UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Dinâmica *forwards* de sistemas dinâmicos não autônomos: semigrupos *driving* sem unicidade para trás e estrutura dos atratores.

Luciano Renato Neves Rocha

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Luciano Renato Neves Rocha

Dinâmica *forwards* de sistemas dinâmicos não autônomos: semigrupos *driving* sem unicidade para trás e estrutura dos atratores.

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
Agosto de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

R672d Rocha, Luciano
Dinâmica forwards de sistemas dinâmicos não autônomos: semigrupos driving sem unicidade para trás e estrutura dos atratores. / Luciano Rocha; orientador Alexandre Carvalho. -- São Carlos, 2021.
103 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Semigrupos skew-product. 3. Processos de evolução. I. Carvalho, Alexandre , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Luciano Renato Neves Rocha

Forward dynamics of non-autonomous dynamical systems: driving semigroups without backwards uniqueness and structure of attractors.

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
August 2021

Este trabalho é dedicado às minhas irmãs e irmão:
Carlos Alberto Lima Rocha
Maria Carolina Lima Rocha
Maria Caroline Lima Rocha
e Sofia Neves Almeida.

Que vocês possam ser o que quiserem ser.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional, em especial à minha mãe, Luciana, e aos meus pais, Carlos e Athayde.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Alexandre Nolasco de Carvalho, por toda a paciência e ternura com a qual guiou-me no caminho da pesquisa matemática desde meus primeiros dias em São Carlos.

Agradeço ao Éder Ritis Aragão Costa, o Edinho, por ser um professor e pesquisador tão dedicado e humano, fazendo-me sentir capaz de um dia também ocupar essa posição. Agradeço também por ter desenvolvido parte essencial do trabalho que serve como base para este, o qual estou muito feliz de poder dar continuidade.

Agradeço à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) por possibilitar a descoberta da minha paixão pela matemática. Sem ela, eu dificilmente sairia dos canais da periferia de Belém para estudar na Universidade de São Paulo. Reitero seu papel determinante na ampliação das perspectivas de milhares de jovens pobres, como eu, e desejo dias melhores à sua estrutura.

Também gostaria de agradecer nominalmente ao professor João Pablo Pinheiro da Silva, que foi Coordenador Regional de Iniciação Científica no Programa de Iniciação Científica Jr. da OBMEP e, na prática, meu primeiro orientador. Seu incentivo foi essencial para que eu decidisse realizar uma graduação em matemática.

Agradeço à minha terapeuta, Mariana Corcetti, por ter me ajudado nos momentos mais difíceis.

Por fim, agradeço à FAPESP, CNPq e à parceria Instituto TIM - OBMEP - IMPA pelo apoio financeiro durante a realização deste trabalho.

“Isso não é sobre de onde ’cê vem
é sobre onde ’cê quer chegar
e o que vai mudar pra quem vem
de onde ’cê vem quando tiver lá”
(Don L)

RESUMO

ROCHA, L. N. R. **Dinâmica *forwards* de sistemas dinâmicos não autônomos: semigrupos *driving* sem unicidade para trás e estrutura dos atratores.**. 2021. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Neste trabalho iremos apresentar os semigrupos skew-product para abordar problemas não autônomos, mostrar como obter uma decomposição de Morse para tais semigrupos e estudar uma equação diferencial ordinária planar com acoplamento difusivo na qual a decomposição de Morse pode ser explicitada e descreve muito bem a dinâmica do problema.

Palavras-chave: Semigrupos skew-product, decomposição de Morse.

ABSTRACT

ROCHA, L. N. R. **Forward dynamics of non-autonomous dynamical systems: driving semigroups without backwards uniqueness and structure of attractors.**. 2021. 103 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

In this work we will present the skew-product semigroups in order to aproach non autonomous problems, show how to obtain a Morse decomposition to such semigroups and study a planar diffusively coupled ordinary differential equation in which the Morse decomposition can be explicited and describes very well the problem dynamics.

Keywords: Skew-product semigroup, Morse decomposition.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A análise de propriedades qualitativas de sistemas dinâmicos, autônomos e não autônomos, nos fornece muitas informações sobre o comportamento de fenômenos nas mais diversas áreas, como física, biologia e engenharia. Chamamos de **atrator global** o conjunto que guarda os estados assintóticos dos sistemas dinâmicos. Assim, sua dinâmica interna é peça fundamental para o entendimento do comportamento dos fenômenos modelados. O estudo de atratores de sistemas dinâmicos em espaços de Banach constituiu-se como uma ampla e profunda área de pesquisa que recebeu bastante atenção nas últimas décadas, nos levando ao entendimento cada vez mais refinado da estrutura desses objetos.

No caso autônomo, é bem estabelecida a análise de quando podemos decompor o atrator na sua dinâmica recorrente (invariantes isolados) e na sua dinâmica gradiente (suas conexões) através da decomposição de Morse. De fato, quando temos um semigrupo gradiente com relação à família de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$, podemos decompor seu atrator global $\mathscr{A}$ em atratores locais $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ definidos por: $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \Xi_1$ e, para $2 \leq j \leq n$,

$$A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j) = \cup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(\Xi_j) \tag{1.1}$$

onde $W^u(\Xi)$ denota a variedade instável de Ξ. Além disso, temos que $A_n = \mathscr{A}$ e, se A_j^* representa o repulsor de A_j, então $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

No entanto, esta análise não é bem estabelecida quando estamos lidando com sistemas dinâmicos não autônomos devido às dificuldades que rapidamente aparecem neste tipo de problemas que, em geral, apresentam uma família infinita de campos de vetores "dirigindo" as soluções (daí o nome semigrupo *driving*), ao contrário do caso autônomo que apresenta um único campo de vetores. Desta forma, é desejável que pudéssemos obter resultado similar para o caso não autônomo ou algo que nos conte sobre seu atrator tanto quanto a decomposição de Morse nos conta sobre o caso autônomo e é este problema que iremos abordar.

Mais especificamente, o objetivo deste trabalho é mostrar que, em um certo sentido, podemos decompor a dinâmica de um atrator não autônomo entre sua parte gradiente e sua parte recorrente através da introdução natural do conceito de atrator skew-product, que nos permite identificar estruturas similares às autônomas em problemas não autônomos. Esta foi a abordagem seguida em (Chepyzhov e Vishik 2012) no estudo da dinâmica *forwards* de problemas não autônomos em que caracterizam o atrator uniforme assumindo unicidade para trás das soluções globais para o semigrupo *driving*. Contudo, a não unicidade de tais soluções é o que ocorre naturalmente. Desta forma, ressaltamos que neste trabalho não iremos assumir a unicidade para trás de soluções globais para o semigrupo *driving*. Por fim, iremos explicitar uma equação diferencial não autônoma para a qual podemos dar a descrição almejada.

Durante todo o trabalho será dada a devida importância à questão de se estabelecer condições para que as estruturas estudadas se mantenham sob a ação de uma pequena perturbação. De fato, como comentado no início deste texto, o estudo dos sistemas dinâmicos é um campo com diversas aplicações a outras ciências que, por sua vez, modelam inúmeras situações reais. Assim, os modelos matemáticos estudados estão sempre sujeitos à imprecisões, sendo importante que nossa teoria não seja dependente de modelos perfeitos ou idealizações. Iremos então definir precisamente o que queremos dizer com perturbação e quais delas são permitidas na nossa análise. Mostraremos que conseguimos recuperar resultados de robusteza sob perturbação do caso autônomo para o caso não autônomo a partir da configuração skew-product.

Este trabalho será dividido em seis capítulos, o primeiro deles sendo a presente introdução. No capítulo dois iremos definir conceitos básicos da teoria autônoma dos sistemas dinâmicos e demonstrar resultados iniciais. Caracterizaremos quando um semigrupo possui atrator global e lidaremos com o problema da semicontinuidade de um atrator, isto é, a análise de quando o atrator não "implode" ou "explode" em tamanho quando submetido a uma pequena perturbação.

No capítulo três iremos estudar os semigrupos gradientes com respeito à uma família disjunta de invariantes isolados. Daremos um critério para a existência de um atrator global para estes semigrupos (mais fraco que o apresentado no capítulo dois) e caracterizaremos seu atrator como a união das variedades instáveis dos invariantes isolados. Também iremos definir os semigrupos dinamicamente gradientes, que são aqueles que compartilham de algumas propriedades dinâmicas dos semigrupos gradientes e mostraremos que, na verdade, elas são suficientes para definir os semigrupos gradientes, demonstrando assim que tais conceitos são equivalentes. Para isso, iremos desenvolver a teoria de Morse e utilizá-la para construir uma função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente. Por fim, através desta equivalência, iremos demonstrar que os semigrupos gradientes são estáveis por perturbação.

No capítulo quatro iremos tratar dos sistemas dinâmicos não autônomos. Introduziremos diferentes noções de atrator não autônomo a fim de relacioná-los em uma teoria abstrata e com ela descrever um método para estudar equações diferenciais não autônomas. Daremos também condições necessárias e suficientes para a existência de atratores não autônomos. Por fim, iremos obter resultados de estabilidade sob perturbação na teoria não autônoma a partir da reinterpretação de resultados na teoria autônoma.

No capítulo cinco iremos estudar o conceito de dicotomia exponencial, que estende a noção de hiperbolicidade para processos de evolução e nos dá importantes informações sobre a estrutura fina de atratores, e demonstrar sua estabilidade sob perturbação da seguinte forma: uma vez que é possível caracterizar quando um processo de evolução linear discreto possui dicotomia exponencial (não há resultado análogo para o caso contínuo), iremos primeiro utilizar esta caracterização para demonstrar a estabilidade da dicotomia exponencial discreta e posteriormente discretizar o caso contínuo para obter a estabilidade da dicotomia exponencial contínua a partir da discreta. Também iremos estudar as soluções globais hiperbólicas e demonstrar sua estabilidade por perturbação.

No sexto e último capítulo, iremos estudar o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k(x_1 - x_2) + x_1 - \beta(t)x_1^3, \quad t > \tau \geq 0, \quad x_1(\tau) = x_{1,\tau}, \\ \dot{x}_2 &= k(x_2 - x_1) + x_2 - \beta(t)x_2^3, \quad t > \tau \geq 0, \quad x_2(\tau) = x_{2,\tau}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função globalmente Lipschitz com $\beta(\mathbb{R}^+) \subset [\beta_0, \beta_1]$, $0 < \beta_0 < \beta_1 < \infty$.

Para isso, associaremos um **semigrupo skew-product** a 1.2 da seguinte forma: considere $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t,x) = (k(x_2 - x_1) + x_1 - \beta(t)x_1^3, k(x_1 - x_2) + x_2 - \beta(t)x_2^3)$$

e tome o espaço $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ com a métrica da convergência em compactos ρ. Se $\Sigma = \overline{\{\beta(t+\cdot) : t \in \mathbb{R}^+\}}^{\rho}$, defina o **semigrupo driving** $\Theta(t) : \Sigma \to \Sigma$ por $(\Theta(t)\beta)(s) = \beta(t+s)$.

Além disso, dado $x_0 \in \mathbb{R}^2$, defina o **cociclo** $\mathbb{R} \times \Sigma \ni (t, \sigma) \to \mathscr{K}(t, \sigma)x_0 \in \mathbb{R}^2$ como sendo a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + x_1 - \sigma(t)x_1^3 \\ \dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + x_2 - \sigma(t)x_2^3 \\ (x_1(0), x_2(0)) = x_0 \end{cases}$$

Podemos agora considerar o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ associado em $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 \times \Sigma$ dado por

$$\Pi(t)(x, \sigma) = (\mathscr{K}(t, \sigma)x, \Theta(t)\sigma)$$

Se $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ é uma solução global de Θ, então podemos definir o **processo de evolução** $S_\eta(t,s) = \mathscr{K}(t-s, \eta(s))$ para todo $t \geq s$ dado pelas soluções do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + x_1 - \eta(0)(t)x_1^3 \\ \dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + x_2 - \eta(0)(t)x_2^3 \\ (x_1(s), x_2(s)) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Iremos mostrar que 1.3 possui cinco soluções globais hiperbólicas que denotaremos por $\xi_{0,\sigma}(t) \equiv 0$ e $\xi_{i,\sigma}^{\pm}(t),\ i = 1,2$. Mostraremos também que os conjuntos $\Xi_0 = \{(0, \eta(0)) : \eta$ é solução limitada de $\Theta\}$ e $\Xi_i^{\pm} = \{(\xi_{i,\eta}^{\pm}(t), \eta(0)) : \eta$ é solução limitada de Θ e $t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1,2$, formam uma família de invariantes isolados de $\Pi(\cdot)$. Por fim, concluiremos que $\Pi(\cdot)$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em relação aos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_0, \Xi_i^{\pm}, i = 1,2\}$ que é estável por perturbação.

CAPÍTULO

2

SEMIGRUPOS

Neste capítulo trataremos de conceitos e resultados básicos da teoria de semigrupos que serão necessários para a nossa abordagem. Utilizaremos $\mathbb{T}$ para denotar que estamos trabalhando com $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$, sem necessidade de especificação, e $\mathbb{T}^+ := \{t \in \mathbb{T} : t \geq 0\}$.

2.1 Definições iniciais

Definição 2.1.1. Seja (X,d) um espaço métrico. Um **semigrupo** em X consiste de uma família de aplicações contínuas $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ tal que

i) $T(0)x = x$ para todo $x \in X$

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t,s \geq 0$

iii) O mapa $(t,x) \mapsto T(t)x$ é contínuo para todo $(t,x) \in \mathbb{T}^+ \times X$

Note que no caso discreto, isto é, no caso em que $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, a terceira condição está automaticamente satisfeita.

Semigrupos também são chamados de sistemas dinâmicos autônomos. Quando for conveniente, denotaremos um semigrupo apenas por $T(\cdot)$. Semigrupos estão frequentemente associados à equações diferenciais a fim de modelar uma série de fenômenos. Isto porque é possível associar, de maneira natural, semigrupos a equações diferenciais ordinárias autônomas em espaços de Banach, como ilustraremos a seguir.

Exemplo 2.1.2. Considere um o problema de valor inicial em um espaço de Banach X dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = y \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

que satisfaz condições de boa colocação global. Isto é, para cada $y \in X$, (2.1) possui uma solução única e contínua $x_y : \mathbb{R}^+ \to X$ e a aplicação $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t,y) \mapsto x_y(t) \in X$ é contínua. Neste caso, temos que a equação $\dot{x}(t) = f(t,x(t))$ define um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{R}^+\}$ dado por $T(t)y = x_y(t)$, para todo $y \in X$.

De fato, se $y \in X$, então $T(0)x_0 = x(0) = y$, pois é a condição inicial de (2.1). Além disso, se $s \in \mathbb{R}^+$, então não é difícil ver que $x_{x_y(s)}(t) = x_y(t+s)$. Desta forma,

$$T(t)T(s)y = T(t)x_y(s) = x_{x_y(s)}(t) = x_y(t+s) = T(t+s)y$$

A continuidade de $(t,y) \mapsto T(t)y$ segue das condições de continuidade impostas às soluções $x_y(\cdot)$.

As condições de boa colocação são dadas, em geral, pelo Teorema de Picard e suas consequências, como enunciaremos a seguir.

Teorema 2.1.3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x(t)) \\ x(s) = x_s \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua que é Lipschitz na primeira variável. Então temos que para cada $x_s \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$, existe $\tau = \tau(s,x_s) > s$ e uma única solução $[s,\tau) \ni t \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$ para o PVI tal que ou $\tau = \infty$ ou $\limsup_{t\to\tau} \|x(t,s,x_s)\| = \infty$. Além disso, se $R = \{(t,s,x) \ni \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : s \leq t \leq \tau(s,x)\}$, a função $R \ni (t,s,x_s) \mapsto x(t,s,x_s) \in \mathbb{R}^n$ é contínua.

Para obter a boa colocação global, requisito para definirmos um semigrupo associado a 2.1, em geral, mostramos que as soluções de 2.1 não explodem em tempo finito.

No que se segue, fixaremos um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em um espaço métrico $X = (X,d)$.

Definição 2.1.4. Dado um subconjunto $B \subset X$, definimos sua **órbita positiva** por

$$\gamma^+(B) := \{T(t)x \in X : x \in B \text{ e } t \in \mathbb{T}^+\}$$

Dado $\tau \in \mathbb{T}^+$, definimos ainda a **órbita positiva de B à partir de τ** por

$$\gamma_\tau^+(B) := \gamma^+(T(\tau)B) = \{T(t)x \in X : x \in B \text{ e } t \geq \tau\}$$

Definição 2.1.5. Um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **limitado** se $\gamma^+(B)$ é limitado para todo $B \subset X$ limitado. Se tivermos que, para cada $B \subset X$ limitado, existe $t_B \in \mathbb{T}^+$ tal que $\gamma_{t_B}^+(B)$ é limitado, dizemos que $T(\cdot)$ é **eventualmente limitado**.

Definição 2.1.6. Uma **solução global** de $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ por $x \in X$ é uma função contínua $\xi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi(0) = x$ e $T(t)(\xi(s)) = \xi(t+s)$, para todo $s \in \mathbb{T}$ com $t \in \mathbb{T}^+$.

Dada uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$, chamamos a sua imagem $\{\xi(t) \in X : t \in \mathbb{T}\}$ de **órbita global** e a denotamos por $\gamma(\xi)$. Dado $\tau \in \mathbb{T}$, denotamos a **órbita até τ** por $\gamma_\tau^-(\xi) := \{\xi(t) \in X : t \leq \tau\}$.

Queremos descrever o comportamento assintótico dos semigrupos. Nesse sentido, o conceito de ω-limite se torna fundamental para nossa análise.

Definição 2.1.7. Dado um conjunto $B \subset X$, definimos o conjunto ω-limite de B como

$$\omega(B) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}^+} \overline{\gamma_t^+(B)},$$

Definição 2.1.8. Dada uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$, definimos o conjunto **$\alpha-$limite de ξ** por

$$\alpha(\xi) = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \overline{\gamma_t^-(\xi)}.$$

As definições de ω-limite e α-limite, apesar de nos darem a intuição do que se pretende com tais objetos, são pouco úteis na demonstração de resultados. As seguintes caracterizações dos conjuntos $\omega-$limite e $\alpha-$limite serão bem mais utilizadas no desenvolvimento da teoria.

Proposição 2.1.9. Seja $B \subset X$. Então

$$\begin{aligned}\omega(B) = \{y \in X :\ &\text{existem sequências } (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ e } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\text{em } B \text{ tais que } t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \text{ e } y = \lim_{n\to+\infty} T(t_n)x_n\}\end{aligned}$$

Além disso, se $\xi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global do semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$, então

$$\begin{aligned}\alpha(\xi) = \{y \in X : &\text{ existe uma sequência } (t_n) \text{ em } \mathbb{T}^+ \text{ tal que} \\ &t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ e } y = \lim_{n\to+\infty} \xi(t_n)\}\end{aligned}$$

Demonstração. Tome $y \in \omega(B)$. Então $y \in \overline{\gamma_t^+(B)}$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Podemos então tomar sequências $(y_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_n^+(B)$ tal que $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que $y_k^n \in \gamma_n^+(B)$, podemos escrever

$$y_k^n = T(n+q_k^n)x_k^n.$$

onde $(x_k^n)_{n,k\in\mathbb{N}} \subset B$ e $(q_k^n)_{n,k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$.

Como $y_k^n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_k^n, y) < \frac{1}{n}, \text{ se } k \geq m,$$

Tome então $t_n := n + q_m^n$ e $x_n := x_{m(n)}^n$, assim

$$d(T(t_n)x_n, y) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Portanto $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$, como queríamos.

Reciprocamente, seja $y \in X$ e sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$, tais que $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ e $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x_n$. Fixado $\tau \in \mathbb{T}^+$, tome uma subsequência $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_{n_k} \geq \tau$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos $(T(t_{n_k})x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \gamma_\tau^+(B)$, e $y \in \overline{\gamma_\tau^+(B)}$. Isto mostra que $y \in \omega(B)$.

A demonstração para $\alpha(\xi)$ é análoga. □

Agora iremos definir a noção de atrator global, que é o conjunto para onde o semigrupo converge assintoticamente em um sentido a ser definido a seguir.

Para tal, vamos começar definindo a **semidistância de Hausdorff** $\mathrm{dist}_H(A,B)$ entre dois subconjuntos não vazios $A,B \subset X$ por

$$\mathrm{dist}_H(A,B) := \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} d(x,y).$$

Definição 2.1.10. Sejam $A,B \subset X$ não vazios. Diremos que A **atrai** B sob ação do semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{dist}_H(T(t)B, A) = 0.$$

Definamos agora a noção de invariância pela ação de um semigrupo.

Definição 2.1.11. Diremos que $A \subset X$ é **invariante** pela ação de $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)A = A$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$.

Definição 2.1.12. Um conjunto $\mathscr{A}$ é dito um **atrator global** para $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se é compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X sob a ação de $T(\cdot)$.

Lema 2.1.13. Sejam $A, B \subset X$ não vazios. Então $\mathrm{dist}_H(A,B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$.

Demonstração. Tome $a \in A$. Então $\mathrm{dist}_H(a,B) = d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b) = 0$. Pela definição de inf, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B$ tal que $d(a,b_n) \leq \frac{1}{n}$. Assim, $b_n \to a$. Portanto $a \in \overline{B}$. A recíproca é trivial. $\square$

Proposição 2.1.14. O atrator global, se existir, é único.

Demonstração. Sejam $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ dois atratores globais para um semigrupo $T(\cdot)$. Então

$$\mathrm{dist}_H(T(t)\mathscr{A}, \mathscr{A}') \xrightarrow{t \to \infty} 0,$$

Mas da invariância de $\mathscr{A}$, temos que $\mathrm{dist}_H(\mathscr{A}, \mathscr{A}') = 0$. Logo, do lema anterior e da compacidade de $\mathscr{A}'$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. Procedendo de forma análoga obtemos que $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$, e temos resultado. $\square$

Agora iremos caracterizar o atrator global em função de soluções globais que são limitadas.

Proposição 2.1.15. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$. Então

$$\mathscr{A} = \{\xi(0) : \xi(\cdot) \text{ é uma solução global limitada}\}$$

Demonstração. Tome $x \in \mathscr{A}$. Iremos definir uma solução global limitada $\xi : \mathbb{T} \to X$ com $\xi(0) = x$. Uma vez que $T(n)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem x_{-n} tal que $T(n)x_{-n} = x$. É fácil ver que podemos tomar esta sequência satisfazendo $x_{-(n-1)} = T(1)x_{-n}$ (em particular, se $n \geq m$, temos $T(n-m)x_{-n} = x_{-m}$). Defina então

$$\xi(t) = \begin{cases} T(t)x, \ t \geq 0 \\ T(n+t)x_{-n}, \ t \in [-n, -n+1), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

É claro que $x = \xi(0)$ e que $\xi(\mathbb{T}) \subset \mathscr{A}$ é limitada. Assim, basta mostrar que $\xi(\cdot)$ é uma solução global. De fato, fixe $t \in \mathbb{T}^+$ e tome $\tau \in \mathbb{T}$. Se $\tau \geq 0$, segue das propriedades de semigrupo que $T(t)\xi(\tau) = \xi(t+\tau)$.

Se $\tau < 0$, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau \in [-n, -n+1)$. Segue que

$$T(t)\xi(\tau) = T(t)T(n+\tau)x_{-n} = T(t+\tau+n)x_{-n}$$

Agora, temos dois casos: se $t + \tau \geq 0$, então

$$T(t+\tau+n)x_{-n} = T(t+\tau)T(n)x_{-n} = T(t+\tau)x = \xi(t+\tau)$$

Por outro lado, se $t+\tau<0$, então podemos tomar $m\in\mathbb{N}$ tal que $t+\tau\in[-m,-m+1)$. Uma vez que temos $m\leq n$, segue que

$$\begin{aligned}T(t+\tau+n)x_{-n} &= T((t+\tau+m)+(n-m))x_{-n} = T(t+\tau+m)T(n-m)x_{-n}\\ &= T(t+\tau+m)x_{-m} = T(t+\tau)x = \xi(t+\tau)\end{aligned}$$

Logo $\xi:\mathbb{T}\to X$ é uma solução global limitada por x.

Reciprocamente, seja ξ uma solução global limitada. Então $\xi(\mathbb{T})$ é invariante, isto é, se $t\in\mathbb{T}^+$, então $T(t)\xi(\mathbb{T})=\xi(\mathbb{T})$. De fato, se $s\in\mathbb{T}$, então $T(t)\xi(s)=\xi(t+s)\subset\xi(\mathbb{T})$ e $\xi(s)=\xi(s-t+t)=T(t)\xi(s-t)\subset T(t)\xi(\mathbb{T})$. Como $\mathscr{A}$ atrai limitados, temos

$$\mathrm{dist}_H(T(t)\xi(\mathbb{T}),\mathscr{A})=\mathrm{dist}_H(\xi(\mathbb{T}),\mathscr{A})=0$$

logo, pelo Lema 2.1.13, $\xi(\mathbb{T})\subset\overline{\mathscr{A}}=\mathscr{A}$ e temos o resultado. □

Lema 2.1.16. Seja $\{T(t)\in C(X):t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X. Se $B\subset X$, então $T(t)\omega(B)\subset\omega(B)$ para todo $t\in\mathbb{T}^+$. Se $\omega(B)$ é compacto e atrai B, então também temos $\omega(B)\subset T(t)\omega(B)$. Isto é, $\omega(B)$ é invariante.

Demonstração. Fixe $t\in\mathbb{T}^+$ e suponha $\omega(B)\neq\varnothing$ (do contrário, não há o que provar). Dado $x\in\omega(B)$, existem sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{T}^+$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B$ tais que $x=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n$.

Uma vez que $T(t)$ é contínuo, $T(t)x=\lim_{n\to\infty}T(t)T(t_n)x_n=\lim_{n\to\infty}T(t+t_n)x_n$. Assim, $T(t)x\in\omega(B)$ e temos $T(t)\omega(B)\subset\omega(B)$.

Agora, assuma que $\omega(B)$ é compacto e atrai B e fixe $t\in\mathbb{T}^+$. Dado $x=\lim_{n\to\infty}T(t_n)x_n\in\omega(B)$, assuma que $t_n>t$ para todo $n\in\mathbb{N}$ (do contrário, basta tomar uma subsequência uma vez que $t_n\to\infty$).

Então $T(t)T(t_n-t)x_n=T(t_n)x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$. Como $\omega(B)$ atrai B, segue que $dist_H(T(t_n-t)x_n,\omega(B))\xrightarrow{n\to\infty}0$. Logo, da compacidade de $\omega(B)$, segue que $(T(t_n-t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, digamos $T(t_{n_k}-t)x_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}y$. Assim, $y\in\omega(B)$ e que $T(t)y=x$. Portanto, $\omega(B)=T(t)\omega(B)$. □

Lema 2.1.17. Seja $\{T(t)\in C(X):t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo em X e $B\subset X$ tal que $\omega(B)$ é compacto e atrai B.

i) Se $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, B é conexo e $B\supset\omega(B)$, então $\omega(B)$ é conexo;

ii) Se $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ e B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.

Demonstração. Para ambos os itens, suponha que $\omega(B)$ é desconexo. Então podemos escrever $\omega(B)=F_1\cup F_2$, onde F_1 e F_2 são conjuntos fechados não vazios e disjuntos. Mais ainda, F_1 e F_2 são compactos, uma vez que $\omega(B)$ é compacto. Assim, $d(F_1,F_2)=r>0$.

i) Como também supomos que $dist_H(T(t)(B), \omega(B)) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $t_0 \in \mathbb{T}^+$ e $i \in \{1,2\}$ tal que $T(t)B \subset \mathscr{O}_r(F_i)$ para todo $t \geq t_0$ (B conexo $\Rightarrow T(t)B$ é conexo). Sem perda de generalidade, assuma que $i = 1$. Do Lema 2.1.16 temos que $B \supset \omega(B) \Rightarrow T(t)B \supset T(t)\omega(B) = \omega(B) \supset F_2$, logo $F_2 \subset \mathscr{O}_r(F_1)$ e, portanto, $d(F_1,F_2) < r$, o que é um absurdo.

ii) Como $\omega(B)$ atrai B, $\lim_{t\to\infty} dist_H(\gamma_t(B), \omega(B)) = 0$. Além disso, note que $\gamma_t(B) = T([t,\infty))B$, logo é imagem do conexo B pela função contínua $\mathbb{R}^+ \times X \ni (t,x) \to T(t)x \in X$ e, portanto, conexo. Assim, existe $i \in \{1,2\}$ tal que $\overline{\gamma_t(B)} \in \mathscr{O}_r(F_i)$. Assuma que $i = 1$. Então $F_2 \subset \omega(B) \subset \overline{\gamma_t(B)} \subset \overline{\mathscr{O}_r(F_1)}$ e, portanto, $d(F_1,F_2) < r$, o que é um absurdo.

$\square$

2.2 Caracterização de semigrupos com atrator global

Definição 2.2.1. Um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é dito **assintoticamente compacto** se, sempre que tivermos sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, limitada em X, e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ com, $t_n \to \infty$, então $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Lema 2.2.2. Suponha que $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ seja assintoticamente compacto e tome um $B \subset X$ limitado não vazio. Então $\omega(B)$ será não-vazio, compacto, invariante e é o menor fechado que atrai B.

Demonstração.

i) $\omega(B)$ é não vazio: Tome $x \in B$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ tal que $t_n \to \infty$. Como $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto, existe uma subsequência $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $T(t_{n_k})x \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Assim, $y \in \omega(B)$ e temos que $\omega(B)$ é não vazio.

ii) $\omega(B)$ é compacto: mostraremos que toda sequência em $\omega(B)$ possui uma subsequência convergente. De fato, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\omega(B)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem sequências $(x_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$ em B e $(t_n^j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ com $T(t_n^j)x_n^j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} x_n$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $j_n \geq n$ tal que

$$d(x_n, T(t_n^{j_n})x_n^{j_n}) \leq \frac{1}{n}$$

Pela compacidade assintótica de $T(\cdot)$, existe uma subsequência $T(t_{n_k}^{j_{n_k}})x_{n_k}^{j_{n_k}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$

Portanto

$$x_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} x$$

iii) $\omega(B)$ é o menor fechado que atrai B: primeiro vamos mostrar que $\omega(B)$ atrai B. Suponha que não. Então existem $\varepsilon > 0$ e sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ e $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \omega(B)) > \varepsilon$.

Mas sabemos que existe uma subsequência $(T(t_{n_k})x_{n_k})$ convergente para algum $x \in \omega(B)$, o que é uma contradição.

Para ver que $\omega(B)$ é de fato o menor fechado que atrai B, tome um fechado F que atrai B. Suponha que exista $x \in \omega(B)$ tal que $x \notin F$. Então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B e $t_n \to \infty$ em $\mathbb{T}^+$ tais que $T(t_n)x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Além disso, como F é fechado, $d(x,F) = r > 0$. Como F atrai B, existe $\tau > 0$ tal que $d(T(t)y,F) < \frac{r}{2}$ para todo $y \in B$ e $t > \tau$.

Podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n_0} > \tau$ para todo $n \geq n_0$

Logo $d(T(t_n)x_n),F) < \frac{r}{2}$ e, tomando o limite, concluímos que $d(x,F) \leq \frac{r}{2}$, o que é uma contradição.

iv) $\omega(B)$ é invariante: é consequência imediata do Lema 2.1.16.

□

Definição 2.2.3. Dizemos que um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é **ponto dissipativo** se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai pontos de X. Analogamente, dizemos que $T(\cdot)$ é **limitado dissipativo** se existir um subconjunto limitado $B \subset X$ que atrai subconjuntos limitados de X.

Teorema 2.2.4. Um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ possui um atrator global $\mathscr{A}$ se, e somente se, $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto.

Demonstração. Suponha que $T(\cdot)$ possua um atrator global $\mathscr{A}$. Então $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, uma vez que $\mathscr{A}$ é um subconjunto limitado que atrai limitados de X.

Para ver que é assintoticamente compacto, veja que dada uma sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X e $t_n \to \infty$ em $\mathbb{T}^+$, o conjunto limitado $B = \{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ é atraído por $\mathscr{A}$ e, em particular, $d(T(t_n)x_n, \mathscr{A}) \to 0$. Como $\mathscr{A}$ é compacto, existe uma subsequência convergente de $(T(t_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto.

Reciprocamente, suponha que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto. Considere $\mathscr{B} = \{B \subset X : B \text{ é limitado}\}$ e

$$\mathscr{A} := \bigcup_{B\in\mathscr{B}} \omega(B)$$

Vamos mostrar que $\mathscr{A}$ é um atrator global para $T(\cdot)$. De fato, pelo Lema 2.2.2, temos que $\mathscr{A}$ é reunião de conjuntos invariantes e, portanto, é invariante. Além disso, pelo mesmo lema, todo limitado B é atraído por $\omega(B) \subset \mathscr{A}$. Logo $\mathscr{A}$ atrai subconjuntos limitados de X.

Considere $A \subset X$ um subconjunto fechado e limitado que atrai limitados de X. Então temos que $\omega(B) \subset A$ para todo $B \subset X$ limitado, logo $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} \omega(B) = \mathscr{A} \subset A$. Assim, $\omega(\mathscr{A}) \subset \omega(A) \subset \mathscr{A}$. Como $\mathscr{A}$ é invariante, temos ainda que $\mathscr{A} \subset \omega(\mathscr{A})$. Portanto

$$\mathscr{A} \subset \omega(\mathscr{A}) \subset \omega(A) \subset \mathscr{A}$$

E concluímos que $\omega(A) = \mathscr{A}$, que é compacto pelo Lema 2.2.2. □

2.3 Semicontinuidade de atratores

Nesta seção iremos abordar pela primeira vez um aspecto recorrente durante este texto, que é a estabilidade de certas estruturas sob perturbação. Isto é importantíssimo para garantirmos que a nossa teoria é aplicável em situações reais, uma vez que invariavelmente iremos lidar com modelagens que não refletem exatamente as condições reais (isto é, conseguimos modelar apenas uma perturbação da realidade). Mais especificamente, neste capítulo iremos mostrar que, sob certas hipóteses, uma pequena perturbação de um atrator não "explode" ou "implode" em tamanho.

Definição 2.3.1. Sejam X e Λ espaços métricos e $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X.

1. Diremos que $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ é **semicontínua superiormente** em $\eta_0 \in \Lambda$ se
$$dist_H(\mathscr{A}_\eta, \mathscr{A}_{\eta_0}) \overset{\eta \to \eta_0}{\longrightarrow} 0.$$

2. Diremos que $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ é **semicontínua inferiormente** em $\eta_0 \in \Lambda$ se
$$dist_H(\mathscr{A}_{\eta_0}, \mathscr{A}_\eta) \overset{\eta \to \eta_0}{\longrightarrow} 0.$$

O seguinte resultado será bastante usado para demonstrar semicontinuidade.

Lema 2.3.2. Sejam X e Λ espaços métricos e $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X.

i) Se qualquer sequência $(x_{\eta_n})_{n \in \mathbb{N}}$ com $x_{\eta_n} \in \mathscr{A}_{\eta_n}$ e $\eta_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \eta_0$, tem uma subsequência convergente com limite em $\mathscr{A}_{\eta_0}$, então $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua superiormente em η_0.

ii) Se $\mathscr{A}_{\eta_0}$ é compacto e para qualquer $x \in \mathscr{A}_{\eta_0}$ e $\eta_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \eta_0$ existe uma subsequência $\eta_{n_k} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} \eta_0$ e sequência $(x_{\eta_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ com $x_{\eta_{n_k}} \in \mathscr{A}_{\eta_{n_k}}$ que converge para x, então $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta \in \Lambda}$ é semicontínua inferiormente em η_0.

Demonstração.

i) Nas condições dadas, suponha que $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta\in\Lambda}$ não seja semicontínua superiormente em η_0. Então existem $\varepsilon > 0$ e sequências $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta_0$ e $(x_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_{\eta_n} \in \mathscr{A}_{\eta_n}$ tal que $d(x_{\eta_n}, \mathscr{A}_{\eta_0}) \geq \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$.

Mas $(x_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge para algum elemento de $\mathscr{A}_{\eta_0}$, uma contradição.

ii) Suponha agora que $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta\in\Lambda}$ não seja semicontínua inferiormente em η_0. Então existem $\varepsilon > 0$ e sequência $\eta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \eta_0$ tais que $sup_{x\in\mathscr{A}_{\eta_0}} d(x, \mathscr{A}_{\eta_n}) \geq 2\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, existe uma sequência $(x_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{A}_{\eta_0}$ tal que $d(x_{\eta_n}, \mathscr{A}_{\eta_n}) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma vez que $\mathscr{A}_{\eta_0}$ é compacto, podemos assumir que $(x_{\eta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $x \in \mathscr{A}_{\eta_0}$, donde segue que $d(x, \mathscr{A}_{\eta_n}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, $n \in \mathbb{N}$

Das hipóteses, existem uma subsequência $\eta_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_0$ e $y_{n_k} \in \mathscr{A}_{\eta_{n_k}}$ tal que $y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $d(x, y_{n_k}) \geq d(x, \mathscr{A}_{\eta_{n_k}}) \geq \varepsilon$, temos um absurdo.

□

Definição 2.3.3. Dizemos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é **contínua** em $\eta = 0$ se $d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \overset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$.

Teorema 2.3.4. Suponha que $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ seja uma família de semigrupos contínua em $\eta = 0$. Se $T_\eta(\cdot)$ tem um atrator global $\mathscr{A}_\eta$ para cada $\eta \in [0,1]$ e $\overline{\cup_{\eta\in[0,1]}\mathscr{A}_\eta}$ é compacto, então a família $\{\mathscr{A}_\eta \subset X : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua superiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. Considere sequências $\eta_n \to 0$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $u_n \in \mathscr{A}_{\eta_n}$. Como $\overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]}\mathscr{A}_\eta}$ é compacto, existe uma subsequência de $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotaremos da mesma forma) e $u_0 \in X$ tal que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0$. Pelo lema anterior, basta mostrar que $u_0 \in \mathscr{A}_0$. Para tal, vamos construir uma solução global limitada de $T_0(\cdot)$ por u_0.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome uma solução global limitada $\xi_{\eta_n} : \mathbb{T} \to \mathscr{A}_{\eta_n}$ por u_{η_n}.

Segue da continuidade da família de semigrupos que

$$\xi_{\eta_n}(t) = T_{\eta_n}(t)u_{\eta_n} \to T_0(t)u_0$$

uniformemente para t em limitados de $\mathbb{T}^+$.

Se $\eta_n^0 := \eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, dado $j \in \mathbb{N}$ existe uma subsequência (η_n^j) de (η_n^{j-1}) e u_{-j} tal que $\xi_{\eta_n^j}(-j) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_{-j}$, pois $(\xi_{(\eta_n)}(-j))_{j\in\mathbb{N}} \subset \overline{\bigcup_{\eta\in[0,1]}\mathscr{A}_\eta}$.

Pela convergência uniforme em compactos da família de semigrupos, temos que para $0 \leq i \leq j$,

$$\xi_{\eta_n^j}(-j) = T_{\eta_n^j}(i)\xi_{\eta_n^j}(-j-i) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u_{-j} = T_0(i)u_{-j+i}.$$

Então podemos definir a solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ de $T_0(\cdot)$ por u_0 dada por

$$\xi(t) := \begin{cases} T_0(t)u_0, & \text{para } t \geq 0 \\ T_0(t+j)u_{-j}, & \text{para } -j \leq t < -j+1,\ j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

e temos

$$\xi_{\eta_k^k}(t) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}.$$

Logo $\xi : \mathbb{T} \to X$ é limitada e temos o resultado. □

Definição 2.3.5. Dizemos que um ponto $y^* \in X$ é um **ponto de equilíbrio** para o semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ se $T(t)y^* = y^*$, para todo $t \geq 0$. Denotaremos por $\mathscr{E}$ o conjunto dos pontos de equilíbrio para $T(\cdot)$.

Definição 2.3.6. Dado um ponto de equilíbrio y^*, podemos falar do **conjunto instável** $W^u(y^*)$ de y^*, dado por

$$W^u(y^*) = \{y \in X : \text{existe solução global } \xi_y : \mathbb{T} \to X \\ \text{tal que, } \xi_y(0) = y \text{ e } \xi_y(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^*\}$$

Dada uma vizinhança V de y^*, podemos falar do **conjunto instável local** $W^u_{loc}(y^*)$ de y^*, dado por

$$W^u_{loc}(y^*) = \{y \in X : \text{existe solução global } \xi_y : \mathbb{T} \to X \text{ tal que } \xi_y(0) = y, \\ \xi_y(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} y^* \text{ e } \xi_y(t) \in V \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^-\}$$

No caso de $V = B_\delta(y^*)$, denotamos $W^u_{loc}(y^*)$ por $W^u_\delta(y^*)$.

Teorema 2.3.7. Seja $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família contínua em $\eta = 0$ de semigrupos com atratores globais $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta\in[0,1]}$. Suponha que

i) Se $\mathscr{E}_\eta$ denota o conjunto dos pontos de equilíbrio para $T_\eta(\cdot)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathscr{E}_\eta = \{y_1^{*,\eta}, \cdots, y_n^{*,\eta}\}$, para todo $\eta \in [0,1]$, e $\sup_{1\leq i\leq n} d(y_i^{*,\eta}, y_i^{*,0}) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

ii) Existe um $\delta > 0$ tal que a família $\{W^u_\delta(y_j^{*,\eta}) : \eta \in [0,1]\}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

iii) $\mathscr{A}_0 = \cup_{j=1}^n W^u(y_j^{*,0})$.

Então, $(\mathscr{A}_\eta)_{\eta\in[0,1]}$ é semicontínua inferiormente em $\eta = 0$.

Demonstração. De *iii*), se $u_0 \in \mathscr{A}_0$, então existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ por u_0, $1 \leq \ell \leq n$ e $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $\xi^{(0)}(-\tau) \in W^u_\delta(y^{*,0}_\ell)$.

De *ii*), existe uma sequência $(u^{-\tau}_\eta)_{\eta \in (0,1]}$ com $u^{-\tau}_\eta \in W^u_\delta(y^{*,\eta}_\ell)$ tal que $u^{-\tau}_\eta \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} \xi^0(-\tau)$. Assim, podemos tomar soluções globais $\xi^\eta(\cdot)$ de $T_\eta(\cdot)$ com $\xi^\eta(0) = u^{-\tau}_\eta$ e $\xi^\eta(t) \stackrel{t\to-\infty}{\to} y^{*,\eta}_\ell$.

Segue da continuidade de $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ em $\eta = 0$ que

$$T_\eta(\tau)\xi^\eta(0) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} u_0.$$

Como as $\xi^\eta(\cdot)$ foram tomadas de forma a serem limitadas para trás e, da existência dos atratores $\mathscr{A}_\eta$, são também limitadas para frente, segue que $\xi^\eta(\mathbb{T}) \subset \mathscr{A}_\eta$ e, portanto, $T_\eta(\tau)\xi^\eta(0) \in \mathscr{A}_\eta$.

Logo, o resultado segue do lema 2.3.2. □

CAPÍTULO

3

SEMIGRUPOS GRADIENTES

Definição 3.0.1. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo. Dizemos que um conjunto invariante $\Xi \subset X$ é um **conjunto invariante isolado** quando existe $\delta > 0$ tal que Ξ é o conjunto invariante maximal em $\mathscr{O}_\delta(\Xi)$. Isto é, se $A \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$ é invariante, então $A \in \Xi$. Dizemos ainda que $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$ é uma **família disjunta de invariante isolados** se cada um de seus elementos é um conjunto invariante isolado e existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi_i) \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi_j) = \varnothing$ sempre que $1 \leq i < j \leq n$.

Definição 3.0.2. Sejam $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo e $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$ uma família disjunta de invariantes isolados. Dizemos que $T(\cdot)$ é um **semigrupo gradiente com respeito à $\boldsymbol{\Xi}$** quando existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $V : X \to \mathbb{R}$ é não crescente ao longo de soluções; isto é, para todo $x \in X$, a função $[0, \infty) \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é não crescente.

ii) Se tivermos $x \in X$ tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \Xi_i$ para algum $1 \leq i \leq n$.

iii) $V|_{\Xi_i}$ é constante para todo $1 \leq i \leq n$.

Chamamos a função $V : X \to \mathbb{R}$ de **função de Lyapunov** para $T(\cdot)$.

Não é a toa que semigrupos gradientes recebem este nome, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.0.3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nabla f(x) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

Onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 tal que existe $M > 0$ satisfazendo

$$-\nabla f(x) \cdot x < 0 \text{ para todo } \|x\| \geq M \tag{3.2}$$

Como $\nabla f(x)$ é de classe C^1, (3.1) possui solução única e, de (3.2), está definida globalmente, já que $\frac{d}{dt}\|x\| = -2\nabla f(x) \cdot x < 0$ e, portanto, as soluções de (3.1) não explodem em tempo finito, devendo existir para todo $t \geq 0$.

Assim, (3.1) gera um semigrupo $T(\cdot)$ como descrito no Exemplo 6.3. Se ∇f possui um número finito de zeros dados por $\boldsymbol{\Xi} = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$, então f é uma função de Lyapunov para $T(\cdot)$ relativamente à $\boldsymbol{\Xi}$. De fato, se $x_0 \in \mathbb{R}^n$, então

$$\frac{d}{dt} f(T(t)x_0) = \nabla f(T(t)x_0) \cdot T(\dot{t})x_0 = \nabla f(T(t)x_0) \cdot -\nabla f(T(t)x_0) = -\|\nabla f(T(t)x_0)\|^2 \leq 0$$

Mostrando que f é decrescente ao longo de soluções. Por outro lado, se x_0 é tal que $f(x_0) = f(T(t)x_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, então

$$0 = \frac{d}{dt} f(T(t)x_0) = -\|\nabla f(T(t)x_0)\|^2$$

para todo $t > 0$. Isso implica que $\nabla f(T(t)x_0) = 0$ para todo $t > 0$. Da continuidade de ∇f e $T(\cdot)$, temos que $\nabla f(T(0)x_0) = 0$ e, portanto, $x_0 \in \boldsymbol{\Xi}$.

Mostrando que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de fato uma função de Lyapunov. Neste exemplo, $T(\cdot)$ possui um atrator global $\mathscr{A} \subset B_M^{\mathscr{R}^n}(0)$

Agora iremos trabalhar em descrever a dinâmica no atrator de semigrupos gradientes quando estes existirem.

Definição 3.0.4. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$. Uma **estrutura homoclínica** em $\boldsymbol{\Xi}$ consiste de um subconjunto $\{\Xi_{j_1}, \ldots, \Xi_{j_k}\}$ de $\boldsymbol{\Xi}$ e um conjunto de soluções globais limitadas $\{\xi_i : \mathbb{R} \to X : i = 1, \ldots, k\}$ tais que, pondo $\Xi_{j_{k+1}} := \Xi_{j_1}$, temos

i) Para cada $1 \leq i \leq k$, existe $t_i \in \mathbb{T}^+$ tal que $\xi(t_i) \notin \Xi_{j_i} \cup \Xi_{j_{i+1}}$ e

ii) $\Xi_{j_i} \xleftarrow{t \to -\infty} \xi_i(t) \xrightarrow{t \to \infty} \Xi_{j_{i+1}}$ para todo $1 \leq i \leq k$

Proposição 3.0.5. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradiente com respeito à família disjunta de invariantes isolados limitados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$ que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e considere $V : X \to \mathbb{R}$ sua função de Lyapunov. Então

G1) Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $T(\cdot)$, então existem $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\Xi_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \Xi_j$$

$G2)$ Não existe estrutura homoclínica em Ξ.

Demonstração.

$G1)$ Vamos mostrar que $\omega(\xi(0))$ está inteiramente contido em algum elemento da família de invariantes isolados, assim como $\alpha(\xi)$.

Pela definição de função de Lyapunov, temos que a função $\mathbb{T} \ni t \mapsto V(\xi(t)) \in \mathbb{R}$ é não crescente. Além disso, é limitada, pois $\mathscr{A} \supset \xi(\mathbb{T})$ é compacto e, portanto, $V(\xi(\mathbb{T})) \subset V(\mathscr{A})$ é limitado. Assim, existe o limite $L := \lim_{t\to\infty} V(\xi(t))$ e não é difícil ver que $V|_{\omega(\xi(0))} \equiv L$.

Da invariância de $\omega(\xi(0))$, temos que $x \in \omega(\xi)$ implica que $T(t)x \in \omega(\xi(0))$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Logo $V(x) = V(T(t)x) = L$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e, portanto, $x \in \Xi_j$ para algum $1 \leq j \leq n$. Assim, $\omega(\xi) \subset \cup_{1\leq j\leq n}\Xi_j$. Se $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, uma vez que $\omega(\xi)$ será conexo e os invariantes são isolados, devemos ter $\omega(\xi) \subset \Xi_j$.

Se $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\omega(\xi)$ não precisa ser conexo. Suponha, por absurdo, que temos invariantes $\{\Xi_j\}_{j=1}^{l}$, para algum $1 < l \leq n$, tal que $\Xi_j \cap \omega(\xi) \neq \varnothing$. Então existe uma cobertura disjunta $\{\mathbb{N}_j\}_{j=1}^{l}$ de $\mathbb{N}$ tal que $d(\xi(t), \Xi_j) \xrightarrow{t\in\mathbb{N}_j} 0$ quando $t \to \infty$ para todo $1 \leq j \leq l$. Agora, considere o conjunto $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N}_1 : n+1 \notin \mathbb{N}_1\}$. É fácil ver que esse conjunto é infinito. Podemos então tomar uma sequência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $k_{2n+1} \in \mathbb{N}'$ e $k_{2n} = k_{2n-1} + 1 \in N_i$ para algum $1 < i \leq l$ com $k_n \to \infty$. Temos então que $lim_{n\to\infty} d(\xi(k_{2n+1}), \Xi_1) = 0$, logo $lim_{n\to\infty} d(\xi(k_{2n+1}), \Xi_i) > 0$, já que os invariantes são isolados. Mas veja que

$$lim_{n\to\infty} d(\xi(k_{2n+1}), \Xi_i) = lim_{n\to\infty} d(T(1)\xi(k_{2n}), \Xi_i) = lim_{n\to\infty} d(\xi(k_{2n}), \Xi_i) = 0$$

o que é um absurdo. A demonstração para $\alpha(\xi)$ é inteiramente análoga.

$G2)$ Suponha que exista uma estrutura homoclínica $\{\Xi_{j_1}, \ldots, \Xi_{j_k}\}$. Das propriedades da função de Lyapunov, temos que existem $L_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, com $V(\Xi|_{j_i}) \equiv L_i$ e ainda que $L_1 \leq L_2 \leq \ldots L_k \leq L_{k+1} = L_1$. Mas isso implica que $L_i = L$ para todo $1 \leq i \leq k$. Assim, fixado $1 \leq i \leq k$, da monotonicidade de V, temos que $V(\xi_i(t)) \equiv L$. Isso implica que, se $s \in \mathbb{T}$, então $V(T(t)\xi_i(s)) = V(\xi_i(s))$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Portanto devemos ter $\xi_i(s) \in \Xi_l$ para algum $1 \leq l \leq n$. Da invariância de Ξ_l, segue que $\xi(t) \in \Xi_l$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Disso e do fato de que devemos ter $\Xi_{j_i} \xleftarrow{t\to-\infty} \xi_i(t) \xrightarrow{t\to\infty} \Xi_{j_{i+1}}$ segue que $\Xi_l = \Xi_{j_i} = \Xi_{j_{i+1}}$. Como tomamos i arbitrariamente, segue que os elementos $\{\Xi_{j_1}, \ldots, \Xi_{j_k}\}$ são todos iguais, digamos, a Ξ' e, consequentemente, os elementos de $\{\xi_i : \mathbb{T} \to X\}$ são todos iguais, digamos, a ξ'. Além disso, concluímos que $\xi'(\mathbb{T}) \subset \Xi'$, o que contradiz a primeira propriedade de uma estrutura homoclínica e, portanto, temos um absurdo.

□

O próximo teorema nos dá hipóteses mais fracas que as do Teorema 2.2.4 para a existência de atrator global quando o semigrupo é gradiente.

Teorema 3.0.6. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo gradiente com respeito à família disjunta de invariantes isolados limitados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$. Então $T(\cdot)$ possui atrator global $\mathscr{A}$ se, e somente se, é assintoticamente compacto e eventualmente limitado.

Demonstração. Suponha que $T(\cdot)$ é assintoticamente compacto e eventualmente limitado. Basta mostrarmos que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo e teremos o resultado pelo Teorema 2.2.4.

Primeiramente, veja que $T(\cdot)$ é ponto dissipativo. De fato, considere o limitado $A = \mathscr{O}_1(\cup_{i=1}^n \Xi_i)$. Da compacidade assintótica, se $x \in X$, então $\omega(x)$ é invariante, compacto, e atrai x. Então existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $V(T(t)x) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} L$, pois trata-se de uma função monótona e limitada. Se $y = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x \in \omega(x)$, temos que $V(T(t)y) = \lim_{n\to\infty} V(T(t+t_n)x) = L$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Assim, obtemos que $y \in \Xi_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Logo $\omega(x) \subset \cup_{i=1}^n \Xi_i$, donde temos que A atrai x.

Agora, mostremos que $T(\cdot)$ é compacto dissipativo. Como $T(\cdot)$ é eventualmente limitado, existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $C = \gamma_\tau^+(A)$ é limitado. Se $K \subset X$ é um compacto, então para cada $x \in K$ existe $\tau_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $T(t)x \in A$ para todo $t \geq \tau_x$. Pela continuidade de $T(\tau_x)$, existe $\delta_x > 0$ tal que $T(\tau_x)\mathscr{O}_{\delta_x}(x) \subset A$. Isso implica que $T(t)\mathscr{O}_{\delta_x}(x) \subset C$ para todo $t \geq \tau_x + \tau$. Sejam $x_1, \ldots, x_n$ tais que $K \subset \cup_{i=1}^n \mathscr{O}_{\delta_{x_i}} x_i$. Então tomando $\tau_K = \max_{1\leq i\leq n} \tau_{x_i}$, temos $T(t)K \subset C$ para todo $t \geq \tau + \tau_K$. E, portanto, C atrai compactos de X.

Mostremos agora, finalmente, que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo. Do Lema 2.2.2, temos que $\omega(C) \subset \overline{C}$ é não vazio, compacto, invariante e atrai C, logo $\omega(C)$ atrai compactos de X. Assim, se $B \subset X$ é limitado, novamente pelo lema 2.2.2, $\omega(B)$ é um compacto que atrai B. Assim, $\omega(C)$ atrai $\omega(B)$ e, consequentemente, atrai B. Mostrando que $T(\cdot)$ é limitado dissipativo, como queríamos. □

Definição 3.0.7. Considere um semigrupo $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ contendo um invariante isolado Ξ. O **conjunto instável** de Ξ é dado por

$$\begin{aligned} W^u(\Xi) := \{x \in X : &\text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{T} \to X \\ &\text{por } x \text{ tal que } d(\xi(t), \Xi) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\} \end{aligned}$$

Podemos caracterizar o atrator de semigrupos gradientes através dos conjuntos instáveis de sua família de invariantes isolados.

Teorema 3.0.8. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo gradiente com respeito à família disjunta de invariantes isolados limitados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$ que possui um atrator global $\mathscr{A}$. Então

$$\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{n} W^u(\Xi_j)$$

Demonstração. Tome $x \in \mathscr{A}$. Então existe uma solução global limitada $\xi : \mathbb{R} \to X$ com $\xi(0) = x$. Como o semigrupo é gradiente, existe $1 \le i \le n$ tal que $d(\xi(t), \Xi_i) \xrightarrow{t \to -\infty} 0$. Logo $x \in W^u(\Xi_i)$ e $\mathscr{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} W^u(\Xi_j)$

Por outro lado, tome $x \in \Xi_i$ para algum $1 \le i \le n$. Assim, existe $\xi : \mathbb{R} \to X$ com $\xi(0) = x$ e $d(\xi(t), \Xi_i) \xrightarrow{t \to -\infty} 0$. Como Ξ_i é limitado, existe $\tau \in \mathbb{T}$ tal que $\gamma_\tau^-(\xi)$ é limitado. Por outro lado, $\xi(\tau)$ é atraído por $\mathscr{A}$ e, portanto, $\{T(t)\xi(\tau) \in X : t \in \mathbb{T}^+\} = \gamma_\tau^+(\xi)$ é limitado. De onde concluímos que $\xi(\mathbb{T})$ é limitado e, como também é invariante, devemos ter $\xi(\mathbb{T}) \subset \mathscr{A}$ e $\mathscr{A} \supset \bigcup_{j=1}^{n} W^u(\Xi_j)$, concluindo a demonstração.

□

Definição 3.0.9. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$. Dizemos que $T(\cdot)$ possui um **atrator de tipo gradiente** se tivermos

$$\mathscr{A} = \bigcup_{j=1}^{n} W^u(\Xi_j)$$

A princípio, é difícil dizer se semigrupos gradientes são estáveis utilizando apenas a sua caracterização por funções de Lyapunov. Em (Carvalho *et al.* 2007) os autores demonstram que uma perturbação de um semigrupo gradiente possui um atrator do tipo gradiente. No entanto, semigrupos com atrator do tipo gradiente não necessariamente são gradientes e, portanto, essa não constitui uma prova da estabilidade por perturbação de semigrupos gradientes. Por outro lado, as propriedades dinâmicas derivadas na Proposição 3.0.5 são estáveis por perturbação, como mostraremos a seguir, adaptando (Carvalho e Langa 2009).

3.1 Semigrupos dinamicamente gradientes

Definição 3.1.1. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados limitados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_n\}$. Dizemos que $T(\cdot)$ é **dinamicamente gradiente** com respeito a Ξ se valem as seguintes propriedades

G1) Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global limitada de $T(\cdot)$, então existem $1 \le i, j \le n$ tais que

$$\Xi_i \xleftarrow{t \to -\infty} \xi(t) \xrightarrow{t \to \infty} \Xi_j$$

G2) Não existe estrutura homoclínica em Ξ.

Como iremos tratar da perturbação de semigrupos, devemos definir algumas propriedades que uma família de semigrupos deve ter para ser considerada uma perturbação.

Definição 3.1.2. Dizemos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é **coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$** se dadas sequências $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ limitada em X, $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $[0,1]$ com $\eta_k \to 0$ e $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_k \to \infty$, então a sequência $(T_{\eta_k}(t_k)x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente.

Definição 3.1.3. Dizemos que uma família de semigrupos $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é **contínua em $\eta = 0$** se $d(T_\eta(t)x, T_0(t)x) \to 0$ quando $\eta \to 0$ uniformemente em compactos de $\mathbb{T}^+ \times X$.

Lema 3.1.4. Considere $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ uma família de semigrupos coletivamente assintoticamente compacta e contínua em $\eta = 0$. Sejam $\eta_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ em $[0,1]$, $s_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ em $\mathbb{T}$ e $\mathbb{J}_k := \{s \in \mathbb{T} : s \geq -s_k\}$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\xi_{\eta_k} : \mathbb{J}_k \to X$ de $T_{\eta_k}(\cdot)$ e $B_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \xi_{\eta_k}(-s_k)$ é limitado, existe uma subsequência (que também denotaremos por ξ_{η_k}) e uma solução global $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$ de $T_0(\cdot)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{\eta_k}(s) \to \xi_0(s)$$

para todo $s \in \mathbb{T}$.

Demonstração. Como B_0 é limitado e $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta\in[0,1]}$ é coletivamente assintoticamente compacta, existe $x_0 \in X$ tal que, passando a uma subsequência, temos $\xi_{\eta_k}(0) = T_{\eta_k}(s_k)\xi_{\eta_k}(-s_k) \to x_0$.

Defina $\xi_0(\cdot) : \mathbb{T}^+ \to X$ por

$$\xi_0(t) := T_0(t)x_0, \ t \in \mathbb{T}^+$$

Segue que

$$\xi_{\eta_k}(s) = T_{\eta_k}(s)\xi_{\eta_k}(0) \xrightarrow{k\to\infty} T_0(s)x_0 = \xi_0(s), \quad \forall s \in \mathbb{T}^+.$$

Agora vamos trabalhar em estender esta solução para trás. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}$ tal que $s_k > n$ para todo $k \in \mathbb{N}_n$. Veja que cada $\mathbb{N}_n$ é infinito (uma vez que $s_k \to \infty$) e $(\mathbb{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é encaixada. Ademais, existe $x_{-n} \in X$ tal que $\xi_{\eta_k}(-n) = T_{\eta_k}(s_k - n)\xi_{\eta_k}(-s_k) \xrightarrow{k\to\infty} x_{-n}$, $k \in \mathbb{N}_n$.

Definindo $\xi_0(s) := T_0(s+n)x_{-n}$, $s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geqslant -n\}$, temos

$$T_0(n)x_{-n} = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}_n}} T_{\eta_k}(n)\xi_{\eta_k}(-n) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}_n}} \xi_{\eta_k}(0) = x_0$$

e $\xi_0 : \{s \in \mathbb{T} : s \geq -n\} \to X$ é uma solução de $\{T_0(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ com $\xi_0(-n) = x_{-n}$, $\xi_0(0) = x_0$ e

$$\xi_{\eta_k}(s) = T_{\eta_k}(s+n)\xi_{\eta_k}(-n) \to T_0(s+n)x_{-n} = \xi_0(s),$$

$s \in \{s \in \mathbb{T} : s \geq -n\}$.

Agora considere o conjunto $\mathscr{N}$ contendo o n-ésimo elemento de $\mathbb{N}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Considere então a subsequência $(\xi_{\eta_k})_{k \in \mathscr{N}}$ de $(\xi_{\eta_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e a solução $\xi_0 : \mathbb{T} \to X$, então temos $\xi_{\eta_k^k}(s) \to \xi_0(s)$ para todo $s \in \mathbb{T}$. Isto conclui a demonstração. □

Iremos agora demonstrar a estabilidade de semigrupos dinamicamente gradientes por perturbação.

Teorema 3.1.5. Seja $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$ uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacto em $\eta = 0$. Suponha que

i) $T_\eta(\cdot)$ possui um atrator global $\mathscr{A}_\eta$ para todo $\eta \in [0,1]$ e $\cup_{\eta \in [0,1]} \mathscr{A}_\eta$ é limitado.

ii) para cada $\eta \in [0,1]$, $\mathscr{A}_\eta$ contém uma família finita de invariantes isolados $\mathbf{\Xi}_\eta = \{\Xi_{1,\eta}, \ldots, \Xi_{n,\eta}\}$ tal que $dist_H(\Xi_{i,\eta}, \Xi_{i,0}) \xrightarrow{\eta \to 0} 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

iii) Existe $\delta > 0$ tal que $\Xi_{i,\eta}$ é o invariante maximal em $\mathscr{O}_\delta(\Xi_{i,\eta})$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $\eta \in [0,1]$.

iv) $T_0(\cdot)$ é dinamicamente gradiente relativamente à $\mathbf{\Xi}_0$.

Então existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que, para todo $\eta \in [0,\eta_0]$, $T_\eta(\cdot)$ é dinamicamente gradiente.

Demonstração. Primeiramente iremos mostrar que $(G1)$ é estável por perturbação. Note que, de *ii*) e *iii*), existem $\delta' \in (0,\delta]$ e $\eta' \in [0,1]$ tal que, se $\xi_\eta : \mathbb{T} \to X$ é solução global de $T_\eta(\cdot)$ e $t_0 > 0$ são tais que $d(\xi_\eta(t), \cup_{i=1}^n \Xi_{i,0}) < \delta'$ para todo $t \geq t_0$, então $d(\xi_\eta(t), \cup_{i=1}^n \Xi_{i,\eta}) \xrightarrow{t \to \infty} 0$.

Vamos mostrar que existe $\eta'' > 0$ tal que, se $\eta \in [0,\eta'']$, então toda solução global limitada de $T_\eta(\cdot)$ convergirá para $\mathbf{\Xi_\eta}$ quando $t \to \infty$. Para tal, é suficiente mostrar que existe $\eta'' \in [0,\eta']$ tal que, se $\eta \in [0,\eta'']$ e $\xi_\eta(\cdot)$ é uma solução global de $T_\eta(\cdot)$, então existe $t_0 > 0$ tal que $d(\xi_\eta(t), \cup_{i=1}^n \Xi_{i,0}) < \delta'$ para todo $t \geq t_0$.

Suponha que isto não ocorre. Então existem sequências $\eta_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ e soluções globais limitadas $\xi_k(\cdot)$ de T_{η_k} tal que, para todo $k, s \in \mathbb{N}$, temos $d(\xi_k(t), \cup_{i=1}^n \Xi_{i,0}) \geq \delta$ para todo $t \geq s$. Pelo Lema 3.1.4, podemos supor que $\xi_k(t) \xrightarrow{k \to \infty} \xi_0$, onde $\xi_0(\cdot)$ é uma solução global limitada de T_0. Uma vez que T_0 é dinamicamente gradiente, temos que, para algum $1 \leq i \leq n$, $\xi_0(t) \xrightarrow{t \to \infty} \Xi_i$. Então, para cada $m \in \mathbb{N}_\delta$, existem t_m e k_m tal que $d(\xi_k(t_m), \Xi_{i,0}) < \frac{1}{m}$ para todo $k \geq k_m$, onde $\mathbb{N}_\delta = \{m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \delta\}$. Logo, pela hipótese que assumimos, existe $t'_m > t_m$ tal que $d(\xi_{k_m}(t'_m), \Xi_{i,0}) = \delta$ e $d(\xi_{k_m}(t'_m), \Xi_{i,0}) < \delta$ para todo $t_m \leq t < t'_m$.

Então $t'_m - t_m \overset{m\to\infty}{\to} \infty$. De fato, do contrário, podemos assumir (tomando uma subsequência, se necessário) que $t'_m - t_m \overset{m\to\infty}{\to} t_0 \geq 0$ e teríamos então que $\xi_{k_m}(t'_m) = T_{\eta_k}(t'_m - t_m)\xi_{k_m}(t_m)$. Mas $\xi_{k_m}(t_m) \overset{m\to\infty}{\to} \Xi_{i,0}$ (tomando uma subsequência, se necessário), logo $T_{\eta_k}(t'_m - t_m)\xi_{k_m}(t_m) \overset{m\to\infty}{\to} \Xi_{i,0}$. No entanto, $\xi_{k_m}(t'_m)$ dista δ de $\Xi_{i,0}$, o que, claro, deveria se manter quando tomássemos o limite. Um absurdo.

Considere agora, novamente pelo Lema 3.1.4, a solução global limitada $\xi_1 : \mathbb{R} \to X$ de T_0 dada por $\xi_1(t) = \lim_{m\to\infty} \xi_{k_m}(t + t_m)$. Então $d(\xi_1(t), \Xi_{i,0}) \leq \delta$ para $t \leq 0$. Assim, $\xi_1(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_{i,0}$. Por $(G1)$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\xi_1(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_{i,0}$. Por $(G2)$, temos que $j \neq i$. Assim, para cada $s \in \mathbb{N}_\delta$, existe $t_s > 0$ e $k_s \in \mathbb{N}$ tal que $d(\xi_k(t_s), \Xi_j) < \frac{1}{s}$ para todo $k \geq k_s$. Logo, novamente, existirá $t'_s > t_s$ tal que $d(\xi_{k_s}(t'_s), \Xi_{i,0}) = \delta$ e $d(\xi_{k_s}(t'_s), \Xi_{i,0}) < \delta$ para todo $t_s \leq t < t'_s$. Procedendo como anteriormente, encontraremos uma solução global limitada $\xi_2 : \mathbb{R} \to X$ de $T_0(\cdot)$ com

$$\Xi_j \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_2(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_\ell$$

para $\ell \notin \{i, j\}$. Como $\boldsymbol{\Xi_0}$ é finito, após repetirmos esse processo um número finito de vezes, iremos encontrar uma estrutura homoclínica em $\boldsymbol{\Xi_0}$, contradizendo o fato de $T_0(\cdot)$ ser dinamicamente gradiente.

Assim, existe $\eta'' \in [0, \eta']$ tal que se $\xi_\eta(\cdot)$ é uma solução global limitada de $T_\eta(\cdot)$ com $\eta \leq \eta''$, então $\xi_\eta(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_{i,0}$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. A prova de que $\Xi_{0,j} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_\eta(t)$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ é inteiramente análoga.

Agora vamos provar que $(G2)$ é estável por perturbação. Suponha, por contradição, que exista uma uma sequência $\eta_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ com $\eta_k \in (0, \eta'']$ e estruturas homoclínicas

$$\{(\Xi_{j_1,\eta_k}, \xi_{j_1,\eta_k}), \ldots, (\Xi_{j_p,\eta_k}, \xi_{j_p,\eta_k})\}$$

em $\boldsymbol{\Xi}_{\eta_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.1.4, podemos assumir que, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, existe $t_{k,j}$ tal que

$$d(\xi_{j_i,\eta_k}(t_{k,j}), \Xi_{j_i,0}) < \frac{1}{k}$$

Como devemos ter ξ_{j_i,η_k} convergindo para frente para $\Xi_{j_i,\eta_k} \neq \Xi_{j_{i+1},\eta_k}$, podemos tomar $t'_{k,j} > t_{k,j}$ tal que $d(\xi_{j_i,\eta_k}(t_{k,j}), \Xi_{j_i,0}) < \delta$ para todo $t \in [t_{k,j}, t'_{k,j})$ e $d(\xi_{j_i,\eta_k}(t_{k,j}), \Xi_{j_i,0}) = \delta$ e podemos proceder como anteriormente para encontrar uma estrutura homoclínica em $\boldsymbol{\Xi_0}$.

$\square$

3.2 Funções de Lyapunov para semigrupos dinamicamente gradientes

Como o nome da seção sugere, no que se segue iremos construir uma função de Lyapunov para um semigrupo dinamicamente gradiente dado, mostrando que semigrupos dinamicamente gradientes são gradientes. Este resultado foi mostrado em (Aragao-Costa *et al.* 2011). Para tal, iremos apresentar a noção de Decomposição de Morse de um atrator global, que é uma forma de decompor o atrator global em atratores locais com seus respectivos repulsores. Posteriormente, mostraremos que podemos reordenar os invariantes isolados de um semigrupo dinamicamente gradiente de forma a torná-los uma decomposição de Morse. Feito isso, construiremos uma função de Lyapunov para cada par atrator-repulsor e obteremos uma função de Lyapunov relativamente à família de invariantes isolados.

Definição 3.2.1. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$. Diremos que $\Xi \subset \mathscr{A}$ é um **atrator local** se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)) = \Xi$. O **repulsor** Ξ^* associado ao atrator local Ξ é o conjunto definido por $\Xi^* = \{x \in \mathscr{A} : \omega(x) \cap \Xi = \varnothing\}$. O par (Ξ, Ξ^*) é dito um **par atrator-repulsor** para $T(\cdot)$.

Observação 3.2.2. É imediato que se (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor de um um semigrupo $T(\cdot)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\Xi^* \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi) = \varnothing$ (basta usar o mesmo ε da definição de Ξ). Além disso, Ξ é um compacto invariante como consequência do Lema 2.2.2.

Lema 3.2.3. Se (Ξ, Ξ^*) é um par atrator-repulsor de um semigrupo $T(\cdot)$, então Ξ^* é invariante e fechado.

Demonstração. Dado $t \in \mathbb{T}^+$, sabemos que $\omega(x) = \omega(T(t)x)$. Assim, $\omega(x) \cap \Xi = \varnothing$ se, e somente se, $\omega(T(t)x) \cap \Xi = \varnothing$. Isto é, $x \in \Xi^*$ se, e somente se, $T(t)x \in \Xi^*$, donde segue a invariância de Ξ^*.

Da observação anterior, temos que $\overline{\Xi^*} \cap \Xi = \varnothing$. Como o fecho de um conjunto invariante é invariante, segue que $\overline{\Xi^*}$ é invariante. Assim, $\overline{\Xi^*} \subset \Xi^*$ e segue o resultado. □

Lema 3.2.4. Sejam $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e Ξ um conjunto compacto invariante. Se existe um $\varepsilon > 0$ tal que Ξ atrai $\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathscr{A}$, então, dado $\delta > 0$, existe um $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$.

Demonstração. É claro que só precisamos mostrar para δ pequeno, assim, suponha que o resultado não é válido para algum $\delta < \varepsilon$. Então existem $x \in \Xi$, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X com $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}$ com $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tais que $d(T(t_n)x_n, \Xi) \geq \delta$ e $T(t)x_n \in \mathscr{O}_\delta(\Xi)$ para todo $t \in [0, t_n)$.

Considere as soluções $\xi_n : [-t_n, \infty) \to X$ dadas por $\xi_n(t) = T(t_n + t)x_n$. Então, pelo Lema 3.1.4, existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ tal que $\xi_n(t) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi(t)$ para cada $t \in \mathbb{T}$.

Pelas propriedades das ξ_n, temos que se $t<0$, então $\xi(t)\in\overline{\mathscr{O}_\delta(\Xi)}\bigcap\mathscr{A}\subset\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)\bigcap\mathscr{A}$. Mas isso implica que existe $\tau\in\mathbb{T}^+$ tal que $d(T(s)\xi(t),\Xi)\leq\frac{\delta}{2}$ para todo $s\geq\tau$ e $t<0$. Em particular, podemos tomar $s=\tau$ e $t=-\tau$, obtendo $d(T(\tau)\xi(-\tau),\Xi)=d(\xi(0),\Xi)\leq\frac{\delta}{2}$. Porém $d(\xi(0),\Xi)\geq\delta$, uma contradição. $\square$

Se $\{T(t)\in C(X):t\in\mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo em X com um atrator global $\mathscr{A}$, como $\mathscr{A}$ é invariante, podemos considerar o semigrupo $\{S(t)\in C(\mathscr{A}):t\in\mathbb{T}^+\}$ em $\mathscr{A}$, onde $S(t)=T|_{\mathscr{A}}(t)$ para todo $t\in\mathbb{T}^+$. Nesse caso, afirmamos que

Lema 3.2.5. Se Ξ é um atrator local para $S(\cdot)$ e K é um subconjunto compacto de $\mathscr{A}$ tal que $K\cap\Xi^*=\varnothing$, então Ξ atrai K. Além disso Ξ é um atrator local para $T(\cdot)$ em X.

Demonstração. Suponha que Ξ não atrai K. Então existe $\delta>0$, e sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{T}^+$ com $t_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ e $x\in K$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tais que $d(T(t_n)x_n,\Xi)\geq\delta$. Da compacidade de K, podemos assumir (passando a uma subsequência se necessário) que $x_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}x\in K$. Pela contrapositiva do lema anterior, existe $0<\delta'<\delta$ tal que $d(T(t)x_n,\Xi)\geq\delta'$ para todo $t\leq t_n$. Tomando o limite, obtemos que $d(T(t)x,\Xi)\geq\delta'$ para todo $t\in\mathbb{T}^+$, logo $\omega(x)\cap\Xi=\varnothing$, o que contradiz o fato de que $K\cap\Xi^*=\varnothing$.

Para ver que Ξ é atrator local para $T(\cdot)$, tome ε tal que $\Xi=\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi))$. Pelo lema 3.2.4, existe $0<\delta'<\varepsilon$ tal que $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi))\subset\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)$. Portanto, $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi))\cap\Xi^*=\varnothing$. Sendo $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi))$ compacto e invariante, devemos ter, pela primeira parte deste lema, $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi))\subset\Xi$. Além disso, $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi))$ atrai $\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)$ e o resultado segue. $\square$

Lema 3.2.6. Seja $\{T(t)\in C(X):t\in\mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ,Ξ^*).

i) Se $\xi:\mathbb{T}\to X$ é uma solução global de $T(\cdot)$ com a propriedade de que $\overline{\xi(\mathbb{T})}\cap\Xi^*\neq\varnothing$, então $d(\xi(t),\Xi^*)\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0$.

ii) Se $\xi:\mathbb{T}\to X$ é uma solução global de $T(\cdot)$ com a propriedade que $\xi(t)\in\mathscr{O}_\delta(\Xi^*)$ para todo $t\leqslant 0$ e algum $\delta>0$ tal que $\mathscr{O}_\delta(\Xi^*)\cap\Xi=\varnothing$, então $d(\xi(t),\Xi^*)\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0$.

Demonstração.

i) Temos que existe $x\in\Xi^*$ e sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $t_n\to\infty$ tal que $\xi(-t_n)\to x$. Suponha que não temos $d(\xi(t),\Xi^*)\overset{t\to-\infty}{\longrightarrow}0$. Então existe $\varepsilon>0$ e uma sequência $s_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ com $s_n\in[t_n,t_{n+1})$ tal que $d(\xi(-s_n),\Xi^*)\geq\varepsilon$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $d(\xi(-t_n),\Xi^*)<\varepsilon$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

   Então $\xi(-s_n)\in K=\{z\in\mathscr{A}:d(z,\Xi^*)\geq\varepsilon\}$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como K é um compacto de $\mathscr{A}$, pelo lema anterior, é atraído por Ξ. Assim, existe $\tau>0$ com $d(T(t)z,\Xi)<\varepsilon$ para todo $z\in K$ e $t\geq\tau$.

Particularmente, se $s' \in (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $s' \geq \tau + t_1$, teríamos $d(T(s'-t_1)\xi(-s'),\Xi) = d(\xi(-t_1),\Xi) < \varepsilon$, o que é um absurdo, pois $d(\xi(-t_n),\Xi^*) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e Ξ e Ξ^* possuem uma vizinhança disjunta.

ii) Se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$, o resultado segue imediatamente do item anterior. Mostremos que este é o caso. De fato, se tivermos $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do Lema 3.2.5 e da invariância de $\overline{\xi(\mathbb{T})}$, temos que $\overline{\xi(\mathbb{T})} \subset \Xi$, o que contradiz a hipótese.

□

Lema 3.2.7. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui atrator global $\mathscr{A}$ e um par atrator-repulsor (Ξ,Ξ^*). Se $\xi : \mathbb{T} \to X$ é uma solução global limitada para $T(\cdot)$ por $x \notin \Xi \cup \Xi^*$, então $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$ e $\xi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$. Além disso, se $x \in X \backslash \mathscr{A}$ então, $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi \cup \Xi^*$.

Demonstração. Como $x \notin \Xi^*$, pelo lema 3.2.5, este é atraído por Ξ. Isto é, $\xi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Veja que se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* \neq \varnothing$ pelo lema 3.2.6, $d(\xi(t),\Xi^*) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Mostremos que este é o caso. De fato, se $\overline{\xi(\mathbb{T})} \cap \Xi^* = \varnothing$, do fato de que $\xi(\mathbb{T})$ é invariante e do Lema 3.2.5, devemos ter $\xi(\mathbb{T}) \subset \Xi$, uma contradição.

Agora tome $x \in X \backslash \mathscr{A}$. Se tivermos $\overline{\gamma^+(x)} \cap \Xi \neq \varnothing$, a atração local de Ξ implica que $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi$. Por outro lado, se existe $\delta > 0$ com $\gamma^+(x) \cap \mathscr{O}_\delta(\Xi) = \varnothing$, então afirmamos que $T(t)x \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^*$.

De fato, suponha que não. Então existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $t_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ tal que $d(T(t_n)x,\Xi^*) \geq \varepsilon$. Então considere as soluções $\xi_n : [t_n,\infty) \to X$ dadas por $\xi_n(t) = T(t+t_n)x$ e a solução global $\xi : \mathbb{T} \to X$ com $\xi_n \to \xi$ obtida pelo lema 3.1.4. Então temos que $d(\xi(0),\Xi^*) \geq \varepsilon$ e, assim, $\xi \notin \Xi^*$. Mas também temos que $d(\xi(0),\Xi) \geq \delta$ para todo $t \in \mathbb{T}$, implicando que $\omega(\xi(0)) \cap \Xi = \varnothing$, isto é, $\xi(0) \in \Xi^*$, uma contradição.

□

Corolário 3.2.8. Se $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ é um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e (Ξ,Ξ^*) é um par atrator-repulsor, então $T(\cdot)$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi,\Xi^*\}$.

Demonstração. Basta mostrar que Ξ e Ξ^* são invariantes isolados maximais e o resultado segue do lema anterior.

Da Observação 3.2.2, sabemos que são invariantes e isolados. Mostremos que são maximais. Tome ε de tal forma que $\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi) \cap \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi^*) = \varnothing$ e $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)) = \Xi$. Se $A \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)$ é um conjunto invariante, então Ξ atrai A, uma vez que o Lema 2.2.2 nos diz que Ξ atrai $\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)$. Como A é invariante, devemos ter $A \subset \Xi$, logo Ξ é invariante maximal.

Agora, se $A \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi^*)$ é invariante e $x \in A\backslash\Xi^*$, então $d(T(t)x,\Xi) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ pelo Lema 3.2.5, o que é um absurdo, pois $T(t)x \in \mathscr{O}_\varepsilon(\Xi^*)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Logo não existe tal x e Ξ^* é invariante maximal. □

Com isto podemos começar a estudar a decomposição de Morse do atrator de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo a a família disjunta de conjuntos invariantes isolados. Começamos fixando a definição de decomposição de Morse que utilizaremos.

Definição 3.2.9. Dada uma família crescente $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathscr{A}$, de $n+1$ atratores locais, para $j = 1,\cdots,n$, defina $\Xi_j := A_j \cap A^*_{j-1}$. A n-upla ordenada $\boldsymbol{\Xi} := (\Xi_1,\Xi_2,\cdots,\Xi_n)$ é chamada uma **decomposição de Morse** de $\mathscr{A}$.

No que se segue, nosso objetivo é mostrar que, se $\{T(t) \in C(X) : t \geq 0\}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de invariantes isolatos $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1,\cdots,\Xi_n\}$ e com atrator global $\mathscr{A}$, então uma reordenação de $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$. O resultado a seguir desempenha um papel fundamental neste processo.

Lema 3.2.10. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui atrator global $\mathscr{A}$ e $\Xi \subset \mathscr{A}$ um conjunto invariante isolado. Então Ξ é um atrator local se, e somente se, $W^u(\Xi) = \Xi$.

Demonstração. Seja Ξ um atrator local e $\delta > 0$ tal que $\Xi = \omega(\mathscr{O}_\delta(\Xi))$. Pelo Lema 3.2.4, existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$. Agora, suponha que exista $x \in W^u(\Xi)\backslash\Xi$. Então existe uma solução global $\xi(\cdot)$ por x com $\xi(t) \overset{t\to-\infty}{\to} \Xi$. Em particular, existe $-t_0 \in \mathbb{T}^-$ com $\xi(-t_0) \in \mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)$, logo $\xi(\mathbb{T}) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$, o que é um absurdo, uma vez que $\xi(\mathbb{T})$ e $x \in \xi(\mathbb{T})\backslash\Xi$, contrariando a maximalidade de Ξ.

Para a volta, veja que o Lema 3.2.4 é válido se pedirmos apenas que $W^u(\Xi) = \Xi$. Assim, se $\delta > 0$ é tal que Ξ é o conjunto invariante maximal em $\mathscr{O}_\delta(\Xi)$, então existe $\delta' > 0$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$. Pelo Lema 2.2.2, $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi))$ é invariante, logo $\omega(\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi)) \subset \Xi$, completando a demonstração.

□

Lema 3.2.11. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à família disjunta de conjuntos invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1,\cdots,\Xi_n\}$. Então, existe um $1 \leq k \leq n$ tal que Ξ_k é um atrator local para $T(\cdot)$.

Demonstração. Do lema 3.2.10, se não existe um atrator local em $\boldsymbol{\Xi}$ temos que, para cada $1 \leq i \leq n$, existe uma solução global $\xi_i : \mathbb{R} \to \mathscr{A}$ tal que $\xi_i(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_i$ e $\xi_i(t) \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$ com $j \neq i$. Isto produz uma estrutura homoclínica e nos dá uma contradição. □

Feito isto, podemos descrever precisamente como construir uma decomposição de Morse de um semigrupo dinamicamente gradiente. De fato, seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à uma família disjunta de invariantes isolados $\mathbf{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Já vimos que podemos reordenar a família de forma que Ξ_1 seja um atrator local. Então cada Ξ_i, com $i > 1$, está contido em Ξ_1^* e, se $\xi : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ é uma solução global por $a \in \mathscr{A} \backslash (\Xi_1 \cup \Xi_1^*)$, então

$$\Xi_1^* \stackrel{t \to -\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} \Xi_1$$

Já sabemos que Ξ^* é invariante, então faz sentido considerarmos a restrição de $T(\cdot)$ a $\Xi_1^* =: \Xi_{1,0}^*$, que é um semigrupo dinamicamente gradiente em Ξ_1^* relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_2, \cdots, \Xi_n\}$ e podemos reordenar novamente a família de forma que Ξ_2 seja um atrator local para esta restrição.

Se $\Xi_{2,1}^*$ é o repulsor de Ξ_2 para $T(\cdot)$ restrito a Ξ_1^*, podemos considerar a restrição de $T(\cdot)$ a $\Xi_{2,1}^*$. Esta restrição é um semigrupo dinamicamente gradiente em $\Xi_{2,1}^*$ relativo à família disjunta de invariantes isolados $\{\Xi_3, \cdots, \Xi_n\}$.

Prosseguindo desta forma, após um número finito de passos, obtemos uma reordenação de $\{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ de modo que Ξ_j é um atrator local para a restrição de $T(\cdot)$ a $\Xi_{j,j-1}^*$ $(\Xi_{0,-1}^* := \mathscr{A})$.

Com esta construção, se uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ satisfaz

$$\Xi_\ell \stackrel{t \to -\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \stackrel{t \to \infty}{\longrightarrow} \Xi_k \tag{3.3}$$

então $\ell \geq k$.

Provaremos que esta reordenação d família $\{\Xi_1, \ldots, \Xi_n\}$ (que denotaremos da mesma forma) é, de fato, uma decomposição de Morse para $\mathscr{A}$ com os atratores locais $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$ definidos da seguinte forma: $A_0 = \varnothing$, $A_1 = \Xi_1$ e para $2 \leq j \leq n$

$$A_j = A_{j-1} \cup W^{\mathrm{u}}(\Xi_j) = \cup_{i=1}^{j} W^{\mathrm{u}}(\Xi_j). \tag{3.4}$$

Já vimos que $A_n = \mathscr{A}$.

Lema 3.2.12. Para cada $0 \leq j \leq n$, A_j (como definido acima) é compacto.

Demonstração. Vamos mostrar por indução. O resultado é trivial para $j = 0, 1$. Suponha que vale para A_{j-1} e mostremos que vale para A_j. Como $A_j \subset \mathscr{A}$, basta mostrar que A_j é fechado. Suponha, por absurdo, que exista uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em A_j tal que $x_n \to x \in \mathscr{A} \backslash A_j$. Então existe n_0 tal que $x_n \in W^u(\Xi_j) \backslash \Xi_j$ para todo $n \geq n_0$, pois do contrário existiria uma subsequência convergente no compacto $A_{j-1} \cup \Xi_j$. Sem perda de generalidade, vamos assumir $n_0 = 1$.

Então existe $\delta > 0$ tal que $x \notin \mathscr{O}_\delta(\Xi_j \cup A_{j-1})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a solução $\xi_n : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ por x_n com $\xi_n(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$. Logo, existem $t_n \in \mathbb{T}$ tal que $d(\xi_n(t_n), \Xi_j) = \delta$ e $d(\xi_n(t), \Xi_j) \leq \delta$ para todo $t \leq t_n$. Como a vizinhança $\mathscr{O}_\delta(\Xi_j)$ converge em um tempo finito para a vizinhança $\mathscr{O}_\delta(A_{j-1})$ (ver 3.3 e 3.4), a sequência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e, portanto, possui uma subsequência $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Seja $\bar{t} \in \mathbb{T}$ tal que $-t_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \bar{t}$.

Tome agora as soluções globais $\tilde{\xi_{n_k}}(\cdot) = \xi_{n_k}(\cdot + t_{n_k})$. Pelo Lema 3.1.4, podemos assumir que existe solução global ξ_0 tal que $\tilde{\xi_{n_k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \xi_0$ com $d(\xi_0(t), \Xi_j) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$. Logo $\xi_0(\bar{t}) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\xi}_{n_k}(-t_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \xi_{n_k}(0) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Assim, ξ_0 é uma solução global que passa por x com $\xi_0 \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$ e, portanto, $x \in A_j$, um absurdo, mostrando que A_j é compacto.

□

Teorema 3.2.13. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ reordenada de maneira que Ξ_j é um atrator para a restrição de $T(\cdot)$ a $\Xi^*_{j-1,j-2}$ ($\Xi^*_{0,-1} := \mathscr{A}$).

Então A_j definido em (3.4) é um atrator local para $T(\cdot)$ em X, $\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$ e $\boldsymbol{\Xi}$ é uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.5, é suficiente provar que A_j é um atrator local para $T(\cdot)$ restrito ao atrator global $\mathscr{A}$. Agora faremos algumas afirmações técnicas.

Afirmação 1: Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathscr{O}_\delta(A_j) \cap (\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i) = \varnothing$.

De fato, do contrário existiria uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bigcup_{i=j+1}^n \Xi_i$ com $x_n \to A_j$. Como estamos lidando com um número finito de Ξ's, podemos assumir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Xi_k$ fixado, $j+1 \leq k \leq n$. Como A_j e Ξ_k são compactos, também podemos assumir, passando a uma subsequência, que $x_n \to x \in A_j \cap \Xi_k = \varnothing$, uma contradição.

Afirmação 2: Existem $\delta < \varepsilon$ e $\delta' < \delta$ tais que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathscr{A}) \subset \mathscr{O}_\delta(A_j) \cap \mathscr{A}$. De fato, se este não é o caso, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathscr{A} \backslash A_j$ com $d(x_n, A_j) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma solução global $\xi_n : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ por x_n e uma seqüência $t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, tal que $d(\xi_n(t), A_j) \leq \delta$ para todo $t \in [0, t_k)$ e $d(\xi_k(t_k), A_j) \geq \delta$.

Então existe uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ com $\xi_n \to \xi$ tal que $d(\xi(t), A_j) \leq \delta$ para todo $t \leq 0$. Como $T(\cdot)$ é dinamicamente gradiente, temos que $\xi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi_i$, para algum $1 \leq i \leq j$ e, assim, $\xi(0) \in A_j$. Por outro lado, obtemos também que $d(\xi(0), A_j) \geq \delta$. Em particular, $\xi(0) \notin A_j$. Uma contradição.

Pela afirmação 2, temos que $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathscr{A})$ atrai $\mathscr{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathscr{A}$ e, pela invariância de $\omega(\mathscr{O}_{\delta'}(A_j) \cap \mathscr{A})$, está contido em A_j provando que A_j é um atrator local em $\mathscr{A}$.

Agora provemos que $\Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$. É claro que $A_j \supset \bigcup_{i=1}^{j} \Xi_i$ e $A^*_{j-1} = \{z \in \mathscr{A} : \omega(z) \cap A_{j-1} = \varnothing\} \supset \bigcup_{i=j}^{n} \Xi_i$. Assim, $A_j \cap A^*_{j-1} \supset \Xi_j$.

Por outro lado, dado $x \in A_j \cap A^*_{j-1}$ e uma solução global $\xi : \mathbb{T} \to \mathscr{A}$ por x, temos

$$\Xi_\ell \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_k$$

com $k \leq \ell \leq j$ (pois $x \in A_j$) e $j \leq k \leq \ell$ (pois $x \in A^*_{j-1}$). Logo $k = \ell = j$ e $x \in \Xi_j$. Portanto $A_j \cap A^*_{j-1} \subset \Xi_j$ e temos a igualdade. $\square$

Proposição 3.2.14. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$ reordenados de maneira que constituam uma decomposição de Morse de $\mathscr{A}$. Então,

$$\bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A^*_j) = \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j.$$

Demonstração. Tome $x \in \Xi_j = A_j \cap A^*_{j-1}$, com $1 \leq j \leq n$. Lembre-se que $A_j \subset A_{j+1} \subset \cdots \subset A_n$ e $A^*_{j-1} \subset A^*_{j-2} \subset \cdots \subset A^*_0$, logo

$$x \in A_j \cap A^*_{j-1} = \bigcap_{i=j}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{j-1} A^*_i \subset \bigcap_{i=j}^{n} (A_i \cup A^*_i) \cap \bigcap_{i=0}^{j-1} (A^*_i \cup A_i) = \bigcap_{i=0}^{n} (A_i \cup A^*_i)$$

E temos uma inclusão.

Agora, tome $x \in \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A^*_j)$. Considere uma partição (I, J) de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_i$ para todo $i \in I$ e $x \in A^*_j$ para todo $j \in J$. Como os A_i's formam uma sequência crescente de intervalos encaixados, se $k = \min I$, então $I = \{k, k+1, \ldots, n\}$ e $J = \{0, \ldots, k-1\}$. Logo $x \in A_k \cap A^*_{k-1} = \Xi_k$ e temos a outra inclusão. $\square$

A partir de agora iremos de fato construir a função de Lyapunov para o semigrupo dinamicamente gradiente $T(\cdot)$.

Lema 3.2.15. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui atrator global $\mathscr{A}$. A função $h : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) := \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)x, \mathscr{A}),$$

está bem definida, é contínua, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente e $h^{-1}(0) = \mathscr{A}$.

Demonstração.

1. A função está bem definida: Fixe $x \in X$. Como $\mathscr{A}$ atrai $\{x\}$, existe $\tau \in \mathbb{T}^+$ tal que $T(t)x \in \mathscr{O}_1(\mathscr{A})$ para todo $t \geq \tau$, portanto a imagem de $[\tau, \infty)$ por $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto d(T(t)x, \mathscr{A}) \in \mathbb{R}$ é limitada por 1. Por outro lado, da compacidade de $[0, \tau]$ e da continuidade de $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto d(T(t)x, \mathscr{A}) \in \mathbb{R}$, segue que a imagem de $[0, \tau]$ também é limitada. Assim, o supremo existe e h está bem definida.

2. h é contínua: Primeiramente, suponha que $x \in \mathscr{A}$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_\delta(\mathscr{A})) \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{A})$. Logo, se y é tal que $d(x,y) < \delta$, temos $h(y) < \varepsilon$. Assim, $d(h(x),h(y)) = d(0,h(y)) < \varepsilon$ e temos a continuidade de h em x.

   Se $x \in X \backslash \mathscr{A}$, tome $\varepsilon \in (0, d(x_0, \mathscr{A}))$, V uma vizinhança limitada de x com $d(V,\mathscr{A}) > \varepsilon$ e $\tau > 0$ tal que $\gamma^+(T(\tau)V) \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\mathscr{A})$ (existe pois $\mathscr{A}$ atrai V). Então $h(y) = \sup_{0 \le s \le \tau} d(T(s)x, \mathscr{A})$ para todo $y \in V$ e, como $T(\cdot)$ e a distância são contínuas, segue a continuidade em x. Portanto h é contínua em todo $x \in X$.

3. $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente: Sejam $t_1 \geq t_2$. Então

$$\begin{aligned} h(T(t_1)x) &= \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_1)x, \mathscr{A}) = \sup_{t \geq t_1} d(T(t)x, \mathscr{A}) \\ &\leqslant \sup_{t \geq t_2} d(T(t)x, \mathscr{A}) = \sup_{t \in \mathbb{T}^+} d(T(t)T(t_2)x, \mathscr{A}) = h(T(t_2)x). \end{aligned}$$

4. $h^{-1}(0) = \mathscr{A}$: A igualdade é óbvia.

$\square$

Proposição 3.2.16. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e (Ξ, Ξ^*) um par atrator-repulsor. Então, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(i) Dado $x \in X$, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto f(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente.

(ii) $f^{-1}(0) = \Xi$ e $f^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = \Xi^*$.

(iii) Dado $x \in X$, se $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in (\Xi \cup \Xi^*)$.

Demonstração. Para esta demonstração, definiremos duas funções auxiliares. Como Ξ e Ξ^* são fechados e disjuntos em $\mathscr{A}$, podemos definir, para cada $x \in X$, a função de Urysohn $l : X \to [0,1]$ associada a (Ξ, Ξ^*) por

$$l(x) := \frac{d(x,\Xi)}{d(x,\Xi) + d(x,\Xi^*)}$$

que é uniformemente contínua em X e $l^{-1}(0) = \Xi$ e $l^{-1}(1) = \Xi^*$.

Definamos agora $k : X \to \mathbb{R}$ por

$$k(x) := \sup_{t \in \mathbb{T}^+} l(T(t)x),$$

afirmamos que k é contínua, $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x)$ é decrescente para cada $x \in X$, $k^{-1}(0) = \Xi$ e $k^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = \Xi^*$.

Para provar que $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x) \in [0,1]$ é decrescente, fixe $x \in X$ e note que se $0 \leq t_2 \leq t_1$, temos

$$\begin{aligned} k(T(t_1)x) &= \sup_{t \in \mathbb{T}^+} l(T(t)T(t_1)x) = \sup_{t \geq t_1} l(T(t)x) \\ &\leq \sup_{t \geq t_2} l(T(t)x) = \sup_{t \geq 0} l(T(t+t_2)x) = k(T(t_2)x). \end{aligned}$$

Como $l^{-1}(0) = \Xi$, $l^{-1}(1) = \Xi^*$ e tanto Ξ quanto Ξ^* são invariantes, temos que $k(\Xi) = \{0\}$ e $k(\Xi^*) = \{1\}$. Tome agora $x \in X$ tal que $k(x) = 0$, então $l(T(t)x) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Em particular, $0 = l(T(0)x) = l(x)$, e assim, $x \in \Xi$, mostrando que $k^{-1}(0) = \Xi$.

Tome $x \in \mathscr{A}$ tal que $k(x) = 1$. Suponha, por absurdo, que $x \notin \Xi^*$. Então $\omega(x) \subset \Xi$. Como $\omega(x)$ atrai x,temos que $\lim_{t \to \infty} l(T(t)x) = 0$. Assim, existe um $\tau > 0$ tal que $k(x) = \sup_{0 \leq t \leq \tau} l(T(t)x)$.

Da compacidade de $[0,\tau]$, existe $t' \in [0,\tau]$ tal que $l(T(t')x) = k(x) = 1$, o que ocorre quando $T(t')x \in \Xi^*$. Consequentemente $\omega(x) = \omega(T(t')x) \subset \Xi^*$, uma contradição. Logo devemos ter $x \in \Xi^*$ e, portanto, $k^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = \Xi^*$.

Por fim, vamos mostrar que se $x \in \mathscr{A}$ e $k(T(t)x) = k(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ então $x \in \Xi \cup \Xi^*$. Faremos isso mostrando que se $x \notin \Xi^*$, então $x \in \Xi$. De fato, $x \notin \Xi^*$, então $\omega(x) \subset \Xi$. Como $\omega(x)$ atrai x, temos que $k(x) = \lim_{t \to \infty} k(T(t)x) = 0$. Pelo que já foi provado, isso implica que $x \in \Xi$, como queríamos mostrar.

Agora iremos demonstrar a continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ para Ξ, Ξ^* e $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ separadamente.

Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^*:

Como $l(x) \leq k(x) \leq 1$, para todo $x \in X$, dado $x_0 \in \Xi^*$ e $x \in X$ temos que

$$|k(x) - k(x_0)| = 1 - k(x) \leq 1 - l(x) = |l(x) - l(x_0)|$$

Como $l : X \to \mathbb{R}$ é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica $|k(x) - k(x_0)| \leq |l(x) - l(x_0)| < \varepsilon$

Logo k é contínua em x_0.

Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em Ξ.

Pela continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $l(\mathscr{O}_\delta(\Xi)) \subset [0,\varepsilon)$. Do Lema 3.2.4, existe $\delta' \in (0,\delta)$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$, do que concluímos que $k(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset [0,\varepsilon]$.

Continuidade de $k : X \to \mathbb{R}$ em $X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$.

Dado $x_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$, do Lema 3.2.7, ou $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi) = 0$, ou $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi^*) = 0$.

Suponha que $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi^*) = 0$, então $k(x_0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de $l : X \to \mathbb{R}$ em Ξ^* existe um aberto $V \supset \Xi^*$ tal que $l(V) \subset (1-\varepsilon, 1]$. Seja $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)x_0 \in V$. Uma vez que $T(t_0)$ é contínua, existe um aberto $U \ni x_0$ tal que $T(t_0)U \subset V$. Logo $k(x) \geq l(T(t_0)x > 1-\varepsilon$ para todo $x \in U$ e k é contínua em x_0.

Suponha agora que $x_0 \in X \backslash (\Xi \cup \Xi^*)$ e $\lim_{t\to\infty} d(T(t)x_0, \Xi) = 0$, então $l(x_0) > 0$. Pela continuidade de l, tome $\delta > 0$ tal que $l(\mathscr{O}_\delta(\Xi)) \subset [0, \frac{l(x_0)}{2})$. Do Lema 3.2.7, existe um $\delta' \in (0, \delta)$ tal que $\gamma^+(\mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)) \subset \mathscr{O}_\delta(\Xi)$. Seja $t_0 > 0$ tal que $T(t_0)x_0 \in \mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)$. Da continuidade de $T(t_0)$, existe um aberto $U_1 \ni x_0$ tal que $T(t_0)U_1 \subset \mathscr{O}_{\delta'}(\Xi)$. Então, para todo $x \in U_1$ e $t \geq t_0$ temos que $T(t)x \in \mathscr{O}_\delta(\Xi)$. Novamente pela continuidade de l, tome um aberto $U_2 \ni x_0$ tal que $l(x) > \frac{l(x_0)}{2}$ para todo $x \in U_2$ e escreva $U := U_1 \cap U_2$. Desta forma, para todo $x \in U$ vale que $k(x) = \sup_{0 \leq t \leq t_0} l(T(t)x)$. Argumentando como antes, obtemos a continuidade de k em x_0.

Seja $h : X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 3.2.15 e defina $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) := k(x) + h(x), \ x \in X.$$

A continuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ segue da continuidade de k (provada acima) e de h (lema anterior).

Como $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto k(T(t)x)$ e $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto h(T(t)x)$ são decrescentes para cada $x \in X$, segue que $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto f(T(t)x)$ também e decrescente, de onde temos (i).

É fácil ver que $f^{-1}(0) = \Xi$ e $f^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = k^{-1}(1) \cap \mathscr{A} = \Xi^*$, obtendo (ii).

Para demonstrar (iii), tome $x \in X$ tal que $f(T(t)x) = f(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então a monotonicidade de f implica que $h(T(t)x) = h(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$ e portanto $h(x) = 0$. Segue que $x \in \mathscr{A}$ e neste caso, temos que $k(T(t)x) = k(x)$. Assim $x \in \Xi \cup \Xi^*$ completando a prova. $\square$

Teorema 3.2.17. Seja $\{T(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}$ um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$ e uma família disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi} = \{\Xi_1, \cdots, \Xi_n\}$. Então, $T(\cdot)$ é um semigrupo gradiente relativamente $\boldsymbol{\Xi}$ se, e somente se, é um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à $\boldsymbol{\Xi}$. Além disso, a função de Lyapunov $V : X \to \mathbb{R}$ de um semigrupo dinamicamente gradiente relativo à $\boldsymbol{\Xi}$ pode ser escolhida de modo que $V(\Xi_m) = m-1$, $m = 1, \cdots, n$.

Demonstração. Já mostramos que um semigrupo gradiente relativamente à coleção disjunta de invariantes isolados $\boldsymbol{\Xi}$ é um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à $\boldsymbol{\Xi}$.

Seja $T(\cdot)$ um semigrupo dinamicamente gradiente relativamente à Ξ reordenada de modo que seja uma decomposição de Morse para $\mathscr{A}$, com os atratores locais $\varnothing = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = \mathscr{A}$ definidos anteriormente e os repulsores associados $\varnothing = A_n^* \subset A_{n-1}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathscr{A}$ de forma que, para cada $j = 0, 1, \cdots, n$, temos $\Xi_j = A_j \cap A_{j-1}^*$.

Seja $h : X \to \mathbb{R}$ a função definida no Lema 3.2.15 e, para cada $j = 0, \ldots, n$, $k_j : X \to \mathbb{R}$ a função construída na Proposição 3.2.16 para o par atrator-repulsor A_j, A_j^*.

Afirmamos que a função $V : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(x) := h(x) + \sum_{j=1}^{n} k_j(x), \; x \in X.$$

é uma função de Lyapunov e, portanto, $T(\cdot)$ é um semigrupo gradiente relativamente à Ξ.

É consequência imediata as propriedades demonstradas para h e k_j que V é contínua e $\mathbb{T}^+ \ni t \mapsto V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ é decrescente.

Mostremos que se existe $x \in X$ tal que $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$, então $x \in \bigcup_{j=1}^{n} \Xi_j$. De fato, da monotonicidade de $t \mapsto h(T(t)x)$ e $t \mapsto k_j(T(t)x)$, segue que $h(T(t)x) = h(x)$ e $k_j(T(t)x) = k_j(x)$ para todo $t \in \mathbb{T}^+$. Logo

$$f_j(T(t)x) = k_j(T(t)x) + h(T(t)x) = k_j(x) + h(x) = f_j(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^+.$$

Pela Proposição 3.2.16, temos que $x \in (A_j \cup A_j^*)$, para cada $j = 0, 1, \cdots, n$, isto é, $x \in \bigcap_{j=0}^{n} (A_j \cup A_j^*) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} \Xi_j$, como queríamos mostrar.

Para a última parte do teorema, veja que se $m \in \{1, \cdots, n\}$ e $x \in \Xi_m = A_m \cap A_{m-1}^*$, segue que $x \in A_m \subset A_{m+1} \subset \cdots \subset A_n = \mathscr{A}$ e $x \in A_{m-1}^* \subset A_{m-2}^* \subset \cdots \subset A_0^* = \mathscr{A}$. Logo $k_j(x) = 0$ se $m \leqslant j \leqslant n$ e $k_j(x) = 1$ se $1 \leqslant j \leqslant m-1$. Assim,

$$\begin{aligned} V(x) = h(x) + \sum_{j=1}^{n} k_j(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} k_j(x) + \sum_{j=m}^{n} k_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} 1 + \sum_{j=m}^{n} 0 = m - 1. \end{aligned}$$

□

3.3 Semigrupos gradientes são estáveis por perturbação

Com a equivalência provada no teorema anterior e o teorema de estabilidade para semigrupos dinamicamente gradiente sob perturbação, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. Seja $\{T_\eta(t) \in C(X) : t \in \mathbb{T}^+\}_{\eta \in [0,1]}$, uma família de semigrupos contínua e coletivamente assintoticamente compacta em $\eta = 0$. Suponha que

i) $T_\eta(\cdot)$ possui um atrator global $\mathscr{A}_\eta$ para todo $\eta \in [0,1]$ e $\cup_{\eta\in[0,1]}\mathscr{A}_\eta$ é limitado.

ii) para cada $\eta \in [0,1]$, $\mathscr{A}_\eta$ contém uma família finita de invariantes isolados $\mathbf{\Xi}_\eta = \{\Xi_{1,\eta},\ldots,\Xi_{n,\eta}\}$ tal que $dist_H(\Xi_{i,\eta},\Xi_{i,0}) \stackrel{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ para cada $1 \leq i \leq n$.

iii) Existe $\delta > 0$ tal que $\Xi_{i,\eta}$ é o invariante maximal em $\mathscr{O}_\delta(\Xi_{i,\eta})$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $\eta \in [0,1]$.

iv) $T_0(\cdot)$ é gradiente relativamente à $\mathbf{\Xi}_0$.

Então existe $\eta_0 \in (0,1]$ tal que para todo $\eta \in [0,\eta_0]$, $T_\eta(\cdot)$ é gradiente.

CAPÍTULO

4

TEORIA NÃO AUTÔNOMA

Nos anos recentes, a análise das propriedades qualitativas de problemas não-autônomos em espaços de fase gerais (espaços de Banach de dimensão infinita ou espaços métricos gerais) tem recebido bastante atenção. Em particular, o estudo dos atratores pullback, skew-product e uniforme desenvolveu uma área de pesquisa ampla e profunda, fornecendo informação qualitativa sobre a dinâmica assintótica de um número crescente de modelos não autônomos de distintas áreas do conhecimento como, Física, Biologia, Economia e Engenharia, entre outras.

Os diferentes conceitos de atratores têm provado sua importância por diferentes motivos no entendimento do comportamento assintótico de soluções de problemas não autônomos. No decorrer deste projeto, combinaremos os conceitos de atrator pullback e atrator uniforme de forma a dar o *framework* correto para descrever as soluções destes problemas. Nosso objetivo central é investigar a dinâmica assintótica para frente (dinâmica *forwards*) de equações diferenciais não autônomas. A seguir, iremos desenvolver a teoria abstrata de sistemas dinâmicos não autônomos e, posteriormente, exemplificaremos o método desenvolvido através do estudo de uma equação diferencial ordinária.

Definição 4.0.1. Sejam (X, d_X) e (Σ, d_Σ) espaços métricos e $\{\Theta(t) \in C(\Sigma) : t \in \mathbb{R}^+\}$ um semigrupo em Σ. Então a família $\{\mathscr{K}(t,\sigma) \in C(X) : t \in \mathbb{R}^+,\ \sigma \in \Sigma\}$ é um **cociclo** relativo a $\Theta(\cdot)$ se satisfaz

(i) $\mathscr{K}(0,\sigma)x = x$ para todo $x \in X$ e $\sigma \in \Sigma$;

(ii) $\mathscr{K}(t+s,\sigma) = \mathscr{K}(t,\Theta(s)\sigma)\mathscr{K}(s,\sigma),$ para todo $t,s \in \mathbb{R}^+$ e $\sigma \in \Sigma$;

(iii) O mapa $\mathbb{R}^+ \times \Sigma \times X \ni (t,\sigma,x) \to \mathscr{K}(t,\sigma)x \in X$ é contínuo.

Além disso, considere $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ com a métrica produto. Definimos o semigrupo skew-product $\{\Pi(t) \in C(\mathbb{X}) : t \in \mathbb{R}^+\}$ como

$$\Pi(t)(x,\sigma) = (\mathscr{K}(t,\sigma)x, \Theta(t)\sigma) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } (x,\sigma) \in \mathbb{X}$$

O semigrupo $\Theta(\cdot)$ é chamado de **semigrupo driving**.

Veja que $\Pi(\cdot)$ é de fato um semigrupo em $\mathbb{X}$, pois

$$\Pi(0)(x,\sigma) = (\mathscr{K}(0,\sigma)x, \Theta(0)\sigma) = (x,\sigma)$$

e

$$\Pi(t+s)(x,\sigma) = (\mathscr{K}(t+s,\sigma)x, \Theta(t+s)\sigma) =$$

$$(\mathscr{K}(t,\Theta(s)\sigma)\mathscr{K}(s,\sigma)x, \Theta(t)\Theta(s)\sigma) = \Pi(t)\Pi(s)(x,\sigma)$$

Além disso, a continuidade de $\Pi(\cdot)$ segue da continuidade de $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$.

No caso particular em que Σ é unitário, digamos $\Sigma = \{\sigma_0\}$, temos que $\Theta(t)\sigma_0 = \sigma_0$ para todo $t \geq 0$. Podemos então gerar um semigrupo em X dado por $T(t)x = \mathscr{K}(t,\sigma_0)x$. O semigrupo skewproduct pode ser visto então como $\Pi(t)(x,\sigma_0) = (T(t)x,\sigma_0)$. Este é o caso quando consideramos uma equação diferencial autônoma. O resultado a seguir nos dá condições para que $\Pi(\cdot)$ possua um atrator global.

Teorema 4.0.2. Sejam (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$ e $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ com a métrica produto. Então o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ associado possui atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$ se, e somente se

(i) $\Theta(\cdot)$ possui atrator global $\mathscr{S}$ em Σ;

(ii) $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ é **limitado dissipativo**, isto é, existe um limitado $B_0 \subset X$ tal que dados limitados $B \subset X$ e $S \subset \Sigma$, existe $t_0 = t_0(B,S) \geq 0$ tal que $\mathscr{K}(t,\sigma)B \subset B_0$ para todo $t \geq t_0$ e $\sigma \in \Sigma$ (dizemos ainda que, neste caso, B_0 absorve limitados de X sob a ação de $\mathscr{K}(t,\sigma)$ uniformemente para σ em limitados de Σ);

(iii) $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ é **assintoticamente compacto**, isto é, dadas sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+, X$ e Σ, respectivamente, com $t_n \to \infty$, a sequência $(\mathscr{K}(t_n,\sigma_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em X.

Demonstração. Sabemos que $\Pi(\cdot)$ possui atrator global se, e somente se, é assintoticamente compacto e limitado dissipativo. $\Pi(\cdot)$ ser limitado dissipativo significa que existe um conjunto limitado $C \subset \mathbb{X}$ que absorve limitados de $\mathbb{X}$. Uma vez que todo limitado de $\mathbb{X}$ está contido em um conjunto do tipo $B \times S$, onde B,S são limitados de X e Σ, existem limitados $B_0 \subset X$ e $S_0 \subset \Sigma$ tais que S_0 absorve limitados de Σ e B_0 absorve limitados de X.

Logo $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são limitado dissipativos. Reciprocamente, é fácil ver que se $B_0 \subset X$ absorve limitados de X sob a ação de $\mathscr{K}$ uniformemente em limitados de Σ e $S_0 \subset \Sigma$ absorve limitados de Σ sob a ação de $\Theta(\cdot)$, então $B_0 \times S_0$ absorve limitados de $\mathbb{X}$. Logo $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são limitado dissipativos se, e somente se, $\Pi(\cdot)$ é limitado dissipativo.

Além disso, se $\Pi(\cdot)$ é assintoticamente compacto, dadas sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+, X$ e Σ, respectivamente, com $t_n \to \infty$, a sequência $(\Pi(t_n)(x_n,\sigma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em X. Reciprocamente, dadas sequências $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^+, X$ e Σ, respectivamente, com $t_n \to \infty$, a sequência $(\Theta(t_n)\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Σ e $(\mathscr{K}(t_n,\sigma_n)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em X. Logo, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ são assintoticamente compactos se, e somente se, $\Pi(\cdot)$ é assintoticamente compacto e segue o resultado. □

Fixemos a notação $\mathscr{P} := \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s\}$

Definição 4.0.3. Uma família $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é dita um **processo de evolução** se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $S(t,t)x = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$;

(ii) $S(t,s) = S(t,r)S(r,s)$ para todo $t \geq r \geq s$;

(iii) o mapa $\mathscr{P} \times X \ni (t,s,x) \to S(t,s)x \in X$ é contínuo.

Muitas vezes será conveniente nos referirmos ao processo de evolução $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ como $S(\cdot,\cdot)$.

Proposição 4.0.4. Se $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ é uma solução global de um semigrupo $\Theta(\cdot)$, a família $\{S_\eta(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ definida por

$$S_\eta(t,s) = \mathscr{K}(t-s,\eta(s)) \text{ para todo } (t,s) \in \mathscr{P}$$

é um processo de evolução em X.

Demonstração. Temos que $S_\eta(t,t)x = \mathscr{K}(0,\eta(t))x = x$ para todo $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$.

Além disso, escrevendo $\eta(r) = \Theta(r-s)\eta(s)$, temos

$$S(t,r)S(r,s) = \mathscr{K}(t-r,\Theta(r-s)\eta(s))\mathscr{K}(r-s,\eta(s)) = \mathscr{K}(t-s,\eta(s)) = S_\eta(t,s)$$

A continuidade de $S(t,s)x$ segue da continuidade de η e de $\mathscr{K}$. □

Se tivermos $S(t,s) = S(t-s,0)$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$, dizemos que $S(\cdot,\cdot)$ é um processo de evolução **autônomo**. Neste caso, a evolução depende apenas do tempo transcorrido, e não explicitamente dos tempos iniciais e finais. Assim, fica bem definido o semigrupo $S(t,s) =: T(t-s)$. Naturalmente, se um processo de evolução não é autônomo, dizemos que ele é **não autônomo**, ou simplesmente um processo de evolução.

Definição 4.0.5. Uma **solução global** do processo de evolução $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ é uma função contínua $\xi : \mathbb{R} \to X$ tal que $S(t,s)\xi(s) = \xi(t)$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$. Quando $\{\xi(t) \in X : t \in \mathbb{R}\}$ é limitado, dizemos que ξ é uma **solução global limitada**.

Agora vamos definir a noção de invariância para um processo de evolução. Esta definição surge da necessidade de construir soluções globais e, quando aplicada ao caso autônomo, nos leva a um conceito diferente do que o criado no caso autônomo.

Definição 4.0.6. Seja X um espaço métrico e $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em X. Uma família de conjuntos $\{A(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ é dita **invariante** se $S(t,s)A(s) = A(t)$ para todo $(t,s) \in \mathscr{P}$.

Assim, quando se trata de processos de evolução, definimos invariância para uma família de conjuntos, não para um conjunto. Esta não tão sutil mudança fica evidente no seguinte exemplo: considere $S_T(\cdot,\cdot)$ o processo de evolução gerado por um semigrupo $T(\cdot)$ dado por $S_T(t,s) = T(t-s)$ e $\xi(\cdot)$ uma solução global de $T(\cdot)$. Então $\xi(\cdot)$ (isto é, a família de conjuntos unitários $A(t) = \xi(t)$) é invariante para $S_T(\cdot,\cdot)$, porém é a órbita $\xi(\mathbb{R})$ que é invariante para o semigrupo $T(\cdot)$.

Existem dois caminhos para estudar o comportamento assintótico de um processo de evolução $S(\cdot,\cdot)$: fazer $t \to \infty$ (dinâmica *forward*) ou $s \to -\infty$ (dinâmica *pullback*). Em geral, esses dois caminhos nos levam a resultados diferentes, porém no caso particular em que estamos considerando um processo de evolução autônomo, $S(t,s) = T(t-s)$, são claramente equivalentes.

Definição 4.0.7. Seja $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X e $A,B \subset X$. Dizemos que A atrai pullback B no tempo t se

$$\lim_{s \to -\infty} dist_H(S(t,s)B, A) = 0$$

Agora podemos definir a noção de atrator pullback.

Definição 4.0.8. Uma família $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ é um **atrator pullback limitado** de um processo de evolução $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ no espaço métrico X se

(i) $\mathscr{A}(t)$ é compacto para cada $t \in \mathbb{R}$;

(ii) A família $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ é invariante;

(iii) $\mathscr{A}(t)$ atrai pullback conjuntos limitados de X no tempo t para cada $t \in \mathbb{R}$;

(iv) $\cup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{A}(t)$ é limitado.

É fácil ver que o atrator pullback limitado é único, pois se $\{\tilde{\mathscr{A}}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ é outro atrator pullback, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$dist_H(\tilde{\mathscr{A}}(t),\mathscr{A}(t)) = dist_H(S(t,s)\tilde{\mathscr{A}}(s),\mathscr{A}(t)) \leq dist_H(S(t,s)\cup_{s\in\mathbb{R}}\tilde{\mathscr{A}}(s),\mathscr{A}(t)) \stackrel{s\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

e, analogamente, $dist_H(\mathscr{A}(t),\tilde{\mathscr{A}}(t)) = 0$. Logo $\mathscr{A}(t) = \tilde{\mathscr{A}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.0.9. Seja $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Se $S(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback limitado $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\mathscr{A}(t) = \{\xi(t) \in X : \xi : \mathbb{R} \to X \text{ é uma solução global limitada de } S(\cdot,\cdot)\}$$

Demonstração. Seja $\xi : \mathbb{R} \to X$ uma solução global limitada de $S(\cdot,\cdot)$. Fixe $t \in \mathbb{R}$, mostraremos que $\xi(t) \in \mathscr{A}(t)$. Como $\mathscr{A}(t)$ atrai pullback o conjunto $\xi(\mathbb{R})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \leq t$ tal que $dist_H(S(t,s)\xi(\mathbb{R}),\mathscr{A}(t)) \leq \frac{1}{n}$ para todo $s \leq t_n$. Em particular, $dist_H(S(t,t_n)\xi(t_n),\mathscr{A}(t)) = dist_H(\xi(t),\mathscr{A}(t)) \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $n \to \infty$, obtemos que $\xi(t) \in \mathscr{A}(t)$.

Para a outra inclusão, dado $s \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathscr{A}(s)$, podemos proceder como no caso autônomo e obter uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ com $\xi(s) = x$ e $\xi(t) \in \mathscr{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

Definição 4.0.10. Seja $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Dado $B \subset X$ e $t \in \mathbb{R}$, o ω-limite pullback no tempo t de B é definido por

$$\omega(B,t) = \bigcap_{\sigma\leq t}\overline{\bigcup_{s\leq\sigma} S(t,s)B}$$

É claro que $\omega(B,t)$ é fechado, pois é interseção de fechados, e, procedendo como no caso autônomo, temos

$$\begin{aligned}\omega(B,t) = \{y \in X : \text{existem sequências } \{s_n\} \text{ em } (-\infty,t],\ s_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty, \text{ e}\\ \{x_n\} \text{ em } B \text{ tal que } y = \lim_{n\to\infty} S(t,s_n)x_n\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

Teorema 4.0.11. Seja $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ um processo de evolução em um espaço métrico X. Se existe um compacto $K \subset X$ que atrai pullback limitados de X no tempo t para todo $t \in \mathbb{R}$, então $S(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ dado por $\mathscr{A}(t) = \omega(K,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{A}(t)}$ é compacto.

Demonstração. Como K é um compacto que atrai a si mesmo, segue que $\omega(K,t) \subset K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como cada $\omega(K,t)$ é fechado, é também compacto. Além disso, da inclusão segue que $\overline{\cup_{t\in\mathbb{R}}\omega(K,t)} \subset K$ e, portanto, também é compacto (em particular, limitado).

Provemos agora a invariância de $\{\mathscr{A}(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$. Fixe $(t,s) \in \mathscr{P}$ e tome $x \in \omega(K,s)$. Então existem sequências $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ em $(-\infty,s]$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tal que $x = \lim_{n\to\infty} S(s,s_n)x_n$. Logo $S(t,s)x = \lim_{n\to\infty} S(t,s)S(s,s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} S(t,s_n)x_n$ e, portanto, $S(t,s)x \in \omega(K,t)$, nos dando uma inclusão.

Tome agora $x \in \omega(K,t)$ com $x = \lim_{n\to\infty} S(t,s_n)x_n$ conforme (4.1). Assuma, sem perda de generalidade, que $s_n \leq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é um compacto que atrai a si mesmo no tempo s, existe $y \in K$ tal que, passando a uma subsequência, $S(s,s_n)x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Isto nos diz que $y \in \omega(K,s)$. Como $S(t,s)y = \lim_{n\to\infty} S(t,s)S(s,s_n)x_n = \lim_{n\to\infty} S(t,s_n)x_n = x$, temos a outra inclusão.

Por fim, provemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\mathscr{A}(t)$ atrai pullback limitados no tempo t. Suponha que não. Então existe $\tau \in \mathbb{R}$ e $B \subset X$ limitado tal que B não é atraído pullback por $\omega(K,\tau)$. Assim, existem $\varepsilon > 0$ e sequências $(x_n)_{x\in\mathbb{N}}$ em B e $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ com $d(S(t,s_n)x_n, \omega(K,\tau)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto e atrai B, $S(\tau,s_n)x_n$ precisa ter uma subsequencia convergente com limite em $\omega(K,\tau)$, uma contradição. □

Corolário 4.0.12. Sejam (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$ e $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ com a métrica produto. Se o semigrupo skew-product Π associado possui atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$, então para toda solução global limitada $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ de $\Theta(\cdot)$, o processo de evolução $\{S_\eta(t,s) = \mathscr{K}(t-s,\eta(s)) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ tem um atrator pullback limitado $\{\mathscr{A}_\eta(t) \subset X : t \in \mathbb{R}\}$ e $\overline{\bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{A}_\eta(t)} \subset \pi_X(\mathbb{A})$.

Demonstração. Mostraremos que $\pi_X(\mathbb{A})$ atrai pullback limitados de X no tempo t para todo $t \in \mathbb{R}$. Fixe $t \in \mathbb{R}$ e tome $B \subset X$ limitado. Veja que, para cada $s \in \mathbb{R}$,

$$dist_H(\mathscr{K}(t-s,\eta(s))B, \Pi_X(\mathbb{A})) \leq dist_H((\mathscr{K}(t-s,\eta(\mathbb{R}))B, \Theta(t-s)\eta(\mathbb{R})), \mathbb{A})$$

Como $\mathbb{A}$ atrai $B \times \eta(\mathbb{R})$ por $\Pi(\cdot)$, temos que

$$dist_H(\mathscr{K}(t-s),\eta(s)B, \Pi_X(\mathbb{A})) \leq dist_H((\mathscr{K}(t-s,\eta(\mathbb{R}))B, \Theta(t-s)\eta(\mathbb{R})), \mathbb{A}) \overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

e o resultado segue do teorema anterior tomando $K = \pi_X(\mathbb{A})$.

□

Podemos agora caracterizar o atrator do semigrupo skew-product em termos dos atratores pullbacks dos processos de evolução associados a soluções globais limitadas do semigrupo diretor.

Teorema 4.0.13. Sejam (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$ e $\mathbb{X}=X\times\Sigma$ com a métrica produto. Se o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ tem um atrator $\mathbb{A}$, então o semigrupo diretor $\Theta(\cdot)$ tem um atrator global $\mathscr{S}$. Se $\eta(\cdot)$ é uma solução global limitada para $\Theta(\cdot)$, então o processo de evolução $\{S_\eta(t,s)\in C(X): t\geq s\}$ dado por $\mathscr{K}(t-s,\eta(s))$ possui atrator pullback limitado $\{\mathscr{A}_\eta(t)\subset X: t\in\mathbb{R}\}$ com $\mathscr{A}_\eta(t)=\{x\in X:(x,\eta(t))\in\mathbb{A}\}$. Mais especificamente,

$$\mathbb{A}=\bigcup_{\eta}\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\mathscr{A}_\eta(t)\times\{\eta(t)\}$$

onde a primeira união é tomada sobre todas as soluções globais limitadas η de $\Theta(\cdot)$.

Demonstração. Uma vez que temos a caracterização dos atratores globais e pullback limitado por soluções globais limitadas (Teoremas 2.1.15 e 4.0.9), basta mostrar que $(\xi(t),\eta(t)):\mathbb{R}\to\mathbb{A}$ é uma solução global limitada de $\Pi(\cdot)$ se, e somente se, $\eta(\cdot)$ é uma solução global limitada de $\Theta(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$ é uma solução global limitada de $S_\eta(\cdot,\cdot)$. De fato, tome $t\geq 0$ e $s\in\mathbb{R}$. Como

$$\Pi(t)(\xi(s),\eta(s))=(\mathscr{K}(t,\eta(s))\xi(s),\Theta(t)\eta(s))=(S_\eta(t+s,s)\xi(s),\Theta(t)\eta(s))$$

Temos que

$$\Pi(t)(\xi(s),\eta(s))=(\xi(t+s),\eta(t+s))$$

se, e somente se,

$$S_\eta(t+s,s)\xi(s)=\xi(t+s) \text{ e } \Theta(t)\eta(s)=\eta(t+s)$$

□

Definição 4.0.14. Sejam (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$ e $\mathbb{X}=X\times\Sigma$ com a métrica produto. O **atrator uniforme** para $(\mathscr{K},\Theta)$ é o conjunto fechado minimal $\mathfrak{A}\subset X$ tal que para cada limitado $B\subset X$ e cada limitado $S\subset\Sigma$, temos

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\sigma\in S} dist_H(\mathscr{K}(t,\sigma)B,\mathfrak{A})=0$$

Segue do Teorema 4.0.2 que

Teorema 4.0.15. Sejam (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a Θ e $\mathbb{X}=X\times\Sigma$ com a métrica produto. Se $\Theta(\cdot)$ possui atrator global $\mathscr{S}$ em Σ e $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, então $(\mathscr{K},\Theta)$ possui um atrator uniforme compacto $\mathfrak{A}$. Além disso, se $\mathbb{A}$ é o atrator global para o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ associado, então $\mathfrak{A}=\pi_X(\mathbb{A})$. Por fim,

$$\mathfrak{A}=\bigcup_{\eta}A_\eta(0)$$

onde a união é tomada sobre todas as soluções globais limitadas η de $\Theta(\cdot)$.

4.1 Equações Diferenciais não autônomas

Nesta seção iremos abordar o caso específico em que estamos estudando o comportamento assintótico de uma equação diferencial não autônoma em $\mathbb{R}^n$ utilizando a teoria abstrata desenvolvida anteriormente. Utilizaremos a letra $\mathbb{J}$ para denotar $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, sem distinção, a menos que dito o contrário.

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t,u), \ t > s \\ u(s) = u_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $f : \mathbb{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que o problema possua solução única para cada $s \in \mathbb{J}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Suponha ainda que a solução $u(\cdot, s, u_0)$ de (4.2) esteja definida em $[s,\infty)$ e que a aplicação $\mathscr{P}_{\mathbb{J}} \times \mathbb{R}^n \ni (t,s,u_0) \mapsto u(t,s,u_0) \in \mathbb{R}^n$ seja contínua, onde $\mathscr{P}_{\mathbb{J}} = \{(t,s) \in \mathbb{J} \times \mathbb{J} : t \geq s\}$.

A função $f : \mathbb{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser vista como uma família de campos vetoriais onde, para cada $t \in \mathbb{J}$, $f(t,\cdot)$ é o campo vetorial que conduz a solução no tempo t. No caso em que $f(t,\cdot) = f(\cdot)$ não depende de t, temos um único campo vetorial e recaímos no caso autônomo como descrito no Exemplo 6.3. Como é de se imaginar, a mudança de um único campo vetorial conduzindo a solução para infinitos campos vetoriais evoluindo com o tempo a conduzi-la faz uma grande diferença na descrição do comportamento assintótico das soluções.

Quando $J = \mathbb{R}$ podemos definir o processo de evolução $\{S(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ dado por $S(t,s)u_0 = u(t,s,u_0)$ para cada $(t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ e $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Se f depende do tempo, como comentado na teoria abstrata, podemos analisar o comportamento assintótico das soluções de (4.2) através da sua dinâmica forwards ou pullback. É natural esperar que tais dinâmicas não estejam relacionadas, uma vez que os campos vetoriais que conduzem a solução em geral são completamente distintos uns dos outros.

Para assegurar um entendimento adequado do método abstrato desenvolvido anteriormente, vamos agora aplicá-lo no estudo de (4.2). Seja Λ o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que, para cada $B \subset \mathbb{R}^n$ limitado, existe uma constante $L_f(B) > 0$ e uma função contínua e crescente $w_{f,B} \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ com $w_{f,B}(0) = 0$, tal que

$$\|f(t,x) - f(\bar{t},\bar{x})\| \leq w_{f,B}(|t-\bar{t}|) + L_f(B)\|x-\bar{x}\| \quad \text{para } t,\bar{t} \in \mathbb{R}^+ \text{ and } x,\bar{x} \in B. \tag{4.3}$$

Em Λ consideramos a métrica ρ da convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Suponha que $f \in \Lambda$ e que f seja *dissipativa*, isto é, existe $M > 0$ e $\delta > 0$ tal que

$$\langle f(t,x), x \rangle \leq -\delta \quad \text{para } t \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| > M, \tag{4.4}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Denote por $\Sigma(f)$ o fecho do conjunto de todas as translações para frente de f relativamente à métrica ρ

$$\Sigma(f) = \overline{\{f(s+\cdot,\cdot)\colon s\in\mathbb{R}^+\}}^{\rho},$$

e defina o semigrupo driving $\Theta(t)\colon \Sigma(f)\to\Sigma(f)$ por $\Theta(t)f(\cdot,\cdot) = f(t+\cdot,\cdot)$ em $\Sigma(f)$.

Dada uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\Sigma(f)$, a condição 4.3 nos diz que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e uniformemente limitada. Logo, segue do Teorema de Arzelà-Ascoli que $\Sigma(f)$ é compacto. Assim, $\Theta(\cdot)$ é trivialmente limitado dissipativo e assintoticamente compacto, logo possui um atrator global $\mathscr{S}$.

Assim, para tratar do comportamento assintótico de uma equação diferencial não autônoma, consideramos uma combinação do fluxo base $\Theta(\cdot)$ em $\Sigma(f)$ e, para cada $\sigma\in\Sigma(f)$, o cociclo $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\ni(t,u_0)\mapsto\mathscr{K}(t,\sigma)u_0\in\mathbb{R}^n$ onde, para cada $u_0\in\mathbb{R}^n$, a função $\mathbb{R}^+\ni t\mapsto\mathscr{K}(t,\sigma)u_0\in\mathbb{R}^n$ é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(t,u), \quad t>0,\\ u(0) = u_0\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Note que as condições impostas sobre f asseguram que as soluções de (4.5) estão definidas para todo $t\geq 0$. De 4.4, obtemos que $K=\overline{B(0,M)}$ atrai pullback limitados de X no tempo t para todo $t\in\mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 4.0.11 segue que $\{S_\eta(t,s)\in C(X)\colon t\geq s\}$ possui um atrator pullback $\{A_\eta(t)\subset X\colon t\in\mathbb{R}\}$.

Conjuntamente, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e $\Theta(\cdot)$ determinam o problema não autônomo (4.2) e o sistema dinâmico não autônomo $(\mathscr{K},\Theta)$ gera um semigrupo $\{\Pi(t)\in C(\mathbb{X})\colon t\in\mathbb{R}^+\}$, onde $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n\times\Sigma(f)$. Além disso, pela dissipatividade de f, o conjunto $\{(x,\sigma)\in\mathbb{X}\colon \|x\|\leq M, \sigma\in\mathscr{S}\}$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{X}$ que atrai subconjuntos limitados de $\mathbb{X}$. Segue que Π tem um atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$ e

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\eta} A_\eta(t)\times\{\eta(t)\} \tag{4.6}$$

onde a união é tomada sobre o conjunto de todas as soluções globais de $\Theta(\cdot)$ em $\mathscr{S}$.

4.2 Estabilidade Estrutural Topológica

Aqui iremos estudar o comportamento de estruturas topológicas de sistemas dinâmicos não autônomos sob perturbação. Vamos iniciar reinterpretando a estrutura de atratores de semigrupos skew-product, cuja estabilidade já foi provada anteriormente, fazendo observações para este caso específico.

Considere (X,d_X) e (Σ,d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$, $\mathbb{X}=X\times\Sigma$ com a métrica produto e $\Pi(\cdot)$ o semigrupo skew-product associado. Assuma que $\Pi(\cdot)$ possui um atrator global $\mathbb{A}$ em $\mathbb{X}$ e uma coleção de invariantes isolados $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$.

Lembre-se que uma estrutura homoclínica em $\mathbb{A}$ é uma subcoleção $\{\mathbb{L}_{i_1},\dots\mathbb{L}_{i_k}\}$ junto com soluções globais $\{(\xi_{i_1},\eta_{i_1}),\dots,(\xi_{i_k},\eta_{i_k})\}$ de Π tal que

$$\mathbb{L}_{i_j} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} (\xi_{i_j},\eta_{i_j})(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{L}_{i_{j+1}} \quad \text{para } i\leq j\leq k$$

com $\mathbb{L}_{i_{k+1}}=\mathbb{L}_{i_1}$. Se $k=1$, pedimos também que a solução não esteja inteiramente contida em $\mathbb{L}_{i_1}$.

Dizemos que $\Pi(\cdot)$ é dinamicamente gradiente relativamente a $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$ se

(i) Toda solução global $(\xi,\eta):\mathbb{R}\to\mathbb{A}$ é tal que

$$\mathbb{L}_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} (\xi,\eta)(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{L}_j \quad \text{para } 1\leq i,j\leq n;$$

(i) Não há estrutura homoclínica em $\mathbb{A}$.

Fixaremos $\mathscr{L}_j=\pi_X(\mathbb{L}_j)$ e $\Xi_j=\pi_\Sigma(\mathbb{L}_j)$.

Além disso, dizemos que $\Pi(\cdot)$ é gradiente relativamente a $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$ se existe uma função contínua $V:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ que é não crescente ao longo de soluções e $V(\mathscr{K}(t,\sigma)x,\Theta(t)\sigma)=V(x,\sigma)$ para todo $t\geq 0$ se, e somente se, $(x,\sigma)\in\mathbb{L}_i$ para algum $1\leq i\leq n$.

Como consequência imediata do que já foi provado para semigrupos, temos

Teorema 4.2.1. Se $\Pi(\cdot)$ é um semigrupo skew-product dinamicamente gradiente relativo a coleção disjunta de invariantes isolados $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$, então existe uma reordenação de $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$ que é uma decomposição de Morse.

Teorema 4.2.2. Se $\Pi(\cdot)$ é um semigrupo skew-product dinamicamente gradiente relativo a coleção disjunta de invariantes isolados $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$, ordenados de forma a serem uma decomposição de Morse, então $\Pi(\cdot)$ é gradiente relativamente a $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$.

Observação 4.2.3. Nas condições acima, se $\eta:\mathbb{R}\to\Sigma$ é uma solução global limitada de Θ, então para cada solução global limitada $\xi:\mathbb{R}\to X$ de $\{S_\eta(t,s)\in\mathbb{X}:(t,s)\in\mathscr{P}\}$ existem $1\leq i<j\leq n$ tais que

$$\mathscr{L}_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}_j$$

$$\Xi_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \eta(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi_j$$

Para cada $\sigma\in\Sigma$, defina a função $V_\sigma:\mathbb{R}\times X\to\mathbb{R}$ por $V_\sigma(t,x):=V(\mathscr{K}(t,\sigma)x,\Theta(t)\sigma)$. Fixado $x\in X$, V_σ é contínua e não crescente ao longo de t. Além disso, se $V(\mathscr{K}(t,\sigma)x,\Theta(t)\sigma)=$

$V(x,\sigma)$ para todo $t \geq 0$, devemos ter $(x,\sigma) \in \mathbb{L}_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Em particular, $\sigma \in \Xi_i$ e existe uma solução global limitada $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ de $\Theta(\cdot)$ por σ e uma solução global ξ_η de $\{S_\eta(t,s) = \mathscr{K}(t-s,\xi(s)) : (t,s) \in \mathscr{P}\}$ tal que $(\xi_\eta(t),\eta(t)) \in \mathbb{L}_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $V(\mathscr{K}(t-s,\eta(s))\xi_\eta(s),\eta(s)) = V(x,\sigma)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\xi_\eta(s) \in \{y \in X : (y,\eta(s)) \in \mathbb{L}_i\}$.

Existem diversas situações possíveis para termos $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$ disjuntos em $\mathbb{X}$. Nós assumiremos o caso em que os $\Xi_i \equiv \mathscr{S}$, onde $\mathscr{S}$ é o atrator global de $\Theta(\cdot)$ e, portanto, $\mathscr{L}_i$'s são todos disjuntos. Essa é a situação que ocorre quando temos uma pequena perturbação não autônoma no problema autônomo. Em particular, isso nos diz que o atrator uniforme também possui uma estrutura similar à gradiente uma vez que se o semigrupo skew-product associado a $(\mathscr{K},\Sigma)$ possuir atrator global $\mathbb{A}$ e for dinamicamente gradiente relativamente a $\{\mathbb{L}_1,\dots,\mathbb{L}_n\}$, ordenados de forma a serem uma decomposição de Morse, com $\Xi_i \equiv \mathscr{S}$, então o atrator uniforme $\mathscr{A}$ de $(\mathscr{K},\Sigma)$ é dinamicamente gradiente com relação a $\{\mathscr{L}_1,\dots,\mathscr{L}_n\}$ no seguinte sentido: se $x \in \mathscr{A}$, então existe uma solução global limitada $\eta : \mathbb{R} \to \mathscr{S}$ e uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ do processo de evolução $S_\eta(\cdot,\cdot)$ tal que

$$\mathscr{L}_i \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}_j$$

para algum $1 \leq i < j \leq n$. Além disso, não há **estrutura homoclínica no atrator uniforme**, no sentido de que não há uma subcoleção $\{\mathscr{L}_{i_1},\dots,\mathscr{L}_{i_k}\}$ e soluções globais limitadas η_{i_j} de Θ e soluções globais ξ_{i_j} de $S_{\eta_{i_j}}(\cdot,\cdot)$ com $1 \leq j \leq k$ tais que

$$\mathscr{L}_{i_j} \overset{t\to-\infty}{\longleftarrow} \xi_{\eta_{i_j}}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathscr{L}_{i_{j+1}}$$

com $\mathscr{L}_{i_{k+1}} = \mathscr{L}_1$.

4.3 Semigrupos skew-product dinamicamente gradiente sob perturbação

Novamente, iremos reinterpretar os resultados provados para semigrupos no contexto de semigrupo skew-product.

Sejam (X, d_X) e (Σ, d_Σ) espaços métricos, $\Theta(\cdot)$ um semigrupo em Σ, $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ um cociclo relativo a $\Theta(\cdot)$, $\mathbb{X} = X \times \Sigma$ com a métrica produto e Π o semigrupo skew-product associado.

Considere $(C_\eta)_{\eta\in[0,1]}$ uma família de subconjuntos fechados com $\Theta(C_\eta) \subset C_\eta$ tal que $\Sigma = \bigcup_{\eta\in[0,1]} C_\eta$. Seja d_η a restrição de d_Σ a $C_\eta \times C_\eta$, $\Theta_\eta(\cdot)$ a restrição de $\Theta(\cdot)$ a C_η, $\mathscr{K}_\eta(\cdot,\cdot)$ a restrição de $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ a $\Theta_\eta(\cdot)$, $\mathbb{X}_\eta = X \times C_\eta$ e $\Pi_\eta(\cdot)$ a restrição de $\Pi(\cdot)$ a $\mathbb{X}_\eta$.

Teorema 4.3.1. Tome $(\Pi_\eta)_{\eta\in[0,1]}$ como acima. Assuma que $(\Pi_\eta)_{\eta\in[0,1]}$ é uma família contínua em $\eta = \eta_0$, coletivamente assintoticamente compacta e coletivamente limitado dissipativa e tal que cada Π_η possui um atrator $\mathbb{A}_\eta$ com $\bigcup_{\eta\in[0,1]} \mathbb{A}_\eta$ é limitado em $\mathbb{X}$. Assuma também que Π possua um atrator $\mathbb{A}$ (e, consequentemente, cada Θ_η possui atrator global $\mathscr{S}_\eta$ em Σ_η) e que $(\mathscr{S}_\eta)_{\eta\in[0,1]}$ seja contínua em cada $\eta \in [0,1]$. Se, além disso, Π_{η_0} é dinamicamente gradiente relativamente a uma coleção disjunta de conjuntos Π_{η_0}-invariantes isolados $\{\mathbb{L}_{1,\eta_0}, \dots, \mathbb{L}_{n,\eta_0}\}$ e

(i) Para cada $\eta \in [0,1], \mathbb{A}_\eta$ possui uma coleção de invariantes isolados $\{\mathbb{L}_{1,\eta}, \dots, \mathbb{L}_{n,\eta}\}$ tal que

$$\lim_{\eta\to\eta_0} dist_H(\mathbb{L}_{i,\eta}, \mathbb{L}_{i,\eta_0}) + dist_H(\mathbb{L}_{i,\eta_0}, \mathbb{L}_{i,\eta}) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n;$$

(ii) Existe $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{L}_{i,\eta}$ é o invariante isolado maximal em $\mathscr{O}_\delta(\mathbb{L}_{i,\eta})$ para $1 \leq i \leq n$ e para todo $\eta \in [0,1]$ tal que $|\eta - \eta_0| < \varepsilon$.

Então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para todo η tal que $|\eta - \eta_0| < \varepsilon_1$, Π_η é dinamicamente gradiente relativamente a $\{\mathbb{L}_{1,\eta}, \dots, \mathbb{L}_{n,\eta}\}$.

CAPÍTULO

5

DICOTOMIAS

Iremos agora apresentar o conceito de dicotomia exponencial, que estende a noção de hiperbolicidade para sistemas dinâmicos não autônomos e é rica fonte de informação sobre a estrutura fina de atratores. A estabilidade da dicotomia exponencial é extremamente útil para obtermos resultados sobre estabilidade de atratores e foi provada em (Massera e Schäffer 1958) no caso em que estamos lidando com equações diferenciais ordinárias. Esta apresentação será baseada em (Henry 1981), com maior detalhamento.

5.1 Dicotomia exponencial para processos de evolução discretos lineares

Para o que se segue, fixe um espaço de Banach X e as notações $\mathscr{L}(X)$ para o conjunto das transformações lineares contínuas de X em X e $\mathscr{P}_{\mathbb{Z}}$ o conjunto $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq m\}$.

Considere um processo de evolução discreto linear $\{S_{n,m} \in \mathscr{L}(X) : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$, isto é, uma família de aplicações em $\mathscr{L}(X)$ tal que $T_{n,n} = I$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $T_{n,p}T_{p,m} = T_{n,m}$, para todo $(n,p),(p,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}$.

Observação 5.1.1. Note que $\{S_{n,m} : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$ determina uma sequência $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ onde $S_n = S_{n+1,n}$. Reciprocamente, dada uma sequência de operadores $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$, podemos definir um processo de evolução discreto linear $\{S_{n,m} \in \mathscr{L}(X) : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$ colocando $S_{n,n} := I$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $S_{n,m} := S_{n-1} \circ \cdots \circ S_m$, para todo $n > m \in \mathbb{Z}$. Assim, quando for conveniente, iremos nos referir à aplicação $S_{n+1,n}$ por S_n ou ainda ao processo de evolução como $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definição 5.1.2. Dizemos que um processo de evolução linear discreto $\{S_{n,m} \in \mathscr{L}(X) : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$ possui **dicotomia exponencial discreta** com constante $M \geq 1$ e expoente $\omega > 0$ se existem projeções $\{Q_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ tais que *i)* $S_nQ_n = Q_{n+1}S_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

ii) $S_{m,n} : R(Q_n) \to R(Q_m)$ é um isomorfismo com inversa $S_{n,m} : R(Q_m) \to R(Q_n)$, para todo $m > n$

iii) Valem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &\|S_{n,m}(I - Q_m)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{-\omega(n-m)}, \quad n \geq m, \\ &\|S_{n,m}Q_m\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{\omega(n-m)}, \quad n < m. \end{aligned} \tag{5.1}$$

É fácil ver que se $\{S_{n,m} \in \mathscr{L}(X) : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$ possui dicotomia exponencial discreta com projeções $\{Q_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$, então $Q_nS_{n,m} = S_{n,m}Q_m$ para todo $m \geq n$.

Definimos a *função de Green*

$$G_{n,m} = \begin{cases} S_{n,m}(I - Q_m), & n \geq m \\ -S_{n,m}Q_m, & n < m. \end{cases} \tag{5.2}$$

É imediato das definições que

- $\|Q_n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e
- $\|G_{n,m}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Me^{-\omega|n-m|}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

O lema a seguir é uma versão discreta da fórmula da variação das constantes.

Lema 5.1.3. Seja $\{S_{n,m} \in \mathscr{L}(X) : (n,m) \in \mathscr{P}_{\mathbb{Z}}\}$ um processo de evolução. Se $x_{n+1} = S_nx_n + y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então

$$x_n = S_{n,m}x_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_{n,k+1}y_k, \text{ para todo } n > m.$$

Demonstração. Vamos proceder por indução. É claro que o resultado é válido para $m = n - 1$. Suponha agora que o resultado vale para $m = r$ e mostramos que ele será válido para $m = r - 1$. De fato, como

$$x_r = S_{r-1}x_{r-1} + y_{r-1},$$

temos que

$$\begin{aligned} x_n &= S_{n,r}S_{r-1}x_{r-1} + S_{n,r}y_{r-1} + \sum_{k=r}^{n-1} S_{n,k+1}y_k \\ &= S_{n,r-1}x_{r-1} + \sum_{k=r-1}^{n-1} S_{n,k+1}y_k \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar. □

O seguinte teorema será extremamente útil na demonstração dos resultados a seguir.

Teorema 5.1.4. Se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta e $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma seqüência limitada em X, então existe uma única sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$x_{n+1} = S_n x_n + y_n \tag{5.3}$$

e esta sequência é dada por

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{5.4}$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três passos.

1. Unicidade:

   Mostraremos que uma sequência limitada que satisfaça (5.3) é dada por (5.4). Veja que, pelo lema anterior,

   $$x_n = S_{n,m} x_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_{n,k+1} y_k, \; n > m$$

   do que segue que

   $$(I-Q_n)x_n = S_{n,m}(I-Q_m)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} S_{n,k+1}(I-Q_{k+1})y_k, \; n > m \tag{5.5}$$

   Como $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada e

   $$\|S_{n,m}(I-Q_m)x_m\|_X \leq Me^{-(n-m)\omega}\|x_m\|_X, \; n \geq m,$$

   temos que $\|S_{n,m}(I-Q_m)x_m\|_X \overset{m\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ e, tomando o $m \to -\infty$ em (5.5), obtemos que a série

   $$\sum_{k=-\infty}^{n-1} S_{n,k+1}(I-Q_{k+1})y_k$$

   é convergente e, portanto,

   $$(I-Q_n)x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} S_{n,k+1}(I-Q_{k+1})y_k$$

   Por outro lado,

   $$Q_r x_r = S_{r,n} Q_n x_n + \sum_{k=n}^{r-1} S_{r,k+1} Q_{k+1} y_k, \; r > n$$

   Aplicando $S_{n,r}$ em ambos os lados, obtemos

   $$S_{n,r} Q_r x_r = Q_n x_n + \sum_{k=n}^{r-1} S_{n,k+1} Q_{k+1} y_k, \; r > n$$

procedendo de forma análoga à anterior, temos que

$$Q_n x_n = -\sum_{k=n}^{\infty} S_{n,k+1} Q_{k+1} y_k.$$

Isto implica que

$$x_n = Q_n x_n + (I - Q_n) x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} y_k.$$

2. Existência: Para ver que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dada por (5.4) é uma solução de (5.3), basta verificar que

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n+1,k+1} y_k \\
&= \sum_{-\infty}^{n} S_{n+1,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n+1}^{\infty} S_{n+1,k+1} Q_{k+1} y_k \\
&= \sum_{-\infty}^{n-1} S_{n+1,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n}^{\infty} S_{n+1,k+1} Q_{k+1} y_k + y_n \\
&= S_n \left(\sum_{-\infty}^{n-1} S_{n,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k - \sum_{n}^{\infty} S_{n,k+1} Q_{k+1} y_k \right) + y_n \\
&= S_n x_n + y_n.
\end{aligned}$$

3. Limitação:

Para ver que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada, note que

$$\begin{aligned}
\|x_n\|_X &\leq \sum_{-\infty}^{n-1} \|S_{n,k+1}(I - Q_{k+1}) y_k\|_X + \sum_{n}^{\infty} \|S_{n,k+1} Q_{k+1} y_k\|_X \\
&\leq M \left(\sum_{-\infty}^{n-1} e^{-(n-k-1)\omega} + \sum_{n}^{\infty} e^{-(k+1-n)\omega} \right) \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_X \\
&= M \, \frac{1+e^{-\omega}}{1-e^{-\omega}} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_X
\end{aligned}$$

□

Com isto, podemos demonstrar a unicidade das projeções associadas.

Corolário 5.1.5. Se $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta, então as projeções associadas $\{Q_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ são unicamente determinadas.

Demonstração. Suponha que $\{Q_n^{(i)} \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1,2$ são duas famílias de projeções associadas à $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$. Considere a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $f_n = 0$ para todo $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x$ e tome $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é a única solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$. Em vista do Teorema 5.1.4, temos que

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}^{(i)} f_k = G_{n,m}^{(i)} x, \quad i = 1,2,$$

$$G_{n,m}^{(i)} = \begin{cases} S_{n,m}(I - Q_m^{(i)}), & n \geqslant m \\ S_{n,m} Q_m^{(i)}, & n < m. \end{cases}$$

Em particular, tomando $n = m$, temos $x_m = G_{m,m}^{(i)} x = (I - Q_m^{(i)})x$ e $Q_m^{(1)} x = Q_m^{(2)} x$ para todo $x \in X$. Logo as famílias de projeções coincidem. $\square$

Mostraremos que a recíproca do Teorema 5.1.4 também é verdadeira, derivando importante caracterização para dicotomias exponenciais.

Teorema 5.1.6. Se $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ define um processo de evolução linear, então as seguintes afirmações são equivalentes

i) $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta;

ii) Para cada seqüência limitada $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em X, existe uma única solução limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $x_{n+1} = S_n x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Já mostramos, no teorema anterior, que i) implica ii). Façamos a outra implicação.

Seja $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ o espaço de Banach das sequência limitadas com a norma do sup. Dividiremos a demonstração em nove etapas. A prova será dividida em nove passos

1. A aplicação $L : D(L) \subset \ell_\infty \to \ell_\infty$ dada por

$$L(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (x_{n+1} - S_n x_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

   possui inversa limitada:

   Já sabemos que se $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$, então existe uma única solução limitada de $x_{n+1} - T_n x_n = f_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, mostrando que L é bijetora e, portanto, possui inversa.

   Se mostrarmos que L é fechada, do Teorema do Gráfico Fechado, seguirá que $L^{-1} \in \mathscr{L}(\ell_\infty)$. Com esta finalidade, tome sequências $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $D(L)$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (w_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$ tais que

$$\|x_n^k - y_n\|_{\ell_\infty} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\|Lx_n^k - w_n\|_{\ell_\infty} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   então

$$\|(S_n x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}} + (w_n)_{n\in\mathbb{Z}} - (y_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell_\infty} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\|S_n x_n^k - S_n y_n\|_{\ell_\infty} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, segue que $(S_n y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty$ mostrando que $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in D(L)$ e

$$(w_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (y_{n+1} - S_n x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = L(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

Portando, o gráfico de L é fechado.

2. Vamos definir a função de Green, explicitaremos $L^{-1}(f_n)$ em termos dela quando $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possui apenas um número finito de elementos não-nulos e definiremos as projeções $\{Q_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$.

   Fixe $x \in X$ e $m \in \mathbb{Z}$. Considere $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $g_n = 0$ para $n \neq m-1$ e $g_{m-1} = x$ e defina a sequência $(G_{n,m}x)_{n\in\mathbb{Z}} := L^{-1}(g_n)$. Então, se $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é tal que existe um conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}$ tal que $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}\backslash A$, temos que

$$L^{-1}(f_n) = \left\{ \sum_{k\in A} G_{n,k+1} f_k \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

   É claro que $G_{n,m} \in \mathscr{L}(X)$ e $\|G_{n,m}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(\ell_\infty)}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$.

   Note que se $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é tal que $f_n = 0$ para todo $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (G_{n,m}x)_{n\in Z} = L^{-1}(f_n)$ é a solução de $x_{n+1} = S_n x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

   Desta forma,

$$G_{n+1,m}x = S_n G_{n,m}x + f_n$$

   e

$$\begin{aligned} &G_{n+1,m} = S_n G_{n,m}, \quad n \neq m-1, \\ &G_{m,m} - S_{m-1} G_{m-1,m} = I. \end{aligned} \tag{5.6}$$

   Defina $I - Q_m := G_{m,m}$ e mostremos, por indução, que

   a) $G_{n,m} = S_{n,m}(I - Q_m)$ para $n \geq m$ e
   b) $S_{m,n} G_{n,m} = -Q_m$ para $n < m$,

   a) O caso $n = m$ é trivial. Suponha que $G_{k,m} = S_{k,m}(I - Q_m)$, para algum $k \geq m$. De (5.6) $(k \neq m-1)$,

$$G_{k+1,m} = S_k G_{k,m} = S_k S_{k,m}(I - Q_m) = S_{k+1,m}(I - Q_m).$$

   como queríamos.

   b) Se $n = m-1$, sabemos de (5.6) que

$$S_{m,m-1} G_{m-1,m} = S_{m-1} G_{m-1,m} = -Q_m.$$

   Assumindo agora que $S_{m,k} G_{k,m} = -Q_m$, para algum $k \leq m-1$, temos de (5.6) que

$$S_{m,k-1} G_{k-1,m} = S_{m,k} T_{k-1} G_{k-1,m} = S_{m,k} G_{k,m} = -Q_m.$$

3. Agora forneceremos um critério para verificar se $x \in X$ está em $N(Q_m)$. Mostraremos que, dados $m \in \mathbb{Z}$ e $x_m \in X$, se a sequência $(x_{n+1} = S_n x_n)_{n \geq m}$ é limitada, então $Q_m x_m = 0$.

   Defina $x_n = 0$ para $n < m$ e considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dada por

$$x_{n+1} = S_n x_n, \ n \neq m-1$$
$$x_m - T_{m-1} x_{m-1} = x_m,$$

   Então $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = T_n x_n + f_n$ onde $f_n = 0$ se $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = x_m$. Logo $x_n = G_{n,m} x_m$ e, em particular, $x_m = G_{m,m} x_m = (I - Q_m) x_m$, provando que $Q_m x_m = 0$.

4. Vamos mostrar que, dado $m \in \mathbb{Z}$, Q_m é de fato uma projeção.

   Para cada $x \in X$, considere $x_n = G_{n,m} x$, então $x_{n+1} = S_n x_n$ sempre que $n \geq m$. Como $(x_n)_{n \geq m}$ é uma sequência limitada, pela etapa anterior, temos que $Q_m G_{m,m} x = Q_m (I - Q_m) x = 0$; isto é, $Q_m x = Q_m^2 x$ para todo $x \in X$. Logo Q_m é projeção.

5. Agora provemos que $Q_{m+1} S_m x = S_m Q_m x$ para todo $x \in N(Q_m)$.

   Considere a sequência $x_n = G_{n,m} x$. Se $Q_m x = 0$, então $0 = Q_m x = (I - G_{m,m}) x$ e obtemos $x = G_{m,m} x$. Como a sequência $(x_{n+1} = S_n x_n)_{n \geq m+1}$ é limitada, temos, pelo passo 3, que $Q_{m+1} x_{m+1} = 0$. Assim,

$$Q_{m+1} S_m x = Q_{m+1} S_m x_m = Q_{m+1} x_{m+1} = 0 = S_m Q_m x,$$

   Como queríamos mostrar.

6. Mostremos que

$$T_m \big|_{R(Q_m)} : R(Q_m) \to R(Q_{m+1})$$

   é um isomorfismo.

   Primeiramente, veja que se $(x_n)_{n \leq m-1}$ é limitada, onde $x_{n+1} = T_n x_n$ para $n < m-1$, então $S_{m-1} x_{m-1} \in R(Q_m)$. De fato, estenda a sequência fazendo $x_n = 0$ para $n \geq m$. Então $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = S_n x_n + f_n$, onde $f_n = 0$ para $n \neq m-1$ e $f_{m-1} = -S_{m-1} x_{m-1}$.

   Portanto

$$x_n = -G_{n,m} S_{m-1} x_{m-1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

   Em particular,

$$x_m = -G_{m,m} S_{m-1} x_{m-1} = -(I - Q_m) S_{m-1} x_{m-1} = 0$$

   e $S_{m-1} x_{m-1} \in R(Q_m)$

Para ver que $R(Q_{m+1}) \subset S_m(R(Q_m))$, tome $x \in R(Q_{m+1})$ e considere $x_n = G_{n,m+1}x$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é limitada com $x_{n+1} = S_n x_n$ para $n < m$. Então $S_{m-1}x_{m-1} = x_m$ e, procedendo como anteriormente, $x_m = S_{m-1}x_{m-1} \in R(Q_m)$. Além disso, como $x \in R(Q_{m+1})$, temos que $x \in N(I - Q_{m+1})$, logo $x_{m+1} = G_{m+1,m+1}x = (I - Q_{m+1})x = 0$. Assim, $x_{m+1} = S_m y_m + x = 0$ e $x = S_m(-x_m)$. Isto implica que $x \in S_m(R(Q_m))$.

Para ver que $S_m(R(Q_m)) \subset R(Q_{m+1})$, tome $x \in R(Q_m)$ e considere a sequência $x_n = G_{n,m}x$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Seja $(z_n)_{n\leq m}$ dada por $z_n = x_n$ para $n \leq m-1$ e $z_{n+1} = S_n z_n$ para $n \geq m-1$. Segue que $S_m z_m = S_m(S_{m-1}x_{m-1}) = -S_m x$. Como $(z_n)_{n\leq m}$ é limitada, concluímos que $S_m z_m = -S_m x \in R(Q_{m+1})$.

Agora basta mostrar que $S_m\big|_{R(Q_m)} : R(Q_m) \to R(Q_{m+1})$ é injetiva.

Tome $x \in N(S_m)$, então $z_{m+1} = S_m z_m = -S_m x = 0$ e $z_n = 0$ para $n > m$; Logo $\{z_n\}_{n\geq m}$ é limitada e $z_{m+1} = S_m z_m$. Assim, pelo passo 3, temos que $Q_m z_m = 0$ e, do fato que $x \in R(Q_m)$, $Q_m x = x = 0$. Segue que $S_m\big|_{R(Q_m)} : R(Q_m) \to R(Q_{m+1})$ é um isomorfismo.

7. Agora mostremos que se $x \in R(Q_m)$, então $S_m Q_m x = Q_{m+1} S_m x$.

   De fato, se $x \in R(Q_m)$, temos que $S_m(I - Q_m)x = 0$ e, do Passo 6, $S_m x \in R(Q_{m+1})$. Portanto, $Q_{m+1}S_m x = S_m x$ e $S_m Q_m x = Q_{m+1}S_m x$. Isto, juntamente com o Passo 5, implica que $S_m Q_m = Q_{m+1} S_m$.

8. Agora mostraremos as estimativas da dicotomia.

   Seja $x \in X$. note que se $S_{n,m}x = 0$ para algum $n \geq m$, então $S_{p,m}x = 0$ para $p \geq m$. Além disso, se $S_{n,m}(I - Q_m)x \neq 0$ então

$$\phi_k^{-1} = \|S_{k,m}(I - Q_m)x\|_X > 0, \quad m \leq k \leq n$$

   Escreva $v_k = \phi_k S_{k,m}(I - Q_m)x$, então $\|v_k\|_X = 1$ e

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} S_{n,k}(I - Q_k)\,\phi_k S_{k,m}(I - Q_m)x &= \sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} \phi_k\; S_{n,m}(I - Q_m)x,\end{aligned}$$

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k\right\|_X = \sum_{k=m}^{n} \phi_k \|S_{n,m}(I-Q_m)x\|_X = \phi_n^{-1}\sum_{k=m}^{n} \phi_k.$$

   Tomando uma sequência $(f_k)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $f_k = v_{k+1}$, para $m-1 \leq k \leq n-1$ e $f_k = 0$ caso contrário, então $\|(f_k)\|_B = 1$ e

$$\|\sum_{k=m}^{n} G_{n,k}v_k\|_X = \|\sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}f_k\|_X \leqslant \|L^{-1}\hat{f}\|_B \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}.$$

Logo $1 < \phi_n^{-1}\sum_{k=m}^{n}\phi_k \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}$. Se $\psi_n = \sum_{k=m}^{n}\phi_k$, temos que

$$\psi_{n-1} = \sum_{k=m}^{n-1}\phi_k = \psi_n - \phi_n \leqslant \psi_n(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\phi_n &\geq \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\sum_{k=m}^{n}\phi_k = \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\psi_n \\
&\geqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\left(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\right)^{-1}\psi_{n-1} \\
&\geq \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\left(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\right)^{m-n}\psi_m \\
&= \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\left(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\right)^{m-n}\phi_m
\end{aligned}$$

e $\phi_n^{-1} \leqslant \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}\left(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}\right)^{n-m}\phi_m^{-1}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|S_{n,m}(I-Q_m)x\|_X = \phi_n^{-1}& \\
&\leq \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1})^{n-m}\|(I-Q_m)x\|_X \\
&= \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1})^{n-m}\|G_{m,m}x\|_X \\
&\leq \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{2}(1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1})^{n-m}\|x\|_X
\end{aligned}$$

Para o caso $\|T_{n,m}(I-Q_m)x\|_X = 0$ a estimativa é trivial. Isto prova *iii*) na Definição 5.1.2.

9. Se $\rho_n^{-1} = \|S_{n,m}Q_m x\| > 0$ para $n < m$, então

$$\sum_{k=n+1}^{m} S_{n,k}Q_k\,\rho_k\,S_{k,m}Q_m x = \sum_{k=n+1}^{m} G_{n,k}v_k = \sum_{k=m}^{n}\rho_k\; S_{n,m}Q_m x$$

onde $v_k = \rho_k S_{k,m}Q_m x$.

Procedendo como no passo anterior, temos

$$\|S_{n,m}Q_m x\|_X \leq (1+\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)})^2\left(\frac{\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}}{1+\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}}\right)^{m-n}\|x\|_X,\ n<m.$$

Tomando $M = (1+\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)})^2 > \|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^2$ e $e^{-\omega} = \frac{\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}}{1+\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}} \geqslant 1-\|L^{-1}\|_{\mathscr{L}(B)}^{-1}$, temos que $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente ω.

$\square$

5.2 Estabilidade da dicotomia exponencial discreta

Nesta seção, iremos demonstrar que a dicotomia exponencial discreta é estável por perturbações.

Teorema 5.2.1. Seja $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ um processo de evolução que possui dicotomia discreta com constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$. Dado $M_1 > M$ e $0 < \omega_1 < \omega$, existe $\varepsilon > 0$ (dependendo somente de M, M_1, ω e ω_1) tal que qualquer família $\{T_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ com $\sup_{n\in\mathbb{Z}} \|T_n - S_n\|_{\mathscr{L}(X)} < \varepsilon$, tem dicotomia discreta com constante M_1 e expoente ω_1.

Demonstração. Se $\{G_{n,m}\}$ é a função de Green associada a $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$, então $\{G_{n,m}e^{\omega_1|n-m|}\}$ é a Função de Green associada a $\{S_n e^{\omega_1} \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ que tem dicotomia exponencial com constante M e expoente $\omega - \omega_1$.

Sabemos que $\{T_n e^{\omega_1} \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ possui dicotomia discreta, se e somente se, para cada $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, a equação $x_{n+1} = T_n e^{\omega_1} x_n + f_n = S_n e^{\omega_1} x_n + (T_n - S_n) e^{\omega_1} x_n + f_n$, tem uma única solução limitada, o que ocorre se, e somente se, para cada $\hat{f} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in B$,

$$x_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1|n-k-1|} [(T_k - S_k) e^{\omega_1} x_k + f_k] \tag{5.7}$$

tem uma única solução limitada.

Para ver que (5.7) tem uma única solução limitada, note que, se $G : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ é dado por

$$G\hat{f} = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1|n-k-1|} f_k \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

e $H : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \to \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ é dado por

$$H\hat{x} = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1} e^{\omega_1|n-k-1|} (T_k - S_k) e^{\omega_1} x_k \right\}_{n\in\mathbb{Z}},$$

então a equação (5.7) se torna

$$(I - H)\hat{x} = G\hat{f}.$$

Após isto, para provar que $\{S_n e^{\omega_1} \in \mathscr{C}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta, precisamos somente mostrar que $\|H\|_{\mathscr{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},X))} < 1$. De fato

$$\begin{aligned}
\|H\|_{\mathscr{L}(\ell_\infty(\mathbb{Z},X))} &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{-\infty}^{\infty} \|G_{n,k+1} e^{\omega_1|n-k-1|} e^{\omega_1} (S_k - T_k)\|_{\mathscr{L}(X)} \\
&\leqslant \varepsilon e^{\omega_1} M \frac{1 + e^{-(\omega-\omega_1)}}{1 - e^{-(\omega-\omega_1)}} < 1,
\end{aligned}$$

para todo ε satisfazendo

$$\varepsilon < \frac{e^{-\omega_1} - e^{-\omega}}{M(1 + e^{-(\omega-\omega_1)})}. \tag{5.8}$$

Provamos que $\{S_n \in \mathscr{L}(X) : n \in \mathbb{Z}\}$ tem dicotomia exponencial discreta com alguma constante $\bar{M}$ e expoente $\omega_1 > 0$. Omitiremos a demonstração de que podemos tomar ε a fim de que $\bar{M} = M_1$, que pode ser encontrada em (Carvalho 2017, p. 214). $\square$

5.3 Dicotomia exponencial para processos contínuos

Definição 1. Dizemos que um processo de evolução linear $\{S(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ tem **dicotomia exponencial**, com constante $M \geq 1$ e exponente $\omega > 0$, se existe uma família de projeções $\{Q(t) \in \mathscr{L}(X) : \ t \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo

i) $Q(t)S(t,s) = S(t,s)Q(s)$, para todo $(t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}$,

ii) $S(t,s)|_{R(Q(s))} : R(Q(s)) \to R(Q(t))$ é um isomorfismo, cuja inversa denotaremos por $S(s,t) : R(Q(t)) \to R(Q(s))$, para todo $(t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ e

iii) valem as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} &\|S(t,s)(I - Q(s))\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant M e^{-\omega(t-s)}, \quad t \geqslant s, \\ &\|S(t,s)Q(s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant M e^{\omega(t-s)}, \quad t \leqslant s. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Observação 5.3.1. Se $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\} \subset \mathscr{L}(X)$ tem dicotomia exponencial com projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ temos que

a) $S(t,s)S(s,\tau)Q(\tau) = S(t,\tau)Q(\tau)$, para todo $t,s,\tau \in \mathbb{R}$ e

b) $Q(t)S(t,s)Q(s) = S(t,s)Q(s)$, para todo $t,s \in \mathbb{R}$.

5.4 Estabilidade da dicotomia exponencial contínua

Para demonstrar a estabilidade da dicotomia exponencial discreta foi imprescindível a caracterização da mesma através do Teorema 5.1.6. Como não há resultado análogo para o caso contínuo, iremos utilizar o caso discreto para provar a estabilidade. Mais especificamente, dado um processo de evolução com dicotomia exponencial contínua, iremos discretizá-lo e mostrar que tais discretizações possuem dicotomias discretas e que a estabilidade das dicotomias das discretizações implica a estabilidade da dicotomia contínua.

Teorema 5.4.1. Suponha que $\{S(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ seja um processo de evolução que possui dicotomia exponencial com constante $M \geq 1$, expoente $\omega > 0$ e projeções $\{Q(t) \in \mathscr{L}(X) : t \in \mathbb{R}\}$. Para cada $\ell > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, denote $t_n := t_0 + n\ell$. Então

$$\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{S(t_{n+1},t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

possui dicotomia discreta com projeções $\{Q_n = Q(t_n) : n \in \mathbb{Z}\}$, constante M e expoente $\omega\ell$.

Demonstração. É consequência da dicotomia contínua que

i) $S_n Q_n = Q_{n+1} S_{n+1}$,

ii) $S_n\big|_{R(Q_n)} : R(Q_n) \to R(Q_{n+1})$ é um isomorfismo,

iii) para todo $n \geq m$, $\|S_{n,m}(I-Q_m)x\|_X = \|S_{n-1}\cdots S_m(I-Q_m)x\| = \|S(t_n,t_{n-1})\cdots S(t_{m+1},t_m)(I-Q(t_m))x\|_X = \|S(t_n,t_m)(I-Q(t_m))x\|_X \leq Me^{-\omega\ell(n-m)}\|x\|_X$

iv) Se $n < m$ e $(S_{m,n})^{-1}$ é a inversa de $S_{n,m} : R(Q_m) \to R(Q_n)$, então

$\|S_{n,m}Q_m x\|_X = \|(S_{m,n})^{-1}Q_m x\| = \|(S(t_0+m\ell,t_0+n\ell))^{-1}Q(t_0+m\ell)x\|_X = \|S(t_0+n\ell,t_0+m\ell)Q(t_0+m\ell)x\|_X \leqslant Me^{\omega\ell(n-m)}\|x\|_X$

Logo $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ possui dicotomia exponencial discreta com constante M e expoente $\omega\ell$. □

Uma vez que temos a unicidade das projeções para o caso discreto, o teorema anterior implica que

Corolário 5.4.2. Se o processo de evolução linear $\{S(t,s) : (t,s) \in \mathscr{P}_\mathbb{R}\}$ tem dicotomia exponencial, então a família de projeções $\{Q(t) : t \in \mathbb{R}\}$ associada é única.

A seguir, daremos condições suficientes para termos uma recíproca do Teorema 5.4.1.

Teorema 5.4.3. Suponha que $\{S(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_\mathbb{R}\}$ satisfaça

$$L_\ell = \sup_{0\leq t-s\leq \ell} \|S(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$$

para algum $\ell > 0$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{S(t+(n+1)\ell, t+n\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tenha dicotomia discreta com constante $M \geq 1$ e expoente $\omega\ell > 0$. Então, $S(\cdot,\cdot)$ tem dicotomia exponencial com constante KM e expoente ω, onde

$$K = \sup_{0\leq t-s\leq \ell} \{e^{\omega(t-s)}\|S(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)}\}. \tag{5.10}$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em várias etapas.

1. Vamos definir as projeções associadas à dicotomia contínua.

   Para cada $t \in \mathbb{R}$, tome $\{Q_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ as projeções associadas à dicotomia discreta de $\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e defina $Q(t) := Q_0(t)$. Veja que $\{S_n(t+k\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{S_{n+k}(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ possui dicotomia discreta com projeções $\{Q_n(t+k\ell)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \{Q_{n+k}(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Em particular

$Q_k(t) = Q_0(t+k\ell) = Q(t+k\ell)$. Além disso, veja que para todo $n \geq k$, temos que

$$\begin{aligned} S(t+n\ell, t+k\ell)Q(t+k\ell) &= S(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell)Q_0(t+k\ell) \\ &= Q_{n-k}(t+k\ell)(S(t+k\ell+(n-k)\ell, t+k\ell) \\ &= Q(t+n\ell)S(t+n\ell, t+k\ell) \end{aligned}$$

2. Agora vamos mostrar que

$$\|S(t,s)(I-Q(s))\|_{\mathscr{L}(X)} \leq KMe^{-\omega(t-s)}, \quad t \geq s. \tag{5.11}$$

De fato, dado $t \geq s$, escolha $n \in \mathscr{N}$ tal que $s+n\ell \leq t < s+(n+1)\ell$. Então

$$\begin{aligned} &\|S(t,s)(I-Q(s))\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad \leq \|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)}\|S(s+n\ell,s)(I-Q(s))\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad \leq Me^{-\omega n\ell}\|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad = Me^{\omega(t-s-n\ell)}\|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)}e^{-\omega(t-s)} \\ &\qquad \leq KMe^{-\omega(t-s)}, \end{aligned}$$

Provando (5.11).

3. Para demonstrar a outra estimativa, suponha que $z \in R(Q(s))$ e $t \leq s$. Defina

$$S(t,s)z = S(t,s+n\ell)(S(s,s+n\ell)\big|_{R(Q(s+n\ell))})^{-1}z$$

onde $n \in \mathbb{Z}$ é escolhido de forma que $s+(n+1)\ell > t \geq s+n\ell$. Com esta definição, mostremos que

$$\|S(t,s)Q(s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq KMe^{\omega(t-s)}, \quad t \leq s. \tag{5.12}$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\|S(t,s)Q(s)\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad \leq \|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)}\|(S(s,s+n\ell)\big|_{R(Q(s))})^{-1}Q(s)\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad \leq Me^{\omega n\ell}\|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)} \\ &\qquad = Me^{-\omega(t-s-n\ell)}\|S(t,s+n\ell)\|_{\mathscr{L}(X)}e^{\omega(t-s)} \leq KMe^{\omega(t-s)}. \end{aligned}$$

e temos (5.12) demonstrado.

4. Mostremos agora que

$$N(Q(t_0)) = \{z \in X : [t_0,\infty) \ni t \mapsto S(t,t_0)z \in X \text{ é limitada}\}. \tag{5.13}$$

Tome $z \in N(Q(t_0))$, isto é, $Q(t_0)z = 0$. Então

$$\|S(t,t_0)z\|_X = \|S(t,t_0)(I-Q(t_0))z\|_X \leq KMe^{-\omega(t-t_0)}$$

portanto, $[t_0,\infty) \ni t \mapsto T(t,t_0)z \in X$ é limitada.

Por outro lado, se $z \notin N(Q(t_0))$ e $n \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\|Q(t_0)z\|_X &= \|S(t_0,t_0+n\ell)Q(t_0+n\ell)S(t_0+n\ell,t_0)z\|_X \\ &\leq Me^{-\omega n\ell}\|S(t_0+n\ell,t_0)z\|_X\end{aligned}$$

Ou seja, $\|S(t_0+n\ell,t_0)z\|_X \geq M^{-1}e^{\omega n\ell}\|Q(t_0)z\|_X$. Tomando $n \to \infty$ obtemos então que $[t_0,\infty) \ni t \to S(t,t_0)z \in X$ é ilimitada. Assim, $[t_0,\infty) \ni t \mapsto S(t,t_0)z \in X$ é ilimitada, provando a inclusão contrária e terminando a prova de (5.13).

5. Mostremos que isso implica que

$$S(t,t_0)N(Q(t_0)) \subset N(Q(t)), \quad t \geq t_0. \tag{5.14}$$

De fato, sabemos que se $z \in N(Q(t_0))$, então, $[t_0,\infty) \ni s \mapsto S(s,t_0)z \in X$ é limitada e consequentemente $[t,\infty) \ni s \mapsto S(s,t)S(t,t_0)z \in X$ é limitada. Logo $S(t,t_0)z \in N(Q(t))$.

Para ver que $S(t,t_0)\big|_{R(Q(t_0))} : R(Q(t_0)) \to X$ é injetivo, tome $z \in N(S(t,t_0)\big|_{R(Q(t_0))})$. Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0+n\ell \geq t$, temos que $T(t_0+n\ell,t_0)z = 0$ e consequentemente $z = 0$.

6. Agora provamos que

$$\begin{aligned}R(Q(t_0)) = \{z \in X :&\text{existe uma solução} \\ &\text{backwards-limitada por } z \text{ em } t = t_0\}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Se $z \in R(Q(t_0))$, defina $\xi : \mathbb{R} \to X$ por $\xi(t) = S(t,t_0+n\ell)S(t_0+n\ell,t_0)z$ onde $n \in \mathbb{Z}$ é escolhido de forma que $t_0+n\ell \leq t \leq t_0+(n+1)\ell$.

Então $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução backwards-limitada por z em $t = t_0$ para $\{S(t,\tau) : (t,\tau) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$.

Suponha $z \notin R(Q(t_0))$ e que exista uma solução global $\xi : \mathbb{R} \to X$ por z em $t = t_0$. Claramente $T(t_0,t_0+n\ell)\xi(t_0+n\ell) = z$, $n \leq 0$. Logo,

$$T(t_0,t_0+n\ell)(I-Q(t_0+n\ell))y(t_0+n\ell) = (I-Q(t_0))z, \quad n \leqslant 0,$$

e

$$\|\xi(t_0+n\ell)\|_X \geq M^{-1}e^{-\omega n\ell}\|(I-Q(t_0))z\|_X \overset{n\to-\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Mostrando que $\xi : \mathbb{R} \to X$ não é backwards-limitada e provando (5.15).

7. Por fim, mostremos que $S(\tau,t_0)R(Q(t_0)) = R(Q(\tau))$ para todo $\tau \geq t_0$.

Tome $z \in R(Q(t_0))$ e $\xi : \mathbb{R} \to X$ uma solução backwards-limitada por z em t_0. Então $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução backwards-limitada por $S(\tau,t_0)z$ em τ.

Assim, $S(\tau,t_0)z \in R(Q(\tau))$. Por outro lado, se $z \in R(Q(\tau))$, para $\tau \geq t_0 \geq \tau + n\ell$ temos que $w = S(t_0, \tau + n\ell)S(\tau + n\ell, \tau)z \in R(Q(t_0))$ e $S(\tau,t_0)w = z$.

Segue que

$$S(\tau,t_0)\big|_{R(Q(t_0))} : R(Q(t_0)) \to R(Q(\tau)), \quad (\tau,t_0) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}},$$

é um isomorfismo. Isto juntamente com (5.14) implica que $Q(t)S(t,t_0) = S(t,t_0)Q(t_0)$ para todo $t \geq t_0$ e completa a prova.

$\square$

Mostremos então, finalmente, que a dicotomia exponencial contínua é estável sob perturbação.

Teorema 5.4.4. Suponha que $\{S(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ tenha dicotomia exponencial com constante $M \geq 1$ e expoente $\omega > 0$ e que

$$L = \sup\{\|S(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)},\ 0 \leq t - s \leq 1\} < \infty. \tag{5.16}$$

Se $\omega_1 < \omega$ e $M_1 > M$, então existe $\varepsilon > 0$ (dependendo de ω, ω_1, M, M_1, e L) tal que, qualquer processo $\{T(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ satisfazendo

$$\sup\{\|S(t,s) - T(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} : 0 \leq t - s \leq 1\} \leq \varepsilon,$$

tem dicotomia exponencial com constante M_1 e expoente ω_1.

Demonstração. Para cada $t \in \mathbb{R}$, defina $t_n := t + n\ell$, $n \in \mathbb{Z}$. Seja $\ell > 0$ tal que $Me^{-\omega\ell} < e^{-\omega_1\ell}$. Pelo Teorema 5.4.1, sabemos que $\{S(t_{n+1},t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia discreta com constante M e expoente $\omega\ell$.

Se $T(\cdot,\cdot)$ é tal que

$$\sup\{\|T(t,s) - S(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} : 0 \leq t - s \leq 1\} \leq \varepsilon,$$

e s satisfaz $0 \leqslant t - s \leq \ell$, defina $\tau_n = s + n$, $n \in \mathbb{N}$, e escolha $k \in \mathbb{N}$ tal que $\tau_k \in [s,t)$ e $\tau_k + 1 > t$. Então

$$\begin{aligned}&\|S(t,s) - T(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)}\\ &= \|[S(t,\tau_k) - T(t,\tau_k)]T(\tau_k,s) - S(t,\tau_k)[T(\tau_k,s) - S(\tau_k,s)]\|_{\mathscr{L}(X)}.\end{aligned}$$

Como $0 \leq t - \tau_k < 1$, temos que

$\|S(t,\tau_k) - T(t,\tau_k)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \varepsilon$, $\|S(t,\tau_k)\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant L$ e, utilizando a desigualdade triangular,

$$\|T(\tau_k,s)\|_{\mathscr{L}(X)} = \|T(\tau_k,\tau_{k-1}) \cdots T(s+1,s)]\|_{\mathscr{L}(X)} \leq (L+\varepsilon)^k$$

Logo,

$$\|S(t,s)-T(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq (L+\varepsilon)^k\varepsilon + L\|T(\tau_k,s)-S(\tau_k,s)]\|_{\mathscr{L}(X)}.$$

Para estimar o último fator, veja que

$$\begin{aligned}\|T(\tau_k,s)-S(\tau_k,s)\| &\leq \|[T(\tau_k,\tau_{k-1})-S(\tau_k,\tau_{k-1})]T(\tau_{k-1},s)\|\\ &\quad + \|S(\tau_k,\tau_{k-1})[T(\tau_{k-1},s)-S(\tau_{k-1},s)]\|\\ &\leq (L+\varepsilon)^{k-1}\varepsilon + L\|T(\tau_{k-1},s)-S(\tau_{k-1},s)\|.\end{aligned}$$

Portanto, existe uma constante c_ℓ tal que para $0 \leq t-s \leq \ell$,

$$\|T(t,s)-S(t,s)\| \leq [(L+\varepsilon)^k + L(L+\varepsilon)^{k-1} + \cdots + L^k]\varepsilon \leq c_\ell\varepsilon.$$

Em particular, como $t_{n+1}-t_n = \ell$, segue que

$$\|S(t_{n+1},t_n)-T(t_{n+1},t_n)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq c_\ell\varepsilon, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}.$$

Como $M_1 > M$ e $0 < \omega_1\ell < \omega\ell$, segue do Teorema 5.2.1 que $\{T(t_{n+1},t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tem dicotomia exponencial discreta com constante M_1 e expoente $\omega_1\ell$, para todo ε suficientemente pequeno. Agora, pelo Teorema 5.4.3, possivelmente reescolhendo ε menor ainda, $S(\cdot,\cdot)$ tem dicotomia exponencial com constante KM_1 e expoente ω_1.

Omitiremos a demonstração de que podemos tomar M_1 no lugar de KM_1 reescolhendo ε menor, porém ela pode ser encontrada em (Carvalho 2017, p. 226). □

5.5 Soluções globais hiperbólicas

Seja $f : \mathbb{R}\times X \to X$ uma função não linear continuamente diferenciável e $\{S(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_\mathbb{R}\}$ um processo de evolução linear. Assuma que a família dada por

$$S_f(t,s)x = S(t,\tau)x + \int_\tau^t S(t,s)f(s,S_f(t,\tau)x)ds$$

defina um processo de evolução $\{S_f(t,s) \in C(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_\mathbb{R}\}$. Chamaremos $S_f(\cdot,\cdot)$ de o processo de evolução semilinear obtido pela perturbação de $S(\cdot,\cdot)$ por f. Veja que se $S(\cdot,\cdot)$ é obtido da solução da equação diferencial $\dot{u} = Au$, então $S_f(\cdot,\cdot)$ é obtido através da solução da equação diferencial $\dot{u} = Au(t) + f(u(t),t)$.

Se $\xi : \mathbb{R} \to X$ é uma solução global para $S_f(\cdot,\cdot)$, considere o processo de evolução linear $\{L_f(t,s) \in \mathscr{L}(X) : (t,s) \in \mathscr{P}_\mathbb{R}\}$ dado por

$$L_f(t,s)x = S(t,\tau)x + \int_\tau^t S(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_f(s,\tau)xds$$

Isto é, o processo de evolução linear dado pela linearização do termo não-linear ao redor de ξ.

Definição 5.5.1. Dizemos que $\xi:\mathbb{R}\to X$ é uma solução global hiperbólica para $S_f(\cdot,\cdot)$ se $L_f(\cdot,\cdot)$ possui dicotomia exponencial.

Se existir uma solução global hiperbólica limitada, então podemos caracterizar as soluções globais que são limitadas da seguinte forma.

Lema 5.5.2. Seja $\{S_f(t,s)\in C(X):(t,s)\in\mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ o processo de evolução obtido pela perturbação do processo de evolução linear $\{T(t,s)\in\mathscr{L}(X):(t,s)\in\mathscr{P}_{\mathbb{R}}\}$ pela função continuamente diferenciável $f:\mathbb{R}\times X\to X$ que possui uma solução global hiperbólica $\xi:\mathbb{R}\to X$. Se $\varphi:\mathbb{R}\to X$ é uma solução global limitada qualquer de $S(\cdot,\cdot)$, então

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_\xi(t,s)[f(s,\varphi(s))-D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)]ds$$

Onde $G_\xi(\cdot,\cdot)$ é a função de Green associada ao processo de evolução $L_\xi(\cdot,\cdot)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que se $\varphi:[\tau,\tau+\sigma]\to X$ é uma solução de

$$\varphi(t)=T(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_\tau^t T(t,s)f(s,\varphi(s))ds$$

Então

$$\varphi(t)=L_\xi(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_\tau^t L_\xi(t,s)[f(s,\varphi(s))-D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)]ds \tag{5.17}$$

De fato, se definirmos

$$\psi(t)=L_\xi(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_\tau^t L_\xi(t,s)[f(s,\varphi(s))-D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)]ds$$

então temos

$$\psi(t)-\varphi(t)=\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_\xi(s,\tau)\varphi(\tau)ds-\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)ds+$$

$$\int_\tau^t\int_s^t T(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))L_\xi(\theta,s)d\theta[f(s,\varphi(s))-D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)]ds$$

$$=\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))L_\xi(s,\tau)\varphi(\tau)ds-\int_\tau^t T(t,s)D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)ds$$

$$+\int_\tau^t T(t,\theta)D_xf(\theta,\xi(\theta))\int_\tau^\theta L_\xi(\theta,s)[f(s,\varphi(s))-D_xf(s,\xi(s))\varphi(s)]dsd\theta$$

$$= \int_\tau^t T(t,s)D_x f(s,\xi(s))[\psi(s)-\varphi(s)]ds$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, temos que $\varphi(t)=\psi(t)$ para todo $t\in[\tau,\tau+\sigma]$.

Se $Q(\cdot)$ são as projeções associadas a $L_\xi(\cdot,\cdot)$, então podemos aplicar $L_\xi(\tau,t)Q(t)$ à (5.17), obtendo

$$L_\xi(\tau,t)Q(t)\varphi(t) = Q(\tau)\varphi(\tau) + \int_\tau^t L_\xi(\tau,s)Q(s)[f(s,\varphi(s)) - D_x f(s,\varphi(s))\varphi(s)]ds$$

Pela segunda estimativa da dicotomia exponencial, temos $\|L_\xi(\tau,t)Q(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Logo, tomando $t\to\infty$, obtemos

$$Q(\tau)\varphi(\tau) = -\int_\tau^{-\infty} L_\xi(\tau,s)Q(s)[f(s,\varphi(s)) - D_x f(s,\varphi(s))\varphi(s)]ds,\ \ \tau\in\mathbb{R}$$

De forma análoga, utilizando a primeira estimativa da dicotomia, podemos obter que

$$(I-P(t))\varphi(t) = \int_{-\infty}^t L_\xi(t,s)(I-P(s))[f(s,\varphi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\varphi(s)]ds\ \tau\in\mathbb{R}$$

Somando as duas últimas igualdades, encontramos

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(t,s)[f(s,\varphi(s)) - D_x f(s,\xi(s))\varphi(s)]ds\ t\in\mathbb{R}$$

Como queríamos mostrar □

Soluções hiperbólicas de $S_f(\cdot,\cdot)$ são estáveis quando perturbadas por uma não linearidade continuamente diferenciável g muito próxima de f.

Teorema 5.5.3. Considere $\xi:\mathbb{R}\to X$ uma solução global hiperbólica para $S_f(\cdot,\cdot)$, com $\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)\|_X \le B < \infty$ cuja dicotomia exponencial associada possui constantes M e ω. Assuma que existe $\varepsilon>0$ tal que

$$\sup_{\|x\|_X\le B} \|f(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty,$$

que

$$\sup_{\|x\|\le\varepsilon}\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X < \frac{\varepsilon}{4M\omega^{-1}}$$

e que

$$\sup_{\|x\|\le B}\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,x)-g(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x) - D_x g(t,x)\|_{\mathscr{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{4M\omega^{-1}}$$

Então existe uma única solução global $\eta:\mathbb{R}\to X$ de $S_g(\cdot,\cdot)$ que satisfaz

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\xi(t)-\eta(t)\|_X < \varepsilon$$

e essa solução é hiperbólica.

Observação 5.5.4. A existência de um ε que satisfaça a segunda hipótese é direta da definição de derivada.

Demonstração. Pelo lema anterior, temos

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(t,s)[f(s,\xi(s))-D_xf(s,\xi(s))\xi(s)]ds$$

Agora suponha que $\eta:\mathbb{R}\to X$ é uma solução global de $S_g(\cdot,\cdot)$. Então usando (5.17) para $\eta(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$ e tomando $\varphi(t)=\eta(t)-\xi(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$, temos

$$\varphi(t)=L_{\xi}(t,\tau)\varphi(\tau)+\int_{\tau}^{t}L_{\xi}(t,s)\overline{g}(s,\varphi(s))ds \tag{5.18}$$

onde $\overline{g}(t,\varphi)=g(t,\varphi(t)+\xi(t))-f(t,\xi(t))-D_xf(t,\xi(t))\varphi(t)$

Agora podemos utilizar o mesmo truque aplicado ao lema anterior, aplicando $I-Q(t)$ na igualdade anterior e tomando $\tau\to-\infty$, obtendo

$$(I-Q(t))\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}L_{\xi}(t,s)(I-P(s))\overline{g}(s,\varphi(s))ds$$

e depois aplicando $L_{\xi}(\tau,t)Q(t)$ e tomando $t\to\infty$, obtendo

$$Q(\tau)\varphi(\tau)=-\int_{\tau}^{\infty}L_{\xi}(\tau,s)Q(s)\overline{g}(s,\varphi(s))ds$$

Somando, obtemos

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(t,s)\overline{g}(s,\varphi(s))ds$$

Assim, obtemos que uma solução global limitada de (5.18) em uma pequena vizinhança de zero existe se, e somente se, a aplicação

$$\mathscr{L}(\varphi(t))=\int_{-\infty}^{\infty}G_{\xi}(t,s)\overline{g}(s,\varphi(s))ds$$

possui um ponto fixo no conjunto $B_{\varepsilon}=\{\varphi\in\mathscr{C}(\mathbb{R},X):\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\varphi(t)\|_X\leq\varepsilon\}$ para ε pequeno.

Isto de fato acontece. Mais especificamente, mostraremos que existe uma única solução global limitada em B_{ε} através do Ponto Fixo de Banach.

Primeiramente, veja que $\mathscr{L}(B_{\varepsilon})\subset B_{\varepsilon}$. De fato,

$$\|\mathscr{L}(\varphi)(t)\|_X\leq M\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega|t-s|}\|\overline{g}(s,\varphi(s))\|_X ds$$

$$\leq 2M\omega^{-1}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|g(t,\eta(t))-f(t,\eta(t))\|_X+$$

$$2M\omega^{-1} \sup_{\|x\|<\varepsilon} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t,\xi(t)+x) - f(t,\xi(t)) - D_x f(t,\xi(t))x\|_X \leq \varepsilon$$

pelas hipóteses sobre ε. Também pelas hipóteses sobre ε, segue que se $\varphi_1, \varphi_2 \in B_\varepsilon$, então

$$\|\mathscr{L}(\varphi_1)(t) - \mathscr{L}(\varphi_2)(t)\|_X \leq \frac{1}{2} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_X$$

Mostrando que $\mathscr{L}$ é uma contração e que existe uma única solução φ em B_ε.

Defina $\psi = \varphi + \xi$. Como ψ é uniformemente próxima de ξ, segue do Teorema 5.4.4 que, para ε suficientemente pequeno,

$$L_\psi(t,\tau) = T(t,\tau) + \int_\tau^t T(t,s) D_x g(s,\psi(s)) L_\psi(s,\tau) ds =$$

$$L_\xi(t,\tau) + \int_\tau^t L_\xi(t,s)[D_x g(s,\psi(s)) - D_x f(s,\xi(s))][L_\psi(s,\tau) - L_\xi(s,\tau)] ds$$

$$+ \int_\tau^t L_\xi(t,s)[D_x g(s,\psi(s)) - D_x f(s,\xi(s))] L_\xi(s,\tau) ds$$

possui dicotomia exponencial hiperbólica e, portanto, ψ é uma solução global hiperbólica.

□

Tomando $f = g$ obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.5.5. Considere $\xi : \mathbb{R} \to X$ uma solução global hiperbólica para $S_f(\cdot,\cdot)$ cuja dicotomia exponencial associada possui constantes M e ω e $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\xi(t)\|_X \leq B < \infty$. Suponha que

$$\sup_{\|x\|_X \leq B} \|f(t,x)\|_X + \|D_x f(t,x)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$$

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que não existe solução global contida em uma ε-vizinhança de $\xi(\cdot)$.

CAPÍTULO

6

UMA EDO PLANAR COM ACOPLAMENTO DIFUSIVO

Nesta seção, iremos aplicar os conceitos desenvolvidos anteriormente no estudo de uma equação diferencial ordinária planar com acoplamento difusivo que possui origem na discretização do problema de Chafee-Infante. Iremos caracterizar completamente seu atrator global, explicitando sua estrutura gradiente. Os resultados aqui descritos estão sintetizados em (Carvalho *et al.* 2021).

Seja $0 < \beta_0 < \beta_1 < \infty$ e $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função globalmente Lipschitz com $\beta(\mathbb{R}^+) \subset [\beta_0, \beta_1]$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) + x_1 - \beta(t)x_1^3 := f_1(t,x), \quad t > \tau \geq 0, \quad x_1(\tau) = x_{1,\tau}, \\ \dot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) + x_2 - \beta(t)x_2^3 := f_2(t,x), \quad t > \tau \geq 0, \quad x_2(\tau) = x_{2,\tau}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Para estudar (6.1), considere por um momento outra função $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que também seja globalmente Lipschitz e $\gamma(\mathbb{R}) \subset [\beta_0, \beta_1]$. Se η é uma solução global qualquer do semigrupo driving Θ associado a (6.1), estamos interessados nas funções da forma $\gamma(t) := \eta(t)(0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, uma vez que elas configuram extensões naturais de β no atrator global S de Θ em Σ. Agora, considere o problema de valor inicial abaixo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k(x_2 - x_1) + x_1 - \gamma(t)x_1^3 := f_{\gamma,1}(t,x), \quad t > \tau, \quad x_1(\tau) = x_{1,\tau}, \\ \dot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) + x_2 - \gamma(t)x_2^3 := f_{\gamma,2}(t,x), \quad t > \tau, \quad x_2(\tau) = x_{2,\tau}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Pelo Teorema 2.1.3, este problema possui solução local que se comporta continuamente com relação ao instante e posição inicial. Para ver que, na verdade, as soluções estão definidas globalmente, basta mostrar que elas permanecem limitadas no intervalo maximal.

Veja que

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 = 2f_\gamma(t,x) \cdot x = 2(kx_1^2 - kx_1x_2 + x_1^2 - \gamma(t)x_1^4 + kx_2^2 - kx_1x_2 + x_2^2 - \gamma(t)x_2^4)$$

$$= 2(k(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 - \gamma(t)(x_1^4 + x_2^4))$$

Como $-2\beta(t)(x_1^4 + x_2^4)$ é o termo de maior ordem e é sempre negativo, existe $M > 0$ tal que $\frac{d}{dt}\|x\|^2 < 0$ sempre que $\|x\| \geq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, de 2.1.3, devemos ter $\tau = \infty$.

Denote por $S(t,\tau)(x_{1,\tau}, x_{2,\tau}) = (x_1(t,\tau,x_{1,\tau}), x_2(t,\tau,x_{2,\tau}))$, $t \geq \tau$, a solução de (6.2). Então $\{S(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ é um processo de evolução. Como $K = \overline{B(0,M)}$ é um compacto que atrai pullback limitados de X no tempo t para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 4.0.11 segue que $S(\cdot,\cdot)$ possui um atrator pullback $\{\mathscr{A}(t) \subset \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ dado por $\mathscr{A}(t) = \omega(K,t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

6.1 Caso autônomo

Antes de prosseguirmos, consideremos o caso em que $\beta(\cdot) \equiv \beta$, isto é, $\beta(t)$ é uma função constante. Assim, considere o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{z} &= f(z), \\ z(0) &= z_0 \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x_2 - x_1) + x_1 - \beta x_1^3 \\ k(x_1 - x_2) + x_2 - \beta x_2^3 \end{pmatrix}$.

Primeiramente, note que, se $z(\cdot, z_0)$ é uma solução para (6.3) então, $\beta^{\frac{1}{2}} z(\cdot)$ é uma solução para (6.3) com $\beta = 1$ e dado inicial $\beta^{\frac{1}{2}} z_0$. Por esta razão, não há perda de generalidade se considerarmos $\beta = 1$ na análise a seguir.

Os equilíbrios de (6.3) com $\beta = 1$ são as raízes de

$$\begin{aligned} k(x_2 - x_1) + x_1 - x_1^3 &= 0 \\ k(x_1 - x_2) + x_2 - x_2^3 &= 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Do caso geral, sabemos que dado $z_0 \in \mathbb{R}^2$, (6.3) tem uma única solução $z(\cdot, z_0)$ que está definita em $[0, \infty)$. Se $T(t, z_0) = z(t, z_0)$ para cada $t \geq 0$, então $\{T(t) \in C(X) : t \geq 0\}$ é um semigrupo que possui um atrator global $\mathscr{A}$.

Considere o retângulo $R_M = [-M, M]^2$, $M > 1$. Então para z em qualquer de suas faces, temos que o campo vetorial $f(z)$ aponta para dentro do retângulo. De fato, se $x_1 = M$ então $\dot{x}_1 = k(x_2 - M) + M - M^3 < 0$ sempre que $x_2 \in [-M, M]$. Se $x_2 = M$ então $\dot{x}_2 = k(x_1 - M) + M - M^3 < 0$ sempre que $x_1 \in [-M, M]$. De forma análoga, podemos verificar os casos em que $x_1 = -M$ ou $x_2 = -M$. Segue que, uma solução que comece em R_M nunca deixa R_M. Deduzimos disto que $\mathscr{A} \subset [-1,1] \times [-1,1]$.

Claramente $z_1^* = (1,1), z_2^* = (0,0)$ e $z_3^* = (-1,-1)$ são soluções de (6.4). Se $k < \frac{1}{2}$, existem dois outros equilíbrios de (6.3) na diagonal secundária $x_1 = -x_2$. Eles são

$$z_4^* = (\sqrt{1-2k}, -\sqrt{1-2k}) \text{ e } z_5^* = (-\sqrt{1-2k}, \sqrt{1-2k}).$$

Se $k > \frac{1}{3}$, não existem outros equilíbrios além destes cinco. De fato, isolando x_2 na primeira equação de (6.4) e substituindo na segunda obtemos

$$kx_1 - (k-1)x_1 - x_1^3 + \frac{1}{k}[(k-1)x_1 + x_1^3] - \frac{1}{k^3}[(k-1)x_1 + x_1^3]^3 = 0$$

que, após expansão do termo cúbico e simplificação, nos dá

$$k^2(2k-1)x_1 + [-2k^3 + 4k^2 - 3k + 1]x_1^3 - 3(k-1)^2 x_1^5 - 3(k-1)x_1^7 - x_1^9 = 0,$$

cujas soluções não nulas satisfazem (fazendo $x_1^2 = z$)

$$\begin{aligned} 0 &= p(z) \\ &= k^2(2k-1) + [-2k^3 + 4k^2 - 3k + 1]z - 3(k-1)^2 z^2 - 3(k-1)z^3 - z^4 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Como as soluções de $x_1 = x_2$, $x_1 - x_1^3 = 0$ e $x_1 = -x_2$, $(1-2k)x - x^3 = 0$ são raízes da equação acima concluímos que o polinômio $q(z) := (1-z)((1-2k)-z) = (1-2k) - 2(1-k)z + z^2$ divide $p(z)$. Dividindo o polinômio $p(z)$ em (6.5) por $q(z)$ obtemos $r(z) = z^2 + (k-1)z - k^2$ cujas raízes são

$$z_\pm = (1-k) \pm \sqrt{-3k^2 - 2k + 1}.$$

Observando $-3k^2 - 2k + 1 < 0$ que para $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, temos que estas raízes são complexas, não contribuindo para as soluções de (6.4).

Segue que as únicas raízes são aquelas encontradas nas retas $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$, que são: $(1,1)$, $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(\sqrt{1-2k}, -\sqrt{1-2k})$ e $(-\sqrt{1-2k}, \sqrt{1-2k})$.

Agora vamos determinar os auto-valores e auto-vetores das matrizes $A_i = f'(z_i^*) \in M_{2\times 2}$, $1 \le i \le 5$, e fazer um esboço do retrato de fase para $\dot{z} = A_i z$, $1 \le i \le 5$.

Note que, para $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$,

$$f'(z) = \begin{pmatrix} (1-k) - 3x_1^2 & k \\ k & (1-k) - 3x_1^2 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tem como auto-valores $\lambda_+^{x^2} = 1 - 3x^2$ e $\lambda_- = 1 - 2k - 3x^2$, com correspondentes auto-vetores $v_\pm = \binom{\pm 1}{1}$.

Assim, para $z_1^* = \binom{1}{1}$ e $z_3^* = \binom{-1}{-1}$ temos $f'(z_1^*) = f'(z_3^*) = \begin{pmatrix} -(2+k) & k \\ k & -(2+k) \end{pmatrix}$ com auto-valores $\lambda_+^1 = -2 < 0$ e $\lambda_-^1 = -2 - 2k < 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \binom{1}{1}$ e $v_- = \binom{-1}{1}$.

Para $z_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{1-2k} \\ -\sqrt{1-2k} \end{pmatrix}$ e $z_5^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-2k} \\ \sqrt{1-2k} \end{pmatrix}$ temos que $f'(z_3^*) = f'(z_4^*) = \begin{pmatrix} 5k-2 & k \\ k & 5k-2 \end{pmatrix}$ com auto-valores $\lambda_+^k = 2(3k-1) > 0$ e $\lambda_-^k = 2(2k-1) < 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \binom{1}{1}$ e $v_- = \binom{-1}{1}$.

Por fim, para $z_2^* = \binom{0}{0}$ temos que $f'(z_2^*) = \begin{pmatrix} 1-k & k \\ k & 1-k \end{pmatrix}$ com auto-valores $\lambda_+^0 = 1 > 0$ e $\lambda_-^0 = 1-2k > 0$ e auto-vetores correspondentes $v_+ = \binom{1}{1}$ e $v_- = \binom{-1}{1}$.

Com base nesta análise temos, da propriedade do ponto de sela que

- $z_1^* = \binom{1}{1}$ e $z_3^* = \binom{-1}{-1}$ são assintóticamente estáveis.

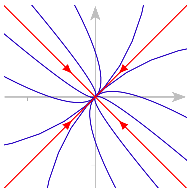

Figura 1 – Linearização em torno de $\pm(1,1)$.

- $z_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{1-2k} \\ -\sqrt{1-2k} \end{pmatrix}$ e $z_5^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-2k} \\ \sqrt{1-2k} \end{pmatrix}$ são pontos de sela com variedades estáveis e instáveis de dimensão um, portanto instáveis.

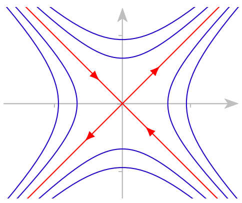

Figura 2 – Linearização em torno de $\pm(\sqrt{1-2k}, -\sqrt{1-2k})$

- $z_2^* = \binom{0}{0}$ é um nó instável (variedade instável de dimensão 2).

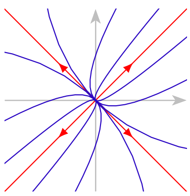

Figura 3 – Linearização em torno de $(0,0)$

Note que $V\binom{x_1}{x_2} = \frac{k}{2}(x_1-x_2)^2 - \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^4}{4}$ é tal que $-\nabla V\binom{x_1}{x_2} = f\binom{x_1}{x_2}$. Ou seja (6.3) é gradiente e, portanto, dinamicamente gradiente. Podemos então ilustrar seu atrator global como a parte em verde na Figura 5.

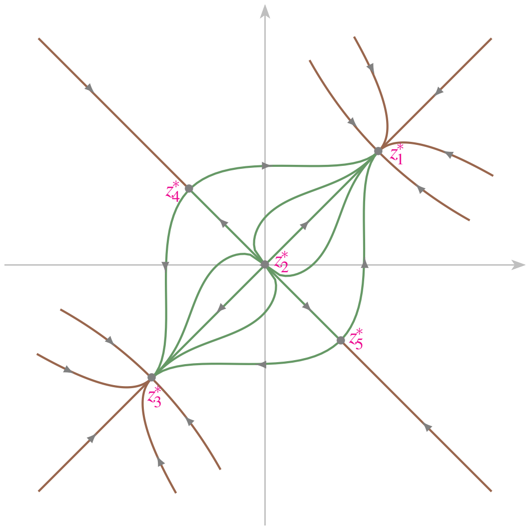

Figura 4 – Retrato de fase para $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Se $k > \frac{1}{2}$, os únicos equilíbrios de (6.4) são aqueles sobre a diagonal principal. Se, por outro lado, $k \in [0, \frac{1}{3})$ então, temos quatro equilíbrios adicionais dados por

$$z_6^* = \left(-\sqrt{(1-k)-\sqrt{-3k^2-2k+1}}, \sqrt{(1-k)+\sqrt{-3k^2-2k+1}}\right)$$
$$z_7^* = \left(-\sqrt{(1-k)+\sqrt{-3k^2-2k+1}}, \sqrt{(1-k)-\sqrt{-3k^2-2k+1}}\right)$$
$$z_8^* = \left(\sqrt{(1-k)+\sqrt{-3k^2-2k+1}}, -\sqrt{(1-k)-\sqrt{-3k^2-2k+1}}\right)$$
$$z_9^* = \left(\sqrt{(1-k)-\sqrt{-3k^2-2k+1}}, -\sqrt{(1-k)+\sqrt{-3k^2-2k+1}}\right)$$

Os equilíbrios $\{z_6^*, z_7^*, z_8^*, z_9^*\}$ são todos assintóticamente estáveis quando $k \in [0, \frac{1}{3})$. Nosso interesse se concentra no caso em que $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

6.2 Caso geral

Voltemos ao caso em que β pode não ser constante. Note que

(i) A variedade linear $\ell_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$ é invariante para o processo de evolução associado a (6.2), isto é, se $x_{1,\tau} = x_{2,\tau}$, então a solução

$$S(t,\tau)(x_{1,\tau}, x_{2,\tau}) = (x_1(t,\tau,x_{1,\tau}), x_2(t,\tau,x_{2,\tau}))$$

satisfaz $x_1(t,\tau,x_{1,\tau}) = x_2(t,\tau,x_{2,\tau}))$, $t \geq \tau$.

Neste caso, ambas as coordenadas $x_1(t,\tau,x_{1,\tau}) = x_2(t,\tau,x_{2,\tau})$ satisfazem

$$\dot{x} = x - \gamma(t)x^3, \quad t > \tau, \quad x(\tau) = x_{1,\tau} = x_{2,\tau}. \tag{6.6}$$

(ii) Da mesma forma, a variedade linear $\ell_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -x_2\}$ é invariante para o processo de evolução associado a (6.2), isto é, se $x_{1,\tau} = -x_{2,\tau}$, então a solução $S(t,\tau)(x_{1,\tau},x_{2,\tau}) = (x_1(t,\tau,x_{1,\tau}),x_2(t,\tau,x_{2,\tau}))$, satisfaz $x_1(t,\tau,x_{1,\tau}) = -x_2(t,\tau,x_{2,\tau}))$, $t \geq \tau$.

Neste caso, ambas as coordenadas $x_1(t,\tau,x_{1,\tau}) = -x_2(t,\tau,x_{2,\tau})$ satisfazem

$$\dot{x} = (1-2k)x - \gamma(t)x^3, \quad t > \tau, \quad x_1(\tau) = x_{1,\tau} = -x_{2,\tau} = -x_2(\tau). \tag{6.7}$$

(iii) Se $0 \leq k < \frac{1}{2}$ a linearização de (6.2) ao redor da solução de equilíbrio $(x_1^*,x_2^*) = (0,0)$ possui dois autovalores positivos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1-2k$.

Provaremos que, se $k < \frac{1}{2}$, existem quatro soluções globais limitadas de (6.2) que ficam longe de $(0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, duas em ℓ_1 e duas em ℓ_2.

Por simplicidade, consideremos o caso em ℓ_2 e o problema (6.7). O caso em ℓ_1 é o mesmo fazendo $k = 0$.

Primeiramente note que se $x_\tau \in I_k := \left[\left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{1-2k}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, então $x(t,\tau,x_\tau) \in I_k$ para todo $t \geq \tau$, pois se $x = \left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\dot{x} = (1-2k)\left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \gamma(t)\left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} \geq (1-2k)\left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \beta_1\left(\frac{1-2k}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 0$$

e, analogamente, se $x = \left(\frac{1-2k}{\beta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, então $\dot{x} \leq 0$.

Isso diz que o intervalo I_k é positivamente invariante para o processo de evolução $\{S(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$.

Agora, considere $\{T_{\beta_i}(t) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq 0\}$, $i = 0,1$, o operador solução do problema autônomo

$$\dot{x} = (1-2k)x - \beta_i x^3, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0. \tag{6.8}$$

Esse problema é gradiente e possui três equilíbrios $x_0^*, x_{1,i}^\pm = \pm\left(\frac{1-2k}{\beta_i}\right)^{\frac{1}{2}}$ e se $\{S_\gamma(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ é o processo de evolução associado a (6.7), nós temos

$$x_{1,1}^+ = T_{\beta_1}(t-s)x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s)x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s)x_{1,0}^+ \leq T_{\beta_0}(t-s)x_{1,0}^+ = x_{1,0}^+$$

e, se $s_1 \leq s_2 \leq t$, temos

$$x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s_1)x_{1,0}^+ = S_\gamma(t,s_2)x_{1,0}^+ S_\gamma(s_2,s_1)x_{1,0}^+ \leq S_\gamma(t,s_2)x_{1,0}^+ \leq S_\gamma(t,s_2)x_{1,0}^+ = x_{1,0}^+$$

e

$$\begin{aligned} x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s_2)x_{1,1}^+ &= S_\gamma(t,s_2)T_{\beta_1}(s_2-s_1)x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s_2)S_\gamma(s_2,s_1)x_{1,1}^+ \\ &\leq S_\gamma(t,s_1)x_{1,1}^+ \leq S_\gamma(t,s_1)x_{1,0}^+ \leq T_{\beta_0}(t-s_1)x_{1,0}^+ = x_{1,0}^+ \end{aligned}$$

Assim, temos que os limites

$$\eta_0(t) = \lim_{s\to-\infty} S_\gamma(t,s)x_{1,0}^+, \ t\in\mathbb{R}, \quad \text{e}$$
$$\eta_1(t) = \lim_{s\to-\infty} S_\gamma(t,s)x_{1,1}^+, \ t\in\mathbb{R}.$$

existem e correspondem a soluções globais limitadas de (6.7) que estão em I_k. Além disso, $\eta_0(t)\geq\eta_1(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Se $\xi(t)=\eta_0(t)-\eta_1(t)\geq 0$, então

$$\left.\begin{array}{l}\dot\eta_0(t)=(1-2k)\eta_0(t)-\gamma(t)\eta_0(t)^3\\ \dot\eta_1(t)=(1-2k)\eta_1(t)-\gamma(t)\eta_1(t)^3\end{array}\right\}\dot\xi(t)=[1-2k-\gamma(t)(\eta_0(t)^2+\eta_0(t)\eta_1(t)+\eta_1(t)^2)]\xi(t).$$

Seja $q(t)=1-2k-\gamma(t)\eta_0(t)^2$. Então $\dot\eta_0(t)=q(t)\eta_0(t)$ e

$$\eta_0(t)=e^{\int_s^t q(\theta)d\theta}\eta_0(s).$$

Uma vez que $\eta_0(t)\in I_k$, para todo $t\in\mathbb{R}$, devemos ter $e^{\int_s^t q(\theta)d\theta}\in\left[\sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_1}},\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_0}}\right]$, para todo $t\geq s$.

Ademais

$$\dot\xi(t)=q(t)\xi(t)-\gamma(t)[\eta_0(t)\eta_1(t)+\eta_1(t)^2]\,\xi(t)$$

Escrevendo $p(t)=\gamma(t)[\eta_0(t)\eta_1(t)+\eta_1(t)^2]$, temos que $p(t)\geq\frac{\beta_0}{\beta_1}2(1-2k)>0$ e, pela fórmula da variação dos parâmetros,

$$\begin{aligned}0\leq\xi(t)=e^{\int_s^t q(\theta)d\theta}\xi(s)-\int_s^t e^{\int_r^t q(\theta)d\theta}p(r)\xi(r)dr&\leq e^{\int_s^t q(\theta)d\theta}\xi(s)\\ &\leq e^{\int_s^t q(\theta)d\theta}\eta_0(s)=\eta_0(t)\end{aligned}\tag{6.9}$$

Logo, fazendo $s\to-\infty$ temos que a integral

$$\int_{-\infty}^t e^{\int_r^t q(\theta)d\theta}p(r)\xi(r)dr$$

é convergente e, como $e^{\int_r^t q(\theta)d\theta}p(r)\geq 2\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}}(1-2k)>0$, existe uma sequência $s_n\to-\infty$ tal que $\xi(s_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Então substituindo s por s_n em (6.9) e fazendo $n\to\infty$, obtemos que

$$0\leq\xi(t)=\int_{-\infty}^t e^{\int_r^t q(\theta)d\theta}p(r)\xi(r)dr\leq 0$$

e concluímos que $\eta_0(t)=\eta_1(t)$ para todo $t\in\mathbb{R}$. Essa solução será denotada por ξ_k, onde $k\in(0,\frac{1}{2})$ é o parâmetro em (6.2).

Isso prova a existência de uma única solução global limitada de (6.7) que está em I_k para todo $t\in\mathbb{R}$.

Este argumento pode ser repetido, sem mudanças, para o caso quando $k=0$.

Nosso próximo resultado sintetiza os resultados que acabamos de provar para o problema (6.2).

Teorema 6.2.1. Seja $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Como acabamos de provar, (6.7) possui exatamente uma solução global $\xi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que fica longe de zero. Como uma consequência disso, (6.2) possui exatamente quatro soluções que ficam longe de $(0,0)$ e são dadas por

$$\begin{aligned}
\xi^*_{1,+}(t) &= (\xi_0, \xi_0)(t), \ t \in \mathbb{R}, \\
\xi^*_{1,-}(t) &= (-\xi_0, -\xi_0)(t), \ t \in \mathbb{R}, \\
\xi^*_{2,+}(t) &= (\xi_k, -\xi_k)(t), \ t \in \mathbb{R}, \\
\xi^*_{2,-}(t) &= (-\xi_k, \xi_k)(t), \ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

nós chamamos essas quatro soluções de soluções globais limitadas não degeneradas. Iremos denotar $\xi^*_0(t) = (0,0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mostraremos que todas as soluções globais limitadas de (6.2) tendem para ℓ_2 quando $t \to -\infty$ e, com exceção das soluções globais limitadas $\xi(\cdot)$ que permanecem em ℓ_2 para todo $t \in \mathbb{R}$, tendem a ℓ_1 quando $t \to +\infty$. Para provar isso, iremos primeiramente linearizar ao redor das soluções globais não degenerada e provar que as linearizações possuem dicotomia exponencial.

Teorema 6.2.2. Seja $0 \leq k < \frac{1}{2}$. Então $\xi^*_0 = (0,0)$, $\xi^*_{1,\pm}$ e $\xi^*_{2,\pm}$ são soluções globais hiperbólicas, isto é, a linearização ao redor de cada uma dessas soluções possui dicotomia exponencial.

Demonstração. Afirmamos que a linearização do processo de evolução $\{S(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ associado a (6.2) ao redor de ξ^*_0 possui dicotomia exponencial com projeções constantes $Q(t) = I$ e $(I - Q(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Veja que essa linearização é um sistema dinâmico autônomo dado por

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k \\ k & 1-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

Sobre o subespaço invariante ℓ_1, o problema se reduz a $\dot{x}(t) = x$, de onde segue que $x(t) = e^t x(0)$ e ℓ_1 é uma direção instável. Agora, sobre o subespaço invariante ℓ_2 o problema se reduz a $\dot{x}(t) = (1-2k)x$, de onde segue que $x(t) = e^{(1-2k)t}x(0)$ e ℓ_2 também é uma direção instável. Como qualquer outra solução do sistema linear é combinação linear dessas duas soluções que possuem dicotomia exponencial, temos que ξ^*_0 é hiperbólica.

Agora, vamos provar que a linearização do processo de evolução $\{S(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ associado a (6.2) ao redor de $\xi^*_{1,+}$ é um processo de evolução linear $\{L_{1,+}(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ que possui dicotomia exponencial. Esta linearização é o processo de evolução linear associado à EDO linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k-3\gamma(t)\xi_0^2 & k \\ k & 1-k-3\gamma(t)\xi_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

Note que ℓ_1 ainda é uma variedade invariante para (6.11) e que, ao longo de ℓ_1, o sistema acima de reduz a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k-3\gamma(t)\xi_0^2 & k \\ k & 1-k-3\gamma(t)\xi_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

o que corresponde a cada coordenada satisfazer $\dot{x}(t) = (1-3\beta(t)\xi_0^2)x$. Lembrando que $\dot{\xi}_0(t) = \xi_0(t) - \gamma(t)\xi_0(t)^3$, nós temos que

$$3\frac{\dot{\xi}_0(t)}{\xi_0(t)} = 2 + (1-3\gamma(t)\xi_0(t)^2)$$

de onde obtemos que

$$e^{\int_s^t (1-3\gamma(\theta)\xi_0(\theta)^2)d\theta} = e^{-2(t-s)}\left(\frac{\xi_0(t)}{\xi_0(s)}\right)^3$$

e uma vez que $\xi_0(t) \in I_0 = \left[\beta_1^{-\frac{1}{2}}, \beta_0^{-\frac{1}{2}}\right]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ nós devemos ter que

$$\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{\xi_0(t)}{\xi_0(s)}\right)^3 \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

e as soluções de (6.11) em ℓ_1 satisfazem

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}\right\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(t-s)} \left\|\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_1(s) \end{pmatrix}\right\|$$

Portanto, se $I-P$ é a projeção ortogonal em ℓ_1, temos

$$\|L_{1,+}(t,s)(I-P)\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(t-s)},\ t \geq s.$$

Logo, ℓ_1 é uma direção estável.

Vamos ver o que ocorre na imagem de P, isto é, em ℓ_2. Ela corresponde a $x_1 = -x_2$ satisfazendo $\dot{x}(t) = (1-2k-3\gamma(t)\xi_0^2)x$. Lembrando que $\dot{\xi}_0(t) = \xi_0(t) - \gamma(t)\xi_0(t)^3$, temos que

$$3\frac{\dot{\xi}_0(t)}{\xi_0(t)} = 2(1+k) + (1-2k-3\gamma(t)\xi_0(t)^2)$$

De onde obtemos que

$$e^{\int_s^t (1-2k-3\gamma(\theta)\xi_0(\theta)^2)d\theta} = e^{-2(1+k)(t-s)}\left(\frac{\xi_0(t)}{\xi_0(s)}\right)^3$$

como $\xi_0(t) \in I_0 = \left[\beta_1^{-\frac{1}{2}}, \beta_0^{-\frac{1}{2}}\right]$ para todo $t \in \mathbb{R}$ nós temos que

$$\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{\xi_0(t)}{\xi_0(s)}\right)^3 \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

e as soluções de (6.11) em ℓ_2 satisfazem

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1(t) \\ -x_1(t) \end{pmatrix} \right\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(1+k)(t-s)} \left\| \begin{pmatrix} x_1(s) \\ -x_1(s) \end{pmatrix} \right\|$$

logo

$$\|L_{1,+}(t,s)P\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(1+k)(t-s)}, \ t \geq s.$$

e ℓ_2 é uma direção estável.

Unindo ambas as estimativas, obtemos que

$$\|L_{1,+}(t,s)\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(t-s)}, \ t \geq s.$$

A estimativa para a linearização ao redor de $\xi^*_{1,-}$ é exatamente a mesma com o mesmo expoente.

Agora provaremos que a linearização do processo de evolução $\{S(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2 : t \geq \tau\}$ associado a (6.2) ao redor de $\xi^*_{2,+}(t) = (\xi_k(t), -\xi_k(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é um processo de evolução linear $\{L_{2,+}(t,\tau) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq \tau\}$ que possui dicotomia exponencial. Esta linearização é o processo de evolução linear associado a EDO linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k-3\gamma(t)\xi_k^2 & k \\ k & 1-k-3\gamma(t)\xi_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

Note que ℓ_1 ainda é uma variedade invariante para (6.12) e, ao longo de ℓ_1, o sistema acima se reduz a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k-3\gamma(t)\xi_k^2 & k \\ k & 1-k-3\gamma(t)\xi_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

o que corresponde a cada coordenada satisfazer $\dot{x}(t) = (1-3\gamma(t)\xi_k^2)x$. Lembrando que $\dot{\xi}_k(t) = (1-2k)\xi_k(t) - \gamma(t)\xi_k(t)^3$, temos

$$3\frac{\dot{\xi}_k(t)}{\xi_k(t)} = 2 - 6k + (1-3\gamma(t)\xi_k(t)^2)$$

de onde obtemos que

$$e^{\int_s^t (1-3\gamma(\theta)\xi_k(\theta)^2)d\theta} = e^{(6k-2)(t-s)} \left(\frac{\xi_k(t)}{\xi_k(s)}\right)^3$$

e uma vez que $\xi_k(t) \in I_k = \left[(1-2k)^{\frac{1}{2}}\beta_1^{-\frac{1}{2}}, (1-2k)^{\frac{1}{2}}\beta_0^{-\frac{1}{2}}\right]$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{\xi_k(t)}{\xi_k(s)}\right)^3 \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

e as soluções de (6.12) em ℓ_1 satisfazem

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{pmatrix}\right\| \geq \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{(6k-2)(t-s)} \left\|\begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_1(s) \end{pmatrix}\right\|$$

ou, se Q é a projeção ortogonal em ℓ_1 e $k \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$$\|L_{2,+}(s,t)Q\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{(6k-2)(s-t)}, \ t \geq s.$$

e, portanto, ℓ_1 é uma direção instável.

Vejamos o que acontece com a imagem de $I - Q$, isto é, em ℓ_2. Isso corresponde a $x_1 = -x_2$ satisfazendo $\dot{x}(t) = (1 - 2k - 3\gamma(t)\xi_k^2)x$. Lembrando que $\dot{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - \gamma(t)\xi_k(t)^3$, temos que

$$3\frac{\dot{\xi}_k(t)}{\xi_k(t)} = 2 - 4k + (1 - 2k - 3\gamma(t)\xi_k(t)^2)$$

de onde obtemos que

$$e^{\int_s^t (1-2k-3\gamma(\theta)\xi_k(\theta)^2)d\theta} = e^{-2(1-2k)(t-s)} \left(\frac{\xi_k(t)}{\xi_k(s)}\right)^3$$

e uma vez que $\xi_k(t) \in I_0 = \left[\beta_1^{-\frac{1}{2}}, \beta_0^{-\frac{1}{2}}\right]$ para todo $t \in \mathbb{R}$, devemos ter

$$\left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^{\frac{3}{2}} \leq \left(\frac{\xi_k(t)}{\xi_k(s)}\right)^3 \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

e as soluções de (6.12) em ℓ_2 satisfazem

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1(t) \\ -x_1(t) \end{pmatrix}\right\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(1-2k)(t-s)} \left\|\begin{pmatrix} x_1(s) \\ -x_1(s) \end{pmatrix}\right\|, \ t \geq s,$$

Ou seja,

$$\|L_{2,+}(s,t)(I-Q)\| \leq \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-2(1-2k)(t-s)}, \ t \geq s.$$

e ℓ_2 é uma direção estável.

O que mostra que a linearização de $\{S(t,s) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq s\}$ ao redor de $\xi_{2,+}^*$ possui dicotomia exponencial com projeções $Q(t) \equiv Q$, onde Q é a projeção ortogonal em ℓ_1.

A estimativa da linearização ao redor de $\xi_{2,-}^*$ é exatamente a mesma com o mesmo expoente. □

Observação 6.2.3. Se $k \in (0, \frac{1}{3})$, os cálculos acima nos levarão a conclusão de que $\xi_{2,\pm}$ é estável nas variedades invariantes ℓ_1 e ℓ_2. Nós esperamos que essa situação iria requerer a existência de quatro outras soluções globais não degeneradas e isso é exatamente o que acontece quando β é constante, para o qual conseguimos encontrar explicitamente os quatro equilíbrios adicionais que aparecem. No entanto, não conseguimos encontrar esses equilíbrios no caso não autônomo. Nós não estamos interessados nessa situação, pois ela não corresponde a um atrator do problema de Chafee-Infante, que é o que nossa EDO quer imitar.

No que se segue, mostraremos agora que todas as soluções globais limitadas de (6.2) tendem para ℓ_2 quando $t \to -\infty$ e tendem a ℓ_1 (possível no caso em que saem de $(0,0)$) ou ℓ_2 (maioria das soluções) quando $t \to +\infty$.

O argumento é dividido em quatro partes, todas similares, relacionadas aos quadrantes determinados por ℓ_1 e ℓ_2 no plano. Observamos que, como as retas ℓ_1 e ℓ_2 são subespaços invariantes para (6.2), os quadrantes determinados por essas retas também são invariantes. Primeiro consideramos

$$Q_1 = \{(x_1,x_2) : x_1 - x_2 \geq 0 \text{ and } x_1 + x_2 \geq 0\}$$

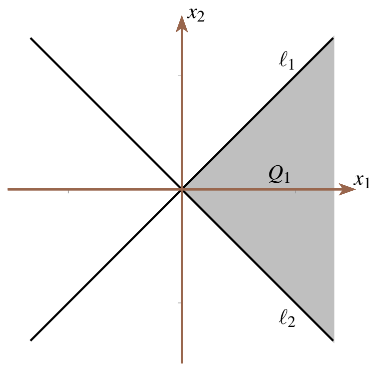

Figura 5 – Região Q_1

Proposição 6.2.4. Se $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma solução global limitada em Q_1, então $\|x(t) - \ell_1\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\|x(t) - \ell_2\| \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demonstração. Considere a mudança de coordenadas (rotação de $\frac{\pi}{4}$ no sentido anti-horário):

$$(x_1,x_2) \overset{\mathrm{T}}{\to} (\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}}) = (z_1, z_2)$$

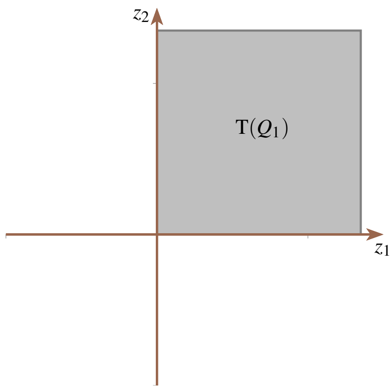

Figura 6 – Região T(Q_1)

Assim, em Q_1, teremos $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_2 - z_1)$ e $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z_1 + z_2)$, com $z_1, z_2 \geq 0$.

Nestas novas coordenadas, o fluxo (6.2) é expresso como

$$\begin{cases} \dot{z_1} = z_1(1-2k) - \frac{\gamma(t)}{4}((z_1+z_2)^3 - (z_2-z_1)^3) =: f_{z,1}(z_1,z_2) \\ \dot{z_2} = z_2 - \frac{\gamma(t)}{4}((z_1+z_2)^3 + (z_2-z_1)^3) =: f_{z,2}(z_1,z_2) \end{cases}$$

Considere agora uma curva do tipo $z_2 = rz_1^n$, cujo vetor normal é dado por $n_{(z_1,z_2)} = (-1, \frac{1}{nrz_1^{n-1}})$ quando $z_1 \neq 0$.

Sobre esta curva, temos o campo

$$\begin{cases} f_{z,1}(z_1, rz_1^n) = z_1(1-2k) - \frac{\gamma(t)}{4}(2z_1^3 + 6r^2 z_1^{2n+1}) \\ f_{z,2}(z_1, rz_1^n) = rz_1^n - \frac{\gamma(t)}{4}(6rz_1^{2+n} + 2r^3 z_1^{3n}) \end{cases}$$

Queremos mostrar que, para algum $n \in \mathbb{N}$, o campo $(f_{z,1}(z_1, rz_1^n), f_{z,2}(z_1, rz_1^n))$ aponta pra dentro da curva. Veja que se assim o fizermos, teremos mostrado que se $(z_1(s), z_2(s))$ satisfaz $z_2(s) = rz_1(s)^n$ e $t > s$, então $(z_1(t), z_2(t))$ satisfaz $z_2(t) = r'z_1(t)^n$, com $r' > r$. Assim, as soluções convergirão para a reta $z_1 = 0$ (que corresponde a reta $x_1 = x_2$) quando t cresce e para a reta $z_2 = 0$ (que corresponde a reta $x_1 = -x_2$) quando t decresce.

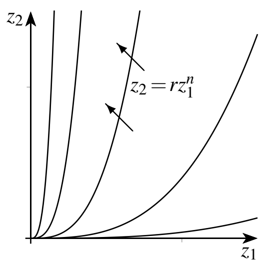

Figura 7 – Curvas de nível

Assim, vamos verificar sob quais condições temos $(f_{z,1}, f_{z,2}) \cdot n_{(z_1,z_2)} > 0$ sobre a curva.

Temos

$$(f_{z,1}, f_{z,2}) \cdot n_{(z_1,z_2)} = \frac{z_1}{n} - \frac{\gamma(t)}{4n}(6z_1^3 + 2r^2 z^{(2n+1)}) - z_1(1-2k) + \frac{\gamma(t)}{4}(2z_1^3 + 6r^2 z_1^{(2n+1)}) =$$

$$\frac{z_1(2kn - n + 1)}{n} + \frac{\gamma(t)(z_1^3(n-3) + r^2 z_1^{2n+1}(3n-1))}{2n} > 0$$

$$\iff 2(2kn - n + 1) + \gamma(t)(z_1^2(n-3) + r^2 z_1^{2n}(3n-1)) > 0$$

Veja que se $n = 3$, a última desigualdade fica

$$4(3k-1) > -8\gamma(t) r^2 z_1^6$$

O que é verdade para todo $r, z_1 \geq 0$, pois $k > \frac{1}{3}$ e $\gamma(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, tomando $n = 3$, obtemos o resultado desejado. □

Este resultado será refinado quando tratarmos do semigrupo skew-product associado.

6.3 Configuração Skew-Product

Nesta seção iremos escrever o semigrupo skew-product associado a (6.1) e descrever seu atrator, como preterido.

Considere $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t,x) = (-\beta(t)x_1^3, -\beta(t)x_2^3)$$

Então (6.1) pode ser vista como

$$\begin{cases} \dot{x} = (k(x_2 - x_1) + x_1, k(x_1 - x_2) + x_2) + f(t,x), \ t > \tau \geq 0 \\ x(\tau) = x_\tau \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{6.13}$$

Tome o espaço $C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ com a métrica da convergência em compactos ρ. Seja $\Sigma = \overline{\{\beta(t+\cdot) : t \in \mathbb{R}^+\}}^{\rho}$ e considere o semigrupo $\Theta(t) : \Sigma \to \Sigma$ dado por $(\Theta(t)\beta)(s) = \beta(t+s)$.

Dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^+$, é fácil ver que $\{\beta(t+\cdot) : t \in \mathbb{R}^+\}$ é equilimitada e equicontínua em $C(K)$, logo, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, Σ é compacto com relação a ρ e, portanto, Σ possui atrator global.

Dado $\sigma \in \Sigma$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$, defina o mapa $\mathbb{R} \ni t \to \mathscr{K}(t,\sigma)x_0 \in \mathbb{R}^2$ como sendo a solução do problema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + x_1 - \sigma(t)x_1^3 \\ \dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + x_2 - \sigma(t)x_2^3 \\ (x_1(0), x_2(0)) = x_0 \end{cases}$$

Então $\{\mathscr{K}(t,\sigma) \in C(\mathbb{R}^2) : t \geq 0, \sigma \in \Sigma\}$ é um cociclo. Considere então o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ associado em $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 \times \Sigma$ dado por

$$\Pi(t)(x,\sigma) = (\mathscr{K}(t,\sigma)x, \Theta(t)\sigma)$$

Se $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ é uma solução global de Θ, então podemos definir o processo de evolução $S_\eta(t,s) = \mathscr{K}(t-s, \eta(s))$ para todo $t \geq s$ como sendo a solução de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + x_1 - \eta(s)(t-s)x_1^3 \\ \dot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + x_2 - \eta(s)(t-s)x_2^3 \\ (x_1(s), x_2(s)) = x_0 \end{cases} \tag{6.14}$$

que já foi estudado na seção anterior com $\gamma(t) = \eta(t)(0)$. Vamos então trabalhar em descrever o atrator do semigrupo $\Pi(\cdot)$. Se $\eta(t)$ é solução global de Θ, seja $\xi^{\pm}_{i,\eta}$, $i = 1,2$, as soluções hiperbólicas do problema (6.14).

Vamos refinar a proposição 6.2.4. Defina $\Xi_0 = \{((0,0), \eta(0)) : \eta$ é solução limitada de $\Theta\}$ e $\Xi^{\pm}_i = \{(\xi^{\pm}_{i,\eta}(t), \eta(t)) : \eta(\cdot)$ é solução limitada de $\Theta(\cdot)$ e $t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1,2$. Sabemos que $Q_1 \times \Sigma$ é invariante sob a ação de $\Pi(\cdot)$. Então

Proposição 6.3.1. Se $(\xi_\eta(t), \eta(t))$ é uma solução limitada de $\Pi(\cdot)$ em $Q_1 \times \Sigma$, então $\|(\xi_\eta(t), \eta(t)) - \Xi^+_1\| \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Além disso, ou $\|(\xi_\eta(t), \eta(t)) - \Xi_0\| \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $\|(\xi_\eta(t), \eta(t)) - \Xi^+_2\| \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demonstração. Seja $(\xi_\eta(t), \eta(t))$ uma solução global limitada em Q_1 para $\Pi(\cdot)$ e uma sequência $t_n \to -\infty$ com $(\xi_\eta(t_n), \eta(t_n)) \to (\sigma, \nu)$, é consequência do lema anterior que obtemos uma solução global limitada (do processo de evolução associado à solução $\nu(t)$ do semigrupo Θ) $(\sigma(t), \nu(t))$ dada por $(\sigma(t), \nu(t)) = \lim_{n\to\infty}(\xi_\eta(t+t_n), \eta(t+t_n))$. Se $(\xi_\eta(t), \eta(t)) \to \Xi_0$, temos o resultado.

Senão, $(\xi_\eta(t), \eta(t))$ fica fora de uma bola de raio δ e centro na origem. De fato, veja que

$$(\dot{x_1}, \dot{x_2}) \cdot (x_1, x_2) = (1-k)(x_1^2 + x_2^2) + 2kx_1x_2 - \eta(s)(t-s)(x_1^4 + x_2^4)$$

Como $\eta(s) \in \Sigma$ é limitada e está multiplicando um polinômio de quarta ordem, existe $\delta > 0$ tal que $(\dot{x_1}, \dot{x_2}) \cdot (x_1, x_2) > 0$ para todo $t > s$, $t, s \in \mathbb{R}$ e $x < \delta$. Assim, se a solução entrasse na bola de raio δ centrada na origem, convergiria para trás para Ξ_0.

Logo, $(\sigma(t),\nu(t))$ é uma solução global limitada em ℓ_2 que também fica longe da origem. Assim, $(\sigma(t),\nu(t)) = (\xi^+_{2,\nu},\nu)$ e $(\xi_\eta(t),\eta(t)) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \Xi^+_2 \ni (\xi^+_{2,\nu},\nu)$.

De forma análoga, obtemos que $(\xi_\eta(t),\eta(t)) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \Xi^+_1$. □

Os outros quadrantes gozam da mesma propriedade de forma simétrica. Com isso, obtemos que os conjuntos Ξ_0 e $\Xi^\pm_i$ são invariantes maximais e concluímos que $\Pi(\cdot)$ é um semigrupo dinamicamente gradiente em relação aos invariantes isolados $\{\Xi_0,\Xi^\pm_i, i=1,2\}$. Podemos dizer um pouco mais, como veremos no próximo resultado.

Proposição 6.3.2. Existem soluções globais $\zeta^\pm_i$ em $\ell_i\times\Sigma$ tais que

$$\|\Xi_0(t)-\zeta^\pm_i(t)\| \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ e } \|\Xi^*_{i,\pm}(t)-\zeta^\pm_i(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

e uma solução que conecta $\Xi^+_2(\Xi^-_2)$ a $\Xi^+_1(\Xi^-_1)$.

Demonstração. Faremos o argumento para $\overline{Q_1}\times\Sigma$. Tome $\eta(t)$ solução global de Θ. Então ℓ_1 é variedade instável de $\xi_{0,\eta}(t)$. Logo, existe solução global não nula $(\zeta_\eta(t),\eta(t))$ de $\Pi(\cdot)$ com $\|(\xi_{0,\eta}(t),\eta(t))-(\zeta_\eta(t),\eta(t))\| \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. Pelo lema 3.1.4, se $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência com $t_n\to\infty$ e $(\zeta_\eta(t_n),\eta(t_n))\to(\sigma,\nu)$, podemos construir uma solução global limitada $(\sigma(t),\nu(t))$ dada por $(\sigma(t),\nu(t)) = \lim_{n\to\infty}(\zeta_\eta(t+t_n),\eta(t+t_n))$ e, como $(\sigma(t),\nu(t))$ fica longe de Ξ_0, temos que $(\sigma(t),\nu(t)) = (\xi^+_{1,\nu},\nu)\in\Xi^+_1$. O argumento é análogo para encontrar ζ^+_2.

Além disso, como cada $\xi^+_{2,\eta}(\xi^-_{2,\eta})$ possui variedade instável unidimensional, existe uma solução global limitada $(\sigma(t),\nu(t))$, com $(\sigma(t),\nu(t)) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \xi^+_{2,\eta}(\xi^-_{2,\eta})$, que converge para $\Xi^+_1(\Xi^-_1)$ pela proposição anterior. □

Podemos então ilustrar o atrator uniforme $\mathfrak{A}$ de (6.1) como abaixo.

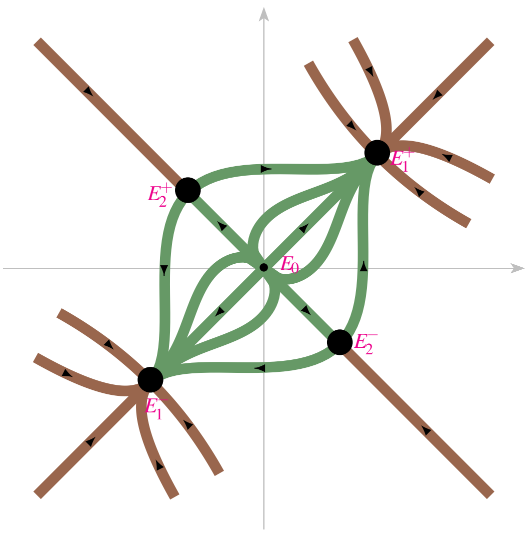

Figura 8 – Representação pictórica do atrator uniforme

6.3.1 Estabilidade sob perturbação

Podemos também mostrar que o problema é estável por perturbação. Considere a equação (6.13) com suas estruturas descritas na seção anterior, isto é, o semigrupo driving $\Theta(\cdot)$ possuindo atrator global $\mathscr{S}$, o cociclo $\mathscr{K}(\cdot,\cdot)$ e o semigrupo skew-product $\Pi(\cdot)$ com atrator global $\mathbb{A}$. Se a família $\{f_\nu(t,\cdot)\}_{\nu\in[0,1]}$ é uma pequena perturbação C^1, uniformemente em t, de $f(t,\cdot)$ na segunda variável, considere os semigrupos skew-product $\{\Pi_\nu\}_{\nu\in[0,1]}$ gerados por f_ν possuindo atratores globais $\mathbb{A}_\nu$ uniformemente limitados. Mostraremos que a estrutura do atrator uniforme do semigrupo skew-product dado na Figura 8 permanece a mesma para ν suficientemente pequeno.

Primeiramente note que, dada uma solução global limitada $\eta_\nu : \mathbb{R} \to \Sigma_\nu$ do semigrupo driving $\Theta_\nu(\cdot)$, existe uma solução global limitada associada $\eta : \mathbb{R} \to \Sigma$ do semigrupo driving $\Theta(\cdot)$ tão próxima quanto se queira de $\eta_\nu(\cdot)$, no sentido de que se $g(t,x) = \eta(t)(0,x)$ e $g_\nu(t,x) = \eta_\nu(t)(0,x)$, nós temos que g e g_ν são, uniformemente no tempo, próximas na topologia C^1 com respeito à segunda variável.

Desta forma, se ξ_η é uma solução hiperbólica para o processo de evolução $S_\eta(\cdot,\cdot)$ associado à $\eta(\cdot)$, da continuidade das soluções hiperbólicas sob perturbação (Teorema 5.5.3) obtemos a existência de soluções hiperbólicas ξ_{η_ν} para os processos de evolução $S_{\eta_\nu}(\cdot,\cdot)$ próximas à ξ_η. Podemos então considerar, para $\nu \in [0,1]$, as famílias $\boldsymbol{\Xi}_\nu$ formadas pelos conjuntos $\Xi_{0,\nu} = \{(0,\eta_\nu(0)) : \eta_\nu$ é solução limitada de $\Theta_\nu\}$ e $\Xi^{\pm}_{i,\nu} = \{(\xi^{\pm}_{i,\eta_\nu}(t), \sigma_\nu(t)) :$ σ_ν é solução limitada de Θ_ν e $t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1,2$. É imediato do argumentado acima que a família $\boldsymbol{\Xi}_\nu$ comporta-se continuamente quando $\nu \to 0$.

Para vermos que os invariantes isolados que pertencem a $\boldsymbol{\Xi}_\nu$ são maximais, mostraremos que existe uma vizinhança de $\boldsymbol{\Xi}_\nu$ que não contém qualquer outra solução global limitada além das hiperbólicas contidas no invariante. Primeiramente lembre-se que, pelo Teorema 4.0.13, uma solução global limitada do skew-product corresponde a uma solução global limitada $\xi_\nu(\cdot)$ de $S_{\eta_\nu}(\cdot,\cdot)$ para alguma solução $\eta_\nu(\cdot)$ fixa no semigrupo driving. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $(\xi_\nu(\cdot), \eta_\nu(\cdot))$ uma solução global limitada de $\Pi_\nu(\cdot)$ em $\mathscr{O}_\varepsilon(\boldsymbol{\Xi}_\nu)$. Mostraremos que, para ε pequeno, devemos ter $\xi_\nu(\mathbb{R}) \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\xi^{\pm}_{i,\nu})$ para algum $i \in \{0,1,2\}$ e sinal $\pm$.

Para tal, tome uma solução global limitada $\eta(\cdot)$ do semigrupo driving $\Theta(\cdot)$ próxima, uniformemente no tempo, de η_ν na topologia C^1 com respeito a segunda variável. Se $\xi^{\pm}_{i,\eta}$ é uma solução global hiperbólica associada a η, como no Lema 5.5.2, escreva ξ_ν como

$$\xi_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\xi^{\pm}_{i,\eta}}(t,s)[g_\nu(s,\xi_\nu(s)) - D_x f(s,\xi^{\pm}_{i,\eta}(s))\xi_\nu(s)]ds$$

Com isso, é fácil ver que $\xi_\nu \to \xi_0$ quando $\nu \to 0$ uniformemente na reta inteira, onde ξ_0 é uma solução global limitada de $S_\eta(\cdot,\cdot)$. Além disso, devemos ter ξ_0 próximo de $\pi_{\mathbb{R}^2}(\boldsymbol{\Xi})$ pela continuidade dos invariantes. Mas veja que já sabemos a estrutura dos invariantes no problema original e, portanto, que ξ_0 estar uniformemente próxima de $\pi_{\mathbb{R}^2}(\Xi)$ significa que ξ_0 é igual a $\xi^{\pm}_{i,\eta}$. Desta forma, para todo $\varepsilon > 0$ e para $\nu = \nu(\varepsilon)$ suficientemente pequeno, temos que $\xi_\nu \subset \mathscr{O}_\varepsilon(\xi^{\pm}_{i,\eta})$. Pelo Teorema 5.5.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que existe uma única solução global limitada do problema perturbado em $\mathscr{O}_\varepsilon(\xi^{\pm}_{i,\eta})$ e que esta solução é hiperbólica. Assim, devemos ter que $\xi_\nu = \xi^{\pm}_{i,\nu}$ para algum $i \in \{0,1,2\}$ e sinal $\pm$.

Note ainda que tal ε pode ser tomado uniformemente, uma vez que, conforme demonstração do Teorema 6.2.2 para cada $\xi^{\pm}_{i,\eta}$, vemos que as constantes M e ω das dicotomias associadas a cada solução hiperbólica não variam quando variamos η. Como essas ε-vizinhanças dependem de M e ω (ver Teorema 5.5.3), temos a uniformidade. Portanto, tomando ε como o obtido anteriormente, temos que Ξ_ν é o invariante maximal em $\mathscr{O}_\varepsilon(\Xi_\nu)$ para ν suficientemente pequeno.

Desta forma, atentando-se para o fato de $\Pi(\cdot)$ ser dinamicamente gradiente, o Teorema 3.3.1 nos garante que a estrutura gradiente do nosso problema é estável por perturbação. Isto é, existe um $\delta > 0$ tal que $\{\Pi_\nu\}_{\nu\in[0,\delta]}$ é dinamicamente gradiente.

REFERÊNCIAS

ARAGAO-COSTA, E. R. **Sistemas Gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**. Monografia (Doutorado) — Universidade de São Paulo - Campus São Carlos, São Carlos, 2012. Nenhuma citação no texto.

ARAGAO-COSTA, E. R.; CARABALLO, T.; CARVALHO, N.; LANGA, J. A. Stability of gradient semigroups under perturbations. **Nonlinearity, vol. 24**, n. 7, 2011. Citado na página 41.

CARVALHO, A. N. **Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**. [S.l.], 2017. Disponível em: <http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL/SDNL2017.pdf>. Acesso em: 04 fev. 2020. Citado nas páginas 75 e 80.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A. An extension of the concept of gradient systems which are stable under perturbation. **Journal of Differential Equations**, n. 246, p. 2646–2668, 2009. Citado na página 37.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; OBAYA, R.; ROCHA, L. R. N. Structure of non-autonomous attractors for a class of diffusively coupled ode. **A ser publicado**, 2021. Citado na página 85.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**. [S.l.: s.n.], 2012. Applied Mathematical Sciences 182. Nenhuma citação no texto.

CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C.; SUáREZ, A. Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system. **Journal of Differential Equations**, n. 236, p. 570–603, 2007. Citado na página 37.

CHEPYZHOV, V. V.; VISHIK, M. I. **Attractors for Equations of Mathematical Physics, volume 49**. [S.l.: s.n.], 2012. American Mathematical Society. Citado na página 18.

HENRY, D. **Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations**. [S.l.: s.n.], 1981. Lecture Notes in Mathematics 840. Citado na página 65.

MASSERA, J. L.; SCHÄFFER, J. J. Linear differential equations and functional analysis i. **Annals of Mathematics**, n. 67, p. 517–573, 1958. Citado na página 65.

ICMC USP
SÃO CARLOS