SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 24.06.2002

Assinatura:

Resultados de existência de soluções para uma equação diferencial funcional com impulsos

Sérgio Henrique Nogueira

Orientador: *Prof. Dr. Eduardo Alex Hernandez Morales*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Junho/2002

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Eduardo Alex Hernandez Morales

Prof. Dr. Aloisio José Freiria Neves

Profª. Dra. Sueli Mieko Tanaka Aki

Ao pai e à mãe,
Jack, Renato
e Nathália.

Agradecimentos

À Universidade de São Paulo, em especial aos professores do ICMC-USP: Mírian P. Mendes, Roberta G. W. Atique e Valdir A. Menegatto, pela oportunidade.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao meu orientador Eduardo A. Hernández Morales, que pacientemente me ajudou a vencer as dificuldades e me orientou com exemplar competência e dedicação.

Aos colegas do Instituto: Alexandre P. Calixto, Cláudia R. Lima, Daniel W. Mancini, Elíris C. Rizioli, Esdras T. Costa, Hildebrane A. dos Santos, Luciano N. Moreira e Karina Schiabell, que, da convivência, se tornaram amigos e tanto ajudaram.

Aos amigos de sempre: César Augusto V. Passos, Eufrásio A. C. Júnior, Josemauro Alves, Márcio F. da Silva e Wellington Pereira, companheiros de tantas histórias.

Mais que agradecer, eu divido este trabalho com a minha família, especialmente: meu pai, minha mãe, Antônio Wilson de O. Malta, Benisa N. Rodrigues, Inês R. Nogueira, Jaqueline Nogueira, Renato Nogueira e Sandra C. Nogueira, pelo cuidado que têm comigo. E com a Nathália, que ainda me chama de pai, apesar da ausência. Valeu! Esta alegria é nossa!

Abstract

In this work, we prove the existence of mild solutions for a class of partial functional differential equations with impulses modelled in the form

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), & t \in I = [0, T], \\ u(0) &= u_0, \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)), & i \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T, \end{aligned}$$

where A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup of bounded linear operators on a Banach space X , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$, $f(\cdot), a(\cdot), I_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, n$, are appropriated functions and $\Delta u(t_i)$ denote the jump of a function $u(\cdot)$ in the point t_i , that is $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$.

Resumo

Neste trabalho, provamos a existência de soluções para uma classe de equações diferenciais com impulsos modeladas na forma

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), & t \in I = [0, T], \\ u(0) &= u_0, \\ \Delta u(t_i) &= I_i(u(t_i)), & i \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T,\end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X , $f(\cdot), a(\cdot), I_i(\cdot), i = 1, 2, \dots, n$, são funções apropriadas e $\Delta u(t_i)$ é o impulso de uma função $u(\cdot)$ no ponto t_i , isto é, $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$.

Sumário

Introdução	1
1 Semigrupos de operadores lineares e o problema de Cauchy abstrato	3
1.1 Semigrupos de operadores lineares	3
1.2 O problema de valor inicial homogêneo	13
2 O problema de Cauchy abstrato não homogêneo	17
2.1 O problema de valor inicial não homogêneo	17
2.2 O problema quase linear	21
3 Um problema de evolução com impulsos	31
3.1 Existência de soluções fracas	32
3.2 Existência de soluções globais	40
3.3 Um exemplo: A equação do calor com impulsos	48

Introdução

Neste trabalho estabelecemos alguns resultados novos de existência de soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais com impulsos, modeladas na forma

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), \quad t \in I = [0, T], \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

$$\Delta u(t_i) = I_i(u(t_i)), \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T, \quad (3)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X e $f(\cdot)$, $a(\cdot)$, $I_i(\cdot)$ são funções apropriadas.

A teoria de equações impulsivas tem recebido grande atenção nos últimos anos devido fundamentalmente à aparição de várias aplicações em diversas áreas, como mecânica, engenharia elétrica, teoria de controle, medicina e biologia. Uma referência apropriada a respeito do tema é Rogovchenko [6], além das referências contidas nesse trabalho.

O problema (1)-(3) foi estudado recentemente, no caso em que $a(t) = t$ para $t \in I$, por Liu em [3]. Nesse artigo, Liu estabelece alguns resultados de existência de soluções fracas e clássicas para o problema (1)-(3), usando o princípio de ponto fixo para contrações e as idéias do Teorema 6.1.5 em Pazy [5].

Motivados pelo artigo de Liu [3], neste trabalho estabelecemos novos resultados de existência de soluções para o problema (1)-(3). Os resultados são obtidos fazendo uso da teoria de semigrupos de operadores lineares e de alguns teoremas de ponto fixo para operadores condensantes.

Este trabalho contém três capítulos. No capítulo 1, estudamos algumas propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach; em particular provamos o clássico Teorema de Hille-Yosida para semigrupos de contrações. No capítulo 2,

estudamos a existência de soluções fracas, fortes e clássicas para o problema de evolução

$$\begin{aligned}u(t) &= Au(t) + f(t, u(t)), & t \in I = [0, T], \\u(0) &= u_0 \in X,\end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X . A principal referência usada nos dois primeiros capítulos é Pazy [5]. Finalmente, no capítulo 3 estabelecemos novos resultados de existência de soluções fracas para (1)-(3). Destacamos os Teoremas 3.5 e 3.6 a respeito de soluções fracas de (1)-(3) e o Teorema 3.10, no qual mostramos a existência de soluções globais, isto é, soluções definidas em $[0, \infty)$, para um problema com infinitos tempos de impulsos. Na prova dos teoremas mencionados, valemo-nos dos Teoremas 3.4 e 3.9, também inéditos.

Capítulo 1

Semigrupos de operadores lineares e o problema de Cauchy abstrato

Em todo este trabalho adotaremos o seguinte: X é um espaço de Banach real, $L(X)$ é o espaço das transformações lineares contínuas definidas em X e com valores em X e ainda $B_r(x_1, Z) = \{x \in Z : \|x - x_1\| \leq r\}$, onde B é espaço métrico.

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach, tendo como objetivo mostrar o clássico teorema de Hille-Yosida.

1.1 Semigrupos de operadores lineares

Definição 1.1. Uma família de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0} \subset L(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados em X se:

- (i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X);
- (ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Definição 1.2. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X . Dizemos que:

- (a) $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo se $\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\|_{L(X)} = 0$;
- (b) $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, ou um C_0 -semigrupo, se $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$, para todo $x \in X$.

Definição 1.3. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X e $D(A)$ o conjunto

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

Todo semigrupo fortemente contínuo tem a propriedade de ser exponencialmente limitado, como mostra o próximo teorema.

Teorema 1.4. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em X . Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Seja $\alpha > 0$. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, para todo $x \in X$ o conjunto $\{T(t)x : t \in [0, \alpha]\}$ é limitado em X , o que, pelo Teorema da limitação uniforme, implica que $\{T(t) : t \in [0, \alpha]\}$ é limitado em $L(X)$. Fixemos $M \geq 1$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \alpha]$ e definamos $\omega = \alpha^{-1} \log M \geq 0$. Se $t \geq 0$ então $t = n\alpha + \beta$ para algum $0 \leq \beta < \alpha$, de onde concluímos que $\|T(t)\| = \|T(\beta)T(\alpha)^n\| \leq M^{n+1} \leq MM^{\frac{t}{\alpha}} = Me^{\omega t}$. Isto completa a demonstração. ■

Definição 1.5. Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em X , com $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Dizemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente limitado se $\omega = 0$; e se, além disso $M = 1$, dizemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

Mostramos agora algumas relações básicas entre o semigrupo e o seu gerador infinitesimal.

Teorema 1.6. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas:

(a) Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x;$$

(b) Para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e

$$A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x;$$

(c) Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax;$$

(d) Para todo $x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Ax dr = \int_s^t AT(r)x dr.$$

Demonstração. Mostramos cada propriedade de forma separada.

(a) Sejam $x \in X$, $t \geq 0$ e $\epsilon > 0$. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, podemos fixar $\delta > 0$ tal que $\|T(s)x - T(t)x\| < \epsilon$, quando $|s - t| \leq \delta$. Consequentemente, para $|s - t| \leq \delta$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x) ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a propriedade.

(b) Para $x \in X$ e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(s+h)x - T(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)x ds, \end{aligned}$$

o que por (a) implica que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(s)x = T(t)x - x.$$

Portanto $\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e $A \int_0^t T(s)x ds = T(t)x - x$.

(c) Sejam $x \in D(A)$ e $t > 0$. Como para $h > 0$

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h) - I}{h} T(t)x = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) x,$$

da continuidade de $T(t)$ temos

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax. \quad (1.1)$$

Mais ainda, se $0 < h < t$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| &\leq \left\| T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} \right) - T(t)Ax \right\| \\ &\leq \left\| T(t-h) \left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right) \right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|, \end{aligned}$$

o que prova que

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax, \quad (1.2)$$

pois, pelo Teorema 1.4, $\|T(s)\|_{L(X)}$ é limitado em compactos de $\mathbb{R}$. A propriedade é agora consequência de (1.1) e (1.2).

(d) Seja $x \in D(A)$. Pelo item (c),

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{dt}T(r)x \, dr = \int_s^t T(r)Ax \, dr = \int_s^t AT(r)x \, dr.$$

Isso completa a demonstração do teorema. ■

Corolário 1.7. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , então A é linear, fechado e $D(A)$ é denso em X .*

Demonstração. Seja $x \in X$. Pelo Teorema 1.6 sabemos que, para $t > 0$, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e que $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x \, ds \rightarrow x$, quando $t \downarrow 0$. Isto mostra que $\overline{D(A)} = X$. A linearidade de A é evidente. Para mostrar que A é fechado, suponha que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$, onde $x, y \in X$. Pelo Teorema 1.6 (d), temos

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds,$$

o que implica que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds. \quad (1.3)$$

Segue de (1.3) e do Teorema 1.6 (a) que $\frac{d^+}{dt}T(t)x|_{t=0} = y$. Portanto $x \in D(A)$ e $Ax = y$, o que mostra que A é fechado. A prova está completa. ■

A seguir estudamos quando um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em X , o que é relevante em aplicações a equações diferenciais. Inicialmente estudamos o caso mais simples em que A é um operador linear limitado em X .

Teorema 1.8. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. A é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. Suponha que A é um operador limitado. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos o operador linear limitado $s_n(t) = \sum_{i=0}^n \frac{(tA)^i}{i!}$. Como A é limitado, para $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$, e $t \geq 0$ temos

$$\|s_n(t) - s_m(t)\| \leq \sum_{i=n+1}^m \frac{t^i \|A\|^i}{i!},$$

o que mostra que a sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente em $C([0, T] : L(X))$. Seja $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$. Afirmamos que a família $(T(t))_{t \geq 0}$, onde $T(t) = e^{tA}$, é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X e que A é seu gerador infinitesimal. De fato, é sabido que $T(t+s) = T(t)T(s)$ (é somente consequência de um longo e tedioso cálculo) e claramente $T(0) = I$. Mais ainda, segue diretamente da definição de e^{At} que

$$\|T(t)x - x\| \leq t \|A\| e^{t\|A\|} \|x\|,$$

o que demonstra que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo em X . Para finalizar esta primeira parte da demonstração, vejamos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Diretamente da definição de $(T(t))_{t \geq 0}$, temos

$$T(t)x - x = tA \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{(n+1)!},$$

de onde obtemos que

$$\left\| \frac{T(t)x - x}{t} - Ax \right\| \leq \|A\|^2 e^{t\|A\|} \|x\|,$$

o que mostra que A é gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$.

Suponha agora que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados em X . Como a função $t \rightarrow T(t)$ é contínua com valores em $L(X)$, existe $\rho_1 > 0$ tal que, para cada $\rho < \rho_1$, $\|I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s) ds\| < 1$, de onde segue que $\int_0^\rho T(s) ds$ é invertível para $\rho < \rho_1$. Nestas condições, vemos que para $\rho < \rho_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(T(h) - I) \int_0^\rho T(s) ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(s+h) ds - \int_0^\rho T(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \int_0^h T(s) ds \right), \end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{1}{h}(T(h) - I) = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s) ds \right) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1}. \quad (1.4)$$

Usando novamente que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, concluímos de (1.4) que

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T(h) - I)x = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} x,$$

para todo $x \in X$. Portanto $A = (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s) ds \right)^{-1} \in L(X)$, o que completa a prova. ■

Definição 1.9. *Seja $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está no conjunto resolvente de B se $(\lambda I - B)$ é invertível e $(\lambda I - B)^{-1} \in L(X)$. O conjunto resolvente de B será denotado por $\rho(B)$.*

Antes de provar o próximo teorema, consideramos alguns lemas técnicos que serão úteis na sua demonstração. Nestes próximos lemas, sempre $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear fechado com $\overline{D(A)} = X$.

Lema 1.10. *Suponha que $\rho(A) \supset (0, \infty^+)$ e que $\|R(\lambda : A)\| < \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Então as seguintes propriedades são válidas:*

(a) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in X$;

(b) Se $A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$, então $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = Ax$, para todo $x \in D(A)$.

Demonstração Mostramos cada propriedade separadamente.

(a) Se $x \in D(A)$ então

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &= \|AR(\lambda : A)x\| \\ &= \|R(\lambda : A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|Ax\|, \end{aligned}$$

o que mostra que $\lambda R(\lambda : A)x \rightarrow x$, quando $\lambda \rightarrow \infty$. Vejamos agora o caso geral. Seja $x \in X$. Como $D(A)$ é denso em X e a propriedade é válida em $D(A)$, podemos fixar $x_\epsilon \in D(A)$ e $\lambda_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|x - x_\epsilon\| &< \frac{\epsilon}{3} \\ \|\lambda R(\lambda : A)x_\epsilon - x_\epsilon\| &< \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

quando $\lambda > \lambda_0$. Nestas condições, para $\lambda > \lambda_0$ temos

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda : A)x - x\| &\leq \|\lambda\| \|R(\lambda : A)\| \|x - x_\epsilon\| + \|\lambda R(\lambda : A)x_\epsilon - x_\epsilon\| + \|x_\epsilon - x\| \\ &< \lambda \frac{1}{\lambda} \|x - x_\epsilon\| + \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in X$.

(b) É consequência direta de (a), pois para $x \in D(A)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda AR(\lambda : A)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda : A)Ax = Ax.$$

A prova do lema está agora completa. ■

O Lema (1.10) motiva a seguinte definição:

Definição 1.11. Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com $\rho(A) \supset (0, \infty^+)$. A família de operadores lineares $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ definida por $A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I$ é chamada a aproximação de Yosida de A .

Lema 1.12. Suponha que $\rho(A) \supset (0, \infty^+)$ e seja $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ a aproximação de Yosida de A . Então as seguintes propriedades são verificadas:

(a) Para todo $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações;

(b) Se $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ é o semigrupo gerado por A_λ então

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|,$$

para todo $x \in X$ e todo $\lambda, \mu > 0$.

Demonstração. Como A_λ é um operador linear contínuo em X , segue do Teorema 1.8 que A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ em X . Mais ainda, como

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} \| &= \| e^{t(\lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I)} \| \\ &= \| e^{t\lambda^2 R(\lambda : A)} e^{-t\lambda I} \| \\ &= e^{-t\lambda} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda : A)} \| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \frac{1}{\lambda}} = 1, \end{aligned}$$

concluimos que, para cada $\lambda > 0$, $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações, o que prova (a).

Por outro lado, das definições de e^{tA_θ} e A_θ temos

$$\begin{aligned} \| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \| e^{tsA_\lambda} (tA_\lambda) e^{t(1-s)A_\mu} x + e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (-tA_\mu) x \| ds \\ &\leq \int_0^1 t \| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \| ds \\ &\leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| \int_0^1 \| e^{tsA_\lambda} \| \| e^{t(1-s)A_\mu} \| ds \end{aligned}$$

e portanto

$$\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|,$$

o que prova (b) e completa a demonstração do lema. ■

Observação 1.13. Daqui por diante, para um operador fechado $B : D(B) \subset X \rightarrow X$, usaremos a notação $[D(B)]$ para o espaço $D(B)$ munido da norma do gráfico $\|x\|_B = \|x\| + \|B(x)\|$.

Lema 1.14. Sejam $A : D(A) \rightarrow X$ um operador linear fechado, $a \geq 0$ e $f : [0, a] \rightarrow [D(A)]$ uma função contínua. Então

$$A \int_0^a f(s) ds = \int_0^a Af(s) ds.$$

Demonstração. Seja $P = \{s_i : i = 1 \dots n\}$ uma partição de $[0, a]$ e seja também $S(f, P) = \sum_{s_i \in P} f(s_i)(s_{i+1} - s_i)$ uma clássica soma de Riemman de f . Como $f \in C([0, a] : D(A))$, temos que $AS(f, P) = S(Af, P) \rightarrow \int_0^b Af(s) ds$ se $\Delta P \rightarrow 0$. Usando agora que A é fechado e que $S(f, P) \rightarrow \int_0^b f(s) ds$ se $\Delta P \rightarrow 0$, concluímos que $\int_0^b f(s) ds \in D(A)$ e que

$$A \int_0^a f(s) ds = \int_0^a Af(s) ds,$$

o que completa a prova. ■

Lema 1.15. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , então as seguintes propriedades são válidas:

- (a) Para cada λ , $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds \in L(X)$;
- (b) Se $x \in D(A)$ então $AR(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) Ax ds$.

Demonstração. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações, $\|e^{-\lambda s} T(s)\| \leq e^{-\lambda s}$. Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, $R(\lambda) \in L(X)$ para $\lambda > 0$.

Por outro lado, se $x \in D(A)$, do Lema 1.14 vemos que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) Ax ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n Ae^{-\lambda s} T(s)x ds = \lim_{n \rightarrow \infty} A \int_0^n e^{-\lambda s} T(s)x ds. \quad (1.5)$$

Mais ainda, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-\lambda s} T(s)x ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \quad (1.6)$$

e A é fechado, concluímos de (1.5) e (1.6) que $\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \in D(A)$ e que

$$A \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) Ax ds.$$

A prova está completa. ■

Estamos agora em condições de mostrar o clássico Teorema de Hille-Yosida, o qual estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 1.16. (Hille-Yosida) Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ em X se, e somente se:

(a) A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;

(b) $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Suponha que A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $(T(t))_{t \geq 0}$ em X . A condição (a) é consequência direta do Corolário 1.7. Para mostrar (b), provamos inicialmente que $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e que $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda)$, onde $R(\lambda)$ é o operador linear limitado definido no Lema 1.15. Seja $\lambda > 0$. Da definição de $R(\lambda)$, para $x \in X$ temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} T(s)x ds, \end{aligned}$$

o que, pela continuidade da função $t \rightarrow T(t)x$, implica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Isso mostra que $R(\lambda)x \in D(A)$ e que

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (1.7)$$

Por outro lado, do Lema 1.15 sabemos que, para $x \in D(A)$, $R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x$, o que juntamente com (1.7) mostra que $R(\lambda)(\lambda I - A)x = I$ para todo $x \in D(A)$. Logo $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ e portanto $\lambda \in \rho(A)$ se $\lambda > 0$. Como $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado, um simples cálculo mostra que $\|(\lambda I - A)^{-1}\| = \|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$.

Suponha agora que A é um operador linear satisfazendo (a) e (b). Se $x \in D(A)$, pelos itens (b) dos Lemas 1.10 e 1.12 concluímos que $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente para t em compactos de $[0, \infty)$ a um vetor $\tilde{T}(t)x \in X$, quando $\lambda \rightarrow \infty$. Como cada $e^{tA_\lambda}x$ é um operador contínuo com $\|e^{tA_\lambda}x\| \leq 1$, segue que $\tilde{T}(t) \in L(D(A), X)$ e que $\|\tilde{T}(t)\|_{L(D(A), X)} \leq 1$, onde $D(A)$ é munido da norma induzida por X . Mais ainda, a família $(\tilde{T}(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo em $D(A)$. Como as propriedades de semigrupo são obviamente satisfeitas, somente mostramos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo em $D(A)$. Para mostrar que $(\tilde{T}(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo,

fixemos $t, h \geq 0$, $x \in D(A)$ e $\epsilon > 0$. Como a convergência de $e^{sA_\lambda}x$ a $\tilde{T}(s)x$ é uniforme para s em compactos de $[0, \infty)$, existem $\delta > 0$ e $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|e^{sA_\lambda}x - \tilde{T}(s)x\| < \frac{\epsilon}{3}$$

se $|t - s| \leq \delta$ e $\lambda \geq N_\epsilon$. Usando que $(e^{tA_\lambda})_{s \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo, fixamos $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|e^{(t+h)A_{N_\epsilon}} - e^{tA_{N_\epsilon}}\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{se } |h| < \delta_1.$$

Das escolhas anteriores, para $0 < h < \min\{\delta_1, \delta\}$ temos

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(t+h)x - \tilde{T}(t)x\| &\leq \|\tilde{T}(t+h)x - e^{(t+h)A_{N_\epsilon}}x\| + \|e^{(t+h)A_{N_\epsilon}} - e^{tA_{N_\epsilon}}\| \\ &\quad + \|e^{tA_{N_\epsilon}}x - \tilde{T}(t)x\| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

de onde concluímos que o semigrupo é fortemente contínuo.

Segue das considerações anteriores e da densidade de $D(A)$ em X que para todo $t \geq 0$ existe uma única extensão $T(t) \in L(X)$ de $\tilde{T}(t)$. Mais ainda, usando as idéias anteriores inferimos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo em X e que $\|T(t)\|_{L(X)} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Finalmente, mostramos que A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Seja B o gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $x \in D(A)$ e $t > 0$, do Teorema 1.6 e das definições de $(T(t))_{t \geq 0}$ e A_λ temos

$$\begin{aligned} \frac{T(t)x - x}{t} &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{tA_\lambda}x - x}{t} \right) \\ &= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda \int_0^t e^{sA_\lambda}x ds \\ &= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax ds, \end{aligned}$$

o que implica que $x \in D(B)$ e $Bx = Ax$. Por outro lado, como B é o gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$, sabemos da primeira parte da demonstração que $1 \in \rho(B)$. Mas como $1 \in \rho(A)$ e $A = B$ em $D(A)$, temos que $(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$, o que implica que $D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A)$ e, portanto, $A = B$. ■

1.2 O problema de valor inicial homogêneo

O problema de Cauchy abstrato para $A : D(A) \rightarrow X$ consiste em encontrar uma solução para o problema de valor inicial

$$\dot{u}(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad (1.8)$$

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in X. \quad (1.9)$$

Como em geral $D(A) \neq X$, o conceito de solução de (1.8)-(1.9) merece atenção especial. Por isso, consideramos a seguinte definição:

Definição 1.17. *Uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é uma solução clássica do problema de Cauchy (1.8)-(1.9) se $u(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, \infty)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e (1.8)-(1.9) são satisfeitas.*

Se $u_0 \in D(A)$ e A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, então a função $u(t) = T(t)u_0$ é uma solução do problema de Cauchy (1.8)-(1.9), veja Teorema 1.6 (c). Mais ainda, $u(\cdot)$ é a única solução. De fato, se $v(\cdot)$ é outra solução, então para $t > 0$ e $s \in (0, t)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T(s-t)v(t) &= -AT(s-t)v(t) + T(s-t)Av(t) \\ &= -AT(s-t)v(t) + AT(s-t)v(t) = 0, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $T(s-t)v(t)$ é constante e portanto $T(t)x_0 = v(t)$. Temos então o seguinte resultado:

Proposição 1.18. *Seja $u_0 \in D(A)$ e suponha que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em X . Então a função $u(t) = T(t)u_0$ é a única solução do problema de Cauchy (1.8)-(1.9).*

Antes de mostrar o próximo teorema mostramos o seguinte lema:

Lema 1.19. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com $\rho(A) \neq \emptyset$. Então as seguintes propriedades são válidas:*

(a) *A é fechado;*

(b) *Se $D(A)$ é denso em X então $D(A^2)$ também é denso em X .*

Demonstração. Sejam $\lambda \in \rho(A)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\lambda(\lambda I - A)^{-1}x_n - (\lambda I - A)^{-1}Ax_n = x_n$, da continuidade de $(\lambda I - A)^{-1}$ segue que $(\lambda I - A)^{-1}(\lambda x - y) = x$, o que implica que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Portanto A é fechado.

Mostramos agora (b). Se $\lambda \in \rho(A)$ então $(\lambda I - A)^{-1}\overline{D(A)} \subset \overline{(\lambda I - A)^{-1}(D(A))} \subset \overline{D(A^2)}$ e portanto $D(A) \subset \overline{D(A^2)}$, o que mostra o resultado. ■

O próximo teorema estabelece a relação entre a existência de soluções do problema de Cauchy abstrato e o fato de A ser o gerador de um C_0 -semigrupo.

Teorema 1.20. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com $\overline{D(A)} = X$ e $\rho(A) \neq \emptyset$. Se para todo $x_0 \in D(A)$ existe uma única solução $u(\cdot, x_0)$ do problema (1.8)-(1.9), então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em X .*

Demonstração. Sabemos que $D(A)$ munido da norma do gráfico, $([D(A)], \|\cdot\|_{[D(A)]})$, é um espaço de Banach, pois A é fechado, veja Lema 1.19. Sobre o espaço $X_1 = C([0, 1] : [D(A)])$ munido da norma da convergência uniforme definimos o operador $S : [D(A)] \rightarrow X_1$, onde $Sx(t) = u(t, x)$. Afirmamos que S é um operador linear, fechado e portanto contínuo em X_1 . A linearidade é uma consequência óbvia da unicidade de soluções do problema (1.8)-(1.9). Mostremos agora que S é fechado. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $[D(A)]$, $x \in D(A)$ e $v \in S$ tais que $x_n \rightarrow x$ em $[D(A)]$ e $Sx_n \rightarrow v$ em X_1 . Usando que $Sx_n(t) \rightarrow v(t)$ em X e que

$$Sx_n(t) = x_n + \int_0^t Au(s, x_n)ds, \quad (1.10)$$

obtemos facilmente que

$$v(t) = x + \int_0^t Av(s)ds, \quad (1.11)$$

o que implica que $v = u(\cdot, x)$, pela unicidade da solução. Isto prova que S é fechado. Segue agora do teorema do gráfico fechado que S é contínuo e, portanto, que existe $C > 0$ tal que

$$\|Sx\|_{X_1} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \|u(t, x)\|_{[D(A)]} \leq C \|x\|_{[D(A)]}, \quad (1.12)$$

para todo $x \in [D(A)]$. Depois dessas considerações, é claro que, para cada $t \in [0, 1]$, a função $T(t) : D(A) \rightarrow D(A)$ definida por $T(t)x = Sx(t)$ é linear, contínua e $\|T(t)x\|_{[D(A)]} \leq C \|x\|_{[D(A)]}$. Usando agora as idéias da demonstração do Teorema 1.4 podemos definir $T(t)$ para $t > 1$ empregando a relação $T(t)x = T(t - n)T(1)^n$. E da mesma demonstração deduzimos que existem $\omega > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\|T(t)x\|_{[D(A)]} \leq Me^{\omega t} \|x\|_{[D(A)]}, \quad x \in D(A). \quad (1.13)$$

Com o objetivo de obter uma extensão de cada operador $T(t)$ no espaço X , mostramos agora que

$$T(t)Ay = AT(t)y, \quad (1.14)$$

para todo $y \in D(A^2)$. Seja $y \in D(A^2)$ e definamos a função $v : [0, \infty) \rightarrow X$ por

$$v(t) = y + \int_0^t u(s; Ay) ds.$$

Usando que $y \in D(A^2)$ (neste caso $u(\cdot, Ay)$ está bem definida) e que A é fechado, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) = u(t, Ay) &= Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)ds \\ &= Ay + \int_0^t Au(s, Ay)ds \\ &= A \left(y + \int_0^t u(s, Ay)ds \right) \\ &= Av(t) \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t).$$

Como $v(0) = y$, da unicidade de solução do problema (1.8)-(1.9) concluímos que $v(t) = u(t, y)$, o que por sua vez implica que $AT(t)y = Au(t, y) = Av(t) = \frac{d}{dt}v(t) = u(t, Ay) = T(t)Ay$ e isso prova (1.14).

Sejam $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \neq 0$, $y \in D(A^2)$ e $x = (\lambda I - A)y$. Como $y \in D(A)$, de (1.13) e (1.14) obtemos que

$$\|T(t)x\| = \|(\lambda_0 I - A)T(t)y\| \leq C \|T(t)y\|_{[D(A)]} \leq C_1 e^{\omega t} \|y\|_{[D(A)]}.$$

Logo, pela definição da norma em $[D(A)]$, $\|y\|_{[D(A)]} = \|y\| + \|Ay\| = \|y\|_{[D(A)]} \leq C_2 \|x\|$ e então

$$\|T(t)x\| \leq C_3 e^{\omega t} \|x\|,$$

quando $T(t)x \in D(A^2)$. Resulta agora claro do Lema 1.19 que existe uma única extensão contínua, que denotamos do mesmo modo, sobre X . Mais ainda, é óbvio que $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em X .

Para finalizar a demonstração, mostramos que A é o gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$. Seja B o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$. Se $x \in D(A)$, sabemos das hipóteses que $\frac{d}{dt}T(t)x|_{t=0} = Ax$, o que implica que $Bx = Ax$. Assim $D(A) \subset D(B)$ e $A = B$ em $D(A)$.

Por outro lado, usando novamente (1.14) segue que para $y \in D(A^2)$

$$e^{-\lambda t}AT(t)y - e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)By$$

e então

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Aydt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Bydt,$$

pois $A(y) = B(y)$. Usando agora que A é fechado e o Lema 1.15, deduzimos que para $\lambda \in \mathbb{C} \cap \rho(A)$ com $\text{real}(\lambda) > \omega$, $AR(\lambda : B)y = R(\lambda : B)By$ se $y \in D(A^2)$, o que pelo Lema 1.19 implica que $AR(\lambda : B)y = R(\lambda : B)By$ para $y \in X$. Isso prova que $D(B) \subset D(A)$ e daí concluímos que $A = B$. Portanto A é o gerador infinitesimal de $(T(t))_{t \geq 0}$ e a demonstração está completa. ■

Capítulo 2

O problema de Cauchy abstrato não homogêneo

Neste capítulo estudamos o problema semilinear

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad 0 < t < T, \quad (2.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.2)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X e $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é uma função apropriada.

2.1 O problema de valor inicial não homogêneo

Como auxílio no estudo do problema (2.1)-(2.2), nesta primeira seção consideramos o modelo diferencial mais simples

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < t < T, \quad (2.3)$$

$$u(0) = u_0, \quad (2.4)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X e $f : [0, T] \rightarrow X$ é uma função apropriada.

Definição 2.1. Uma função $u : [0, T] \rightarrow X$ é uma solução clássica do problema (2.3)-(2.4) se $u \in C([0, T] : X) \cap C^1((0, T) : X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T)$ e (2.3)-(2.4) são verificadas.

Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.3)-(2.4) e $f \in L^1([0, T] : X)$, então para $0 < s < t < T$ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}[T(t-s)u(s)] &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\ &= T(t-s)f(s), \end{aligned}$$

de onde segue que

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Isso mostra o seguinte resultado:

Proposição 2.2. *Se $f \in L^1([0, T] : X)$ então o problema (2.3)-(2.4) tem no máximo uma solução clássica. Além disso, se $u(\cdot)$ é solução clássica então*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Motivados pela Proposição 2.2 e pelo fato de que em geral $D(A) \neq X$, consideramos a seguinte definição:

Definição 2.3. *Uma função $u \in C([0, T] : X)$ é uma solução fraca do problema (2.3)-(2.4) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,$$

para todo $t \in [0, T]$.

É importante observar que em geral a solução fraca de (2.3)-(2.4) não é uma solução clássica. Por exemplo, assuma que $x \notin D(A)$ e que $T(t_0)x \notin D(A)$ para algum $t_0 > 0$. Considere o problema

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + T(t)x, & t > 0, \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

A solução fraca de (2.5) é dada por

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = tT(t)x.$$

Como $T(t)x$ não é diferenciável, (2.5) não possui solução clássica.

Nos próximos resultados estudamos condições sob as quais o problema (2.3)-(2.4) possui solução clássica.

Teorema 2.4. *Sejam $u_0 \in D(A)$ e $f \in L^1([0, T] : X) \cap C((0, T] : X)$ e definamos a função $v : [0, T] \rightarrow X$ por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t < T. \quad (2.6)$$

O problema (2.3)-(2.4) tem uma solução clássica $u(\cdot)$ sobre $[0, T]$ se alguma das seguintes condições é verificada:

- (i) $v(t)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$;
- (ii) $v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < T$ e $Av(\cdot)$ é contínua em $(0, T)$.

Se $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.3)-(2.4) sobre $[0, T]$, então $v(\cdot)$ satisfaz (i) e (ii).

Demonstração. Da definição de $v(\cdot)$ temos que para $t \in (0, T)$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} v(t) &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t T(t+h-s)f(s) ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s) ds \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_0^t T(t+h-s)f(s) ds - \int_0^t T(t-s)f(s) ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{T(h) - I}{h} v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \quad (2.7)$$

Se $v(\cdot)$ é diferenciável em $(0, T)$, da continuidade de f e de (2.7) segue que $v(t) \in D(A)$ para cada $t \in (0, T)$ e que $Av(t) = \dot{v}(t) - f(t)$. Mais ainda, como $v(0) = 0$ concluímos que $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ é solução clássica de (2.3)-(2.4). Portanto se vale (i), o problema (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica.

Suponha agora válida a condição (ii). Como $v(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T)$, segue da continuidade de f e de (2.7) que $v(t)$ é diferenciável à direita em $t \in (0, T)$ e que $\frac{d^+}{dt}v(t) = Av(t) + f(t)$. Mais ainda, $\frac{d^+}{dt}v(t)$ é contínua em $(0, T)$ pois $Av(\cdot)$ é contínua. Isto implica que $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável e que $\dot{v}(t) = Av(t) + f(t)$. Portanto $u(t) = T(t)u_0 + v(t)$ é solução clássica de (2.3)-(2.4).

Se $u(\cdot)$ é solução clássica de (2.3)-(2.4), segue facilmente da continuidade de $f(\cdot)$ e de (2.7) que as condições (i) e (ii) são verificadas e por isso omitiremos os detalhes desta parte da demonstração. A prova está completa. ■

Corolário 2.5. Se $u_0 \in D(A)$ e $f \in C^1([0, T] : X)$, então o problema (2.3)-(2.4) possui uma solução clássica sobre $[0, T]$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.4 é suficiente provar que a função $v(\cdot)$ definida em (2.6) é continuamente diferenciável em $(0, T)$. Sejam $t \in (0, T)$ e $h > 0$ tal que $t + h \in (0, T)$. Da definição de $v(\cdot)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s+h)ds \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s) \left[\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right] ds \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h T(t+h-s)f(s)ds + \int_0^t T(t-s) \left[\frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right] ds. \quad (2.8)$$

Como $f \in C^1([0, T] : X)$, segue de (2.8) que

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds,$$

para todo $t \in [0, T]$. Portanto $v(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$. A prova está completa. ■

Corolário 2.6. Se $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, T] : [D(A)])$, então o problema (2.3)-(2.4) tem uma solução clássica.

Demonstração. Seja $v(\cdot)$ a função definida em (2.6). Segue do Lema 1.14 que $v(t) \in D(A)$ e

$$Av(t) = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

para todo $t \in [0, T]$. Agora a propriedade é consequência da condição (ii) do Teorema 2.4. ■

Definição 2.7. Uma função $u \in C([0, T] : X)$ é uma solução forte de (2.3)-(2.4) se $u' \in L^1([0, T] : X)$, $u(0) = u_0$ e a equação (2.3) é satisfeita para quase todo $t \in [0, T]$.

É óbvio que a solução clássica de (2.3)-(2.4) é uma solução forte. Entretanto se $A \equiv 0$ e $f \in L^1([0, T] : X)$, mas $f \notin C([0, T] : X)$, a função $u(t) = x + \int_0^t f(s)ds$, $x \in X$, é uma solução forte de (2.3)-(2.4), mas não é clássica.

Como no caso de soluções clássicas, estudamos a seguir condições suficientes para que uma solução fraca seja uma solução forte.

Teorema 2.8. *Sejam $u_0 \in D(A)$, $f \in L^1([0, T] : X)$ e $v(\cdot)$ a função definida em $[0, T]$ por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

O problema (2.3)-(2.4) tem solução forte se alguma das seguintes condições é satisfeita:

(i) *$v(t)$ é diferenciável q.t.p em $[0, T]$ e $\dot{v}(t) \in L^1([0, T] : X)$;*

ii) *$v(t) \in D(A)$ q.t.p em $[0, T]$ e $Av(\cdot) \in L^1([0, T] : X)$.*

Mais ainda, se $u \in C([0, T] : X)$ é uma solução forte de (2.3)-(2.4) então $v(\cdot)$ satisfaz as condições (i) e (ii).

Demonstração. A demonstração se faz usando as mesmas idéias da prova do Teorema 2.4. Apenas observamos que como $f \in L^1([0, T] : X)$ o termo $\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds$ em (2.7) converge a $f(t)$ q.t.p sobre $[0, T]$.

2.2 O problema quase linear

Estudamos nesta seção o problema semilinear

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in (0, T), \quad (2.9)$$

$$u(0) = u_0 \in U \subset X, \quad (2.10)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , $U \subset X$ é aberto e $f : [0, T] \times U \rightarrow X$ é uma função contínua.

Por analogia ao problema de Cauchy (2.3)-(2.4), adotamos as seguintes definições:

Definição 2.9. *Uma função $u \in C([0, T] : U)$ é uma solução fraca do problema de Cauchy (2.9)-(2.10) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Definição 2.10. *Uma função $u : [0, T] \rightarrow X$ é uma solução clássica do problema (2.9)-(2.10) se $u \in C([0, T] : X) \cap C^1((0, T) : X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, T)$ e $u(t)$ satisfaz (2.9)-(2.10).*

Definição 2.11. *Uma função $u \in C([0, T] : X)$ é uma solução forte do problema (2.9)-(2.10) se $u' \in L^1([0, T] : X)$, $u(0) = u_0$ e a equação (2.9) é satisfeita para quase todo $t \in [0, T]$.*

Usando o princípio de contração, apresentamos a seguir um resultado de existência e unicidade de solução fraca para o problema (2.9)-(2.10).

Teorema 2.12. *Sejam $u_0 \in X$ e $f \in C([0, T] \times X : X)$ e suponha que existe $L > 0$ tal que*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \|,$$

para todo $x, y \in X$. Então existe uma única solução fraca $u(\cdot, u_0)$ do problema de Cauchy (2.9)-(2.10). Mais ainda, a aplicação $\Gamma : X \rightarrow C([0, T] : X)$ definida por $\Gamma u_0 = u(\cdot, u_0)$ é Lipschitz.

Demonstração. No espaço $C([0, T] : X)$ munido da norma da convergência uniforme, $\| \cdot \|_T$, definimos o operador $F : C([0, T] : X) \rightarrow C([0, T] : X)$ por

$$Fu(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \in [0, T].$$

Mostramos a seguir que F é uma contração em $C([0, T] : X)$. Seja $M = \sup_{t \in [0, T]} \| T(t) \|$ e fixemos $u, v \in C([0, T] : X)$. Da definição de F , temos que para $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \| Fu(t) - Fv(t) \| &\leq ML \int_0^t \| u(s) - v(s) \| ds, \\ &\leq MLt \| u - v \|_T. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \| F^2u(t) - F^2v(t) \| &\leq \int_0^t M \| f(s, Fu(s)) - f(s, Fv(s)) \| ds \\ &\leq \int_0^t ML \| Fu(s) - Fv(s) \| ds \\ &\leq \int_0^t M^2 L^2 s \| u - v \|_T ds \\ &\leq M^2 L^2 \frac{t^2}{2} \| u - v \|_T, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\| F^2u - F^2v \|_T \leq M^2 L^2 \frac{t^2}{2} \| u - v \|_T.$$

É fácil mostrar que em geral

$$\| F^{n+1}u(t) - F^{n+1}v(t) \| \leq M^{n+1} L^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \| u - v \|_T,$$

o que implica que

$$\| F^n u - F^n v \|_T \leq \frac{(MLT)^n}{n!} \| u - v \|_T.$$

Como $\frac{(MLT)^n}{n!} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, vemos que para n suficientemente grande F^n é contração e portanto $F(\cdot)$ tem um ponto fixo $u(\cdot, u_0) \in C([0, T] : X)$. Claramente este ponto fixo é uma solução fraca do problema (2.9)-(2.10).

Estudamos agora a aplicação $u_0 \rightarrow u(\cdot, u_0)$. Sejam $u_0, v_0 \in X$ e $u = u(\cdot, u_0), v = v(\cdot, v_0)$. Para $t \in [0, T]$ temos

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq \|T(t)u_0 - T(t)v_0\| + \int_0^t \|T(t-s)(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\| ds \\ &\leq M \|u_0 - v_0\| + ML \int_0^T \|u(s) - v(s)\| ds, \end{aligned}$$

o que pela desigualdade de Gronwall-Bellman implica que

$$\|u(t) - v(t)\| \leq Me^{MLT} \|u_0 - v_0\|$$

e portanto

$$\|u - v\|_T \leq Me^{MLT} \|u_0 - v_0\|.$$

Isso mostra que a aplicação $u_0 \rightarrow u(\cdot, u_0)$ é Lipschitz e que a solução fraca de (2.9)-(2.10) é única. A prova do teorema agora está completa. ■

A demonstração do próximo resultado é análoga à do Teorema 2.12 e por esta razão será omitida.

Corolário 2.13. *Seja $g \in C([0, T] : X)$ e suponha que se verificam as condições do Teorema 2.12. Então a equação integral*

$$w(t) = g(t) + \int_0^t T(t-s)f(s, w(s))ds, \quad t \in [0, T],$$

tem uma única solução $w \in C([0, T] : X)$.

Para mostrar o próximo teorema, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.14. *Sejam $u_0 \in D(A)$ e $f \in C([0, T] \times X : X)$ e assumamos que existe $L > 0$ tal que*

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s| + \|x - y\|),$$

para todo $x, y \in X$ e todo $s, t \in [0, T]$. Então a solução fraca do problema (2.9)-(2.10) é Lipschitz em $[0, T]$.

Demonstração. Sejam $u(\cdot) = u(\cdot, u_0)$ a solução fraca de (2.9)-(2.10), $M = \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\|$ e $N = \sup_{t \in [0, T]} \|f(t, u(t))\|$ e fixemos $c_1 > 0$ tal que

$$\|T(t+h)u_0 - T(t)u_0\| < c_1 h,$$

para todo $t \in [0, T]$. Da definição de solução fraca temos

$$\begin{aligned} \|u(t+h) - u(t)\| &\leq \|T(t+h)u_0 - T(t)u_0\| + \int_0^h \|T(t+h-s)f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \int_0^t \|T(t-s)(f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s)))\| ds \\ &\leq c_1 h + MNh + M \int_0^t L[h + \|u(s+h) - u(s)\|] ds \\ &\leq (c_1 + MN + LTM)h + ML \int_0^t \|u(s+h) - u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Assim pela desigualdade de Gronwall-Bellman

$$\|u(t+h) - u(t)\| \leq (c_1 + MN + LTM)e^{MLT}h,$$

o que prova o resultado. ■

Como no caso do problema homogêneo, uma solução fraca não necessariamente é uma solução clássica. O teorema a seguir estabelece condições sob as quais uma solução fraca é uma solução clássica. No próximo resultado, para uma função diferenciável $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ introduzimos a decomposição

$$f(t+s, x+y) - f(t, x) = (D_1 f(t, x), D_2 f(t, x))(s, y) + \|(s, y)\| R(t, x, s, y),$$

onde

$$R(t, x, s, y) \rightarrow 0, \text{ se } (s, y) \rightarrow 0.$$

Teorema 2.15. *Seja $u_0 \in D(A)$ e assumamos que $f(\cdot)$ verifica as condições do Lema 2.14. Se além disso $f(\cdot)$ é continuamente diferenciável em $(0, T)$, então a solução fraca $u(\cdot) = u(\cdot, u_0)$ de (2.9)-(2.10) é uma solução clássica.*

Demonstração. Seja $v \in C([0, T] : X)$ tal que

$$v(t) = T(t)Au_0 + T(t)f(0, u_0) + \int_0^t T(t-s)D_1 f(s, u(s))ds \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &+ \int_0^t T(t-s)[D_2 f(s, u(s))](v(s))ds \\ v(0) &= Au_0 + f(0, u_0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

A existência e unicidade de solução para a equação integral (2.11)-(2.12) segue diretamente do Corolário 2.13, pois a função $s \mapsto D_2 f(s, u(s)) \in C([0, T] : L(X))$. Mostramos agora que $u'(\cdot) = v(\cdot)$. Sejam $M = \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\|$ e $N = \sup_{s \in [0, T]} \|D_2 f(s, u(s))\|$. Para $\epsilon > 0$, fixemos

$\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T(h) - I}{h} u_0 - Au_0 \right\| &< \frac{\epsilon}{3M}, \\ \left\| T(h)f(\theta, u(\theta)) - f(0, u_0) \right\| &< \frac{\epsilon}{3M}. \end{aligned}$$

Da definição de solução fraca, para $0 < h < \delta$ e $t \in [0, T]$ temos

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\| \\ &\leq \left\| T(t) \left(\frac{T(h)u_0 - u_0}{h} - Au_0 \right) \right\| \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_0^h \left\| T(t)[T(h-s)f(s, u(s)) - f(0, u_0)] \right\| ds \\ &\quad + \int_0^t M \left\| \frac{f(s+h, u(s+h)) - f(s, u(s))}{h} - D_1 f(s, u(s)) - [D_2 f(s, u(s))](v(s)) \right\| ds \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} + M \int_0^t \left\| [D_2 f(s, u(s))] \right\|_{L(X)} \left\| \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - v(s) \right\| ds \\ &\quad + M \int_0^t \left\| \frac{h, u(s+h) - u(s)}{h} \right\| \left\| R(s, u(s), h, u(s+h) - u(s)) \right\| ds, \end{aligned}$$

o que pelo Lema 2.14 implica que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\| &\leq \frac{2\epsilon}{3} + MN \int_0^t \left\| \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - v(s) \right\| ds \\ &\quad + M(1+C) \int_0^t \left\| R(s, u(s), h, u(s+h) - u(s)) \right\| ds, \end{aligned}$$

onde C é a constante Lipschitz de $u(\cdot)$ sobre $[0, T]$. Como $R(s, u(s), h, u(s+h) - u(s))$ é uniformemente limitada para $s \in [0, T]$ e $\left\| R(s, u(s), h, u(s+h) - u(s)) \right\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, para cada $s \in [0, T]$, podemos reescrever a última desigualdade na forma

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \xi(h) + MN \int_0^t \left\| \frac{u(s+h) - u(s)}{h} - v(s) \right\| ds,$$

onde $\xi(h) \rightarrow 0$ se $h \rightarrow 0$. Assim por Gronwall-Bellman temos

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - v(t) \right\| \leq \left(\frac{2\epsilon}{3} + \xi(h) \right) e^{MNT},$$

o que mostra que $u'(\cdot)$ existe em $[0, T]$ e que $u'(\cdot) = v(\cdot)$. Com estimativas similares se prova que $u'(T)$ existe. Isso mostra que $u' \in C([0, T] : X)$.

Para concluir a prova, somente resta mostrar que $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, T]$. Pelo item (i) do Teorema 2.4, sabemos que o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} w'(t) &= Aw(t) + f(t, u(t)), & t \in [0, T], \\ w(0) &= u_0 \end{aligned}$$

possui uma única solução clássica $w(\cdot)$, pois $f(t, u(t))$ é continuamente diferenciável sobre $[0, T]$ e $u_0 \in D(A)$. Claramente, $w(\cdot) = u(\cdot)$, pelo que em particular $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in [0, T]$. Portanto $u(\cdot)$ é uma solução clássica de (2.9)-(2.10). A prova está completa. ■

Estudamos a seguir a existência de soluções fracas para (2.9)-(2.10) usando o clássico Teorema de ponto fixo de Schauder, veja Martin [4], pp 126. Introduzimos para começar a seguinte definição:

Definição 2.16. Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ em X é compacto para $t_0 > 0$ se $T(t)$ é compacto para todo $t > t_0$. Dizemos que $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto se é compacto para $t > 0$.

Note que se $T(t)$ é compacto para $t \geq 0$ então, em particular, o operador identidade é compacto, o que somente é possível se X é de dimensão finita. Como este caso é de pouco interesse, assumiremos que $T(t)$ é compacto para $t > 0$.

Para mostrar nosso próximo resultado precisamos do seguinte lema:

Lema 2.17. Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X e $K \subset X$ relativamente compacto. Então o conjunto de funções $U = \{T(\cdot)x : x \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0, T]; X)$.

Demonstração. Para mostrar o resultado, usamos o Teorema de Áscoli-Arzelá. É claro que para cada $t \in [0, T]$ o conjunto $\{T(t)x : x \in X\}$ é relativamente compacto em X , pois $T(t)$ é contínuo. Mostramos agora que o conjunto de funções $\{T(\cdot)x : x \in K\}$ é equicontínuo em $t = 0$. Se a propriedade é falsa, então existem $\epsilon > 0$ e seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, com $0 < h_n \leq \frac{1}{n}$, tais que

$$\|T(h_n)x_n - x_n\| \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando a compacidade de K , sabemos que existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a um ponto $x \in K$. Nessas condições temos

$$\epsilon \leq \|T(h_{n_j})x_{n_j} - x_{n_j}\| \leq \|T(h_{n_j})\| \|x_{n_j} - x\| + \|T(h_{n_j})x - x\| + \|x - x_{n_j}\|, \quad (2.13)$$

o que é absurdo, pois o lado direito da desigualdade (2.13) converge a zero se $n_j \rightarrow \infty$, pois $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente limitado em $[0, 1]$. Portanto o conjunto U é equicontínuo em $t = 0$. Usando agora as propriedades do semigrupo $(T(t))_{t > 0}$ é fácil concluir que $\{T(\cdot)x : x \in K\}$, é equicontínuo para todo $t > 0$. Portanto, por Áscoli-Arzelá $\{T(\cdot)x : x \in K\}$ é relativamente compacto. ■

Teorema 2.18. *Sejam $U \subset X$ aberto, $u_0 \in U$ e $f \in C([0, T] \times U : X)$ e assumamos que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto. Então existe uma solução fraca de (2.9)-(2.10) definida em $[0, t_1]$ para algum $0 < t_1 \leq T$.*

Demonstração. Seja $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, T]$. Usando a continuidade de $f(\cdot)$, fixamos números positivos $\delta, N > 0$ tais que $B_\delta(u_0, X) \subset U$ e $\|f(t, x)\| \leq N$ para todo $(t, x) \in [0, \delta] \times B_\delta(u_0, X)$. Fixemos agora $0 < \delta_1 < \delta$ tal que

$$\|T(t)u_0 - u_0\| < \frac{\delta}{2}, \quad 0 < t < \delta_1, \quad (2.14)$$

$$MN\delta_1 < \frac{\delta}{2}. \quad (2.15)$$

Sobre o espaço $P = \{u \in C([0, \delta_1] : X) : u(0) = u_0, \|u(t) - u_0\| \leq \delta_1, \forall t \in [0, \delta_1]\}$, definimos o operador $F : P \rightarrow C([0, \delta_1] : X)$ por

$$Fu(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \in [0, \delta_1].$$

Se F tem um ponto fixo, então o problema (2.9)-(2.10) tem uma solução fraca em $C([0, \delta_1] : X)$. Para mostrar que F tem um ponto fixo em P , usamos o clássico Teorema de ponto fixo de Schauder, veja [4], pp 126. Por isso, a seguir mostramos que F é um operador contínuo com valores em P , que $F(P) = \{Fu; u \in P\}$ é equicontínuo em $[0, \delta_1]$ e que o conjunto $F'P(t) = \{Fu(t); u \in P\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, \delta_1]$. Estudamos cada uma dessas propriedades de forma separada.

(a) A função F é contínua e $F(P) \subset P$.

Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência com valores em P e $u \in P$ tais que $u_n \rightarrow u$ em P . Como f é limitada em $[0, \delta_1] \times B_{\delta_1}(u_0, X)$, segue diretamente do Teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_0^{\delta_1} \|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))\| ds \rightarrow 0$$

se $n \rightarrow \infty$, o que implica a continuidade de F . Por outro lado, se $u \in P$ e $t \in [0, \delta_1]$, da definição de F e de (2.14), (2.15) temos

$$\begin{aligned} \|Fu(t) - u_0\| &\leq \|T(t)u_0 - u_0\| + \left\| \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)) ds \right\| \\ &< \frac{\delta}{2} + MN\delta_1 \\ &< \delta, \end{aligned}$$

o que mostra que $Fu \in P$ e portanto $F(P) \subset P$.

(b) $FP(t)$ é relativamente compacto em X para todo $t \in [0, \delta_1]$.

Se $t = 0$ a propriedade é óbvia. Sejam $t > 0$ e $0 < \epsilon < t$. Se $u \in P$, da definição de P vemos que

$$\begin{aligned} Fu(t) &= T(t)u_0 + \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s, u(s))ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s)f(s, u(s))ds \\ &= T(t)u_0 + T(\epsilon) \int_0^{t-\epsilon} T(t-s-\epsilon)f(s, u(s))ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s)f(s, u(s))ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como

$$\begin{aligned} \|T(t-s-\epsilon)f(s, u(s))\| &\leq MN, \\ \int_{t-\epsilon}^t \|T(t-s)f(s, u(s))\| &\leq MN\epsilon, \end{aligned}$$

para $s \in [0, \delta_1]$, segue de (2.16) que

$$Fu(t) \in \{T(t)u_0\} + T(\epsilon)(B_{MN\delta_1}(0, X)) + C_\epsilon,$$

onde $C_\epsilon \subset X$ e $\text{diam}(C_\epsilon) \leq 2MN\epsilon$. O anterior implica que $FP(t)$ é um conjunto totalmente limitado em X , pois $T(\epsilon)$ é compacto, e conseqüentemente $FP(t)$ é relativamente compacto em X , uma vez que X é métrico.

(c) O conjunto $FP = \{Fu : u \in P\}$ é equicontínuo em $[0, \delta_1]$.

Sejam $t' \in [0, \delta_1]$, $0 < \epsilon < t'$ e $\epsilon' = \frac{\epsilon}{8MN}$. Usando que $T(\epsilon')B_N(0, X)$ é compacto, pelo Lema 2.17 fixamos $0 < \varrho < \delta_1$ tal que

$$\begin{aligned} \varrho MN &< \frac{\epsilon}{4}, \\ \|T(h)x_0 - x_0\| &< \frac{\epsilon}{4M}, \quad 0 < h < \varrho \\ \|(T(s) - T(s'))x\| &< \frac{\epsilon}{4M}, \end{aligned}$$

quando $x \in T(\epsilon')B_N(0, X)$ e $s, s' \in [0, T]$ são tais que $|s - s'| \leq \varrho$. Nestas condições, para $0 < t' < t \leq \delta_1$, com $t - t' \leq \varrho$, temos

$$\begin{aligned} \|Fu(t') - Fu(t)\| &\leq \|T(t')\| \|u_0 - T(t - t')u_0\| \\ &\quad + \int_0^{t'-\epsilon'} M \|T(t' - s - \epsilon') - T(t - s - \epsilon')T(\epsilon')f(s, u(s))\| ds \\ &\quad + \int_{t'-\epsilon'}^{t'} 2MN ds + \int_{t'}^t MN ds \\ &< M \frac{\epsilon}{4M} + M \frac{\epsilon}{4M} + 2MN\epsilon' + MN\varrho, \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$\|Fu(t') - Fu(t)\| < \epsilon,$$

para todo $u \in P$ e todo $0 < t - t' \leq \varrho$, o que mostra que FP é equicontínuo à direita em t . A equicontinuidade à esquerda em $t \in (0, \delta_1]$ é provada usando as mesmas idéias e estimativas. Portanto FB é equicontínuo sobre $[0, \delta_1]$.

Segue do teorema de Áscoli-Arzelá e de (a), (b), (c) que $F(P)$ é relativamente compacto em $C([0, \delta_1] : X)$ e conseqüentemente F é completamente contínuo. Pelo Teorema de Schauder, veja [4], pp. 126, F tem um ponto fixo $u(\cdot)$ em P . Obviamente $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (2.9)-(2.10), o que completa a prova. ■

Capítulo 3

Um problema de evolução com impulsos

Neste capítulo estabelecemos novos resultados de existência de soluções fracas para uma classe de equações funcionais impulsivas modeladas na forma

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), \quad t \in I = (0, T], \quad (3.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.2)$$

$$\Delta u(t_i) = I_i(u(t_i)), \quad (3.3)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados $(T(t))_{t \geq 0}$ definido sobre um espaço de Banach X , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$, $f : I \times X^2 \mapsto X$, $I_i : X \mapsto X$ são funções apropriadas e a notação $\Delta u(t_i)$ é definida por $\Delta u(t_i) = u(t_i^+) - u(t_i^-)$.

O problema diferencial (3.1)-(3.3) foi estudado recentemente por Liu em [3], para o caso $a(t) = t$, $t \in [0, T]$. Nesse trabalho, Liu mostra a existência de soluções fracas e clássicas para (3.1)-(3.3) usando o teorema de ponto fixo para contrações e o Teorema 6.1.5 em Pazy [5], veja pp.187, a respeito de regularidade de soluções fracas.

Neste capítulo apresentamos novos resultados de existência de soluções fracas, tanto locais como globais, para o problema (3.1)-(3.3). A diferença com o trabalho de Liu [3] é que nossos resultados são provados usando critérios de ponto fixo para operadores condensantes, especificamente Leray-Schauder e Sadovskii, veja Teoremas 3.1 e 3.2.

3.1 Existência de soluções fracas

Apresentamos a seguir alguns teoremas clássicos de ponto fixo que usamos para obter nossos resultados.

Teorema 3.1. (*Leray - Schauder*) *Seja $D \subset X$ convexo tal que $0 \in D$. Se $F : D \rightarrow D$ é uma função completamente contínua, então F possui um ponto fixo em D ou o conjunto $\{x \in D : x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado em X .*

Teorema 3.2. (*Sadovskii*) *Seja $D \subset X$ convexo. Se $F : D \rightarrow D$ é uma função condensante, então F tem um ponto fixo em D .*

No que se segue, $PC = PC([0, T] : X)$ será o espaço

$$PC = PC([0, T] : X) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow X : \begin{array}{l} u \in C([0, t_1] : X) \cap C((t_i, t_{i+1}] : X) \\ \text{e } u(t_i^-) \text{ existe, } \forall i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\},$$

munido da norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_T$.

Para $u \in PC([0, T] : X)$, usaremos a notação $\tilde{u}$ para a função definida por:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \neq t_i \\ u(t_i^-), & t = t_i \end{cases}$$

e para $B \subset PC([0, T] : X)$, $\tilde{B}$ denotará o conjunto $\tilde{B} = \{\tilde{u} : u \in B\}$.

Como o domínio do operador A pode ser diferente de X , é natural pensar em um conceito mais fraco de solução para o problema (3.1)-(3.3). Se $u \in PC([0, T] : X)$ é solução do problema (3.1)-(3.3), é fácil mostrar que para $t \in [0, T]$

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.3. *Uma função $u \in PC([0, T] : X)$ é uma solução fraca do problema impulsivo (3.1)-(3.3) se*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)),$$

para todo $t \in [0, T]$.

Como estamos interessados em mostrar existência de soluções fracas para (3.1)-(3.3) usando teoremas de ponto fixo para operadores condensantes, consideramos o seguinte resultado do tipo Áscoli-Arzelá em $\mathcal{PC}([0, T] : X)$. No próximo resultado, para $u \in B$ e $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ definimos as funções $\tilde{u}_0 \in C([0, t_1] : X)$ e $\tilde{u}_i \in C([t_i, t_{i+1}] : X)$ por

$$\tilde{u}_0(t) = u(t) \quad \text{para } t \in [0, t_1],$$

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} u(t), & \text{para } t \in (t_i, t_{i+1}], \\ u(t_i^+), & \text{para } t = t_i. \end{cases}$$

Mais ainda, $\tilde{B}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, será o conjunto $\tilde{B}_i = \{\tilde{u}_i : u \in B\}$.

Teorema 3.4. *Um conjunto $B \subset \mathcal{PC}([0, T] : X)$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes propriedades se verificam:*

- (a) *Para todo $t \in I$, os conjuntos $B(t) = \{u(t) : u \in B\}$ e $\tilde{B}(t) = \{\tilde{u}(t) : u \in B\}$ são relativamente compactos em X ;*
- (b) *O conjunto B é equicontínuo à esquerda em cada $t \in I$;*
- (c) *O conjunto $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita em cada $t \in I$.*

Demonstração. Suponha que as condições (a), (b), (c) são verificadas. É consequência direta das hipóteses e do clássico Teorema de Áscoli-Arzelá que os conjuntos $\tilde{B}_0$ e $\tilde{B}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, são relativamente compactos em $C([0, t_1] : X)$ e $C([t_i, t_{i+1}] : X)$, respectivamente. Seja $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em B . Destas considerações, existe uma subseqüência de $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$, que denotamos $(u^{k_1})_{k_1 \in \mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_1^{k_1})_{k_1 \in \mathbb{N}}$ é convergente a uma função $v_1 \in C([0, t_1] : X)$. Similarmente, a seqüência $(u^{k_1})_{k_1 \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência, que denotamos $(u^{k_2})_{k_2 \in \mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_2^{k_2})_{k_2 \in \mathbb{N}}$ converge a uma função $v_2 \in C([t_1, t_2] : X)$. Continuando com esse raciocínio, concluímos que existe uma subseqüência de $(u^{k_{n-1}})_{k_{n-1} \in \mathbb{N}}$, que denotamos $(u^{k_n})_{k_n \in \mathbb{N}}$, tal que $(\tilde{u}_n^{k_n})_{k_n \in \mathbb{N}}$ converge a uma função $v_n \in C([t_{n-1}, t_n] : X)$. É claro que a subseqüência $(u^{k_n})_{k_n \in \mathbb{N}}$ converge a $u \in \mathcal{PC}$, onde u é a função tal que $\tilde{u}_i = v_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Isso prova que B é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$.

Suponha agora que $B \subset \mathcal{PC}$ é relativamente compacto. Por Áscoli-Arzelá vemos facilmente que, para $t \neq t_i$, $B(t)$ e $\tilde{B}(t)$ são relativamente compactos e B é equicontínuo em t . Para estudar o caso $t = t_i$, mostramos inicialmente que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a função $\psi_i : \mathcal{PC} \rightarrow X$ onde $\psi_i(u) = u(t_i^+)$ é contínua. Sejam $\epsilon > 0$ e $u \in \mathcal{PC}$. Para todo $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(u, \mathcal{PC})$ existe $\delta_v > 0$ tal

que $\|v(t_i^+) - v(t_i + h)\| < \frac{\epsilon}{3}$ quando $0 < h \leq \delta_v$. Com estas escolhas, para $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}(u, \mathcal{PC})$ e $0 < h \leq \delta = \min\{\delta_u, \delta_v\}$ temos

$$\begin{aligned} \|u(t_i^+) - v(t_i^+)\| &\leq \|u(t_i^+) - u(t_i + h)\| + \|u(t_i + h) - v(t_i + h)\| \\ &\quad + \|v(t_i + h) - v(t_i^+)\| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que prova que ψ_i é contínua e portanto $\tilde{B}(t_i)$ é relativamente compacto em X . Mostramos agora a equicontinuidade de $\tilde{B}$ à direita em $t = t_i$ raciocinando por absurdo. Suponha que existem $\epsilon > 0$ e seqüências $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{PC}$ e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$, com $0 < h_n < \frac{1}{n}$, tais que

$$\|u^k(t_i^+) - u^k(t_i + h_n)\| \geq \epsilon.$$

Como B é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$, existem uma subsequência de $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$, que continuamos denotando por $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$, e $u \in \mathcal{PC}$ tais que $u^k \rightarrow u$ em $\mathcal{PC}$ quando $k \rightarrow \infty$. Da continuidade de ψ_i podemos fixar $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|u(t_i^+) - u^k(t_i^+)\| &< \frac{\epsilon}{3}, \\ \|u^n - u\|_{\mathcal{PC}} &< \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

para todo $k \geq N_\epsilon$. Nestas condições, para $k \geq N_\epsilon$ temos

$$\begin{aligned} \|u(t_i^+) - u(t_i + h_n)\| &\geq -\|u(t_i^+) - u^k(t_i^+)\| + \|u^k(t_i^+) - u^k(t_i + h_n)\| \\ &\quad - \|u^k(t_i + h_n) - u(t_i + h_n)\| \\ &> -\frac{\epsilon}{3} + \epsilon - \frac{\epsilon}{3} \\ &= \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois $u \in \mathcal{PC}$. Isso mostra que $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita em cada t_i . A prova do teorema está agora completa. ■

No restante deste capítulo, assumiremos que as seguintes condições são verificadas:

(A₁) A função $a : I \rightarrow I$ é contínua e $a(t) \leq t$ para todo $t \in [0, T]$;

(A₂) A função $f : I \times X^2 \rightarrow X$ verifica as seguintes condições do tipo Caratheodory:

(a) $f(t, \cdot) : X \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in [0, T]$;

(b) $f(\cdot, x) : I \rightarrow X$ é integrável para todo $x \in X$;

- (c) Existem funções contínuas $m : [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ e $W : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, com $W(\cdot)$ não decrescente, tais que

$$\|f(t, x, y)\| \leq m(t)W(\|x\| + \|y\|),$$

para todo $t \in I$ e todo $x, y \in X$.

Teorema 3.5. *Seja $u_0 \in X$ e suponha que as seguintes propriedades são válidas:*

- (H₁) *Os operadores I_i , $i = 1, \dots, n$, são completamente contínuos e limitados em X . Seja $N_i = \sup\{\|I_i(x)\| : x \in X\}$;*
- (H₂) *Para todo $t \in [0, T]$ e $r > 0$ o conjunto $\{T(t)f(s, x, y) : s \in [0, t], \|x\| \leq r, \|y\| \leq r\}$ é relativamente compacto em X .*

Se $2M \int_0^T m(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)}$, onde $c = 2 \left(M \|u_0\| + \sum_{i=1}^n MN_i \right)$ e $M = \sup_{t \in [0, T]} \|T(t)\|$, então o problema (3.1)-(3.3) tem pelo menos uma solução fraca.

Demonstração. Seja $\Gamma : \mathcal{PC}([0, T] : X) \mapsto \mathcal{PC}([0, T] : X)$ a função definida por

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)), \quad t \in I. \quad (3.4)$$

A função Γ está bem definida e pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue é fácil mostrar que Γ é contínua. Como um ponto fixo de Γ é uma solução fraca de (3.1)-(3.3), no que vem a seguir mostramos que Γ verifica as hipóteses do Teorema 3.1. Primeiro provamos que o conjunto $\{u \in \mathcal{PC} : \lambda \Gamma u = u, \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $\mathcal{PC}([0, T] : X)$. Seja $\lambda \in (0, 1)$ e assumamos que $u_\lambda \in \mathcal{PC}$ é tal que $\lambda \Gamma u_\lambda = u_\lambda$. Diretamente da definição de Γ temos

$$\begin{aligned} \|u_\lambda(t)\| &\leq \lambda \|T(t)\| \|u_0\| + \lambda \int_0^t \|T(t-s)f(s, u_\lambda(s), u_\lambda(a(s)))\| ds \\ &\quad + \lambda \sum_{t_i < t} \|T(t-t_i)I_i(u_\lambda(t_i))\| \\ &\leq M \|u_0\| + M \int_0^t m(s)W(\|u_\lambda(s)\| + \|u_\lambda(a(s))\|)ds + \sum_{i=1}^n MN_i. \end{aligned}$$

Denotando por $x_\lambda(t)$ o lado direito da desigualdade anterior, temos

$$x'_\lambda(t) \leq Mm(t)W(2x_\lambda(t)), \quad (3.5)$$

pois $W(\cdot)$ é não decrescente e $a(t) \leq t$ para todo $t \in I$. Segue de (3.5) e da hipótese que

$$\int_{2x_\lambda(0)}^{2x_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} \leq 2M \int_0^T m(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

o que nos permite concluir que o conjunto de funções $\{x_\lambda : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $C([0, T] : X)$ e, conseqüentemente, que o conjunto $\{u_\lambda : u_\lambda = \Gamma u_\lambda, \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $\mathcal{PC}([0, T] : X)$, pois $\|u_\lambda(t)\| \leq x_\lambda(t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Mostramos agora que para todo $B \subset \mathcal{PC}$ limitado, o conjunto $\Gamma B = \{\Gamma u : u \in B\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$. Para isto, dado $r > 0$ fixamos $B_r = B_r(0, \mathcal{PC})$ e consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 u(t) = T(t)u_0 + \sum_{t_i < t} T(t - t_i)I_i(u(t_i)), \quad (3.6)$$

$$\Gamma_2 u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds. \quad (3.7)$$

Usando o Teorema 3.4, mostramos a seguir que os conjuntos $\Gamma_i(B_r)$, $i = 1, 2$, são relativamente compactos em $\mathcal{PC}$. Estudamos cada caso separadamente.

Caso 1 O conjunto $\Gamma_1(B_r)$ é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$.

Começamos mostrando a equicontinuidade dos conjuntos $\Gamma_1(B_r)$, $\widetilde{\Gamma_1(B_r)}$. Sejam $\epsilon > 0$, $t \in I \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ e $\delta_1 > 0$ tal que $\{t_1, \dots, t_n\} \cap [t - \delta_1, t + \delta_1] = \emptyset$. Como o conjunto $\bigcup_{i=1}^n I_i(B_r(0, X))$ é relativamente compacto em X e $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, pelo Lema 2.17 existe $0 < \delta_2 < \delta_1$ tal que

$$\|(T(t) - T(s))I_i(x)\| < \frac{\epsilon}{2n}, \quad x \in \bigcup_{i=1}^n I_i(B_r(0, X)), \quad (3.8)$$

$$\|(T(t) - T(s))u_0\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (3.9)$$

quando $|t - s| \leq \delta_2$. Nestas condições, para $0 < h < \delta_2$ e $u \in B_r$ temos

$$\begin{aligned} & \|\Gamma_1 u(t-h) - \Gamma_1 u(t)\| \\ & \leq \|(T(t-h) - T(t))u_0\| + \left\| \sum_{t_i < t} (T(t-h-t_i) - T(t-t_i))I_i(u(t_i)) \right\| \\ & < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{t_i < t} \|(T(t-h-t_i) - T(t-t_i))I_i(u(t_i))\| \\ & < \frac{\epsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2n} \\ & = \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra a equicontinuidade de $\Gamma_1 B_r$ à esquerda em $t \neq t_i$. A equicontinuidade de $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ à direita em $t \neq t_i$ é provada de forma similar.

Seja agora $t = t_i$ e fixemos $\delta > 0$ tal que $\{t_j : j \neq i\} \cap [t_i - \delta, t_i + \delta] = \emptyset$ e (3.8)-(3.9) sejam satisfeitas. Da definição de Γ , para $u \in B_r$

$$\Gamma_1 u(t_i) = T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j))$$

e então para $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 u(t_i - h) - \Gamma_1 u(t_i)\| &\leq \| (T(t_i - h) - T(t_i))u_0 \| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \| (T(t_i - h - t_j) - T(t_i - t_j))I_j(u(t_j)) \| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

e portanto $\Gamma_1 B_r$ é equicontínuo à esquerda em $t = t_i$.

Mostramos agora a equicontinuidade de $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ à direita em $t = t_i$. Pela definição de $\widetilde{\Gamma_1 u}$, para $u \in B_r$

$$\widetilde{\Gamma_1 u}(t_i) = T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^i T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)).$$

Fixemos $\delta > 0$ tal que $\{t_j : j \neq i\} \cap [t_i - \delta, t_i + \delta] = \emptyset$ e (3.8)-(3.9) sejam válidas. Para $u \in B_r$ e $0 < h < \delta$ vemos que

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Gamma_1 u}(t_i + h) - \widetilde{\Gamma_1 u}(t_i)\| &\leq \| (T(t_i + h) - T(t_i))u_0 \| \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^i (T(t_i + h - t_j) - T(t_i - t_j))I_j(u(t_j)) \right\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra $\widetilde{\Gamma_1 B_r}$ é equicontínuo à direita em $t = t_i$.

Isso mostra que $\Gamma_1 B_r$ verifica as condições **(b)**, **(c)** do Teorema 3.4.

Mostramos agora que $\Gamma_1 B_r(t)$ e $\widetilde{\Gamma_1 B_r}(t)$ são relativamente compactos para todo $t \in [0, T]$. Como os operadores I_i são completamente contínuos, para cada $s \in I$ o conjunto $U(s, r) = \{T(s)I_i(x) : \|x\| \leq r, i = 1, 2, \dots, n\}$ é relativamente compacto em X . Se $t \neq t_i$, $i \in \mathbb{N}$, e $u \in B_r$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 B_r(t) &\subseteq \{T(t)u_0\} + \left\{ \sum_{t_i < t} T(t - t_i)I_i(x) : \|x\| \leq r \right\} \\ &\subseteq \{T(t)u_0\} + \sum_{t_i < t} U(t - t_i, r), \end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma_1 B_r(t)$ é relativamente compacto em X para $t \neq t_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Estudemos agora o caso $t = t_i$. Como

$$\begin{aligned}\Gamma_1 u(t_i) &= T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)) \quad \text{e} \\ \widetilde{\Gamma_1 u}(t_i) &= T(t_i)u_0 + \sum_{j=1}^i T(t_i - t_j)I_j(u(t_j)),\end{aligned}$$

vemos que para $u \in B_r$

$$\begin{aligned}\Gamma_1 B_r(t_i) &\subseteq \{T(t_i)u_0\} + \sum_{j=1}^{i-1} U(t_i - t_j, r) \quad \text{e} \\ \widetilde{\Gamma_1 B_r}(t_i) &\subseteq \{T(t_i)u_0\} + \sum_{j=1}^i U(t_i - t_j, r),\end{aligned}$$

o que implica que $\Gamma_1 B(t_i)$ e $\widetilde{\Gamma_1 B}(t_i)$ são relativamente compactos em X .

Pelo Teorema 3.4 concluímos que $\Gamma_1 B_r$ é relativamente compacto em $PC([0, T] : X)$. Portanto Γ_1 é um operador completamente contínuo.

Caso 2: O conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é relativamente compacto em $PC([0, T] : X)$.

Como $\Gamma_2(B_r)$ é um conjunto de funções contínuas, podemos usar o clássico Teorema de Áscoli-Arzelá para mostrar a propriedade. Estudamos primeiro a equicontinuidade de $\Gamma_2(B_r)$. Sejam $\epsilon > 0$ e $t < t' < T$. Por hipótese, sabemos que existe um compacto $U(\delta, r)$ tal que $\{T(\delta)f(s, x, y) : s \in [0, T], x, y \in B_r(0, X)\} \subset U(\delta, r)$. Usando a continuidade de $m(\cdot)$ e o Lema 2.17, escolhemos $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_s^{s'} m(s)ds &< \frac{\epsilon}{6MW(2r)}, \\ \|(T(s) - T(s'))x\| &< \frac{\epsilon}{3MT}, \quad x \in U(\delta, r),\end{aligned}$$

se $s, s' \in I$ e $|s - s'| \leq \delta$. Nestas condições, para $u \in B_r$ e $t \in I$ tal que $0 < t' - t \leq \delta$ temos que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_2 u(t) - \Gamma_2 u(t')\| &\leq \int_0^{t-\delta} \|(T(t-s-\delta) - T(t'-s-\delta))T(\delta)f(s, u(s), u(a(s)))\| ds \\ &\quad + \int_{t-\delta}^t \|(T(t-s) - T(t'-s))f(s, u(s), u(a(s)))\| ds \\ &\quad + \int_t^{t'} \|T(t'-s)f(s, u(s), u(a(s)))\| ds \\ &\leq \int_0^{t-\delta} \frac{\epsilon}{3MT} ds + 2M \int_{t-\delta}^t m(s)W(\|u(s)\| + \|u(a(s))\|) ds \\ &\quad + M \int_t^{t'} m(s)W(\|u(s)\| + \|u(a(s))\|) ds \\ &< \frac{\epsilon}{3MT}(t-\delta) + 2MW(2r) \int_{t-\delta}^t m(s)ds + MW(2r) \int_t^{t'} m(s)ds \\ &< \epsilon,\end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma_2 B_r$ é equicontínuo à esquerda em $t' \in (0, T]$. A equicontinuidade à direita em $t' \in [0, T)$ é provada usando argumentos análogos. Isto completa a demonstração da equicontinuidade de $\Gamma_2 B_r$.

Estudamos agora a compacidade do conjunto $\Gamma_2 B_r(t)$. Como $\Gamma_2 B_r(0) = \{0\}$, somente mostramos que $\Gamma_2 B_r(t)$ é relativamente compacto para todo $t \neq 0$. Sejam $0 < \epsilon < t \leq T$ e $U(\epsilon, r) \subset X$ compacto tal que $\{T(\epsilon)f(s, x, y) : s \in [0, T], x, y \in B_r(0, X)\} \subset U(\epsilon, r)$. Usando as considerações anteriores e o Teorema do Valor Médio para Integral de Bochner, veja Martin [4] pp. 25, temos que para $u \in B_r$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 u(t) &= \int_0^{t-\epsilon} (T(t-s-\epsilon)T(\epsilon)f(s, u(s), u(a(s))))ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds \\ &\in (t-\epsilon)\overline{\text{conv}(\{T(s)x; x \in U(\epsilon, r), s \in [0, T]\})} + C_1, \end{aligned}$$

onde $\text{conv}(B)$ é a envolvente convexa de B e $C_1 \subset X$ é tal que $\text{diam}(C_1) < M \int_{t-\epsilon}^t m(s)ds$. Isto prova que $\Gamma_2 B_r$ é um conjunto totalmente limitado em X e portanto relativamente compacto em X , completando a prova de que Γ_2 é completamente contínuo.

É claro agora que Γ verifica as condições do Teorema 3.1. Portanto Γ possui um ponto fixo em $\mathcal{PC}$ e conseqüentemente existe uma solução fraca do problema impulsivo (3.1)-(3.3). Isto completa a prova. ■

Quando as funções I_i são Lipschitz, o seguinte resultado é válido:

Teorema 3.6. *Assuma que a condição (H_2) do Teorema 3.5 se verifica. Suponha ainda que a seguinte propriedade é satisfeita:*

(H_3) *Existem constantes positivas L_i , $i = 1, \dots, n$, tais que*

$$\|I_i(x) - I_i(y)\| \leq L_i \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in X^2.$$

Se

$$M \sum_{i=1}^n L_i + M \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s)ds < 1,$$

então existe uma solução fraca do problema impulsivo (3.1)-(3.3).

Demonstração. Seja $\Gamma : \mathcal{PC}([0, T] : X) \rightarrow \mathcal{PC}([0, T] : X)$ a função definida em (3.4) e considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ introduzida em (3.6)-(3.7). Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r(0, \mathcal{PC})) \subset B_r(0, \mathcal{PC})$ e $\Gamma_i(B_r(0, \mathcal{PC})) \subset B_r(0, \mathcal{PC})$, para $i = 1, 2$. De fato, se a afirmação é falsa, para cada $r > 0$ existe $x_r \in B_r = B_r(0, \mathcal{PC})$ tal que $\|\Gamma x_r\|_T > r$. Então

$$r < \|\Gamma x_r\|_T \leq M \|u_0\| + M \sum_{i=1}^n (\|I_i(x_r) - I_i(0)\| + \|I_i(0)\|) + MW(2r) \int_0^T m(s)ds,$$

de onde segue que

$$1 \leq M \sum_{i=1}^n L_i + M \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s) ds,$$

o que é absurdo. Isto prova que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$. Mais ainda, é fácil observar das estimativas que r pode ser escolhido tal que $\Gamma_i(B_r) \subseteq B_r$, $i = 1, 2$.

Mostramos agora que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 : B_r \rightarrow B_r$ verifica as hipóteses do Teorema 3.2. Pela prova do Teorema 3.5, o operador $\Gamma_2 : B_r \rightarrow B_r$ é completamente contínuo. Usando **(H₃)** vemos que para $x, y \in B_r$

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 y(t)\| &\leq \sum_{i=1}^n M L_i \|x(t_i) - y(t_i)\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n M L_i \right) \|x - y\|_T \end{aligned}$$

e então

$$\|\Gamma_1 x - \Gamma_1 y\|_T \leq \left(\sum_{i=1}^n M L_i \right) \|x - y\|_T,$$

o que mostra que $\Gamma_1 : B_r \mapsto B_r$ é uma contração.

Portanto $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ é um operador condensante em B_r e, pelo Teorema 3.2, Γ possui um ponto fixo em B_r . Este ponto fixo é uma solução fraca do problema (3.1)-(3.3). Agora a prova do teorema está completa. ■

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 3.6 e por isso omitimos a demonstração.

Corolário 3.7. *Suponha que a condição **(H₂)** do Teorema 3.5 se verifica e que cada função I_i é uma transformação linear contínua em X .*

Se

$$M \sum_{i=1}^n \|I_i\|_{L(X)} + M \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{W(2r)}{r} \int_0^T m(s) ds < 1,$$

então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

3.2 Existência de soluções globais

Nesta parte do trabalho estudamos a existência de soluções globais para o problema impulsivo

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t), u(a(t))), \quad t > 0, \quad (3.10)$$

$$u(0) = u_0 \quad (3.11)$$

$$\Delta u(t_i) = I_i(u(t_i)) \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots, \quad (3.12)$$

onde A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X , $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente e não limitada de números reais positivos e $f : [0, \infty) \times X^2 \rightarrow X$ é uma função contínua.

Para estudar a existência de solução para (3.10)-(3.12), definimos uma função $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, contínua, não decrescente, com $g(0) = 1$ e tal que $g(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e usamos as notações $\mathcal{PC}([0, \infty) : X)$, $C_g^0(X)$ e $(\mathcal{PC})_g^0(X)$ para os espaços:

$$\mathcal{PC}([0, \infty) : X) = \{x : [0, \infty) \rightarrow X : x|_{[0, T]} \in \mathcal{PC}([0, T] : X), \forall T, T \neq t_i\}$$

$$C_g^0(X) = \{x \in C([0, \infty) : X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t)\|}{g(t)} = 0\},$$

$$(\mathcal{PC})_g^0(X) = \left\{x \in \mathcal{PC}([0, \infty) : X) : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|x(t)\|}{g(t)} = 0\right\},$$

munidos das normas

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|, \quad \|x\|_g = \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{g(t)} \quad \text{e} \quad \|x\|_{\mathcal{P}_g} = \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{g(t)},$$

respectivamente. É fácil mostrar que estes espaços são espaços de Banach. Além disso, o seguinte resultado é válido:

Teorema 3.8. *Um conjunto $B \subset C_g^0(X)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

- (a) B é equicontínuo;
- (b) $\frac{\|x(t)\|}{g(t)} \rightarrow 0$ uniformemente para $x \in B$ quando $t \rightarrow \infty$;
- (c) $B(t) = \{x(t) : x \in B\}$ é relativamente compacto em X para todo $t \geq 0$.

Para $B \subset (\mathcal{PC})_g^0(X)$ e $T > 0$ com $T \neq t_i$, usaremos a notação B_T para o conjunto $B_T = \{u_T = u|_{[0, T]} : u \in B\}$. Observe que $B_T \subset \mathcal{PC}([0, T] : X)$.

Para mostrar a existência de soluções para o problema (3.10)-(3.12), usaremos o Teorema 3.1. Por esta razão consideramos o seguinte resultado:

Teorema 3.9. *Um conjunto $B \subset (\mathcal{PC})_g^0(X)$ é relativamente compacto se, e somente se:*

- (a) B_T é relativamente compacto em $\mathcal{PC}([0, T] : X)$ para todo $T > 0$;
- (b) $\frac{\|x(t)\|}{g(t)} \rightarrow 0$ uniformemente para $x \in B$, quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha que $B \subset (PC)_g^0(X)$ é relativamente compacto. A propriedade (a) é clara, pois $i_T : (PC)_g^0(X) \rightarrow PC([0, T] : X), u \mapsto u_T$, é contínua. Se a condição (b) é falsa, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in B$ e $s_n \geq n$ tais que

$$\frac{\|x_n(s_n)\|}{g(s_n)} \geq \epsilon.$$

Usando a compacidade de B , podemos assumir, passando por subsequências se necessário, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a uma função $x \in (PC)_g^0(X)$. Em particular, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{P}g} < \frac{\epsilon}{2},$$

quando $n \geq N_\epsilon$. Então para $n > N_\epsilon$ temos

$$\frac{\|x(s_n)\|}{g(s_n)} \geq \frac{\|x_n(s_n)\|}{g(s_n)} - \frac{\|x(s_n) - x_n(s_n)\|}{g(s_n)} \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

e portanto

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x(t_n)\|}{g(t_n)} \geq \frac{\epsilon}{2},$$

o que é absurdo, pois $x \in (PC)_g^0(X)$. Isto prova que a condição (b) é satisfeita.

Suponha agora que as condições (a), (b) são verificadas. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em B . Como para todo $T > 0$ o conjunto B_T é relativamente compacto em $PC([0, T] : X)$, podemos, usando um processo de diagonalização, achar uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que para evitar notações excessivas continuamos denotando do mesmo modo, e uma função $x \in PC([0, \infty) : X)$ tais que $(x_n)_T \rightarrow x_T$ em $PC([0, T] : X)$ para todo $T > 0$. Afirmamos que $x \in (PC)_g^0(X)$ e que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x em $(PC)_g^0(X)$. Mostramos primeiro que $x \in (PC)_g^0(X)$. Seja $\epsilon > 0$ e fixemos $T > 0$ tal que $\frac{\|u(t)\|}{g(t)} < \frac{\epsilon}{2}$, $u \in B$, quando $t > T$. Como $x_n \rightarrow x$ uniformemente em compactos, para cada $t \geq 0$ existe $N_{t,\epsilon}$ tal que $\|x_n(t) - x(t)\| < \epsilon$ para todo $n \geq N_{t,\epsilon}$. Nestas condições, para $t > T$

$$\begin{aligned} \frac{\|x(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{\|x(t) - x_{N_{t,\epsilon}}(t)\|}{g(t)} + \frac{\|x_{N_{t,\epsilon}}(t)\|}{g(t)} \\ &\leq \|x(t) - x_{N_{t,\epsilon}}(t)\| + \frac{\|x_{N_{t,\epsilon}}(t)\|}{g(t)} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\|x(t)\|}{g(t)} < \epsilon, \text{ para } t > T$$

e portanto $x \in (PC)_g^0(X)$. Mostramos agora a convergência. Sejam $\epsilon > 0$ e $T_1 > 0$ tais que

$$\sup \left\{ \frac{\|x(t)\|}{g(t)}, \frac{\|x_n(t)\|}{g(t)} : n \in \mathbb{N}, t \geq T_1 \right\} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Usando que $(x_n)_{T_1} \rightarrow x_{T_1}$ em $\mathcal{PC}([0, T_1] : X)$, escolhemos $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup\{\|x(t) - x_n(t)\| : t \in [0, T], n \geq N_\epsilon\} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.14)$$

Segue de (3.13) e (3.14) que para $n > N_\epsilon$

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{\mathcal{P}_g} &\leq \sup\left\{\frac{\|x_n(t) - x(t)\|}{g(t)} : t \in [0, T_1]\right\} + \sup\left\{\frac{\|x_n(t) - x(t)\|}{g(t)} : t \geq T_1\right\} \\ &\leq \sup\{\|x_n(t) - x(t)\| : t \in [0, T_1]\} + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $x_n \rightarrow x$ em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência arbitrária em B , concluímos que B é relativamente compacto em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. A prova do teorema está completa. ■

Apresentamos agora um primeiro resultado de existência de soluções globais.

Teorema 3.10. *Suponha que as seguintes propriedades são verificadas:*

($\tilde{\mathbf{H}}_1$) *As funções I_i , $i \in \mathbb{N}$, são completamente contínuas, limitadas e $\sum_{i=1}^{\infty} N_i < \infty$, onde $N_i = \sup\{\|I_i(x)\| : x \in X\}$;*

($\tilde{\mathbf{H}}_2$) *Para todo $t > 0$ e $r > 0$ o conjunto $\{T(t)f(s, x, y) : s \in [0, t], x, y \in B_r(0, X)\}$ é relativamente compacto em X ;*

($\mathbf{H}_4$) *Para todo $K > 0$, $\frac{1}{g(t)} \int_0^t m(s)W(Kg(s))ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Seja $c = M \|x_0\| + M \sum_{i=1}^{\infty} N_i$. Se $2M \int_0^{\infty} m(s)ds < \int_c^{\infty} \frac{1}{2W(s)}ds$, então existe uma solução fraca do problema (3.10)-(3.12).

Demonstração. Para uma função $u \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$ definimos $\Gamma u \in (\mathcal{PC})([0, \infty) : X)$ por

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)). \quad (3.15)$$

Usando que $\|u(t)\| \leq \|u\|_g g(t)$, da definição de Γu vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma u(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{\|T(t)u_0\|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s)W(\|u(s)\| + \|u(a(s))\|)ds \\ &\quad + \frac{1}{g(t)} \sum_{t_i < t} \|T(t-t_i)\| N_i \\ &\leq \frac{M \|u_0\|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s)W(\|u\|_g g(s) + \|u\|_g g(a(s)))ds + \frac{M}{g(t)} \sum_{t_i < t} N_i \\ &\leq \frac{M \|u_0\|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s)W(2\|u\|_g g(s))ds + \frac{M}{g(t)} \sum_{i=1}^{\infty} N_i, \end{aligned}$$

o que implica por $(\mathbf{H}_4)$ que $\frac{\|\Gamma u(t)\|}{g(t)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isto mostra que $\Gamma u \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$ e portanto Γ define uma função de $(\mathcal{PC})_g^0(X)$ em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$.

Para provar que Γ possui um ponto fixo, mostramos que Γ verifica as hipóteses do Teorema 3.1. Vejamos inicialmente a continuidade. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$ e $x \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$ tais que $x_n \rightarrow x$ em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Para $\epsilon > 0$, fixemos $L > 0$ tal que

$$\frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s)W(2Kg(s))ds + \frac{2M}{g(t)} \sum_{i=1}^{\infty} N_i < \frac{\epsilon}{3}, \quad t \geq L, \quad (3.16)$$

onde $K = \sup\{\|x_n - x\|_g : n \in \mathbb{N}\}$. Como f é contínua, do Teorema da convergência dominada de Lebesgue e de $(\mathbf{A}_2)$, temos que existe $N_\epsilon^1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N_\epsilon^1$

$$\int_0^L \|f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s)))\| ds < \frac{\epsilon}{3M}. \quad (3.17)$$

Usando agora a continuidade das funções I_i e o fato de que $x_n \rightarrow x$ uniformemente em compactos de $[0, \infty^+)$, escolhemos N_ϵ^2 tal que para todo $n \geq N_\epsilon^2$

$$\sum_{t_i \leq L} \|I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))\| < \frac{\epsilon}{3M}. \quad (3.18)$$

Usando (3.17) e (3.18) segue que para $n \geq N_\epsilon^3 = \max\{N_\epsilon^1, N_\epsilon^2\}$ e $t \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{M}{g(t)} \int_0^t \|(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s))))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{g(t)} \sum_{t_i \leq L} M \|I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

e portanto

$$\sup\left\{\frac{\|\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)\|}{g(t)} : t \in [0, L], n \geq N_\epsilon^3\right\} \leq \epsilon. \quad (3.19)$$

Por outro lado, de (3.16), (3.17) e (3.18) temos que para $t \geq L$ e $n \geq N_\epsilon^3$

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{1}{g(t)} \int_0^L \|T(t-s)(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s))))\| ds \\ &\quad + \frac{1}{g(t)} \int_L^t \|T(t-s)(f(s, x_n(s), x_n(a(s))) - f(s, x(s), x(a(s))))\| ds \\ &\quad + \frac{M}{g(t)} \sum_{t_i \leq L} \|I_i(x_n(t_i)) - I_i(x(t_i))\| + \frac{1}{g(t)} \sum_{t_i \geq L} 2MN_i \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{M}{g(t)} \int_L^t m(s)W(2Kg(s))ds + \frac{1}{g(t)} \sum_{t_i \geq L} 2MN_i + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

e assim

$$\sup\left\{\frac{\|\Gamma x_n(t) - \Gamma x(t)\|}{g(t)} : t \geq L, n \geq N_\epsilon^3\right\} \leq \epsilon. \quad (3.20)$$

Segue agora de (3.19) e (3.20) que

$$\|\Gamma x_n - \Gamma x\|_g \leq \epsilon,$$

quando $n \geq N_\epsilon^3$. Portanto Γ é contínua.

Mostramos agora que Γ é completamente contínua usando o Teorema 3.9. Sejam $r > 0$ e $B_r = B_r(0, (PC)_g^0(X))$. Usando as mesmas idéias e estimativas da demonstração do Teorema 3.5 vemos que $\Gamma(B_r)_T$ é relativamente compacto em $PC([0, T] : X)$ para todo $T > 0$, $T \neq t_i$. Mais ainda, como para $x \in B_r$

$$\frac{\|\Gamma x(t)\|}{g(t)} \leq \frac{M \|u_0\|}{g(t)} + \frac{M}{g(t)} \int_0^t m(s)W(2\|x\|_g g(s))ds + \frac{M}{g(t)} \sum_{i=1}^{\infty} N_i,$$

segue de **(H₄)** que

$$\frac{\|\Gamma x(t)\|}{g(t)} \rightarrow 0$$

uniformemente para $x \in B_r$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim $\Gamma(B_r)$ verifica as hipóteses do Teorema 3.9 e portanto é relativamente compacto em $(PC)_g^0(X)$. Isto prova que Γ é completamente contínua, pois r é arbitrário.

Mostramos agora que o conjunto $U = \{x_\lambda \in (PC)_g^0(X) : \lambda \Gamma x_\lambda = x_\lambda, \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $(PC)_g^0(X)$. Se $x_\lambda \in U$, para $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \|x_\lambda(t)\| &\leq \|T(t)u_0\| + \int_0^t m(s)W(\|x_\lambda(s)\| + \|x_\lambda(a(s))\|)ds + \sum_{i=1}^{\infty} MN_i \\ &\leq M\|x_0\| + M \int_0^t m(s)W(\|x_\lambda(s)\| + \|x_\lambda(a(s))\|)ds \\ &\quad + M \sum_{i=1}^{\infty} N_i. \end{aligned}$$

Denotando por $u_\lambda(t)$ o lado direito da última desigualdade, obtemos

$$\dot{u}_\lambda(t) \leq Mm(t)W(2u_\lambda(t))$$

e portanto

$$\int_{2u_\lambda(0)-c}^{2u_\lambda(t)} \frac{1}{W(s)}ds \leq 2M \int_0^t m(s)ds < \int_c^\infty \frac{1}{W(s)}ds. \quad (3.21)$$

Como x_λ e λ são arbitrários, é consequência de (3.21) que o conjunto $\{u_\lambda; \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $C([0, \infty) : X)$, o que implica que U é limitado em $(PC)_g^0(X)$.

Isso mostra que Γ verifica as hipóteses do Teorema 3.9 e prova que existe uma solução fraca do problema (3.10)-(3.12). A prova está completa. ■

Teorema 3.11. *Suponha que as condições $(\tilde{\mathbf{H}}_2)$ e $(\mathbf{H}_4)$ são verificadas. Suponha ainda que $(\tilde{\mathbf{H}}_3)$ Para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $L_i > 0$ tal que*

$$\|I_i(x) - I_i(y)\| \leq L_i \|x - y\|, \quad \forall (x, y) \in X^2.$$

Se

$$M \sum_{i=1}^{\infty} L_i + \limsup_{|(t,r)| \rightarrow \infty} M \int_0^t m(s) \frac{W(2rg(s))}{rg(s)} ds < 1, \quad (3.22)$$

então existe uma solução fraca do problema (3.10)-(3.12).

Demonstração. Para $u \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$ definimos $\Gamma : (\mathcal{PC})_g^0(X) \rightarrow (\mathcal{PC})([0, \infty) : X)$, onde

$$\Gamma u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s), u(a(s)))ds + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Da prova do Teorema 3.10 sabemos que $\Gamma u \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$ e que $\Gamma : (\mathcal{PC})_g^0(X) \rightarrow (\mathcal{PC})_g^0(X)$ é contínua. Considere a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\Gamma_1 u(t) = T(t)u_0 + \sum_{t_i < t} T(t-t_i)I_i(u(t_i)).$$

Seja $B_r = B_r(0, (\mathcal{PC})_g^0(X))$. Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma B_r \subset B_r$ e $\Gamma_i B_r \subset B_r$, $i = 1, 2$.

De fato, se a nossa afirmação é falsa então para cada $r > 0$ existem $x_r \in B_r$ e $t^r > 0$ tais que $r < \|\Gamma x_r(t^r)\|$. Logo

$$\begin{aligned} r < \frac{\|\Gamma x_r(t^r)\|}{g(t^r)} &\leq \frac{M \|u_0\|}{g(t^r)} + \frac{M}{g(t^r)} \int_0^{t^r} m(s)W(\|x_r(s)\| + \|x_r(a(s))\|)ds \\ &\quad + \frac{M}{g(t^r)} \sum_{t_i < t^r} (L_i \|x_r(t_i)\| + \|I_i(0)\|) \\ &\leq \frac{M \|u_0\|}{g(t^r)} + \frac{M}{g(t^r)} \int_0^{t^r} m(s)W(2rg(s))ds + \frac{Mrg(t_i)}{g(t^r)} \sum_{t_i < t^r} L_i \\ &\quad + \frac{M}{g(t^r)} \sum_{t_i < t^r} \|I_i(0)\|. \end{aligned}$$

Dependendo de o conjunto $U = \{t^r : r > 0\}$ ser limitado ou não, da desigualdade anterior obtemos

$$\begin{cases} 1 \leq M \sum_{i=1}^n L_i, & \text{se } U \text{ é limitado} \\ 1 \leq M \sum_{i=1}^{\infty} L_i + \limsup_{|(t,r)| \rightarrow \infty} M \int_0^t m(s) \frac{W(2rg(s))}{rg(s)} ds, & \text{se } U \text{ não é limitado,} \end{cases}$$

o que é absurdo. Isto prova que existe r_0 tal que $\Gamma B_{r_0} \subset B_{r_0}$. Mais ainda, a mesma estimativa mostra que é possível assumir que $\Gamma_i B_{r_0} \subset B_{r_0}$, $i = 1, 2$.

Usando a prova do Teorema 3.10, vemos que Γ_2 é completamente contínua em B_{r_0} . Além disso, Γ_1 é uma contração em B_{r_0} . De fato, se $x, y \in B_r$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 y(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{M}{g(t)} \sum_{t_i < t} \|L_i\| \|x(t_i) - y(t_i)\| \\ &\leq \frac{M}{g(t)} \sum_{t_i < t} g(t_i) \|L_i\| \|x - y\|_g \end{aligned}$$

e então

$$\|\Gamma_1 x - \Gamma_1 y\|_g \leq M \sum_{i=1}^{\infty} \|L_i\| \|x - y\|_g. \quad (3.23)$$

Segue agora de (3.22) e (3.23) que Γ_1 é uma contração em B_{r_0} .

Das considerações anteriores, deduzimos que Γ é uma função condensante em B_{r_0} . A existência de uma solução fraca do problema (3.10)-(3.12) é agora consequência do Teorema 3.2. A prova está completa. ■

Teorema 3.12. *Suponha que as condições $(\tilde{\mathbf{H}}_2)$ e $(\mathbf{H}_4)$ são verificadas. Assuma também que:*

$(\tilde{\mathbf{H}}'_1)$ *Cada função I_i é um operador linear contínuo;*

$(\mathbf{H}_5)$ *Para cada $s \geq 0$, $f(s, \cdot) = L(s, \cdot) + h(s)$, onde $L(s, \cdot)$ é um operador linear limitado e $h(\cdot)$ é uma função contínua tal que $\frac{1}{g(t)} \int_0^t h(s) ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Se $M \sum_{i=1}^{\infty} L_i + M \sup_{t \geq 0} \frac{1}{g(t)} \int_0^t \|L(s)\| g(s) ds < 1$, então existe uma única solução fraca do problema (3.10)-(3.12).

Demonstração. Seja $\Gamma : (\mathcal{PC})_g^0(X) \rightarrow (\mathcal{PC})([0, \infty) : X)$ a função definida na demonstração do Teorema 3.10, veja (3.15). Sabemos da prova do Teorema 3.10 que Γ é uma função bem definida, contínua e com valores em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Mostramos agora que Γ é uma contração em $(\mathcal{PC})_g^0(X)$. Fixemos $x, y \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$. Se $t \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\|\Gamma x(t) - \Gamma y(t)\|}{g(t)} &\leq \frac{M}{g(t)} \sum_{t_i < t} \|I_i\| \|x(t_i) - y(t_i)\| + \frac{M}{g(t)} \int_0^t \|L(s)\| \|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq \frac{Mg(t_i)}{g(t)} \sum_{t_i < t} \|I_i\| \|x - y\|_g + \|x - y\|_g \frac{M}{g(t)} \int_0^t \|L(s)\| g(s) ds \\ &\leq \left(M \sum_{t_i < t} \|I_i\| + M \int_0^t \|L(s)\| ds \right) \|x - y\|_g \end{aligned}$$

e portanto

$$\|\Gamma x - \Gamma y\|_g \leq \left(M \sum_{i=1}^{\infty} \|I_i\| + \frac{M}{g(t)} \int_0^t \|L(s)\| g(s) ds \right) \|x - y\|_g,$$

o que implica que Γ é uma contração.

Pelo teorema de ponto fixo para contrações, Γ possui um único ponto fixo $x \in (\mathcal{PC})_g^0(X)$. Este ponto fixo é a única solução fraca do problema (3.10)-(3.12). A prova está completa. ■

O resultado seguinte é uma consequência óbvia do teorema anterior.

Corolário 3.13. *Assuma que se verificam as condições $\tilde{\mathbf{H}}'_1, \tilde{\mathbf{H}}_2, \mathbf{H}_4, \mathbf{H}_5$. Se*

$$M \sum_{i=1}^{\infty} L_i + M \int_0^{\infty} \|L(s)\| ds < 1,$$

então existe uma única solução fraca do problema (3.10)-(3.12).

3.3 Um exemplo: A equação do calor com impulsos

Para finalizar este trabalho, consideramos brevemente um problema que estamos chamando de equação do calor com impulsos. Sejam $X = L^2([0, \pi])$, munido da norma usual que denotaremos $\|\cdot\|_2$, e A o operador $Ax = x''$ com domínio

$$D(A) := \{f \in L^2([0, \pi]) : f'' \in L^2([0, \pi]), f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Nestas condições, A é o gerador de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X . Mais ainda, A tem espectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com os autovetores correspondentes $z_n(\xi) := (2/\pi)^{1/2} \sin(n\xi)$ e as seguintes propriedades são válidas:

- (a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X ;
- (b) Se $f \in D(A)$ então $A(f) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle f, z_n \rangle z_n$;
- (c) Para cada $f \in X$, $T(t)f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle f, z_n \rangle z_n$. Mais ainda, segue das expressões anteriores que $\|T(t)\| \leq e^{-t} \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Consideremos agora o problema impulsivo

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\xi, t) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(\xi, t) + F(\xi, t, w(\xi, t), w(\xi, a(t))), \quad (3.24)$$

$$w(0, t) = w(\pi, t) = 0, \quad t \in I, \quad (3.25)$$

$$w(\xi, t_i) = P_i(w(\cdot, t_i))(\xi), \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.26)$$

onde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \pi$ e

(1) A função $F : [0, \pi] \times I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifica as seguintes propriedades:

- (a) $F(\xi, t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua q.t.p. em $(\xi, t) \in [0, \pi] \times I$.
- (b) Para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$, a função $F(\cdot, w_1, w_2) : [0, \pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável.
- (c) Existe uma função integrável e positiva $\eta(\cdot)$, definida sobre $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ tal que

$$|F(\xi, t, w_1, w_2)| \leq \eta(\xi, t)(|w_1| + |w_2|)$$

para todo $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

(2) As funções $P_i : X \rightarrow X$ são completamente contínuas. Assumimos ainda que para cada $r > 0$ existem constantes $\alpha_{i,r} > 0$ tais que $\|P_i(x)\|_2 \leq \alpha_{i,r}$. Exemplos de operadores com estas propriedades podem ser encontrados em Pazy [4].

Seja $f : [0, T] \times X^2 \rightarrow X$ o operador definido por $f(t, x, y)(\xi) = F(\xi, t, x(\xi), y(\xi))$. Nestas condições, para $x, y \in X$, $\|x\|_2, \|y\|_2 \leq r$ temos

$$\begin{aligned} \|f(t, x, y)\|_2 &\leq \left(\int_0^\pi |F(\xi, t, x(\xi), y(\xi))|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^\pi \eta^2(\xi, t) (|x(\xi)| + |y(\xi)|)^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta(\cdot, t)_{0,\pi} (\|x\|_2 + \|y\|_2). \end{aligned}$$

onde $\eta(\cdot, s)_{0,\pi} = \sup_{\theta \in [0, \pi]} \eta(\theta, s)$.

Teorema 3.14. *Suponha que as condições anteriores são satisfeitas. Se*

$$2 \int_0^T \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \liminf_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} \alpha_{i,r} < 1, \quad (3.27)$$

onde $\eta(\cdot, s)_{0,\pi} = \sup_{\theta \in [0, \pi]} \eta(\theta, s)$, então existe uma solução fraca do problema impulsivo (3.24)-(3.26).

Demonstração. Seja $\Gamma : PC \rightarrow PC$ o operador definido em (3.4). Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$, onde $B_r = B_r(0, PC)$. Se a propriedade é falsa, para cada $r > 0$ podemos escolher $x_r \in B_r$ tal que $r < \|\Gamma x_r\|$. Assim

$$r < \|\Gamma x_r\| \leq \|x_0\| + 2r \int_0^t \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \sum_{i=1}^n \alpha_{i,r}$$

e portanto

$$1 \leq 2 \int_0^T \eta(\cdot, s)_{0,\pi} ds + \liminf_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} \alpha_{i,r},$$

o que é absurdo.

As mesmas idéias da demonstração do Teorema 3.5 mostram que Γ é completamente contínuo em B_r . Agora a existência de soluções para (3.24)-(3.26) é consequência do Teorema de ponto fixo de Schauder, veja [4], pp 126. A prova está completa. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Goldstein, Jerome A.. Semigroups of linear operators and applications. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1985.
- [2] Granas A., M. Frigon. A Topological methods in differential equations and inclusions. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences, 472. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1995.
- [3] Liu, James H.. *Nonlinear impulsive evolution equations*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 6 (1999), no. 1, 77–85.
- [4] Martin, Robert H.. Jr. Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1976.
- [5] Pazy, A.. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [6] Rogovchenko, Yuri V.. *Impulsive evolution systems: main results and new trends*. Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems 3 (1997), no. 1, 57–88.
- [7] B. N. Sadovskii. On a fixed point principle. Funct. Anal. Appl. **1** (1967) 74–76.
- [8] Yosida, Kôzaku. Functional analysis. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 123 Academic Press, Inc., New York; Springer-Verlag, Berlin 1965.