SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 28.10.2002

Assinatura:

Ações de $\mathbb{R}^n$ em M^m com $2 \leq n \leq m \leq 3$ ¹

Carlos Alberto Maquera Apaza

Orientador: *Prof. Dr. José Luis Arraut Vergara*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática.

USP – São Carlos
Outubro de 2002

¹ Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP.

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Luis Arrau Vergara

Prof. Dr. César Leopoldo Camacho Manco

Prof. Dr. Nathan Moreira dos Santos

Prof. Dr. Sebastião Marcos Antunes Firmo

Prof. Dr. Carlos Biasi

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Mauro e Juana, aos meus irmãos, em especial ao meu irmão José pela sua ajuda e motivação desde a época da universidade. A uma mulher muito especial Gloria pela compreensão e apoio nas minhas decisões, pelo amor incondicional e por ter me dado dois filhos maravilhosos, Luana e Matheus. Ao meu orientador, Prof. Arraut, pela paciência, amizade, atenção e pelas boas discussões, sugestões e ideias.

Gostaria de agradecer as pessoas que me ajudaram ao longo da minha vida e me honraram com sua amizade. A todos meus amigos e amigas... Aos Professores do ICMC pela formação, que sem lugar a duvidas facilitaram a realização deste trabalho. A todos os funcionários e alunos do ICMC, que ao longo desse tempo me fizeram me sentir em casa.

Finalmente agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Consideramos ações de classe C^r , $r \geq 2$, do grupo $\mathbb{R}^n$ em variedades diferenciáveis fechadas M^m de dimensão m com $2 \leq n \leq m \leq 3$. Introduzimos o conceito de órbita compacta normalmente hiperbólica e para $n = m$ obtemos alguns resultados de estabilidade estrutural em torno de uma órbita singular compacta. Combinando estes resultados com os resultados de C. Camacho obtemos também alguns resultados de estabilidade estrutural global. Também demonstramos que em alguns casos o tipo topológico das órbitas de uma ação impõe restrições sobre a topologia da variedade M^m . Finalmente, definimos o conceito de órbita compacta centro para órbitas compactas singulares e obtemos alguns resultados de estabilidade estrutural global de ações singulares analíticas reais.

Abstract

We consider C^r , $r \geq 2$, actions of $\mathbb{R}^n$ on closed m -manifolds with $2 \leq n \leq m \leq 3$. We introduce the concept of normally hyperbolic compact orbit and for $n = m$ obtain some results on local structural stability. Combining these results with others of C. Camacho we obtain also some results on global structural stability. We also show that the topological type of the orbits imposes restrictions on the topology of the manifold. Finally, we define the concept of center for compact singular orbits and obtain some results on the global structural stability of analytic singular actions.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	9
2 Formas Canônicas Locais de Ações	11
3 Órbitas Compactas Normalmente Hiperbólicas	21
3.1 Pontos Fixos Hiperbólicos	21
3.2 Definição de Órbita Compacta Normalmente Hiperbólica	23
3.3 Algumas Conseqüências da Definição de Órbitas Compactas Normal- mente Hiperbólicas	27
3.3.1 Caso $\dim M = n$:	29
3.3.2 Caso $m \geq n = 2$:	32
3.3.3 Caso $m = n = 3$ e $k = 1$:	32
3.3.4 Demonstração dos Teoremas A e A'	35
4 Demonstração dos Teoremas B e B'	37
4.1 Demonstração do Teorema B	40
4.1.1 Alguns Resultados Sobre Instabilidade: Caso $n = 2$	42
4.1.2 Demonstração do Teorema B	46
4.2 Demonstração do Teorema B'	47
4.2.1 Alguns Resultados sobre Instabilidade: Caso Geral	47
4.2.2 Demonstração do Teorema B'	51
5 Algumas Propriedades Globais de Ações	52
5.1 Órbitas Compactas Centro	52
5.1.1 Órbitas Compactas Centro em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$	52
5.1.2 Órbitas Compactas Centro em $\text{Act}_{n-1}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$	58
5.2 Propriedades de Ações de $\mathbb{R}^2$ Sobre M^2	60
5.2.1 Algumas Aplicações	65

5.3	Propriedades de Ações de $\mathbb{R}^3$ Sobre M^3	71
5.3.1	Algumas Aplicações	80
	Referências Bibliográficas	85

Introdução

Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação do grupo G sobre M isto é, a aplicação $g \mapsto \varphi_g = \varphi(g, \cdot)$ é um homomorfismo de G no grupo de transformações invertíveis de M . Tradicionalmente, ações de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Z}$ tem sido os principais objetos de estudo da teoria de sistemas dinâmicos. Por exemplo, se X é um campo vetorial sobre uma variedade compacta M , seu fluxo define uma ação de $\mathbb{R}$ sobre M ; analogamente se f é um difeomorfismo de M , os iterados de f e f^{-1} definem uma ação de $\mathbb{Z}$ sobre M . Podemos pensar no grupo como parâmetro de “tempo” e assim, a órbita de φ passando pelo ponto p

$$\mathcal{O}_p(\varphi) = \{\varphi(g, p) \mid g \in G\}$$

descreve a evolução do sistema, começando de um estado inicial em M representado por p .

Para ações de um grupo mais geral, os “tempos de evolução” associados para seus subgrupos a um parâmetro são “relacionados” de acordo com a estrutura algébrica de G . Em particular, se $G = \mathbb{R}^n$, as evoluções dadas pelos subgrupos a um parâmetro são dadas por fluxos que comutam. Associados a estes fluxos temos uma família de campos vetoriais $X_1, \dots, X_n$ (geradores infinitesimais de φ) em M tais que o colchete de Lie satisfaz

$$[X_i, X_j] = 0; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Como é de se esperar, se espelhando na teoria clássica dos sistemas dinâmicos, aparecem naturalmente muitos problemas para ações, dentre eles os problemas de estabilidade estrutural (local e global). Quando G é um grupo de Lie compacto e conexo, R. Palais [19] demonstrou que qualquer ação de G é estruturalmente estável. Desde então vários autores estudaram problemas de estabilidade de ações de grupos não compactos, entre eles, C. Camacho [2] e [3], Pugh-Shub [17], M. Hirsch [15] e N. Saldanha [21]. De modo geral não houve muito avanço pois, até hoje poucos resultados deste tipo de problemas foram obtidos. Porém C. Camacho [2] e [3] considerou ações de classe C^r , $r \geq 1$ do grupo $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$ sobre uma variedade diferenciável C^∞ , M de dimensão m e definiu o conceito de ponto fixo hiperbólico de uma tal ação e provou

entre outros os seguintes resultados:

(1) *Seja p um ponto fixo hiperbólico da ação $\varphi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell) \times M \rightarrow M$ com $m \leq k+1$. Então φ é localmente estruturalmente estável em p .*

(2) *Seja p um ponto fixo hiperbólico da ação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ com $m = 4$. Então φ é localmente estruturalmente estável em p .*

Para $k = m = 2$ e $\ell = 0$ em [3] C. Camacho definiu uma família de ações chamando-as de Morse-Smale provando os seguintes resultados:

(3) *As ações de Morse-Smale são estruturalmente estáveis.*

(4) *As ações estruturalmente estáveis não formam um conjunto denso.*

O conceito de ponto fixo hiperbólico implica, entre outras coisas, que o conjunto de pontos pertencentes às órbitas de dimensão k é um aberto e denso numa vizinhança do ponto fixo.

Em [2] o autor enunciou a recíproca de (1), mas segue do Exemplo 4.1 que a recíproca deste teorema é falsa. Por outro lado em [7] P. Sad demonstrou o seguinte resultado.

Seja $\mathcal{A}_T$ o subconjunto (aberto) de $\mathfrak{X}^\infty(M)$ de todos os campos vetoriais que satisfazem o Axioma A e a condição de transversalidade forte. Então existe um aberto e denso $\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}_T$ (na C^∞ -topologia), tal que se $X \in \mathcal{A}$ e $[X, Y] = 0$, então $Y = cX$ para algum $c \in \mathbb{R}$.

Seja $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, o espaço das C^r ações de $\mathbb{R}^n$ sobre M^m com geradores infinitesimais C^r munido da C^1 -topologia definida pela correspondente C^1 -topologia no seus geradores infinitesimais. Então como consequência deste resultado obtemos um aberto $\mathcal{A}_1$ de $\text{Act}^\infty(\mathbb{R}^n, M^m)$ (na C^∞ -topologia) cujos elementos são C^∞ -estruturalmente estáveis. Note-se que para cada ação em $\mathcal{A}_1$ as órbitas tem dimensão menor ou igual a um. Conseqüentemente, se verifica que nenhum ponto fixo destas ações pode ser hiperbólico (no sentido de Camacho).

Neste trabalho introduzimos o conceito de hiperbolicidade normal para órbitas compactas singulares e exploramos este conceito no contexto da estabilidade estrutural demonstrando no caso geral:

Se $\mathcal{O} \simeq T^k$, $k \leq n - 1$, é uma órbita normalmente hiperbólica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$, com $m \leq n + 1$ ou $n = 2$, $m = 4$, então $\mathcal{O}$ é persistente.

É natural pensar que as ações no caso $n = m$ sejam mais simples de se estudar e entender, no entanto são conhecidos poucos resultados de estabilidade estrutural (local e global) sobre estas ações, entre eles temos (1) e para $n = 2$ (3) e (4). Nesta tese centramos os esforços no estudo das ações de $\mathbb{R}^n$ em variedades M^n de dimensão n dando maior ênfase nos casos em que $n = 2, 3$. Neste caso, as órbitas compactas normalmente hiperbólicas são mais do que persistentes. Mais precisamente temos:

Teorema A *Se $\mathcal{O}_0$ é uma órbita compacta normalmente hiperbólica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, com $n \in \{2, 3\}$, então φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

De forma análoga que no ponto fixo hiperbólico, o conceito de órbita compacta normalmente hiperbólica implica, entre outras coisas, que o conjunto dos pontos que pertencem às órbitas de dimensão n é um aberto e denso numa vizinhança da órbita compacta. Para $n = 2$, do Exemplo 4.1, segue que $\mathcal{O}_0$ ser normalmente hiperbólica não é condição necessária para obter a estabilidade estrutural de φ em $\mathcal{O}_0$. Para $n > 2$, temos o seguinte resultado de Kato-Morimoto [12]

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ com X campo de Anosov. Então $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $Y = cX$, onde $c \in \mathbb{R}$ é constante.

Como consequência deste resultado obtemos um aberto $\mathcal{A}'_1$ de $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$, $m \geq 3$ (na C^1 -topologia) cujos elementos são estruturalmente estáveis. Além disso, para cada ação em $\mathcal{A}'_1$ as órbitas tem dimensão igual a um (não há pontos fixos), isto implica que as órbitas compactas não podem ser normalmente hiperbólicas.

A dificuldade de encontrar uma condição necessária para a estabilidade estrutural local está no fato de que é muito difícil perturbar ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $n \geq 2$. Mas em determinadas situações a hiperbolicidade normal de uma órbita círculo se torna uma condição necessária para estabilidade estrutural local. Mais precisamente, para $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, seja $\text{Sing}(\varphi)$ o conjunto de pontos (singulares da ação φ) cujas φ -órbitas tem dimensão menor do que n e $\text{Act}^r_n(\mathbb{R}^n, M^n) = \{\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n); \overline{M^n \setminus \text{Sing}(\varphi)} = M^n\}$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema B *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita círculo de $\varphi \in \text{Act}^r_2(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$. Se φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$, então $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica.*

Também foram encontrados alguns resultados de natureza global. Seja $\mathcal{A}'_0(\mathbb{R}^2, M^2)$ a família de ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ tal que para cada $p \in \text{Fix}(\varphi)$ existe uma vizinhança V_p de p satisfazendo uma das seguintes propriedades:

- (1) V_p é φ -invariante, homeomorfo a um disco aberto e $\overline{V_p} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{p\}$.
- (2) V_p contém no máximo um número finito de órbitas de dimensão maior ou igual a 1.

Em determinadas situações, a estrutura de órbitas destas ações é muito rígida e, conseqüentemente elas só convivem em ambientes M^2 bem determinados. Nesse sentido temos o seguinte resultado.

Teorema C *Se $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, tem uma órbita cilíndrica, então φ não possui órbitas plano. Além disso,*

- (1) $\text{Sing}(\varphi) = \emptyset$, então $M = T^2$.
- (2) Se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, então $\text{Fix}(\varphi)$ tem exatamente dois pontos e $M = S^2$.

Como a família $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ contém as ações em $\text{Act}_0^{\omega}(\mathbb{R}^2, M^2)$ e todas as ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ cujos pontos fixos são hiperbólicos e órbitas círculo normalmente hiperbólica, então o Teorema C dá uma descrição completa da estrutura de órbitas destas ações.

Usando alguns resultados de C. Camacho [2] em torno de pontos fixos hiperbólicos, obtemos o seguinte teorema:

Teorema D *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica, então φ é estruturalmente estável. Além disso se c é o número de φ -órbitas círculo, uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

- (1) se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, então ou $M^2 = T^2$ e φ possui exatamente $2c$ órbitas, sendo c o número de órbitas cilíndricas, ou $M^2 = S^2$ e φ possui exatamente $2c + 3$ órbitas, sendo elas dois pontos fixos e $c + 1$ órbitas cilíndricas.
- (2) se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, então $c = 0$, as φ -órbitas de dimensão dois são planos e $\text{Sing}(\varphi)$ é um grafo orientado conexo.

Este Teorema exige menos do que (3) e dá uma informação mais completa da estrutura de órbitas da ação e em que ambiente elas existem.

Algumas das conseqüências do Teorema C estão na mesma direção dos resultados de P. Sad e Kato-Morimoto, e a seguir as descrevemos. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos campos

$X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ tal que existe $p \in \text{Sing}(X)$ e cuja parte linear em p é $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$ com $\beta \neq 0$. Claramente $\mathcal{B}$ é aberto em $\mathfrak{X}^\omega(M^2)$.

Corolário 1 *Se $\text{genus}(M^2) \geq 1$, $X \in \mathcal{B}$ e $Y \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$, então $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $Y = fX$, com $f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})$ integral primeira de X .*

Cabe ressaltar que uma das condições que P. Sad impôs aos elementos de $\mathcal{A}$ são as de não ressonância nos pontos singulares. No corolário acima, pela analiticidade e o fato de serem elementos de $\mathcal{B}$ com $\text{genus}(M^2) \geq 1$, estas condições não são necessárias.

O Teorema C também será aplicado para encontrar um resultado de estabilidade estrutural global de uma família de ações singulares de $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ que a seguir descrevemos. Para ações em $\text{Act}_1^r(\mathbb{R}^2, M^2) = \{\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2); \text{Sing}(\varphi) = M^2\}$, definimos o conceito de ponto fixo centro. Consideramos $\mathcal{D}_0 = \{\varphi \in \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2); \varphi \text{ tem um ponto fixo centro}\}$ e usando o Teorema C obtemos.

Teorema E *Se $\text{genus}(M^2) \geq 1$, então existe $\mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}_0$ cujos elementos são estruturalmente estáveis. Conseqüentemente, $\mathcal{D}'_0$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$.*

O aberto $\mathcal{D}'_0$ é constituído de elementos de $\mathcal{D}_0$ satisfazendo algumas condições, dentre elas, a de possuir integral primeira não constante. Em particular, estas condições implicam que cada ação em $\mathcal{D}'_0$ tem todas suas órbitas círculo a menos de um número finito delas. Segue que este resultado se torna típico do caso analítico real já que em classe C^r , $r \geq 1$, estas ações não são nem localmente estruturalmente estáveis (ver item (1) do Lema 4.10).

Observemos também que o aberto $\mathcal{A}_1$ (na C^∞ -topologia) de $\text{Act}^\infty(\mathbb{R}^2, M^2)$, dado pelo Teorema de P. Sad, está contido em $\text{Act}_1^\infty(\mathbb{R}^2, M^2)$, mas a diferença de $\mathcal{D}'_0$ é que os elementos de $\mathcal{A}_1$ não têm integral primeira.

Para poder atingir uma compreensão quase completa sobre a estabilidade estrutural das ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $2 \leq r \leq \infty$, $r = \omega$, faltariam esclarecer as seguintes questões:

1. *Suponha que $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$ é localmente estruturalmente estável em $p \in \text{Fix}(\varphi)$. Será que p é um ponto fixo hiperbólico?*
2. *Suponha que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$ é estruturalmente estável. Será que é verdade que $\varphi \in \text{Act}_1^r(\mathbb{R}^2, M^2) \cup \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$?*
3. *Será que é possível caracterizar a estabilidade estrutural global em $\text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$?*

Posteriormente tentamos generalizar os Teoremas A, B, C, D, e E, nesse sentido obtivemos os seguintes resultados.

Teorema A' *Seja $\mathcal{O}_0$ é uma órbita homeomorfa a T^{n-1} de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$. Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Se $\text{Act}_n^r(\mathbb{R}^n, M^n) = \{\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n); \overline{M^n \setminus \text{Sing}(\varphi)} = M^n\}$, obtemos a seguinte generalização do Teorema B.

Teorema B' *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita homeomorfa a T^{n-1} de $\varphi \in \text{Act}_n^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 2$. Se φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$, então a órbita $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica.*

Consideremos agora ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ denotará o conjunto dos pontos cujas respectivas φ -órbitas são círculos e $\mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ o conjunto das ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ tal que $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e cada órbita $\mathcal{O}_p$, com $p \in \text{Sing}_1^c(\varphi)$, possui uma vizinhança V_p em M^3 satisfazendo uma das seguintes propriedades:

- (1) V_p é φ -invariante, homeomorfo a $S^1 \times D^2$ e $\mathcal{O}_p$ é a única φ -órbita círculo em $\overline{V_p}$.
- (2) V_p contém no máximo um número finito de órbitas de dimensão maior ou igual que 1.

Um resultado análogo ao Teorema C é o seguinte.

Teorema C' *Se $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, possui uma órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$, então cada órbita de φ de dimensão três é homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, existem apenas duas possibilidades:*

- (1) Se $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$, então $M = T^3$.
- (2) Se $\text{Sing}_1^c(\varphi) \neq \emptyset$, então $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ contém só duas órbitas e M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um.

Para uma definição exata de decomposição de Heegaard ver [8]. Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita singular compacta normalmente hiperbólica, então como as φ -órbitas de dimensão três podem ser homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$, $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, facilmente se demonstra que o tipo topológico de cada uma destas órbitas é o mesmo (Proposição 5.36). Para poder obter o análogo do Teorema D é preciso saber em quais variedades M^3 existe uma ação cujas órbitas

de dimensão três são homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$. O Teorema 5.35 dá a resposta a esta questão. De maneira análoga ao Teorema D temos:

Teorema D' *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita singular compacta normalmente hiperbólica, então φ é estruturalmente estável. Além disso se c é o número de φ -órbitas círculo e t é o número de φ -órbitas difeomorfas a T^2 , uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

- (1) *se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $c = 0$, então $M^3 = T^3$ e φ possui exatamente $2t$ órbitas sendo t o número de órbitas $T^2 \times \mathbb{R}$;*
- (2) *se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $c \neq 0$, então M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um, $c = 2$ e φ possui exatamente $2t + 3$ órbitas, dentre elas $t + 1$ órbitas são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$;*
- (3) *se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $t = 0$, então M^3 é um fibrado principal sobre uma superfície com fibra S^1 , as φ -órbitas de dimensão três são $S^1 \times \mathbb{R}^2$, e $\text{Sing}(\varphi)$, que é a união finita de φ -órbitas círculo e cilindro, é conexo;*
- (4) *se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, e $t = 0$, então $M^3 = S^1 \times S^2$, as φ -órbitas de dimensão três são $S^1 \times \mathbb{R}^2$ e $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo e $\#\text{Fix}(\varphi)$ é um número par igual ao número de φ -órbitas reta;*
- (5) *se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, e $t = 0 = c$, as φ -órbitas de dimensão três são $\mathbb{R}^3$ e $\text{Sing}(\varphi)$ conexo*

O Teorema C' também tem conseqüências análogas ao Corolário 1 (Proposição 5.44 e Teorema 5.45).

Para $\text{Act}_2^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, o subconjunto de $\text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ cujas órbitas de dimensão dois formam um aberto e denso em M^3 , definimos o conceito de órbita círculo centro, consideramos $\mathcal{D}_1 = \{\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^3, M^3); \varphi \text{ tem uma órbita círculo centro}\}$ e usando o Teorema C' obtivemos.

Teorema E' *Se M^3 não admite decomposição de Heegaard de gênero um, então existe $\mathcal{D}'_1 \subset \mathcal{D}_1$ cujos elementos são estruturalmente estáveis. Conseqüentemente, $\mathcal{D}'_1$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$.*

Como no Teorema E, o aberto $\mathcal{D}'_1$ é constituído de elementos de $\mathcal{D}_1$ satisfazendo algumas condições, sendo uma a de possuir integral primeira não constante. Em particular, estas condições implicam que, cada ação em $\mathcal{D}'_1$ tem todas suas órbitas difeomor-

fas a T^2 a menos de um número finito delas. Novamente neste resultado a analiticidade é muito importante já que em classe C^r , $r \geq 1$, estas ações não são nem localmente estruturalmente estáveis (Proposição 4.16).

A seguir descrevemos como este trabalho esta organizado.

No primeiro capítulo, introduzimos alguns conceitos, notações e convenções que serão usados em quase todo restante do trabalho.

No segundo capítulo, obtemos sistemas de coordenadas para M^n em torno da φ -órbita compacta homeomorfa a T^{n-1} de maneira que neste sistema, os geradores infinitesimais da ação φ tenham uma expressão que nos permitirá construir algumas perturbações (Teorema 2.4, Proposição 2.13 e Corolário 2.15).

No terceiro capítulo, definimos o conceito de ponto fixo hiperbólico e detalhamos alguns resultados obtidos por C. Camacho [2] a respeito destes pontos. Em seguida usando o conceito de ponto fixo hiperbólico, definimos o conceito de órbita compacta normalmente hiperbólica. Em seguida apresentamos algumas conseqüências deste conceito dentre eles a persistência (Teorema 3.11) e os Teoremas A e A'.

No quarto capítulo, demonstramos os Teoremas B e B', para isto demonstramos alguns resultados de instabilidade de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ em uma vizinhança da φ -órbita $\mathcal{O}_0$ homeomorfa a T^{n-1} ver Teorema 4.14, Proposição 4.16 e Teorema 4.20.

No quinto capítulo, os resultados principais são obtidos para ações de $\mathbb{R}^n$ sobre n -variedades, onde $n = 2, 3$. Obtemos algumas propriedades globais de algumas famílias destas ações (dentre elas os Teoremas C e C') e as exploramos para conseguir alguns resultados de estabilidade estrutural global para ações C^r (Teoremas D e D'), como também para ações analíticas reais (Teremos E e E'). Para o caso analítico real, precisamos introduzir os conceitos de ponto fixo centro quando $n = 2$ e de órbita círculo centro quando $n = 3$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos algumas notações, definições e alguns resultados conhecidos que serão usados na maioria dos capítulos.

Seja M^m uma variedade C^∞ de dimensão m , compacta, sem bordo e orientável. Uma ação φ de classe C^r de um grupo de Lie simplesmente conexo G sobre M^m é uma aplicação $\varphi : G \times M^m \rightarrow M^m$ de classe C^r , $1 \leq r \leq \infty$ tal que

- (i) $\varphi(e, p) = p$, para cada $p \in M^m$;
- (ii) $\varphi(gh, p) = \varphi(g, \varphi(h, p))$, para cada $g, h \in G$ e $p \in M^m$;

onde e é a identidade em G .

A *órbita* de um ponto $p \in M^m$ (pela ação φ) é o conjunto

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p(\varphi) = \{\varphi(g, p) \mid g \in G\}$$

que algumas vezes será chamada de φ -órbita de p .

Um ponto $p \in M^m$ é chamado de *ponto fixo* de φ se $\varphi(g, p) = p$, para cada $g \in G$. O conjunto de todos os pontos fixos de φ é denotado por $\text{Fix}(\varphi)$.

O *grupo de isotropia* de $p \in M^m$ (pela ação φ) é o subgrupo de G definido por

$$G_p = G_p(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g, p) = p\}.$$

Da definição segue claramente que G_p é um subgrupo fechado de G . Para cada $p \in M^m$ a aplicação $g \mapsto \varphi(g, x)$ induz uma imersão injetiva do espaço homogêneo G/G_p em M^m cuja imagem é $\mathcal{O}_p(\varphi)$.

Em particular se $G = \mathbb{R}^n$, então as órbitas de φ são imersões injetoras de $T^k \times \mathbb{R}^l$, onde T^k denota o k -toro e $k + l = n$.

Em todo este trabalho sempre escreveremos órbita reta, círculo, plano, cilindro, toro, $T^k \times \mathbb{R}^l$, etc. para nos referirmos a uma órbita homeomorfa a reta, círculo, plano, cilindro, toro, $T^k \times \mathbb{R}^l$, etc. respectivamente.

Dizemos que $p \in M^m$ é um *ponto singular* da ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times M^m \rightarrow M^m$, de classe C^r , $1 \leq r \leq \omega$, se a sua φ -órbita tem dimensão topológica menor do que n . Denotaremos por $\text{Sing}(\varphi)$ o conjunto de todos os pontos singulares de φ , $\text{Sing}_i(\varphi)$, $i = 1, \dots, n-1$, o conjunto de todos os pontos cuja φ -órbita tem dimensão igual a i e $\text{Sing}_i^c(\varphi)$, $i = 1, \dots, n-1$, o conjunto de todos os pontos cuja φ -órbita é homeomorfa a T^i . Se $\text{Sing}(\varphi) = M^m$, a ação $\varphi : \mathbb{R}^n \times M^m \rightarrow M^m$ será chamada *singular*.

Para cada $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a ação φ induz um fluxo $(\varphi_w^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de classe C^r definido por $\varphi_w^t(p) = \varphi(tw, p)$, para cada $p \in M^m$ e, conseqüentemente, um campo X_w de classe C^{r-1} definido por $X_w(p) = D_1\varphi(0, p) \cdot w$. Nesta situação dizemos simplesmente que o campo X_w provém da ação φ . Fixada uma base $\{w_1, \dots, w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ os campos associados $X_{w_1}, \dots, X_{w_n}$ chamados de *geradores infinitesimais* de φ comutam dois a dois e determinam completamente a ação φ . Assim uma ação de $\mathbb{R}^n$ sobre M^m é equivalente a n campos vetoriais comutando. Denotaremos por $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ o conjunto das ações de classe C^r de $\mathbb{R}^n$ sobre M^m com geradores infinitesimais de classe C^r .

Fixada uma base para $\mathbb{R}^n$, para $0 \leq k \leq r$ podemos munir o espaço $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ de uma " C^k -métrica" definida pela correspondente C^k -métrica para campos vetoriais, da seguinte maneira. Sejam X_i e $\tilde{X}_i$, $i = 1, 2$, geradores infinitesimais das ações φ e $\tilde{\varphi}$ respectivamente. Dado $\varepsilon > 0$, então $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_k < \varepsilon$ se, e somente se, $\|X_i - \tilde{X}_i\|_k < \varepsilon$ para $i = 1, 2$.

Duas ações $\varphi, \psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ são *topologicamente equivalentes* se existe um homeomorfismo $h : M^m \rightarrow M^m$ que transforma órbitas de φ sobre órbitas de ψ . Sejam $p, q \in M^m$ dizemos que φ em p e ψ em q são *localmente topologicamente equivalentes* se existem vizinhanças U_p e U_q de p e q respectivamente e um homeomorfismo $h : U_p \rightarrow U_q$ que transforma órbitas de φ em U_p sobre órbitas de ψ em U_q .

Uma ação φ é chamada *C^k -estruturalmente estável* se existe uma vizinhança $\mathcal{N}_\varphi$ de φ na C^k -topologia para ações tal que qualquer $\psi \in \mathcal{N}_\varphi$ é topologicamente equivalente a φ . A ação φ é *C^k -localmente estruturalmente estável* em $p \in M$ se para cada vizinhança U de p , existe uma vizinhança $\mathcal{N}_\varphi$ de φ com a propriedade que: qualquer que seja $\psi \in \mathcal{N}_\varphi$, existe um ponto $q \in U$ tal que φ em p , é localmente topologicamente equivalente a ψ em q . Diremos *estruturalmente estável* e *localmente estruturalmente estável* em lugar de C^1 -estruturalmente estável e C^1 -localmente estruturalmente estável, respectivamente.

Capítulo 2

Formas Canônicas Locais de Ações

Neste capítulo consideramos ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ que possuem uma órbita $\mathcal{O}_0$ homeomorfa a T^{n-1} . Nosso objetivo é obter sistemas de coordenadas para M^n em torno da órbita compacta $\mathcal{O}_0$ de maneira que neste sistema os geradores infinitesimais da ação φ tenham uma expressão “simples”, que nos permitirá construir algumas perturbações. Nessa direção entre outros temos o Teorema 2.4, a Proposição 2.13 e o Corolário 2.15.

Figura 2.1: $n = 2$.

O grupo de isotrofia G_0 de $\mathcal{O}_0$ é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^{n-1}$. Seja G_0^0 a componente conexa de G_0 que contém a origem. Como G_0^0 é uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^n$, então a menos de um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$, temos que G_0^0 é transversal ao subespaço $\{(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : t_i \in \mathbb{R}\}$. Sejam $w_1 \in G_0^0 - \{0\}$, $\mathbb{R}_i^+ =$

$\{(0, \dots, x_i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n; x_i \in \mathbb{R}^+\}$ e $G_0^1(i) = \{w_i\} + G_0^0$, $i = 2, \dots, n$, onde $w_i \in \mathbb{R}_i^+$ é tal que, se Z_i é o subgrupo de G_0 gerado por w_i , então $G_0 = G_0^0 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_n$. Sejam $Z_i^+ = \{mw_i; m = 1, 2, \dots\}$ e $G_0^+ = G_0^0 \oplus Z_1^+ \oplus \dots \oplus Z_{n-1}^+$ (ver Figura 5.3).

Como neste capítulo estamos interessados em olhar as ações numa vizinhança de $\mathcal{O}_0$, podemos supor que $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$ e que $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ é uma vizinhança de $\mathcal{O}_0$ em M^n . Como $T^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1}$ consideremos as coordenadas $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, x) \in V_0$ onde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in T^{n-1}$ e sejam $\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x}$ os campos de vetores correspondentes. Suponhamos que a ação φ tem por geradores infinitesimais os campos

$$X_i(\theta, x) = a_{1i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{(n-1)i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + a_{ni}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.1)$$

com $i = 1, \dots, n$, e que as funções $a_{ij} : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^r para $j = 1, \dots, n$.

Se $a_{ij}(\theta, x) = a_{ij}(x)$ para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então dizemos que a ação φ é *homogênea* em V_0 . Se φ é homogênea e $a_{nj} = 0$ para $j = 1, \dots, n$, dizemos que φ é *homogênea horizontal* em V_0 .

Seja $A(\theta, x)$ a matriz com entradas $a_{ij}(\theta, x)$; a j -ésima coluna de $A(\theta, x)$ dá as coordenadas de X_j na base $\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial x}$. Denotemos por $A_{ij}(\theta, x)$ a matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ que resulta de tirar a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz $A(\theta, x)$.

No seguinte resultado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para $n = 3$ este resultado é devido a E. L. Lima e pode ser encontrado em [10], para $n > 3$ a prova é feita usando os mesmos argumentos de E. Lima.

Proposição 2.1 *Sejam $Y_1, \dots, Y_{n-1}$, $n > 2$, campos de vetores comutativos em $T^{n-2} \times D$ tais que nos pontos de $\partial(T^{n-2} \times D)$ eles são linearmente independentes e tangentes a $\partial(T^{n-2} \times D)$. Existe um ponto em $T^{n-2} \times D$ onde os campos $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ são linearmente dependentes.*

Dita de uma outra forma, a proposição acima afirma que toda ação de $\mathbb{R}^{n-1}$ sobre $T^{n-2} \times D$ que tem por órbita $\partial(T^{n-2} \times D)$ possui órbitas singulares. Para demonstrar esta proposição precisaremos do seguinte resultado que pode ser encontrado em [22] (ver 22.9, página 118).

Proposição 2.2 *Para cada $n > 2$, o grupo $\pi_1(SO(n))$ é cíclico de ordem dois e seu gerador é representado pela aplicação inclusão do círculo $SO(2)$ em $SO(n)$.*

Antes de demonstrar a Proposição 2.1 façamos uma consideração, sejam $v_1, \dots, v_{n-1}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes. Se $v_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, $i = 1, \dots, n-1$, e x_j é o determinante da matriz que resulta de tirar a j -ésima coluna da matriz com entradas (x_{ij}) , então definimos o vetor $v_n = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = (x_{n1}, \dots, x_{nn})$, onde $x_{nk} = (-1)^{1+k} x_k$, $k = 1, \dots, n$. Pode ser verificado que $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$ é ortogonal a v_i , $i = 1, \dots, n-1$, e que $\det(x_{ij}) > 0$. Além disso se os vetores $v_1, \dots, v_{n-1}$ são ortonormais, então $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, com $\det(x_{ij}) = 1$.

Demonstração da Proposição 2.1: Se $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \times (T^{n-2} \times D) \rightarrow T^{n-2} \times D$ é a ação induzida pelos campos $Y_1, \dots, Y_{n-1}$, então

$$\partial(T^{n-2} \times D) = T^{n-2} \times S^1 = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{(n-1) \text{ vezes}},$$

é uma φ -órbita. Logo existem vetores linearmente independentes $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$, tais que o grupo de isotropia de $\partial(T^{n-2} \times D)$ é $\bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathbb{Z} \cdot v_j$. Associados a estes vetores temos $X_1, \dots, X_{n-1}$ geradores infinitesimais de φ . Além disso, o conjunto $\{Y_1(p), \dots, Y_{n-1}(p)\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $\{X_1(p), \dots, X_{n-1}(p)\}$ é linearmente dependente.

Sem perda de generalidade para cada $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in T^{n-2} \times S^1$ com $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}) \in T^{n-2}$ e $\theta_{n-1} \in S^1$, podemos supor que $X_i(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$, $i = 1, \dots, n-1$. É suficiente demonstrar que não existem extensões ortonormais de $(X_1|_{\partial D}, \dots, X_{n-1}|_{\partial D})$ ao interior de D . Consideremos o caminho $\alpha = (X_1|_{\partial D}, \dots, X_n|_{\partial D}) : \partial D \rightarrow O(n)$ onde $X_n = X_1 \wedge \dots \wedge X_{n-1}$. Pela Proposição 2.2, segue que α representa um elemento não trivial de $\pi_1(SO(n))$ e, conseqüentemente, α não pode ser estendida a D , o que conclui a demonstração. $\square$

Utilizaremos este resultado para demonstrar a seguinte propriedade de estrutura local para ações de $\mathbb{R}^n$ sobre n -variedades em torno de uma órbita $\mathcal{O}_0 \simeq T^{n-1}$.

Proposição 2.3 *Suponhamos que existem duas φ -órbitas distintas $\mathcal{O}_{-1}$ e $\mathcal{O}_1$ de dimensão dois tal que $V_0 = \mathcal{O}_{-1} \cup \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$ é uma vizinhança aberta e conexa de $\mathcal{O}_0$. Então as órbitas $\mathcal{O}_i$ são homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$, para $i = -1, 1$.*

Demonstração: Para $i \in \{-1, 1\}$, a órbita $\mathcal{O}_i$ só tem duas possibilidades: ou $\mathcal{O}_i \simeq T^{n-1} \times \mathbb{R}$ ou $\mathcal{O}_i \simeq T^{n-2} \times \mathbb{R}^2$. Suponhamos que a segunda possibilidade é satisfeita. Neste caso temos que $\mathcal{O}_i \cup \mathcal{O}_0$ é um $(n-1)$ -toro sólido com interior $\mathcal{O}_i$.

Sejam $Y_1 = X_{w_2}, \dots, Y_{n-1} = X_{w_n}$ e consideremos a ação φ gerada por estes campos. Para $p \in \mathcal{O}_0$, temos que $\mathcal{O}_p(\varphi) = \mathcal{O}_0$. Logo pela Proposição 2.1, temos que os campos $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ são linearmente dependentes em algum ponto do interior de $\mathcal{O}_0$, de onde segue que a ação φ não pode ter órbita de dimensão n homeomorfa a $T^{n-2} \times \mathbb{R}^2$ no interior de $\mathcal{O}_0$. Assim $\mathcal{O}_0$ é homeomorfa a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. $\square$

O seguinte resultado é um dos principais deste capítulo pois, na maioria dos casos, ele nos possibilitará perturbar ações.

Teorema 2.4 (Teorema de Homogeneização) *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, tal que existe uma vizinhança aberta V de $\mathcal{O}_0$ em M^n saturada por três órbitas. Então, a menos de um difeomorfismo, φ é homogênea em V . Se $n = 2$ e V está saturada apenas por órbitas homeomorfas a $T^1 = S^1$, então o resultado também segue.*

Para demonstrar este teorema precisaremos de alguns resultados prévios.

Lema 2.5 *Sejam $\varphi_0 \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, $r \geq 1$, com geradores infinitesimais $X_1, \dots, X_{n-1}$ e $\mathcal{O}_0$ uma φ_0 -órbita homeomorfa a T^{n-1} tais que X_i , $i = 1, \dots, n-1$, possui apenas órbitas fechadas de período um em alguma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$. Se todas as φ_0 -órbitas em V_0 são homeomorfas a T^{n-1} , então existe $f : U_0 \rightarrow T^{n-1} \times (-1, 1)$ tal que $f^*X_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$, onde $U_0 \subset V_0$ é uma vizinhança de $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $\{0\} \times (-1, 1)$ é transversal a φ_0 , onde $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}/\mathbb{Z}^{n-1} = T^{n-1}$. Para $i = 1, \dots, n-1$, seja X_i^t com $t \in \mathbb{R}$, o fluxo associado ao campo X_i . Consideremos $U_0 \subset V_0$ uma vizinhança de $\mathcal{O}_0$ φ_0 -invariante. A aplicação $f : U_0 \rightarrow T^{n-1} \times (-1, 1)$ definida por $f(\theta, x) = X_1^{\theta_1} \circ \dots \circ X_{n-1}^{\theta_{n-1}}(0, x)$ é um difeomorfismo de classe C^r tal que $f^*X_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$ para cada $i = 1, \dots, n-1$. $\square$

Corolário 2.6 *Suponhamos que $\varphi_0 \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, $1 \leq r \leq \omega$, tem geradores infinitesimais $X_1, \dots, X_{n-1}$ tais que X_i em $M^+ = T^{n-1} \times [0, 1)$ possui apenas órbitas fechadas de período um, para cada $i = 1, \dots, n-1$. Se todas as órbitas de φ_0 por pontos de M^+ são homeomorfas a T^{n-1} , então existe $f \in \text{Diff}^r(M)$ tal que $f^*X_i|_{M^+} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}|_{M^+}$.*

Demonstração: Os campos $Y_i \in \mathfrak{X}^r(M)$ definidos por

$$Y_i(\theta, x) = \begin{cases} X_i(\theta, x), & x \geq 0 \\ X_i(\theta, -x), & x \leq 0 \end{cases}$$

tem todas as suas órbitas fechadas de período um. Então pelo Lema 2.5 temos que existe $f \in \text{Diff}^r(M)$ tal que $f^*Y_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Logo como $Y_i|_{M^+} = X_i|_{M^+}$, o resultado segue. $\square$

Observação 2.7 Quando $n = 2$, as órbitas não precisam ter o mesmo período.

De fato, neste caso a ação é dada pelo campo X com fluxo X^t com $t \in \mathbb{R}$. Seja $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação tal que $\tau(\theta, x)$ é o período da órbita de X passando pelo ponto (θ, x) . Como neste caso (em dimensão 2) τ é de classe C^r segue que a função $f : M \rightarrow M$ definida por $f(\theta, x) = X^{\tau(\theta, x)}(0, x)$ é um difeomorfismo de classe C^r tal que $f^*X = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

Analogamente temos:

Observação 2.8 Suponha que $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $1 \leq r \leq \omega$, tem todas suas órbitas fechadas em $M^+ \simeq S^1 \times [0, 1)$. Então existe $f \in \text{Diff}^r(M)$ tal que $f^*X|_{M^+} = \frac{\partial}{\partial \theta}|_{M^+}$.

Suponhamos que φ tenha exatamente três órbitas: $\mathcal{O}_{-1}, \mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}_1$. Neste caso pela Proposição 2.3, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_{-1}$ homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. Se G_1, G_{-1} são os grupos de isotropia de $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_{-1}$ respectivamente, então $G_1, G_{-1} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$. Com estas notações temos:

Lema 2.9 Suponhamos que φ tem exatamente três órbitas. Então os grupos G_1 e G_{-1} estão contidos em G_0 . Mais ainda, para $i = 2, \dots, n$, sejam $u_i, u_{-i} \in G_0^0 \oplus Z_i^+$ tais que G_1 e G_{-1} são gerados por $u_1, \dots, u_{n-1}$ e $u_{-1}, \dots, u_{-(n-1)}$ respectivamente. Então $u_i, u_{-i} \in G_0^1(i)$ para cada $i = 2, \dots, n$.

Demonstração: De fato, fixado $i \in \{2, \dots, n\}$, como $\varphi_{u_i}^1(p) = \varphi(u_i, p) = p$, para cada $p = (\theta, x)$ com $x > 0$, segue que $\varphi_{u_i}^1(\theta, 0) = (\theta, 0)$ para cada $\theta \in T^{n-1}$, ou seja, $u_i \in G_0$. Agora, se $u_i \notin G_0^1(i)$, então existe um inteiro $n_i > 1$ tal que

$\tilde{u}_i = \frac{1}{n_i} u_i \in G_0^1(i)$. As órbitas do campo $X_{\tilde{u}_i}$ passando por pontos de $\mathcal{O}_0$ são fechadas de período igual a 1. Por outro lado a órbita de $X_{\tilde{u}_i}$ passando por $p = (\theta, x)$ com $x > 0$ tem período $n_i \geq 2$. pela continuidade de φ isto não é possível. Portanto, $u_i \in G_0^1(i)$. Analogamente tem-se que $u_{-i} \in G_0^1(i)$ (para $n = 2$ veja Figura 2.2). $\square$

Figura 2.2: $n = 2$.

Corolário 2.10 *Se φ é analítica real e tem exatamente três órbitas, então $G_1 = G_{-1}$.*

Demonstração: Com as notações do Lema 2.9, temos $\varphi_{u_i}^1(p) = \varphi(u_i, p) = p$, para cada $p = (\theta, x)$ com $x > 0$. Logo o fato da ação φ ser analítica implica que $\varphi_{u_i}^1(p) = \varphi(u_i, p) = p$, para cada $p \in M^2$, e isto significa que $u_i \in G_{-1}$. Portanto $G_1 = G_{-1}$. $\square$

Proposição 2.11 *Se a ação φ possui exatamente três órbitas, então existem campos $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ linearmente independentes que tem todas as suas órbitas fechadas, de período um e que comutam com qualquer gerador infinitesimal de φ . Além disso, todas as órbitas da ação gerada por estes campos são homeomorfas a T^{n-1} , inclusive $\mathcal{O}_0$. Se $n = 2$ e φ possui apenas órbitas círculo, então existe X gerador infinitesimal de φ cujas órbitas são exatamente as órbitas de φ .*

Demonstração: Suponhamos que φ possui exatamente três órbitas. Quando $G_1 = G_{-1}$, temos que $u_i = u_{-i}$. Logo, a primeira parte da proposição segue pondo $Y_i = X_{u_i}$. Assumamos agora que $G_1 \neq G_{-1}$. Então para alguns valores de i , temos

que $w_i = u_i - u_{-i} \neq 0$ está na componente conexa de G_0 que contém a origem. Sejam $X_w, X_{u_i}, X_{u_{-i}} \in \mathfrak{X}^r(M)$ os campos associados aos fluxos $\varphi_w^t, \varphi_{u_i}^t, \varphi_{u_{-i}}^t$ respectivamente. Segue que

$$X_{w_i} = X_{u_i} - X_{u_{-i}}, \text{ ou, equivalentemente, } \varphi_{w_i}^t = \varphi_{u_i}^t \circ \varphi_{u_{-i}}^{-t}.$$

Para cada $p = (\theta, x) \in M$ com $x > 0$, $\varphi_{u_i}^1(p) = p$. Logo,

$$D\varphi_{u_i}^1(\theta, x) = id \text{ e } D^{(j)}\varphi_{u_i}^1(\theta, x) \equiv 0, \quad j = 2, \dots, r; \quad \forall x > 0.$$

conseqüentemente,

$$D\varphi_{u_i}^1(\theta, 0) = id \text{ e } D^{(j)}\varphi_{u_i}^1(\theta, 0) \equiv 0, \quad j = 2, \dots, r; \quad \forall \theta \in T^n.$$

Analogamente,

$$D\varphi_{u_{-i}}^1(\theta, 0) = id \text{ e } D^{(j)}\varphi_{u_{-i}}^1(\theta, 0) \equiv 0, \quad j = 2, \dots, r; \quad \forall \theta \in T^n.$$

Como $D\varphi_{w_i}^1(\theta, 0) = \exp(DX_{w_i}(\theta, 0))$ e $D\varphi_{w_i}^1(\theta, 0) = D\varphi_{u_i}^1(\theta, 0) \circ D\varphi_{u_{-i}}^{-1}(\theta, 0)$, temos que $DX_{w_i}(\theta, 0) \equiv 0, \forall \theta \in T^n$. Por outro lado, para cada $p \in M$, temos

$$D^{(2)}(X_{u_i}(\varphi_{u_i}^1(p))) = D^{(2)}X_{u_i}(\varphi_{u_i}^1(p))[D\varphi_{u_i}^1(p)]^2 D^{(2)}\varphi_{u_i}^1(p)$$

e, como $X_{u_i}(\varphi_{u_i}^1(p)) = X_{u_i}(p)$ para cada $p = (\theta, x)$ com $x > 0$, segue que $D^{(2)}X_{u_i}(\theta, x) \equiv 0$ e, portanto, $D^{(j)}X_{u_i}(\theta, x) \equiv 0$, $p = (\theta, x)$ com $x > 0$ e $j = 2, \dots, r$. Conseqüentemente, $D^{(j)}X_{u_i}(\theta, 0) \equiv 0, \forall \theta \in T^n$ e $j = 2, \dots, r$. Analogamente, $D^{(j)}X_{u_{-i}}(\theta, 0) \equiv 0, \forall \theta \in T^n$ e $j = 2, \dots, r$. Finalmente, o campo X_i dado por

$$Y_i(\theta, x) = \begin{cases} X_{u_i}(\theta, x), & x \geq 0 \\ X_{u_{-i}}(\theta, x), & x \leq 0 \end{cases}$$

é de classe C^r e tem as propriedades requeridas.

Finalmente, suponhamos que $n = 2$ e que φ possui apenas órbitas círculo. Como $G_0 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ consideremos uma reta $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ transversal a G_0 . Seja $w \in G_0 \setminus \{0\}$ o gerador do subgrupo $\mathcal{L} \cap G_0$ de G_0 . Então $\mathcal{O}_0$ é uma órbita periódica do campo X_w . Além disso as órbitas da ação são invariantes pelo seu fluxo φ_w^t . Existe uma vizinhança V (que podemos supor que é M) de $\mathcal{O}_0$ tal que X_w não tem singularidades em V . Portanto, todas as órbitas de X_w passando por pontos de V são exatamente as órbitas da ação. $\square$

Corolário 2.12 *Se φ é analítica, então na Proposição 2.11 anterior temos que $Y_1, \dots, Y_{n-1}$ são geradores infinitesimais.*

Demonstração: De fato, se φ possui exatamente três órbitas, então do Corolário 2.10 segue que $G_1 = G_{-1}$. O resto segue da prova da proposição anterior. $\square$

Demonstração do Teorema 2.4: Se φ possui exatamente três órbitas, o resultado segue da primeira parte da Proposição 2.11 e do Lema 2.5.

Suponhamos agora que $n = 2$ e que todas as órbitas de φ são homeomorfas a S^1 . O resultado segue da segunda parte da Proposição 2.11 e da Observação 2.7. $\square$

Embora o seguinte resultado seja para ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, ele nos possibilitará encontrar uma forma canônica para a mesma situação no caso de ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ (ver Corolário 2.15).

Proposição 2.13 *Seja $\psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, $r \geq 1$, e V_0 uma vizinhança ψ -invariante de $\mathcal{O}_0$. Se todas as ψ -órbitas em V_0 são homeomorfas a T^{n-1} , então ϕ é homogênea horizontal em V_0 .*

O seguinte resultado pode ser encontrado em [1] (ver Lema 6 da página 74) e será necessário para demonstrar a proposição acima.

Lema 2.14 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação C^r , $r \geq 1$, de codimensão um. Suponhamos que F seja uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com holonomia trivial. Então existe uma vizinhança aberta V_F de F em M , saturada por $\mathcal{F}$, e um difeomorfismo C^r , $h : F \times (-1, 1) \rightarrow V_F$ tal que as folhas de $\mathcal{F}$ em V_F são os conjuntos de tipo $h(F \times \{x\})$, $x \in (-1, 1)$, sendo $F = h(F \times \{0\})$. Em particular $V_F \setminus F$ tem duas componentes conexas.*

Agora demonstraremos a Proposição 2.13.

Demonstração da Proposição 2.13: Pelo Lema 2.14 podemos supor que $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ é uma vizinhança de $\mathcal{O}_0$, saturada pela ação e tal que todas as órbitas da ação em U_0 são $T^{n-1} \times \{x\}$ para cada $x \in (-1, 1)$. Segue que os geradores infinitesimais de ψ em U_0 são da forma

$$X_j(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_i}; \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Agora definiremos um difeomorfismo tal que a ação seja homogênea horizontal em $\mathcal{O}_0$ a menos desse difeomorfismo. Para cada $x \in (-1, 1)$, o grupo de isotropia G_x de $\mathcal{O}_x = T^{n-1} \times \{x\}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^{n-1}$. Sejam $w_1(x), \dots, w_{n-1}(x)$ uma base de G_x tal que $w_i(x) \in \mathbb{R}_i^+$, onde

$$\mathbb{R}_i^+ = \{(0, \dots, x_i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}\}; \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Pelo Lema 2.5, para cada ponto $x \in (-1, 1)$ existe um difeomorfismo $f_x : \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x$ tal que $f_x^* X_{w_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Conseqüentemente, pela comutatividade dos campos X_j e X_{w_i} temos,

$$f_x^* X_j(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_i}; \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Finalmente, o fato da ação ser C^r , a escolha dos $w_i(x)$ e o lema anterior permitem concluir que os w_i são funções de classe C^r . Daí como a função f_x foi construída usando a ação e os w_i , (ver demonstração do Lema 2.5) segue que a aplicação $f : T^{n-1} \times (-1, 1) \rightarrow T^{n-1} \times (-1, 1)$ dado por $f(\theta, x) = f_x(\theta)$ é um difeomorfismo tal que

$$f^* X_j(\theta, x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_i}; \quad j = 1, \dots, n-1.$$

para cada $(\theta, x) \in V_0$. Isto conclui a prova. $\square$

Se para $\phi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $n > 2$, existir um aberto em M^n ϕ -saturado por órbitas homeomorfas a T^{n-1} , então nem sempre é homogênea. Porém possui a seguinte forma canônica:

Corolário 2.15 *Seja $\phi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $n > 2$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ tal que todas ϕ -órbitas são homeomorfas a T^{n-1} . Então a menos de um difeomorfismo de V_0 os geradores infinitesimais de ϕ são da forma:*

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x) &= a_{11}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{(n-1)1}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + a_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \\ X_i(\theta, x) &= a_{1i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{(n-1)i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \quad (i = 2, \dots, n)'. \end{aligned}$$

Além disso, para cada $k = 1, \dots, n-1$, tem-se

$$a_{k1}(\theta, x) = a_{n1}(x) \left\langle [A_{n1}(x)]^{-1} \cdot \alpha'_k(x), \theta \right\rangle + \beta_k(x); \quad \alpha_k(x) = (a_{k2}(x), \dots, a_{kn}(x)),$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota o produto interno canônico.

Demonstração: Sejam $X_i = X_{a_i}$, $i = 2, \dots, n$; estes campos geram uma ação $\psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$ a qual possui apenas órbitas homeomorfas a T^{n-1} . Do Lema 2.14 e da Proposição 2.13, podemos supor que em $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ temos

$$X_i = a_{1i} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{(n-1)i} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \quad i = 2, \dots, n,$$

onde as funções $a_{1i}, \dots, a_{(n-1)i}$, $i = 2, \dots, n$, só dependem de $x \in (-1, 1)$.

Finalmente, pela comutatividade do campo X_1 com os campos $X_2, \dots, X_n$, para cada $i = 2, \dots, n$, temos que

$$a_{1i}(x) \frac{\partial a_{k1}}{\partial \theta_1}(\theta, x) + \dots + a_{(n-1)i}(x) \frac{\partial a_{k1}}{\partial \theta_{n-1}}(\theta, x) = a'_{ki}(x) a_{n1}(\theta, x) \quad (2.2)$$

$$a_{1i}(x) \frac{\partial a_{n1}}{\partial \theta_1}(\theta, x) + \dots + a_{(n-1)i}(x) \frac{\partial a_{n1}}{\partial \theta_{n-1}}(\theta, x) = 0, \quad (2.3)$$

onde $k = 1, \dots, n-1$. Como a matriz $A_{n1}(\theta, x) = A_{n1}(x)$ é inversível, segue da relação (2.3) que $\frac{\partial a_{n1}}{\partial \theta_j}(\theta, x) = 0$, para cada $j = 1, \dots, n-1$. Logo,

$$a_{n1}(\theta, x) = a_{n1}(x).$$

Substituindo isto na relação (2.2), para $k = 1, \dots, n-1$, obtemos

$$\left(\frac{\partial a_{k1}}{\partial \theta_1}(\theta, x), \dots, \frac{\partial a_{k1}}{\partial \theta_{n-1}}(\theta, x) \right) = a_{n1}(x) [A_{n1}(x)]^{-1} (a'_{k2}(x), \dots, a'_{kn}(x)). \quad (2.4)$$

Para cada $k = 1, \dots, n-1$, existem β_k tal que, se $\alpha_k(x) = (a_{k2}(x), \dots, a_{kn}(x))$, então

$$a_{k1}(\theta, x) = a_{n1}(x) \left\langle [A_{n1}(x)]^{-1} \cdot \alpha'_k(x), \theta \right\rangle + \beta_k(x), \quad (2.5)$$

ficando assim demonstrado o corolário. $\square$

Capítulo 3

Órbitas Compactas Normalmente Hiperbólicas

Consideremos ações φ em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ que possuem uma órbita compacta $\mathcal{O}_0$ homeomorfa ao toro k -dimensional T^k (a variedade M^m tem dimensão $m \geq n$). Para tais ações definiremos o conceito de órbita compacta normalmente hiperbólica; particularmente damos ênfase nos casos em que $k = n - 1$ e $m = n$ pois nestes casos se apresentam propriedades mais relevantes. Apresentaremos um resultado que caracteriza este conceito em coordenadas locais (Proposição 3.14) e algumas conseqüências Teorema A'. Exploramos também algumas propriedades do caso $n = m = 3$ e $k = 1$, as quais serão usadas para demonstrar o Teorema A e na Seção 3 do Capítulo 5.

A definição de órbita compacta normalmente hiperbólica será dada usando a noção de ponto fixo hiperbólico introduzida em [2] por C. Canacho, a qual descrevemos a seguir.

3.1 Pontos Fixos Hiperbólicos

Consideraremos ações $\varphi \in \text{Act}^r(G, M^m)$ onde $G = \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$. Daremos a definição de ponto fixo hiperbólico de uma ação em $\text{Act}^r(G, M^m)$ introduzida em [2] por C. Canacho. A cada ação $\varphi \in \text{Act}^r(G, M^m)$ com ponto fixo p , associaremos uma ação linear. O ponto fixo $p \in M^m$ será chamado de hiperbólico se a ação linear associada é hiperbólica.

Seja E um espaço vetorial real de dimensão m . Uma *ação linear* do grupo de Lie G sobre E é um homomorfismo $\varrho : G \rightarrow \text{Aut}(E)$ do grupo G sobre o grupo de

automorfismos $\text{Aut}(E)$ de E .

O posto do grupo G denotado por $\text{rank}(G)$ é definido por $\text{rank}(G) = k + \ell$.

Dizemos que a ação linear $\varrho : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell \rightarrow \text{Aut}(E)$ é *hiperbólica* quando satisfaz uma das seguintes propriedades:

- (a) se $k + \ell = 1$, então todos os autovalores do automorfismo $\varrho(s)$ tem módulo diferente de 1;
- (b) se $k + \ell \geq 2$, definimos por indução sobre $k + \ell$. Suponhamos que tem-se definido ações lineares hiperbólicas para ações de posto menor do que $k + \ell$. Então se $\text{posto}(G) = k + \ell$, dizemos que a ação ϱ é hiperbólica se:
 - (b.1) Existe uma decomposição de E , $E = \bigoplus_t E_t$, invariante por ϱ , tal que para qualquer t , ϱ é transitiva sobre cada componente conexa de $E_t \setminus \{0\}$.
 - (b.2) A ação $\chi_t : G_v(\varrho) \rightarrow \text{Aut}(\bigoplus_{t' \neq t} E_{t'})$, $v \in E_t$, definida por $\chi_t(g) \circ \pi = \pi \circ \varrho(g)$, $g \in G_v(\varrho)$, é hiperbólica para cada t . Aqui a aplicação $\pi : E \rightarrow \bigoplus_{t' \neq t} E_{t'}$ denota a projeção. Por (b.1) segue que χ_t é uma ação do grupo $G_v(\varrho)$ de posto $\text{posto}(G) - 1$.

Dizemos que o ponto fixo p de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell, M)$ é *hiperbólico* se a ação linear induzida $\varrho : \mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell \rightarrow \text{Aut}(T_p M)$ definida por $\varrho(g) = D\varphi_g(p)$ é hiperbólica.

Os seguintes resultados podem ser encontrados em [2].

Teorema 3.1 *Seja p um ponto fixo hiperbólico da ação $\varphi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell) \times M^m \rightarrow M^m$, com $m \leq k + 1$. Então φ é localmente estruturalmente estável em p .*

Teorema 3.2 *Seja p um ponto fixo hiperbólico da ação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times M \rightarrow M$ com $m = 4$. Então φ é localmente estruturalmente estável em p .*

Para ações de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ temos o conhecido Teorema de Hartmann o qual lineariza topologicamente estas ações em torno de um ponto fixo hiperbólico. O seguinte resultado devido a Camacho [2] generaliza este resultado para ações de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3 (Camacho [2]) *Seja $p \in M^m$ um ponto fixo hiperbólico de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$, onde $m \leq n + 1$. Então para qualquer vizinhança V de p , existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varphi$ de φ tal que para qualquer $\psi \in \mathcal{V}_\varphi$ existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$, com $U \subset V$ vizinhança de p , e um isomorfismo u de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $h \circ \varphi_r = \psi_{u(r)} \circ h$.*

Para cada $g \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\mathbb{R}^n(g) = \{tg; t \in \mathbb{R}\} \text{ e } \mathbb{R}_+^n(g) = \{tg; t \geq 0\}.$$

Um *cone* em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $\cup_{g \in i(D)} \mathbb{R}^n(g)$, onde $i : D \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ é um mergulho linear de um d -disco D , $0 \leq d \leq n$.

Seja $p \in M^m$ um ponto fixo hiperbólico de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$. Então existe uma decomposição $T_p M^m = \bigoplus_t E_t$ invariante pela ação linear $\varrho : \mathbb{R}^n \times T_p M^m \rightarrow T_p M^m$ induzida por φ , onde cada E_t é uma reta e $E_t - \{p\}$ é a união duas ϱ -órbitas reta ou um plano e $E_t - \{p\}$ é uma ϱ -órbita cilíndrica. Seja G_t o subgrupo de isotropia de uma ϱ -órbita em $E_t - \{p\}$. Temos que $G_t \cong \mathbb{R}^{n-1}$ ou $G_t \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{Z}$, com estas notações temos:

Teorema 3.4 (Camacho [2]) *Seja $p \in M^m$ um ponto fixo hiperbólico de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$, e G um subgrupo fechado de $\mathbb{R}^n$. Então $V_G = \text{Fix}(\varphi|_G)$ é uma C^r variedade de dimensão $\dim E_G$ e tangente a E_G em p , onde $E_G = \text{Fix}(\varrho|_G)$. Mais ainda, para qualquer cone $\mathcal{C}$ em $G = \cup_t G_t$, com $G \not\subset G_t$, os conjuntos*

$$W_{\mathcal{C}}^s(V_G) = \{q \in M^m; \lim_{g \rightarrow -\infty} \varphi(g, q) \in V_G, g \in \mathcal{C}\},$$

$$W_{\mathcal{C}}^u(V_G) = \{q \in M^m; \lim_{g \rightarrow \infty} \varphi(-g, q) \in V_G, g \in \mathcal{C}\}$$

são subvariedades de classe C^r se interceptando transversalmente ao longo de V_G . Além disso, φ_{g_0} é normalmente hiperbólica em V_G , para qualquer $g_0 \in \mathcal{C}$.

Corolário 3.5 *Existem subvariedades invariantes V_t difeomorfas a E_t e tangentes a E_t em p , onde $V_t = \text{Fix}(\varphi|_{G_t})$.*

3.2 Definição de Órbita Compacta Normalmente Hiperbólica

Dada uma ação φ , usando “coordenadas trivializadoras” em torno da φ -órbita compacta se associará uma ação local $\widehat{\varphi}_0$ de $\mathbb{R}^{n-k}$ sobre o $(m-k)$ -disco aberto D^{m-k} , a qual possui um ponto fixo correspondente à φ -órbita compacta. A φ -órbita compacta será normalmente hiperbólica se o ponto fixo de $\widehat{\varphi}_0$ correspondente a esta órbita é hiperbólico. Antes de formalizar este conceito precisamos dos seguintes resultados locais.

Lema 3.6 (Lema de Trivialização Local) *Sejam $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k, M^m)$, $r \geq 1$, uma ação localmente livre, $\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ o campo constante em $\mathbb{R}^m$ e $D_\varepsilon^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Se $X_1, \dots, X_k$ são geradores infinitesimais de φ e $p \in M^m$, então existe um difeomorfismo de classe C^r , $h : V_p \rightarrow D_\varepsilon^m$, onde V_p é uma vizinhança de p em M^m , tal que $h_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ em D_ε^m , para cada $i = 1, \dots, k$.*

Demonstração: Sejam $\rho : U \rightarrow U_0$ uma carta local de M^m em torno de p , com $\rho(p) = 0$ e $Y_i = \rho_* X_i$, $i = 1, \dots, k$, os campos induzidos por X_i , $i = 1, \dots, k$, em U_0 . Como $X_1(p), \dots, X_k(p)$ são linearmente independentes, segue que $Y_1(0), \dots, Y_k(0)$ também são linearmente independentes. Os fluxos locais Y_i^t de Y_i definem uma ação local $\phi : D_\tau^k \times V_0 \rightarrow U_0$ dada por $\phi(\tau_1, \dots, \tau_k, q) = Y_1^{\tau_1} \circ \dots \circ Y_k^{\tau_k}(q)$ onde $D_\tau^k \subset \mathbb{R}^k$ e $V_0 \subset U_0$ é uma vizinhança apropriada de 0. Seja H o subespaço de $\mathbb{R}^m$ ortogonal ao subespaço gerado pelos vetores $Y_1(0), \dots, Y_k(0)$, o qual é isomorfo a $\mathbb{R}^{m-k}$. Seja $W_0 = H \cap V_0$ e $\psi : D_\tau^k \times W_0 \rightarrow U_0$ a restrição de ϕ a $D_\tau^k \times W_0$. Tomemos uma base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^k \times H$, onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $\{e_{k+1}, \dots, e_m\} \subset \{0\} \times H$. Obtemos então que

$$D\psi(0,0)e_i = \begin{cases} y_i(0), & i = 1, \dots, k \\ e_i, & i = k+1, \dots, m \end{cases}.$$

uma vez que $\psi(0, q) = q$, para todo $q \in W_0$. Logo, $D\psi(0,0) : \mathbb{R}^k \times H \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\psi : D_\varepsilon^k \times D_\varepsilon^{m-k} \rightarrow U_0$ (estamos denotando pela mesma letra a restrição de ψ a $D_\varepsilon^m := D_\varepsilon^k \times D_\varepsilon^{m-k}$), é um difeomorfismo sobre sua imagem que é um aberto de U_0 . Além disso pode-se verificar que $\psi^* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, para cada $i = 1, \dots, k$. Portanto pondo $V_p = \rho^{-1}(\psi(D_\varepsilon^m))$, a aplicação $h : V_p \rightarrow D_\varepsilon^m$ dada por $h = \psi^{-1} \circ \rho$ é um difeomorfismo e satisfaz a conclusão do lema. $\square$

Observação 3.7 *Notemos que na demonstração do lema anterior, pela construção, o difeomorfismo $h = h(\varphi) : V_p \rightarrow D_\varepsilon^m$ depende continuamente da ação φ no seguinte sentido: dado $\delta > 0$, se $\tilde{\varphi} \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k, M^m)$ está δ - C^1 -próximo de φ , então o difeomorfismo $h(\tilde{\varphi}) : \tilde{V}_p \rightarrow D_\varepsilon^m$ está δ - C^1 -próximo de $h(\varphi)$ em $V_p \cap \tilde{V}_p$.*

A vizinhança V_p dada no lema anterior será chamada de *caixa trivial* de φ em p .

Um k -fluxo tubular da ação $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k, M^m)$ é um par (V, h) , onde V é um aberto de M^m e h é um difeomorfismo C^r de V sobre o cubo $D_1^m = D_1^k \times D_1^{m-k}$, tal

que h_*X_i é paralelo ao campo constante $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, k$, onde os campos $X_1, \dots, X_k$ são geradores infinitesimais de φ .

Observe que o lema anterior garante a existência de um k -fluxo tubular de φ em torno de qualquer ponto $p \in M^m$ não singular, isto é, quando a dimensão da sua órbita é igual a k .

Usando o lema anterior obtemos a seguinte versão de trivialização longa.

Lema 3.8 (Lema de Trivialização Longa) *Sejam $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k, M^m)$, $r \geq 1$, uma ação localmente livre. $\mathcal{O}_p$ a φ -órbita passando por p . $\frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ o campo constante em $\mathbb{R}^m$ e $D_\varepsilon^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Se $X_1, \dots, X_k$ são geradores infinitesimais de φ e $\gamma \subset \mathcal{O}_p$ um arco compacto não fechado, então existe um difeomorfismo de classe C^r $h : V_\gamma \rightarrow D_\varepsilon^m$, onde V_γ é uma vizinhança de γ em M^m , tal que $h_*X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ em D_ε^m , para cada, $i = 1, \dots, k$.*

Demonstração: Seja $\alpha : [-\epsilon, 1 + \epsilon] \rightarrow \mathcal{O}_p$, $\epsilon > 0$, um caminho contínuo tal que $\alpha([0, 1]) = \gamma$. Podemos supor que $\alpha(0) = p$. Considerando o compacto $\tilde{\gamma} = \alpha([-\epsilon, 1 + \epsilon])$, pelo Lema de trivialização, para cada ponto em $\tilde{\gamma}$ existe uma caixa trivial de φ , o que dá uma cobertura de $\tilde{\gamma}$. Seja δ o número de Lebesgue desta cobertura. Tomemos uma cobertura finita $V_1, \dots, V_l$ de $\tilde{\gamma}$ por caixas triviais de diâmetro menor que $\delta/2$. Daí segue que, se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, então $V_i \cup V_j$ está contido numa mesma caixa trivial de φ . Usando esta propriedade podemos, diminuindo os V_i se necessário, reordená-los de modo que cada V_i intercepte apenas V_{i-1} e V_{i+1} .

Denotemos por $D_d^{m-k}(0) = \{0\} \times D_d^{m-k}$ onde $0 \in D_d^k$. Sejam (V_i, h_i) os k -fluxos tubulares correspondentes às caixas triviais acima, sendo que $h_1(p_1) = 0 \in D_d^{m-k}$ onde $p_1 = \alpha(-\epsilon)$. É claro que $\Sigma_1 = h_1^{-1}(D_d^{m-k}(0))$ é uma seção transversal à ação φ e que $p_1 \in \Sigma_1$. O conjunto $U = \bigcup_{i=1}^l (V_i \cap \mathcal{O}_0)$ é uma vizinhança aberta de $\tilde{\gamma}$ na órbita $\mathcal{O}_0$.

Para cada $q \in U$ seja $t \in \mathbb{R}^k$ tal que $q = \varphi(t, p_1)$. Considerando a seção $\Sigma_q = \varphi_t^t(\Sigma_1)$, e escolhendo $d > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\Sigma_q \subset V_i$ para algum $i = 1, \dots, l$.

Pelo Lema de Trivialização Local temos que $\Sigma_{q_1} \cap \Sigma_{q_2} = \emptyset$, se $q_1 \neq q_2$, e que $V = \bigcup_{q \in U} \Sigma_q$ é uma vizinhança de γ em M .

Nesta vizinhança está definida uma C^r fibração sobre U cuja fibra sobre o ponto $q \in U$ é Σ_q . Isto é, a projeção $\pi_1 : V \rightarrow U$, que a cada ponto $z \in V$ associa o ponto q tal que $z \in \Sigma_q$ é uma aplicação de classe C^r . Temos também definida uma projeção $\pi_2 : V \rightarrow \Sigma_1$, que a cada ponto $z \in V$ associa o ponto da intersecção da órbita

$\mathcal{O}_z(\varphi)$ com Σ_1 . Consideremos dois difeomorfismos $g_1 : U \rightarrow D_1^k$ e $g_2 : \Sigma_1 \rightarrow D_1^{m-k}$ quaisquer e definimos $f : V \rightarrow D_1^k \times D_1^{m-k}$ pondo $f(z) = (g_1(\pi_1(z)), g_2(\pi_2(z)))$. Este difeomorfismo tem a propriedade que o campo f_*X_i é paralelo a $\frac{\partial}{\partial x_i}$, com $i = 1, \dots, k$.

Sejam $q_0 \in \gamma$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma \subset \bigcup_{t \in D_\varepsilon^k} \varphi_t(q_0) \subset V$. Seja Σ_0 a seção transversal a φ pelo ponto q_0 , suficientemente pequena para que $V_\gamma = \bigcup_{t \in D_\varepsilon^k} \varphi_t(\Sigma_0)$ esteja contida em V . Se $z \in V_\gamma$, então $\varphi_{-t}(z) \in \Sigma_0$ para algum $t = t(z) \in D_\varepsilon^k$. Seja $h : V_\gamma \rightarrow D_\varepsilon^k \times D_\varepsilon^{m-k}$ dada por $h(z) = (t(z), g(\varphi_{-t}(z)))$, onde $g : \Sigma_0 \rightarrow D_\varepsilon^{m-k}$ é um difeomorfismo qualquer. O difeomorfismo h tem as propriedades requeridas, o que conclui a demonstração. $\square$

Como $\mathcal{O}_0$ é uma órbita compacta de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ homeomorfa ao k -toro T^k , o grupo de isotropia G_0 de $\mathcal{O}_0$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{Z}^k$. Seja G_0^0 a componente conexa de G_0 que contém a origem. A menos de um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$, temos que G_0^0 é transversal ao subespaço $\{(t_1, \dots, t_{n-k}, 0) \in \mathbb{R}^n : t_i \in \mathbb{R}\}$. Para $i = n-k+1, \dots, n$, sejam $\mathbb{R}_i^+ = \{(0, \dots, x_i, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{R}^+\}$ e $G_0^1(i) = \{w_i\} + G_0^0$, onde $w_i \in \mathbb{R}_i^+$ é tal que, se Z_i é o grupo gerado por w_i , então $G_0 = G_0^0 \oplus Z_{n-k+1} \oplus \dots \oplus Z_n$. Sejam $Z_i^+ = \{lw_i : l = 1, 2, \dots\}$ e $G_0^+ = G_0^0 \oplus Z_{n-k+1}^+ \oplus \dots \oplus Z_n^+$.

Seja $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ uma base de G_0^0 , consideremos os geradores infinitesimais $X_1, \dots, X_n$ onde $X_i = X_{w_i}$, $i = 1, \dots, n$. Temos duas ações induzidas: $\varphi_0 \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-k}, M^m)$ que tem geradores infinitesimais $X_1, \dots, X_{n-k}$ e $\varphi_1 \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^k, M^m)$ que tem por geradores infinitesimais $X_{n-k+1}, \dots, X_n$. Pelo Lema 3.6 se $p \in \mathcal{O}_0$, existe um sistema de coordenadas $h : V_p \rightarrow D_1^m$, onde V_p é uma vizinhança de p em M^m , tal que nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma

$$\begin{aligned} X_i(\theta, x) &= \sum_{j=1}^k a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=k+1}^m a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k, \\ X_{i+n-k}(\theta, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

onde cada ponto em D_1^m é denotado por (θ, x) , sendo que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ e $x = (x_{k+1}, \dots, x_m)$. Sejam $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_{n-k}$ os campos definidos em D_1^{m-k} dados por

$$\hat{X}_i = \sum_{j=k+1}^m a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k;$$

pode-se verificar facilmente que estes campos comutam. Além disso, como eles deixam invariante $\{\theta\} \times D_1^{m-k}$, para cada $\theta \in D_1^k$, induzem uma ação local $\hat{\varphi}_\theta$ de $\mathbb{R}^{n-k}$

sobre D_1^{m-k} com ponto fixo $0 \in D_1^{m-k}$. As seguintes propriedades desta ação podem ser verificadas facilmente:

(1) O fato de $0 \in D_1^{m-k}$ ser ponto fixo hiperbólico da ação $\widehat{\varphi}_0$ independe da escolha da carta trivializadora.

(2) Sejam $p, q \in M^m$ dois pontos distintos de $\mathcal{O}_0$. Pelo Lema de Trivialização Longa temos sempre uma carta trivializadora de uma vizinhança em M^m contendo os pontos p e q .

Das observações acima segue que o seguinte conceito está bem definido.

Definição 3.9 Dizemos que a φ -órbita compacta $\mathcal{O}_0$ é *normalmente hiperbólica* se existe $p \in \mathcal{O}_0$ tal que, para qualquer sistema de coordenadas h em p como no Lema 3.6, $0 \in D_1^{m-k}$ é ponto fixo hiperbólico de $\widehat{\varphi}_0$.

A seguinte observação mostra realmente que a ação $\widehat{\varphi}_0$ carrega toda a informação da dinâmica da ação φ em torno de $\mathcal{O}_0$.

Observação 3.10 Observemos que em cada ponto de D_ε^m , $\{X_1, \dots, X_{n-k}\}$ e $\{\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_{n-k}\}$ geram o mesmo espaço vetorial, além disso $[\widehat{X}_i, X_j] = 0$, $i = 1, \dots, n-k$ e $j = n-k+1, \dots, n$. Logo se $\widehat{\varphi}$ é a ação local de $\mathbb{R}^n$ sobre D_ε^m gerada pelos campos $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_{n-k}, X_{n-k+1}, \dots, X_n$, então $\mathcal{O}_q(\varphi) = \mathcal{O}_q(\widehat{\varphi})$ em D_ε^m .

3.3 Algumas Conseqüências da Definição de Órbitas Compactas Normalmente Hiperbólicas

A seguir descreveremos algumas propriedades de órbitas compactas normalmente hiperbólicas dentre delas a persistência de tais órbitas por pequenas perturbações Teorema 3.11, assim como também outras propriedades em alguns casos específicos, como por exemplo órbitas homeomorfas a T^{n-1} . Também demonstramos os Teoremas A e A'.

Teorema 3.11 (Persistência de Órbitas Normalmente Hiperbólicas) *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita homeomorfa a T^k de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$, com $m \leq n+1$, ou $n=2$ e $m=4$. Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então existem $\mathcal{V}_\varphi$ vizinhança de φ em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ e V_0 vizinhança de $\mathcal{O}_0$ em M^m tais que, cada ação $\psi \in \mathcal{V}_\varphi$ possui uma única órbita homeomorfa a T^k contida em V_0 .*

Demonstração: Seja $p \in \mathcal{O}_0$, pelo Lema 3.6 existe um sistema de coordenadas $h_\varphi : V_p \rightarrow D_1^m$, $h_\varphi(p) = 0$, onde V_p é uma vizinhança de p em M^m tal que, nessas coordenadas, os geradores infinitesimais de φ são da forma

$$\begin{aligned} X_i(\theta, x) &= \sum_{j=1}^k a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=k+1}^m a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k, \\ X_{i+n-k}(\theta, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

onde cada ponto em D_1^m é denotado por (θ, x) , sendo que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ e $x = (x_{k+1}, \dots, x_m)$. Seja $\widehat{\varphi}_0$ a ação local de $\mathbb{R}^k$ sobre D_1^{m-k} , cujos geradores infinitesimais são

$$\widehat{X}_i = \sum_{j=k+1}^m a_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Por hipótese, o ponto 0 é um ponto fixo hiperbólico desta ação.

Seja $\psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$ e sejam $Y_1, \dots, Y_n$ os seus correspondentes geradores infinitesimais. Para cada ψ suficientemente próximo de φ , pelo Lema 3.6, existe um sistema de coordenadas $h_\psi : V_p \rightarrow D_1^m$, $h_\psi(p) = 0$, tal que nessas coordenadas os geradores infinitesimais de ψ são da forma

$$\begin{aligned} Y_i(\theta, x) &= \sum_{j=1}^k b_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{j=k+1}^m b_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k, \\ Y_{i+n-k}(\theta, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Seja $\widehat{\psi}_0$ a ação local de $\mathbb{R}^k$ sobre D_1^{m-k} , cujos geradores infinitesimais são

$$\widehat{Y}_i = \sum_{j=k+1}^m b_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \dots, n-k.$$

Pelos Teoremas 3.1, 3.2 e pela observação do Lema 3.6 segue que existem uma vizinhança $\mathcal{V}_p$ de φ e $\varepsilon_p > 0$ tal que as ações $\widehat{\varphi}_0$ e $\widehat{\psi}_0$ são localmente topologicamente equivalentes em $D_{\varepsilon_p}^{m-k} \subset D_1^{m-k}$. Obtemos uma cobertura por abertos $\{U_p\}_{p \in \mathcal{O}_0}$ em M de $\mathcal{O}_0$, onde $U_p = h_\varphi^{-1}(D_{\varepsilon_p}^{m-k})$ (observemos que h_φ dado pelo Lema 3.6 depende do ponto $p \in \mathcal{O}_0$). Tomemos uma subcobertura finita $\{U_1, \dots, U_l\}$ de $\mathcal{O}_0$. O resultado segue pondo $V_0 = \cup_{i=1}^l U_i$. $\square$

Se $\mathcal{O}_0$ é homeomorfa a T^{n-1} , então a ação $\widehat{\varphi}_0 : \mathbb{R} \times D_1^{m-n+1} \rightarrow D_1^{m-n+1}$ é gerada pelo campo:

$$\widehat{X}_1(x) = \sum_{j=n}^m a_{j1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad x = (x_n, \dots, x_m) \in D_1^{m-n+1}.$$

Observação 3.12 *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita homeomorfa a T^{n-1} de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$. Então $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica se, e somente se, $0 \in D_1^{m-n+1}$ é uma singularidade hiperbólica de $\hat{X}_1$.*

Seja $\mathcal{O}$ uma órbita homeomorfa a T^k de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$. Se $\mathcal{O}$ é normalmente hiperbólica, então a ação local $\hat{\varphi}_0 : \mathbb{R}^{n-k} \times D_1^{m-k} \rightarrow D_1^{m-k}$ tem $0 \in D_1^{m-k}$ por ponto fixo hiperbólico. Logo existe uma decomposição $\mathbb{R}^{m-k} = \bigoplus_t E_t$ invariante pela ação linear $\varrho_0 : \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ induzida por $\hat{\varphi}_0$, onde cada E_t é uma reta e $E_t - \{0\}$ é a união duas ϱ_0 -órbitas reta ou um plano e $E_t - \{0\}$ é uma ϱ_0 -órbita cilíndrica. Seja G_t o subgrupo de isotopia de uma ϱ_0 -órbita em $E_t - \{0\}$, temos que $G_t \cong \mathbb{R}^{n-k-1}$ ou $G_t \cong \mathbb{R}^{n-k-1} \times \mathbb{Z}$. O subespaço E_t visto em $T_p M^3$ será denotado por $E_t(p)$, $p \in \mathcal{O}$, e $E_t \mathcal{O}$ denota o subfibrado de $T_{\mathcal{O}} M^3$ com fibra $E_t(p)$, para $p \in \mathcal{O}$. Olhando $\mathbb{R}^{n-k} = \{(t_1, \dots, t_{n-k}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n; t_i \in \mathbb{R}\}$, podemos supor que $G_t \subset \mathbb{R}^n$. Com estas notações, como consequência da Observação 3.10 e dos Teoremas 3.3 e 3.4 obtemos:

Teorema 3.13 *Seja $\mathcal{O}$ uma órbita compacta normalmente hiperbólica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^m)$, $r \geq 1$. Então existem variedades φ -invariantes $W_t(\mathcal{O})$ homeomorfas a $E_t \times \mathcal{O}$, contendo $\mathcal{O}$ e tangentes a $E_t \mathcal{O} + T\mathcal{O}$ ao longo de $\mathcal{O}$, onde $W_t(\mathcal{O}) = \text{Fix}(\varphi|_{G_t})$. Além disso, φ_{g_0} é normalmente hiperbólica em $W_t(\mathcal{O})$, para qualquer $g_0 \in G_t$.*

3.3.1 Caso $\dim M = n$:

Neste caso temos que existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ em M^n difeomorfa ao fibrado normal de $\mathcal{O}_0$ em M^n . Podemos supor que $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ e $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$. Consideremos as coordenadas $(\theta, x) \in V_0$ onde $\theta \in T^{n-1}$ e $x \in (-1, 1)$. Nestas coordenadas suponhamos que a ação φ tem por geradores infinitesimais os seguintes campos:

$$X_i(\theta, x) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + a_{ni}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.1)$$

onde $i = 1, \dots, n$ e $X_1 = X_w$ com $w \in G_0^0$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.14 *Suponha que φ tem por geradores infinitesimais os campos dados em (3.1). Então, a órbita $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica se, e somente se, $\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) \neq 0$ para cada $\theta \in T^{n-1}$.*

Demonstração: Pelo Lema 3.6, dado $p \in \mathcal{O}_0$, existem $V_p \subset V_0$ vizinhança de p , $0 < \varepsilon < 1$ e um difeomorfismo $h : V_p \rightarrow D_\varepsilon^n$ tal que se $Y_i = h_* X_i$, $i = 1, \dots, n$, então

$$\begin{aligned} Y_1(\theta, x) &= \sum_{j=1}^{n-1} b_{j1}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + b_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x}, \\ Y_{i+1}(\theta, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Além disso, se $h = (h_1, \dots, h_n)$ e $g = h^{-1} = (g_1, \dots, g_n)$ então $h_n(\theta, 0) = g_n(\theta, 0) = 0$, para cada θ . Como $X_1(\theta, x) = g_* Y_1(\theta, x)$, temos que

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x) &= Dg(h(\theta, x)) \cdot Y_1(h(\theta, x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} b_{j1}(h(\theta, x)) Dg(h(\theta, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} + b_{n1}(h(\theta, x)) Dg(h(\theta, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} b_{j1}(h_n(\theta, x)) Dg(h(\theta, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta_j} + b_{n1}(h_n(\theta, x)) Dg(h(\theta, x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

para cada $(\theta, x) \in V_p$. Segue que

$$a_{n1}(\theta, x) = \sum_{j=1}^{n-1} b_{j1}(h_n(\theta, x)) \frac{\partial g_n}{\partial \theta_j}(h(\theta, x)) + b_{n1}(h_n(\theta, x)) \frac{\partial g_n}{\partial x}(h(\theta, x)).$$

Conseqüentemente, derivando em relação a x e avaliando no ponto $(\theta, 0)$ obtemos que

$$\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) = \sum_{j=1}^{n-1} b'_{j1}(0) \frac{\partial g_n}{\partial \theta_j}(h(\theta, 0)) \frac{\partial h_n}{\partial x}(\theta, 0) + b'_{n1}(0) \frac{\partial g_n}{\partial x}(h(\theta, 0)) \frac{\partial h_n}{\partial x}(\theta, 0).$$

Mas como $g_n(\theta, 0) = 0$ para cada θ , então

$$\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) = b'_{n1}(0) \frac{\partial g_n}{\partial x}(h(\theta, 0)) \frac{\partial h_n}{\partial x}(\theta, 0).$$

Por outro lado, pode-se verificar facilmente que $\frac{\partial g_n}{\partial x}(h(\theta, 0)) \frac{\partial h_n}{\partial x}(\theta, 0) = 1$. Assim temos que $\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) = b'_{n1}(0)$. Finalmente, por definição, a hiperbolicidade normal da órbita $\mathcal{O}_0$ se reduz ao fato de $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ser uma singularidade hiperbólica do campo

$$\widehat{Y}_1(\theta)(x) = b_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x},$$

ou seja $a'_{n1}(0) \neq 0$. Portanto o resultado segue. $\square$

Como consequência disto temos o seguinte lema:

Lema 3.15 *Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ em M tal que $V_0 = \mathcal{O}_{-1} \cup \mathcal{O}_0 \cup \mathcal{O}_1$, onde $\mathcal{O}_i$ é uma órbita de φ homeomorfa a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$ para $i = \pm 1$.*

Demonstração: Consideremos a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r dada por $f(\theta, x) = \det(A(\theta, x))$, onde $A(\theta, x)$ é a matriz com entradas $a_{ij}(\theta, x)$ da equação (3.1). Como o determinante é uma forma n -linear (em relação as colunas e linhas) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, x) = \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{ij}(\theta, x)) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x}(\theta, x),$$

onde $A_{ij}(\theta, x)$ denota a matriz que resulta de tirar a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz $A(\theta, x)$. Por outro lado, como $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$ e $X_1|_{\mathcal{O}_0} \equiv 0$ temos, para cada $\theta \in T^{n-1}$, $k = 1, \dots, n$, e $l = 2, \dots, n$, que

$$a_{kl}(\theta, 0) = a_{nl}(\theta, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \det(A_{n1}(\theta, 0)) \neq 0. \quad (3.2)$$

Segue que $A_{ij}(\theta, 0) = 0$ para $i \neq n$ e $j \neq 1$. Conseqüentemente,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0) = (-1)^{n+1} \det(A_{n1}(\theta, 0)) \frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0).$$

Como $\det(A_{n1}(\theta, 0)) \neq 0$ para cada $\theta \in T^n$, da Proposição 3.14 temos que

$$f(\theta, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0) \neq 0.$$

Segue do Teorema da Função Implícita que a órbita $\mathcal{O}_0$ é isolada. Além disso, pela Proposição 2.3, as órbitas vizinhas são de dimensão n e homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. $\square$

Assumindo que $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, sejam G_{-1} e G_1 os grupos de isotropia de $\mathcal{O}_{-1}$ e $\mathcal{O}_1$ respectivamente, onde $\mathcal{O}_{-1}$ e $\mathcal{O}_1$ são dados pelo lema anterior. Então:

Corolário 3.16 *Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então $G_{-1} = G_1$. Conseqüentemente, a menos de um difeomorfismo a ação é dada pelos campos*

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x) &= a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_i(\theta, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \quad \text{para } i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

onde $(\theta, x) \in V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$.

Demonstração: O corolário segue do Lema 2.5 e da primeira parte da Proposição 2.11. $\square$

3.3.2 Caso $m \geq n = 2$:

Neste caso $\mathcal{O}_0$ é uma órbita círculo e a ação $\widehat{\varphi}_0 : \mathbb{R} \times D_1^{m-1} \rightarrow D_1^{m-1}$ é gerada pelo campo

$$\widehat{X}_1(x) = \sum_{j=2}^m a_{j1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad x = (x_2, \dots, x_m) \in D_1^{m-1}.$$

Por definição, $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica se, e somente se, $0 \in D_1^{m-1}$ é uma singularidade hiperbólica do campo $\widehat{X}_1$. Conseqüentemente $(\theta, 0)$ é uma singularidade isolada de $\widehat{X}_1(\theta)$ para cada θ ; isto demonstra o seguinte:

Proposição 3.17 *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita círculo de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^m)$, $r \geq 1$. Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ em M tal que $\mathcal{O}_0$ é a única φ -órbita círculo em V_0 .*

3.3.3 Caso $m = n = 3$ e $k = 1$:

Pelo Lema 3.6, para $p \in \mathcal{O}_0$, existem V_p vizinhança aberta de p e um difeomorfismo $h : V_p \rightarrow D_1^3$ tais que, $h(p) = 0$, $h(\mathcal{O}_0 \cap V_p) = \{(\theta, x, y) \in D_1^3 : x = 0 = y\}$. Além disso, nestas coordenadas os geradores infinitesimais de φ , são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= a_{12}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{22}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{32}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

onde $(\theta, x, y) \in D_1^3$. Neste caso $\mathcal{O}_0$ é uma órbita círculo normalmente hiperbólica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ se, e somente se, a ação $\widehat{\varphi}_0 : \mathbb{R}^2 \times D_1^2 \rightarrow D_1^2$ gerada pelos campos

$$\widehat{X}_i(x, y) = a_{2i}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{3i}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \quad (x, y) \in D_1^2$$

tem $0 \in D_1^2$ como ponto fixo hiperbólico. Com as notações acima temos:

Proposição 3.18 *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, possui uma órbita círculo normalmente hiperbólica $\mathcal{O}_0$, então existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$, φ -invariante, homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ e satisfazendo uma das propriedades:*

- (1) $V_0 - \mathcal{O}_0$ é uma φ -órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$;
- (2) $V_0 - \mathcal{O}_0$ é a união de quatro φ -órbitas cilíndricas e quatro φ -órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Demonstração: Para $p \in \mathcal{O}_0$ consideremos $\Sigma = h^{-1}(D_1^2)$. Lembremos que a estrutura da intersecção das φ -órbitas com Σ é topologicamente equivalente à estrutura de órbitas de $\widehat{\varphi}_0$ em D_1^2 (ver Figuras 3.1 e 3.2). Suponhamos que as partes lineares dos campos $\widehat{X}_1$ e $\widehat{X}_2$ tem autovalores complexos, então pelo Teorema 3.13, segue que existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$, φ -invariante, homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ tal que, $V_0 - \mathcal{O}_0$ é uma φ -órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$. Finalmente, se as partes lineares dos campos $\widehat{X}_1$ e $\widehat{X}_2$ tem autovalores reais, então pela Observação Teorema 3.13, segue que existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$, φ -invariante, homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ tal que, $V_0 - \mathcal{O}_0$ é a união de quatro φ -órbitas cilíndricas e quatro φ -órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$. $\square$

Figura 3.1: As partes lineares dos campos $\widehat{X}_1$ e $\widehat{X}_2$ tem autovalores complexos.

Figura 3.2: As partes lineares dos campos $\widehat{X}_1$ e $\widehat{X}_2$ tem autovalores reais.

Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, e suponhamos que a parte (2) da Proposição 3.18 é satisfeita. Então existem φ -órbitas $\mathcal{O}_{-2}, \mathcal{O}_{-1}, \mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ contidas em V_0 . Sejam G_i os grupos de isotropia de $\mathcal{O}_i$ para $|i| = 0, 1, 2$. De maneira análoga à primeira parte do Corolário 3.16 temos:

Proposição 3.19 *Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica e a parte (2) da Proposição 3.18 é satisfeita, então $G_i = G_j$, $i, j = \pm 1, \pm 2$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $V_0 = S^1 \times D_1^2$ e que $\mathcal{O}_0 = S^1 \times \{0\}$, onde $D_1^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x|, |y| < 1\}$. Seja $G_0 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2$ o grupo de isotropia de $\mathcal{O}_0$. Então $\mathbb{Z} \cong G_i \subset G_0$, para cada $i = \pm 1, \pm 2$. Assumamos agora que $G_1 \neq G_{-1}$. Então se u_1 e u_{-1} são seus respectivos geradores, temos que $w = u_1 - u_{-1} \neq 0$ está na componente conexa de G_0 que contém a origem (ver Figura

Suponhamos que $\mathcal{O} = S^1 \times \{0\}$ e $V_0 = S^1 \times D^2$ é uma vizinhança de $\mathcal{O}$ em M^3 . Como consequência do lema anterior temos:

Corolário 3.20 *Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então a menos de um difeomorfismo a ação é dada pelos campos*

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= a_{12}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{22}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{32}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

onde $(\theta, x, y) \in V_0$.

Demonstração: O corolário segue do lema anterior e da Proposição 2.11. $\square$

3.3.4 Demonstração dos Teoremas A e A'

Quando a órbita compacta é de dimensão zero (ponto fixo), os Teoremas 3.1 e 3.1 de C. Camacho mostram que a hiperbolicidade é uma condição suficiente para a estabilidade estrutural local. Neste parágrafo demonstraremos os Teoremas A e A' que a seguir enunciaremos.

Teorema A *Se $\mathcal{O}_0$ é uma órbita compacta normalmente hiperbólica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, com $n \in \{2, 3\}$, então φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Teorema A' *Seja $\mathcal{O}_0$ é uma órbita homeomorfa a T^{n-1} de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$. Se $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então φ é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Primeiro faremos a demonstração do Teorema A' que é simples e depois aplicar este teorema para demonstrar parte do Teorema A.

Demonstração do Teorema A': Se a órbita $\mathcal{O}_0$ é normalmente hiperbólica, então pelo Lema 3.15, existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ homeomorfa a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$ tal que $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ é a união de duas φ -órbitas homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. Podemos supor que $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$, que $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ e que os geradores infinitesimais de φ em V_0 são da forma:

$$X_i(\theta, x) = a_{1i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{(n-1)i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + a_{ni}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Da Proposição 3.14 segue que $\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) \neq 0$, para cada $\theta \in T^{n-1}$.

Seja $\tilde{\varphi}$ uma ação cujos geradores infinitesimais em V_0 são da forma:

$$\tilde{X}_1(\theta, x) = \tilde{a}_{1i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + \tilde{a}_{(n-1)i}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \tilde{a}_n(\theta, x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Consideremos as funções $f, \tilde{f} : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\tilde{f}(\theta, x) = \det(\tilde{a}_{ij}(\theta, x))$ e $f(\theta, x) = \det(a_{ij}(\theta, x))$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0) = (-1)^{1+n} A_{1n}(\theta, 0) \frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0) \neq 0$, para cada $\theta \in T^{n-1}$. Logo, pelo Teorema da Função Implícita, se $\tilde{f}$ está C^1 suficientemente próxima de f , existe uma aplicação $\xi : T^{n-1} \rightarrow V_0$ tal que $\xi(T^{n-1})$ é homeomorfo a T^{n-1} , C^0 -próximo de $T^{n-1} \times \{0\}$ e $\tilde{f}(\theta, \xi(\theta)) = 0$ para cada $\theta \in T^{n-1}$. Reduzindo V_0 se necessário, temos que $\tilde{f}(\theta, x) \neq 0$, para cada $(\theta, x) \in V_0 - \xi(T^{n-1})$. Portanto, cada ação $\tilde{\varphi}$ suficientemente C^1 -próxima de φ é localmente topologicamente equivalente a φ em torno de $\mathcal{O}_0$, o que conclui a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema A: Se $\mathcal{O}_0$ é difeomorfa a T^{n-1} , o resultado segue do Teorema A'. Suponhamos que $\mathcal{O}_0$ é uma órbita círculo de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$. Então o resultado segue do Teorema 3.11 e da Proposição 3.18. $\square$

Capítulo 4

Demonstração dos Teoremas B e B'

Nosso objetivo neste capítulo é de demonstrar os Teoremas B e B', para isto demonstramos alguns resultados de instabilidade de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ em uma vizinhança da φ -órbita $\mathcal{O}_\varphi$ homeomorfa a T^{m-1} ver Teorema 4.14, Proposição 4.16 e Teorema 4.20.

Para dar uma maior motivação dos Teoremas B e B' vamos dar um exemplo. Para isto precisamos do seguinte resultado de N. Kopell:

Lema 4.1 (Teorema 6, [9]) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo linear. Sejam $\{\lambda_i\}$ os autovalores de f . $\underline{\lambda} = \min |\lambda_i|$, $\bar{\lambda} = \max |\lambda_i|$, e suponhamos que $0 < \underline{\lambda} \leq \bar{\lambda} < 1$. Seja m o menor inteiro tal que $\bar{\lambda}^m < \underline{\lambda}$. Se g é um difeomorfismo de classe C^m de $\mathbb{R}^n$ tal que $f \circ g = g \circ f$ e $\lambda_i \neq \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \cdots \lambda_n^{k_n}$, onde $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n k_i > 1$, então g é linear.*

Exemplo 4.1 Existe um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}^\infty(S^2)$ e uma vizinhança $V(X)$ de X na C^1 -topologia, tal que

- (1) o conjunto não errante de X consiste de dois pontos singulares e uma órbita fechada as quais são hiperbólicas,
- (2) para cada $Y \in V(X)$ e $Z \in \mathfrak{X}^2(S^2)$ com $[Y, Z] = 0$ temos que $Z = cY$, $c \in \mathbb{R}$.

Usaremos os argumentos usados por N. Kopell (ver Teorema 8, [9]). De fato, consideremos um campo $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $U_0 \subset D^2$ vizinhança aberta de 0 tal que $X|_{U_0} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\gamma = \text{Front}(D^2)$, $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$, a única órbita fechada em $\overline{D^2}$ e 0 é única singularidade em D^2 . Podemos supor também que γ é hiperbólica e $\lambda_i < 0$, $\lambda_i \neq k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2$, onde $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geq 0$ e $k_1 + k_2 > 1$.

Seja $Y \in \mathfrak{X}^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $[X, Y] = 0$. Então pelo Lema 4.1 temos que $Y|_{U_0} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$. Se $\frac{\lambda_1}{\sigma_1} = \frac{1}{c} = \frac{\lambda_2}{\sigma_2}$, então segue que $Y|_{\overline{D^2}} = cX|_{\overline{D^2}}$. Caso contrário,

existem constantes $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $Z = sX + tY$ tem 0 como única singularidade em D^2 , γ como órbita fechada e $\alpha_1\alpha_2 < 0$, onde $\alpha_1 = s\lambda_1 + t\sigma_1$ e $\alpha_2 = s\lambda_2 + t\sigma_2$. Isto é um absurdo pois a característica de Euler de $\overline{D^2}$ é um. Portanto $Y|_{\overline{D^2}} = cX|_{\overline{D^2}}$.

Considerando S^2 como o resultado de colar dois discos D_i^2 , $i = 1, 2$, pelo bordo. O campo X visto em cada disco dá origem a um campo $X \in \mathcal{X}^\infty(S^2)$ com as propriedades requeridas.

Esta proposição nos dá um aberto $\mathcal{V}$ em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, S^2)$, $r \geq 1$, tal que a estrutura de órbitas de cada elemento de $\mathcal{V}$ é equivalente à estrutura de órbitas do campo X . Conseqüentemente, cada ação em $\mathcal{V}$ é estruturalmente estável, porém os seus pontos fixos não são hiperbólico e sua órbita círculo não é normalmente hiperbólico.

Antes de começar com as demonstrações dos Teoremas B e B', temos algumas propriedades que serão úteis.

Proposição 4.2 *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita compacta homeomorfa a T^{n-1} de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 2$. Então existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ em M^n , φ -invariante, tal que uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

- (1) *As duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são φ -órbitas homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$;*
- (2) *Pelo menos uma das duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ possui uma infinidade de φ -órbitas homeomorfas a T^{n-1} se acumulando na órbita $\mathcal{O}_0$;*
- (3) *Pelo menos uma das duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ é saturada por φ -órbitas do tipo $T^k \times \mathbb{R}^\ell$, $k + \ell = n - 1$.*

Demonstração: Pela continuidade dos geradores infinitesimais, existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$ em M^n tal que cada órbita passando por pontos de V_0 tem no mínimo dimensão $n - 1$. Podemos supor que $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$ e $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ é φ -invariante pois caso contrário, tomamos o saturado pela ação de V_0 .

Suponhamos que $T^{n-1} \times (0, 1)$ não é uma órbita de φ e que V_0 não contém nenhuma órbita de φ homeomorfa a T^{n-1} ou seja, não é válido nem (1) nem (2). Então temos duas possibilidades, a primeira é a parte (3) da proposição e a segunda é que existe uma órbita $\mathcal{O} \subset T^{n-1} \times (0, 1)$ de φ , de dimensão n a qual se aproxima arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Neste caso $\mathcal{O}$ só pode ser homeomorfa a $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, com $n - k \geq 1$, e o resultado segue da seguinte proposição. $\square$

Proposição 4.3 *Não existe ação $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 2$, que possua uma órbita de dimensão n se acumulando numa órbita homeomorfa a T^{n-1} .*

Posteriormente demonstraremos esta proposição. Primeiro no caso $n = 2$ (Proposição 4.7) e depois o caso geral.

Observação 4.4 Quando a ação é analítica real, as propriedades (1), (2) e (3) da Proposição 4.2 podem ser refinadas como segue:

- (1) As duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são φ -órbitas homeomorfas a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$;
- (2) As duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são saturadas por φ -órbitas homeomorfas a T^{n-1} ;
- (3) As duas componentes conexas de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são saturadas por φ -órbitas do tipo $T^k \times \mathbb{R}^\ell$, $k + \ell = n - 1$, $\ell > 0$.

Figura 4.1: Se $q \in \Sigma_p \cap V_p$, então $P_{q \circ \pi \circ X^\tau(q)} = P_{X^\tau(g(q))}$.

Para cada $X \in \mathfrak{X}^r(M^m)$ definamos $\mathcal{C}(X) = \{g \in \text{Diff}^r(M^m); g \text{ preserva órbitas de } X\}$. Sejam γ uma órbita fechada de X passando por p , Σ_p uma seção transversal a X em p e π_X a aplicação de Poincaré associada. Com estas notações temos o seguinte lema:

Lema 4.5 Existe uma vizinhança $\mathcal{V} \subset \text{Diff}^r(M^m)$ da identidade (na C^0 topologia) tal que cada $g \in \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{V}$ induz sobre Σ_p um difeomorfismo $g_X : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$, de classe C^r , com $g_X \circ \pi_X = \pi_X \circ g_X$.

Demonstração: Seja $\tau > 0$ o período de γ . Então existem V_p vizinhança aberta de p e uma aplicação $\pi : V_p \rightarrow \Sigma_p \cap V_p$ de classe C^r (projeção ao longo das órbitas de X), tal que $X^\tau(V_p \cap \Sigma_p) \subset V_p$ e $\pi_X(q) = \pi \circ X^\tau(q)$, $q \in \Sigma_p$.

Existem vizinhanças U_p de p e $\mathcal{V}$ da identidade em $\text{Diff}^r(M^m)$ na C^0 -topologia tal que $U_p \subset V_p$, $g(\Sigma_p \cap V_p) \subset U_p$, $g(U_p) \subset V_p$, para cada $g \in \mathcal{V}$. Diminuindo Σ_p se necessário, podemos supor que $X^\tau(\Sigma_p) \subset U_p$. Se P_z denota a placa de X em V_p que contém o ponto $z \in V_p$, então para cada $g \in \mathcal{C}(X) \cap \mathcal{V}$,

$$g(P_z \cap U_p) \subset P_{g(\pi(z))} \text{ e } P_{X^\tau(g(q))} = P_{X^\tau \circ \pi \circ g(q)},$$

onde $q \in \Sigma_p$. Daí, como $\pi \circ X^\tau(q) \in P_{X^\tau(q)}$, segue que $g \circ \pi \circ X^\tau(q) \in P_{g \circ \pi \circ X^\tau(q)} = P_{X^\tau(g(q))}$. Conseqüentemente, $P_{g \circ \pi \circ X^\tau(q)} = P_{X^\tau \circ \pi \circ g(q)}$, para cada $q \in \Sigma_p$. Isto significa que $\pi \circ g \circ \pi \circ X^\tau(q) = \pi \circ X^\tau \circ \pi \circ g(q)$. Portanto $g_X \circ \pi_X = \pi_X \circ g_X$. $\square$

Lema 4.6 *Seja $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^\infty$ uma seqüência de órbitas homeomorfas a T^{n-1} se acumulando na órbita $\mathcal{O}_0$. Se G_i denota o grupo de isotropia de $\mathcal{O}_i$, então a seqüência de grupos $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ se aproxima do grupo G_0 .*

Demonstração: Seja G_i^0 a componente conexa de G_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ contendo a origem. Consideremos a esfera S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$ com centro na origem e seja $g_i \in G_i^0$ tal que $\{g_i\} = S^{n-1} \cap G_i^0$. Como todos os pontos de acumulação da seqüência $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ estão em S^{n-1} , seja $g \in S^{n-1}$ o limite de uma subseqüência $\{g_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{g_i\}_{i=1}^\infty$. Então se $p \in \mathcal{O}_0$, sempre é possível encontrar $p_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ tal que a seqüência $\{p_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ converge para p . Logo, como $\varphi_{g_{i_k}}^t(p_{i_k}) = p_{i_k}$ para cada $t \in \mathbb{R}$: segue que $\varphi_g^t(p) = p$ para cada $t \in \mathbb{R}$, isto mostra que $g \in G_0^0$. Conseqüentemente, $g = g_0$. Logo a seqüência de grupos $\{G_i^0\}_{i=1}^\infty$ se acumula no grupo G_0^0 . $\square$

4.1 Demonstração do Teorema B

Nesta seção consideraremos apenas ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ onde M^2 é uma variedade C^∞ fechada (compacta e sem bordo) de dimensão dois. O seguinte resultado será muito importante na demonstração do Teorema B.

Proposição 4.7 *Não existe ação $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, que possua uma órbita plano se acumulando numa órbita círculo.*

Para demonstrar esta proposição precisamos do seguinte resultado:

Lema 4.8 (Kopell [9]) *Sejam $f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dois difeomorfismos locais de classe C^2 . Se existe um intervalo semi aberto I_0 contendo 0 tal que $\cap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(I_0) = \{0\}$, e se existe $x_0 \in I_0 - \{0\}$ tal que $g(x_0) = x_0$, então $g|_{I_0} = \text{id}|_{I_0}$.*

Figura 4.2: A órbita π homeomorfa a um plano se acumulando na órbita $\mathcal{O}_0$ homeomorfa a um círculo

Demonstração da Proposição 4.7: Suponhamos que existe $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, que possua uma órbita plano π se acumulando numa órbita círculo $\mathcal{O}_0$ (ver Figura 4.2). Então existe no mínimo uma φ -órbita reta $\mathcal{O}$ contida na fronteira de π e se aproximando arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Sabemos que os subgrupos de isotropia G_0 e G de $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ são isomorfos a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Verifica-se facilmente que $G \subset G_0$. Conseqüentemente $G = G_0^0$. Sejam $X_1 = X_{w_1}$ e $X_2 = X_{w_2}$ geradores infinitesimais de φ tais que $\{w_1, w_2\} \subset G_0$, sendo que $w_1 \in G_0^0$ e $w_2 \in G_0^1$. Então $X_1|_{\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_0} \equiv 0$ e $\mathcal{O}_0$ é um atrator (ou repulsor) do campo X_2 .

Consideremos o fluxo X_1^t , $t \in \mathbb{R}$, de X_1 , Σ_p é uma seção transversal a X_2 com $p \in \mathcal{O}_0$ e π_{X_2} a aplicação de Poincaré associada. Como X_1 e X_2 comutam, então $X_1^t \in \mathcal{C}(X_2)$ e está arbitrariamente próximo da identidade em $\text{Diff}^r(M)$ na C^0 -topologia, desde que t seja suficientemente pequeno. Logo, pelo Lema 4.5, segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que, se $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) - \{0\}$ e g é o difeomorfismo local de Σ_p em p induzido por X_1^t , então $\pi_{X_2} \circ g = g \circ \pi_{X_2}$. Logo, como $X_1|_{\mathcal{O} \cup \mathcal{O}_0} \equiv 0$ e $\mathcal{O}_0$ é um atrator (ou repulsor) do campo X_2 , temos que $g \neq id$ tem uma infinidade de pontos fixos arbitrariamente próximos de p . Mas pelo Lema 4.8, segue que g é a identidade e isto é uma contradição. Portanto o resultado segue. $\square$

Para demonstrar o Teorema B precisamos de alguns resultados prévios sobre instabilidade de ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$.

4.1.1 Alguns Resultados Sobre Instabilidade: Caso $n = 2$

Usando as formas canônicas para ações que foram encontradas no Capítulo 2 demonstraremos alguns resultados de instabilidade em torno de uma órbita círculo. O resultado principal nessa direção é o Teorema 4.14.

O seguinte lema técnico será usado para exibir perturbações de ações em determinadas situações.

Lema 4.9 *Sejam $g, h : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 e $\varepsilon > 0$, tal que $\|g - h\|_1 < \varepsilon/2$. Então existem $\tilde{g} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $\delta > 0$ e um intervalo fechado J com $I = (-\delta, \delta) \subset J$ tal que $\tilde{g}|_I \equiv h|_I$, $\tilde{g}|_{(-1,1) \setminus J} \equiv g|_{(-1,1) \setminus J}$ e $\|g - \tilde{g}\|_1 < \varepsilon$.*

Demonstração: Seja $\eta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ e $K > 2$ uma constante tal que

$$\begin{aligned} \eta(x) &= 0 & \text{se } |x| \leq 1/2; \\ \eta(x) &= 1 & \text{se } |x| \geq 1; \\ |\eta'(x)| &< K, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por outro lado existe $\delta \in (0, 1/4)$ tal que $\|f\|_{(-2\delta, 2\delta)} < \varepsilon/4K$, onde $f = g - h$. Consideremos a função $\tilde{g} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)g(x) + \left(1 - \eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)\right)h(x) \\ &= \eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)(g(x) - h(x)) + h(x) \\ &= \eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)f(x) + h(x). \end{aligned}$$

Se $x, y \in (-2\delta, 2\delta)$ então

$$\begin{aligned} |(\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)) - (h(x) - h(y))| &= |(\tilde{g}(x) - h(x)) - (\tilde{g}(y) - h(y))|; \\ &= \left|\eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)f(x) - \eta\left(\frac{y}{2\delta}\right)f(y)\right|; \\ &\leq \left|\eta\left(\frac{x}{2\delta}\right)\right||f(x) - f(y)| + |f(y)|\left|\eta\left(\frac{x}{2\delta}\right) - \eta\left(\frac{y}{2\delta}\right)\right|; \\ &\leq (\varepsilon/4K)|x - y| + (\varepsilon/4K)|y|K\left|\left(\frac{x}{2\delta}\right) - \left(\frac{y}{2\delta}\right)\right|; \\ &\leq (\varepsilon/4)|x - y| + (\varepsilon/4)|x - y|; \\ &< (\varepsilon/2)|x - y|. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\tilde{g}(x) = h(x) \quad \text{se } |x| \leq \delta;$$

$$\tilde{g}(x) = g(x) \quad \text{se } |x| \geq 2\delta;$$

$$|\tilde{g}'(x) - h'(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{se } |x| \leq 2\delta.$$

Além disso, verifica-se facilmente que $\|g - \tilde{g}\|_1 < \varepsilon$. $\square$

A seguir mostramos os resultados de instabilidade local considerando diferentes situações em torno da órbita círculo $\mathcal{O}_0$.

Lema 4.10 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$ e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$. Então:*

(1) *se todas as φ -órbitas em $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são retas, então $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica.*

(2) *se todas as φ -órbitas são círculos, então $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica. Mais ainda, neste caso φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Suponhamos que todas as φ -órbitas passando por pontos de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são retas. Seja $p \in M \setminus \mathcal{O}_0$ e G_p o seu grupo de isotropia. Se $u \in G_p$, então como a órbita $\mathcal{O}_p$ se acumula a $\mathcal{O}_0$, segue que $u \in G_0^0$. Conseqüentemente, $G_p = G_0^0$ para cada $p \in M \setminus \mathcal{O}_0$. Isto demonstra que se $w \in G_0^0$, o campo X_w é identicamente nulo em V_0 . Portanto $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica e (1) está demonstrado.

Finalmente, se todas as φ -órbitas são homeomorfas a círculos, então pela Proposição 2.11 e o Lema 2.5, podemos supor que os geradores infinitesimais em V_0 são da forma:

$$X_1(\theta, x) = a(x) \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad X_2(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Portanto, $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica e φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$ o que prova (2). $\square$

Proposição 4.11 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ uma φ -órbita cilíndrica tal que $\mathcal{O}_0 \subset \text{Front}(\mathcal{O})$. Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então φ não é localmente estruturalmente estável em torno de $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que $\mathcal{O}_0 = S^1 \times \{0\}$, $V_0 = S^1 \times (-1, 1)$ e $\mathcal{O} = S^1 \times (0, 1)$. Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então

$\frac{\partial a_{21}}{\partial x}(\theta, 0) = 0$, para cada $\theta \in S^1$. Além disso, pelo Corolário 2.6, a menos de um difeomorfismo de V_0 , temos que

$$X_1(\theta, x) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad X_2(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

para cada $(\theta, x) \in S^1 \times [0, 1)$. Como $a_{21}(0) = 0$ e $a'_{21}(0) = 0$, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(\theta, x) = \det(a_{ij}(\theta, x))$, então $f|_{S^1 \times [0, 1)} = -a_{21}|_{S^1 \times [0, 1)}$. Logo, $f(\theta, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = -a'_{21}(0) = 0$. Pelo Lema 4.9, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e uma função $\tilde{a}_{21} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{a}_{21}|_{S^1 \times (-1, 0]} = a_{21}|_{S^1 \times (-1, 0]}$, $\tilde{a}_{21}|_{S^1 \times [0, 1)}$ só depende de x e, se $I = [0, \delta) \subset J = [0, 2\delta)$ então $\tilde{a}_{21}|_I = 0|_I$, $\tilde{a}_{21}|_{[0, 1) \setminus J} = a_{21}|_{[0, 1) \setminus J}$ e $\|a_{21} - \tilde{a}_{21}\|_1 < \varepsilon$. Os campos

$$\tilde{X}_1 = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial}{\partial \theta} + \tilde{a}_{21} \frac{\partial}{\partial x}, & \text{em } V_0 \\ X_1, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{X}_2 = X_2$$

dão origem a uma ação $\tilde{\varphi} \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ tal que $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_1 < \varepsilon$. Além disso, para cada $x \in I$, a órbita de $\tilde{\varphi}$ passando pelo ponto $(0, x)$ é $S^1 \times \{x\}$. Isto demonstra que a ação φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. $\square$

Proposição 4.12 *Sejam $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ saturada por φ -órbitas de dimensão um. Se φ possui uma infinidade de órbitas círculo se aproximando de $\mathcal{O}_0$, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Seja $C = \bigcup_{l \in L} \mathcal{O}_l$ a união de todas as φ -órbitas círculo em V_0 . Então $V_0 \setminus C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, onde Λ é enumerável e, para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{U}_\lambda$ é um aberto homeomorfo a um cilindro saturado por φ -órbitas retas. Temos duas possibilidades:

(i) *Para cada aberto U_0 contendo $\mathcal{O}_0$, $U_0 \cap C$ tem medida de Lebesgue positiva:*

Isto significa que existem cilindros saturados por órbitas círculo que se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Logo, pela segunda parte do Lema 4.10, segue que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.

(ii) *Existe um aberto U_0 contendo $\mathcal{O}_0$ tal que $U_0 \cap C$ tem medida de Lebesgue nula:*

Sejam $w \in G_0^0$ e $v \in G_0^1$. Consideremos os geradores infinitesimais

$$X_1 = X_w \quad \text{e} \quad X_2 = X_v.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $U_0 = V_0$ e que as órbitas da ação são dadas pelas órbitas de X_2 . Então existe $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integral primeira de X_2 tal que $X_1 = fX_2$. Além disso, $f|_{\mathcal{U}_\lambda}$ é constante, para cada $\lambda \in \Lambda$. Conseqüentemente,

$Df|_{M \setminus C} \equiv 0$. Como $M \setminus C$ é denso em M , segue que $Df|_M \equiv 0$. Logo $f = c$ com $c \in \mathbb{R}$ constante. Finalmente, como a órbita fechada $\mathcal{O}_0$ de X_2 não é hiperbólica, concluímos que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. $\square$

Proposição 4.13 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$. V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ saturada por φ -órbitas círculo ou cilíndricas. Se φ possui uma infinidade de órbitas círculo se aproximando de $\mathcal{O}_0$, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Seja $C = \bigcup_{l \in L} \mathcal{O}_l$ a união de todas as φ -órbitas círculo em V_0 , onde L é um conjunto infinito (não necessariamente enumerável). Então $V_0 \setminus C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, onde Λ é enumerável e para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{U}_\lambda$ é uma φ -órbita cilíndrica com grupo de isotropia $H_\lambda \simeq \mathbb{Z}$. Temos duas possibilidades:

(i) $\mathcal{O}_0$ é a única órbita círculo não isolada em C .

Neste caso podemos escrever $C = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_i$ onde, para cada $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a órbita $\mathcal{O}_i$ é isolada em C e as seqüências $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{O}_{-i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se aproximam de $\mathcal{O}_0$ quando $i \rightarrow +\infty$. Denotemos por $\mathcal{U}_i$ a órbita cilindro que tem por fronteira $\mathcal{O}_i$ e $\mathcal{O}_{i+1}$.

Se $H_i = H_j$ para cada $i \neq j$, então fixando um gerador $u \in G_0^1$ dos H_i , segue que o gerador infinitesimal correspondente $X_2 = X_u$ tem todas as suas órbitas fechadas. Logo, a menos de um difeomorfismo, a ação φ tem por geradores infinitesimais

$$X_1(\theta, x) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad X_2(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Agora, como a órbita $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, temos que $a'_{21}(0) = 0$. Considerando $\tilde{a}_{21}$ como na Proposição 4.11, obtemos uma outra ação $\tilde{\varphi}$ com geradores infinitesimais

$$\tilde{X}_1(\theta, x) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta} + \tilde{a}_{21}(x) \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \tilde{X}_2(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

que pode ser escolhida C^1 arbitrariamente próxima de φ . Portanto, φ não é localmente estruturalmente estável em torno de $\mathcal{O}_0$.

Assumamos o contrário, ou seja, se $u_i \in G_i^1$ é gerador de H_i , existe uma subseqüência $\{u_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $u_{i_{k+1}} = u_{i_k+1}$ e $u_{i_{k+1}} \neq u_{i_k}$. Se $p_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$, pela primeira parte da Proposição 2.11, segue que $D^{(j)}X_{w_{i_k}}(p_{i_k}) \equiv 0$ para $j \geq 1$, onde $w_{i_k} \in G_{i_k}^0$. Isto significa que existem órbitas compactas $\mathcal{O}_{i_k}$ que não são normalmente hiperbólicas e que estão arbitrariamente próximas de $\mathcal{O}_0$. Como para cada vizinhança de $\mathcal{O}_0$ podemos encontrar uma órbita $\mathcal{U}_{i_k}$ cuja fronteira contém $\mathcal{O}_{i_k}$, segue da Proposição 4.11 que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.

(ii) *Existem órbitas compactas arbitrariamente próximas de $\mathcal{O}_0$ que não são isoladas em C .*

Se existe uma vizinhança $U_0 \subset V_0$ de $\mathcal{O}_0$ tal que $U_0 \subset C$, então o resultado segue pelo item (2) do Lema 4.10. Logo, toda vizinhança de $\mathcal{O}_0$ contém o fecho de alguma órbita $\mathcal{U}_l$ cuja fronteira contém uma órbita círculo $\mathcal{O}_l$ que não é normalmente hiperbólica. Logo, o resultado segue da Proposição 4.11. $\square$

Agora estamos em condições de mostrar o resultado principal desta parte.

Teorema 4.14 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ saturada por φ . Se φ possui uma infinidade de órbitas círculo se aproximando de $\mathcal{O}_0$, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Seja $C = \bigcup_{l \in L} \mathcal{O}_l$ a união de todas as φ -órbitas círculo em V_0 , onde L é um conjunto infinito (não necessariamente enumerável). Então $V_0 \setminus C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ onde para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i$ é um cilindro φ -invariante.

Suponhamos que existe uma vizinhança U de $\mathcal{O}_0$ que não contém nenhuma órbita de dimensão dois. Então pela Proposição 4.12, segue que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.

Finalmente, suponhamos que exista uma infinidade de pontos em V_0 cujas φ -órbitas tem dimensão dois e se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Então como $r \geq 2$, pela Proposição 4.7 segue que existe apenas uma sequência infinita de φ -órbitas cilíndricas contidas em $V_0 \setminus C$ que se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Temos duas possibilidades. A primeira é que para cada vizinhança U_0 de $\mathcal{O}_0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que há uma infinidade de φ -órbitas reta se aproximando arbitrariamente de alguma φ -órbita círculo $\mathcal{O}_{i_0} \subset \text{Front}(\mathcal{U}_{i_0})$. Isto significa que $\mathcal{O}_{i_0}$ não é normalmente hiperbólica. Logo, da Proposição 4.11, segue que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. A segunda é que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i$ é uma φ -órbita cilíndrica. Então pela Proposição 4.13, φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. $\square$

4.1.2 Demonstração do Teorema B

Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então $\mathcal{O}_0$ é isolada ou existe uma infinidade de órbitas compactas que se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Logo da Proposição 4.11 e o Teorema 4.14 segue φ não é localmente estruturalmente estável em torno de $\mathcal{O}_0$. Isto termina a prova. $\square$

4.2 Demonstração do Teorema B'

Consideraremos apenas ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$. Antes de demonstrar o Teorema B', estaremos interessados em saber em que situações não há estabilidade estrutural local em torno de uma órbita homeomorfa a T^{n-1} .

4.2.1 Alguns Resultados sobre Instabilidade: Caso Geral

Usando as formas canônicas para ações que foram encontradas no Capítulo 2, demonstraremos alguns resultados de instabilidade em torno de uma órbita compacta $\mathcal{O}_0$. Em [21] N. Saldanha considerou uma ação ϕ em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, $r \geq 1$, que possui uma ϕ -órbita $\mathcal{O}$ homeomorfa a T^{n-1} tal que existe V uma vizinhança de $\mathcal{O}$ ϕ -saturada por ϕ -órbitas homeomorfas a T^{n-1} . Ele encontrou uma condição suficiente para a estabilidade estrutural local de ϕ em $\mathcal{O}$. Na Proposição 4.16 demonstraremos que esta ação, vista como ação de $\mathbb{R}^n$, não é localmente estruturalmente estável sob nenhuma hipótese.

O seguinte lema generaliza é quase uma generalização do Lema 4.10.

Lema 4.15 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$. Então:*

- (1) *se todas as φ -órbitas em $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$, então $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica.*
- (2) *se todas as φ -órbitas V_0 são homeomorfas a T^{n-1} , então $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica.*

Demonstração: Suponhamos que todas as φ -órbitas passando por pontos de $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ são homeomorfas a $\mathbb{R}^{n-1}$. Seja $p \in M \setminus \mathcal{O}_0$ e G_p o seu grupo de isotropia. Se $u \in G_p$, então como a órbita $\mathcal{O}_p$ se acumula em $\mathcal{O}_0$, segue que $u \in G_0^0$. Conseqüentemente, $G_p = G_0^0$ para cada $p \in M \setminus \mathcal{O}_0$. Isto demonstra que se $w \in G_0^0$, o campo X_w é identicamente nulo em V_0 . Portanto $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, demonstrando (1).

Finalmente, se todas as φ -órbitas em V_0 são homeomorfas a T^{n-1} , então pelo Lema 3.15 segue que $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica. $\square$

Observemos que o análogo ao item (2) do Lema 4.10 não está incluído no lema acima pois a prova é um pouco mais elaborada e precisa do Corolário 2.15.

Proposição 4.16 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$. Se todas as φ -órbitas em V_0 são homeomorfas a T^{n-1} , então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: A menos de um difeomorfismo podemos supor que $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$, $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$. Pelo Corolário 2.15, os geradores infinitesimais de φ em V_0 são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x) &= a_{11}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{(n-1)1}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + a_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_i(\theta, x) &= a_{1i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{(n-1)i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

tal que para cada $k = 1, \dots, n-1$, tem-se

$$a_{k1}(\theta, x) = a_{n1}(x) \left\langle [A_{n1}(x)]^{-1} \cdot \alpha'_k(x), \theta \right\rangle + \beta_k(x); \quad \alpha_k(x) = (a_{k2}(x), \dots, a_{kn}(x)).$$

Da Proposição 3.14 e do Lema 3.15 segue que a órbita $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica e $a'_{n1}(0) = 0$. Pelo Lema 4.9, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ e uma função $\tilde{a}_{n1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{a}'_{n1}(0) \neq 0$ e $\tilde{a}_{n1}(x) = a_{n1}(x)$ se $x \geq |2\delta|$. Consideremos $\tilde{\varphi} \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ cujos geradores infinitesimais $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ em V_0 são dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1(\theta, x) &= \tilde{a}_{11}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + \tilde{a}_{(n-1)1}(\theta, x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \tilde{a}_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \\ \tilde{X}_i(\theta, x) &= a_{1i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{(n-1)i}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}}, \quad (i = 2, \dots, n) \end{aligned}$$

onde para cada $k = 1, \dots, n-1$ tem-se

$$\tilde{a}_{k1}(\theta, x) = \tilde{a}_{n1}(x) \left\langle [A_{n1}(x)]^{-1} \cdot \alpha'_k(x), \theta \right\rangle + \beta_k(x); \quad \alpha_k(x) = (a_{k2}(x), \dots, a_{kn}(x))$$

e $\tilde{X}_i|_{M \setminus V_0} = X_i|_{M \setminus V_0}$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Logo verifica-se facilmente que $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_1 < \varepsilon$ e que, em V_0 , as $\tilde{\varphi}$ -órbitas e as φ -órbitas não têm o mesmo tipo topológico, já que a ação $\tilde{\varphi}$ tem uma órbita de dimensão n . Isto conclui a demonstração. $\square$

Suponhamos que $V_0 = T^{n-1} \times (-1, 1)$ é uma vizinhança de $\mathcal{O}_0 = T^{n-1} \times \{0\}$ em M^n . Temos os seguintes resultados.

Proposição 4.17 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, e $\mathcal{O} = T^{n-1} \times (0, 1)$ uma φ -órbita. Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então $\frac{\partial a_{n1}}{\partial x}(\theta, 0) = 0$ para cada $\theta \in T^{n-1}$: além disso pelo Corolário 2.6, a menos de um difeomorfismo temos que:

$$X_1(\theta, x) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{i+1}(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \text{ se } i = 1, \dots, n-1,$$

para cada $(\theta, x) \in T^{n-1} \times [0, 1)$. Como $a_{n1}(0) = 0$ e $a'_{n1}(0) = 0$, se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(\theta, x) = \det(a_{ij}(\theta, x))$, então $f|_{T^{n-1} \times [0, 1)} = -a_{n1}|_{T^{n-1} \times [0, 1)}$. Logo $f(\theta, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, 0) = -a'_{n1}(0) = 0$. Pelo Lema 4.9 dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e uma função $\tilde{a}_{n1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{a}_{n1}|_{T^{n-1} \times (-1, 0]} = a_{n1}|_{T^{n-1} \times (-1, 0]}$, $\tilde{a}_{n1}|_{T^{n-1} \times [0, 1)}$ só depende de x e, se $I = [0, \delta) \subset J = [0, 2\delta)$, então $\tilde{a}_{21}|_I = 0|_I$, $\tilde{a}_{21}|_{[0, 1] \setminus J} = a_{21}|_{[0, 1] \setminus J}$ e $\|a_{21} - \tilde{a}_{21}\|_1 < \varepsilon$. Os campos $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ tais que $\tilde{X}_i = X_i$ para $i = 2, \dots, n$ e

$$\tilde{X}_1 = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cdots + a_{(n-1)1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \tilde{a}_{n1} \frac{\partial}{\partial x}, & \text{em } T^{n-1} \times [0, 1) \\ X_1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

são comutativos. Logo, eles dão origem á uma ação $\tilde{\varphi} \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ tal que $\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_1 < \varepsilon$. Além disso, para cada $x \in I$, a $\tilde{\varphi}$ -órbita passando pelo ponto $(0, x)$ é igual a $T^{n-1} \times \{x\}$. Isto demonstra que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. $\square$

A Proposição 4.17 é uma generalização da Proposição 4.11.

Observação 4.18 O análogo da Proposição 4.12 fica em aberto.

Proposição 4.19 *Sejam $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 1$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ saturada por φ -órbitas homeomorfas a T^{n-1} ou $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. Se φ possui uma infinidade de órbitas homeomorfas a T^{n-1} se aproximando de $\mathcal{O}_0$, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Sejam $C = \bigcup_{l \in L} \mathcal{O}_l$ a união de todas as φ -órbitas homeomorfas a T^{n-1} em V_0 e G_l o grupo de isotropia de $\mathcal{O}_l$, onde L é um conjunto infinito (não necessariamente enumerável). Então $V_0 \setminus C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$, onde Λ é enumerável e para cada $\lambda \in \Lambda$, $\mathcal{U}_\lambda$ é uma φ -órbita homeomorfa a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$ com grupo de isotropia $H_\lambda \simeq \mathbb{Z}^{n-1}$. Temos duas possibilidades:

(i) $\mathcal{O}_0$ é a única φ -órbita homeomorfa a T^{n-1} não isolada em C .

Neste caso podemos escrever $C = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_i$ onde, para cada $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, a órbita $\mathcal{O}_i$ é isolada em C e as seqüências $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{O}_{-i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se aproximam de $\mathcal{O}_0$ quando $i \rightarrow +\infty$. Denotemos por $\mathcal{U}_i$ a órbita cilindro que tem por fronteira $\mathcal{O}_i$ e $\mathcal{O}_{i+1}$.

Suponhamos que $H_i = H_j$ para cada $i \neq j$. Fixando o conjunto gerador $\{w_2, \dots, w_n\}$ dos H_i onde $w_k \in G_0^1(k)$, $k = 2, \dots, n$, então os geradores infinitesimais correspondentes $X_k = X_{w_k}$, $k = 2, \dots, n$, tem todas as suas órbitas fechadas e geram uma ação de $\mathbb{R}^{n-1}$ sobre M^n cujas órbitas em V_0 são homeomorfas a T^{n-1} . Logo, a menos de um difeomorfismo de V_0 , os geradores infinitesimais de φ são da forma:

$$X_1(\theta, x) = a_{11}(x) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{n1}(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_{k+1}(\theta, x) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} \text{ se } k = 1, \dots, n-1.$$

Como a órbita $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, temos que $a'_{n1}(0) = 0$. Considerando $\tilde{a}_{n1}$ como na Proposição 4.17 obtemos uma outra ação $\tilde{\varphi}$ com geradores infinitesimais

$$\tilde{X}_1 = \begin{cases} a_{11} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \dots + a_{(n-1)1} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-1}} + \tilde{a}_{n1} \frac{\partial}{\partial x}, & \text{em } T^{n-1} \times (-1, 1) \\ X_1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e $\tilde{X}_k = X_k$, $k = 2, \dots, n$. Esta ação pode ser escolhida C^1 arbitrariamente próxima de φ . Portanto, φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.

Suponhamos agora o contrário, ou seja, existe $k_0 \in \{2, \dots, n\}$ e $u_i \in G_i^1(k_0)$ tal que $u_i \in H_i$ e existe uma subseqüência $\{u_{i_k}\}_{k=1}^\infty$ de $\{u_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $u_{i_{k+1}} = u_{i_k+1}$ e $u_{i_{k+1}} \neq u_{i_k}$. Se $p_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$, pela primeira parte da Proposição 2.11 segue que $D^{(j)}X_{w_{i_k}}(p_{i_k}) = 0$ para $j \geq 1$, onde $w_{i_k} \in G_{i_k}^0$. Isto significa que existem órbitas compactas $\mathcal{O}_{i_k}$ que não são normalmente hiperbólicas e que estão arbitrariamente próximas de $\mathcal{O}_0$. Como para cada vizinhança de $\mathcal{O}_0$ podemos encontrar uma órbita $\mathcal{U}_{i_k}$ cuja fronteira contém $\mathcal{O}_{i_k}$, segue da Proposição 4.17 que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.

(ii) *Existem órbitas compactas arbitrariamente próximas de $\mathcal{O}_0$ que não são isoladas em C .* Se existe uma vizinhança $U_0 \subset V_0$ de $\mathcal{O}_0$ tal que $U_0 \subset C$, então o resultado segue pela Proposição 4.16. Logo toda vizinhança de $\mathcal{O}_0$ contém o fecho de alguma órbita $\mathcal{U}_i$ cuja fronteira contém uma órbita $\mathcal{O}_i$ que não é normalmente hiperbólica. Assim o resultado segue da Proposição 4.17. $\square$

Esta proposição é uma generalização da Proposição 4.13.

Teorema 4.20 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $r \geq 2$, e V_0 uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ saturada por φ . Se φ possui uma infinidade de órbitas de dimensão n se aproximando de $\mathcal{O}_0$, então φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$.*

Demonstração: Se existe uma infinidade de pontos em V_0 cujas φ -órbitas tem dimensão n e se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$, então como $r \geq 2$, pela Proposição 4.3 segue que existem apenas uma seqüência infinita de φ -órbitas $T^{n-1} \times \mathbb{R}$ contidas em V_0 que se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Conseqüentemente existem uma infinidade de φ -órbitas $\mathcal{O}_i$ homeomorfas a T^{n-1} . Seja $C = \bigcup_{i \in L} \mathcal{O}_i$ a união de todas as φ -órbitas T^{n-1} em V_0 , onde L é um conjunto infinito (não necessariamente enumerável). Então $V_0 \setminus C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ onde para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i$ é homeomorfa a $T^{n-1} \times \mathbb{R}$ e φ -invariante. Temos duas possibilidades. A primeira é que para cada vizinhança U_0 de $\mathcal{O}_0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que há uma infinidade de φ -órbitas de dimensão $n-1$ se aproximando arbitrariamente de alguma φ -órbita $\mathcal{O}_{i_0} \subset \text{Front}(\mathcal{U}_{i_0})$. Isto significa que $\mathcal{O}_{i_0}$ não é normalmente hiperbólica. Logo, da Proposição 4.17 segue que φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. A segunda possibilidade é que para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_i$ é uma φ -órbita $T^{n-1} \times \mathbb{R}$. Então pela Proposição 4.19, φ não é localmente estruturalmente estável em $\mathcal{O}_0$. $\square$

4.2.2 Demonstração do Teorema B'

Se $\mathcal{O}_0$ não é normalmente hiperbólica, então $\mathcal{O}_0$ é isolada ou existe uma infinidade de órbitas compactas que se aproximam arbitrariamente de $\mathcal{O}_0$. Logo, da Proposição 4.17 e do Teorema 4.19, segue que φ não é localmente estruturalmente estável em torno de $\mathcal{O}_0$. $\square$

Capítulo 5

Algumas Propriedades Globais de Ações

Os resultados principais deste capítulo são obtidos para ações de $\mathbb{R}^n$ sobre n -variedades, onde $n = 2, 3$. Obtemos algumas propriedades globais de algumas famílias destas ações (dentre elas os Teoremas C e C') e as exploramos para conseguir alguns resultados de estabilidade estrutural global para ações C^r (Teoremas D e D'), como também para ações analíticas reais (Teoremas E e E'). Para o caso analítico real, precisamos introduzir os conceitos de ponto fixo centro quando $n = 2$ e de órbita círculo centro quando $n = 3$, os quais, neste caso, serão fundamentais para o nosso objetivo.

5.1 Órbitas Compactas Centro

Nesta seção apresentamos um conceito muito importante para órbitas compactas singulares de ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$ e em $\text{Act}_{n-1}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ para $n = 2, 3$.

5.1.1 Órbitas Compactas Centro em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$

A seguir definimos uma órbita compacta centro para ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$, onde $n = 2, 3$. Posteriormente damos uma condição para que uma ação com ponto fixo centro seja localmente topologicamente equivalente a sua ação linear induzida (Teorema 5.3) e o análogo para o caso de órbita círculo centro (Proposição 5.9 e Corolário 5.10).

Definição 5.1 (Ponto Fixo Centro) Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}, M^2)$, $1 \leq r \leq \omega$. Dizemos que $p \in M^2$ é um ponto fixo *centro* de φ se, a menos de uma mudança de coordenadas linear para $T_p M^2$, a ação linear induzida $\varrho = D\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(T_p M^2)$ é dada por: $\varrho(t) = \exp(tA)$ onde $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ e $\beta \in \mathbb{R}^+$.

Observemos que, se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}, M^2)$, $1 \leq r \leq \omega$, possui um ponto fixo centro $p \in M^2$, então a estrutura de órbitas da ação linear ϱ da definição acima é dada pela figura abaixo.

Figura 5.1: $n = 2$: $E^c - \{p\}$ é saturado por ϱ -órbitas círculo.

Como consequência imediata da definição temos a seguinte observação.

Observação 5.2 *Um ponto fixo centro é isolado.*

É de nosso interesse saber sobre que condições a estrutura local de uma ação é topologicamente equivalente a sua ação linear induzida num ponto fixo centro. A seguinte proposição é nessa direção.

Proposição 5.3 *Suponha que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}, M^2)$, $r \geq 2$, possui integral primeira localmente não constante. Se $p \in \text{Fix}(\varphi)$ é centro, então φ em p é localmente topologicamente equivalente a ϱ (ação linear induzida por φ).*

Esta proposição decorrerá dos seguintes resultados:

Observação 5.4 *Seja $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \geq 1$, tal que $X(0) = 0$ e $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, onde $\beta \in \mathbb{R}^+$. Então numa vizinhança suficientemente pequena U_0 de 0, o campo X é transversal aos raios. Conseqüentemente, uma órbita de X em U_0 é fechada, ou é uma espiral se acumulando numa órbita fechada ou em 0 (ver figura 5.2).*

De fato, como $X = DX(0) + R$ onde $R(0,0) = 0$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$ e

$$\left\langle \frac{DX(0)(x,y)}{\|DX(0)(x,y)\|}, \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \right\rangle = 0$$

Figura 5.2: Órbitas de $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{R}^2)$ numa vizinhança de 0 quando $DX(0)$ tem autovalores imaginários puros.

temos que existe U_0 vizinhança de 0 tal que $\left| \left\langle \frac{X(x,y)}{\|X(x,y)\|}, \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \right\rangle \right| < 1$ para cada $(x,y) \in U_0$. Isto mostra a observação.

Lema 5.5 *Suponha que $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$, $r \geq 1$, possui integral primeira que não é localmente constante. Se $p \in \text{Sing}(X)$ é centro, então X em p é localmente topologicamente conjugado a $DX(p)$ em 0.*

Demonstração: Como $p \in \text{Sing}(X)$ é centro, então p é uma singularidade isolada de X , ou seja, existe uma vizinhança V_p de p em M^2 tal que $V_p \cap \text{Sing}(X) = \{p\}$.

Seja $C \subset V_p$ tal que as órbitas de X por pontos de C não são homeomorfas a retas. Se $V_p \setminus C$ tem interior não vazio, então pela observação acima segue que a integral primeira de X é constante num aberto. Logo $C = V_p$ e isto conclui a demonstração. $\square$

Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$ e $\mathcal{O}_0$ uma φ -órbita círculo. O grupo de isotropia G_0 de $\mathcal{O}_0$ é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Sejam $\{w_1, w_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que $w_1 \in G_0^0$ e $w_2 \in Z_2$ (G_0^0 e Z_2 foram definidos no início do Capítulo 2). Consideremos os geradores infinitesimais X_1, X_2 , onde $X_i = X_{w_i}$, $i = 1, 2$.

Pelo Lema 3.6, se $p \in \mathcal{O}_0$, existe um sistema de coordenadas $h : V_p \rightarrow D_1^3$, onde V_p é uma vizinhança de p em M^3 , tal que $h(p) = 0$ e nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

O campo $\widehat{X}_1$ definido sobre D_1^3 dado por

$$\widehat{X}_1(x, y) = a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

tem por singularidade a origem 0. O tipo tipológico desta singularidade independe da carta trivializadora escolhida. Usando os Lemas 3.6 e 3.8 verifica-se que o conceito acima está bem definido.

Definição 5.6 (Órbita Círculo Centro) Dizemos que a φ -órbita círculo $\mathcal{O}_0$ é *centro* se $0 \in D_1^3$ é uma singularidade centro do campo $\widehat{X}_1$.

Se $0 \in D_1^3$ é uma singularidade do tipo sela do campo $\widehat{X}_1$, por definição, ela é normalmente hiperbólica. Mas por questão de conveniência diremos que a φ -órbita círculo $\mathcal{O}_0$ é *sela*.

A seguir apresentamos algumas propriedades de φ em torno de uma órbita círculo centro.

Teorema 5.7 (Persistência de Órbitas Círculo Centro) *Seja $\mathcal{O}_0$ uma órbita círculo centro de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$, $r \geq 1$. Então existem $\mathcal{V}_\varphi$ vizinhança de φ em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$ e V_0 vizinhança de $\mathcal{O}_0$ em M^3 tais que cada ação $\psi \in \mathcal{V}_\varphi$ possui uma única órbita círculo contida em V_0 .*

Demonstração: Seja $p \in \mathcal{O}_0$. Pelo Lema 3.6 existe um sistema de coordenadas $h_\varphi : V_p \rightarrow D_1^3$, $h_\varphi(p) = 0$, onde V_p é uma vizinhança de p em M^3 , tal que nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

O campo $\widehat{X}_1$ definido sobre D_1^3 dado por

$$\widehat{X}_1(x, y) = a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

por hipótese, tem por singularidade centro a origem 0.

Seja $\psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$ e sejam Y_1, Y_2 os seus correspondentes geradores infinitesimais. Para cada ψ suficientemente próximo de φ , pelo Lema 3.6, existe um sistema

de coordenadas $h_\varphi : V_p \rightarrow D_1^3$, $h_\varphi(p) = 0$, tal que nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma

$$\begin{aligned} Y_1(\theta, x, y) &= b_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + b_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ Y_2(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Consideremos o campo $\widehat{Y}_1$ definido sobre D_1^2 dado por

$$\widehat{Y}_1(x, y) = b_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Como $0 \in D_1^2$ é singularidade centro de $\widehat{X}_1$, pela observação do Lema 3.6, segue que existem uma vizinhança $\mathcal{V}_p$ de φ e $\varepsilon_p > 0$ tal que, se $\psi \in \mathcal{V}_p$, então o campo $\widehat{Y}_1$ possui uma única singularidade em $D_{\varepsilon_p}^2 \subset D_1^2$. Temos uma cobertura por abertos $\{U_p\}_{p \in \mathcal{O}_0}$ em M^3 de $\mathcal{O}_0$, onde $U_p = h_\varphi^{-1}(D_{\varepsilon_p}^2)$ (observemos aqui que h_φ dado pelo Lema 3.6 depende do ponto $p \in \mathcal{O}_0$). Tomemos uma cobertura finita $\{U_1, \dots, U_l\}$ de $\mathcal{O}_0$. Pondo $V_0 = \cup_{i=1}^l U_i$ o resultado segue. $\square$

Lema 5.8 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$, $r \geq 1$, e $\mathcal{O}_0$ uma φ -órbita círculo centro. Então existe uma vizinhança V de $\mathcal{O}_0$ tal que cada φ -órbita passando por pontos de $V \setminus \mathcal{O}_0$ tem dimensão dois.*

Demonstração: Seja $p \in \mathcal{O}_p$ e $h_p : V_p \rightarrow D_1^3$ com $h_p(p) = 0$, onde V_p é uma vizinhança de p tal que, nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}; \\ X_2(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Por definição de órbita círculo centro, $0 \in D_1^2$ é uma singularidade centro do campo $\widehat{X}_1$. Segue que as aplicações $f, g : D_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r dadas por

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} a_1(x, y) & 1 \\ b_1(x, y) & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \begin{vmatrix} a_1(x, y) & 1 \\ c_1(x, y) & 0 \end{vmatrix}$$

são tais que $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $Df(0, 0) \neq 0$ e $Dg(0, 0) \neq 0$. Conseqüentemente, existe $\varepsilon_p > 0$ tal que $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap D_{\varepsilon_p}^2 = \emptyset$. Isto significa que, se $U_p = h_p^{-1}((-1, 1) \times D_{\varepsilon_p}^2)$, então cada φ -órbita passando por pontos de $U_p \setminus \mathcal{O}_p$ é de dimensão dois. Tomando uma cobertura finita $\{U_{p_1}, \dots, U_{p_k}\}$ de $\mathcal{O}_0$ e $\varepsilon = \min_{i=1}^k \varepsilon_{p_i}$,

temos que $V = \bigcup_{i=1}^k h_{p_i}^{-1}((-1, 1) \times D_\varepsilon^2)$ é uma vizinhança aberta de $\mathcal{O}_0$ tal que cada φ -órbita passando por pontos de $V \setminus \mathcal{O}_p$ tem dimensão dois. Isto conclui a prova. $\square$

A estrutura de uma ação em torno de uma órbita círculo centro é bem determinada desde que alguma condição seja imposta, nesse sentido temos.

Proposição 5.9 *Suponha que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$, $r \geq 1$, possui uma órbita círculo centro $\mathcal{O}_0$. Se φ possui uma integral primeira que não é localmente constante, então existe uma vizinhança V_0 de $\mathcal{O}_0$, φ -invariante, tal que $V_0 \setminus \mathcal{O}_0$ é saturado por φ -órbitas homeomorfas a T^2 .*

Demonstração: Seja V a vizinhança de $\mathcal{O}_0$ dada pelo Lema 5.8 e $p \in \mathcal{O}_0$. Consideremos uma carta $h_p : V_p \rightarrow D_\varepsilon^3$ com $h_p(p) = 0$, $\varepsilon > 0$ e $V_p \subset V$ vizinhança de p em M tal que, nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Por definição de órbita círculo centro, $0 \in D_\varepsilon^2$ é uma singularidade centro do campo $\widehat{X}_1$.

Lembremos que em cada ponto de D_ε^3 , $\{X_1, X_2\}$ e $\{\widehat{X}_1, X_2\}$ geram o mesmo espaço vetorial: além disso $[\widehat{X}_1, X_2] = 0$. Logo, se $\widehat{\varphi}$ é a ação local de $\mathbb{R}^2$ sobre D_ε^3 gerada pelos campos $\widehat{X}_1$ e X_2 , então $\mathcal{O}_q(\varphi) = \mathcal{O}_q(\widehat{\varphi})$ em D_ε^3 , neste caso esta órbita será denotada simplesmente por $\mathcal{O}_q$.

Por outro lado, as $\widehat{\varphi}$ -órbitas interceptam transversalmente $D_\varepsilon^2 = \{(0, x, y) \in D_\varepsilon^3\}$. Além disso, se $q \in D_\varepsilon^2$, então $\mathcal{O}_q \cap D_\varepsilon^2 = \mathcal{O}_q(\widehat{X}_1)$. Como $0 \in D_\varepsilon^2$ é uma singularidade centro do campo $\widehat{X}_1$ e $\widehat{\varphi}$ tem integral primeira localmente não constante, segue que $\widehat{X}_1$ também tem integral primeira localmente não constante. Conseqüentemente, reduzindo ε se necessário, pelo Lema 5.5 segue que todas as órbitas de $\widehat{X}_1$ contidas em D_ε^2 são fechadas.

Logo, a seção transversal $\Sigma = h_p^{-1}(D_\varepsilon^2)$ à X_2 em $p \in \mathcal{O}_0$ é tal que, se $q \in \Sigma \setminus \{p\}$, então $C_q = h_p^{-1}(\mathcal{O}_{h_p(q)}(\widehat{X}_1))$ é homeomorfa a S^1 (ver Figura 5.3).

Seja π a aplicação de Poincaré de X_2 definida numa vizinhança de p contida em Σ . É claro que $\pi(C_q) = C_{\pi(q)}$ para cada $q \in \Sigma$. Afirmamos que $\pi(C_q) = C_q$ para cada $q \in \Sigma \setminus \{p\}$. Isto demonstrará que todas as φ -órbitas passando por pontos de Σ são homeomorfas a T^2 . Logo a proposição segue tomando $V_0 = \bigcup_{q \in \Sigma} \mathcal{O}_q$. De fato, se existe $q \in \Sigma \setminus \{p\}$ tal que $\pi(q) \in C_q$, então $\mathcal{O}_q$ é homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}$. Neste

caso temos que φ não tem integral primeira localmente não constante. Isto contradiz a hipótese. $\square$

Figura 5.3: A intersecção C_q de $\mathcal{O}_q$ com Σ é homeomorfa a S^1 .

Para cada $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^3)$, $r \geq 1$, denotamos por $\mathcal{F}(\varphi)$ a folheação (singular) de M^3 definida pelas φ -órbitas. Portanto $\mathcal{F}(\varphi)$ é uma folheação (singular) cujas folhas podem ser pontos, retas, círculos, planos, cilindros e toros. Com as notações da prova da proposição acima, seja $D \subset D_\varepsilon^2$ um aberto contendo 0 saturado por órbitas de $\hat{X}_1$ tal que $f = h_p \circ \pi \circ h_p^{-1} : D \rightarrow D$ é um difeomorfismo. Como se viu na prova da proposição anterior, f preserva órbitas de $\hat{X}_1$. Se $\mathcal{F}(f, \hat{X}_1)$ denota a folheação em $D \times S^1$ que provém da suspensão do campo $\hat{X}_1|_D$ pelo difeomorfismo f , então denotando por $\mathcal{F}(\varphi)|_{V_0}$ a restrição da folheação $\mathcal{F}(\varphi)$ à vizinhança V_0 , temos o seguinte corolário.

Corolário 5.10 *Com as hipóteses da proposição anterior, temos que $\mathcal{F}(\varphi)|_{V_0}$ é topologicamente equivalente a $\mathcal{F}(f, \hat{X}_1)$.*

5.1.2 Órbitas Compactas Centro em $\text{Act}_{n-1}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$

Para cada $i = 1, \dots, n$ e $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ consideremos $M_i(\varphi) \subset M$ tais que $M_i(\varphi) = \{p \in M; \dim \mathcal{O}_p = i\}$. $\text{Act}_i^r(\mathbb{R}^n, M^n)$, $i = 1, \dots, n$ denota o conjunto de ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$ tais que $M_i(\varphi)$ é aberto e denso em M^n .

Cada ação $\psi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^{n-1}, M^n)$ tal que o interior de $\text{Sing}(\psi) = \{p \in M; \dim \mathcal{O}_p < n-1\}$ é vazio, pode ser mergulhada (ou vista) como uma ação em $\text{Act}_{n-1}^r(\mathbb{R}^n, M^n)$.

Definição 5.11 Dizemos que $p \in M^2$ é um ponto fixo *centro* de $\varphi \in \text{Act}_1^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, se, a menos de uma mudança de coordenadas linear para $T_p M^2$, a ação linear induzida $\varrho = D\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Aut}(T_p M^2)$ é dada por $\varrho(t_1, t_2) = \exp(t_1 A_1 + t_2 A_2)$, onde $A_i = \begin{pmatrix} 0 & \beta_i \\ -\beta_i & 0 \end{pmatrix}$ e $\beta_i \in \mathbb{R}^+$, para algum $i = 1, 2$.

Uma consequência imediata da Proposição 5.3 é a seguinte.

Proposição 5.12 *Seja $p \in M^2$ um ponto fixo centro de $\varphi \in \text{Act}_1^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$. Se φ possui uma integral primeira que não é localmente constante, então φ em p é localmente topologicamente equivalente a ϱ .*

Demonstração: Suponhamos que $p \in M^2$ é um ponto fixo centro de φ e consideremos as notações da definição de ponto fixo centro, sejam X_1 e X_2 geradores infinitesimais de φ tal que $DX_i = A_i$. Supondo que $\beta_1 > 0$, então numa vizinhança de p , as φ -órbitas são dadas pelas órbitas do campo X_1 . Logo, o resultado segue da Proposição 5.3. $\square$

A seguir definiremos o conceito de órbita círculo centro para uma ação $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $1 \leq r \leq \omega$. Antes disso fazemos algumas considerações.

Seja $\mathcal{O}_0$ uma φ -órbita círculo. Consideremos uma carta trivializadora de φ em $p \in \mathcal{O}_0$ dada pelo Lema 3.6, $h_p : V_p \rightarrow D_1^3$ com $h_p(p) = 0$ e $V_p \subset V$ vizinhança de p em M tal que, nessas coordenadas os geradores infinitesimais de φ são da forma:

$$\begin{aligned} X_1(\theta, x, y) &= a_{11}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{21}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{31}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_2(\theta, x, y) &= a_{12}(x, y) \frac{\partial}{\partial \theta} + a_{22}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{32}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_3(\theta, x, y) &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Temos dois campos definidos em $D_1^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (0, x, y) \in D_1^3\}$ dados por

$$\hat{X}_i(x, y) = a_{2i}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + a_{3i}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad i = 1, 2,$$

estes dois campos tem por singularidade a origem $0 \in D_1^2$. Com estas notações temos a seguinte definição.

Definição 5.13 *Seja $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, e $\mathcal{O}_0$ uma φ -órbita círculo. Dizemos que $\mathcal{O}_0$ é uma órbita círculo *centro* se $D\hat{X}_i(0, 0)$ tem autovalores imaginários puros, para algum $i = 1, 2$.*

O fato de $[X_1, X_2] = 0$ implica que $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 0$. Portanto, $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$ induzem uma ação local $\tilde{\varphi}$ de $\mathbb{R}^2$ sobre D_1^2 . Se $D\hat{X}_2(0,0)$ tem autovalores imaginários puros, então numa vizinhança de $\mathcal{O}_0$ as φ -órbitas são dadas pela ação gerada pelos campos X_2 e X_3 , ou seja, X_1 é combinação linear de X_2 e X_3 em cada ponto de uma vizinhança de $\mathcal{O}_0$. Em particular, isto implica que $\hat{X}_1 = g\hat{X}_2$, onde $g : D_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim a ação local $\tilde{\varphi}$ de $\mathbb{R}^2$ sobre D_1^2 é de tipo 1 com 0 por ponto fixo centro.

Temos então a seguinte observação.

Observação 5.14 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem uma órbita círculo $\mathcal{O}_0$. $\mathcal{O}_0$ é um círculo centro se, e somente se, a ação local $\tilde{\varphi}$ de $\mathbb{R}^2$ sobre D_1^2 é de tipo 1 com 0 ponto fixo centro.*

Uma conseqüência imediata do Teorema 5.9, do Corolário 5.10 e da observação anterior é o seguinte resultado.

Teorema 5.15 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, tem uma órbita círculo centro $\mathcal{O}_0$. Se φ possui uma integral primeira localmente não constante, então $\mathcal{F}(\varphi|_{V_0})$ é topologicamente equivalente a $\mathcal{F}(f, \hat{X}_1)$.*

5.2 Propriedades de Ações de $\mathbb{R}^2$ Sobre M^2

Nesta seção consideramos ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $2 < r \leq \omega$. Exploraremos algumas propriedades globais de uma sub-família destas ações dentre as quais se encontram as ações em $\text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $2 \leq r \leq \omega$, cujos pontos fixos são hiperbólicos e cujas órbitas círculo são normalmente hiperbólicas. Também nesta sub-família se encontram todas as ações de $\text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ (Teorema C). Aplicando este resultado obtemos um aberto de $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ cujos elementos são estruturalmente estáveis e pertencem a $\text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ (Teorema E).

Denotemos por $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ o conjunto das ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ tal que para cada $p \in \text{Fix}(\varphi)$ existe uma vizinhança V_p de p em M^2 que tem uma das seguintes propriedades:

- (1) V_p é φ -invariante, homeomorfo a um disco aberto e $\overline{V_p} \cap \text{Fix}(\varphi) = \{p\}$, onde $\overline{V_p}$ denota o fecho de V_p .
- (2) V_p contém no máximo um número finito de φ -órbitas de dimensão maior ou igual que 1.

Observemos que se (1) for válido, não pode existir uma φ -órbita plano em V_p já que φ é de classe C^2 , (ver Figura 5.4). Logo neste caso temos apenas as seguintes possibilidades:

- (i) $V_p \setminus \{p\}$ é uma φ -órbita cilíndrica;
- (ii) V_p contém uma infinidade de φ -órbitas cilíndricas (ver Figura 5.5);
- (iii) $V_p \setminus \{p\}$ contém apenas φ -órbitas de dimensão um.

Figura 5.4: Se π é uma φ -órbita plano, então φ não pode ser C^2 .

Figura 5.5: Existe uma infinidade de φ -órbitas cilíndricas $\mathcal{O}_i$.

Observação 5.16 O conjunto $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, contém as ações em $\text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ cujos pontos fixos são hiperbólicos e cada órbita círculo é normalmente hiperbólico e também contém todas as ações em $\text{Act}_2^\infty(\mathbb{R}^2, M^2)$.

A seguinte propriedade simples será uma ferramenta fundamental para o que se segue.

Lema 5.17 Seja $\mathcal{O}$ uma órbita cilíndrica de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$. Então a fronteira de $\mathcal{O}$ é exatamente a união de no máximo duas φ -órbitas compactas.

Demonstração: Como $\mathcal{O}$ é homeomorfa a um cilindro, o seu grupo de isotrofia G é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Além disso $\text{Front}(\mathcal{O}) = C_1 \cup C_2$, onde cada C_i , $i = 1, 2$, ou é um ponto ou um círculo. Se C_i é um ponto, então C_i é uma órbita compacta (ponto fixo) de φ . Suponhamos que C_i é um círculo que não é uma φ -órbita, então existem

dois pontos $p, q \in C_i$ com $p \neq q$ e $p \in \text{Fix}(\varphi)$. Seja $u \in \mathbb{R}^2$ um gerador do grupo G . Então todas as órbitas do campo X_u passando por pontos de $\mathcal{O}$ são fechadas de período 1. Além disso, existem seqüências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em $\mathcal{O}$ e $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $0 < t_n < 1$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n u, p_n) = q.$$

Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ onde $t \in [0, 1]$. Conseqüentemente, teremos que $\varphi(tu, p) = q$, o que é um absurdo pois p é ponto fixo de φ . Portanto C_i é uma φ -órbita círculo. $\square$

O seguinte resultado demonstra que em algumas situações, a estrutura de órbitas de um elemento da família $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ é muito rígida, de maneira que elas existem em variedades bem específicas.

Teorema C *Se $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, tem uma órbita cilíndrica, então φ não possui órbitas plano. Além disso,*

- (1) $\text{Sing}(\varphi) = \emptyset$, então $M^2 = T^2$.
- (2) Se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, então $\text{Fix}(\varphi)$ tem exatamente dois pontos e $M^2 = S^2$.

Geometricamente, pelo Teorema C, se φ satisfaz a hipótese deste teorema, então a estrutura de órbitas desta ação é mais o menos como na Figura 5.6.

Figura 5.6: Se $M = T^2$, então φ possui apenas órbitas cilíndricas, retas e círculos.

Uma conseqüência imediata deste teorema é a seguinte.

Corolário 5.18 *Se $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, possui uma órbita plano, então φ não possui nenhuma órbita cilíndrica.*

A demonstração do Teorema C é feita por etapas. O seguinte resultado demonstra a primeira parte deste teorema.

Teorema 5.19 *Se $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, possui uma órbita cilíndrica, então φ não possui órbitas plano.*

Demonstração: Seja C uma órbita homeomorfa a um cilindro. Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças abertas e conexas de C , φ -invariantes e que não contém órbitas homeomorfas a planos. Como $C \in \mathcal{U}$ e tendo a inclusão como ordem parcial, temos pelo Lema de Zorn que existe $U_M \subset M$ elemento maximal de $\mathcal{U}$. Se $U_M \neq M$, então o conjunto φ -invariante $\text{front}(U_M)$ é não vazio e nenhuma componente conexa é um ponto. Seja F uma componente conexa de $\text{front}(U_M)$ e $p \in F$, pelo fato de $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$ e pelo Lema 5.17 temos que $p \notin \text{Fix}(\varphi)$, logo a φ -órbita passando por p é um círculo e é igual a F . Temos duas possibilidades:

(i) *Existe uma infinidade de órbitas de dimensão dois em $M \setminus U_M$ se aproximando de F .*

Se todas as φ -órbitas de dimensão dois são cilindros, então existe um aberto $C' \subseteq M \setminus U_M$ homeomorfo a um cilindro tal que $F \subseteq \text{Front}(C')$. O aberto $U_M \cup C' \in \mathcal{U}$ e contém U_M e isto contradiz o fato de U_M ser maximal em $\mathcal{U}$. Finalmente, se existe uma infinidade de φ -órbitas planos P_i se aproximando de F , segue que existem uma infinidade de pontos fixos $p_i \in P_i$. Logo tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $p_i \rightarrow p \in F$, conseqüentemente, p é ponto fixo. Isto contradiz o fato de F ser uma órbita círculo.

(ii) *Caso contrário.*

Suponhamos que existe uma φ -órbita $C'' \subseteq M \setminus U_M$ cilíndrica tal que $F \subseteq \text{Front}(C'')$. Então considerando $U_M \cup C'' \in \mathcal{U}$ obtemos uma contradição. Logo existe uma vizinhança W de F tal que as φ -órbitas passando por pontos de $W \setminus U_M$ são todas de dimensão 1. Temos que o saturado de $W \setminus U_M$ é um cilindro C'' com $F \subseteq \text{Front}(C'')$, logo $U_M \cup C'' \in \mathcal{U}$ uma contradição. $\square$

Se uma ação $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 2$, possui todos seus pontos fixos hiperbólicos e todas suas órbitas círculo normalmente hiperbólicas, então $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ e possui apenas um número finito delas. Para a família $\mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$, $r \geq 2$, temos a seguinte propriedade.

Lema 5.20 *Se $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$, $r \geq 2$, possui uma órbita cilíndrica, então $\text{Fix}(\varphi)$ é finito.*

Demonstração: Suponhamos que $\text{Fix}(\varphi)$ não é finito, então temos duas possibilidades:

(1) $\text{Fix}(\varphi)$ tem interior vazio.

Neste caso, existe $p \in \text{Fix}(\varphi)$ ponto de acumulação de $\text{Fix}(\varphi)$. Pelo Teorema 5.19 temos que todas as φ -órbitas de dimensão dois são cilíndricas. Como $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$, existe uma vizinhança V_p de p em M cujo saturado contém um número finito de φ -órbitas de dimensão maior ou igual a um. Mas $p \in \text{Fix}(\varphi)$ é ponto de acumulação de $\text{Fix}(\varphi)$, daí o Lema 5.17 obriga a existência de uma infinidade de órbitas de dimensão maior do que Zero. Isto nos leva a uma contradição.

(2) $\text{Fix}(\varphi)$ tem interior não vazio.

Neste caso é suficiente tomar um ponto fixo $p \in \text{Front}(\text{Fix}(\varphi))$ e o restante da prova segue análogo ao feito em (1). $\square$

Como cada ação em $\text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M)$ possui apenas um número finito de órbitas de dimensão dois, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.21 *Se $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M)$ possui uma órbita cilíndrica, então $\text{Fix}(\varphi)$ é finito.*

A seguir passamos à demonstração do Teorema C.

Demonstração do Teorema C:

Pelo Teorema 5.19 temos que todas as φ -órbitas de dimensão dois são cilíndricas. Se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, então $M = T^2$. Logo, suponhamos que existe $p \in \text{Fix}(\varphi)$. Então como $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$, $r \geq 2$, existe V_p vizinhança de p , φ -invariante e homeomorfa a um disco aberto.

Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças abertas V , φ -invariantes, homeomorfas a um disco aberto, tal que $V_p \subset V$ e $V \cap \text{Fix}(\varphi) = \{p\}$. Com a inclusão como ordem parcial temos pelo Lema de Zorn que existe $V_M \subset M$ elemento maximal de $\mathcal{U}$.

Se $\text{Front}(V_M) = \{pto\}$, então segue que $M = V_M \cup \{pto\}$ é homeomorfa à esfera S^2 .

Suponhamos que $\text{Front}(V_M) \neq \{pto\}$ ou seja, $M \setminus V_M$ tem interior vazio. Afir-mamos que $\text{front}(V_M) \cap \text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ pois, se $q \in \text{Front}(V_M) \cap \text{Fix}(\varphi)$, então existe

uma vizinhança aberta V_q de q , φ -invariante, homeomorfa a um disco aberto tal que $V_q \cap \text{Fix}(\varphi) = \{q\}$ e $\text{Front}(V_q)$ é uma φ -órbita círculo. Isto contradiz o fato de V_M ser φ -invariante já que, se $q_0 \in \text{Front}(V_M) \cap \text{Front}(V_q)$, então a φ -órbita $\mathcal{O}_{q_0} = \text{Front}(V_q)$ não está contida em V_M . Assim, como $\text{Front}(V_M)$ é φ -invariante e não contém pontos fixos, segue que $\text{Front}(V_M)$ é uma φ -órbita círculo.

Pelo Lema 5.20 e pelo Teorema 5.19 temos que existe uma vizinhança U de $\text{Front}(V_M)$ tal que o saturado por φ de $U \setminus V_M$ é homeomorfo a um cilindro. Logo, se $\varphi(U)$ denota o saturado de $U \setminus V_M$, então o aberto $V_M \cup \varphi(U) \in \mathcal{U}$ contém propriamente V_M e isto é uma contradição. Portanto $\text{Front}(V_M)$ é igual a um ponto. Consequentemente M^2 é homeomorfa à esfera S^2 e $\text{Fix}(\varphi)$ possui exatamente dois elementos. $\square$

5.2.1 Algumas Aplicações

Neste parágrafo usando o Teorema C, demonstramos alguns resultados de natureza global para ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $1 \leq r \leq \omega$, dentre eles os Teoremas D e E.

Um primeiro resultado a ser abordado é sobre estabilidade estrutural global que a seguir enunciamos.

Teorema 5.22 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tal que cada ponto fixo é hiperbólico e cada órbita círculo é normalmente hiperbólica. Então φ é estruturalmente estável.*

Precisaremos de alguns resultados prévios.

Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica. Então $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ possui apenas um número finito de órbitas. Se $K = \text{Sing}(\varphi)$, então pelo Teorema C $M^2 - K = \bigcup_{i=1}^d \mathcal{O}_i$, onde as φ -órbitas $\mathcal{O}_i$ têm o mesmo tipo topológico. Seja c o número de órbitas compactas. Considerando a sequência exata longa do par (M^2, K) com coeficientes em $\mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}(K) \longrightarrow H_{i+1}(M^2) \longrightarrow H_{i+1}(M^2, K) \longrightarrow H_i(K) \longrightarrow \cdots \quad (*)$$

e usando as dualidades de Poincaré e Alexander, temos os seguintes casos

(1) $\mathcal{O}_i \simeq S^1 \times \mathbb{R}$: neste caso $M^2 = S^2$ ou $M^2 = T^2$ e $K = \text{Sing}^c(\varphi)$; além disso $H_2(K) = 0 = H^2(M^2 - K)$, $H_2(M^2) = \mathbb{Z} = H_0(M^2)$, $H^0(M^2 - K) = \mathbb{Z}^d = H^1(M^2 - K)$ e $H_0(K) = \mathbb{Z}^c$. Substituindo isto em $(*)$, obtemos as seguintes seqüências:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^{c-2} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \text{ se } M^2 = S^2,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \text{ se } M^2 = T^2.$$

Conseqüentemente, $c = d + 1$ se $M^2 = S^2$, e $c = d$ se $M^2 = T^2$.

(2) $\mathcal{O}_i \simeq \mathbb{R}^2$: neste caso M^2 tem gênero arbitrário g e $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$; além disso $H_2(K) = 0 = H^2(M^2 - K) = H^1(M^2 - K)$, $H_2(M^2) = \mathbb{Z} = H_0(M^2)$ e $H^0(M^2 - K) = \mathbb{Z}^d$. Substituindo isto em (*), obtemos a seguinte seqüência:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow H_1(K) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow 0 \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

conseqüentemente, $H_0(K) = \mathbb{Z}$ ou seja, K é conexo. Acabamos de demonstrar o seguinte lema.

Lema 5.23 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica, então $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ possui apenas um número finito de órbitas. Além disso, apenas uma das duas propriedades é satisfeita:*

- (1) $\text{Sing}(\varphi) = \text{Sing}_2^c(\varphi)$, $M^2 = T^2$, $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e o número de órbitas cilíndricas é igual ao número de órbitas círculo.
- (2) $\text{Sing}(\varphi) = \text{Sing}^c(\varphi)$, $M^2 = S^2$, $\text{Fix}(\varphi)$ tem exatamente dois pontos e o número de órbitas cilíndricas supera em um ao número de órbitas círculo.
- (3) $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$ e $\text{Sing}(\varphi)$ é um grafo orientado conexo.

Demonstração do Teorema 5.22: Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica, então $\varphi \in \text{Act}_2^r(\mathbb{R}^2, M^2)$ possui apenas um número finito de órbitas. Se $\text{Sing}(\varphi) = \emptyset$, então φ possui exatamente uma órbita tendo esta que ser $M^2 = T^2$. Conseqüentemente, φ é estruturalmente estável. Suponhamos que $\text{Sing}(\varphi) \neq \emptyset$, então temos dois casos a analisar.

Suponhamos que φ possui uma órbita cilíndrica. Então pelo Teorema C todas as φ -órbitas de dimensão dois são cilindros e $M = S^2$, $\text{Fix}(\varphi) = \{p_1, p_2\}$ ou $M = T^2$, $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$. Além disso se $\mathcal{O}_1(\varphi), \dots, \mathcal{O}_k(\varphi)$ são as φ -órbitas compactas singulares, então dadas vizinhanças V_i , $i = 1, \dots, k$, de $\mathcal{O}_i(\varphi)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varphi$ tal que $V_i \cap \text{Sing}^c(\psi) = \mathcal{O}_i(\psi)$ é uma ψ -órbita compacta difeomorfa a $\mathcal{O}_i(\varphi)$, para cada $\psi \in \mathcal{V}_\varphi$. Reduzindo $\mathcal{V}_\varphi$, se necessário, temos que ψ tem o mesmo número de órbitas e do mesmo tipo topológico que φ . Portanto φ é estruturalmente estável.

Finalmente, suponhamos que todas as φ -órbitas de dimensão dois são planos. Neste caso $\text{Sing}(\varphi)$ é um grafo orientado conexo composto de pontos fixos e órbitas reta, ou seja, $\text{Sing}(\varphi) = \cup_{j=1}^\ell \overline{R_j(\varphi)}$, onde $R_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, \ell$, é uma φ -órbita reta. Sejam $G_j \simeq \mathbb{R}$ o subgrupo de isotrofia de $R_j(\varphi)$ e $v_j \in G_j - \{0\}$. Pelo Teorema 3.4

o campo X_{n_j} é normalmente hiperbólico em $\overline{R_j(\varphi)}$, para cada $j = 1, \dots, \ell$. Logo dada U vizinhança de $\text{Sing}(\varphi)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varphi$ de φ tal que $\text{Sing}(\tilde{\varphi}) \subset U$ é difeomorfo a $\text{Sing}(\varphi)$, para cada $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}_\varphi$. Reduzindo $\mathcal{V}_\varphi$ se necessário, temos que $\text{Fix}(\varphi)$ e $\text{Fix}(\tilde{\varphi})$ têm a mesma cardinalidade. Conseqüentemente, φ e $\tilde{\varphi}$ têm o mesmo número de órbitas e do mesmo tipo topológico. Portanto são topologicamente equivalentes. $\square$

Do Lema 5.23 e do Teorema 5.22 segue

Teorema D *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica, então φ é estruturalmente estável. Além disso se c é o número de φ -órbitas círculo, uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

- (1) *se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, então $M^2 = T^2$ e φ possui exatamente $2c$ órbitas sendo c o número de órbitas cilíndricas, ou $M^2 = S^2$ e φ possui exatamente $2c+3$ órbitas sendo elas dois pontos fixos e $c+1$ órbitas cilíndricas.*
- (2) *se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, então $c = 0$, as φ -órbitas de dimensão dois são planos e $\text{Sing}(\varphi)$ é um grafo orientado conexo.*

Aplicando o Teorema C obtemos alguns resultados sobre centralizadores de campos analíticos reais que a seguir detalhamos. Se $X \in \mathfrak{X}^\infty(M^2)$, o Teorema de Paulo Sad (veja a introdução) dá condições suficientes para que a ação de $\mathbb{R}^2$ sobre M^2 gerada pelos campos $X_1 = X$ e $X_2 = cX$ ($c = cte$) seja C^∞ -estruturalmente estável. Exploramos a estabilidade estrutural de ações em $\text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$. Nessa direção, impondo algumas condições e usando o Teorema C obtemos o Teorema E.

Dado um campo $X \in \mathfrak{X}^r(M^2)$ dizemos que $p \in \text{Sing}(X)$ é um *centro topológico* se existe uma vizinhança V_p de p contendo uma infinidade de órbitas fechadas do campo X .

Dizemos que um campo $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ *mergulta* numa ação $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ se existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $X = X_v$.

Qualquer campo $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ pode ser mergulhado trivialmente em $\text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$. Por outro lado como $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2) = \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2) \cup \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$, restaria ver sobre que condições um campo $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ pode ser mergulhado em $\text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$. Nessa direção temos o seguinte resultado.

Teorema 5.24 *Suponhamos que $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ possui uma órbita fechada $\mathcal{O}(X)$. Se X mergulha em $\text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$, então existe uma vizinhança V de $\mathcal{O}(X)$ saturada por órbitas fechadas. Além disso, $M^2 = S^2$ ou $M^2 = T^2$.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ e $p \in M^2$ tal que X mergulha em φ e $p \in \mathcal{O}(X)$. Seja $\mathcal{O}_p$ a φ -órbita passando por p .

Se $\dim(\mathcal{O}_p) = 1$, então $\mathcal{O}_p = \mathcal{O}(X)$. Logo existe uma vizinhança V de $\mathcal{O}_p$ tal que $V \setminus \mathcal{O}_p$ é a união de duas φ -órbitas cilíndricas. Logo, pelo Teorema C segue que M^2 é homeomorfa à esfera S^2 e $\text{Fix}(\varphi)$ tem dois elementos. Além disso, neste caso todas as φ -órbitas de dimensão dois são cilíndricas. Conseqüentemente, pela analiticidade segue que os seus grupos de isotropia são iguais e, portanto, as órbitas de X em $M^2 \setminus \text{Fix}(\varphi)$ são fechadas e de mesmo período.

Se $\dim(\mathcal{O}_p) = 2$, então $\mathcal{O}_p \supset \mathcal{O}(X)$ é uma φ -órbita cilíndrica. Portanto o resultado segue de forma análoga ao primeiro caso. $\square$

Uma conseqüência imediata deste resultado é a seguinte.

Observação 5.25 *Suponha que X mergulha em $\text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, S^2)$. X possui uma órbita fechada se, e somente se, X possui um centro topológico.*

Seja $\mathcal{C}^r(X) = \{Y \in \mathfrak{X}^r(M^m) : [X, Y] = 0\}$, onde $0 \leq r \leq \infty$ ou $r = \omega$ e $X \in \mathfrak{X}^r(M^m)$ o *centralizador* de X . Na direção do Teorema de P. Sad citado na introdução (ver [7]) temos como conseqüência do Teorema 5.24 os seguintes resultados.

Corolário 5.26 *Suponhamos que M^2 tem gênero $g > 1$ e que $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ possui um centro topológico $p \in \text{Sing}(X)$. Então o centralizador de X é $\mathcal{C}^\omega(X) = \{fX; f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})\}$.*

Corolário 5.27 *Suponhamos que M tem gênero $g \geq 1$ e que $X \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ possui uma órbita fechada. Então o centralizador de X é $\mathcal{C}^\omega(X) = \{fX; f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})\}$.*

A diferencia do Teorema de Sad, os campos nos corolários anteriores não são necessariamente estruturalmente estáveis, conseqüentemente a integral primeira nem sempre é constante.

A seguir usaremos o Teorema C para demonstrar um resultado de estabilidade estrutural global de uma família de ações singulares de $\mathbb{R}^2$ sobre M^2 . Seja $p \in M^2$

um ponto fixo centro de $\varphi \in \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$. Então existem geradores infinitesimais $X_i \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$, $i = 1, 2$, tais que p é singularidade centro de X_1 . Como p é uma singularidade isolada de X_1 e $\varphi \in \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$, segue que existe uma função $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ analítica real tal que $X_2 = fX_1$. Além disso f é integral primeira de X_1 e, conseqüentemente, integral primeira da ação.

Se $\mathcal{D}_0 = \{\varphi \in \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2); \varphi \text{ possui um centro}\}$, então para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ existem $X_1 \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ e $f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})$ como acima.

Seja $\mathcal{D}'_0 \subset \mathcal{D}_0$ tal que X_1 possui singularidades selas e pelo menos um centro e f não é constante. Temos o seguinte resultado.

Teorema E *Se M^2 tem gênero $g \geq 1$, então cada ação $\varphi \in \mathcal{D}'_0$ é estruturalmente estável. Conseqüentemente $\mathcal{D}'_0$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$.*

Demonstração: Sejam X_1 e X_2 geradores infinitesimais de $\varphi \in \mathcal{D}'_0$, tais que $X_2 = fX_1$ onde f e X_1 são como acima. Seja $p \in M^2$ singularidade de tipo centro do campo X_1 . Logo, existem vizinhanças U de p e $\mathcal{U}_1$ de X_1 tal que cada campo em $\mathcal{U}_1$ possui uma única singularidade em U . Seja $\tilde{\varphi} \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ com geradores infinitesimais $\tilde{X}_1 \in \mathcal{U}_1$ e $\tilde{X}_2 \in \mathcal{U}_2$, onde $\mathcal{U}_2$ é uma vizinhança de X_2 . Se $p_{\tilde{X}_1}$ é a única singularidade de $\tilde{X}_1$ em U , da comutatividade dos campos $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$, segue que $\tilde{X}_2(p_{\tilde{X}_1}) = 0$, ou seja $p_{\tilde{X}_1} = \tilde{p} \in \text{Fix}(\tilde{\varphi})$. Além disso, da analiticidade de $\tilde{X}_1$ segue que, ou $p_{\tilde{X}_1}$ é centro, ou todas as órbitas de $\tilde{X}_1$ são espirais (neste caso $p_{\tilde{X}_1}$ é atrator hiperbólico). O ponto fixo $\tilde{p}$ não pode ser fronteira de um plano (senão M^2 seria homeomorfa à esfera S^2) nem de um cilindro, este último devido ao Teorema C. Logo existe uma seqüência de pontos $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em U com $q_i \neq q_j$ para $i \neq j$ tal que os vetores $\tilde{X}_1(q_i)$ e $\tilde{X}_2(q_i)$ são linearmente dependentes e $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \tilde{p}$. Conseqüentemente, como $\tilde{p}$ é uma singularidade centro ou atrator de tipo complexo de $\tilde{X}_1$ então, da analiticidade dos campos, segue que existe $\tilde{f} \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})$ não constante tal que $\tilde{X}_2 = \tilde{f}\tilde{X}_1$. Reduzindo $\mathcal{U}_i$ se necessário, pelo Lema 5.5, temos que os campos X_1 e $\tilde{X}_1$ são topologicamente equivalentes e daí as ações φ e $\tilde{\varphi}$ também são topologicamente equivalentes. $\square$

Na prova do teorema acima se demonstra o seguinte.

Proposição 5.28 *Se M^2 tem gênero $g \geq 1$, então $\mathcal{D}_0 \subset \text{Act}_1^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^2)$.*

Observação 5.29 *Se $g = 1$ e $\text{Sing}(X) \neq \emptyset$, então X possui no mínimo uma singularidade de tipo centro.*

Figura 5.7: Estrutura de órbitas de uma ação em $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, M^2)$.

Exemplo: Sejam M^2 uma superfície de gênero maior o igual a um, $H : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse analítica real, $X_H \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ seu Hamiltoniano associado e $f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})$ integral primeira de X_H não constante (por exemplo H). Seja $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, M^2)$ o conjunto de todas as ações de $\mathbb{R}^2$ sobre M^2 cujos geradores infinitesimais são X_H e fX_H . Então $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2, M^2) \subset \mathcal{D}'_0$ (ver figura 5.7).

5.3 Propriedades de Ações de $\mathbb{R}^3$ Sobre M^3

Nesta seção consideramos ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $2 \leq r \leq \omega$, e como na seção anterior, exploraremos algumas propriedades globais de uma sub-família destas ações (Teorema C'). Entre estas ações se encontram as ações de $\text{Act}_3^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $2 \leq r \leq \omega$, cujos pontos fixos são hiperbólicos e cujas órbitas compactas são normalmente hiperbólicas. Também nesta sub-família encontram-se todas as ações de $\text{Act}_3^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$. Aplicando o Teorema C', entre outros resultados, obtemos um aberto de $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ cujos elementos são estruturalmente estáveis e pertencem a $\text{Act}_3^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ (Teorema E').

Antes de passar a descrever os principais resultados desta seção, precisamos fazer algumas considerações. É conhecido que toda variedade fechada e conexa M^3 de dimensão três pode ser decomposta de várias maneiras como união de duas peças "simples", uma delas é a "decomposição de Heegaard", que descrevemos a seguir. Para isto precisamos de alguns conceitos.

Um *cubo com k -alças* é uma variedade V , de dimensão três, contendo uma coleção $\{D_1, \dots, D_k\}$ de 2-células duas a duas disjuntas, propriamente mergulhadas e tal que cortando V ao longo de $\cup_{i=1}^k D_i$ obtém-se uma 3-célula.

Observemos que a fronteira de um cubo com k -alças V é uma superfície fechada de característica de Euler igual a $2 - 2k$ a qual é orientável se e somente se V é orientável.

Uma *decomposição de Heegaard* de M^3 é um par (V_1, V_2) onde V_i , $i = 1, 2$ é um cubo com alças, $M^3 = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$. Neste caso V_1 e V_2 tem o mesmo número de alças. O número de alças de V_i , $i = 1, 2$, é chamado de *gênero da decomposição*.

A demonstração do seguinte resultado pode ser encontrado em [8].

Teorema 5.30 *Toda variedade fechada e conexa de dimensão três possui uma decomposição de Heegaard.*

Suponhamos que (V_1, V_2) é uma decomposição de Heegaard de M^3 . Sejam $\{D_1, \dots, D_k\}$ qualquer coleção de 2-células duas a duas disjuntas, propriamente mergulhadas em V_2 e tal que, cortando V_2 ao longo de $\cup_{i=1}^k D_i$, obtém-se uma 3-célula. Os círculos dois a dois disjuntos $\{\partial D_1, \dots, \partial D_k\}$ cortam $\partial V_1 = \partial V_2$ numa 2-esfera com $2n$ buracos. Chamaremos o sistema $(V_1; \partial D_1, \dots, \partial D_k)$ um *diagrama de Heegaard* associado à decomposição de Heegaard (V_1, V_2) .

Apesar dos diagramas e decomposições de Heegaard nos proporcionarem uma forma conveniente de ver e construir variedades de dimensão três, eles tem tido uso limitado no estudo sistemático destas variedades. O motivo principal para isto é que existem muitos diagramas de Heegaard diferentes, associados a uma decomposição de Heegaard (de gênero maior ou igual a dois).

Decomposições de Heegaard de gênero um podem ser classificadas completamente. Geometricamente as variedades que admitem tais decomposições são obtidas colando dois toros sólidos pelo bordo. Maiores detalhes a respeito de decomposição e diagrama de Heegaard podem ser encontrados em [8].

Feitas as considerações acima, prosseguimos com o assunto desta seção.

Denotamos por $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ o conjunto de todos os pontos em M^3 cuja φ -órbita é um círculo e por $\mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ o conjunto das ações $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ tal que $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e cada $p \in \text{Sing}_1^c(\varphi)$ possui uma vizinhança V_p em M^3 satisfazendo uma das seguintes propriedades:

- (1) V_p é φ -invariante, homeomorfo a $S^1 \times D^2$ e $\mathcal{O}_p$ é a única φ -órbita círculo em $\overline{V_p}$.
- (2) V_p contém no máximo um número finito de órbitas de dimensão maior ou igual que 1.

Em determinadas situações, a estrutura de órbitas destas ações é muito rígida, conseqüentemente elas só convivem em alguns ambientes M^3 muito específicos; nesse sentido temos o seguinte resultado.

Teorema C' *Se $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, possui uma órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$, então todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, existem apenas duas possibilidades:*

- (1) *Se $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$, então $M^3 = T^3$.*
- (2) *Se $\text{Sing}_1^c(\varphi) \neq \emptyset$, então $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \{\text{duas órbitas círculo}\}$ e M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um.*

Para provar este teorema precisamos de alguns lemas. Analogamente ao Lema 5.17 obtemos:

Lema 5.31 *Suponha que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem uma órbita $\mathcal{O}$ homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$. Então, a fronteira de $\mathcal{O}$ é a união de no máximo duas órbitas compactas, sendo que estas só podem ser círculos ou toros.*

Demonstração: Se $\text{Front}(\mathcal{O})$ denota a fronteira de $\mathcal{O}$, então $\text{Front}(\mathcal{O}) = C_1 \cup C_2$, onde cada C_i , $i = 1, 2$, é homeomorfo a círculo ou a um 2-toro. O grupo de isotropia G de $\mathcal{O}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Para $i = 1, 2$ fixo, suponhamos que existem $p, q \in C_i$ tal que $p \in \text{Fix}(\varphi)$ e $p \neq q$. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^3$ geradores de G , então todas as órbitas dos campos X_u e X_v passando por pontos de $\mathcal{O}$ são fechadas de período 1. Existem seqüências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em $\mathcal{O}$, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $0 < t_n, s_n < 1$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n u + s_n v, p_n) = q.$$

Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, onde $t, s \in [0, 1]$. Conseqüentemente, teremos que $\varphi(tu + sv, p) = q$, o que é um absurdo pois p é ponto fixo de φ . Assim os conjuntos φ -invariantes C_i não contém nenhum ponto fixo para cada $i = 1, 2$. Logo, C_i é homeomorfo a círculo ou a um 2-toro. No primeiro caso temos que C_i é uma φ -órbita círculo. No segundo caso, suponhamos que existe uma φ -órbita $\mathcal{O}' \subset C_i$ de dimensão um. Se G' é o grupo de isotropia de $\mathcal{O}'$, então G é um subgrupo de G' . Além disso, como G' é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}^2$ se $\mathcal{O}'$ é uma φ -órbita círculo ou reta, respectivamente, podemos supor que $u, v \in G'$ e que $X_u|_{\mathcal{O}'} \equiv 0$. Logo, tomando $p, q \in C_i$ tal que $p \in \mathcal{O}'$ e $q \notin \mathcal{O}'$, existem seqüências $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em $\mathcal{O}$, $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $0 < t_n, s_n < 1$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n u + s_n v, p_n) = q.$$

Tomando uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, onde $t, s \in [0, 1]$. Teremos assim que $\varphi(sv, p) = q$, o que é um absurdo pois $q \notin \mathcal{O}'$. Portanto C_i não contém nenhuma órbita de dimensão um. Assim C_i é uma φ -órbita toro e o resultado segue. $\square$

Teorema 5.32 *Se $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, possui uma órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$, então todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}$ uma φ -órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças abertas de $\mathcal{O}$ em M^3 , φ -invariantes e que não contém órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ nem a $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{U} \neq \emptyset$ pois $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$. Com a inclusão como ordem parcial, temos pelo Lema de Zorn que existe $U_M \in \mathcal{U}$ elemento maximal. Se $U_M = M^3$, então a demonstração está terminada. Se $U_M \neq M^3$, então $\text{Front}(U_M) \neq \emptyset$ e nenhuma componente conexa é um círculo, isto por U_M ser maximal. Além disso, cada componente conexa de $\text{Front}(U_M)$ é compacta, sem bordo de dimensão dois.

Como U_M é φ -invariante, segue que $\text{Front}(U_M)$ também é. Sejam F uma componente conexa de $\text{Front}(U_M)$ e $p \in F$. Pelo fato de $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, e pelo Lema 5.31 temos que a φ -órbita $\mathcal{O}_p$ não é círculo, reta, plano nem cilindro. Conseqüentemente, $\mathcal{O}_p = F$ é um toro e aparecem duas possibilidades.

(i) *Existe uma infinidade de órbitas de dimensão três se aproximando de F .*

Se todas as φ -órbitas de dimensão dois são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$, então existe um aberto $C' \subseteq M^3 \setminus U_M$ homeomorfo a $T^2 \times \mathbb{R}$, tal que $F \subseteq \text{Front}(C')$. O aberto $U_M \cup C' \in \mathcal{U}$ e contém propriamente U_M ; isto contradiz o fato de U_M ser maximal em $\mathcal{U}$. Se existe uma infinidade de φ -órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ em $M^3 \setminus U_M$ se aproximando de F , então existe $p \in F$ tal que a φ -órbita $\mathcal{O}_p$ tem dimensão no máximo um. Isto é uma contradição pois $\mathcal{O}_p = F$ é um toro.

(ii) *Caso contrário:*

Suponhamos que existe uma φ -órbita $C' \subseteq M^3 \setminus U_M$ homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$ tal que $F \subseteq \text{Front}(C')$. Considerando $U_M \cup C' \in \mathcal{U}$ obtemos uma contradição. Logo existe uma vizinhança W de F tal que as φ -órbitas passando por pontos de $W \setminus U_M$ são todas de dimensão 2. Temos que o φ -saturado C'' de $W \setminus U_M$ é homeomorfo a $T^2 \times \mathbb{R}$ com $F \subseteq \text{Front}(C'')$. Logo $U_M \cup C'' \in \mathcal{U}$. Isto é uma contradição e portanto a prova está concluída. $\square$

Usando este resultado obtemos o seguinte.

Lema 5.33 *Se $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, possui uma órbita $T^2 \times \mathbb{R}$, então existem apenas um número finito de φ -órbitas círculo.*

Demonstração: Suponhamos que existem uma infinidade de órbitas círculo, então temos duas possibilidades:

(1) $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ tem interior vazio.

Neste caso, existe $p \in \text{Sing}_1^c(\varphi)$ ponto de acumulação de $\text{Sing}_1^c(\varphi)$. Pelo Teorema 5.32 temos que todas as φ -órbitas de dimensão dois são homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}$. Como $\varphi \in \mathcal{A}_0^r(\mathbb{R}^2, M)$, existe uma vizinhança V_p de p em M^3 cujo saturado contém um número finito de φ -órbitas de dimensão maior ou igual a dois. Mas $p \in \text{Sing}_1^c(\varphi)$ é ponto de acumulação de $\text{Sing}_1^c(\varphi)$, daí o Lema 5.31 obriga a existência de uma infinidade de órbitas de dimensão maior do que um. Isto nos leva a uma contradição.

(2) $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ tem interior não vazio.

Neste caso é suficiente tomar um ponto $p \in \text{Front}(\text{Sing}_1^c(\varphi))$ e o resto da prova é exatamente de maneira análoga que no caso (1). $\square$

Como cada ação em $\text{Act}_3^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ possui apenas um número finito de órbitas de dimensão três, temos o seguinte corolário.

Corolário 5.34 *Se $\varphi \in \text{Act}_3^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ possui uma órbita $T^2 \times \mathbb{R}$, então existe um número finito de órbitas círculo.*

Demonstração do Teorema C': Seja $\mathcal{O}$ uma φ -órbita $T^2 \times \mathbb{R}$, pelo Teorema 5.32 temos que todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$. Suponhamos que $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$. Mostraremos que $M = T^3$. De fato, seja $\mathcal{V}$ a família de todas as vizinhanças abertas e conexas de $\mathcal{O}$, homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$ e φ -invariantes. Temos que $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Com a inclusão como ordem parcial, pelo Lema de Zorn, existe $V_M \in \mathcal{V}$ elemento maximal. Afirmamos que $\text{Front}(V_M) = T$, onde T é um 2-toro. Conseqüentemente, teremos que $M^3 = V_M \cup T$ é homeomorfa a T^3 . Pelo Lema 5.31 temos que $\text{Front}(V_M)$ é a união de no máximo duas φ -órbitas toro. Se $\text{Front}(V_M) = T_1 \cup T_2$ com T_i , $i = 1, 2$, 2-toros, então $M^3 \setminus V_M$ tem interior vazio. Usando os argumentos usados no Teorema 5.32 chegamos a uma contradição.

Suponhamos que existe $p \in \text{Sing}_1^c(\varphi)$, como $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 2$, então existe V_p vizinhança de $\mathcal{O}_p$, φ -invariante e homeomorfa a $S^1 \times D^2$. Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças abertas V , φ -invariantes, homeomorfas a $S^1 \times D^2$ tal que $V_p \subset V$ e $V \cap \text{Sing}_1^c(\varphi) = \mathcal{O}_p$. Com a inclusão como ordem parcial temos pelo Lema de Zorn que existe $V_M \subset M^3$ elemento maximal de $\mathcal{U}$. Se $\text{Front}(V_M)$ é um círculo, então $M = V_M \cup \text{Front}(V_M)$ admite diagrama de Heegaard de gênero um. Assumamos que $\text{Front}(V_M) = T$ com T um 2-toro, ou seja, $M^3 \setminus V_M$ tem interior vazio. Por $\varphi \in \mathcal{A}_1^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ segue que $T \cap \text{Sing}_1(\varphi) = \emptyset$ e assim, como T é φ -invariante, temos que T é uma φ -órbita T^2 .

Pelo Lema 5.33 e pelo Teorema 5.32 temos que existe uma vizinhança U de T tal que o saturado por φ de $U \setminus V_M$ é homeomorfo a $T^2 \times \mathbb{R}$. Logo, se $\varphi(U)$ denota o saturado de $U \setminus V_M$, então $V_M \cup \varphi(U) \in \mathcal{U}$ e contém propriamente V_M ; isto é uma contradição. Portanto $\text{Front}(V_M)$ é uma φ -órbita círculo. Conseqüentemente, M^3 admite diagrama de Heegaard de gênero um e $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ é a união de duas órbitas círculo. $\square$

Impondo condições de hiperbolicidade para as órbitas compactas singulares de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, obtemos de maneira análoga ao Teorema C o seguinte:

Teorema 5.35 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita compacta normalmente hiperbólica. Se existe uma φ -órbita*

homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, então cada φ -órbita de dimensão três é homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ e cada φ -órbita em $\text{Sing}_2(\varphi)$ é cilíndrica, além disso:

- (1) se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, então M^3 é um fibrado principal com base uma superfície fechada e fibra S^1 .
- (2) se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, então $M^3 = S^1 \times S^2$ e existem dois círculos $S_1, S_2 \subset M^3$, disjuntos, φ -invariantes, tais que $\text{Fix}(\varphi) \subset S_1 \cup S_2$ e

$$\#(\text{Fix}(\varphi) \cap S_1) = \#(\text{Fix}(\varphi) \cap S_2).$$

A seguir exploramos algumas propriedades que serão usadas na prova do teorema acima.

Proposição 5.36 *Suponhamos que φ tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita compacta normalmente hiperbólica. Então todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas.*

Demonstração: Pelo Teorema C podemos supor que φ não possui órbitas $T^2 \times \mathbb{R}$. Suponhamos que existe uma φ -órbita $\mathcal{O}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^3$. Consideremos a família $\mathcal{U}$ de todas as vizinhanças abertas de $\mathcal{O}$ em M^3 , φ -invariantes e que não contém órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$. $\mathcal{U} \neq \emptyset$ pois $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$. Com a inclusão como ordem parcial, temos pelo Lema de Zorn que existe $U_M \subset \mathcal{U}$ elemento maximal. Se $U_M \neq M^3$, então $\emptyset \neq \text{Front}(U_M) \subset \text{Sing}(\varphi)$ e pela hiperbolicidade das órbitas compactas, segue que $\text{Front}(U_M)$ contém um número finito de órbitas singulares, sendo pelo menos uma delas um ponto fixo p . Logo, como $M^3 - U_M$ tem interior não vazio, existe uma φ -órbita $\mathcal{R}$ homeomorfa a $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{Front}(\mathcal{R}) \subset \text{Front}(U_M)$. Segue que o aberto $V_M \cup \mathcal{R}$ pertence a $\mathcal{U}$ e contém propriamente V_M . Isto é uma contradição e, portanto $V_M = M^3$.

Finalmente, se existe uma φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, então não existem φ -órbitas homeomorfas a $\mathbb{R}^3$ ou $T^2 \times \mathbb{R}$. Portanto todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$. E a prova está terminada. $\square$

Seja $\mathcal{O}$ uma órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ de $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ e $\pi \in \text{Front}(\mathcal{O})$ uma φ -órbita de dimensão maior ou igual do que um, com grupo de isotropia G_π . Se G_π^0 é a componente conexa de G_π que contém a origem então:

Lema 5.37 *A isotropia G de $\mathcal{O}$ está contida em G_π . Mais ainda, se π não é uma reta, então $G \not\subset G_\pi^0$.*

Demonstração: Se a φ -órbita $\pi \subset \text{Front}(\mathcal{O})$, então o grupo de isotropia $G \cong \mathbb{Z}$ de $\mathcal{O}$ está contido no grupo de isotropia G_π de π . Sejam $v \in \mathbb{R}^3$ gerador de G , $p \in \pi$ e $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em $\mathcal{O}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$. Existem $q \in \pi$, $q \neq p$ e $t_k \in [0, 1]$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k v, p_k) = q$. Podemos supor que $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t \in [0, 1]$. Logo $\varphi(tv, p) = q$ e isto significa que $v \notin G_\pi^0$, como queríamos. $\square$

Se π é uma órbita plano, então $G_\pi \cong \mathbb{R}$. Uma consequência imediata do lema anterior é a seguinte.

Corolário 5.38 *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, então a fronteira de cada φ -órbita $\mathcal{O}$ homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ não contém nenhuma φ -órbita plano.*

O fato das órbitas compactas serem normalmente hiperbólicas e os pontos fixos serem hiperbólicos implicam o seguinte.

Proposição 5.39 *Suponhamos que φ é como no Teorema 5.35. Então existe uma ação ψ em $\text{Act}^r(S^1 \times \mathbb{R}^2, M^3)$ tal que $\mathcal{O}_q(\psi) = \mathcal{O}_q(\varphi)$, para cada $q \in M^3$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.19, segue que os grupos de isotropia de cada φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ são todos iguais a $G \cong \mathbb{Z}$. Logo a menos de um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^3$ podemos supor que $G = \{(k, 0, 0); k \in \mathbb{Z}\}$. Seja $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2$ com $p = (\pi, id, id)$ onde $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ é a projeção. Definimos $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \times M^3 \rightarrow M^3$ por $\psi(p(v), q) = \varphi(v, q)$, $v \in \mathbb{R}^3$ e $q \in M^3$. Pelo Lema 5.37 temos que $\mathcal{O}_q(\psi) = \mathcal{O}_q(\varphi)$, para cada $q \in M^3$. $\square$

Uma consequência imediata deste resultado é a seguinte.

Corolário 5.40 *A ação ψ da Proposição 5.39 induz uma ação de S^1 sobre M^3 .*

Demonstração: É suficiente considerar $\tilde{\psi} : S^1 \times M^3 \rightarrow M^3$ pondo $\tilde{\psi}(\pi(t), q) = \psi(p(t, 0, 0), q)$ para cada $q \in M^3$. $\square$

Lema 5.41 *Suponhamos que φ é como no Teorema 5.35 e que $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$. Então existem um aberto V homeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, um círculo $S \subset V$ mergulhado em M^3 ambos φ -invariantes, $p_1, \dots, p_k \in \text{Fix}(\varphi)$, $l_1(\varphi), \dots, l_k(\varphi)$ φ -órbitas reta e $D_1(\varphi), \dots, D_k(\varphi)$ discos mergulhados em M^3 φ -invariantes com $p_i \in D_i(\varphi)$ tais que:*

- (1) $V \cap \text{Fix}(\varphi) = S \cap \text{Fix}(\varphi) = \{p_1, \dots, p_k\}$;
- (2) $\partial l_i(\varphi) = \{p_i, p_{i+1}\}$, $p_1 = p_{k+1}$ e $S = \bigcup_{i=1}^k \overline{l_i(\varphi)}$;
- (3) $D_i(\varphi)$ é transversal a S em p_i e $C_i(\varphi) = D_i(\varphi) - \{p_i\}$ é uma φ -órbita cilíndrica para cada $i = 1, \dots, k$;
- (4) $V - (S \cup_{i=1}^k D_i(\varphi)) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{O}_i$, onde $\mathcal{O}_i$ é uma φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Geometricamente temos:

Figura 5.8:

Demonstração do Lema 5.41: Seja $p_1 \in \text{Fix}(\varphi)$, pelos Teoremas 3.3 e 3.4 temos que existe W_{p_1} uma subvariedade de M^3 de dimensão um, φ -invariante e que contém p_1 . Se W_{p_1} não tem bordo, então tomamos $S = W_{p_1}$. Suponhamos que W_{p_1} tem bordo. Então W_{p_1} é homeomorfa a uma reta e, portanto, existe p_2 no bordo de W_{p_1} que necessariamente é um ponto fixo. Seja W_{p_2} a variedade de dimensão um que contém p_2 . Se $W_{p_1} \cup W_{p_2}$ não tem bordo, então tomamos $S = W_{p_1} \cup W_{p_2}$; caso contrário, existe $p_3 \in \text{Fix}(\varphi)$ no bordo de $W_{p_1} \cup W_{p_2}$. Se $W_{p_1} \cup W_{p_2} \cup W_{p_3}$ não tem bordo, então tomamos $S = W_{p_1} \cup W_{p_2} \cup W_{p_3}$, caso contrário repetimos o argumento usado e como $\text{Fix}(\varphi)$ é finito, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $p_1, \dots, p_k \in \text{Fix}(\varphi)$ e $S = \bigcup_{i=1}^k W_{p_i}$ é uma subvariedade difeomorfa ao círculo. Além disso, pelo Teorema 3.4, temos que $W_{p_i} - \{p_i\}$ é a união de no máximo duas φ -órbitas retas, de onde segue (1) e (2).

Por outro lado, pelo Teorema 3.4, para cada $i = 1, \dots, k$, existem subvariedades mergulhadas de dimensão dois $D_i(\varphi)$, que contém p_i , φ -invariantes e transversais a S em p_i . Além disso, pelo Corolário 5.38, $D_i(\varphi) - \{p_i\}$, $i = 1, \dots, k$, é uma φ -órbita cilíndrica. Como φ possui apenas um número finito de órbitas, então pelo Teorema

3.4, existe uma vizinhança aberta V_0 de S tal que $V_0 - ((\cup_{i=1}^k D_i(\varphi)) \cup S)$ contém exatamente k φ -órbitas homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$ e não contém nenhum ponto singular (ver figura 5.8). Assim, se V denota o saturado por φ de V_0 , então V verifica todas as propriedades requeridas e isto demonstra o lema. $\square$

Agora estamos em condições de provar o Teorema 5.35.

Demonstração do Teorema 5.35: Pelo Corolário 5.38, segue que $\text{Sing}_2(\varphi)$ contém apenas φ -órbitas cilíndricas. Suponhamos que $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, então a ação $\tilde{\psi} : S^1 \times M^3 \rightarrow M^3$ é livre. Logo o espaço das órbitas $M^2 = M^3/\tilde{\psi}$ de $\tilde{\psi}$ é uma variedade diferenciável fechada de dimensão dois. Além disso, cada $\tilde{\psi}$ -órbita é um círculo. Portanto M^3 é um fibrado principal com base M^2 e fibra S^1 , o que prova (1).

Finalmente suponhamos que $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$. Seja V como no Lema 5.11, se $\text{Front}(V)$ é homeomorfa a um círculo, então $\overline{V}$ é homeomorfa a $S^1 \times S^2$ e isto significa que $M^3 = S^1 \times S^2$. Suponhamos que $\text{Front}(V)$ não é homeomorfa a um círculo. Então

$$\text{Front}(V) = (\cup_{i=1}^k C_i) \cup (\cup_{i=1}^k O_i)$$

onde para cada $i = 1, \dots, k$, $C_i \subset \text{Front}(D_i(\varphi)) \cap \text{Front}(\mathcal{O}_i)$ é uma φ -órbita círculo e $O_i \subset \text{Front}(V) \cap \text{Front}(\mathcal{O}_i)$ é uma φ -órbita cilíndrica. Logo como C_i , $i = 1, \dots, k$, é normalmente hiperbólica, existe uma vizinhança aberta V_1 de V homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, φ -invariante e tal que

$$V_1 \cap V = (\cup_{i=1}^k C_i^1(\varphi)) \cup (\cup_{i=1}^k \mathcal{O}_i^1)$$

onde para cada $i = 1, \dots, k$, $C_i^1(\varphi)$ é uma φ -órbita cilíndrica, $\mathcal{O}_i^1$ é uma φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, $\text{Front}(D_i(\varphi)) \subset \text{Front}(C_i^1(\varphi))$ e $\text{Front}(\mathcal{O}_i) \cap \text{Front}(\mathcal{O}_i^1)$ contém uma φ -órbita cilíndrica. Se $\text{Front}(V_1)$ é homeomorfa a um círculo, então $\overline{V_1} = M^3 = S^1 \times S^2$, caso contrário existe uma vizinhança aberta V_2 de V_1 homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, φ -invariante tal que

$$V_2 \cap V_1 = (\cup_{i=1}^k C_i^2(\varphi)) \cup (\cup_{i=1}^k \mathcal{O}_i^2)$$

onde para cada $i = 1, \dots, k$, $C_i^2(\varphi)$ é uma φ -órbita cilíndrica, $\mathcal{O}_i^2$ é uma φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, $\text{Front}(C_i^1(\varphi)) \subset \text{Front}(C_i^2(\varphi))$ e $\text{Front}(\mathcal{O}_i^1) \cap \text{Front}(\mathcal{O}_i^2)$ contém uma φ -órbita cilíndrica. Por indução e pelo fato de existirem finitas φ -órbitas, temos que existem vizinhanças abertas $V_3, \dots, V_\ell$ com $\ell \in \mathbb{Z}^+$ tais que $\text{Front}(V_\ell)$ é homeomorfo a um círculo. Conseqüentemente, $\overline{V_1} = M^3$ é $S^1 \times S^2$ e

$$V_j \cap V_{j-1} = (\cup_{i=1}^k C_i^j(\varphi)) \cup (\cup_{i=1}^k \mathcal{O}_i^j), \quad j = 1, \dots, \ell,$$

onde para cada $i = 1, \dots, k$, $C_i^j(\varphi)$ é uma φ -órbita cilíndrica, $\mathcal{O}_i^j$ é uma φ -órbita homeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^2$, $\text{Front}(C_i^{j-1}(\varphi)) \subset \text{Front}(C_i^j(\varphi))$ e $\text{Front}(\mathcal{O}_i^{j-1}) \cap \text{Front}(\mathcal{O}_i^j)$ contém uma φ -órbita cilíndrica. Além disso, $S_2 = \text{Front}(V_\ell)$ contém exatamente k pontos fixos. A demonstração da parte (2) termina tomando $S_1 = S$. $\square$

5.3.1 Algumas Aplicações

Neste parágrafo usando o Teorema C' e o Teorema 5.35, demonstramos alguns resultados de natureza global para ações em $\text{Act}^r(\mathbb{R}^2, M^2)$, $1 \leq r \leq \omega$, dentre eles os Teoremas D' e E'.

Um primeiro resultado a ser abordado é sobre estabilidade estrutural global que a seguir enunciamos.

Teorema 5.42 *Seja $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tal que cada ponto fixo é hiperbólico, cada órbita círculo e cada órbita toro é normalmente hiperbólica. Então φ é estruturalmente estável.*

Precisaremos de alguns resultados prévios.

Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica. Então $\varphi \in \text{Act}_3^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ possui apenas um número finito de órbitas. Se $K = \text{Sing}(\varphi)$, então pela Proposição 5.36, $M^3 - K = \cup_{i=1}^d \mathcal{O}_i$ onde as φ -órbitas $\mathcal{O}_i$ tem o mesmo tipo topológico. Considerando a sequência exata longa do par (M^3, K) com coeficientes em $\mathbb{Z}$

$$\dots \longrightarrow H_{i+1}(K) \longrightarrow H_{i+1}(M^3) \longrightarrow H_{i+1}(M^3, K) \longrightarrow H_i(K) \longrightarrow \dots \quad (**)$$

e usando a dualidades de Poincaré e Alexander, temos os seguintes casos

(1) $\mathcal{O}_i \simeq T^2 \times \mathbb{R}$, $M^3 = T^3$: neste caso $K = \text{Sing}_2^c(\varphi)$, $\text{Sing}_1(\varphi) = \emptyset$ e substituindo os valores em (**), obtemo seguinte sequência exata longa:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^{2d} \longrightarrow \mathbb{Z}^{2c} \longrightarrow \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

de onde segue que $d = c$.

(2) $\mathcal{O}_i \simeq T^2 \times \mathbb{R}$, M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um: neste caso $K = \text{Sing}_1^c(\varphi) \cup \text{Sing}_2^c(\varphi)$, $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ contém exatamente duas órbitas círculo. Além disso, como

$$H_i(M^3) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } M^3 = S^1 \times S^2 \\ \text{finito,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i = 1, 2$, então substituindo valores em (**), obtemos a seguinte sequência exata longa:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow H_2(M^3) \longrightarrow \mathbb{Z}^{2d} \longrightarrow \mathbb{Z}^{2c} \longrightarrow H_1(M^3) \longrightarrow \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}^c \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

de onde segue que $d = c - 1$.

(3) $\mathcal{O}_i \simeq S^1 \times \mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{O}_i \simeq \mathbb{R}^3$: analogamente aos casos anteriores temos que K é conexo.

A partir destas observações, da Proposição 5.36, e dos Teoremas C' e 5.35, obtemos o seguinte.

Lema 5.43 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita compacta normalmente hiperbólica, então $\varphi \in \text{Act}_3^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ possui apenas um número finito de órbitas. Além disso, apenas uma das propriedades abaixo é satisfeita:*

- (1) $\text{Sing}(\varphi) = \text{Sing}_2^c(\varphi)$, $M = T^3$, $\text{Sing}_1(\varphi) = \emptyset$ e o número de órbitas $T^2 \times \mathbb{R}$ é igual ao número de órbitas T^2 .
- (2) $\text{Sing}(\varphi) = \text{Sing}_1^c(\varphi) \cup \text{Sing}_2^c(\varphi)$, $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ contém exatamente duas órbitas círculo, M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um e o número de órbitas $T^2 \times \mathbb{R}$ supera em um ao número de órbitas T^2 .
- (3) $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, $\text{Sing}_1(\varphi) = \text{Sing}_1^c(\varphi)$, $\text{Sing}_2(\varphi)$ contém apenas órbitas cilíndricas, M^3 é um fibrado principal com base uma superfície e fibra S^1 e $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo.
- (4) $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, $\text{Sing}_2(\varphi)$ contém apenas órbitas cilíndricas, $M^3 = S^1 \times S^2$ e $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo.
- (5) $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, as órbitas em $\text{Sing}(\varphi)$ são retas ou planos e $\text{Sing}(\varphi)$ é um complexo celular orientado e conexo.

A seguir demonstramos o Teorema 5.42.

Demonstração do Teorema 5.42: Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita círculo normalmente hiperbólica, então $\varphi \in \text{Act}_3^r(\mathbb{R}^3, M^3)$ possui apenas um número finito de órbitas. Se $\text{Sing}(\varphi) = \emptyset$, então φ possui exatamente uma órbita, tendo esta que ser $M^3 = T^3$. Conseqüentemente, φ é estruturalmente estável. Suponhamos que $\text{Sing}(\varphi) \neq \emptyset$, então temos dois casos.

Suponhamos que φ possui uma órbita homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$. Então pelo Teorema C', todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$ e $M^3 =$

T^3 , $\text{Sing}_1^c(\varphi) = \emptyset$ ou M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um com $\text{Sing}_1^c(\varphi)$ contendo exatamente duas órbitas círculo. Além disso se $\mathcal{O}_1(\varphi), \dots, \mathcal{O}_k(\varphi)$ são as φ -órbitas compactas singulares, então dadas vizinhanças V_i , $i = 1, \dots, k$, de $\mathcal{O}_i(\varphi)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varphi$ tal que $V_i \cap \text{Sing}^c(\psi) = \mathcal{O}_i(\psi)$ é uma ψ -órbita compacta difeomorfa a $\mathcal{O}_i(\varphi)$, para cada $\psi \in \mathcal{V}_\varphi$. Reduzindo $\mathcal{V}_\varphi$ se necessário, temos que ψ tem o mesmo número de órbitas e do mesmo tipo topológico que φ . Portanto φ é estruturalmente estável.

Suponhamos que todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Neste caso $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo e é a união finita de pontos fixos, órbitas reta, órbitas círculo e órbitas cilíndricas. Mais precisamente, $\text{Sing}(\varphi) = (\cup_{j=1}^k \overline{R_j(\varphi)}) \cup (\cup_{j=1}^\ell \overline{C_j(\varphi)})$, onde $R_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, k$, é uma φ -órbita reta e $C_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, \ell$, é uma φ -órbita cilíndrica (eventualmente poderíamos ter que $k = 0$). Sejam $G_j \cong \mathbb{R}^2$ e $H_i \cong \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ os subgrupos de isotropia de $R_j(\varphi)$ e $C_i(\varphi)$, $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, \ell$, respectivamente. Se $v_j \in G_j - \{0\}$, $u_i \in H_i - \{0\}$, então pelos Teoremas 3.4 e 3.13 os campos X_{v_j} e X_{u_i} são normalmente hiperbólicos em $\overline{R_j(\varphi)}$ e $\overline{C_i(\varphi)}$, respectivamente, para $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, \ell$. Logo, dada U vizinhança de $\text{Sing}(\varphi)$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_\varphi$ de φ tal que $\text{Sing}(\tilde{\varphi}) \subset U$ é difeomorfo a $\text{Sing}(\varphi)$, para cada $\tilde{\varphi} \in \mathcal{V}_\varphi$. Reduzindo $\mathcal{V}_\varphi$ se necessário, temos que $\text{Sing}(\varphi)$ e $\text{Sing}(\tilde{\varphi})$ contém o mesmo número de órbitas e do mesmo tipo topológico. Conseqüentemente, φ e $\tilde{\varphi}$ tem o mesmo número de órbitas e do mesmo tipo topológico. Portanto são topologicamente equivalentes.

Finalmente, suponhamos que todas as φ -órbitas de dimensão três são homeomorfas a $\mathbb{R}^3$. Neste caso $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo e é a união finita de pontos fixos, órbitas reta e órbitas plano. Mais precisamente, $\text{Sing}(\varphi) = \cup_{j=1}^k \overline{P_j(\varphi)}$, onde $P_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, k$, é uma φ -órbita plano. Sejam $G_j \cong \mathbb{R}$ o subgrupo de isotropia de $P_j(\varphi)$, $j = 1, \dots, k$ e $v_j \in G_j - \{0\}$. Então pelo Teorema 3.4, o campo X_{v_j} é normalmente hiperbólicos em $\overline{P_j(\varphi)}$, para $j = 1, \dots, k$. O resultado segue de maneira análoga que nos casos anteriores. $\square$

Do Teorema 5.35, do Lema 5.41 e do Teorema 5.42 segue o seguinte teorema:

Teorema D' *Se $\varphi \in \text{Act}^r(\mathbb{R}^3, M^3)$, $r \geq 1$, tem cada ponto fixo hiperbólico e cada órbita singular compacta normalmente hiperbólica, então φ é estruturalmente estável. Além disso se c é o número de φ -órbitas círculo e t é o número de φ -órbitas difeomorfas a T^2 , uma das seguintes possibilidades é satisfeita:*

- (1) *se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $c = 0$, então $M^3 = T^3$ e φ possui exatamente $2t$ órbitas sendo t o número de órbitas $T^2 \times \mathbb{R}$;*

- (2) se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $c \neq 0$, então M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um, $c = 2$ e φ possui exatamente $2t + 3$ órbitas dentre elas $t + 1$ órbitas são homeomorfas a $T^2 \times \mathbb{R}$;
- (3) se $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$ e $t = 0$, então M^3 é um fibrado principal sobre uma superfície com fibra S^1 , as φ -órbitas de dimensão três são $S^1 \times \mathbb{R}^2$, e $\text{Sing}(\varphi)$, que é a união finita de φ -órbitas círculo e cilindro, é conexo;
- (4) se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, e $t = 0$, então $M^3 = S^1 \times S^2$, as φ -órbitas de dimensão três são $S^1 \times \mathbb{R}^2$ e $\text{Sing}(\varphi)$ é conexo e $\#\text{Fix}(\varphi)$ é um número par igual ao número de φ -órbitas reta;
- (5) se $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$, e $t = 0 = c$, as φ -órbitas de dimensão três são $\mathbb{R}^3$ e $\text{Sing}(\varphi)$ conexo

Seja $\mathcal{O}_p$ uma órbita círculo centro de $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ passando por $p \in M^3$. Podemos escolher $X_i \in \mathfrak{X}^\omega(M^3)$, $i = 1, 2, 3$ geradores infinitesimais de φ tais que $\mathcal{O}_p$ é uma órbita círculo centro da ação $\varphi' \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$ gerada pelos campos X_1 e X_2 . Como $\mathcal{O}_p$ é uma φ' -órbita singular isolada e $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$, segue que existem funções $f_1, f_2 : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas reais tais que $X_3 = f_1 X_1 + f_2 X_2$. Além disso, f_i é integral primeira de X_j para $i, j \in \{1, 2\}$.

Seja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, M^3)$ a família de ações $\varphi \in \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$ que possuem uma órbita círculo centro ou sela. Claramente $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, M^3)$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$. Como consequência do Teorema C' obtemos os seguintes resultados.

Proposição 5.44 *Sejam X_i , $i = 1, 2$, geradores infinitesimais de $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2, M^3)$ e $Y \in \mathfrak{X}^\omega(M^3)$. Se M^3 não admite decomposição de Heegaard de gênero um, então: $[X_i, Y] = 0$, $i = 1, 2$ se, e somente se, existem integrais primeiras $f_j \in C^\omega(M^3, \mathbb{R})$, $j = 1, 2$, de X_i , $i = 1, 2$, tal que $Y = f_1 X_1 + f_2 X_2$.*

Teorema 5.45 *Suponhamos que $\varphi \in \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$ possui uma órbita $\mathcal{O}(\varphi)$ homeomorfa a T^2 . Se φ mergulha em $\text{Act}_3^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$, então existe uma vizinhança V de $\mathcal{O}(\varphi)$ saturada por órbitas homeomorfas a T^2 . Além disso, $M^3 = T^3$ ou M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um.*

Seja $\mathcal{D}_1$ a família de todas as ações $\varphi \in \text{Act}_2^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ que possuem no mínimo uma órbita círculo centro. Então para cada $\varphi \in \mathcal{D}_1$, existem $X_i \in \mathfrak{X}^\omega(M^3)$ e $f_i \in C^\omega(M^3, \mathbb{R})$, $i = 1, 2$, como acima.

Seja $\mathcal{D}'_1$ a família das ações $\varphi \in \mathcal{D}_1$, tais que $\text{Fix}(\varphi) = \emptyset$, todas as φ' -órbitas círculo são centro ou sela e f_i não é constante, para algum $i = 1, 2$. Temos o seguinte resultado.

Teorema E' *Se M^3 não admite decomposição de Heegaard de gênero um, então cada ação $\varphi \in \mathcal{D}'_1$ é estruturalmente estável. Conseqüentemente, $\mathcal{D}'_1$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{O}_p$ uma órbita círculo centro de $\varphi \in \mathcal{D}'_1$, com $p \in M^3$. Existem X_1, X_2 e $X_3 = f_1 X_1 + f_2 X_2$ geradores infinitesimais de φ , e $\varphi' \in \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$ onde f_i e X_i , $i = 1, 2$ são como acima. Como $\mathcal{O}_p$ é uma órbita círculo centro de φ' , pelo Teorema 5.7, existem vizinhanças U de $\mathcal{O}_p$ e $\mathcal{U}_i$ de X_i , $i = 1, 2$, tais que cada ação $\psi \in \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^2, M^3)$ com geradores infinitesimais $\tilde{X}_i \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$, possui uma única ψ -órbita círculo $\mathcal{O}(\psi)$ em U . Além disso, pelo Lema 5.8, podemos supor que $\text{Sing}(\psi) \cap U = \mathcal{O}(\psi)$.

Demonstraremos que $\mathcal{D}_1$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$. Suponhamos o contrário, isto é, que existem ações $\tilde{\varphi} \in \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ arbitrariamente próximas de φ . Então se $\tilde{\varphi}$ tem por geradores infinitesimais $\tilde{X}_i \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$, onde $\mathcal{U}_3$ é uma vizinhança de X_3 . Segue pela comutatividade dos campos $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ e $\tilde{X}_3$ que $\mathcal{O}(\tilde{\varphi})$ é invariante pelo fluxo de $\tilde{X}_3$. Conseqüentemente, $\mathcal{O}(\tilde{\varphi})$ é uma $\tilde{\varphi}$ -órbita círculo que denotaremos simplesmente por $\tilde{\mathcal{O}}$. Como $\mathcal{O}_p$ é uma φ -órbita centro, temos que todas as $\tilde{\varphi}$ -órbitas numa vizinhança $\tilde{U} \subset U$ de $\tilde{\mathcal{O}}$ envolvem a $\tilde{\mathcal{O}}$. Logo, diminuindo $\tilde{U}$ se necessário, temos que $\text{Sing}(\tilde{\varphi}) \cap \tilde{U} = \tilde{\mathcal{O}}$. Isto implica que, se $q \in \tilde{U} \setminus \tilde{\mathcal{O}}$, então $\mathcal{O}_q(\tilde{\varphi})$ não é $\mathbb{R}^3$ nem $S^1 \times \mathbb{R}^2$ pois, neste último caso, teríamos que $M^3 = \mathcal{O}_q(\tilde{\varphi}) \cup \tilde{\mathcal{O}}$, ou seja M^3 admite decomposição de Heegaard de gênero um. Assim, necessariamente temos que $\mathcal{O}_q(\tilde{\varphi})$ é homeomorfa a $T^2 \times \mathbb{R}$, o que contradiz o Teorema C'.

Portanto $\mathcal{D}_1$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ e conseqüentemente, existem funções $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : M^3 \rightarrow \mathbb{R}$ analíticas reais, tais que $\tilde{X}_3 = \tilde{f}_1 \tilde{X}_1 + \tilde{f}_2 \tilde{X}_2$. Além disso, $\tilde{\mathcal{O}}$ é um círculo centro de $\tilde{\varphi}$ pois caso contrário $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ seriam constantes.

Reduzindo $\mathcal{U}_i$ se necessário, pela Proposição 5.9 temos que as ações φ' e ψ são topologicamente equivalentes e portanto as ações φ e $\tilde{\varphi}$ também são topologicamente equivalentes. $\square$

Na demonstração do teorema anterior provamos o seguinte.

Proposição 5.46 *Se M^3 não admite decomposição de Heegaard de gênero um, então $\mathcal{D}_1 \subset \text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$ é aberto em $\text{Act}^\omega(\mathbb{R}^3, M^3)$.*

Exemplo: Consideremos variedades da forma $M^3 = S^1 \times M^2$, onde M^2 é uma superfície de gênero maior ou igual a um. Claramente M^3 não admite diagrama de Heegaard de gênero um. Consideremos $H : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse analítica real, $X_H \in \mathfrak{X}^\omega(M^2)$ seu Hamiltoniano associado e $f \in C^\omega(M^2, \mathbb{R})$ integral primeira de X_H não constante (por exemplo H). Seja $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3, M^3)$ o conjunto de todas as ações de $\mathbb{R}^3$ sobre M^3 cujos geradores infinitesimais são $X_H, g \frac{\partial}{\partial \theta}$ e fX_H , onde $g : S^1 \times M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g(\theta, p) = g(\theta) \neq 0$, para cada $(\theta, p) \in S^1 \times M^2$. Então $\mathcal{H}(\mathbb{R}^3, M^3) \subset \mathcal{D}'_1$.

Referências Bibliográficas

- [1] C. CAMACHO e A. LINS NETO, Teoria Geométrica das folheações. *Projeto Euclides*. IMPA, (1979).
- [2] C. CAMACHO, On $\mathbb{R}^k \times \mathbb{Z}^\ell$ - actions. *Dynamical Systems*. Editor M. M. Peixoto. Academic Press, (1973), pg.23 -70.
- [3] C. CAMACHO, Morse-Smale $\mathbb{R}^2$ - Actions on two Manifolds. *Dynamical Systems*. Editor M. M. Peixoto. Academic Press, (1973), pg. 71 -75.
- [4] C. CAMACHO and A. LINS NETO. Orbit Preserving Diffeomorphisms and Stability of Lie Group Actions and Singular Foliations. *Proc. III Elam, Springer Verlag Lecture Notes*. **597**, (1977), pg 82-103.
- [5] C. CAMACHO, Structural Stability of Foliations with Singularities. *Lectures Notes in Mathematics*. **652**, Springer-Verlag, Rio de Janeiro. (1976), pg 128-137.
- [6] F. DUMORTIER and R. ROUSSARIE, Smooth Linearization of Germs of $\mathbb{R}^2$ -Actions and Holomorphic Vector Fields. *Ann. Inst. Fourier*, **30**, 1 (1980), pg. 31-64.
- [7] P. SAD, Centralizers of Vector Fields, *Topology*, **18**, (1979), pg. 97-104
- [8] J. HEMPEL, 3-Manifolds. *Annals of Mathematics Studies*. **86**. Princeton University Press. (1976).
- [9] N. KOPELL, Commuting Diffeomorphisms, *Proc. Am. Math. Soc. Symp.* . **14**. (1968), pg. 165-184.
- [10] E. L. LIMA. Commuting vector fields on S^3 . *Ann. of Math.*, **81**, (1965), pg. 70-81.
- [11] R. NARASIMHAN, Analysis on Real and Complex Manifolds. *Advanced Studies in Pure Mathematics*. NORTH-HOLLAND PUBL. , (1968).

- [12] K. KATO and A. MORIMOTO, Topological Stability of Anosov Flows and Their Centralizer. *Topology*, **12**, (1973), pg. 255–273.
- [13] NICOLAAS H. KUIPER, La Topologie des singularités Hiperboliques des actions de $\mathbb{R}^2$. *Astérisque*, **59-60**, (1978), pg. 131–150.
- [14] H. ROSENBERG, Actions of $\mathbb{R}^n$ on Manifolds. *Comment. Math. Hel.*, **41**, (1966/1967), pg. 170–178.
- [15] M. HIRSCH, Stability of stationary points of group actions. *Annals of Mathematics*, **109**, (1979), pg. 537–544.
- [16] M. HIRSCH, C. PUGH and M. SHUB, Invariant Manifolds. *Lectures Notes in Mathematics*, **583**, Springer-Verlag, (1977).
- [17] C. PUGH and M. SHUB, Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows. *Inventiones Math.*, **10**, (1970), pg. 187–198.
- [18] C. PUGH and M. SHUB, Axiom A Actions. *Inventiones Math.*, **29**, (1975), pg. 7–38.
- [19] R. PALAIS, Equivalence of nearby differentiable actions of compact group. *Bull. AMS*, **67**, (1961), pg. 362–364.
- [20] J. PALIS, F. TAKENS, Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems. *Topology*, **16**, (1977), pg. 335–345.
- [21] N. SALDANHA, C^1 Stability of Compact Actions of $\mathbb{R}^n$ of codimension one. *Comment. Math. Hel.*, **69**, (1994), pg. 431–446.
- [22] N. STEENROD, The Topology of Fibre Bundles. *Princeton University Press*, (1977).