Equações diferenciais impulsivas com retardamento: soluções oscilatórias e soluções periódicas

Marta Cilene Gadotti

Orientador: *Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Junho de 2002**

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Estudo sobre Soluções Oscilatórias	9
2.1 Introdução	9
2.2 Um problema impulsivo escalar e não-linear	12
2.3 Alguns resultados para um problema planar	26
3 Equações Diferenciais Diferença Impulsivas	32
3.1 Introdução	32
3.2 Estudo de periodicidade	33
3.3 Exemplos	58
4 Soluções periódicas contra-fluxo	63
4.1 Um caso linear	63
4.2 Estudo de um problema impulsivo	67
Referências Bibliográficas	79

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas

Prof. Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Prof. Dr. Arnaldo Simal do Nascimento

Profa. Dra. Maria Aparecida Bená

À minha querida mãezinha

*“A coragem de lutar
não vem do desejo de
alcançar a vitória, mas
do sentimento de poder
compartilhar alegrias.”*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas pela forma atenciosa e objetiva que conduziu nossa orientação. Pelo incentivo, pela dedicação, paciência e amizade.

À Profa. Dra. Sandra M.S. de Godoy, pelo apoio, sinceridade e amizade.

Aos professores do Departamento de Matemática do ICMC-USP pelo apoio e pela inspiração que nos influenciaram nestes anos.

À todos os amigos, de graduação, de pós-graduação e tantos outros que me animaram e me ajudaram nesses anos.

Às funcionárias da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca pela simpatia, atenção e eficiência.

À minha família pelo carinho, pelo incentivo, pela paciência e pela credibilidade.

Ao Valdir, pela compreensão, pelo apoio e especialmente pelo amor que nos acompanhou nestes dias atarefados.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Abstract

We establish conditions such that a certain non-linear impulsive differential equation has an oscillatory solution. We also investigate the asymptotic behavior of such solutions. The existence of oscillatory solutions to a planar version of the above problem is accomplished.

By adding a self-supporting impulsive condition to a differential-difference equation in the plane, we obtain sufficient conditions for the existence of periodic solutions.

A crucial role in the planar problems considered here is played by a known version of the negative feedback condition of the scalar problems. Such version suggests that all solutions in the future turn in the clock-wise sense around the origin. However we exhibit examples that show the existence of periodic solutions whose orbits turn around the origin in the counter clock wise sense. Such solutions are called backset solutions.

Resumo

Estabelecemos condições para que uma equação diferencial não linear impulsiva possua solução oscilatória. Estudamos o comportamento das soluções $x(t)$ deste problema quando $t \rightarrow \infty$. Alguns resultados sobre a existência de solução oscilatória para o caso de uma equação planar são estabelecidos.

Acrescentando uma condição de impulso de auto-sustentação a uma equação diferencial diferença no plano obtemos condições suficientes para a existência de solução periódica.

Um papel crucial nos problemas planares considerados aqui é desempenhado por uma versão já conhecida da condição de retro-alimentação negativa dos problemas escalares. Esta versão sugere que todas as soluções no futuro giram no sentido horário em torno da origem. Exibimos, entretanto, exemplos que mostram a existência de soluções periódicas, cujas órbitas giram em torno da origem no sentido anti-horário, são as chamadas soluções contra-fluxo.

Introdução

Um sistema impulsivo é uma equação diferencial sujeita a uma condição adicional, que pode ser entendida como uma condição de contorno. Essa condição é que provoca os impulsos, isto é, mudanças bruscas de estado durante o desenvolvimento do processo definido pela equação diferencial. Os impulsos são, na verdade, perturbações de tão curta duração que podem ser considerados instantâneos. Vários fenômenos naturais podem ser descritos pelas equações impulsivas, veja, por exemplo, [6], [7] e [15].

Neste trabalho consideramos equações com retardamento sujeitas a certas condições de impulso. Essas condições trazem algumas dificuldades que não se apresentam no caso ordinário, já que os impulsos representam, em geral, descontinuidades de primeiro tipo dos termos x_t pertencentes ao espaço de fase. Assim, é necessário adaptar resultados clássicos da teoria das equações diferenciais funcionais no espaço de fase $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Também, no estudo da existência de soluções periódicas pela análise de um operador de retorno, os impulsos podem inviabilizar o uso direto dos princípios de ponto fixo mais conhecidos.

Iniciamos este trabalho, com o Capítulo 1, destacando alguns fatos básicos da teoria de sistemas impulsivos e listando os resultados que serão utilizados para desenvolver os capítulos 2, 3 e 4. Definimos as equações impulsivas e apresentamos dois tipos de impulso, aqueles em que os instantes de impulso são previamente

estabelecidos e outros que dependem da solução atingir certos valores críticos.

No Capítulo 2 estudamos a existência e o comportamento assintótico de soluções oscilatórias de um problema impulsivo escalar com retardamento. Neste caso, os instantes de impulso são pré-fixados. É apresentado um estudo para um caso não-linear. No final do capítulo estabelecemos resultados iniciais que garantem a existência de solução oscilatória para um caso planar.

No Capítulo 3, consideramos uma equação diferencial planar impulsiva com retardamento do tipo diferença. A condição de impulso é do tipo auto-sustentação, segundo [15] descrita no Capítulo 1. Obtemos condições para a existência de soluções periódicas utilizando um teorema de ponto fixo. Apresentamos um exemplo e ainda estabelecemos condições para que as soluções periódicas dos problemas estudados sejam do tipo impulsivo.

No Capítulo 4, equações diferenciais do tipo diferença são novamente nosso objeto de estudo. Exibimos exemplos de equações satisfazendo as condições estabelecidas no Capítulo 3, cujas órbitas podem apresentar a interessante propriedade de girar no sentido oposto ao sugerido pela hipótese (H1), contra-partida planar da consagrada condição de retro-alimentação negativa em equações escalares. Denominamos estas soluções como *soluções contra-fluxo*. Neste capítulo exibimos um exemplo linear sem impulsos possuindo soluções periódicas contra-fluxo e definimos uma condição de impulso que garante a existência de soluções periódicas contra-fluxo para uma equação diferencial diferença não-linear.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo trata de listar e esclarecer alguns aspectos básicos sobre a teoria de sistemas impulsivos que serão necessários para a compreensão dos capítulos seguintes. Também traz resultados sobre as equações diferenciais funcionais, já que nosso objetivo é estudar as equações diferenciais impulsivas com retardamento.

Segundo [7], um sistema impulsivo, para o caso ordinário, pode ser representado da seguinte forma:

- (i) Considera-se uma equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

onde $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, satisfaz alguma condição de unicidade para problemas de valores iniciais,

- (ii) subconjuntos $M(t) \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$ e

- (iii) funções $A(t) : M(t) \rightarrow \Omega$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Uma solução desse problema passando pelo ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ coincide com a solução $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ de (1.1) por (t_0, x_0) para $t \in (t_0, t_1]$, onde t_1

é o menor valor de $t > t_0$ com $x(t_1) \in M(t_1)$. A função $A(t_1)$ leva $x(t_1)$ em $x_1 := A(t_1)x(t_1)$. A partir deste instante, a solução coincide com a solução $x(t) = x(t; t_1, x_1)$ de (1.1) por (t_1, x_1) para $t \in (t_1, t_2]$, onde t_2 é o menor valor de $t > t_1$ com $x(t_2) \in M(t_2)$. A função $A(t_2)$ leva $x(t_2)$ em $x_2 := A(t_2)x(t_2)$ e assim sucessivamente.

O sistema impulsivo descrito aqui pode ser denotado por

$$\dot{x} = f(t, x)$$

$$x(t) \in M(t) \Rightarrow x(t+) = A(t)x(t).$$

No caso em que $M(t) = M$ e $A(t) = A : M \rightarrow M$ não dependem de $t \in \mathbb{R}_+$ e a equação é autônoma, o problema impulsivo, segundo Myshkis, [10] e [15], é chamado de sistema impulsivo com condição de auto-sustentação. Nos capítulos 3 e 4 vamos tratar especialmente deste tipo de impulso.

Podemos observar que uma solução de um sistema diferencial impulsivo pode ser:

a) uma função contínua, se a curva integral $\{(t, x) \mid t \geq t_0, x = x(t)\}$ não interceptar o conjunto $M(t)$ ou se atingir nos pontos fixos do operador $A(t)$;

b) uma função contínua por partes tendo um número finito de descontinuidades de primeiro tipo se a curva encontrar $M(t)$ em um número finito de pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$;

c) uma função contínua por partes tendo um número contável de descontinuidades de primeiro tipo se a curva encontrar o conjunto $M(t)$ em um número contável de pontos que não são pontos fixos do operador $A(t)$.

Os instantes t_k nos quais P_t atinge $M(t)$ são chamados **momentos de im-**

pulso.

Em todo trabalho vamos utilizar a seguinte notação:

$$Q_1 := \{(x_1, x_2); x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$Q_2 := \{(x_1, x_2); x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\},$$

$$Q_3 := \{(x_1, x_2); x_1 \leq 0, x_2 \leq 0\},$$

$$Q_4 := \{(x_1, x_2); x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Para estabelecermos resultados sobre a existência de solução periódica, se faz necessário alguns fatos e definições da teoria de equações diferenciais funcionais e resultados sobre a existência de ponto fixo que citaremos a seguir e que podem ser encontrados em [4].

Definição 1.0.1 *Sejam X um espaço de Banach, U um subconjunto de X e x um ponto de U . Dada uma aplicação $A : U \setminus \{x\} \rightarrow X$, o ponto $x \in U$ é dito um **ponto ejetivo de A** se existir uma vizinhança aberta $G \subseteq X$ de x tal que para todo $y \in G \cap U$, $y \neq x$, existe um inteiro $m = m(y)$ tal que $A^m y \notin G \cap U$.*

Teorema 1.0.1 *Sejam X um espaço de Banach, $K \subset X$ um conjunto fechado, limitado, convexo, de dimensão infinita, $A : K \setminus \{x_0\} \rightarrow K$ uma aplicação completamente contínua e $x_0 \in K$ um ponto ejetivo de A , então existe um ponto fixo de A em $K \setminus \{x_0\}$.*

Seja $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$ o espaço das funções contínuas definidas em $[-r, 0]$, $r > 0$, com imagem em $\mathbb{R}^2$ munido da norma do sup. Consideremos as equações

$$\dot{x}(t) = Lx_t + f(x_t) \quad (1.2)$$

e

$$\dot{y}(t) = Ly_t \quad (1.3)$$

onde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear contínua, $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ é completamente contínua, continuamente diferenciável, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Existe uma matriz 2×2 , $\eta(\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$, cujos elementos são de variação limitada e satisfaz as condições: $\eta(0) = 0$, η é contínua à esquerda em $(-r, 0)$, tal que

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 d\eta(\theta)\phi(\theta), \quad \phi \in C.$$

Denotemos por $x_t(\cdot; \phi)$ e $y_t(\cdot; \phi)$ as soluções de (1.2) e (1.3) respectivamente, com a condição inicial $\phi \in C$.

Seja $T(t)$, $t \geq 0$ a aplicação solução de (1.3), isto é,

$$T(t)\phi = y_t(\cdot; \phi), \quad \phi \in C.$$

Para qualquer autovalor λ de (1.3), ou seja, λ satisfaz

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} d\eta(\theta),$$

o espaço C pode ser decomposto por

$$C = P_\lambda \oplus Q_\lambda,$$

onde P_λ e Q_λ são invariantes pelo operador $T(t)$, $t \geq 0$. O auto-espaço P_λ tem dimensão finita, veja capítulo 7 de [4].

Se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, então $P_\lambda = N(\lambda I - A)$ e $Q_\lambda = R(\lambda I - A)$. Seja Π_λ a projeção de C em P_λ . Se u é uma solução não trivial de $\Delta(\lambda)u = 0$ e o vetor v é uma solução não trivial de $v\Delta(\lambda) = 0$, então as funções $\rho(t) = e^{\lambda t}u$, $t \in [-r, 0]$ e $\sigma(s) = ve^{-\lambda s}$, $s \in [0, r]$ geram $N(\lambda I - A)$ e $N(\lambda I - A^*)$, respectivamente, onde A^* é o adjunto de A . Para $\phi \in C$, $\phi = \phi^{P_\lambda} + \phi^{Q_\lambda}$, a componente ϕ^{P_λ} é dada por

$$\Pi_\lambda \phi = \phi^{P_\lambda} = \langle \sigma, \phi \rangle \rho,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a forma bilinear definida por: se $C^* = C([0, r], \mathbb{R}^{2*})$, onde $\mathbb{R}^{2*}$ é o plano dos vetores linhas, para $\psi \in C^*$ e $\phi \in C$

$$\langle \psi, \phi \rangle = \psi(0) \cdot \phi(0) - \int_{-r}^0 \int_{-r}^\theta \psi(\theta - \varepsilon) [d\eta(\varepsilon)] \phi(\theta) d\theta \quad (1.4)$$

lembrando que “ $\cdot$ ” representa o produto escalar de $\mathbb{R}^2$.

Como os impulsos representam, em geral, descontinuidades de primeiro tipo dos termos x_t , precisaremos de um espaço mais geral que $C([a, b], \mathbb{R}^2)$. Nos problemas propostos no Capítulo 4, por exemplo, consideraremos o espaço de fases definido por $G = G([a, b], \mathbb{R}^2)$ que é o espaço das funções regradas. Uma introdução sobre as propriedades desse espaço pode ser encontrada em [5]. Alguns fatos básicos apresentaremos aqui.

Definição 1.0.2 *Seja X um espaço de Banach e $f : [a, b] \rightarrow X$. Dizemos que f é uma **função regradada**, $f \in G([a, b], X)$, se tem somente descontinuidades de primeiro tipo, isto é, para todo $t \in [a, b)$ existe $f(t+)$ e para todo $t \in (a, b]$, existe $f(t-)$.*

Proposição 1.0.1 $f : [a, b] \rightarrow X$ é uma função regrada se, e somente se, f é o limite uniforme de funções escadas.

Lema 1.0.1 Se $f \in G([a, b], X)$ então o conjunto de descontinuidades de f é enumerável e $C([a, b], X) \subset G([a, b], X)$.

Como o limite uniforme de funções regradas é uma função regrada, considerando $G([a, b], X)$ com a norma

$$\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} \|f(t)\|,$$

temos que este espaço é de Banach.

Capítulo 2

Estudo sobre Soluções Oscilatórias

2.1 Introdução

Nosso objetivo, neste capítulo, é apresentar resultados sobre soluções oscilatórias e propriedades assintóticas de soluções de uma equação diferencial impulsiva com retardamento.

Inicialmente, vamos considerar o problema sem impulso. Em [8] e [9], por exemplo, são estabelecidos resultados sobre oscilação e atratividade global para uma equação escalar não linear da forma

$$x'(t) = -p(t)f(x(t - \tau)), \quad (2.1)$$

onde τ é uma constante positiva e $p : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com $xf(x) > 0$ se $x \neq 0$.

Em [3] e [14], resultados sobre oscilação e comportamento assintótico são estabelecidos quando uma condição de impulso é acrescentada à equação diferencial com retardamento:

$$\dot{x}(t) = - \sum_{i=1}^n p_i(t)x(t - \tau_i), \quad t \neq t_k, \quad (2.2)$$

a condição de impulso é dada por

$$\Delta x(t_k) = x(t_k+) - x(t_k) = b_k x(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

onde $p_i(t) \in C([0, \infty); \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$, b_k são constantes, $k = 1, 2, \dots$, ϕ é uma dada função inicial e os instantes de impulso satisfazem:

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty.$$

Na mesma linha de investigação dos trabalhos citados acima, vamos apresentar, na seção 2.2, um estudo sobre soluções oscilatórias para a equação diferencial não-linear (2.1) sujeita à condição de impulso (2.3). Queremos encontrar condições suficientes para que soluções oscilatórias e não-oscilatórias tendam a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Para isto se torna necessário introduzir algumas definições que estão descritas em [14].

Sejam $\sigma \geq 0$ e PC_σ o conjunto das funções $\phi : [\sigma - \tau_n, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ que são contínuas no conjunto $[\sigma - \tau_n, \sigma] \setminus \{t_k, k = 1, 2, \dots\}$, podendo ter descontinuidades de primeiro tipo nos pontos t_k situados no intervalo $(\sigma - \tau_n, \sigma]$ e sendo contínuas à esquerda.

Definição 2.1.1 Para $\sigma \geq 0$ e $\phi \in PC_\sigma$, uma função x é solução de (2.2) e (2.3) satisfazendo a condição de valor inicial

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [\sigma - \tau_n, \sigma], \quad (2.4)$$

no intervalo $[\sigma, a)$, se $x : [\sigma - \tau_n, a) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (2.4) e

A) para $t \in (\sigma, a)$, $t \neq t_k$, $t \neq t_k + \tau_i$, $x(t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz (2.2);

B) para $t_k \in [\sigma, a)$, $x(t_k^+), x(t_k^-)$ existem e $x(t_k^-) = x(t_k)$ e satisfaz (2.3);

C) para $t \in (\sigma, a)$, $t \neq t_k$, $t = t_k + \tau_i$, $x(t)$ é contínua e $x'(t^+), x'(t^-)$ existem.

A existência e a unicidade de solução para o problema (2.2), (2.3) e (2.4) são garantidas pelo Lema 1 de [14].

Definição 2.1.2 Uma solução de (2.2) e (2.3) é chamada **não oscilatória** se é positiva no futuro ou negativa no futuro. Caso contrário é chamada **oscilatória**.

Definição 2.1.3 A solução nula de (2.2) e (2.3) é:

a) **estável**, se para qualquer $\varepsilon > 0, \sigma \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma) > 0$ tal que $\phi \in PC_\sigma$ e $\|\phi\| < \delta$ implica $\|x(t)\| < \varepsilon$ para $t \geq \sigma$, onde $x(t) = x(t, \sigma, \phi)$ é a solução do PVI (2.2), (2.3) e (2.4);

b) **assintoticamente estável** se for estável e para qualquer solução de (2.2) e (2.3), temos $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Na seção 2.3, consideramos um problema planar correspondente ao escalar, estudado na seção 2.2, dado por

$$\dot{x}(t) = p(t)F(x(t - \tau)), \quad t \neq t_k,$$

$$\Delta(x(t_k)) = b_k x(t_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ é uma função de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $\tau > 0$, constante, $p : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, b_k constantes, $k = 1, 2, \dots$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$, satisfazendo $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$.

Alguns resultados sobre soluções oscilatórias são estabelecidos.

2.2 Um problema impulsivo escalar e não-linear

Em [9] o comportamento de soluções da equação diferencial não-linear e não-autônoma com retardamento

$$x'(t) = -p(t)f(x(t - \tau)), \quad (2.5)$$

onde $\tau > 0$, $p : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com a propriedade

$$xf(x) > 0, \quad \text{se } x \neq 0,$$

é estudado. Vamos inicialmente estabelecer um resultado para a equação (2.5), que generaliza o Lema 2.1 de [9]. Vamos tomar as soluções de (2.5) com a condição inicial dada por

$$x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0,$$

onde ϕ é uma função contínua. Neste caso é fácil ver que existe solução de (2.5) definida no futuro.

Lema 2.2.1 *Se*

$$\int_0^\infty p(s)ds = \infty \quad (2.6)$$

então, toda solução não-oscilatória de (2.5) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução não-oscilatória de (2.5). Então existe um instante t^* tal que $x(t)$ tem sinal constante para qualquer $t \geq t^* - \tau$. Vamos considerar $x(t) > 0$ para $t \geq t^* - \tau$, o caso em que $x(t) < 0$ é análogo. Assim,

$x'(t) \leq 0$ para todo $t \geq t^*$, o que implica $x(t)$ ser não-crescente em $[t^*, \infty)$ e, portanto, deve existir $\alpha \geq 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \alpha$. Mostremos que $\alpha = 0$.

De fato, se $\alpha > 0$, então para qualquer $t > t^* + \tau$, $x(t) \geq \alpha$. Seja $\beta = x(t^*) \geq \alpha > 0$, portanto, para qualquer $t \in [t^* + \tau, \infty)$, $x(t - \tau) \in [\alpha, \beta]$ e pelas hipóteses sobre a f , deve existir $\sigma > 0$, tal que $\sigma = \min_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) > 0$.

Logo, para $t \geq t^* + \tau$, $x'(t) \leq -p(t)\sigma$. Integrando essa desigualdade de $t^* + \tau$ a t , obtemos

$$x(t) - x(t^* + \tau) \leq -\sigma \int_{t^* + \tau}^t p(s) ds.$$

Fazendo $t \rightarrow \infty$ na desigualdade acima, chegamos a uma contradição, já que o lado esquerdo da desigualdade tende para um limite finito e o lado direito para $-\infty$. ■

O Lema 2.2.1 é mais geral que o Lema 2.1 de [9], pois não exigimos aqui que f seja não-decrescente e nem que $|f(x)| < |x|$ se $x \neq 0$. Para concluir que as soluções de (2.5) tendem a zero quando $t \rightarrow \infty$, citaremos o teorema abaixo que pode ser encontrado em [9].

Teorema 2.2.1 *Se f é uma dada função contínua não-decrescente que satisfaz*

$$|f(x)| < |x| \quad \text{se } x \neq 0. \quad (2.7)$$

p satisfaz (2.6) e, para t suficientemente grande satisfaz

$$\int_{t-\tau}^t p(s) ds \leq \frac{3}{2}. \quad (2.8)$$

Então, toda solução de (2.5) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Podemos afirmar que em vista das suposições do resultado acima a solução

nula de (2.5) é globalmente assintoticamente estável.

Consideremos agora o problema dado por

$$x'(t) = -p(t)f(x(t - \tau)), \quad t \neq t_k, \quad (2.9)$$

com a condição de impulso

$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k) = b_k x(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

onde $\tau > 0$, b_k , $k = 1, 2, \dots$, são constantes, os instantes de impulso são pré-fixados e satisfazem $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. As hipóteses sobre f e p são as mesmas estabelecidas para (2.5).

Seja

$PC = \{\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ tem um número finito de descontinuidades que são de primeiro tipo, } \phi \text{ é contínua à esquerda em cada ponto de descontinuidade}\}$

A definição de solução e de solução oscilatória para este problema são similares às definições mencionadas na seção 2.1.

Observação 2.2.1 *É evidente que para certos problemas do tipo (2.9) e (2.10) existem soluções não-oscilatórias. Por exemplo, se considerarmos $p(t) \equiv 1$, $t_k = k$, $b_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$ e f limitada, digamos $|f(x)| \leq l$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $l > 0$, e a condição inicial $\phi \equiv 2l$. É fácil ver que este problema dá origem a uma solução positiva e, portanto, não-oscilatória.*

Lema 2.2.2 *Suponhamos que*

$$t_k - t_{k-1} > \tau > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

e

$$|f(x)| \geq \lambda|x|, \quad \text{para algum } \lambda > 0.$$

Se

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{1 + b_i} \int_{t_i}^{t_i + \tau} p(s) ds > 1. \quad (2.12)$$

Então, toda solução de (2.9) e (2.10) é oscilatória.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma solução $x(t)$ de (2.9) e (2.10) não-oscilatória. Sem perda de generalidade, vamos supor que $x(t) > 0$, para todo $t \geq t^*$, para um certo t^* . Assim, $x'(t) \leq 0$ para $t \neq t_k$, $t \geq t^* + \tau$. Integrando (2.9) de t_i a $t_i + \tau$, $t_i \geq t_l$, onde $t_l = \min\{t_k; t_k > t^* + 2\tau\}$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= x(t_i + \tau) - x(t_i^+) + \int_{t_i}^{t_i + \tau} p(s)f(x(s - \tau)) ds \\ &\geq x(t_i + \tau) - x(t_i^+) + \lambda \int_{t_i}^{t_i + \tau} p(s)x(s - \tau) ds \\ &\geq x(t_i + \tau) - x(t_i^+) + \lambda x(t_i) \int_{t_i}^{t_i + \tau} p(s) ds \end{aligned}$$

a última desigualdade segue do fato de $x(t)$ ser não-crescente nos intervalos da forma (t_i, t_{i+1}) , com $i = l, l + 1, \dots$. Utilizando (2.10), temos

$$x(t_i + \tau) + x(t_i^+) \left[\frac{\lambda}{1 + b_i} \int_{t_i}^{t_i + \tau} p(s) ds - 1 \right] \leq 0,$$

isso é uma contradição, já que estamos assumindo $x(t) > 0$ e (2.12). ■

Agora queremos estabelecer um resultado como o Teorema 2.2.1 para o caso impulsivo. Para isto serão necessários alguns lemas.

Lema 2.2.3 *Suponhamos que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty, \quad (2.13)$$

e que existem constantes positivas A, Q_1, Q_2 e $r \in [0, \tau]$ tais que

$$|f(x)| \leq A|x|, \quad A(Q_1 + Q_2) < 1, \quad (2.14)$$

para t suficientemente estão satisfeitas as seguintes condições

$$\int_t^{t+\tau} p(s)ds \leq Q_1, \quad \int_{t-\tau}^{t-r} p(s+\tau)ds \leq Q_2, \quad p(t+\tau) \neq 0. \quad (2.15)$$

Então, toda solução oscilatória de (2.9) e (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução oscilatória de (2.9) e (2.10) e seja

$$\nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} |x(t)|.$$

Primeiramente vamos provar que $\nu < \infty$. Para isto, suponhamos, por contradição, que $\nu = \infty$.

Seja N um inteiro positivo, suficientemente grande tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} |b_k| < \frac{1 - A(Q_1 + Q_2)}{2} \quad (2.16)$$

e que as hipóteses (2.15) sobre a função $p(t)$ estejam satisfeitas para todo $t \geq t_N + \tau$ e que também valha

$$\sup_{t_N + \tau \leq s \leq t} |x(s)| = \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)|, \quad t \geq t_N + \tau.$$

Observamos que se essa igualdade não ocorresse para nenhum N , então para dado $t > t_N$, teríamos

$$\sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)| = \sup_{t_N \leq s \leq t_N + \tau} |x(s)|, \quad \forall N$$

e isso contradiz o fato de $\nu = \infty$.

Agora, vamos definir a seguinte função

$$y(t) = x(t) - \int_{t-\tau}^{t-r} p(s+\tau)f(x(s))ds - \sum_{t_N \leq t_k < t} b_k x(t_k). \quad (2.17)$$

Então, para $t \neq t_k$, $t \neq t_k + \tau$, $k = 1, 2, \dots$, temos

$$y'(t) = -p(t - r + \tau)f(x(t - r)), \quad (2.18)$$

e assim, para $t \geq t_N + \tau$, usando as hipóteses (2.14) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} |y(t)| &\geq |x(t)| - A \int_{t-\tau}^{t-r} p(s + \tau) |x(s)| ds - \sum_{t_N \leq t_k < t} |b_k x(t_k)| \\ &\geq |x(t)| - A \sup_{t-\tau \leq s \leq t-r} |x(s)| \int_{t-\tau}^{t-r} p(s + \tau) ds - \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)| \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \\ &\geq |x(t)| - A \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)| Q_2 - \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)| \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \\ &= |x(t)| - \left(A Q_2 + \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \right) \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)|, \end{aligned}$$

logo,

$$\sup_{t_N + \tau \leq s \leq t} |y(s)| \geq \left(1 - A Q_2 - \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \right) \sup_{t_N \leq s \leq t} |x(s)|. \quad (2.19)$$

Portanto, $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty$.

Como $x(t)$ é oscilatória e para $k \geq N$ vale

$$x(t_k^+)x(t_k) = x^2(t_k)[1 + b_k] \geq 0,$$

já que $b_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então $x(t)$ deve ter zeros arbitrariamente grandes. De (2.18) e da hipótese $p(t + \tau) \neq 0$ para $t \geq t_N + \tau$ temos que $y'(t)$ também oscila e possui zeros arbitrariamente grandes. Logo, existe $\xi > t_N + 2\tau$ tal que

$$|y(\xi)| = \sup_{t_N + \tau \leq s \leq \xi} |y(s)| \quad \text{e} \quad y'(\xi) = 0 = -p(\xi - r + \tau)f(x(\xi - r)).$$

Por propriedade da função f , temos $x(\xi - r) = 0$. Integrando (2.18) de $\xi - r$ a ξ segue que

$$y(\xi) - y(\xi - r) = - \int_{\xi-r}^{\xi} p(s - r + \tau) f(x(s - r)) ds,$$

usando a definição (2.17) de y , temos

$$\begin{aligned} y(\xi) &= x(\xi - r) - \int_{\xi-r-\tau}^{\xi-2r} p(s + \tau) f(x(s)) ds \\ &\quad - \sum_{t_N \leq t_k < \xi-r} b_k x(t_k) - \int_{\xi-2r}^{\xi-r} p(s + \tau) f(x(s)) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$y(\xi) = - \int_{\xi-r-\tau}^{\xi-r} p(s + \tau) f(x(s)) ds - \sum_{t_N \leq t_k < \xi-r} b_k x(t_k).$$

Por (2.14) e (2.15), podemos verificar que

$$|y(\xi)| \leq A \int_{\xi-r-\tau}^{\xi-r} p(s + \tau) |x(s)| ds + \sum_{t_N \leq t_k < \xi-r} |b_k x(t_k)|,$$

donde

$$|y(\xi)| \leq \left(A Q_1 + \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \right) \sup_{t_N \leq s \leq \xi} |x(s)|. \quad (2.20)$$

De (2.19) e (2.20) segue que

$$\left(1 - A(Q_1 + Q_2) - 2 \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| \right) \sup_{t_N \leq s \leq \xi} |x(s)| \leq 0$$

o que contradiz (2.16) e portanto $\nu < \infty$.

Mostremos agora que $\nu = 0$. Para isto vamos definir a função

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t-\tau} p(s + \tau) f(x(s)) ds + \sum_{t_k \geq t} b_k x(t_k). \quad (2.21)$$

É fácil ver que $z(t)$ é uma aplicação limitada, já que $\nu < \infty$. Para t suficientemente grande,

$$|z(t)| \geq |x(t)| - AQ_2 \sup_{t-\tau \leq s \leq t} |x(s)| - \left| \sum_{t_k \geq t} b_k x(t_k) \right|,$$

donde

$$\rho = \limsup_{t \rightarrow \infty} |z(t)| \geq (1 - AQ_2)\nu. \quad (2.22)$$

Por outro lado, como $z'(t) = -p(t - r + \tau)f(x(t - r))$, para $t \neq t_k$ e $t \neq t_k + \tau$, temos que $z'(t)$ oscila e tem zeros arbitrariamente grandes, logo existe uma sequência (ξ_m) tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} |z(\xi_m)| = \rho, \quad z'(\xi_m) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Integrando $z'(t)$ de $\xi_m - r$ a ξ_m , usando a definição (2.21) e como $x(\xi_m - r) = 0$, obtemos

$$z(\xi_m) = - \int_{\xi_m - r - \tau}^{\xi_m - r} p(s + \tau)f(x(s)) ds + \sum_{t_k \geq \xi_m - r} b_k x(t_k)$$

portanto

$$|z(\xi_m)| \leq AQ_1 \sup_{\xi_m - 2\tau \leq s \leq \xi_m} |x(s)| + \left| \sum_{t_k \geq \xi_m - r} b_k x(t_k) \right|$$

o que implica

$$\rho \leq AQ_1 \nu. \quad (2.23)$$

Somando as desigualdades (2.22) e (2.23), obtemos

$$[1 - A(Q_1 + Q_2)]\nu \leq 0.$$

Segue de (2.14) que $\nu = 0$ o que conclui a prova. ■

Em vista dos lemas 2.2.2 e 2.2.3, podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.2.2 *Se (2.11) e (2.13) estiverem satisfeitas e se existirem constantes positivas, A , Q_1 , Q_2 , λ e $r \in [0, \tau]$, tais que*

$$A(Q_1 + Q_2) < 1, \quad \lambda|x| \leq |f(x)| \leq A|x|,$$

satisfazendo (2.12) e (2.15), então toda solução de (2.9) e (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Como mencionamos na introdução, o resultado obtido acima é uma extensão à equação não linear (2.9) de resultados de [3], [13] e [14], que se restringem a equações lineares. Neste caso o problema (2.9) e (2.10) apresenta somente soluções oscilatórias. Veremos a seguir que podemos obter a mesma conclusão deste teorema impondo algumas hipóteses diferentes na função f , na função p e nos impulsos quando nos concentramos também no estudo das soluções não-oscilatórias de (2.9) e (2.10).

Lema 2.2.4 *Suponhamos que*

$$b_k^+ \rightarrow 0, \tag{2.24}$$

onde $b_k^+ = \max\{b_k, 0\}$,

$$t_k - t_{k-1} \geq \tau > 0, \tag{2.25}$$

para k suficientemente grande e

$$p(t) \geq c, \tag{2.26}$$

para t suficientemente grande, onde c é uma constante positiva. Seja f não-decrescente, satisfazendo

$$|f(x)| > \lambda|x|, \quad x \neq 0, \quad \lambda > 0 \quad \text{constante.} \tag{2.27}$$

Então, toda solução não-oscilatória de (2.9) e (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução não-oscilatória de (2.9) e (2.10). Então existe um $t^* \geq \tau$ tal que $x(t)$ tem sinal constante para todo $t \geq t^* - \tau$. Vamos supor, sem perda de generalidade que $x(t) > 0, \forall t \geq t^* - \tau$. Isso implica que

$$x'(t) = -p(t)f(x(t - \tau)) < 0, \quad \forall t > t^*, \quad t \neq t_k.$$

Mostremos que, para k suficientemente grande, $x(t_k^+) \geq x(t_{k+1}^+)$, ou seja, além da solução $x(t)$ ser decrescente nos intervalos abertos (t_k, t_{k+1}) , para k suficientemente grande, também a sequência $(x(t_k^+))$ será não crescente para k suficientemente grande. Basta pensarmos em $b_k > 0$. De fato, usando (2.10) temos que

$$x(t_k) = \frac{1}{b_k + 1} x(t_k^-),$$

e para k suficientemente grande, vale

$$x(t_k) > \frac{1}{b_k + 1} x(t_{k+1}).$$

É claro que $x(t_{k+1}) > \frac{1}{b_{k+1} + 1} x(t_{k+1})$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Portanto

$$x(t) > \frac{1}{b_k + 1} x(t_{k+1}), \quad \text{para } t \in [t_k - \tau, t_{k+1}].$$

Vamos agora comparar o quanto a função $x(t)$ decresce em $(t_k, t_{k+1}]$ em relação ao quanto ela salta em t_{k+1} . Usando (2.25), (2.26), (2.27) e a desigualdade acima, para k suficientemente grande temos

$$|x'(t)| > c\lambda |x(t - \tau)| \geq c\lambda \frac{1}{b_k + 1} x(t_{k+1}), \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

portanto

$$|x'(t)|(t_{k+1} - t_k) > c\lambda \frac{1}{b_k + 1} x(t_{k+1})\tau \geq b_{k+1} x(t_{k+1}) = \Delta x(t_{k+1}),$$

o que conclui a prova da desigualdade $x(t_k^+) \geq x(t_{k+1}^+)$, e implica que $x(t)$ é limitada, isto é, existe $M > 0$, tal que $x(t) \leq M$ para todo $t \geq 0$.

Mostremos que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Para isto vamos provar que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t).$$

De fato, como a sequência $x(t_k^-)$ é decrescente e limitada para k suficientemente grande, então existe $\alpha < \infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k^+) = \alpha$. Pelo comportamento da solução, temos que $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t_k^+)$.

Seja $\beta = \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \alpha$. Suponhamos, por absurdo, que $0 \leq \beta < \alpha$. Tomando $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta}{3} > 0$, existe uma sequência (λ_j) crescente, tal que $\lambda_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e existe K_1 satisfazendo $x(\lambda_j) \in V_\varepsilon(\beta)$, para todo $j \geq K_1$, onde $V_\varepsilon(\beta)$ é o intervalo aberto $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$.

Vamos construir a subsequência (t_{k_j}) , tomando t_{k_j} como o primeiro instante de impulso tal que $t_{k_j} \geq \lambda_j$. Assim

$$t_{k_1} \leq t_{k_2} \leq \cdots \leq t_{k_j} \leq \cdots, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} t_{k_j} = \infty.$$

Portanto $x(t_{k_j}) < x(\lambda_j) < \beta + \varepsilon < \alpha - \varepsilon$. Decorre de (2.24) que

$$x(t_{k_j}^+) = [1 + b_{k_j}]x(t_{k_j}) < \alpha - \varepsilon,$$

para j suficientemente grande, o que é absurdo e, portanto, existe o $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \alpha$.

Mostremos que $\alpha = 0$. Como $x(t)$ é limitada e vale (2.24), segue que $\Delta x(t_k) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Suponhamos, novamente por absurdo, que $\alpha > 0$, então para k suficientemente grande a derivada de $x(t)$ satisfaz

$$|x'(t)| > c\lambda|x(t - \tau)| > c\lambda\alpha > 0.$$

Em virtude de (2.25) isso leva a uma contradição, o que conclui a prova. ■

Juntando as informações dos lemas 2.2.3 e 2.2.4 temos imediatamente o seguinte teorema.

Teorema 2.2.3 *Seja f uma função não-decrescente e suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

- (i) (2.13);
- (ii) para k suficientemente grande, temos (2.25);
- (iii) existem constantes positivas λ , A , Q_1 , Q_2 , c e $r \in [0, \tau]$ tais que

$$A(Q_1 + Q_2) < 1, \quad \lambda|x| < |f(x)| \leq A|x|, \quad x \neq 0$$

e para t suficientemente grande,

$$\int_t^{t+\tau} p(s)ds \leq Q_1, \quad \int_{t-\tau}^{t-r} p(s+\tau)ds \leq Q_2;$$

$$p(t) \geq c$$

Então, toda solução de (2.9) e (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Seguindo agora a linha de investigação de [14] é possível estabelecermos os resultados abaixo.

Lema 2.2.5 *Suponhamos que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^- < \infty,$$

onde $b_k^- = \max\{b_k, 0\}$ e que existem constantes positivas A, B, C, D, α e $r \in [0, \tau]$ tais que $D < A$, $A\alpha < 1$, $B(\tau - r) \leq \alpha$,

$$D|x| < |f(x)| < A|x|, \quad \text{se } x \neq 0,$$

e para t suficientemente grande valem

$$\int_{t-\tau}^{t-r} p(s+\tau) ds \leq \alpha, \quad p(t+\tau) \geq B, \quad p(t) \leq C.$$

Então, toda solução não-oscilatória de (2.9) e (2.10) tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração: Tomemos um inteiro positivo N tal que as hipóteses sobre a função p do lema estejam satisfeitas para todo $t \geq t_N$ e

$$\sum_{k=N}^{\infty} b_k^+ < 1 - \alpha A. \quad (2.28)$$

Seja $x(t)$ uma solução não-oscilatória de (2.9) e (2.10) e suponhamos, sem perda de generalidade, que $x(t) > 0$ para $t \geq t_N$. Vamos considerar a seguinte função

$$y(t) = x(t) - \int_{t-\tau}^{t-r} p(s+\tau) f(x(s)) ds - \sum_{t_N \leq t_k < t} b_k^- x(t_k). \quad (2.29)$$

Primeiramente vamos provar que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) < \infty$.

Para $t \neq t_k$, $t \neq t_k + \tau$, $k = 1, 2, \dots$, temos

$$y'(t) = -p(t-r+\tau) f(x(t-r)). \quad (2.30)$$

Por (2.29), podemos verificar que

$$y(t_k^+) - y(t_k) = x(t_k^+) - b_k^+ x(t_k) - x(t_k) - x(t_k)[b_k - b_k^+] \leq 0, \quad k = N, N+1, \dots$$

juntamente com o fato que $y'(t) \leq 0$ para $t \geq t_N + r$, temos que y é não-crescente em $[t_N + r, \infty)$.

Seja $L = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$. Provemos que $L \in \mathbb{R}$. Se $L = -\infty$, então, como y é não-crescente, por (2.29) $x(t)$ deve ser ilimitado. Assim, é possível escolher $t^* > t_N + \tau$ tal que $y(t^*) < 0$ e $x(t^*) = \max\{x(t) : t_N \leq t \leq t^*\} > 0$.

Logo, pelas hipóteses do lema, juntamente com a desigualdade (2.28) temos

$$\begin{aligned}
0 > y(t^*) &\geq x(t^*) - \int_{t^*-\tau}^{t^*-\tau} p(s+\tau) f(x(s)) ds - \sum_{t_N \leq t_k < t^*} b_k^+ x(t_k) \\
&\geq x(t^*) - Ax(t^*) \int_{t^*-\tau}^{t^*-\tau} p(s+\tau) ds - x(t^*) \sum_{k=N}^{\infty} b_k^+ \\
&\geq \left[1 - A\alpha - \sum_{k=N}^{\infty} b_k^+ \right] x(t^*) > 0. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto $L \in \mathbb{R}$.

Mostremos agora que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. De fato, como

$$y'(t) \leq -BDx(t-\tau), \quad t \geq t_N, \quad t \neq t_k, \quad t \neq t_k + \tau,$$

podemos integrar de t_N a t ambos os membros dessa desigualdade

$$\begin{aligned}
BD \int_{t_N}^t x(s-\tau) ds &\leq - \int_{t_N}^t y'(s) ds = y(t_N^-) + \sum_{t_N < t_k < t} [y(t_k^+) - y(t_k)] - y(t) \\
&\leq y(t_N^+) - y(t) \leq y(t_N^+) - L, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

então $\int_{t_N}^{\infty} x(s-\tau) ds < \infty$, e portanto $x \in L^1([t_N, \infty), \mathbb{R})$. Assim, de (2.29)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = L + \sum_{k=N}^{\infty} b_k^+ x(t_k) \in \mathbb{R},$$

já que $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^{t-\tau} p(s+\tau) f(x(s)) ds = 0$.

Mais ainda, esse limite deve ser 0, pois caso contrário teríamos que $x \notin L^1$. ■

Concluindo esta seção, podemos enunciar o seguinte teorema que decorre dos lemas 2.2.3 e 2.2.5.

Teorema 2.2.4 *Suponhamos que (2.13) esteja satisfeita e que existam constantes positivas α , A , B , C , D e $r \in [0, \tau]$ tais que*

$$D|x| < |f(x)| < A|x|, \quad A(C\tau + \alpha) < 1$$

e para t suficientemente grande valem

$$\int_{t-\tau}^{t-\tau} p(s+\tau) ds \leq \alpha, \quad p(t+\tau) \geq B, \quad p(t) \leq C.$$

Então, toda solução de (2.9) e (2.10) tende para zero quando $t \rightarrow \infty$.

2.3 Alguns resultados para um problema planar

Nesta seção, vamos buscar condições para que um certo problema planar apresente solução oscilatória. Vamos tratar inicialmente do caso sem impulso.

Consideremos a equação diferencial planar com retardamento

$$\dot{x}(t) = p(t)F(x(t-\tau)), \quad (2.33)$$

onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ é uma função de classe C^3 de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, $\tau > 0$ constante e $p : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua.

Vamos acrescentar a F as seguintes hipóteses

$$x_2 F_1(x_1, x_2) > 0, \quad \text{se } x_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad x_1 F_2(x_1, x_2) < 0, \quad \text{se } x_1 \neq 0. \quad (2.34)$$

Problemas semelhantes a este já foram estudados em [1] e [2]. Neste caso o espaço de fase considerado é $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^2)$ com a norma do supremo.

Definição 2.3.1 *Uma solução de (2.33) é **oscilatória** se pelo menos uma componente não tem sinal constante no futuro. Caso contrário, a solução é chamada **não-oscilatória**.*

Lema 2.3.1 *Se*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} p(t) > 0,$$

e se, para um dado $M > 0$, existem constantes positivas $\delta(M)$ e $\eta(M)$ tais que

$$\liminf_{|x_1| \rightarrow \infty} |F_2(x_1, x_2)| \geq \delta(M), \quad \text{se } |x_2| \leq M, \quad (2.35)$$

$$\liminf_{|x_2| \rightarrow \infty} |F_1(x_1, x_2)| \geq \eta(M), \quad \text{se } |x_1| \leq M. \quad (2.36)$$

Então, toda solução não trivial de (2.33) é oscilatória.

Demonstração: Seja $x(t)$ uma solução de (2.33) e mostremos que ela é oscilatória. Suponhamos que $x(t)$ seja não-oscilatória e assim, sem perda de generalidade, podemos considerar $x_1(t) > 0$ e $x_2(t) > 0$ para todo $t > t^* - \tau$. Então por (2.34), $\dot{x}_1(t) > 0$ e $\dot{x}_2(t) < 0$ para $t \geq t^*$, ou seja, $x_1(t)$ é crescente e $x_2(t)$ é decrescente em t , para $t \geq t^*$.

Vamos mostrar que $x_2(t)$ troca de sinal. Se a solução $x(t)$ permanecesse o tempo todo em Q_1 então $x(t)$ poderia convergir para um ponto de $\mathbb{R}^2$, o qual seria um ponto de equilíbrio e isso não pode ocorrer.

Outra possibilidade seria a de $x(t)$ tender assintoticamente para uma reta horizontal. Isso também não pode ocorrer, já que, para t suficientemente grande,

$$\dot{x}_2(t) = -p(t)|F_2(x_1(t - \tau), x_2(t - \tau))| \leq -c\delta(M) < 0,$$

onde $M = x_2(t^*)$ e c é uma constante tal que, para t suficientemente grande, $p(t) \geq c$. Segue do Teorema do Valor Médio que $x_2(t)$ troca de sinal, ou seja, a solução $x(t)$ fatalmente entra em Q_2 . Repetindo o mesmo processo para a solução em Q_2 , é possível provar que $x_1(t)$ troca de sinal fazendo com que a solução entre em Q_3 e assim sucessivamente. Isso tudo implica que $x(t)$ deve ser oscilatória. ■

Consideremos agora a equação diferencial planar com retardamento

$$\dot{x}(t) = p(t)F(x(t - \tau)), \quad t \neq t_k \quad (2.37)$$

sujeita à condição de impulso radial, dada por

$$\Delta x(t_k) = b_k x(t_k), \quad (2.38)$$

onde os b_k são constantes e os instantes de impulso satisfazem $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. As hipóteses sobre as funções F e p são as mesmas estabelecidas no início desta seção.

Neste caso, definimos o espaço $PC_\sigma = \{\phi = (\phi_1, \phi_2) : [\sigma - \tau, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ contínua no conjunto } [\sigma - \tau, \sigma] \setminus \{t_k, k = 1, 2, \dots\} \text{ e nos pontos } t_k \text{ do intervalo } [\sigma - \tau, \sigma], \phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ podem ter descontinuidades de primeiro tipo e contínuas à esquerda}\}$

A definição de solução para o caso planar é similar ao caso escalar.

Definição 2.3.2 *Uma função $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma solução de (2.37) e (2.38) satisfazendo*

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [\sigma - \tau, \sigma], \quad (2.39)$$

$\phi \in PC_\sigma$, no intervalo $[\sigma, a)$, se $x : [\sigma, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz (2.39) e

A) para $t \in (\sigma, a)$, $t \neq t_k$, $t \neq t_k + \tau$, $x(t)$ é contínua, diferenciável e satisfaz (2.37);

B) para $t_k \in [\sigma, a)$, $x(t_k^+), x(t_k^-)$ existem e $x(t_k^-) = x(t_k)$ e satisfaz (2.38);

C) para $t \in (\sigma, a)$, $t \neq t_k$, $t = t_k + \tau$, $x(t)$ é contínua e $\dot{x}(t^+), \dot{x}(t^-)$ existem.

Ainda de forma inteiramente análoga ao caso escalar, pode-se obter a existência e unicidade de solução para o problema impulsivo planar.

Observação 2.3.1 *Para o caso impulsivo vale observar que uma solução $x(t)$ de (2.37) e (2.38) é oscilatória se, e só se, pelo menos uma das seguintes condições estão satisfeitas.*

a) pelo menos uma das componentes x_i tem zeros arbitrariamente grandes, isto é, dado $T > 0$ suficientemente grande existe $t^* \geq T$ tal que $x_i(t^*) = 0$;

b) pelo menos uma das componentes x_i satisfaz a seguinte condição: para qualquer K suficientemente grande existe um inteiro $k \geq K$ tal que $x_i(t_k^+)x_i(t_k) < 0$.

Observação 2.3.2 Vale notar que o exemplo contido na observação 2.2.1 pode ser adaptado para mostrar que o problema impulsivo planar pode possuir solução não-oscilatória.

A partir de agora daremos condições para que existam soluções oscilatórias.

Lema 2.3.2 Suponhamos que (2.34), (2.35) e (2.36) estejam satisfeitas e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0,$$

$$t_k - t_{k-1} > \tau > 0,$$

$$p(t) \geq c,$$

onde c é uma constante positiva, e

$$|F_j(x)| \geq \lambda|x|, \quad j = 1, 2, \quad (2.40)$$

com $\lambda > 0$ constante. Então, toda solução não trivial de (2.37) e (2.38) é oscilatória.

Demonstração: Seja $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma solução de (2.37) e (2.38). Se existir $t_1^* > 0$ tal que $x_1(t) > 0$ e $x_2(t) > 0$ para $t > t_1^* - \tau$, pela hipótese (2.34) temos que $x_1(t)$ é uma função crescente e $x_2(t)$ é decrescente para $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots$ e $t > t_1^*$.

Mostremos que, para k suficientemente grande $x_2(t_k^+) > x_2(t_{k+1}^+)$. De fato, por (2.38) segue que

$$x_2(t_k) = \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_k^+).$$

Assim,

$$x_2(t_k) > \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1}), \quad \text{e} \quad x_2(t_{k+1}) > \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1}).$$

Portanto,

$$x_2(t) > \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1}) \quad t \in (t_{k+1}, t_{k+2}).$$

Agora, vamos comparar o quanto a função $x_2(t)$ decresce em (t_k, t_{k+1}) em relação ao quanto ela salta em t_{k+1} .

Para $t \in (t_k, t_{k+1})$, vale

$$|\dot{x}_2(t)| \geq c\lambda |x_2(t - \tau)| > c\lambda \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1}),$$

então

$$|\dot{x}_2(t)(t_{k+1} - t_k)| > c\lambda \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1})\tau$$

logo, para k suficientemente grande, como $b_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$

$$c\lambda \frac{1}{b_k + 1} x_2(t_{k+1})\tau \geq b_{k+1} x_2(t_{k+1}) = \Delta x_2(t_{k+1})$$

o que implica $x_2(t_k^+) > x_2(t_{k+1}^+)$.

Assim, existe $M > 0$ tal que $x_2(t) \leq M$, para $t > t_1^*$. Então, para $t \neq t_k$, suficientemente grande, por (2.35) temos

$$\dot{x}_2(t) = -p(t)|F_2(x(t - \tau))| \leq -c\delta(M) < 0.$$

Portanto, para k suficientemente grande vale

$$(i) \quad x_2(t_k^+) - x_2(t_{k+1}) \geq c\delta(M)\tau,$$

e

$$(ii) \quad b_k M \leq \frac{1}{2} c\delta(M)\tau.$$

De (i) e (ii) temos

$$\begin{aligned} x_2(t_k^-) - x_2(t_{k+1}^-) &= x_2(t_k^+) - x_2(t_{k+1}) - \Delta x_2(t_{k+1}) \\ &\geq c\delta(M)\tau - \Delta x_2(t_{k+1}) \geq c\delta(M)\tau - Mb_{k+1} \geq \frac{1}{2} c\delta(M)\tau, \end{aligned}$$

para k suficientemente grande, o que implica que $x_2(t)$ fatalmente se torna negativa.

Agora, se $x_1(t) > 0$ e $x_2(t) < 0$ para todo $t > t_2^* - \tau$, repetindo a mesma idéia realizada acima, prova-se que x_1 troca de sinal, e assim sucessivamente. ■

Capítulo 3

Equações Diferenciais Diferença Impulsivas

3.1 Introdução

Estamos interessados em encontrar soluções periódicas para um problema planar impulsivo. Sabemos que existem resultados, por exemplo [12], que estabelecem a existência de solução periódica não trivial quando um certo tipo de impulso é introduzido à equação

$$\dot{x}(t) = \alpha F(x(t-1)),$$

onde $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\alpha > 0$.

O objetivo deste capítulo é apresentar condições para que a equação

$$\dot{x}(t) = F(x(t-r)),$$

sujeita a uma condição de impulso mais geral que a tratada em [12] possua solução periódica não trivial, onde r é um número real positivo, $x = \text{col}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = \text{col}(F_1, F_2)$ é contínua e C^1 numa vizinhança da origem. Apresentaremos também alguns exemplos.

Essas hipóteses sobre a função F serão admitidas em todo este capítulo.

3.2 Estudo de periodicidade

Sejam $a > 0$, $c > 0$ constantes e

$$l_{a,c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad x_1 = a, \quad x_2 \geq c\}.$$

Consideremos a equação acima sujeita a uma condição de auto-sustentação impulsiva:

$$\dot{x}(t) = F(x(t-r)), \quad (3.1)$$

$$x(t-) \in l_{a,c} \Rightarrow x(t) = x(t+) = (a, \gamma(x_2(t))) \quad (3.2)$$

onde $\gamma : [c, \infty) \rightarrow [b, c]$ é uma função contínua que satisfaz $\gamma(c) = c$.

Uma maneira de estabelecer um resultado de existência de solução periódica para o sistema (3.1) é definir um operador de retorno em algum suconjunto K de C , e estabelecer a existência de ponto fixo não trivial. A condição de impulso (3.2) introduz descontinuidades de primeiro tipo nas soluções, fato que exige algumas adaptações a este procedimento clássico. Utilizaremos o Teorema 1.0.1 para provarmos a existência de ponto fixo de um certo operador de retorno.

Inicialmente, definiremos solução para o problema impulsivo descrito acima.

Devido as descontinuidades que aparecem nas soluções, vamos considerar o conjunto $G = G([-r, 0], \mathbb{R}^2)$ que é o espaço das funções regradas, definidas em $[-r, 0]$ com imagem em $\mathbb{R}^2$, veja capítulo 1. Definamos o subconjunto D de G por: $\varphi \in D$, se e só se,

- (i) $\varphi \in G$;
- (ii) φ é contínua à direita em $[-r, 0]$;

(iii) φ tem no máximo um ponto de descontinuidade $t_0 \in [-r, 0]$, o qual satisfaz

$$\varphi(t_0-) = (a, \varphi_2(t_0)) \in l_{a,c} \Rightarrow \varphi(t_0) = (a, \gamma(\varphi_2(t_0))).$$

Suponhamos que a condição inicial

$$x_0 = \varphi \in D. \quad (3.3)$$

Como se trata de um problema autônomo podemos, sem perda de generalidade, fixar $t_0 = 0$.

Definição 3.2.1 *Uma solução do problema (3.1), (3.2) e (3.3) é uma função $x : [-r, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\omega > 0$, tal que*

$$(i) \ x|_{[-r,0]} = \varphi;$$

$$(ii) \ x(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(x(s-r))ds, \quad t > 0 \text{ e enquanto } x(t-) \notin l_{a,c}$$

$$(iii) \text{ se } \bar{t} \text{ é tal que } x(\bar{t}-) = (a, x_2(\bar{t})) \in l_{a,c} \text{ então}$$

$$x(t) = (a, \gamma(x_2(\bar{t}))) + \int_{\bar{t}}^t F(x(s-r))ds, \quad t > \bar{t} \text{ e enquanto } x(t-) \notin l_{a,c}.$$

Não é difícil ver que dado $\varphi \in D$ existe uma única solução de (3.1), (3.2) e (3.3) definida em $[-r, \infty)$.

Vamos assumir, em todo o capítulo, algumas hipóteses sobre a função F :

(H1) $x_2 F_1(x) > 0$, se $x_2 \neq 0$ e $x_1 F_2(x) < 0$, se $x_1 \neq 0$.

(H2) Existe uma constante $M > 0$ tal que $|F(x)| \leq M$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$.

(H3) Dado $L > 0$, existem constantes positivas $\delta(L)$ e $\eta(L)$ tais que

$$\liminf_{|x_1| \rightarrow \infty} |F_2(x)| > \delta(L), \quad \text{se } |x_2| \leq L,$$

$$\liminf_{|x_2| \rightarrow \infty} |F_1(x)| > \eta(L), \quad \text{se } |x_1| \leq L.$$

Se denotarmos $\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0) = \delta_1$ e $\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0) = \delta_2$, a hipótese (H1) implica $\delta_1, -\delta_2 \geq 0$. Vamos supor também que

$$\delta = \sqrt{-\delta_1 \delta_2} > 0. \quad (3.4)$$

A fim de aplicarmos o Teorema 1.0.1 precisamos inicialmente considerar um conjunto fechado, limitado e convexo.

Seja então, o subconjunto de $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^2)$, fechado e convexo dado por

$$K = \{ \phi \in C \mid \phi(\theta) \in Q_3, -r \leq \theta \leq 0, \phi_1(-r) = 0, \phi_2(-r) \leq 0, \\ \phi_j \text{ não-crescentes em } [-r, 0] \text{ para } j = 1, 2 \text{ e são } M\text{-Lipschitzianas} \}. \quad (3.5)$$

Queremos demonstrar o seguinte teorema que garante a existência de solução periódica para o problema estabelecido neste capítulo.

Teorema 3.2.1 *Se as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estiverem satisfeitas, então existe um conjunto limitado $K' \subset K$ de modo que o problema (3.1) e (3.2) tem uma solução periódica não trivial $x(\cdot; \phi)$, $\phi \in K'$ com período maior que $3r$.*

Para provarmos este fato é necessário construirmos um operador completamente contínuo, $A : K \rightarrow C$, mostrar que existe um subconjunto limitado de K de forma que esse subconjunto seja invariante por A e finalmente mostrar que este operador tem um ponto fixo que não é o zero. Para definirmos tal operador precisamos de alguns lemas.

Lema 3.2.1 *Consideremos o problema (3.1), (3.2) com as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Então existe uma função contínua $t_1 : K \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ tal que $x_2(t_1(\phi); \phi) = 0, x_1(t_1(\phi); \phi) < 0$, $x(t; \phi) \in Q_3$ para $0 \leq t \leq t_1(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_4)$ se $t_1(\phi) < t < t_1(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.*

Demonstração: Para $t > 0$, $\phi \in K$, e enquanto a solução $x(\cdot, \phi)$ permanecer em Q_3 , a hipótese (H1) implica que a semi-órbita positiva $\{x(t; \phi), t > 0\}$ não pode convergir para a origem. Note também que $x(t; \phi)$ não pode convergir para um ponto $P_0 \neq (0, 0)$ de Q_3 quando $t \rightarrow \infty$, pois o 0 é o único ponto de equilíbrio da equação (3.1).

Sabemos também que essa semi-órbita não pode convergir assintoticamente para uma semi-reta horizontal, pois se isso ocorrer, ou seja, $x_2(t; \phi) \rightarrow \bar{x}_2 \leq 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então $|x_1(t; \phi)| \rightarrow \infty$ e por (H3), para t suficientemente grande,

$$\dot{x}_2(t) = F_2(x(t-r)) \geq \delta(L) > 0,$$

o que implica que, passado um tempo finito, $x_2(t; \phi)$ se torna positivo. Assim, a órbita cruza transversalmente o semi-eixo $\{(x_1, 0); x_1 < 0\}$ num instante $t_1 = t_1(\phi)$. A continuidade de t_1 segue de argumentos clássicos envolvendo o Teorema da Continuidade em relação às condições iniciais, veja, por exemplo, Lema 3.7 de

[11], Lema 5.5 ou 5.6 de [1], Lema 3.3 de [12]. ■

Podemos também considerar as funções t_j definidas em $K \setminus \{0\}$, $j = 2, 3, 4$, descritas abaixo.

Seja $t_2 : K \setminus \{0\} \rightarrow [r, \infty)$, $\phi \mapsto t_2(\phi)$, contínua de forma que $x_1(t_2(\phi); \phi) = 0$, $x_2(t_2(\phi); \phi) > 0$, $x(t; \phi) \in Q_4$ para $t_1(\phi) \leq t \leq t_2(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_1)$ se $t_2(\phi) < t < t_2(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno. A existência e a continuidade de t_2 podem ser demonstradas de modo inteiramente análogo à existência e continuidade de t_1 .

Seja agora $t_3 : K \setminus \{0\} \rightarrow [2r, \infty)$, $\phi \mapsto t_3(\phi)$, de forma que:

- Se $\phi \in K \setminus \{0\}$ é tal que $x(t; \phi)$ não sofre impulso, ou seja, a solução da equação passando por ϕ não encontra a semi-reta $l_{a,c}$ então $t_3(\phi)$ satisfaz: $x_2(t_3(\phi); \phi) = 0$, $x_1(t_3(\phi); \phi) > 0$, $x(t; \phi) \in Q_1$ para $t_2(\phi) \leq t \leq t_3(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_2)$ se $t_3(\phi) < t < t_3(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

- Se $\phi \in K \setminus \{0\}$ é tal que $x(t; \phi)$ sofre impulso, isto é, existe t_0 com $x(t_0-; \phi) \in l_{a,c}$, então vamos considerar três situações:

- 1) Se $x(t_0, \phi) \in Q_1$, então $t_3(\phi)$ satisfaz as condições acima.
- 2) Se $x(t_0, \phi) \in Q_2$ e a solução é tal que $x(t; \phi) \notin Q_1$ para $t_0 < t < t_0 + r$, então definimos $t_3(\phi) = t_0$, que é o instante de impulso.
- 3) Se $x(t_0; \phi) \in Q_2$ e a solução $x(t; \phi) \in Q_1$ para algum t com $t_0 < t < t_0 + r$, definimos

$$t_3(\phi) = \max\{t \in [t_0, t_0 + r]; x_1(t; \phi) > 0, x_2(t, \phi) = 0\}.$$

Podemos observar pela definição que t_3 não é uma função contínua, de ϕ .

Finalmente, seja $t_4 : K \setminus \{0\} \rightarrow [2r, \infty)$, $\phi \mapsto t_4(\phi)$ satisfazendo $x_1(t_4(\phi); \phi) = 0$, $x_2(t_4(\phi); \phi) < 0$, $x(t; \phi) \in Q_2$ para $t_3(\phi) \leq t \leq t_4(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_3)$ se $t_4(\phi) < t < t_4(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno. A existência

de $t_4(\phi)$ segue de argumentos análogos à prova de t_1 .

Lema 3.2.2 *A função t_4 definida acima é contínua.*

Demonstração: Se $\phi \in K$, $\phi \neq 0$ e $x(t; \phi)$ não sofre impulso para $t \in [0, t_4(\phi)]$ então t_4 é contínua em ϕ . Este fato é consequência direta do Teorema da Continuidade com relação às condições iniciais, como já foi observado quando tratamos da continuidade de $t_1(\phi)$.

Seja $K_i \subset K \setminus \{0\}$ o conjunto das $\phi \in K$ tais que $x(t; \phi)$ sofre impulso para $t \in [t_2(\phi), t_3(\phi)]$.

Se $\phi \in K_i$ denotemos por $t_i(\phi) \in [t_2(\phi), t_3(\phi)]$ o momento de impulso de $x(t; \phi)$. A aplicação $\phi \in K_i \mapsto t_i(\phi) \in \mathbb{R}$ é contínua pelo mesmo motivo que t_1, t_2 são contínuas.

Seja agora $C_0 \subset C$ tal que $C_0 = \{x_{t+r}(\cdot; \phi); \phi \in K_i, t \in t_i(K_i)\}$. A aplicação $\phi \in K_i \mapsto x_{t_i(\phi)+r}(\cdot; \phi) \in C_0$ é contínua. De fato, se considerarmos o problema sem impulso, isto é, dado somente por

$$\dot{y}(t) = F(y(t-r)),$$

denotando por $y(t; \phi)$ a solução dessa equação passando por $\phi \in K_i$, temos que a aplicação $\phi \in K_i \mapsto y_{t_i(\phi)-r}(\cdot; \phi) \in C$ para $t \in [t_i(\phi), t_i(\phi) + r]$ é contínua. Assim, para o caso com impulso, podemos escrever

$$x_{t_i(\phi)+r}(\cdot; \phi) = y_{t_i(\phi)+r}(\cdot; \phi) - (0, \gamma(y_2(t_i(\phi)))).$$

Como γ é contínua segue-se imediatamente que a aplicação

$$\phi \in K_i \mapsto x_{t_i(\phi)+r}(\cdot; \phi) \in C_0$$

é contínua.

Agora, para cada $\phi \in C_0$, seja $t'(\phi)$ tal que $x_1(t'; \phi) = 0, x_1(t; \phi) > 0$ para $t \in [0, t']$ e $x_2(t'; \phi) < 0$. Notemos que, se $\phi = x_{t_1(\psi)-r}(\cdot; \psi)$, com $\psi \in K_i$, então $t'(\phi) = t_4(\psi)$. Como $t' : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ é também contínua, segue que t_4 restrita a K_i é contínua.

Como t_4 restrita a $(K \setminus K_i) \setminus \{0\}$ é contínua, e a aplicação contínua γ satisfaz $\gamma(c) = c$, segue-se que t_4 é contínua em $K \setminus \{0\}$. ■

Podemos então definir a seguinte função contínua

$$\tau : K \setminus \{0\} \rightarrow (3r, \infty)$$

tal que

$$\tau(\phi) = t_4(\phi) + r, \quad \tau(\phi) > 0.$$

Definamos agora o operador de retorno em K ,

$$A\phi = \begin{cases} x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi), & \text{se } \phi \in K \setminus \{0\} \\ 0, & \text{se } \phi = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Precisamos mostrar que este operador é completamente contínuo.

Para isto, vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração é uma adaptação da prova do Lema 3.5 de [12].

Lema 3.2.3 *Seja $G \subset C$, aberto; $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V \subset C$ de 0 tal que se $\phi \in V \cap K, \phi \neq 0$, tem-se $x_t(\cdot; \phi) \in G$ para todo $0 \leq t \leq t_1(\phi) + r$.*

Demonstração: É suficiente provar que dado $G' \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $0 \in G'$, existe uma vizinhança V de 0 em C tal que se $\phi \in V \cap K, \phi \neq 0$, então $x(t; \phi) \in G'$ para $-r \leq t \leq t_1(\phi) + r$.

Admitamos que vale a afirmação acima para $t \in [-r, t_1(\phi)]$ e mostremos que vale para $t \in [t_1(\phi); t_1(\phi) + r]$.

Se $t \in [t_1(\phi); t_1(\phi) + r]$, e levando-se em conta a hipótese (H1), como F é contínua e $F(0) = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x(t - r; \phi)| < \delta$ temos

$$-\epsilon \leq F_1(x(t - r)) \leq 0$$

$$0 \leq F_2(x(t - r)) \leq \epsilon.$$

Logo

$$-\epsilon \leq \dot{x}_1(t) \leq 0$$

$$0 \leq \dot{x}_2(t) \leq \epsilon$$

o que implica $0 \leq x_2(t; \phi) \leq \epsilon r$ e $-\epsilon r - \delta \leq x_1(t; \phi) \leq 0$ para $t \in [t_1(\phi); t_1(\phi) + r]$. Portanto, fica verificada a afirmação acima.

Mostremos agora que existe uma vizinhança V , como descrito no enunciado do lema, tal que $x(t; \phi) \in G'$, para $-r \leq t \leq t_1(\phi)$, com $\phi \in V \cap K$. Suponhamos, por absurdo, que isto não seja válido. Assim, existe um retângulo

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad -l < x_1 < \delta_1, \quad -\delta_2 < x_2 < m\},$$

onde δ_1, δ_2, l, m são todas constantes positivas, tal que, para alguma seqüência (ϕ_n) , $\phi_n \in K \setminus \{0\}$, $\phi_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, existe uma seqüência (t_n) com $-r \leq t_n \leq t_1(\phi_n)$ satisfazendo $x(t_n; \phi_n) \in \partial R$, $x(t; \phi_n) \in R$ para $-r \leq t \leq t_n$; $n = 1, 2, 3, \dots$

Se denotarmos $x_n(t) := x(t; \phi_n)$; $x_n^i(t) := x_i(t; \phi_n)$, $i = 1, 2$, teremos $x_n(t) \in [-l, 0] \times [-q_n, 0]$, $-r \leq t \leq t_n$, onde $q_n = \|\phi_n\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Consequentemente, $x_1(t_n; \phi_n) = -l$, $n = 1, 2, 3, \dots$. A continuidade de F_1 e o fato de que $F_1(x_1, 0) = 0$ implicam que

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0^-} F_1(x_1, x_2) = 0 \quad (3.7)$$

uniformemente em x_1 em $[-l, 0]$.

Agora, tomando uma seqüência (τ_n) , de modo que, $0 < \tau_n < t_n$, $x_n(t) \in [-\frac{l}{2}, 0] \times [-q_n, 0]$ se $-r \leq t \leq \tau_n$ com $x_1(\tau_n; \phi_n) = -\frac{l}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. Como $q_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $x_1(\tau_n - r; \phi_n) < -\frac{l}{3}$, pois $|\dot{x}_n^1(t)| = |F_1(x_n(t - r))|$ pode ser feito arbitrariamente pequeno tomando-se n suficientemente grande. Portanto, para qualquer $t \in [\tau_n - r, t_n]$, vale $x_1(t; \phi_n) < -\frac{l}{3}$.

Sejam $\sigma > 0$ e n_0 um inteiro positivo tais que $|F_2(x)| > \sigma$ se $x \in \mathbb{R}^2$; $|x_1| \geq \frac{l}{3}$ e $n \geq n_0$ implica $|F_1(x_n(t))| < \sigma$ e $q_n < \frac{l}{2}$.

Como $x_1(t; \phi_n)$ é estritamente decrescente e $x_2(t; \phi_n)$ é estritamente crescente para $t \in [\tau_n, t_n]$, $x_n(t) = x(t; \phi_n)$ é o gráfico da função $x_2 = x_n^2(x_1)$.

Portanto para $\tau_n \leq t \leq t_n$ temos $-l \leq x_1(t) \leq -\frac{l}{2}$ e vale

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{|F_2(x_n(t - r))|}{|F_1(x_n(t - r))|} > 1$$

o que é uma contradição. ■

Lema 3.2.4 *Seja $G \subset C$, aberto; $0 \in G$. Existe uma vizinhança $V \subset C$ de 0 tal que se $\phi \in V \cap K$, $\phi \neq 0$, tem-se $x_t(\cdot; \phi) \subset G$ para todo $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.*

Demonstração: Não há perda de generalidade em considerar $G \subset B_\delta \subset C$ tal que $0 < \delta < \sqrt{a^2 + c^2}$, onde B_δ representa a bola aberta em C , isto é, $B_\delta = \{\phi \in C; \|\phi\| < \delta\}$. Assim, devido as simetrias de nossas hipóteses este

resultado é uma consequência do Lema 3.2.3. ■

Dado $\xi > 0$, podemos definir para cada ξ o conjunto limitado K_{xi} de C por

$$K_\xi = \{ \varphi \in C \mid \varphi(\theta) \in Q_3, -r \leq \theta \leq 0, \varphi_1(-r) = 0, -\xi \leq \varphi_2(-r) \leq 0, \\ \varphi_j \text{ não crescentes em } [-r, 0] \text{ para } j = 1, 2 \text{ e são } M\text{-Lipschitzianas} \}. \quad (3.8)$$

Notemos que o conjunto K não é limitado, mas devido à forma do impulso, o Lema 3.2.5 a seguir, garante a existência de um subconjunto limitado de K , para o qual voltam as soluções que dele partem. Mais precisamente, este conjunto é invariante pelo operador A .

Lema 3.2.5 *Existe $\xi > 0$ tal que $AK \subset K_\xi$ e, portanto, K_ξ é invariante por A .*

Demonstração: Seja N um subconjunto de C tal que $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in N$ se, e só se, ϕ_1 e ϕ_2 são M -Lipschitzianas e ϕ satisfaz uma das seguintes alternativas:

a) $0 \leq \phi_1(-r) \leq a$ e $\phi_2(-r) = 0$, $\phi_1(\theta)$ é não decrescente e $\phi_2(\theta)$ é não crescente em $[-r, 0]$;

b) $\phi_1(-r) = a$ e $b \leq \phi_2(-r) \leq c$, ϕ_1 não decrescente e ϕ_2 não decrescente em $[-r, \theta_0]$ e não crescente em $[\theta_0, 0]$, para algum θ_0 , $-r \leq \theta_0 < 0$.

Definamos

$$T_M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq x_1 \leq a + rM; -rM \leq x_2 \leq 0\} \\ \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad a \leq x_1 \leq a + rM; b - rM \leq x_2 \leq c + rM\}.$$

Notemos que se $\phi \in N$, então $\phi(\theta) \in T_M$ para $\theta \in [-r, 0]$.

N é um subconjunto compacto de C , já que T_M é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ e as funções de N são M -Lipschitzianas.

Vamos definir a seguinte função:

$$f : N \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que a cada função $\phi \in N$ associamos $f(\phi) = x_2(t^*; \phi)$, onde $t^* = t^*(\phi)$ é o instante em que a solução $x(t; \phi)$ da equação (3.1) passa de Q_2 para Q_3 .

Precisamos primeiramente mostrar que existe uma função $t^* : N \rightarrow [0, \infty)$ tal que, dado $\phi \in N$, $x_1(t^*; \phi) = 0$, $x_2(t^*; \phi) < 0$ e $x(t; \phi) \in \text{int}Q_3$ para $t^* < t < t^* + \delta$ para qualquer $\delta > 0$ pequeno, onde $t^* = t^*(\phi)$.

Por adaptações dos argumentos da prova do Lema 3.2.1, referente à existência e continuidade de $t_1 : K \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$, pode-se garantir a existência e a continuidade da função $t^* : N \rightarrow [0, \infty)$

Portanto, a função f é contínua e satisfaz $f(\phi) < 0$ para todo $\phi \in N$, logo existe $\xi > 0$ tal que $f(\theta) \geq -\xi$, para todo $\phi \in N$. Como as soluções, $x(t; \psi)$, com $\psi \in K \setminus \{0\}$ do problema (3.1) e (3.2) devem passar por T_M , concluímos que, para toda $\psi \in K$, $\psi \neq 0$, vale $x_{\tau(\psi)}(.; \psi) \in K_\xi$. Notemos que $f(\phi) = x_2(t_4(\psi); \psi)$, com $\phi = x_t(.; \psi)$ para algum $t > 0$ e $\psi \in K$. ■

De agora em diante consideraremos sempre K_ξ , onde ξ satisfaz: $AK_\xi \subset K_\xi$. A possibilidade dessa escolha é garantida pelo lema anterior.

Lema 3.2.6 *A aplicação $A : K_\xi \rightarrow K_\xi$ definida por*

$$A\phi = x_{\tau(\phi)}(.; \phi) \quad \phi \neq 0$$

$$A0 = 0$$

é completamente contínua.

Demonstração: Se $\phi_0 \in K_\xi \setminus \{0\}$ então a continuidade de A em ϕ_0 é consequência imediata da continuidade de t_4 e do Teorema da Continuidade das soluções em relação às condições iniciais.

A continuidade de A em $\phi_0 = 0$ segue imediatamente do Lema 3.2.4.

Seja agora $\bar{B}_\eta$ a bola fechada em C de centro em 0 e raio η e seja $V = K_\xi \cap \bar{B}_\eta$. Então, pela construção de K_ξ

$$AV = \{x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi); \phi \in V \setminus \{0\}\} \cup \{0\} \subset K_\xi$$

logo, AV é limitado. Como os elementos do conjunto K_ξ são funções cujas componentes são M-Lipschitzianas segue imediatamente a equicontinuidade de AV . Portanto A é completamente contínua. ■

Podemos observar que a solução nula é uma solução periódica para o problema dado. Para descartarmos tal solução devemos mostrar que ela é ponto ejetivo do operador de retorno A .

Observação 3.2.1 *Para provarmos que zero é ponto ejetivo de A , basta analisarmos o caso sem impulso. De fato, suponhamos que o zero seja ponto ejetivo para o problema sem impulso, ou seja, existe uma vizinhança aberta $G \subset K$ de zero tal que para cada $\phi \in G \cap K, \phi \neq 0$, existe um inteiro $m = m(\phi)$ tal que $\bar{A}^m \phi \notin G \cap K$, onde $\bar{A}$ é operador de retorno de K em K para o problema dado pela equação $\dot{x}(t) = F(x(t-r))$, sem a condição de impulso.*

Se tal vizinhança encontra a semi-reta $l_{a,c}$, basta tomarmos uma vizinhança menor G' contida em G de forma que G' não encontre $l_{a,c}$. Em G' o operador $\bar{A}$ coincide com o operador A do problema impulsivo, logo o mesmo inteiro m satisfaz a definição 1.0.1 para A . Agora, se a vizinhança G não encontra a semi-reta $l_{a,c}$, podemos considerar a própria vizinhança G para o operador A definido em K_ξ .

Consideraremos unicamente o caso sem impulso.

Linearizando a equação e utilizando a decomposição do espaço C descrita no Capítulo 1, vamos enunciar o lema a seguir que fornece condição suficiente para a ejetividade da origem de um certo operador de retorno. A prova pode ser encontrada em [1], Lema 5.2.

Lema 3.2.7 *Suponhamos que as seguintes condições estejam satisfeitas:*

(i) *existe um auto-valor λ da equação linearizada linear com $\Re(\lambda) > 0$.*

(ii) *existe um subconjunto K convexo e fechado de C , $0 \in K$, e uma função contínua $\tau : K \setminus \{0\} \rightarrow [\rho, \infty)$, $\rho > 0$, tal que a aplicação $A : K \rightarrow C$, dada por*

$$A\phi = \begin{cases} x_{\tau(\phi)}(\cdot; \phi), & \text{se } \phi \neq 0 \\ 0, & \text{se } \phi = 0 \end{cases}$$

é completamente contínua e $AK \subset K$.

(iii) *Se $0 < a < L$, para algum $L \in \mathbb{R}$,*

$$\inf\{\|\Pi_\lambda(x_t)\|; \|x_t - x_t(\cdot; \phi)\|, \phi \in K, \|\phi\| \geq a, 0 < t < \tau(\phi)\} > 0.$$

(iv) *Dado $G \subset C$ aberto, $0 \in G$, existe uma vizinhança V de 0 em C tal que $x_t(\cdot, \phi) \in G$ se $\phi \in V \cap K$, $\phi \neq 0$, $0 \leq t \leq \tau(\phi)$.*

Então 0 é um ponto ejetivo de A .

Retornando ao nosso caso, como o nosso operador A leva limitados em limitados, os mesmos argumentos dos lemas 3.2.6 e 3.2.4 garantem as hipóteses (ii), (iv) respectivamente para o caso sem impulso. Resta-nos mostrar (i) e (iii).

Para provarmos (i) precisamos analisar a equação característica do problema linearizado. A equação linearizada de (3.1) em torno da origem é dada por

$$\dot{y}(t) = By(t-r), \quad (3.9)$$

onde

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(0,0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & 0 \end{pmatrix}$$

A equação $\dot{y}(t) = By(t-r)$ é um caso particular da equação $\dot{x}(t) = Lx_t$ com

$$L(\phi) = \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta) = B\phi(-r),$$

onde $\eta(\theta), \theta \in [-r, 0]$ a matriz de ordem 2 definida por

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -B, & \text{se } \theta = -r, \\ 0, & \text{se } -r < \theta \leq 0. \end{cases}$$

A equação característica de (3.9) é dada por

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} d\eta(\theta) = \lambda I - Be^{-\lambda r}$$

onde I representa a matriz identidade de ordem 2. Logo, a equação característica tem a seguinte forma

$$\lambda^2 e^{2\lambda r} = \delta_1 \delta_2 < 0. \quad (3.10)$$

A análise desta equação característica está contida nos lemas a seguir e está estritamente relacionada com o estudo feito em [11], onde é tratado uma versão da equação (3.10).

Lema 3.2.8 *Existe exatamente uma raiz $\lambda = a + bi$ da equação (3.10) com $0 < b < \frac{\pi}{2r}$, $a > 0$ e ela é simples.*

Demonstração: Seja $\lambda = a + bi$ tal que $0 < br < \frac{\pi}{2}$, então

$$\Re(\lambda e^{\lambda r}) = e^{ar}(a \cos br - b \sin br)$$

e por (3.10) temos que $\lambda e^{\lambda r} = \delta i$, lembrando que $\delta = \sqrt{-\delta_1 \delta_2}$, assim

$$a \cos br - b \sin br = 0,$$

o que implica

$$(I) \quad a = b \tan br > 0.$$

Considerando agora a parte imaginária de $\lambda e^{\lambda r}$, temos

$$(II) \quad e^{ar}(a \sin br + b \cos br) = \delta.$$

Substituindo (I) em (II) obtemos

$$\delta = A(b) = \frac{b e^{br \tan br}}{\cos br}, \quad (3.11)$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{d\Lambda}{db} &= \frac{e^{br \tan br} [\cos br + 2rb \tan br \cos br + b^2 r^2 \sec br \cos br]}{\cos^2 br} \\
&= e^{br \tan br} (1 + 2br \tan br + b^2 r^2 \sec^2 br) \sec br \\
&= e^{br \tan br} [(1 + br \tan br)^2 + b^2 r^2] \sec br > 0,
\end{aligned}$$

além disso

$$\lim_{b \rightarrow 0+} \Lambda(b) = 0 \quad \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2r}-} \Lambda(b) = \infty.$$

As características da função Λ garantem que podemos definir univocamente b como função de δ , $1 < \delta < \infty$. Pela equação (I) temos que a pode ser considerada também como uma função de δ , enquanto $0 < br < \frac{\pi}{2}$, mais ainda λ é diferenciável com respeito a δ .

Seja λ_0 raiz de (3.10). Desde que $\lambda_0 \neq -\frac{1}{r}$, temos

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda^2 e^{2\lambda r} - \delta_1 \delta_2)_{\lambda=\lambda_0} = 2\lambda_0 e^{2\lambda_0 r} (1 + \lambda_0 r) \neq 0;$$

o que implica que a raiz λ_0 é simples. ■

O lema anterior garante a existência de um autovalor com parte real positiva o que implica o ítem (i) do Lema 3.2.7. Resta-nos somente provar (iii). Para isto vamos precisar do seguinte resultado.

Lema 3.2.9 *Suponhamos que as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estejam satisfeitas. Seja $d > 0$. Existe $D > 0$ tal que se $\phi \in K$ e $\|\phi\| \geq d$ então $x_1(t_1(\phi); \phi) \leq -D$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que dado $k > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se

$$R_{\delta,k} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -\delta \leq x_1 \leq 0, -k \leq x_2 \leq 0\},$$

com $\phi \in K$, e $\phi(0) \notin R_{\delta,k}$ então $x_1(t_1(\phi), \phi) < -\delta$.

Assim, dado $k > 0$, definamos

$$M_\delta = \sup\{|F_2(x)|; -\delta \leq x_1 \leq 0, -Mr - k \leq x_2 \leq -k/2\}, \quad (3.12)$$

para todo $\delta > 0$. Como F_2 é contínua e $F_2(0, x_2) = 0$ para todo $x_2 \in \mathbb{R}$, temos que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} M_\delta = 0$.

Seja agora

$$\eta = \min\{|F_1(x)|; x = (x_1, x_2), -1 \leq x_1 \leq 0, -Mr - k \leq x_2 \leq -k/2\} \geq 0. \quad (3.13)$$

Consideremos então δ satisfazendo $0 < \delta < \min\{1, k/2\}$ e $M_\delta < \eta$.

Seja $\phi \in K$ tal que $\phi(0) \notin R_{\delta,k}$ e suponhamos que exista $t_0 > 0$ tal que $x_2(t_0; \phi) = -k$, $-\delta \leq x_1(t_0; \phi) \leq 0$. Se não existir tal t_0 não há o que provar.

Enquanto $x(t; \phi) \in R_{\delta,k}$ com $x_2(t; \phi) \leq -k/2$ para $t \geq t_0$, temos

$$\frac{-k}{2} \geq x_2(t-r) \geq -Mr - k.$$

Portanto, $|F_2(x(t-r; \phi))| \leq M_\delta < \eta$, de acordo com (3.12). Além disso,

$$|F_1(x(t-r; \phi))| \geq \eta,$$

de acordo com (3.13). Logo o vetor $\dot{x}(t; \phi)$ satisfaz

$$\frac{|\dot{x}_2(t; \phi)|}{|\dot{x}_1(t; \phi)|} \leq \frac{\eta}{\eta} = 1.$$

Portanto, lembrando que $\delta < \frac{-k}{2}$, existe $t \geq t_0$ tal que

$$x_1(\bar{t}, \phi) = -\delta, \quad x_2(\bar{t}, \phi) \leq -k/2$$

e assim concluímos que $x_1(t_1(\phi), \phi) \leq -\delta$. ■

Devido às simetrias das hipóteses, podemos repetir os argumentos acima e provar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 *Suponhamos que as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estejam satisfeitas. Seja $d > 0$. Existem $D_2, D_3 > 0$ tal que se $\phi \in K$ e $\|\phi\| \geq d$ então $x_2(t_2(\phi); \phi) \geq D_2$ e $x_1(t_3(\phi); \phi) \geq D_3$*

Considerando o problema linearizado na origem, sendo E o gerador infinitesimal do semigrupo, podemos decompor o espaço C , como foi mencionado no Capítulo 1 .

Pelo Lema 3.2.8, existe um único autovalor λ tal que $\Re \lambda > 0$, para $0 < \Im \lambda < \frac{\pi}{2r}$, que é simples, portanto, o auto-espaço generalizado $P_\lambda = N(\lambda I - E^*)$ é 1-dimensional.

Se u é uma solução não trivial de $\Delta(\lambda)u = 0$ com $\Delta(\lambda) = \lambda I - Be^{-\lambda r}$, e o vetor linha v é uma solução não trivial de $v\Delta(\lambda) = 0$, então $\rho(t) = e^{\lambda t}u, t \in [-r, 0]$ e $\sigma(s) = ve^{-\lambda s}, s \in [0, r]$ geram $N(\lambda I - E)$ e $N(\lambda I - E^*)$, respectivamente.

Assim, se $\phi \in C$, a sua componente ϕ^{P_λ} em P_λ é dada por

$$\phi^{P_\lambda} = \langle \sigma, \phi \rangle \rho,$$

onde a forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é definida no Capítulo 1 por (1.4).

Lema 3.2.10 *Se as hipóteses (H1), (H2) e (H3) estiverem satisfeitas, se $\bar{M}$ é tal que, $x(t; \phi)$ não sofre impulso para $\phi \in K$, $\|\phi\| \leq \bar{M}$ e $t \in [-r, t_4(\phi)]$, então existe $N > 0$ tal que*

$$|x(t; \phi)| \leq N \quad \text{para} \quad t \in [-r, t_4(\phi)].$$

Demonstração: Seja $\phi \in K$. $\|\phi\| \leq \bar{M}$ de modo que $x(t; \phi)$, $t \in [-r, t_4(\phi)]$ não encontra $l_{a,c}$. Assim, a solução $x(t; \phi)$ deve passar por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x_1 \leq a, x_2 = 0\}$$

ou por

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = a, 0 \leq x_2 \leq c\}.$$

Por (H1) e (H3) deve existir $k_1 > 0$, independente de ϕ , tal que $x_1(t_3(\phi), \phi) \leq k_1$, $t_3(\phi)$ definida atrás para o caso sem impulso.

Consideremos o conjunto

$$K_1 = \{\psi \in C \mid \psi(\theta) \in Q_2, -r \leq \theta \leq 0, 0 \leq \psi_1(-r) \leq k_1, \psi_2(-r) = 0, \psi_1 \text{ é crescente e } \psi_2 \text{ é decrescente em } [-r, 0] \text{ e } \psi_j \text{ para } j = 1, 2 \text{ são } M\text{-Lipschitz.}\}.$$

(3.14)

Notemos que K_1 é um subconjunto compacto do espaço C , pois seus elementos são funções limitadas e M -Lipschitzianas. Novamente, usando as hipóteses (H1) e (H3) podemos garantir a existência de $\hat{t}_1 : K_1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo, $x(t; \psi) \in Q_2$, $t \in [-r, \hat{t}_1(\psi)]$, $x_1(\hat{t}_1(\psi), \psi) = 0$, $x_2(\hat{t}_1(\psi), \psi) < 0$, $x(t, \psi) \in \text{int}Q_3$ para $\hat{t}_1(\psi) < t < \hat{t}_1(\psi) + \delta$, para algum $\delta > 0$. Pelo Teorema da Continuidade em relação às condições iniciais temos que $\hat{t}_1(\psi)$ é contínua, então a aplicação $\psi \in K_1 \setminus \{0\} \mapsto x_2(\hat{t}_1(\psi), \psi)$ é contínua e portanto assume mínimo, ou seja, existe $k_2 > 0$ tal que $x_2(\hat{t}_1(\psi), \psi) \geq -k_2$ para toda $\psi \in K_1 \setminus \{0\}$. Isso implica que existe um número $C_1 > 0$ tal que

$$|x(t; \psi)| \leq C_1, \quad \forall \psi \in K_1, \quad t \in [-r, \hat{t}_1(\psi) + r].$$

Notemos também que existe $\psi \in K_1$ tal que $\psi = x_{t_3(\phi)+r}(\cdot, \phi)$, $\phi \in K$, lembrando que $x(t; \phi)$ não sofre impulso.

Procedendo de maneira análoga, prova-se que existem constantes positivas k_3 e k_4 tais que para todo $\psi \in K_1 \setminus \{0\}$, $x_1(\hat{t}_2(\psi), \psi) \geq -k_3$ e $x_2(\hat{t}_3(\psi), \psi) \leq k_4$. Segue imediatamente a existência de $C_2 > 0$ tal que

$$|x(t; \psi)| \leq C_2, \quad \psi \in K_1 \setminus \{0\}, \quad t \in [-r, \hat{t}_4(\psi)],$$

onde as funções $\hat{t}_j : K_1 \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$, $j = 2, 3, 4$ são contínuas e satisfazem:

(i) $x(t; \varphi) \in Q_3$, $t \in [\hat{t}_1(\varphi), \hat{t}_2(\varphi)]$, $x_1(\hat{t}_2(\varphi), \varphi) < 0$, $x_2(\hat{t}_2(\varphi), \varphi) = 0$, $x(t, \varphi) \in \text{int}Q_3$ para $\hat{t}_2(\varphi) < t < \hat{t}_2(\varphi) + \delta$, para algum $\delta > 0$;

(ii) $x(t; \varphi) \in Q_4$, $t \in [\hat{t}_2(\varphi), \hat{t}_3(\varphi)]$, $x_1(\hat{t}_3(\varphi), \varphi) = 0$, $x_2(\hat{t}_3(\varphi), \varphi) > 0$, $x(t, \varphi) \in \text{int}Q_4$ para $\hat{t}_3(\varphi) < t < \hat{t}_3(\varphi) + \delta$, para algum $\delta > 0$;

(iii) $x(t; \varphi) \in Q_1$, $t \in [\hat{t}_3(\varphi), \hat{t}_4(\varphi)]$, $x_1(\hat{t}_4(\varphi), \varphi) > 0$, $x_2(\hat{t}_4(\varphi), \varphi) = 0$, $x(t, \varphi) \in \text{int}Q_1$ para $\hat{t}_4(\varphi) < t < \hat{t}_4(\varphi) + \delta$, para algum $\delta > 0$.

Tomando $N' = \max\{\bar{M} + Mr, C_j + Mr\}$ $j = 1, 2$ e $N = \sqrt{2}N'$, temos

$$|x(t; \psi)| \leq C_2, \quad \forall \psi \in K_1, \quad t \in [-r, \hat{t}_2(\psi) + r],$$

enquanto a solução não encontra a semi-reta $l_{a,c}$. ■

Lema 3.2.11 *Seja d e $\bar{M}$ tal que $0 < d < \bar{M}$. Então*

$$\inf\{\|\Pi_\lambda x_t\|; x_t = x_t(\cdot; \phi); \phi \in K \setminus \{0\}; d \leq \|\phi\| \leq \bar{M}, 0 \leq t \leq \tau(\phi)\} > 0.$$

Demonstração: Seja $v = (1, -i\mu)$ onde $\mu = \sqrt{-\delta_1/\delta_2} > 0$, então v satisfaz $v\Delta(\lambda) = 0$, e $\sigma(s) = (1, -i\mu)e^{-\lambda s}$, com $s \in [r, 0]$ é um elemento de C^* , então

$$\langle \sigma, x_t \rangle = x_1(t) - i\mu x_2(t) + \int_{-r}^0 \int_{-r}^\theta (1, -i\mu) e^{-\lambda(\theta-\varsigma)} d\eta(\varsigma) x(t+\theta) d\theta.$$

Calculando a integral de Stieltjes, temos

$$\langle \sigma, x_t \rangle = x_1(t) - i\mu x_2(t) + \int_{-r}^0 e^{-\lambda(\theta-r)} [\delta_1 x_2(t+\theta) - i\mu \delta_2 x_1(t+\theta)] d\theta.$$

Mostremos primeiramente que

$$m = \inf\{\|\Pi_\lambda x_t\|; x_t = x_t(\cdot; \phi); \phi \in K \setminus \{0\}; d \leq \|\phi\| \leq \bar{M}, 0 \leq t \leq t_1(\phi) + r\} > 0.$$

Vamos supor, por contradição, que $m=0$. Então existem sequências $\phi_n \in K \setminus \{0\}$, com $d \leq \|\phi_n\| \leq \bar{M}$ e $t_n \in [0, t_1(\phi_n) + r]$, $n = 1, 2, \dots$ tais que, se denotarmos $x^n(t) = x_t(\cdot; \phi_n)$ vale

$$\left| x_1(t_n) - i\mu x_2(t_n) + \int_{-r}^0 e^{-\lambda(\theta+r)} [\delta_1 x_2(t_n + \theta) - i\mu \delta_2 x_1(t_n + \theta)] d\theta \right| \longrightarrow 0 \quad (3.15)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Se $\lambda = a + bi$, com $a > 0$ e $0 < br < \frac{\pi}{2}$, então podemos ver que

$$\begin{aligned} & \left| x_1(t_n) + \int_{-r}^0 e^{-a(\theta+r)} [\delta_1 x_2(t_n + \theta) \cos(b\theta + br) - \mu \delta_2 x_1(t_n + \theta) \sin(b\theta + br)] d\theta \right. \\ & \quad + i \left\{ -\mu x_2(t_n) + \int_{-r}^0 e^{-a(\theta+r)} [-\delta_1 x_2(t_n + \theta) \sin(b\theta + br) \right. \\ & \quad \left. \left. - \mu \delta_2 x_1(t_n + \theta) \cos(b\theta + br)] d\theta \right\} \right| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Notemos que $0 < b\theta + br < \pi/2$, com $\theta \in [-r, 0]$. Como $d \leq \|\phi_n\| \leq \bar{M}$, então pelo Lema 3.2.10 temos que $\|x^n(t)\| \leq N$, para $t \in [-r, t_1(\phi) + r]$, $n = 1, 2, \dots$, onde as constantes $\bar{M}$ e N são aquelas definidas no Lema 3.2.10 e na sua prova. Assim, podemos afirmar que $x^n(t_n) \rightarrow (L_1, L_2)$ com $n \rightarrow \infty$, tomando uma subsequência se necessário.

O Lema 3.2.9 garante que $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$. Se $L_1 < 0$ e $L_2 \leq 0$, podemos ver que $\Re(\langle \sigma, x_{t_n} \rangle)$ fica negativo e uniformemente afastado do zero para n grande, o que contraria (3.15).

Se $L_1 = 0$ e $L_2 < 0$ então $\Im(\langle \sigma, x_{t_n} \rangle)$ fica positivo e uniformemente afastado do zero para n grande, o que também contraria (3.15).

Finalmente, se $L_2 > 0$, então necessariamente $L_1 < 0$. Para n grande temos

$$x_1(t_n; \phi_n) < \frac{L_1}{2} \quad \text{e} \quad x_2(t_n; \phi_n) > \frac{L_2}{2}.$$

Vamos denotar

$$p_n(\theta) = \delta_1 x_2(t_n + \theta) - i\mu \delta_2 x_1(t_n + \theta), \quad \theta \in [-r, 0].$$

Para n grande $p_n(\theta)$ está no setor

$$\{\rho e^{i\alpha}; \rho \geq 0, -\pi/2 \leq \alpha \leq 0\}$$

e a exponencial $e^{-\lambda(\theta+r)}$ com $\theta \in [-r, 0]$ está no setor

$$\{\rho e^{i\alpha}; e^{-ar} \leq \rho \leq 1, -B \leq \alpha \leq 0, B \in (0, \pi/2)\}.$$

Considerando o produto $e^{-\lambda(\theta+r)}p_n(\theta)$, $\theta \in [-r, 0]$ para n grande temos que o argumento α satisfaz: $-B - \pi/2 \leq \alpha \leq 0$ com $B \in (0, \pi/2)$, isso implica que, para n grande, $\Im\{e^{-\lambda(\theta+r)}p_n(\theta)\} \leq 0$, então $\Im(\langle \sigma, x_{t_n} \rangle)$ fica negativo e afastado uniformemente do zero, assim (3.15) não pode acontecer. Portanto $m > 0$.

O lema segue agora por aplicações sucessivas desses argumentos, explorando as simetrias de nossas hipóteses. ■

Com este último resultado e pela observação 3.2.1 segue que a origem é ponto ejetivo do operador A .

Sendo zero ponto ejetivo e juntando as conclusões dos lemas 3.2.6 e 3.2.5, segue que todas as hipóteses do Teorema 1.0.1 estão satisfeitas tomando-se o operador A como o operador de retorno definido em (3.6), o conjunto K_ξ no lugar de K e o ponto ejetivo como sendo a origem. Assim, o operador A tem ponto fixo não nulo, o que corresponde a uma solução periódica do problema impulsivo com período maior que $3r$, concluindo assim a prova de 3.2.1.

Observação 3.2.2 Uma solução periódica $x(t; \phi)$, $\phi \in K_\xi \setminus \{0\}$, cuja existência é estabelecida no Teorema 3.2.1 pode ser chamada lentamente espiralante como em [1], por ter o seguinte comportamento: existem t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 tais que

$$t_1 - t_0 > r, \quad t_2 - t_1 > r, \quad t_4 - t_3 > r \quad t_3 - t_2 > 0$$

e

$$x(t; \phi) \in Q_{i+2} \quad t_{i-1} < t < t_i \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Em outras palavras, a órbita periódica permanece em cada quadrante, Q_2, Q_3, Q_4 por um lapso de tempo maior do que r .

Observação 3.2.3 O Teorema 3.2.1 garante a existência de solução periódica com período maior que $3r$ para todo $\delta > 0$. A seguir veremos que para certos valores de δ , existe solução periódica de amplitude pequena e períodos pequenos oriundas de bifurcação de Hopf. Estas soluções não sofrem impulsos.

Este fato decorre da análise da equação característica (3.10) que, após a mudança de parâmetros $\nu = \lambda r$ e $\beta = r\delta$, onde δ é dado em (3.2), se reduz a

$$\nu^2 e^{2\nu} = -\beta^2. \quad (3.16)$$

Como as raízes ν ocorrem aos pares conjugados, basta uma análise de sua distribuição no semi-plano superior, $\nu = a + bi$, tal que $a \geq 0$.

Os Lemas 2.1-2.6 de [11] implicam que as raízes ν de (3.16) se distribuem no semi-plano complexo superior obedecendo as seguintes condições:

1) Existe precisamente uma raiz ν , que é simples, em cada faixa S_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, dada por

$$S_0 = \left\{ \nu = a + bi; 0 < b < \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$S_k = \left\{ \nu = a + bi; (k - \frac{1}{2})\pi < b < (k + \frac{1}{2})\pi \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2) Quando β varia em $(0, \infty)$ no sentido crescente a raiz $\nu_k(\beta) = a_k(\beta) + b_k(\beta)i$ da faixa S_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ descreve uma curva tal que $a_k(\beta)$ e $b_k(\beta)$ são funções estritamente crescentes de β e além disso,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} a_k(\beta) = \infty \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} a_0(\beta) = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} a_k(\beta) = -\infty \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} b_k(\beta) = \left(k + \frac{1}{2}\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} b_k(\beta) = \left(k - \frac{1}{2}\pi\right) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} b_0(\beta) = 0.$$

3) Quando β assume os valores $k\pi$, $k = 1, 2, \dots$, as raízes $\nu_k(\beta)$ são imaginárias puras da forma $\nu = k\pi i$, $k = 1, 2, \dots$ isto é,

$$\nu(k\pi) = k\pi i, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

4) Para todo $\beta > 0$, $a_{k+1}(\beta) < a_k(\beta)$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(\beta) = -\infty$.

De acordo com (3.11) um cálculo simples leva a

$$\frac{d\beta}{db} > 0.$$

Portanto, $\frac{db}{d\beta} > 0$ e como $b \tan b = a$ temos

$$\frac{da_k}{d\beta} > 0, \quad k = 1, 2, 3... \quad (3.17)$$

Voltando aos parâmetros originais, λ e δ , as observações 3.2.3 implicam que as raízes λ têm qualitativamente, a mesma distribuição das raízes ν no plano complexo. Isto é, quando δ varia de 0 a ∞ , a raiz λ percorre uma das curvas parametrizadas em δ , indicadas na figura 3.1, no sentido crescente

Figura 3.1: Distribuição das raízes λ

Os valores $\delta_k = \frac{\beta_k}{r}$ correspondentes ao cruzamento das raízes $\lambda_k, \bar{\lambda}_k$ com o eixo imaginário são $\delta_k = \frac{k\pi}{r}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. De acordo com (3.17),

$$\frac{d}{d\delta}(Re(\lambda_k(\delta)))_{\delta=\delta_k} \neq 0.$$

O seguinte teorema é agora uma consequência direta do Teorema da Bifurcação de Hopf, Teorema 1.1. de [4], segundo Hale.

Teorema 3.2.2 *Se (H1) estiver satisfeita então existe uma sequência $\delta_1 < \delta_2 < \dots \rightarrow \infty$ tal que a equação (3.1) tem uma bifurcação de Hopf em δ_k , $k = 1, 2, \dots$. Isto é, quando δ assume um dos valores δ_k , emana da solução trivial um ramo de soluções periódicas com período próximo de $\frac{2\pi}{k}$.*

3.3 Exemplos

O Teorema 3.2.1 garante a existência de solução periódica para o problema impulsivo (3.1) e (3.2). Uma tal solução pode ou não sofrer impulsos. Neste último caso seria uma solução periódica do problema não impulsivo (3.1). Isto sugere a questão: *Não seriam sem impulso todas as soluções periódicas de (3.1) ?* Neste caso o Teorema 3.2.1 seria um teorema relativo ao problema não impulsivo definido apenas pela equação (3.1). Nesta seção mostraremos, através de um exemplo, que podem efetivamente existir soluções periódicas impulsivas.

Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} (x_2, -x_1), & \text{se } |x| \leq M, \\ \frac{M(x_2, -x_1)}{|x|}, & \text{se } |x| \geq M \end{cases}$$

Não é difícil verificar que F satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3). Considerando agora constantes positivas a e c , sendo que $a \geq Mr$ temos a condição de impulso dado em (3.2),

$$x(t_+^-) \in I_{a,c} \Rightarrow x(t) = (a, \gamma(x_2(t))),$$

onde $\gamma : [c, \infty) \rightarrow [b, c]$ satisfaz as condições estabelecidas no início deste capítulo. Consideremos o conjunto

$$K_{a,b,c} = \{\phi \in C \mid \phi_1(-r) = a, b \leq \phi_2(-r) \leq c, \phi_1, \|\phi\| \text{ são não decrescentes} \\ \text{e } \phi_2 \text{ não crescente em } [-r, 0] \text{ e } \phi_j \text{ são } M\text{-Lipschitzianas, para } j = 1, 2\}$$

Este conjunto é fechado, limitado e convexo e, mais ainda é um subconjunto compacto de C em virtude das componentes ϕ_j , $j = 1, 2$ serem M -Lipschitzianas. Para definirmos um operador de retorno em $K_{a,b,c}$, mostremos que, se $\phi \in K_{a,b,c}$, então a solução por ϕ , $x(t; \phi)$, tem norma $|x(t; \phi)|$ crescente em t .

De fato, dado $\phi \in K_{a,b,c}$, temos três situações a considerar:

- 1) se $\phi(\theta) \in Q_1$ para todo $\theta \in [-r, 0]$.
- 2) se existir $\theta_0 \in [-r, 0]$ tal que $\phi_2(\theta_0) = 0$ e $\phi_1(\theta_0) > 0$.
- 3) se $\phi(\theta) \in Q_2$ para todo $\theta \in [-r, 0]$.

Utilizando os mesmos argumentos do Lema 3.2.1, podemos mostrar que existem funções contínuas $\tilde{t}_0$, $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ e $\tilde{t}_3$ satisfazendo:

$\tilde{t}_0 : K_{a,b,c}^0 \rightarrow [0, \infty)$ contínua, onde $K_{a,b,c}^0 = \{\phi \in K_{a,b,c}; \phi_2(-r) \geq 0\} \subset K_{a,b,c}$ e tal que $x_2(\tilde{t}_0(\phi); \phi) = 0$, $x_1(\tilde{t}_0(\phi); \phi) > 0$, $x(t; \phi) \in Q_1$ para $0 \leq t \leq \tilde{t}_0(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_2)$ se $\tilde{t}_0(\phi) < t < \tilde{t}_0(\phi) + \delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

$\tilde{t}_1 : K_{a,b,c} \rightarrow [0, \infty)$ contínua, tal que $x_2(\tilde{t}_1(\phi); \phi) < 0$, $x_1(\tilde{t}_1(\phi); \phi) = 0$, $x(t; \phi) \in Q_2$ para $0 \leq t \leq \tilde{t}_1(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_3)$ se $\tilde{t}_1(\phi) < t < \tilde{t}_1(\phi) + \delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

$\tilde{t}_2 : K_{a,b,c} \rightarrow [0, \infty)$ contínua, tal que $x_2(\tilde{t}_2(\phi); \phi) = 0$, $x_1(\tilde{t}_2(\phi); \phi) < 0$, $x(t; \phi) \in Q_3$ para $0 \leq t \leq \tilde{t}_2(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_4)$ se $\tilde{t}_2(\phi) < t < \tilde{t}_2(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

$\tilde{t}_3 : K_{a,b,c} \rightarrow [0, \infty)$ contínua, tal que $x_2(\tilde{t}_3(\phi); \phi) > 0$, $x_1(\tilde{t}_3(\phi); \phi) = 0$,

$x(t; \phi) \in Q_1$ para $0 \leq t \leq \tilde{t}_3(\phi)$ e $x(t; \phi) \in \text{int}(Q_1)$ se $\tilde{t}_3(\phi) < t < \tilde{t}_3(\phi) + \delta$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Para toda $\phi \in K_{a,b,c}$, afirmamos que $|x(t; \phi)|$ é crescente em $t \in [-r, \tilde{t}_1(\phi) + r]$, pois quando θ varia de $t - r$ a t , $x(\theta; \phi)$ percorre a órbita no sentido horário, de acordo com a Figura 3.2

Figura 3.2: Orientação da órbita de $x(t)$

Como $F(x)$ é o produto de uma função escalar positiva com a rotação de $\pi/2$ radianos no sentido horário, segue que $F(x(t-r; \phi))$ e $x(t; \phi)$ formam um ângulo agudo, isto é,

$$x(t; \phi) \cdot \dot{x}(t; \phi) = x(t; \phi) \cdot F(x(t-r; \phi)) > 0,$$

e portanto $|x(t; \phi)|$ é crescente.

Para $t > \tilde{t}_1(\phi) + r$ o raciocínio é o mesmo, logo a solução tem norma crescente até o primeiro instante de impulso.

Definamos agora a função $\tilde{\tau} : K_{a,b,c} \rightarrow (2r, \infty)$, onde $\tilde{\tau}(\phi)$ é o primeiro instante tal que

$$x_{\tilde{\tau}(\phi)+r}(\cdot; \phi) \in K_{a,b,c}.$$

Notemos que esta função está bem definida porque não existe $t > \tilde{t}_3(\phi)$ com $0 < x_1(t; \phi) \leq a$ e $x_2(t; \phi) = 0$, já que a norma da solução é crescente. Logo $\tilde{\tau}(\phi)$ fica univocamente determinado caso $x(\cdot; \phi)$ sofra impulso ou não no instante $\tilde{\tau}(\phi)$. A condição de impulso estabelecida e o Teorema da Continuidade em relação às condições iniciais implicam que $\tilde{\tau}(\phi)$ é contínua.

Podemos, então definir

$$\tilde{A} : K_{a,b,c} \rightarrow K_{a,b,c}$$

$$\tilde{A}(\phi) = x_{\tilde{\tau}(\phi)-\tau}(\cdot; \phi).$$

Como $K_{a,b,c}$ é compacto segue que $\tilde{A}$ é completamente contínua. Pelo Teorema de Schauder, $\tilde{A}$ tem um ponto fixo, que corresponde a uma solução periódica não trivial do problema impulsivo.

Esta solução necessariamente sofre impulso, pois se não sofresse teria norma crescente e, portanto, não poderia ser periódica.

Na verdade pode-se mostrar que existem soluções periódicas impulsivas para campos F muito mais gerais do que o do exemplo acima. Isto é, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.3.1 *Se F satisfaz as hipóteses (H1), (H2) e (H3), então existem constantes $a, c > 0$ tais que toda solução periódica não trivial de (3.1) e sujeita a condição de impulso*

$$x(t-) \in l_{a,c} \Rightarrow x(t) = (a, \gamma(x_2(t))),$$

onde $l_{a,c} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 = a, x_2 \geq c\}$, é impulsiva.

Demonstração: Consideremos o conjunto K definido em (3.5) e o operador de retorno $A : K \rightarrow K$ definido em (3.6). De acordo com os Lemas 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.11 e , a origem é ejetiva com relação a A .

Existe $L > 0$ e $B_L = \{\phi \in C: \|\phi\| < L\}$ tal que $\phi \in B_L$, existe $n = n(\phi)$ tal que $A^n(\phi) \notin B_L \cap K$.

Pela Proposição 3.2.1, dado L e $\|\phi\| \geq L$, existe $D_3 > 0$ tal que $x_1(t_3(\phi); \phi) \geq D_3$, onde D_3 está definido na Proposição 3.2.1. Afirmamos que para qualquer a , $0 < a < D_3$, existe $c > 0$ tal que $x(t; \phi)$ cruza $l_{a,c}$.

Suponhamos, por contradição que exista $\phi \in K$ tal que $x(t; \phi)$ seja uma solução periódica não impulsiva. Então necessariamente $\|\phi\| < L$. Portanto, existe $n = n(\phi)$ tal que $\|A^n \phi\| > L$, mas isto implica que $x(t; A^n \phi)$ cruza $l_{a,c}$, o que é uma contradição. Logo, qualquer que seja a solução periódica do problema (3.1) sujeita a condição de impulso acima é do tipo impulsiva. ■

Capítulo 4

Soluções periódicas contra-fluxo

4.1 Um caso linear

No problema de equações diferenciais planares tratado no capítulo 3, a hipótese (H1) é uma versão bidimensional da condição de retro-alimentação negativa classicamente formulada para o caso escalar. Esta hipótese sugere que as órbitas tenham comportamento de girar em torno da origem no sentido horário, pois o campo vetorial F considerado naquele capítulo pode ser representado no diagrama abaixo:

Figura 4.1: Sentido do campo

Os fatos deste capítulo demonstram, entretanto, que podem existir soluções cujas órbitas giram no sentido contrário ao do campo, isto é, giram no sentido

anti-horário em torno da origem. Neste caso, diremos que as soluções são contra-fluxo.

Se olharmos para as órbitas como caminhos no $\mathbb{R}^2$, uma equação linear extremamente simples permite uma observação mais contundente:

O plano pode ser coberto por uma família de órbitas periódicas contra-fluxo e, simultaneamente, por uma família que gira no sentido horário (sentido do campo).

Consideremos o sistema de equações

$$\begin{aligned}x'(t) &= \pi y(t-1) \\ y'(t) &= -\pi x(t-1).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Este é um caso particular de (3.1), onde $F(x, y) = (\pi y, -\pi x)$.

Fazendo $x_1 = x$ e $x_2 = y$, vemos que F satisfaz a hipótese (III) dada no capítulo 3.

Podemos escrever o sistema (4.1) como uma equação de segunda ordem

$$x''(t) = -\pi^2 x(t-2).\tag{4.2}$$

Estamos interessados em soluções 2-periódicas, o que implica

$$x(t-2) = x(t).$$

Assim, podemos reescrever o problema (4.2) como uma E.D.O.,

$$x''(t) + \pi^2 x(t) = 0,$$

cujas soluções gerais $x(t)$ tem a forma

$$x(t) = a \cos \pi t + b \sin \pi t,$$

onde a e b , são constantes. Usando (4.1), obtemos

$$y(t) = -a \operatorname{sen} \pi(t+1) + b \cos \pi(t+1),$$

o que implica

$$y(t) = a \operatorname{sen} \pi t - b \cos \pi t.$$

Se fizermos, por exemplo, $a = 0$ e $b = 1$, teremos uma solução 2-periódica da equação planar (4.1),

$$(x(t), y(t)) = (\operatorname{sen} \pi t, -\cos \pi t),$$

que gira no sentido anti-horário, isto é, contra-fluxo.

Como o sistema é linear, temos na verdade, uma família a um parâmetro α ,

$$\alpha(\operatorname{sen} \pi t, -\cos \pi t), \quad \alpha \geq 0$$

de soluções 2-periódicas, cujas órbitas cobrem todo o plano x, y . Além disso, para $\alpha > 0$ essas soluções são contra-fluxo.

Como antecipamos no início da seção, podemos construir ainda uma família a um parâmetro de soluções que também cobrem o plano, que giram em torno da origem no sentido horário.

De fato, considerando uma função contínua $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que satisfaz: φ_1 e φ_2 são estritamente crescentes, $\varphi \in Q_1$, $\varphi_1(-1) = 0$ e $\varphi_2(-1) > 0$. Seja $z(t) = (x(t), y(t))$ solução de (4.1) tal que $z(t)|_{[-1, 0]} = \varphi$.

Afirmamos que existe um primeiro instante $t_1 > 0$ em que $z(t)$ cruza o eixo x com abscissa positiva.

De fato, se não existir tal t_1 definamos $(c, d) = z(1) \in Q_1$. Observando que

$$\dot{y}(t) \leq -\pi \varphi_1(0) = -\eta < 0$$

para $t \geq 1$, e por

$$y(t) - y(1) \leq -\eta(t-1)$$

vê-se que $y(t) < 0$ quando $t > \frac{d}{\eta} + 1$.

Portanto está demonstrado a nossa afirmação.

Tomando $\psi(t) = z_{t_1-1}$ podemos argumentar de forma análoga para garantir a existência de um primeiro instante t_2 tal que $z(t)$ cruza o eixo y com ordenada negativa.

Procedendo assim sucessivamente construímos uma solução $z(t)$ que gira em torno da origem no sentido horário, conforme a figura abaixo.

Figura 4.2: Sentido da órbita

Considerando que (4.1) é linear, $z(t)$ gera a família

$$\alpha z(t), \quad \alpha \geq 0,$$

que cobre o plano x, y e para $\alpha > 0$ gira no sentido horário.

A aparente contradição de o sistema (4.1) possuir duas famílias de soluções ambas cobrindo o plano x, y , uma girando no sentido oposto da outra, estaria na idéia ingênua de se entender as órbitas de (4.1) como as órbitas de um sistema

dinâmico bidimensional. É claro que o sistema dinâmico definido por (4.1) tem dimensão infinita.

4.2 Estudo de um problema impulsivo

As considerações da seção anterior nos motivam a retomar o contexto mais geral da equação (3.1) e formular a seguinte questão: sob a hipótese (H1), que condições deve satisfazer o sistema não-linear

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= F_1(x(t-1)) \\ \dot{x}_2(t) &= F_2(x(t-1))\end{aligned}\tag{4.3}$$

para que existam soluções contra-fluxo? E soluções periódicas contra-fluxo?

Mostraremos que é possível introduzir impulsos radiais de modo a garantir a existência de soluções contra-fluxo. Com alguma restrição ao segundo membro de (4.3) vamos garantir a existência de soluções contra-fluxo periódicas.

Uma análise cuidadosa dos fatos apresentados na seção 4.1 mostra que a construção de soluções contra-fluxo de (4.1) depende, de forma crucial, de que a solução $(x(t), y(t))$ satisfaça

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) \in Q_1 &\Rightarrow (x(t-1), y(t-1)) \in Q_3, \\ (x(t), y(t)) \in Q_2 &\rightarrow (x(t-1), y(t-1)) \in Q_4, \\ (x(t), y(t)) \in Q_3 &\Rightarrow (x(t-1), y(t-1)) \in Q_1, \\ (x(t), y(t)) \in Q_4 &\rightarrow (x(t-1), y(t-1)) \in Q_2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Estas condições acarretam que se $(x(t), y(t))$ está sobre um dos eixos então $(x(t-1), y(t-1))$ está sobre o mesmo eixo em posição oposta com respeito à origem.

As condições (4.4) são muito rígidas e se constituem, de fato, numa dificuldade extrema para se obter uma resposta positiva à nossa questão.

No entanto, podemos acrescentar uma condição de auto-sustentação impulsiva ao sistema (4.3) de modo que certas soluções do sistema gozem das propriedades (4.4).

É importante observar que os impulsos serão radiais, isto é, se t for um instante de impulso de uma solução $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ então $x(t+)$ e $x(t-)$ estarão alinhados com a origem. Portanto, a condição de auto-sustentação não afetará a orientação do campo em $\mathbb{R}^2$.

Nestas condições provaremos que o sistema (4.3) acrescido de uma tal condição de auto-sustentação tem solução contra-fluxo.

Vamos necessitar da seguinte definição.

Definição 4.2.1 *Dada uma curva*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

*do plano x_1, x_2 ; diz-se que $t \in (\alpha, \beta]$ é um **instante crítico** se γ cruza transversalmente um dos eixos coordenados pela esquerda em $\gamma(t)$. Isto é, vale uma das alternativas:*

$$(i) \quad \gamma_1(t) = 0, \quad \dot{\gamma}_1(t) \neq 0,$$

$$(ii) \quad \gamma_2(t) = 0, \quad \dot{\gamma}_2(t) \neq 0.$$

Suponhamos que $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sejam contínuas e satisfazem as seguintes hipóteses:

$$\textbf{(H1)} \quad x_2 F_1(x) > 0, \text{ se } x_2 \neq 0 \text{ e } x_1 F_2(x) < 0, \text{ se } x_1 \neq 0.$$

(H2) Existe uma constante $M > 0$ tal que $|F_j(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $j = 1, 2$.

Consideremos o problema dado pelo sistema (4.3), onde $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$, sujeito à condição de impulso

$$\begin{aligned} x_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad x_2(t-1) \neq 0 &\Rightarrow x_2(t+) = - \int_{t-1}^{t-\frac{1}{2}} F_2(x(s)) ds, \\ x_2(t) = 0 \quad \text{e} \quad x_1(t-1) \neq 0 &\Rightarrow x_1(t+) = - \int_{t-1}^{t-\frac{1}{2}} F_1(x(s)) ds \end{aligned} \quad (4.5)$$

para $t > 0$.

Se $x(t) \neq (0, 0)$, a notação $x(t+)$ significa

$$x(t+) = \begin{cases} (x_1(t+), x_2(t)), & \text{se } x_1(t) = 0, x_2(t-1) \neq 0 \\ (x_1(t), x_2(t+)), & \text{se } x_2(t) = 0, x_1(t-1) \neq 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Por (4.5) podemos notar que o espaço $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ não pode ser utilizado como espaço de fases, neste caso consideraremos um espaço mais geral, dado por $G = G([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ que é o espaço das funções regradas, definidas em $[-1, 0]$ com imagem em $\mathbb{R}^2$, cujas propriedades estão descritas no Capítulo 1.

Consideremos o subconjunto K , do espaço G , tal que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in K$ se, e somente se,

(i) $\varphi_1(0) = \varphi_1(-1) = 0$, $\varphi_1(\theta)$ é não decrescente para $\theta \in [-1, -1/2]$ e é não crescente para $\theta \in [-1/2, 0]$; $\varphi_1|_{[-1, 0] \setminus \{-\frac{1}{2}\}}$ é contínua.

(ii) $\varphi_2(-1/2) = 0$ e $\varphi_2(\theta)$ é não decrescente para $\theta \in [-1, 0]$; $\varphi_2|_{(-1, 0)}$ é contínua.

(iii) $\|\varphi_j\| \leq M$ e φ_j são M -Lipschitzianas, para $j = 1, 2$.

Vamos supor que

$$x_0 - \varphi \in K \quad (4.7)$$

Vamos definir solução para o problema impulsivo (4.3), (4.5) e (4.7), observando que os momentos de impulso da solução devem ser instantes críticos, de acordo com a definição (4.2.1).

Definição 4.2.2 *Uma solução do problema (4.3), (4.5) e (4.7) é uma função $x = (x_1, x_2) : [-1, w) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w > 0$, satisfazendo:*

$$(i) \ x|_{[-1,0]} = \varphi$$

$$(ii) \ Lembrando que $F(x_1, x_2) = (F_1(x), F_2(x))$,$$

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t F(\varphi(s-1)) ds, \quad t \in [0, \tau],$$

onde $\tau = 1$ ou $\tau \in (0, 1)$ é o primeiro instante crítico de $x(t)$.

Se τ é um instante crítico, então

$$x(t) = x(\tau+) + \int_\tau^t F(x(s-1)) ds, \quad t \in (\tau, \tau_1] \subset [0, w),$$

onde $\tau_1 = \tau + 1$ ou $\tau_1 \in (\tau, \tau + 1)$ é o primeiro instante crítico de $x(t)$ neste intervalo.

E assim sucessivamente.

Vale observar que dada uma condição inicial no conjunto K , o problema (4.3), (4.5) e (4.7) tem uma única solução em $[-1, \infty)$, que pode ser construída por processo recursivo em sucessivos intervalos de comprimento unitário. Notemos

que fixar $t_0 = 0$ não constitui perda de generalidade, uma vez que o problema é autônomo.

Tomando $\epsilon > 0$ pequeno, podemos definir a função $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ do seguinte modo:

$$c_1(t) = \begin{cases} 2\epsilon(t+1), & \text{se } t \in [-1, -1/2] \\ -2\epsilon t, & \text{se } t \in [-1/2, 1/2] \\ 2\epsilon(t-1), & \text{se } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$c_2(t) = \begin{cases} 2\epsilon t + \epsilon & \text{se } t \in [-1, 0] \\ -2\epsilon(t-1/2), & \text{se } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Estendemos $c(t)$ a toda a reta, de modo que ela seja 2-periódica. Notemos que $c(t)|_{[-1,0]} \in K$.

Consideremos agora o conjunto $K_\epsilon \subset K$ tal que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in K_\epsilon$ se $\varphi \in K$ e se

$$\varphi_1(\theta) \geq c_1(\theta), \quad \theta \in [-1, 0]$$

$$|\varphi_2(\theta)| \geq |c_2(\theta)|, \quad \theta \in [-1, 0].$$

Um elemento do conjunto $K_{\epsilonpsiton}$ está representado na figura 4.3.

Observação 4.2.1 *A função F satisfaz a hipótese (H1) que também está satisfeita no capítulo 3. Naquele caso, esta hipótese força as órbitas das soluções a*

Figura 4.3: $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in K_\epsilon$

girar no sentido horário em torno da origem. Aqui, entretanto, dado $\varphi \in K_\epsilon$ se denotarmos $\bar{\varphi} \in K_\epsilon$ definida por

$$\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta) \quad \text{para } -1 \leq \theta < 0 \quad \text{e} \quad \bar{\varphi}(0) = \left(0, - \int_{-1}^{-1/2} F_2(\varphi(s)) ds \right)$$

temos que a solução $x = x(\cdot; \bar{\varphi})$ do problema (4.3), (4.5) gira em torno da origem no sentido anti-horário, conforme a figura 4.4.

Figura 4.4: Sentido das órbitas de $x(\cdot; \bar{\varphi})$ no plano $x_1 x_2$.

Sejam $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e crescentes, que satisfazem as seguintes hipóteses

- (A) $sf_j(s) > 0$, se $s \neq 0$ e, $j = 1, 2$;
 (B) $\exists M > 0$; $|f_j(s)| \leq M$, $\forall s$, $j = 1, 2$;
 (C) $|f_j(s)| \geq 4|s|$ para $|s| < \delta$, $\delta > 0$ pequeno e $j = 1, 2$.

A condição (A) garante que, para $F(x_1, x_2) = (f_1(x_2), -f_2(x_1))$, a hipótese (H1) está satisfeita.

Consideremos o problema dado pelo sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_2(t-1)) \\ \dot{x}_2(t) &= -f_2(x_1(t-1)) \end{aligned} \tag{4.8}$$

sujeito à condição de impulso

$$\begin{aligned} x_1(t) = 0 \quad \text{e} \quad x_2(t-1) \neq 0 &\Rightarrow x_2(t+) = \int_{t-1}^{t-\frac{1}{2}} f_2(x_1(s)) ds, \\ x_2(t) = 0 \quad \text{e} \quad x_1(t-1) \neq 0 &\Rightarrow x_1(t+) = - \int_{t-1}^{t-\frac{1}{2}} f_1(x_2(s)) ds \end{aligned} \tag{4.9}$$

para $t > 0$.

Se fizermos $\epsilon = \delta$ e considerarmos o conjunto K_δ ; pela observação 4.2.1, o problema (4.8) e (4.9) com a condição inicial em K_δ , tem solução contra-fluxo. Em seguida mostraremos que existe solução contra-fluxo desse problema que é periódica.

Por adaptações diretas de argumentos clássicos de compacidade no espaço $C(I, \mathbb{R}^n)$ (I um intervalo compacto) pode-se provar que K_δ é compacto e convexo. Assim, basta definirmos um operador de retorno contínuo de K_δ em K_δ , cujos pontos fixos corresponderão a soluções periódicas.

Definamos

$$A : K_\delta \rightarrow G \quad \text{por} \quad A(\varphi) = x_2(., \bar{\varphi}) \tag{4.10}$$

onde $\bar{\varphi}$ é dada por

$$\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(\theta) \quad \text{para } -1 \leq \theta < 0 \quad \text{e} \quad \varphi(0) = \left(0, \int_{-1}^{-1/2} f_2(\varphi_1(s)) ds\right).$$

Em (4.10), $x_2(\cdot; \bar{\varphi})$ representa $x_\tau(\cdot; \bar{\varphi})$ com $\tau = 2$ e não a segunda coordenada de $x(\cdot; \bar{\varphi})$.

Teorema 4.2.1 *O operador A definido em (4.10) é contínuo e $A(K_\delta) \subset K_\delta$.*

Demonstração: Seja $\varphi \in K_\delta$. Vamos mostrar que $A\varphi \in K_\delta$ por construção.

Primeiramente, consideremos $t \in [0, 1/2]$ e $\bar{\varphi}$ como na observação (4.2.1).

Pelas hipóteses sobre a f_2 , podemos afirmar que

$$x_2(0) = \int_{-1}^{-1/2} f_2(\varphi_1(s)) ds \geq \int_{-1}^{-1/2} f_2(c_1(s)) ds \geq 4 \int_{-1}^{-1/2} c_1(s) ds = \delta,$$

$f_2(\varphi_1(s)) \geq 0$ e é crescente para $s \in [-1, -1/2]$, portanto

$$\begin{aligned} x_2(t; \varphi) = x_2(t) &= x_2(0) - \int_0^t f_2(\varphi_1(s-1)) ds \\ &= \int_{-1}^{-1/2} f_2(\varphi_1(s)) ds - \int_{-1}^{t-1} f_2(\varphi_1(s)) ds \quad t \in [0, 1/2] \end{aligned}$$

é decrescente no intervalo $[0, 1/2]$ e $x_2(t) > 0$ para t em $[0, 1/2)$, satisfazendo $x_2(1/2) = 0$. Além disso, $x_2(t)$ é uma função côncava em $[0, 1/2]$, o que implica

$$|x_2(t)| \geq |c_2(t)|, \quad t \in [0, 1/2].$$

No caso da coordenada x_1 , temos que $f_1(\varphi_2(s)) \leq 0$ e é crescente para $s \in [-1, -1/2]$, então $x_1(t)$ dado por

$$x_1(t; \varphi) = x_1(t) = \int_0^t f_1(\bar{\varphi}_2(s-1)) ds = \int_{-1}^{t-1} f_1(\varphi_2(s)) ds \quad t \in [0, 1/2]$$

é decrescente e negativa em $[0, 1/2]$ e

$$x_1(1/2) = \int_{-1}^{-1/2} f_1(\varphi_2(s)) ds \leq \int_{-1}^{-1/2} f_1(c_2(s)) ds \leq 4 \int_{-1}^{-1/2} c_2(s) ds = -\delta.$$

Além disso, $x_1(t)$ é uma função convexa em $[0, 1/2]$, logo está satisfeita a condição

$$|x_1(t)| \geq |c_1(t)|, \quad t \in [0, 1/2].$$

Observemos que a coordenada $x_1(t)$ sofre impulso em $t = \frac{1}{2}$, já que $x_2(1/2) = 0$ e $x_1(-1/2) = \varphi_1(-1/2) \neq 0$, que satisfaz

$$\begin{aligned} x_1(1/2+) &= - \int_{-1/2}^0 f_1(x_2(s)) ds = - \int_{-1/2}^0 f_1(\varphi_2(s)) ds \\ &\leq - \int_{-1/2}^0 f_1(c_2(s)) ds \leq -4 \int_{-1/2}^0 c_2(s) ds = -\delta. \end{aligned}$$

Como $f_1(\varphi_2(s)) \geq 0$ e é crescente para $s \in (-1/2, 0]$, vale que $x_1(t)$ dado por

$$x_1(t) = x_1(1/2+) + \int_{1/2}^t f_1(\varphi_2(s-1)) ds \quad t \in [1/2, 1],$$

é crescente e negativa no intervalo $(1/2, 1]$. Em $t = 1$, $x_1(t) = 0$ e $x_2(t-1) = x_2(0) \neq 0$ e portanto $t = 1$ é um instante de impulso. Além disso, $x_1(t)$ é uma função convexa neste intervalo, logo

$$|x_1(t)| \geq |c_1(t)|, \quad t \in [1/2, 1].$$

$x_2(1/2) = 0$, $f_2(\varphi_1(s)) \geq 0$ e é decrescente para $s \in (-1/2, 0]$, isso tudo implica que $x_2(t)$ é decrescente e negativa no intervalo $[1/2, 1]$. Para $t = 1$ vale

$$x_2(1) = - \int_{-1/2}^0 f_2(\varphi_1(s)) ds \leq -4 \int_{-1/2}^0 c_1(s) ds = -\delta,$$

Observando também que $x_2(t)$ é uma função convexa em $[1/2, 1]$, podemos concluir que

$$|x_2(t)| \geq |c_2(t)|, \quad t \in [1/2, 1].$$

Agora, para $t \in [1, 3/2]$, temos que $x_2(t)$ sofre impulso em $t = 1$, e satisfaz

$$x_2(1+) = \int_0^{1/2} f_2(x_1(s)) ds \leq 4 \int_0^{1/2} c_1(s) ds = -\delta.$$

Como $f_2(x_1(s)) \leq 0$ e é decrescente para $s \in [0, 1/2]$, então $x_2(t)$ dado por

$$x_2(t) = x_2(1+) - \int_1^t f_2(x_1(s-1)) ds \quad t \in (1, 3/2]$$

é crescente e negativa para $t \in (1, 3/2]$. Em $t = 3/2$, $x_2(t) = 0$ e $x_1(3/2-1) = x_1(1/2) \neq 0$. O que nos diz que $t = 3/2$ é um instante de impulso. Notemos também que $x_2(t)$ é uma função convexa no intervalo $(1, 3/2]$, logo

$$|x_2(t)| \geq |c_2(t)|, \quad t \in [1, 3/2].$$

Como $x_1(1) = 0$ e $f_1(x_2(s)) \geq 0$ para $s \in [0, 1/2]$, então $x_1(t)$ dado por

$$x_1(t) = \int_1^t f_1(x_2(s-1)) ds \quad t \in [1, 3/2]$$

é crescente e positiva neste intervalo. Para $t = 3/2$, vale

$$x_1(3/2) = \int_1^{3/2} f_1(x_2(s-1)) ds \geq \int_0^{1/2} f_1(c_2(s)) ds \geq 4 \int_0^{1/2} c_2(s) ds = \delta.$$

Além disso, $x_1(t)$ é uma função côncava em $[1, 3/2]$, pois $\dot{x}_1(t) = f_1(x_2(t-1))$ é decrescente. Portanto, vale

$$|x_1(t)| \geq |c_1(t)|, \quad t \in [1, 3/2].$$

Finalmente para $t \in [3/2, 2]$, $x_1(t)$ sofre impulso em $t = \frac{3}{2}$, e satisfaz

$$x_1(3/2+) = - \int_{1/2}^1 f_1(x_2(s)) ds \geq - \int_{1/2}^1 f_1(c_2(s)) ds \geq -4 \int_{1/2}^1 c_2(s) ds = \delta.$$

Como $f_1(x_2(s)) \leq 0$ e é decrescente para $s \in [1/2, 1]$, então $x_1(t)$ dada por

$$x_1(t) = x_1(3/2+) + \int_{3/2}^t f_1(x_2(s-1)) ds, \quad t \in [3/2, 2]$$

é decrescente e positiva no intervalo $(3/2, 2]$. Notemos que $x_1(2) = 0$ e $x_2(2-1) \neq 0$. Além disso, $x_1(t)$ é uma função côncava em $(3/2, 2]$, e portanto

$$|x_1(t)| \geq |c_1(t)|, \quad t \in [3/2, 2].$$

$x_2(3/2) = 0$ e como $f_2(x_1(s)) \leq 0$ para $s \in (1/2, 1]$, então $x_2(t)$ é crescente e positiva no intervalo $(3/2, 2]$. Para $t = 2$ vale

$$x_2(2) = - \int_{3/2}^2 f_2(x_1(s-1)) ds \geq - \int_{1/2}^1 f_2(c_1(s)) ds \geq -4 \int_{1/2}^1 c_1(s) ds = \delta,$$

ou seja, $x_2(2) \geq \delta$. Notemos que $x_2(t)$ é uma função côncava neste intervalo, pois $\dot{x}_2(t) = -f_2(x(t-1))$ é decrescente, logo

$$|x_2(t)| \geq |c_2(t)|, \quad t \in [3/2, 2].$$

Provado isto, fica claro que $x_\tau(\cdot; \bar{\varphi}) \in K_\delta$ com $\tau = 2$. Portanto $AK_\delta \subset K_\delta$.

Seja agora $\varphi^n = (\varphi_1^n, \varphi_2^n) \in K_\delta$, $n = 1, 2, \dots$. Se $\varphi^n \rightarrow \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ quando $n \rightarrow \infty$, então $x(t; \bar{\varphi}^n) \rightarrow x(t; \bar{\varphi})$, para $t \in [0, 1/2]$ uniformemente, ou seja,

$$x_{1/2}(\cdot; \bar{\varphi}^n) \rightarrow x_{1/2}(\cdot; \bar{\varphi}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Tomando $\psi^n = x_{1/2}(\cdot; \bar{\varphi}^n)$ e $\psi = x_{1/2}(\cdot; \bar{\varphi})$, com

$$\psi_1^n(1/2+) = - \int_{-1/2}^0 f_1(\psi_2^n(s)) ds, \quad \psi_1(1/2+) = - \int_{-1/2}^0 f_1(\psi_2(s)) ds$$

vê-se analogamente que, $x_1(\cdot; \bar{\varphi}^n) \rightarrow x_1(\cdot; \bar{\varphi})$ quando $n \rightarrow \infty$. Aqui também $x_1(\cdot; \bar{\varphi})$ indica $x_\tau(\cdot; \bar{\varphi})$ tal que $\tau = 1$.

Procedendo assim mais duas vezes sucessivas, verificamos que

$$x_2(\cdot; \varphi^n) \rightarrow x_2(\cdot; \bar{\varphi}) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto o operador de retorno A é contínuo. ■

Pelo Teorema de Schauder, existe um ponto fixo de A o que implica que existe uma solução 2-periódica contra-fluxo de (4.8) e (4.9).

Referências Bibliográficas

- [1] M.Z. Baptistini and P.Z. Táboas, *On the existence and global bifurcation of periodic solutions to planar differential delay equations*, Journal of Differential Equations, Vol. 127, 391-425 (1996).
- [2] S.M.S. Godoy, J.G. Reis, *Stability and existence of periodic solutions of a functional-differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 198, 381-398 (1996).
- [3] K. Gopalsamy, B.G. Zhang, *On delay differential equations with impulses*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 139, 110-122 (1989).
- [4] J.K. Hale and S.M.V. Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, New York, Springer (1993).
- [5] Chaim S. Hönl, *Volterra Stieltjes-Integral Equations*, North-Holland Publishing Company (1975).
- [6] E. Kruger-Thimer, *Formal theory of drug dosage regiments*, I. Journal Theo. Biology, Vol. 13 (1966).
- [7] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov e P.S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific Publishing Company, Singapore (1989).
- [8] B. Li and Y. Kuang, *Sharp conditions for oscillations in some nonlinear nonautonomous delay differential equations*, Nonlinear analysis, theory, methods and applications, vol. 29, n° 11, 1265-1276 (1997).

- [9] H. Matsunaga, R. Miyazaki, T. Hara, *Global attractivity results for nonlinear delay differential equations*, Journal of mathematical analysis and applications, vol. 234, 77-90 (1999).
- [10] A.D. Myshkis, *Autonomous differential equations with impulsive self-support and infinite delay*, Functional Differential Equations, Vol. 3, n^o 1-2, 145-154 (1995).
- [11] P.Z. Táboas, *Periodic solutions of a planar delay equations*, Proc. Royal Society Edinburgh, Vol. 116A, 85-101 (1990).
- [12] M.E. Quiroga, *Sobre alguns problemas de periodicidade em equações diferenciais impulsivas com retardamento*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (1999).
- [13] Y. Zhang, A. Zhao, J. Yan, *Oscillation criteria for impulsive delay differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 205, 461-470 (1997).
- [14] A. Zhao, J. Yan, *Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations*, Journal Mathematical Analysis and applications, vol. 201, 943-954 (1996).
- [15] A. D. Myshkis, *Auto-oscillations in continuos systems with impulsive self-support*, em Resenhas do IME-USP, vol.3, n^o 1, 93-106 (1997).