p^2 \neq 0$ e isso prova o caso (i).

Se $a > 0$, $a - p^2 = 0$ se, e somente se, $p = \pm\sqrt{a}$; isto é, o conjunto $H^{-1}(0, 0)$ encontra ao eixo p nos pontos $(0, 0, \pm\sqrt{a})$. Vamos então calcular a tangente a $H^{-1}(0, 0)$ nos pontos $(0, 0, \pm\sqrt{a})$ e a suas respectivas projecções ao plano xy . Segue que

$$dH_{(0,0,\pm\sqrt{a})} = \begin{bmatrix} 4a & \mp 4\sqrt{a} & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \mp 4\sqrt{a} \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \pm 6(-bp_3 + q_{33})a\sqrt{a} + 4q_{32}a \pm 6q_{31}\sqrt{a} + 12q_{30}, \\ \alpha_2 &= \mp 12p_3a\sqrt{a} + 6(bp_3 - q_{33})a \pm 12p_3a\sqrt{a} + 2q_{31}. \end{aligned}$$

Portanto, o tangente a $H^{-1}(0, 0)$ nos pontos $(0, 0, \pm\sqrt{a})$ é dado por

$$\left(1, \pm\sqrt{a}, \pm q_{32}\sqrt{a} + 2q_{31} \pm 3q_{30} \frac{\sqrt{a}}{a} \right),$$

com projeção no plano xy dada por $(1, \pm\sqrt{a})$, as quais são tangentes ao conjunto pré-parabólico. Note que as curvas são transversais ao eixo y na fonte, portanto a suas respectivas imagens são curvas regulares sobre o cross-cap e são tangentes ao conjunto parabólico.

Finalmente, temos que $G_{PP}(0, 0, \pm\sqrt{a}) \neq 0$. Então pelo Teorema 6.8 podemos concluir que existem duas curvas flecnodais tangentes ao conjunto parabólico. $\square$

Observação 6.10. Em [60] é provado que a projeção ortogonal de um cross-cap geométrico na direção tangente (definida na Seção 2.6) tem uma singularidade $\mathcal{A}$ -equivalente a uma das seguintes

$$\begin{cases} (x^2 + y^3, y^2 + x^3) & \text{se o cross-cap é elíptico (Sharksfin),} \\ (xy, x^2 - y^2 + y^3) & \text{se o cross-cap é parabólico (Deltoide).} \end{cases}$$

O germe Deltoide não possui órbitas adjacentes de $\mathcal{A}$ -codimensão 1 ([27]). Para o germe Sharksfin, devido às dificuldades nas contas, não foi obtido em [27] a adjacência da órbita de rabo de andorinha. No entanto, em [64] é considerada uma forma normal conveniente do Sharksfin, e através dela foi estudada a estrutura local do conjunto dos pontos de rabo de andorinha (conjunto flecnodal). O Teorema 6.9 apresenta uma demonstração alternativa da existência do conjunto flecnodal e da sua estrutura local usando a transformada de Legendre da equação das linhas assintóticas.

O discriminante da EDB das linhas assintóticas no cross-cap parabólico ($a = 0$) tem singularidade A_2 . É natural se perguntar sobre a estrutura local do conjunto flecnodal do cross-cap parabólico e da sua bifurcação quando a varia perto de zero, ou seja, na transição dos cross-caps elípticos para os cross-caps hiperbólicos. Este é um problema que fica proposto para pesquisar no futuro.

Porém gostaríamos de fazer a seguinte observação.

Observação 6.11. Considere a parametrização do cross-cap parabólico como em (2.10) (com $a = 0$). Os coeficientes da EDB das linhas assintóticas

$$Ldx^2 + 2Mdx dy + Ndy^2 = 0, \quad (6.12)$$

são dados por

$$\begin{aligned} L &= 6q_{30}x^2 + 2q_{31}xy + O(3), \\ M &= -2y + q_{31}x^2 + 3(bp_3 - q_{33})y^2 + O(3), \\ N &= 2x + 2q_{32}x^2 + 6(-bp_3 + q_{33})xy - 6p_3y^2 + O(3). \end{aligned}$$

Seja $F(x, y, p) = L + 2Mp + Np^2$ com $p = \frac{dy}{dx}$ (a carta $q = \frac{dx}{dy}$ não fornece informações novas). O discriminante da F tem singularidade do tipo A_2 na origem ([46, 47, 48]).

Consideramos o germe aplicação $H : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ dada por

$$H(x, y, p) = (F(x, y, p), F_x(x, y, p) + pF_y(x, y, p)),$$

onde $F(x, y, p) = 6q_{30}x^2 + 2q_{31}xy - 4yp + O(3)$ com $\det(d^2F_{(0,0,0)}) = -192q_{30}$ e $(F_x + pF_y)(x, y, p) = 12q_{30}x + 2q_{31}y + O(2)$. Assim, F tem sempre uma singularidade de Morse na origem e $F_x + pF_y$ é uma submersão na origem. Uma conta direta mostra que H é 2- $\mathcal{K}$ -determinado e é $\mathcal{K}$ -equivalente à $(x, y^2 - yp)$. Logo $H^{-1}(0, 0)$ consiste em duas curvas regulares e transversais. Para obter o 1-jato das projeções destas curvas ao plano xy consideramos o resultante em p de j^2F e $j^2(F_x + pF_y)$ dado por

$$R(x, y) = 192q_{30}xy^2 + 32q_{31}y^3 - 72q_{30}^2x^4 + 96q_{30}q_{31}x^3y + 40q_{31}^2x^2y^2.$$

Como $q_{30} \neq 0$ podemos fazer uma mudança de coordenadas linear $(x, y) = (x - q_{31}/6q_{30}y, y)$ para mostrar que

$$R \sim_{\mathcal{R}} xy^2 + x^4,$$

isto é, R tem uma singularidade D_5 na origem. Portanto, o conjunto $R^{-1}(0)$ é difeomorfo ao conjunto apresentado na Figura 46.

Figura 46 – Possível configuração do conjunto flecnodal (linhas tracejadas) do cross-cap parabólico. A cúspide em linha contínua é a curva parabólica.

Consideramos agora as linhas de curvatura.

Teorema 6.12. *Genericamente, um cross-cap geométrico possui duas, quatro ou seis curvas sub-parabólicas.*

Demonstração. Considere a EBD das linhas de curvatura

$$(EM - FL)dx^2 + (EN - GL)dxdy + (FN - GM)dy^2 = 0. \quad (6.13)$$

Foi mostrado em [58] que o discriminante desta EDB do cross-cap genericamente tem singularidade na origem do tipo A_3^+ . Temos

$$\begin{aligned} EM - FL &= -2y + q_{31}x^2 + 3(bp_3 - q_{33})y^2 + 2(-2a^2b + q_{41})x^3 + \\ &+ 2(q_{42} - 4a^2 - a(b^2 + 4a + 1))x^2y + 6(-2ab + p_3q_{31})xy^2 + \\ &+ 2(-b^2 + 3p_3q_{32} - 2q_{44} - 1)y^3 + O(4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EN - GL &= 2x + 2q_{32}x^2 + 6(-bp_3 + q_{33})xy - 6p_3y^2 + 2(q_{42} + 4a^2 - a(b^2 + 1))x^3 + \\ &+ 6(-p_3q_{31} + q_{43})x^2y + 2(b^2 - 3p_3q_{32} - 4a + 6q_{44} + 1)xy^2 + O(4), \end{aligned}$$

$$FN - GM = 4abx^3 + 4(b^2 + 2a + 1)x^2y + 12bxy^2 + 8y^3 + O(4).$$

Seja

$$\bar{F}(x, y, q) = (EM - FL)q^2 + (EN - GL)q + (FN - GM),$$

a equação (6.13) na carta $q = \frac{dx}{dy}$ (a carta $p = \frac{dy}{dx}$ não fornece informações adicionais). Note que $\bar{F}(0, 0, q) = (q\bar{F}_x + \bar{F}_y)(0, 0, q) = 0$, então vamos a estudar o conjunto $\bar{F} = q\bar{F}_x + \bar{F}_y = 0$ ao longo do eixo q . (Uma observação pertinente é que na análise das EDB's Morse Tipo 2 ([10, 14]), $(qF_x + F_y)(0, 0, q)$ é uma cúbica em q , cujas raízes são as singularidades do campo ξ ; em nosso caso, ξ é singular ao longo de todo o eixo q). Como

$$\bar{F}(x, y, q) = (-2y + O_2(x, y))q^2 + (2x + O_2(x, y))q + O_3(x, y),$$

e

$$\begin{aligned} q\bar{F}_x + \bar{F}_y &= (2q_{31}x + O_2(x, y))q^3 + (4q_{32}x + O_2(x, y))q^2 + \\ &+ (-6(bp_3 - q_{33})x - 12p_3y + O_2(x, y))q + O_2(x, y), \end{aligned}$$

temos que quando $q \neq 0$ (precisamos $p_3 \neq 0$), ao longo de eixo q os conjuntos $\bar{F}^{-1}(0)$ e $(q\bar{F}_x + \bar{F}_y)^{-1}(0)$ são superfícies regulares. Consideramos então os vetores normais às superfícies ao longo do eixo q dados por

$$\nabla \bar{F}(0, 0, q) = (2q, -2q^2, 0),$$

$$\nabla (q\bar{F}_x + \bar{F}_y)(0, 0, q) = (2q_{31}q^3 + 4q_{32}q^2 - 6(bp_3 - q_{33})q, -12p_3q, 0).$$

Estes são linearmente dependentes se, e somente se,

$$-q_{31}q^3 - 2q_{32}q^2 + 3(bp_3 - q_{33})q + 6p_3 = 0. \quad (6.14)$$

O discriminante do polinômio na variável q em (6.14) é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= 108b^3p_3^3q_{31} + (-972q_{31}^2 - 324b(bq_{33} - 2q_{32})q_{31} + 36b^2q_{32}^2)p_3^2 + \\ &+ (324q_{33}(bq_{33} - 2q_{32})q_{31} - 72bq_{32}^2q_{33} + 192q_{32}^3)p_3 - 108q_{31}q_{33}^3 + 36q_{32}^2q_{33}^2. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Genericamente $\bar{\Delta} \neq 0$, logo (6.14) possui uma ou três raízes.

Assim, ao longo do eixo q , para $q \neq 0$ as superfícies se intersectam transversalmente exceto no pontos $(0, 0, q_i)$, onde q_i é uma solução da equação (6.14).

Vamos agora estudar a interseção das superfícies em uma vizinhança de $(0, 0, q_i)$. Como $\bar{F}_x(0, 0, q) \neq 0$, pelo Teorema da função implícita podemos parametrizar localmente $\bar{F}^{-1}(0)$ como $(x, y, q) \mapsto (x(y, q), y, q)$, onde

$$x(y, q) = q_i y + (3(bp_3 - q_{33})q_i + 2)y(q - q_i) + O(3). \quad (6.16)$$

Consideramos uma expansão de Taylor de $q\bar{F}_x + \bar{F}_y$ centrada em $(0, 0, q_i)$ e substituindo (6.16) obtemos

$$(q\bar{F}_x + \bar{F}_y)(x(y, q), y, q) = \Gamma_{21}(q_i)y(q - q_i) + \Gamma_{22}(q_i)y^2 + O(3),$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}(q_i) &= (6q_{31}(bp_3 - q_{33})q_i^4 + (12q_{32}(bp_3 - q_{33}) + 10q_{31})q_i^3 + \\ &\quad + (-18(bp_3 - q_{33})^2 + 16q_{32})q_i^2 - 18(bp_3 - q_{33})q_i - 12p_3, \\ \Gamma_{22}(q_i) &= -q_{31}^2q_i^6 + (-12a^2b - 4q_{31}q_{32} + 6q_{41})q_i^5 + \\ &\quad + (-12ab^2 + 6q_{31}(bp_3 - q_{33}) - 12a(2a - 1) - 4q_{32}^2 + 12q_{42})q_i^4 + \\ &\quad + (12q_{32}(bp_3 - q_{33}) - 24ab + 6p_3q_{31} + 18q_{43})q_i^3 + \\ &\quad + (-9(bp_3 - q_{33})^2 + 12b^2 + 12p_3q_{32} + 24q_{44} + 12)q_i^2 + \\ &\quad + (-18p_3(bp_3 - q_{33}) + 36b)q_i + 24. \end{aligned}$$

Genericamente $\Gamma_{21}(q_i) \neq 0$ e $\Gamma_{22}(q_i) \neq 0$, o que é suficiente para concluir que a função $(q\bar{F}_x + \bar{F}_y)(x(y, q), y, q)$ tem uma singularidade Morse (A_1^-) em $(0, 0, q_i)$. Logo, em $(0, 0, q_i)$, as duas superfícies se intersectam ao longo de duas curvas regulares, uma delas sendo a fibra $(0, 0, q)$. A projeção da outra curva no plano xy tem vetor tangente paralelo a $(q_i, 1)$.

Vamos considerar agora as duas superfícies em $q = 0$.

Temos que

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, q) &= (-2y + O_2(x, y))q^2 + (2x + O_2(x, y))q + \\ &\quad + 4abx^3 + 4(b^2 + 2a + 1)x^2y + 12bxy^2 + 8y^3 + O_4(x, y), \end{aligned}$$

logo $\bar{F}$ tem uma singularidade A_2 na origem sempre. Também temos que

$$\begin{aligned} q\bar{F}_x + \bar{F}_y &= (2q_{31}x + O_2(x, y))q^3 + (4q_{32}x + O_2(x, y))q^2 + \\ &\quad + (-6(bp_3 - q_{33})x - 12p_3y + O_2(x, y))q + \\ &\quad + 4(b^2 + 2a + 1)x^2 + 24bxy + 24y^2 + O_3(x, y), \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\det \left(d^2 \left(q\bar{F}_x + \bar{F}_y \right)_{(0,0,0)} \right) = 576 \left((b^2 - 4a - 2)p_3^2 - 3q_{33}^2 \right).$$

Logo $q\bar{F}_x + \bar{F}_y$ tem uma singularidade Morse na origem se, e somente se

$$(b^2 - 4a - 2)p_3^2 - 3q_{33}^2 \neq 0, \quad (6.17)$$

o qual ocorre genericamente. Consideremos o germe da aplicação $H : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ dada por

$$H(x, y, p) = \left(\bar{F}, q\bar{F}_x + \bar{F}_y \right) (x, y, p).$$

Usando o germe de difeomorfismo na fonte $\varphi(x, y, q) = \left(x, y - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{4}p_3q \right)$ e o germe de difeomorfismo na meta $h_1(U, V) = \left(\frac{1}{2}U, V - 3q_{33}U \right)$, temos que

$$j^2 H \sim_{\mathcal{K}(2)} A = \left(xq, 2(-b^2 + 4a + 2)x^2 + 24y^2 - \frac{3}{2}p_3^2q^2 \right).$$

Vamos mostrar que o germe A é $2\mathcal{K}$ -determinado. Para isto devemos verificar que

$$\mathcal{M}_3^2 \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{K} \cdot A + \mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Temos que

$$A_x = \left(q, 4(-b^2 + 4a + 2)x \right), \quad A_y = (0, 48y), \quad A_q = \left(x, -3p_3^2q \right),$$

$$A_1 = xq \quad \text{e} \quad A_2 = 2(-b^2 + 4a + 2)x^2 + 24y^2 - \frac{3}{2}p_3^2q^2.$$

Segue que $(0, y\eta_2(x, y, q)) \in T\mathcal{K} \cdot A + \mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2}$, onde $\eta_2(x, y, q)$ é um polinômio homogêneo de grau 2. Também

$$(x^2q, 0), (xyq, 0), (xq^2, 0), (0, x^2q), (0, xq^2) \in T\mathcal{K} \cdot A + \mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Considerando $x^2A_x - (xq^2, 0) = (0, 4(-b^2 + 4a + 2)x^3)$ e $q^2A_q - (xq^2, 0) = (0, -3p_3^2q^3)$, temos que

$$(0, x^3), (0, q^3) \in T\mathcal{K} \cdot A + \mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2}$$

se, e somente se, $-b^2 + 4a + 2 \neq 0$ e $p_3 \neq 0$, o que completa os elementos da forma $(0, \eta_3(x, y, q))$ onde $\eta_3(x, y, q)$ é um polinômio homogêneo de grau 3.

Agora, com $\eta_2(x, y, q)A_x$, $\eta_2(x, y, q)A_q$ e $(A_2, 0)$ completamos os elementos da forma $(\eta_3(x, y, q), 0)$. Segue que o germe A é $2\mathcal{K}$ -determinado se, e somente se, $-b^2 + 4a + 2 \neq 0$ e $p_3 \neq 0$. Neste caso, o germe H também é $2\mathcal{K}$ -determinado. Então, o conjunto $H^{-1}(0, 0)$ é difeomorfo ao conjunto $A^{-1}(0, 0)$. Portanto, o conjunto $H^{-1}(0, 0)$ consiste localmente em duas ou 4 curvas regulares, cujas retas tangentes são dadas por

$$x = 0 \quad \text{e} \quad -12y(p_3q - 2y) = 0 \quad (6.18)$$

e

$$q = 0 \quad \text{e} \quad 4 \left((b^2 + 2a + 1)x^2 + 6bxy + 6y^2 \right) = 0. \quad (6.19)$$

De (6.19) obtemos genericamente duas curvas ou nenhuma. Denotamos o discriminante do polinômio homogêneo de grau 2 em (6.19) por $\Delta = 12(b^2 - 4a - 2)$. O conjunto $\Delta = 0$ determina duas regiões no plano ab , as quais são dadas na Figura 47.

Figura 47 – Estratificação do plano ab com a informação sobre as raízes do polinômio em (6.19). Na região (i) (6.19) define duas direções e na região (ii) nenhuma.

A projeção das soluções de (6.18) no plano xy são a origem para $y = 0$ e para $p_3q - 2y = 0$ corresponde uma curva sub-parabólica com vetor tangente ao longo de $(0, 1)$.

Então pelo Teorema 6.8 podemos concluir que existem duas, quatro ou seis curvas sub-parabólicas. $\square$

CLASSIFICAÇÃO DE SINGULARIDADES DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS DO CROSS-CAP

Dedicamos este Apêndice para dar uma demonstração do Teorema 4.9. O estudo de projeções ortogonais do cross-cap (Capítulo 4) está baseado neste resultado e decidimos dar uma prova completa, mostrando os cálculos necessários para obter a classificação. Usaremos a notação e resultados do Capítulo 4.

A ideia da prova consiste em encontrar uma lista completa dos $(k + 1)$ -jatos com um k -jato dado, usando a ação do grupo $\mathcal{A}(X)$ e as correspondentes versões do Lema de Mather (Lema 2.22), Transversal completa (Teorema 2.23) e critério de determinação finita (Corolário 4.7).

Ao longo deste Apêndice denotaremos a $\mathcal{A}(X)$ -equivalência por “ $\sim$ ”.

A.1 Demonstração do Teorema 4.9

Consideremos

$$f(u, v, w) = (f_1(u, v, w), f_2(u, v, w))$$

um germe de uma submersão, onde os $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são germes de submersões. Foi mostrado em [16, 60] que, se $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de uma submersão, então

$$j^1g \sim_{\mathcal{R}(X)} \text{ (a um dos seguintes germes) } \begin{cases} u, \\ v, \\ w, \\ u + w. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Consideramos então cada um dos germes em (A.1) no lugar de f_1 .

A.1.1 Os 1-jatos

Seja $f(u, v, w) = (u, \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)$ e $h(x, y) = (x, y - \alpha_1 x)$, então

$$h \circ f(u, v, w) = (u, \alpha_2 v + \alpha_3 w) \quad \text{logo} \quad f \sim (u, \alpha_2 v + \alpha_3 w).$$

Assim, como f é uma submersão, ou $\alpha_2 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$. Segue que

$$(u, \alpha_2 v + \alpha_3 w) \sim \begin{cases} (u, w), & \text{se } \alpha_3 \neq 0, \\ (u, v), & \text{se } \alpha_3 = 0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

o que completa este primeiro caso.

Seja agora $f(u, v, w) = (v, \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)$ e $h_1(x, y) = (x, y - \alpha_2 x)$, então

$$h_1 \circ f(u, v, w) = (v, \alpha_1 u + \alpha_3 w) \quad \text{logo} \quad f \sim (v, \alpha_1 u + \alpha_3 w).$$

De novo, como f é uma submersão, ou $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_3 \neq 0$. Suponha $\alpha_1 \neq 0$ e $h_2(x, y) = (x, \frac{1}{\alpha_1} y)$, então

$$h_2 \circ f \circ \varphi_2(u, v, w) = (e^\mu v, u + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e^{2\mu} w) \Rightarrow f \sim (e^\mu v, u + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} e^{2\mu} w).$$

Considerando $h_3(x, y) = (e^{-\mu} x, y)$ segue que

$$(v, \alpha_1 u + \alpha_3 w) \sim \begin{cases} (v, u + \varepsilon w), & \text{se } \alpha_3 \neq 0 \text{ e } \mu = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|, \\ (v, u), & \text{se } \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$. Note que se $g(u, v, w) = (v, u - w)$ e $h_4(x, y) = (x, -y)$, temos que

$$h_4 \circ g \circ \varphi_5(u, v, w) = (v, u + w).$$

Assim,

$$(v, \alpha_1 u + \alpha_3 w) \sim \begin{cases} (v, u + w), & \text{se } \alpha_3 \neq 0 \text{ e } \mu = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right|, \\ (v, u), & \text{se } \alpha_3 = 0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Para $f(u, v, w) = (w, \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)$ e $h_1(x, y) = (x, y - \alpha_3 x)$, temos

$$h_1 \circ f(u, v, w) = (w, \alpha_1 u + \alpha_2 v), \quad \text{logo} \quad f \sim (w, \alpha_1 u + \alpha_2 v).$$

Como f é uma submersão, ou $\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$ e segue que

$$(w, \alpha_1 u + \alpha_2 v) \sim \begin{cases} (w, u), & \text{se } \alpha_1 \neq 0, h_2(x, y) = (x, \frac{1}{\alpha_1} y) \text{ e } \gamma = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \text{ em } \varphi_4, \\ (w, v), & \text{se } \alpha_1 = 0 \text{ e compondo com } h_3(x, y) = (x, \frac{1}{\alpha_2} y). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, tomamos $f(u, v, w) = (u + w, \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w)$ e $h(x, y) = (x, y - \alpha_1 x)$. Assim,

$$h \circ f(u, v, w) = (u + w, \alpha_2 v + (\alpha_3 - \alpha_1)w), \quad \text{logo } f \sim (u + w, \alpha_2 v + (\alpha_3 - \alpha_1)w).$$

Segue que

$$(u + w, \alpha_2 v + (\alpha_3 - \alpha_1)w) \sim \begin{cases} (u + w, v), & \text{se } \alpha_3 - \alpha_1 = 0, \\ (u, w), & \text{se } \alpha_3 - \alpha_1 \neq 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Temos que o 1-jato de um germe de submersão é $\mathcal{A}(X)$ -equivalente a um dos seguintes,

- (i) (u, w) ,
- (ii) $(u + w, v)$,
- (iii) (v, w) ,
- (iv) (u, v) .

Vamos mostrar agora que os germes (i) e (ii) são 1-determinados, o (i) é estável e o (ii) tem $\mathcal{A}(X)$ -cod= 1.

Seja $f_1 = (u, w)$, então pela Proposição 4.2, o $T\mathcal{R}(X) \cdot f_1$ é gerado por

- $\xi_1 f_1 = u \frac{\partial}{\partial u} f_1 + v \frac{\partial}{\partial v} f_1 = (u, 0)$,
- $\xi_2 f_1 = v \frac{\partial}{\partial v} f_1 + 2w \frac{\partial}{\partial w} f_1 = (0, 2w)$,
- $\xi_3 f_1 = u^2 \frac{\partial}{\partial v} f_1 + 2v \frac{\partial}{\partial w} f_1 = (0, 2v)$,
- $\xi_4 f_1 = v \frac{\partial}{\partial u} f_1 + uw \frac{\partial}{\partial v} f_1 = (v, 0)$.

Assim, o $\mathcal{E}_3$ -módulo $T\mathcal{R}(X) \cdot f_1 = \mathcal{E}_3 \{(u, 0), (0, w), (0, v), (v, 0)\}$ e o $\mathcal{E}_3$ -módulo $T\mathcal{C} \cdot f_1 = \mathcal{E}_3 \{(u, 0), (0, w), (w, 0), (0, u)\}$. Logo, $\mathcal{M}_3 \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{K}(X) \cdot f_1 + \mathcal{M}_3^2 \mathcal{E}_{3,2}$. Segue que

$$T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_1 = \mathcal{E}_3 \left\{ \begin{pmatrix} (u^2, 0), & (0, v^2), \\ (uv, 0), & (0, uv), \\ (uw, 0), & (0, vw), \\ (v^2, 0), & (0, uw), \\ (vw, 0), & (0, w^2), \end{pmatrix} \right\} + T\mathcal{L}_1 \cdot f_1,$$

e assim $\mathcal{M}_3^2\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_1 + \mathcal{M}_3^3\mathcal{E}_{3,2}$. Pelo Corolário 4.7 temos que f_1 é 1- $\mathcal{A}(X)$ -determinado e além disso satisfaz $T\mathcal{A}(X) \cdot f_1 = \mathcal{M}_3\mathcal{E}_{3,2}$, logo a $\mathcal{A}(X)$ -cod(f_1) = 0 e o germe é estável.

Seja agora $f_2 = (u + w, v)$, então o $T\mathcal{R}(X) \cdot f_2$ é gerado por

- $\xi_1 f_2 = (u, v)$,
- $\xi_2 f_2 = (2w, v)$,
- $\xi_3 f_2 = (2v, u^2)$,
- $\xi_4 f_2 = (v, uw)$.

Vamos mostrar inicialmente que f_2 é 2- $\mathcal{A}(X)$ -determinado e posteriormente usaremos a transversal completa para concluir que é 1- $\mathcal{A}(X)$ -determinado. Note que $\mathcal{M}_3^2\mathcal{E}_{3,2} \subset TK(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^3\mathcal{E}_{3,2}$, então é necessário verificar que

$$\mathcal{M}_3^3\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2},$$

para através do Corolário 4.7 concluir a primeira parte. Começamos mostrando que

$$\mathcal{M}_3^4\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2}.$$

Para estas contas vamos a usar a seguinte convenção: seja $\eta_i \in H^i(3, 1)$, onde $H^i(3, 1)$ é o conjunto de polinômios a valor real homogêneos de grau i de três variáveis. Então para um polinômio $p(u, v, w)$ denotamos

$$p(u, v, w) \cdot \eta_i = \left\{ p(u, v, w) \cdot h^i(u, v, w) \mid h^i(u, v, w) \in H^i(3, 1) \right\}.$$

Note que à esquerda $\{(v \cdot \eta_3, 0), ((u - 2w) \cdot \eta_3, 0), ((u + w)^4, 0)\} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2}$. Logo, para a escolha de $\eta_3 \in \{u^3, u^2w, uw^2, w^3\}$ temos os seguintes germes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^4 + 4u^3w + 6u^2w^2 + 4uw^3 + w^4, 0), \\ (u^4 - 2u^3w, 0), \\ (u^3w - 2u^2w^2, 0), \\ (u^2w^2 - 2uw^3, 0), \\ (uw^3 - 2w^4, 0), \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{induz a matriz}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\det=81 \neq 0}.$$

Assim, à esquerda temos todos os monômios, isto é, todos os elementos da forma $(\eta_4, 0)$. À direita temos $\{(0, v \cdot \eta_3), (0, (u^2 - 2uw) \cdot \eta_2), (0, (u + w)^4)\} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2}$. Então, para a escolha em $\eta_2 \in \{u^2, uw, w^2\}$ temos os seguintes germes

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, u^4 + 4u^3w + 6u^2w^2 + 4uw^3 + w^4), \\ (0, u^4 - 2u^3w), \\ (0, u^3w - 2u^2w^2), \\ (0, u^2w^2 - 2uw^3), \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{induz}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Como a matriz em (A.6) não é quadrada, é necessário eliminar pelo menos uma variável para assim usar o critério do determinante. Consideremos então a seguinte expressão,

$$v \cdot \xi_1 f_2 - u \cdot \xi_4 f_2 = (0, v^2 - u^2 w) \quad \text{e multiplicando por} \quad \begin{cases} u & \rightarrow (0, uv^2 - u^3 w), \\ w & \rightarrow (0, v^2 w - u^2 w^2). \end{cases}$$

Temos também os seguintes germes

$$\left\{ \begin{array}{l} (0, (u+w)v^2) = (0, uv^2 + v^2 w) \\ 2w \cdot \xi_1 f_2 - u \cdot \xi_2 f_2 = (0, -uv^2 + 2v^2 w) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{induz}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\det=1 \neq 0}.$$

Logo $\{(0, uv^2), (0, v^2 w), (0, u^3 w), (0, u^2 w^2)\} \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5 \mathcal{E}_{3,2}$ e substituindo em (A.6) temos que $\{(0, u^4), (0, uw^3), (0, w^4)\} \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5 \mathcal{E}_{3,2}$. Isto completa os termos da direita, assim

$$\mathcal{M}_3^4 \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^5 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Vamos ver agora que

$$\mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^4 \mathcal{E}_{3,2}.$$

É fácil ver que a esquerda $\{(v \cdot \eta_2, 0), ((u-2w) \cdot \eta_2, 0), ((u+w)^3, 0)\} \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^4 \mathcal{E}_{3,2}$. Para a escolha de $\eta_2 \in \{u^2, uw, w^2\}$ temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^3 + 3u^2 w + 3uw^2 + w^3, 0), \\ (u^3 - 2u^2 w, 0) \\ (u^2 w - 2uw^2, 0), \\ (uw^2 - 2w^3, 0), \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{induz}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\det=-27 \neq 0},$$

o que completa os elementos à esquerda. À direita temos que

$$\{(0, v \cdot \eta_2), (0, (u+w)^3), (0, (u^2 - 2uw) \cdot \eta_1)\} \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^4 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Como $u \cdot \xi_3 f_2 - 2v \cdot \xi_1 f_2 + 2(0, v^2) \sim (0, u^3)$, então

$$\{(0, uw^2), (0, u^2 w), (0, w^3)\} \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2 + \mathcal{M}_3^4 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Isto completa os elementos à direita, assim, pelo Corolário 4.7 f_2 é $2\text{-}\mathcal{A}(X)$ -determinado.

Vamos a calcular a 2-transversal completa de f_2 , isto é, achar um subespaço W_2 tal que

$$H^2(3, 2) = J^2(T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2) \cap H^2(3, 2) + W_2.$$

Na esquerda temos $\{(v \cdot \eta_1, 0), ((u-2w) \cdot \eta_1, 0), ((u+w)^2, 0)\} \subset J^2(T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2) \cap H^2(3, 2)$, logo para $\eta_1 \in \{u, w\}$ temos os seguintes germes

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^2 + 2uw + w^2, 0), \\ (u^2 - 2uw, 0) \\ (uw - 2w^2, 0), \\ (uw^2 - 2w^3, 0), \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{induz}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\det=9 \neq 0},$$

e assim $\{(u^2, 0), (uw, 0), (w^2, 0)\} \in J^2(T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2) \cap H^2(3, 2)$. Agora na direita temos que

$$\{(0, v \cdot \eta_1), (0, u^2 - 2uw), (0, (u + w)^2)\} \in J^2(T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2) \cap H^2(3, 2)$$

e

$$\{(0, u^2), (0, uw), (0, w^2)\} \notin J^2(T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_2) \cap H^2(3, 2).$$

Temos que os elementos $(0, u^2), (0, uw), (0, w^2)$ são linearmente dependentes e o subespaço W_2 é um deles. É fácil ver que $(0, u^2), (0, uw), (0, w^2) \in T\mathcal{A}(X) \cdot f_2$. Logo pelo Teorema 2.23 temos que

$$j^2 f_2 \sim (u + w, v),$$

e então f_2 é 1- $\mathcal{A}(X)$ -determinado. Note que, $(u, 0), (w, 0) \notin T\mathcal{A}(X) \cdot f_2$, mas $(u + w, 0) \in T\mathcal{A}(X) \cdot f_2$, logo $\mathcal{A}(X)\text{-cod}(f_2) = 1$.

A.1.2 Os 2-jatos

Consideramos agora os germes $f_3 = (v, w)$ e $f_4 = (u, v)$, os quais não são 1- $\mathcal{A}(X)$ -determinados.

Para f_3 temos que $T\mathcal{R}(X) \cdot f_3$ é gerado por

- $\xi_1 f_3 = (v, 0),$
- $\xi_2 f_3 = (v, 2w),$
- $\xi_3 f_3 = (u^2, 2v),$
- $\xi_4 f_3 = (uw, 0).$

Estamos interessados na 2-transversal completa de f_3 , a qual é dada por $W_2 = \{(u^2, 0), (0, u^2)\}$. Assim, temos que o 2-jato de f_3 tem a forma

$$(v + \alpha_1 u^2, w + \alpha_2 u^2).$$

Seja $g_3 = (v, w + \alpha u^2)$, vamos mostrar que $g_3 \sim (v + \alpha_1 u^2, w + \alpha_2 u^2)$. De fato, temos que $T\mathcal{R}(X) \cdot g_3$ é gerado por

- $\xi_1 g_3 = (v, 2\alpha u^2),$
- $\xi_2 g_3 = (v, 2w),$
- $\xi_3 g_3 = (u^2, 2v),$
- $\xi_4 g_3 = (uw, 2\alpha uv).$

Note que se $\alpha \neq 0$, então $(0, u^2) \in T\mathcal{A}(X) \cdot g_3$. Logo pelo Lema 2.22, segue que $\mathcal{A}(X) \cdot (v + \alpha_1 u^2, w + \alpha_2 u^2) \subseteq \mathcal{A}(X) \cdot g_3$. Então é suficiente estudar o germe g_3 com $\alpha \neq 0$. Seja $h_1(x, y) = (e^{-\lambda}x, y)$, então $h_1 \circ g_3 \circ \varphi_1(u, v, w) = (v, w + \alpha e^{2\lambda}u^2)$. Fazendo $\lambda = -\frac{1}{2} \ln |\alpha|$ temos que

$$g_3 \sim (v, w \pm u^2) \quad \text{se } \alpha \neq 0. \quad (\text{A.7})$$

e

$$g_3 \sim (v, w) \quad \text{se } \alpha = 0.$$

Para o germe (v, w) , é fácil ver que

$$(0, u), (u, 0), (0, u^2) \notin T\mathcal{A}(X) \cdot (v, w),$$

então a $\mathcal{A}(X)$ -cod(v, w) ≥ 3 . Uma conta direta mostra que o germe $(v, w \pm u^2)$ não é 2- $\mathcal{A}(X)$ -determinado e $\mathcal{A}(X)$ -cod($v, w \pm u^2$) = 2 em $J^2(3, 2)$. Na análise dos 3-jatos retomaremos este germe.

Agora consideremos $f_4 = (u, v)$, e como no caso anterior, vamos analisar seu 2-jato. Temos que $T\mathcal{R}(X) \cdot f_4$ é gerado por

- $\xi_1 f_4 = (u, v)$,
- $\xi_2 f_4 = (0, v)$,
- $\xi_3 f_4 = (0, u^2)$,
- $\xi_4 f_4 = (v, uw)$.

Assim, a 2-transversal completa de f_4 é dada por $W_2 = \{(w^2, 0), (0, uw), (0, w^2)\}$ e então temos que o 2-jato de f_4 tem a forma

$$(u + \alpha_1 w^2, v + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 uw).$$

vamos usar o Lema 2.22 (Lema de Mather) para reduzir a forma normal. Seja $g_4 = (u + \alpha_1 w^2, v + \alpha_2 w^2)$, então $T\mathcal{R}(X) \cdot g_4$ é gerado por

- $\xi_1 g_4 = (u, v)$,
- $\xi_2 g_4 = (4\alpha_1 w^2, v + 4\alpha_2 w^2)$,
- $\xi_3 g_4 = (4\alpha_1 vw, u^2 + 4\alpha_2 vw)$,
- $\xi_4 g_4 = (v, uw)$.

Segue que

$$\xi_2 g_4 - 4(g_4 - \xi_1 g_4) = (0, v) \Rightarrow (0, w^2), (w^2, 0), (v, 0) \in T\mathcal{A}(X) \cdot g_4,$$

em particular $(0, uw) \in T\mathcal{A}(X) \cdot g_4$. Então, pelo Lema 2.22 temos que

$$\mathcal{A}(X) \cdot (u + \alpha_1 w^2, v + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 uw) \subseteq \mathcal{A}(X) \cdot g_4 \quad \text{se} \quad \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

Logo é suficiente estudar o germe g_4 , dado que se, ou $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$, a $\mathcal{A}(X)$ -cod ≥ 3 . Considerando $\lambda = 3\mu$ e $h_1(x, y) = (e^{-3\mu}x, e^{-4\mu}y)$ temos

$$h_1 \circ g_4 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, v, w) = (u + \alpha_1 e^\mu w^2, v + \alpha_2 w^2),$$

e fazendo $\mu = -\ln |\alpha_1|$ temos que

$$g_4 \sim (u \pm w^2, v + \alpha_2 w^2).$$

Agora com $h_2(x, y) = (-x, y)$ e seja $g_4^- = (u - w^2, v + \alpha_2 w^2)$, segue que

$$h_2 \circ g_4^- \circ \varphi_5 \circ \varphi_6(u, v, w) = (u + w^2, v + \alpha_2 w^2),$$

e assim

$$g_4 \sim (u + w^2, v + \alpha_2 w^2).$$

Suponha $g_4 = (u + w^2, v + \alpha_2 w^2)$ e seja $h_3(x, y) = (e^{-4\mu}x, e^{-5\mu}y)$. Fazendo agora $\lambda = 4\mu$ temos que

$$h_3 \circ g_4 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, v, w) = (u + w^2, v + \alpha_2 e^{-\mu} w^2).$$

Fazendo $\mu = \ln |\alpha_2|$ temos

$$g_4 \sim (u + w^2, v \pm w^2).$$

Seja $g_4^- = (u + w^2, v - w^2)$ e $h_4(x, y) = (x, -y)$, temos que

$$h_4 \circ g_4^- \circ \varphi_6(u, v, w) = (u + w^2, v + w^2),$$

logo

$$g_4 \sim (u + w^2, v + w^2). \quad (\text{A.9})$$

Este germe não é $2\text{-}\mathcal{A}(X)$ -determinado e voltaremos nele na seguinte análise.

A.1.3 Os 3-jatos

Consideraremos somente os germes obtidos anteriormente em A.7 e A.9.

Começamos com $g_3 = (v, w + \varepsilon u^2)$, onde $\varepsilon = \pm 1$. Temos que o $T\mathcal{R}(X) \cdot g_3$ é gerado por

- $\xi_1 g_3 = (v, 2\varepsilon u^2),$
- $\xi_2 g_3 = (v, 2w),$
- $\xi_3 g_3 = (u^2, 2v),$

- $\xi_4 g_3 = (uw, 2\varepsilon uv)$.

A 3-transversal completa é dada por $W_3 = \{(u^3, 0), (0, u^3)\}$, isto é, o 3-jato de g_3 tem a forma

$$(v + \alpha_1 u^3, w + \varepsilon u^2 + \alpha_2 u^3).$$

Sem perda de generalidade suponha

$$g_3 = (v + \alpha_1 u^3, w + \varepsilon u^2 + \alpha_2 u^3) \quad \text{e seja} \quad h_1(x, y) = (e^{-2\mu}x, e^{-2\mu}y).$$

Tomando $\lambda = \mu$ temos que

$$h_1 \circ g_3 \circ \varphi_1 \circ \varphi_2(u, v, w) = (v + \alpha_1 e^\mu u^3, w + \varepsilon u^2 + \alpha_2 e^\mu u^3),$$

e fazendo $\mu = -\ln |\alpha_1|$ segue que

$$g_3 \sim (v \pm u^3, w + \varepsilon u^2 + au^3), \quad \text{onde} \quad a = \frac{\alpha_2}{|\alpha_1|}.$$

Seja $g_3^- = (v - u^3, w + \varepsilon u^2 + au^3)$ e $h_2(x, y) = (-x, y)$, então temos que

$$h_2 \circ g_3^- \circ \varphi_6(u, v, w) = (v + u^3, w + \varepsilon u^2 + au^3),$$

isto é,

$$g_3 \sim (v + u^3, w + \varepsilon u^2 + au^3), \tag{A.10}$$

onde “ a ” é um parâmetro de módulo. Vamos mostrar agora que o germe em (A.10) é 3- $\mathcal{A}(X)$ -determinado e tem $\mathcal{A}(X)$ -cod=2. Para isto, mostraremos que o germe é 4- $\mathcal{A}(X)$ -determinado e a sua 4-transversal completa é trivial.

Suponha então que $g_3 = (v + u^3, w + \varepsilon u^2 + au^3)$. Temos que o $T\mathcal{R}(X) \cdot g_3$ é gerado por

- $\xi_1 g_3 = (v + 3u^3, 2\varepsilon u^2 + 3au^3),$
- $\xi_2 g_3 = (v, 2w),$
- $\xi_3 g_3 = (u^2, 2v),$
- $\xi_4 g_3 = (uw + 3u^2v, 2\varepsilon uv + 3au^2v).$

É fácil ver que $\mathcal{M}_3^2 \mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{K}(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^3 \mathcal{E}_{3,2}$. Vamos mostrar então que

$$\mathcal{M}_3^5 \mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7 \mathcal{E}_{3,2}.$$

Mostremos primeiro que $\mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7 \mathcal{E}_{3,2}$. De fato, temos que

$$\{(v \cdot \eta_5, 0), (uw \cdot \eta_4, 0), (w^6, 0), (0, v \cdot \eta_5), (0, w \cdot \eta_5)\} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7 \mathcal{E}_{3,2},$$

e resta verificar que $\{(u^6, 0), (0, u^6)\} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}$. Note que

$$\frac{1}{2} \left(u^4 \cdot \xi_1 g_3 - u^2 v \cdot \xi_3 g_3 \right) = (0, \varepsilon u^6 - u^2 v^2) \mod (\mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}). \quad (\text{A.11})$$

Temos também que de $v^2 \cdot \xi_1 g_3$, obtemos

$$(v^3 + 3u^3 v^2, 2\varepsilon u^2 v^2 + 3au^3 v^2) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}. \quad (\text{A.12})$$

O objetivo é obter de (A.12) o elemento $(0, u^2 v^2)$ para, através de (A.11), concluir que

$$(0, u^6) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}.$$

Agora como

$$\frac{1}{2} u^3 v \cdot \xi_3 g_3 = \left(\frac{1}{2} u^5 v, u^3 v^2 \right) \text{ temos que } (0, u^3 v^2) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}.$$

Por outro lado

$$u^3 v \cdot \xi_1 g_3 = (u^3 v^2 + 3u^6 v, 2\varepsilon u^5 v + 3au^6 v) \text{ e assim } (u^3 v^2, 0) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}.$$

Finalmente,

$$((v + u^3)^3, 0) = (v^3 + 3u^3 v^2 + 6u^6 v + u^9, 0), \text{ logo } (v^3, 0) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2},$$

e com isto concluímos que $(0, u^6) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}$.

Para o outro elemento consideremos

$$u^4 \cdot \xi_3 g_3 - \varepsilon u^2 v \cdot \xi_1 g_3, \text{ o qual faz com que } (u^6 - \varepsilon u^2 v^2, 0) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}.$$

Note que $v^2 \cdot \xi_3 g_3 = (u^2 v^2, 2v^3)$ e como de

$$(0, (v + u^3)^3) \text{ temos que } (0, v^3) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2},$$

segue que $\mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^7\mathcal{E}_{3,2}$.

Vamos agora mostrar que $\mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}$. É fácil ver que

$$\left\{ (v \cdot \eta_4, 0), (uw \cdot \eta_3, 0), (w^5, 0), (0, v \cdot \eta_4), (0, w \cdot \eta_4) \right\} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2},$$

e resta verificar que $\{(u^5, 0), (0, u^5)\} \subseteq T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}$. Para isto, consideremos as seguintes expressões “módulo” os elementos que já estão no $T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}$ e seja $g_3 = (g_{3,1}, g_{3,2})$.

- (i) $v \cdot \xi_1 g_3 = (v^2 + 3u^3 v, 2\varepsilon u^2 v + 3au^3 v),$
- (ii) $w \cdot \xi_1 g_3 = (vw + 3u^3 w, 2\varepsilon u^2 w + 3au^3 w),$
- (iii) $u^2 \cdot \xi_1 g_3 = (u^2 v + 3u^5, 2\varepsilon u^4 + 3au^5),$

- (iv) $u^3 \cdot \xi_1 g_3 = (u^3 v, 2\varepsilon u^5),$
- (v) $v \cdot \xi_2 g_3 = (v^2, 2vw),$
- (vi) $w \cdot \xi_2 g_3 = (vw, 2w^2),$
- (vii) $u^3 \cdot \xi_2 g_3 = (u^3 v, 2u^3 w),$
- (viii) $v \cdot \xi_3 g_3 = (u^2 v, 2v^2),$
- (ix) $w \cdot \xi_3 g_3 = (u^2 w, 2vw),$
- (x) $u^3 \cdot \xi_3 g_3 = (u^5, 2u^3 v),$
- (xi) $u^2 \cdot \xi_4 g_3 = (u^3 w, 2\varepsilon u^3 v),$
- (xii) $(g_{3,1}^2, 0) = ((v + u^3)^2, 0),$
- (xiii) $(0, g_{3,1}^2) = (0, (v + u^3)^2),$
- (xiv) $(g_{3,1} g_{3,2}, 0) = ((v + u^3)(w + \varepsilon u^2 + au^3), 0),$
- (xv) $(0, g_{3,1} g_{3,2}) = (0, (v + u^3)(w + \varepsilon u^2 + au^3)),$
- (xvi) $(0, g_{3,2}^2) = (0, (w + \varepsilon u^2 + au^3)^2).$

Temos 16 expressões com 16 variáveis, o qual induz o sistema

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 & 3a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\varepsilon & 3a & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \varepsilon & 0 & a & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & 0 & a & 1 & 0 & 0 & \varepsilon \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2\varepsilon & 0 & 2a & 1 & 2a\varepsilon & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 (v^2, 0) \\
 (vw, 0) \\
 (u^2 v, 0) \\
 (u^2 w, 0) \\
 (u^3 v, 0) \\
 (u^3 w, 0) \\
 (u^5, 0) \\
 (0, v^2) \\
 (0, vw) \\
 (0, w^2) \\
 (0, u^2 v) \\
 (0, u^2 w) \\
 (0, u^3 v) \\
 (0, u^3 w) \\
 (0, u^4) \\
 (0, u^5)
 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

cujo determinante da matriz associada a (A.13) é $112(a^2 - 4\varepsilon)$. Como $\varepsilon = \pm 1$, temos que o determinante só anula se $\varepsilon = 1$ e $a = \pm 2$. Assim, impondo $a \neq \pm 2$ temos que

$(u^5, 0), (0, u^5) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}$ e, pelo Corolário 4.7, temos que g_3 é 4- $\mathcal{A}(X)$ -determinado.

Agora, note que a 4-transversal completa é dada por $W_4 = \{(u^4, 0), (0, u^4)\}$, mas pelo sistema em (A.13), já temos que $(0, u^4) \in j^4(T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3) \cap H^4(3, 2)$ e

$$u^2 \cdot \xi_3 g_3 = (u^4, 2u^2 v) \quad \text{e como} \quad (0, u^2 v) \in j^4(T\mathcal{A}_1(X) \cdot g_3) \cap H^4(3, 2).$$

Concluimos que a 4-transversal completa é trivial e, então, temos que g_3 é 3- $\mathcal{A}(X)$ -determinado.

Finalmente para este germe, é fácil ver que

$$\frac{\mathcal{M}_3\mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot g_3} = (u, 0), (0, u) \implies \mathcal{A}(X)\text{-cod}(g_3) = 2.$$

Por último, consideremos o germe obtido em (A.9), $g_4 = (u + w^2, v + w^2)$. Temos que o $T\mathcal{R}(X) \cdot g_4$ é gerado por

- $\xi_1 g_4 = (u, v),$
- $\xi_2 g_4 = (4w^2, v + 4w^2),$
- $\xi_3 g_4 = (4vw, u^2 + 4vw),$
- $\xi_4 g_4 = (v, uw).$

A 3-transversal completa para g_4 é dada por $W_3 = \{(w^3, 0), (0, w^3)\}$, isto é, o 3-jato de g_4 tem a forma

$$(u + w^2 + \alpha_1 w^3, v + w^2 + \alpha_2 w^3).$$

Sem perda de generalidade, suponha $g_4 = (u + w^2 + \alpha_1 w^3, v + w^2 + \alpha_2 w^3)$ e seja $f_4 = (u + w^2 + aw^3, v + w^2)$. Vamos mostrar que f_4 é 3- $\mathcal{A}(X)$ -determinado, tem $\mathcal{A}(X)$ -cod 2 e usaremos o Lema de Mather para concluir que $g_4 \sim f_4$.

Temos que $T\mathcal{R}(X) \cdot f_4$ é gerado por

- $\xi_1 f_4 = (u, v),$
- $\xi_2 f_4 = (4w^2 + 6aw^3, v + 4w^2),$
- $\xi_3 f_4 = (4vw + 6avw^2, u^2 + 4vw),$
- $\xi_4 f_4 = (v, uw).$

É fácil ver que $\mathcal{M}_3^2\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{K}(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^3\mathcal{E}_{3,2}$, logo vamos mostrar que

$$\mathcal{M}_3^4\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}.$$

Começamos mostrando que $\mathcal{M}_3^5 \mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2}$. Diretamente temos que

$$\{(u \cdot \eta_4, 0), (v \cdot \eta_4, 0), (0, v \cdot \eta_4), (0, u^2 \cdot \eta_3)\} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2},$$

e resta verificar que $(w^5, 0), (0, uw^4), (0, w^5) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2}$.

A ideia é construir um sistema, tal como feito em (A.13), mas precisamos primeiro obter alguns elementos convenientes em $T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2}$. Isto indica que as contas seguintes serão “módulo” os elementos que já estão em $T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2}$.

Temos que,

$$v \cdot \eta_2 \cdot \xi_3 f_4 \sim (0, v^2 \cdot \eta_2) \quad \text{e também} \quad v \cdot \eta_2 \cdot \xi_1 f_4 \sim (uv \cdot \eta_2, 0).$$

Seja agora $f_4 = (g_1, g_2)$ e segue que as expressões

$$(i) \quad (0, g_1 g_2^2) = (0, uv^2 + 2uvw^2 + uw^4),$$

$$(ii) \quad uw^2 \cdot \xi_2 f_4 = (0, uvw^2 + 4uw^4),$$

$$(iii) \quad uv \cdot \xi_2 f_4 = (0, uv^2 + 4uvw^2),$$

induzem o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}}_{\det=-9} \begin{bmatrix} (0, uv^2) \\ (0, uvw^2) \\ (0, uw^4) \end{bmatrix}.$$

Então, temos que

$$(0, uv^2), (0, uvw^2), (0, uw^4) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6 \mathcal{E}_{3,2},$$

e segue que $w^3 \cdot \xi_4 f_4 = (vw^3, 0)$. Agora temos

$$(i) \quad u^2 \cdot \xi_1 f_4 = (u^3, u^2 v),$$

$$(ii) \quad (g_1^3, 0) = (u^3 + 2u^2 w^2, 0),$$

$$(iii) \quad (0, g_1^2 g_2) = (0, u^2 v + u^2 w^2),$$

$$(iv) \quad u^2 \cdot \xi_2 f_4 = (4u^2 w^2, u^2 v + 4u^2 w^2),$$

que induzem o sistema

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right]}_{\det=2} \begin{bmatrix} (u^3, 0) \\ (u^2 w^2, 0) \\ (0, u^2 v) \\ (0, u^2 w^2) \end{bmatrix},$$

e então

$$(u^3, 0), (u^2w^2, 0), (0, u^2v), (0, u^2w^2) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}.$$

Ainda mais, segue que $w^2 \cdot \xi_3 f_4 = (0, vw^3)$, $w^3 \cdot \xi_1 f_4 = (uw^3, 0)$, $uw \cdot \xi_4 f_4 = (uvw, 0)$, $(0, g_1^3) = (0, u^3)$, $u \cdot \xi_3 f_4 = (0, uvw)$ e $v \cdot \xi_4 f_4 = (v^2, 0)$.

Consideremos as seguintes 14 expressões

$$(i) \quad (g_1^2, 0) = (u^2 + 2uw^2 + w^4 + 2aw^5, 0),$$

$$(ii) \quad (0, g_1^2) = (0, u^2 + 2uw^2 + w^4 + 2aw^5),$$

$$(iii) \quad (g_1 g_2, 0) = (uv + uw^2 + vw^2 + w^4 + aw^5, 0),$$

$$(iv) \quad (0, g_1 g_2) = (0, uv + uw^2 + vw^2 + w^4 + aw^5),$$

$$(v) \quad (g_2^2, 0) = (2vw^2 + w^4, 0),$$

$$(vi) \quad (0, g_2^2) = (0, v^2 + 2vw^2 + w^4),$$

$$(vii) \quad w^2 \cdot \xi_1 f = (uw^2, vw^2),$$

$$(viii) \quad u \cdot \xi_2 f = (4uw^2, uv + 4uw^2),$$

$$(ix) \quad v \cdot \xi_2 f = (vw^2, v^2 + 4vw^2),$$

$$(x) \quad w^2 \cdot \xi_2 f = (4w^4 + 6aw^5, vw^2 + 4w^4),$$

$$(xi) \quad w^3 \cdot \xi_2 f = (4w^5, 4w^5),$$

$$(xii) \quad u \cdot \xi_1 f = (u^2, uv),$$

$$(xiii) \quad v \cdot \xi_1 f = (uv, v^2),$$

$$(xiv) \quad w^2 \cdot \xi_4 f = (vw^2, uw^3).$$

com 14 variáveis, as quais induzem o sistema

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2a & 1 & 2a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} (u^2, 0) \\ (uv, 0) \\ (uw^2, 0) \\ (vw^2, 0) \\ (w^4, 0) \\ (w^5, 0) \\ (0, u^2) \\ (0, uv) \\ (0, v^2) \\ (0, uw^2) \\ (0, vw^2) \\ (0, uw^3) \\ (0, w^4) \\ (0, w^5) \end{array} \right], \quad (\text{A.14})$$

cuja matriz associada a (A.14) tem determinante dado por $248a$. Logo, se $a \neq 0$ todos os elementos que estão no vetor da direita em (A.14) estão em $T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^6\mathcal{E}_{3,2}$.

Agora precisamos mostrar que $\mathcal{M}_3^4\mathcal{E}_{3,2} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2}$. Diretamente temos que

$$\{(u \cdot \eta_3, 0), (v \cdot \eta_3, 0), (0, v \cdot \eta_3), (0, u^2 \cdot \eta_2)\} \subset T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2},$$

e pelo sistema em (A.14), os elementos restantes $(w^4, 0), (0, uw^3), (0, w^4) \in T\mathcal{A}_1(X) \cdot f_4 + \mathcal{M}_3^5\mathcal{E}_{3,2}$. Assim, pelo Corolário 4.7, o germe f_4 é 3- $\mathcal{A}(X)$ -determinado. Não é difícil ver que

$$\frac{\mathcal{M}_3\mathcal{E}_{3,2}}{T\mathcal{A}(X) \cdot f_4} = (w, 0), (0, w) \implies \mathcal{A}(X)\text{-cod}(f_4) = 2.$$

Em particular, temos que $(0, w^3) \in T\mathcal{A}(X) \cdot f_4$, e pelo Lema 2.22 concluímos que $g_4 \simeq f_4$, o que completa a prova

REFERÊNCIAS

- [1] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1974.
- [2] Arnold, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. 1983.
- [3] Arnold, V. I., Gusein-Zade, S. M., and Varchenko, A. N. *Singularities of Differential Maps I. Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*. 1985.
- [4] Banchoff, T., Gaffney, T., and McCrory, C. Cusps of Gauss mappings. *Pitman Research Notes in Mathematics* 55 (1982).
- [5] Barajas, M. Folding maps on a crosscap. *Preprint* (2017).
- [6] Barajas, M., and Kabata, Y. Projections of the crosscap. *Preprint* (2017).
- [7] Bruce, J. W. A note in first order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution. *Bull. London Math. Soc.* 16 (1984), 139–144.
- [8] Bruce, J. W. Projections and reflections of generic surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Math. Scand.* 54 (1984), 262–278.
- [9] Bruce, J. W., DuPlessis, A. A., and Wall, C. T. C. Determinacy and unipotency. *Invent. Math.* 88 (1987), 521–554.
- [10] Bruce, J. W., and Fidal, D. L. On binary differential equations and umbilics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* (1989), 147–168.
- [11] Bruce, J. W., and Giblin, P. J. *Curves and Singularities*. Cambridge University Press, 1984.
- [12] Bruce, J. W., and Giblin, P. J. Projections of surfaces with boundary. *Proc. London Math. Soc.* (3) 60 (1990), 392–416.
- [13] Bruce, J. W., Giblin, P. J., and Tari, F. Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals. *Pitman Research Notes, Longman* 333 (1995), 148–178.
- [14] Bruce, J. W., and Tari, F. On binary differential equations. *Nonlinearity* 8 (1995), 255–271.

- [15] Bruce, J. W., and Tari, F. Duality and implicit differential equations. *Nonlinearity* 13 (2000), 791–811.
- [16] Bruce, J. W., and West, J. M. Functions on a crosscap. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 123 (1998), 19–39.
- [17] Bruce, J. W., and Wilkinson, T. C. Folding maps and focal sets. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1462* (1991), 63–62.
- [18] Damon, J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. *Mem. Amer. Math. Soc.* 306 (1984).
- [19] Dias, F. S., and Tari, F. On the geometry of the cross-cap in Minkowski 3-space and binary differential equations. *Preprint* (2016).
- [20] do Carmo, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, terceira ed. Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [21] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [22] Fukui, T., and Hasegawa, M. Fronts of Whitney umbrella - a differential geometric approach via blowing up. *Journal of Singularities* 4 (2012), 35–67.
- [23] Fukui, T., and Hasegawa, M. Height functions on Whitney umbrellas. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu B38* (2013), 153–168.
- [24] Garcia, R., Gutierrez, C., and Sotomayor, J. Lines of principal curvature around umbilics and Whitney umbrellas. *Tohoku Math. J.* 52 (2000), 163–172.
- [25] Garcia, R., and Sotomayor, J. *Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory*. 27a Coloquio Brasileiro de Matematica, Rio de Janeiro, 2009.
- [26] Gibson, C. G. *Singular points of smooth mappings*. Pitman Publishing, 1979.
- [27] Gibson, C. G., and Hobbs, C. A. Singularity and bifurcation for general two dimensional planar motions. *New Zealand J. Math.* 25 (1996), 141–163.
- [28] Gibson, C. G., Wirthmüller, K., Plessis, A. A. D., and Looijenga, E. L. N. *Topological Stability of Smooth Mappings*. Lecture Notes in Mathematics 552, 1976.
- [29] Golubitsky, M., and Guillemin, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. Graduate Texts in Mathematics 14, 1973.
- [30] Gutierrez, C., and Sotomayor, J. Lines of curvature and umbilic points on surfaces, Brazilian 18 Math. Coll. Reprint as Structurally configurations of lines of curvature

- and umbilic points on surfaces,. *Monografias del IMCA, Lima, Peru, 1998. IMPA* (1991).
- [31] Hasegawa, M., Honda, A., Naokawa, K., Umehara, M., and Yamada, K. Intrinsic invariants of cross caps. *Selecta Mathematica* 20 (2014), 769–785.
- [32] Izumiya, S., Romero, C., Ruas, M. A. S., and Tari, F. *Differential Geometry from a Singularity Theory Viewpoint*. World Scientific Publishing Company, 2016.
- [33] Izumiya, S., and Takeuchi, N. Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 130 (2001), 1–11.
- [34] Kabata, Y. Recognition of plane-to-plane map-germs. Master’s thesis, Hokkaido University., 2014.
- [35] Lee, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 218, 2012.
- [36] Lima, E. L. *Curso de Análise 2*. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 1981.
- [37] Martinet, J. N. *Singularities of smooth functions and maps*. London Mathematical Society Lecture Notes 58, 1982.
- [38] Mather, J. N. Stability of C^∞ -mappings IV: Classification of stable map germs. *Publ. Math., IHES* 35 (1969), 127–156.
- [39] Mather, J. N. Notes on topological stability. *Harvard University* (1970).
- [40] Mond, D. *The classification of germs of maps from surfaces to 3-space, with applications to the differential geometry of immersions*. PhD thesis, University of Liverpool, 1982.
- [41] Mond, D. On the classification of germ of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$. *Proc. London Math. Soc.* s3-50 (2) (1985), 333–369.
- [42] Montaldi, J. On generic composites of maps. *Bull. London Math. Soc.* 23 (1991), 81–85.
- [43] Montesinos, A. MapR2R2, Software disponível em <http://www.uv.es/montesin/>.
- [44] Montesinos, A. ODEinR2, Software disponível em <http://www.uv.es/montesin/>.
- [45] Morris, R. The sub-parabolic lines of a surface. *Mathematics of Surfaces VI, Ed. Glen Mullineux, IMA new series 58, Clarendon Press, Oxford* (1996), 79 – 102.
- [46] Oliver, J. M. *Pairs of geometric foliations of regular and singular surfaces*. PhD thesis, Durham University, 2010.

- [47] Oliver, J. M. Binary differential equations with discriminant having a cusp singularity. *Journal of Dynamical and Control Systems* 17 (2011), 207–230.
- [48] Oliver, J. M. On pairs of foliations of a parabolic cross-cap. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* 10 (2011), 139–166.
- [49] Oset-Sinha, R., and Tari, F. On the flat geometry of the cuspidal edge. *Preprint* (2015).
- [50] Oset-Sinha, R., and Tari, F. Projections of surfaces in $\mathbb{R}^4$ to $\mathbb{R}^3$ and the geometry of their singular images. *Revista Matemática Iberoamericana* 31 (2015), 33–50.
- [51] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, terceira ed. Texts in Applied Mathematics 7, 2001.
- [52] Porteous, I. R. The normal singularities of surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 40 (1983), 379–393.
- [53] Porteous, I. R. *Geometric Differentiation, For the Intelligence of Curves and Surfaces*. Cambridge University Press, 2001.
- [54] Saji, K. Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. *Hiroshima Mathematical Journal* 40 (2010), 229–239.
- [55] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [56] Struik, D. J. *Lectures on Classical Differential Geometry*, segunda ed. Reprinted by Dove, 1988.
- [57] Tari, F. Projections of piecewise-smooth surfaces. *J. London Math. Soc. (2)* 44 (1991), 155–172.
- [58] Tari, F. On pairs of geometric foliations on a cross-cap. *Tohoku Math. J.* 59 (2007), 233–258.
- [59] Wall, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. *Bull. London Math. Soc.* 13 (1981), 481–539.
- [60] West, J. M. *The differential geometry of the crosscap*. PhD thesis, University of Liverpool, 1995.
- [61] Whitney, H. The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables. *Duke Math. J.* 10 (1943), 161–172.
- [62] Whitney, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics* 62 (1955), 374–410.

-
- [63] Wilkinson, T. C. *The geometry of folding maps*. PhD thesis, University of Newcastle upon Tyne, 1991.
 - [64] Yoshida, T., Kabata, Y., and Ohmoto, T. Bifurcation of plane-to-plane map-germs of corank 2. *The Quarterly Journal of Mathematics* (2015), 369–391.