SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 24.07.2002

Assinatura: *[assinatura]*

Raízes de funções de um Complexo em uma Variedade¹

Claudemir Aniz

Orientador: Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP – São Carlos
Julho de 2002**

¹ O autor recebeu apoio financeiro da FAPESP

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Daciberg Lima Gonçalves

Profa. Dra. Lucilia Daruiz Borsari

Lucilia Daruiz Borsari

Prof. Dr. Carlos Biasi

Carlos Biasi

Prof. Dr. Alcibiades Rigas

Alcibiades Rigas

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Pedro Luiz Queiroz Pergher

Agradecimentos

Ao meu orientador Daciberg Lima Gonçalves, por ter me apoiado de forma integral no desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e amigos, Oziride Manzoli Neto e Lucília Daruiz Borsari, que foram meus orientadores de mestrado.

Não poderia deixar de agradecer aos meus colegas, que passarei a descrever não em ordem de importância, mas em ordem alfabética: Anderson Manzoli, Daniel Vendruscolo, Daniel Viais, José Carlos de Souza, Liane Bordignon, Raul Ferraz e Vera Carbone. Amigos que contribuíram para minha formação pessoal.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é progredir na teoria de raízes para aplicações $f : K \rightarrow M$ entre complexos K e variedades fechadas M , ambas de mesma dimensão $r \geq 3$. Duas direções são abordadas. Na primeira, o conceito de classes mínimas é definido, e buscamos condições sobre os espaços K e M para que exista uma aplicação na classe de homotopia de f , onde todas as classes são mínimas. Na segunda, supondo que $H^r(K; \mathbb{Z}) = 0$, gostaríamos de saber se é possível existir $f : K \rightarrow M$ tal que $MR[f, a] \neq 0$, onde $a \in M$ é um ponto arbitrário.

Abstract

The goal of this work is to progress in the roots theory to maps $f : K \rightarrow M$ between complexes K and closed manifolds M , both with the same dimension $r \geq 3$. Two directions are treated. In the first direction, the concept of minimal classes is defined, and we seek conditions under the spaces K and M so that there exists a map in the homotopy class of f , where all the classes are minimal. In the second direction, we are supposing that $H^r(K; \mathbb{Z}) = 0$, we will like to know if it is possible to exist $f : K \rightarrow M$ such that $MR[f, a] \neq 0$, where $a \in M$ is an arbitrary point.

Sumário

Resumo	i
Abstract	ii
Introdução	1
1 Pré-requisitos	3
1.1 Álgebra	3
1.2 Cohomologia com Coeficientes Locais	12
1.3 Obstrução para Deformação	23
2 Teoria de Raízes	27
2.1 Teoria de Nielsen	27
2.2 Classes Mínimas	30
3 Existência de Raízes	41
3.1 Complexos com Cohomologia Top Zero	41
3.2 Variedades com π_1 Abelianas	48

3.3 Quatérnios Generalizados	62
Referências Bibliográficas	73

Introdução

Dada uma aplicação $f : K \rightarrow M$ entre espaços topológicos, e $a \in M$ um ponto arbitrário, define-se $MR[f, a] = \min\{\#(g^{-1}(a)) | g \in [f]\}$, onde $[]$ significa classe de homotopia. A teoria de raízes tem por objetivo o cálculo deste número. A teoria de Nielsen nos fornece um número, chamado número de Nielsen e denotado por $N(f, a)$ que é um limitante inferior para $MR[f, a]$ (ver [TK], capítulo 5), e quando K e M são variedades trianguláveis de dimensão ≥ 3 , tem-se $N(f, a) = MR[f, a]$ (ver [BR3], proposição 4). Neste trabalho o contexto será K um CW -complexo e M uma variedade fechada, ambas de mesma dimensão $r \geq 3$.

O capítulo 1, contém as ferramentas necessárias para o entendimento dos próximos capítulos. A seção 1.1 fala de resultados sobre a solvabilidade de sistemas de equações lineares $Ax = k$, sobre um anel comutativo R , para o assunto que iremos abordar, R será o anel de grupo $\mathbb{Z}[G]$, onde $G = \pi_1(M)$. Na seção 1.2 definimos Cohomologia com Coeficientes Locais, e damos um exemplo onde K é um CW -complexo de dimensão 3, com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, porém a cohomologia com coeficientes locais $H^3(K; G)$ não é nula. Na seção 1.3 a classe de obstrução $\omega^n(f) \in H^n(K; f^*\Pi_n(M, M-a))$ para deformar f em $M-a$ é definida, e seu anulamento é condição necessária e suficiente para que existe $g \in [f]$ com $g(K) \subset M-a$.

No capítulo 2, trabalharemos na seguinte questão. Denote por $\Gamma(f, a)$ o conjunto de todas as classes de Nielsen para raízes, e por $\mathfrak{F}_f$ o conjunto de todas as

homotopias $\{f_i\}$ começando em $f : K \rightarrow M$. Para cada $F \in \Gamma(f, a)$ defina

$$\mu(F) = \min_{\{f_i\} \in \mathfrak{F}_f} \{ \#(F_1) \mid F_1 \in \Gamma(f_1, a) \text{ e } F\{f_i\}F_1 \}.$$

Queremos saber quais propriedades devem ter os espaços K e M para que exista $\{f_i\} \in \mathfrak{F}_f$, onde $f_1 : K \rightarrow M$ tem todas suas classes mínimas, isto é; se $F_1 \in \Gamma(f_1, a)$ é tal que $F\{f_i\}F_1$, então F_1 tem $\mu(F)$ pontos. Na seção 2.1, expõe-se a teoria necessária para a definição do novo conceito, e a seção 2.2 contém os resultados obtidos, sendo os teoremas 2.13 e 2.15, os principais.

No capítulo 3, vamos abordar a seguinte questão. Seja K um CW -complexo de dimensão 3, com m células de dimensão 3 e n células de dimensão 2 ($m \leq n$). Se $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$ é possível existir $f : K \rightarrow M$ tal que $MR[f, a] \neq 0$? Na seção 3.1 damos exemplos de complexos com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, e alguns resultados que dizem quando não é possível construir tais complexos. Na seção 3.2 o problema é resolvida para uma grande classe de variedades com π_1 abeliano, os principais resultados são os teoremas 3.15, 3.16, 3.17, 3.20, 3.23, 3.25. Na seção 3.3, trabalhamos na variedade M_{Q_8} obtida de S^3 pela ação do grupo dos quatérnios, observo que este caso difere dos anteriores, pois $\pi_1(M_{Q_8})$ não é comutativo, mesmo assim obtemos: Se $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, então $MR[f, a] = 0$ para toda aplicação $f : K \rightarrow M_{Q_8}$ (teorema 3.32).

Muito do material desenvolvido aqui se generaliza de maneira óbvia para alguns complexos de dimensão $r > 3$. Por razões de clareza e o fato que novas idéias não são introduzidas no caso $r > 3$, nos fixamos com $r = 3$.

Adotaremos a filosofia de enunciar e demonstrar em detalhes todos os resultados novos que foram obtidos. Alguns resultados que não aparecem na literatura de forma explícita ou conveniente para que possamos usar, também serão enunciados e demonstrados.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Álgebra

Seja R anel comutativo com unidade, e $M_{m \times n}(R)$ o conjunto das matrizes $m \times n$ sobre R . Para $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(R)$, defina $\det : M_{n \times n}(R) \rightarrow R$ por

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

onde σ percorre todas as permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. O símbolo $\operatorname{sgn}(\sigma)$ é $+$ se σ for par, e $-$ se σ for ímpar. A aplicação $\det$ é chamado **determinante**. Valem as propriedades:

1. $\det(A^t) = \det(A)$
2. Se B é uma matriz obtida de A pela multiplicação de todos os elementos em uma dada linha (coluna) por um elemento fixado $\lambda \in R$, então

$$\det(B) = \lambda \det(A).$$

3. Se B é obtido de A por adicionar um múltiplo de uma linha (coluna) de A

para outra linha (coluna) de A , então

$$\det(A) = \det(B).$$

4. Se A é uma matriz cuja i -linha (coluna) é a soma da i -linha (coluna) de uma matriz B e a i -linha (coluna) de uma matriz C e, mais, B e C diferem de A somente pela i -linha (coluna), então

$$\det(A) = \det(B) + \det(C).$$

5. Se A é obtido de B por uma permutação de duas linhas (colunas), então

$$\det(A) = -\det(B).$$

6. Para $A, B \in M_{n \times n}(R)$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

7. Seja $\phi : R \rightarrow \tilde{R}$ um homomorfismo de anéis comutativos. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$ sobre R , tem-se $\det(\phi(A)) = \phi(\det(A))$, onde $\phi(A) = [\phi(a_{ij})]$.

Observação 1.1. Pela propriedade 7, duas matrizes $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ tal que $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{2}$, tem determinantes com mesma paridade. Basta tomar $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ sendo a projeção.

O conjunto $M_{m \times m}(R)$ com soma e produto usual de matrizes, torna-se um anel com unidade, não comutativo. Podemos olhar uma $k \times k$ matriz $A = [A_{ij}]$ sobre $M_{n \times n}(R)$ como uma **matriz bloco**, isto é; uma matriz que tem sido particionada em k^2 submatrizes sobre R , cada uma de tamanho $n \times n$. O próximo resultado é demonstrado em [KSW].

Teorema 1.2. Se os blocos A_{ij} são comutativos dois a dois, então

$$\det A = \det \left[\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{k\sigma(k)} \right].$$

Para $A = [a_{ij}]$ uma $n \times n$ matriz sobre R , A_{ij} denota a matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida de A por deletar a i -linha e a j -coluna. Coloque $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, $B = [b_{ij}]$, e $\text{adj}(A) = B^t$. A matriz $\text{adj}(A)$ é chamada **adjunta** de A . Valem as propriedades:

1. $A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I$ (I é a matriz identidade)
2. Em particular, se A é inversível, então $\det(A)$ é uma unidade e

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \text{adj}(A)$$

3. Expansão de Laplace para linhas

$$\sum_k (-1)^{k+j} a_{ik} \det(A_{jk}) = \delta_{ij} \det(A)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker (existe uma expansão análoga para colunas).

Seja $A = [a_{ij}]$ uma $m \times n$ matriz sobre R com $m \leq n$, $x = [x_1, \dots, x_n]^t$ e $k = [k_1, \dots, k_m]^t$. Vamos considerar o problema de achar solução sobre R do sistema de equações lineares:

$$Ax = k$$

A seguir veremos alguns resultados sobre a solvabilidade de $Ax = k$.

Lema 1.3. Se $\bar{A}$ é uma submatriz $m \times m$ qualquer de A , isto é; $\bar{A}$ é obtida de A deletando-se $n - m$ colunas, então o sistema $Ax = \det(\bar{A})k$ tem solução.

Demonstração: Este resultado é obtido aplicando-se a propriedade 1 da matriz adjunta. Seja

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix},$$

onde $\{j_1 < \dots < j_m\}$ é um subconjunto arbitrário de $\{1, \dots, n\}$. Tem-se

$$\det(\bar{A}) \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix} = \bar{A}(\text{adj}(\bar{A})) \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix},$$

para obter uma solução de $Ax = \det(\bar{A})k$ basta colocar $x_j = 0$, para $j \in \{1, \dots, n\} - \{j_1 < \dots < j_m\}$. ■

Quando A é matriz quadrada de tamanho n , usando também a propriedade 1 da matriz adjunta mostra-se:

$$\det(A)x_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & k_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & k_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

para $1 \leq i \leq n$. Em particular, se $\det A$ é uma unidade, então o sistema $Ax = k$ tem solução, e é única. A técnica acima é chamada **Regra de Cramer**.

Seja $F_t(A)$ o ideal de R gerado por todos os determinantes das submatrizes (subdeterminantes) de tamanho $t \times t$ da matriz A .

Definição 1.4. *O McCoy rank de A é o maior inteiro t tal que $\text{Annih}_R(F_t(A)) = 0$, onde $\text{Annih}_R(F_t(A)) = \{r \in R \mid rF_t(A) = 0\}$.*

A matriz aumentada $[A, k]$ é a matriz obtida de A ao adicionar a coluna k . Seja F_m^* o ideal gerado pelos determinantes das submatrizes de tamanho $m \times m$ de $[A, k]$ que não são submatrizes de A . O teorema a seguir é demonstrado em ([MB], teorema I.27).

Teorema 1.5. *Seja A uma matriz $m \times n$ com $m \leq n$ e McCoy rank m . Se para algum ideal Q e um não divisor de zero α tem-se*

$$QF_m(A) \supseteq (\alpha) \supseteq QF_m^*,$$

então $Ax = k$ tem solução em R .

O conteúdo a seguir, incluindo a proposição 1.6 pode ser achado em ([AM], capítulo 3). Um **subconjunto fechado multiplicativamente** de R é um subconjunto S de R tal que $1 \in S$ e S é fechado sob multiplicação. O conjunto $S = R - \mathfrak{p}$ onde $\mathfrak{p}$ é um ideal primo, é multiplicativo. Defina a relação $\equiv$ sobre $R \times S$ como segue:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow (at - bs)u = 0 \text{ para algum } u \in S.$$

Esta relação é de equivalência, a/s denotará as classes de equivalência (a, s) , e $S^{-1}R$ denota o conjunto de todas as classes de equivalência. Colocaremos uma estrutura de anel sobre $S^{-1}R$ por definir:

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st, \text{ e } (a/s)(b/t) = ab/st.$$

Este anel chama-se **Anel de Frações** de R com respeito a S . Quando $S = R - \mathfrak{p}$ o anel $S^{-1}R$ é denotado por $R_{\mathfrak{p}}$.

Proposição 1.6. *Seja $g : R \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis com $g(1) = 1$, $g(s)$ uma unidade em B para todo $s \in S$, e $p : R \rightarrow S^{-1}R$ dado por $p(x) = x/1$. Então existe um único homomorfismo de anéis $h : S^{-1}R \rightarrow B$ tal que $g = h \circ p$.*

Demonstração: Defina $h(r/s) = g(r)g(s)^{-1}$. ■

Para qualquer ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$, a matriz $A_{\mathfrak{p}} \in M_{n \times n}(R_{\mathfrak{p}})$ é dada por $A_{\mathfrak{p}} = [a_{ij}/1]$ e $k_{\mathfrak{p}} = [k_1/1, \dots, k_m/1]^t$. O teorema abaixo é demonstrado em ([HG], proposição 1).

Teorema 1.7. *São equivalentes:*

1. O sistema $Ax = k$ tem solução sobre R .
2. Para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ em R , o sistema $A_{\mathfrak{m}}x = k_{\mathfrak{m}}$ tem solução em $R_{\mathfrak{m}}$.

Em outras palavras o teorema acima diz que, o sistema $Ax = k$ tem solução se, e somente se, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R pode-se encontrar $r \in R$ com $r \notin \mathfrak{m}$ tal que o sistema $Ax = kr$ tenha solução. O próximo teorema é demonstrado em ([CW], teorema 2).

Teorema 1.8. *O sistema $Ax=k$ tem solução em R para todo $k \in R$ se, e somente se, $F_m(A) = R$.*

Seja G um grupo e $H \subset G$ um subgrupo, o símbolo $[G : H]$ será usado para denotar o índice de H em G . O próximo resultado é demonstrado em ([BR2] capítulo 3, proposição 15).

Teorema 1.9. *Seja $\eta : \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} \rightarrow \oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}$ um homomorfismo de grupos abelianos livres. Considere a matriz de η nas bases canônicas de $\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}$ e $\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Se $n < m$, ou todo determinante $d_1, \dots, d_r$ das submatrizes $m \times m$ de A é zero, então $[\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z} : \text{Im}(\eta)]$ é infinito. Caso contrário, tem-se $[\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z} : \text{Im}(\eta)] = d$, onde $d = \text{mdc}(d_1, \dots, d_r)$.

Definição 1.10. *Diremos que os números inteiros $d_1, \dots, d_r$ são primos entre si, quando $d = \text{mdc}(d_1, \dots, d_r)$ for 1.*

O anel que definiremos a seguir é de importância fundamental neste trabalho.

Definição 1.11. *O anel de grupo de um grupo G sobre R é o anel denotado por $R[G]$ cujos elementos são todas as somas formais*

$$\lambda = \sum_{g \in G} \lambda(g)g, \lambda(g) \in R,$$

tal que, o suporte de λ ,

$$\text{supp}(\lambda) = \{g : \lambda(g) \neq 0\},$$

é finito, e sua estrutura é definido pelas regras operacionais:

1. $\sum_{g \in G} \lambda(g)g = \sum_{g \in G} \mu(g)g$ se, e somente se, $\lambda(g) = \mu(g)$ para todo $g \in G$;
2. $\sum_{g \in G} \lambda(g)g + \sum_{g \in G} \mu(g)g = \sum_{g \in G} (\lambda(g) + \mu(g))g$,
3. $\left(\sum_{g \in G} \lambda(g)g\right) \left(\sum_{g \in G} \mu(g)g\right) = \sum_{g \in G} \nu(g)g$, onde

$$\nu(g) = \sum_{h \in G} \lambda(h) \mu(h^{-1}g) = \sum_{xy=g} \lambda(x) \mu(y).$$

Esquecendo as componentes nulas da soma formal λ , podemos escrever $\lambda = \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$.

O elemento $1.e_G$ é a identidade de $R[G]$ e será denotado por 1. A aplicação $\varepsilon : R[G] \rightarrow R$ dada por

$$\sum_{g \in G} \lambda(g)g \rightarrow \sum_{g \in G} \lambda(g)$$

é um homomorfismo de anéis chamado de aplicação aumento de $R[G]$. Seu núcleo $\Delta_R(G)$ é o ideal aumento de $R[G]$. O anel $R[G]$ é comutativo se o grupo G for.

Note que, todo homomorfismo de grupos $\xi : G \rightarrow H$, se estende a um homomorfismo de anéis $\xi_R : R[G] \rightarrow R[H]$ pondo

$$\xi_R\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i g_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \xi(g_i).$$

Se ξ for isomorfismo, então ξ_R também é.

A seguir apresentaremos algumas propriedades de $\mathbb{Z}[G]$ para alguns grupos G que aparecerão no capítulo 3.

Seja $R[x_1, \dots, x_p]$ o anel de polinômios em p -variáveis. Para cada p -upla $a = (a_1, \dots, a_p) \in R^p$ a aplicação $v_a : R[x_1, \dots, x_p] \rightarrow R$ dado por $v_a(q) = q(a_1, \dots, a_p)$ é um homomorfismo de anéis, e $\text{Ker}(v_a)$ o ideal gerado por $x_i - a_i$ para $i = 1, \dots, p$.

Se $G = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}$, então $\mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p, x_1^{-1}, \dots, x_p^{-1}]$ é o anel dos polinômios de Laurent em p -variáveis. Note que

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p, x_1^{-1}, \dots, x_p^{-1}] = S^{-1}\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p],$$

onde $S = \{x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}; i_j \text{ inteiros não negativos}\}$. O homomorfismo

$$v_a : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p] \rightarrow \mathbb{Z}$$

tem a propriedade que $v_a(s) = 1$ ou -1 , para todo $s \in S$, quando $a_i = 1$ ou -1 para $i = 1, \dots, p$. Pela proposição 1.6, v_a se estende a um homomorfismo de anéis

$$\bar{e} : S^{-1}\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p] \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Observe que quando $a_i = 1$, $\bar{e}$ é exatamente o homomorfismo aumento.

O ideal $\Delta_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z})$ é gerado por $x_i - 1$ para $i = 1, \dots, p$. De fato, seja $\alpha \in \Delta_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z})$, então o produto $\beta = x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \alpha$, onde i_j são inteiros positivos suficientemente grandes pertence a $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p]$, e $\varepsilon(\beta) = 0$, daí existem $q_1, \dots, q_p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p]$ tal que

$$\beta = q_1(x_1 - 1) + \dots + q_p(x_p - 1).$$

Agora $\alpha = x_1^{-i_1} \dots x_p^{-i_p} \beta$. Analogamente o núcleo do homomorfismo

$$\bar{e} : \mathbb{Z}[x, x^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$$

dado por

$$\bar{e}(x^j) = \begin{cases} -1 & \text{se } j \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } j \text{ é par} \end{cases}$$

é o ideal gerado pelo elemento $x + 1$.

Lema 1.12. *Seja A uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$, onde todos os subdeterminantes de ordem $m \times m$ da matriz $\varepsilon(A) = [\varepsilon(a_{ij})]$ são primos entre si. Então, o sistema $Ax = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$ se, e somente se, os sistemas $Ax = k(x_i - 1)$ tem solução em $\mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$ para $i = 1, \dots, p$.*

Demonstração: Seja $\{d_1, \dots, d_r\}$ o conjunto de todos os subdeterminantes de ordem $m \times m$ de A , por hipótese, $\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)$ são primos entre si, daí existem inteiros $p_1, \dots, p_r$ tal que o elemento $p_1 d_1 + \dots + p_r d_r$ de $\mathbb{Z}[\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$ tem aumento 1; logo, existem $q_1, \dots, q_p \in \mathbb{Z}[\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$ com

$$p_1 d_1 + \dots + p_r d_r = q_1(x_1 - 1) + \dots + q_p(x_p - 1) + 1.$$

Mas isto significa que o conjunto $\{d_1, \dots, d_r, x_1 - 1, \dots, x_p - 1\}$ não está contido em nenhum ideal maximal $\mathfrak{m}$. Como os sistemas $Ax = kd_i$ tem solução em $\mathbb{Z}[\oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}]$ para $i = 1, \dots, r$, se os sistemas $Ax = k(x_i - 1)$ tiver solução para $i = 1, \dots, p$, o sistema $Ax = k$ tem solução, pelo teorema 1.7. ■

Se $G = \mathbb{Z}_p$ ($p \geq 2$) o grupo cíclico, então $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p] = \mathbb{Z}[x]/(x^p - 1)$. Neste caso também $\Delta_{\mathbb{Z}}[\mathbb{Z}_p]$ é gerado por $x - 1$. Note que a projeção $P_1 : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$, tem a propriedade que $\varepsilon \circ P_1 = v_1$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$ é tal que $\varepsilon(\alpha) = 0$, então $\alpha = P_1(\tilde{\alpha})$ com $v_1(\tilde{\alpha}) = 0$, ou seja, $\tilde{\alpha} = q(x - 1)$ para $q \in \mathbb{Z}[x]$. Segue que $\alpha = P_1(\tilde{\alpha}) = P_1(q)(x - 1)$.

Quando $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, o anel $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}]$ é o quociente $S^{-1}\mathbb{Z}[x, y]/(x^2 - 1)$, onde $S = \{y^j | j \text{ inteiros não negativos}\}$. Quando $a = (-1, 1)$ o homomorfismo $\bar{\varepsilon} : S^{-1}\mathbb{Z}[x, y] \rightarrow \mathbb{Z}$, extensão de v_a é dado por

$$\bar{\varepsilon}(x^{i_1} y^{i_2}) = \begin{cases} -1 & \text{se } i_1 \text{ é ímpar} \\ 1 & \text{se } i_1 \text{ é par} \end{cases}$$

como antes o núcleo de $\bar{\varepsilon}$ é gerado por $x + 1$ e $y - 1$. Seja

$$P_2 : S^{-1}\mathbb{Z}[x, y] \rightarrow \frac{S^{-1}\mathbb{Z}[x, y]}{(x^2 - 1)}$$

a projeção. O homomorfismo $\tilde{\varepsilon} : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}] \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\alpha}) = \bar{\varepsilon}(\alpha)$ onde $\tilde{\alpha} = P_2(\alpha)$, está bem definido, dado que $\bar{\varepsilon}(x^2 - 1) = 0$, e seu núcleo é gerado $x + 1$, $y - 1$.

Seja G um grupo finito de ordem n , não necessariamente comutativo. O elemento $g = g_1 + g_2 + \dots + g_n$ (soma de todos os elementos de G) tem a seguin-

te propriedade, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{Z}[G]$ tem-se $\alpha g = \varepsilon(\alpha)g$. Denote por $P : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]/(g)$ a projeção.

Lema 1.13. *Seja A uma matriz sobre $\mathbb{Z}[G]$ de tamanho $m \times n$ com $m \leq n$, e suponha que o conjunto dos determinantes $\{\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)\}$ das submatrizes $m \times m$ de $\varepsilon(A) = [\varepsilon(a_{ij})]$ tenha algum elemento não nulo. Se o sistema $\bar{A}x = \bar{k}$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[G]/(g)$, onde $\bar{A} = [P(a_{ij})]$, e $\bar{k} = [P(k_1), \dots, P(k_m)]^t$, então $Ax = dk$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[G]$, para $d = \text{mdc}\{\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)\}$.*

Demonstração: Dizer que $\bar{A}x = \bar{k}$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[G]/(g)$ significa que existe um vetor $s = [s_1, s_2, \dots, s_m]^t$ de entradas inteiras tal que o sistema $Ax = k + gs$ tem solução y_1 em $\mathbb{Z}[G]$. O sistema $\varepsilon(A)x = s\varepsilon(d_i)$ tem solução x_i sobre $\mathbb{Z}$ para $i = 1, \dots, r$. Sejam $q_1, \dots, q_r$ inteiros tais que $q_1\varepsilon(d_1) + \dots + q_r\varepsilon(d_r) = d$, então $y_2 = q_1x_1 + \dots + q_rx_r$ é solução de $\varepsilon(A)x = ds$, e pela propriedade do elemento g descrita acima, y_2g é solução sobre $\mathbb{Z}[G]$ do sistema $Ax = dsg$. Segue que $A(dy_1 - y_2g) = dAy_1 - Ay_2g = dk + dsg - dsg = dk$. ■

1.2 Cohomologia com Coeficientes Locais

A referência básica para esta seção é [WG]. Sendo B um espaço topológico e denotando-se por $\Pi_1(B)$ a categoria cujos objetos são os pontos de B e cujos morfismos $\xi : \overline{b_1} \rightarrow \overline{b_2}$ são dados por elementos dos conjuntos $\pi_1(B; b_2, b_1)$ de classes de homotopia de caminhos em B de b_2 para b_1 .

Definição 1.14. *Um sistema de coeficientes locais em B é um funtor G de $\Pi_1(B)$ para a categoria $\mathcal{A}$ de grupos abelianos.*

Tal funtor atribui para cada $b \in B$, um grupo abeliano $G(b)$ e para cada classe de homotopia $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$, um homomorfismo $G(\xi) : G(b_2) \rightarrow G(b_1)$ satisfazendo:

1. se $\xi \in \pi_1(B; b) = \pi_1(B; b, b)$ é a identidade, então

$$G(\xi) : G(b) \rightarrow G(b)$$

é a identidade;

2. se $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$ e $\eta \in \pi_1(B; b_2, b_3)$, então

$$G(\xi\eta) = G(\xi) \circ G(\eta) : G(b_3) \rightarrow G(b_1).$$

Segue daí que:

3. se $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$, então

$$G(\xi^{-1}) = G(\xi)^{-1} : G(b_1) \rightarrow G(b_2),$$

assim $G(\xi)$ é um isomorfismo.

Exemplo 1.15. Se G é grupo abeliano, G determina um sistema de coeficientes locais **constante** G da seguinte forma:

1. $G(b) = G$
2. $G(\xi) = \text{aplicação identidade}$

Exemplo 1.16. Se $B \subset A$, para $n \geq 3$ os grupos de homotopia relativo $\pi_n(A, B, b)$ com a operação (descrita em [SN], pág. 83) $G(\xi) = \tau_\xi : \pi_n(A, B, b_2) \rightarrow \pi_n(A, B, b_1)$, onde $\xi \in \pi_1(B, b_1, b_2)$, forma um sistema de coeficientes locais $\Pi_n(A, B)$ em B .

Se G e H são sistemas de coeficientes locais em B , um **homomorfismo de sistema de coeficientes locais** $\Phi : G \rightarrow H$ é uma transformação natural de funtores, ou seja, para cada $b \in B$ associa-se um homomorfismo $\Phi(b) : G(b) \rightarrow H(b)$ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
G(b_2) & \xrightarrow{G(\xi)} & G(b_1) \\
\Phi(b_2) \downarrow & & \downarrow \Phi(b_1) \\
H(b_2) & \xrightarrow{H(\xi)} & H(b_1)
\end{array}$$

comutativo para qualquer $\xi \in \pi_1(B; b_1, b_2)$.

Dizemos que Φ é um **isomorfismo** de sistema de coeficientes locais se, e somente se, cada $\Phi(b)$ for um isomorfismo.

Definição 1.17. *Um sistema de coeficientes locais é dito **simples**, se for isomorfo ao sistema local constante.*

Um grupo multiplicativo H é dito **agir como um grupo de operadores** sobre um grupo abeliano aditivo G (ou, simplesmente H age sobre G), se, para todo $h \in H$ e todo $g \in G$, um elemento $hg \in G$ é definido de tal maneira que: $h(g_1 + g_2) = hg_1 + hg_2$, $h_2(h_1g) = (h_2h_1)g$, e $1g = g$. Neste caso, o grupo G torna-se um $\mathbb{Z}[H]$ -módulo à esquerda ao definirmos

$$\left(\sum_{i=1}^p n_i h_i \right) g = \sum_{i=1}^p n_i (h_i g),$$

para $g \in G$ e $\sum_{i=1}^p n_i h_i \in \mathbb{Z}[H]$.

Observamos que se G é sistema de coeficientes locais em B e $b_0 \in B$, então $\pi_1(B, b_0)$ age como um grupo de operadores sobre $G(b_0)$. Além disso se $\pi_1(B, b_0)$ age sobre um grupo G_0 e se B é conexo por caminhos, então existe um sistema de coeficientes locais G em B , único a menos de isomorfismo tal que $G(b_0) = G_0$, e G induz a mesma ação sobre $G(b_0)$. Os lemas abaixo, demonstrados em ([WG], pág 263), deixam mais claras as afirmações.

Lema 1.18. *Seja B conexo por caminhos, G e G' sistemas de coeficientes locais em B , e $\phi : G(b_0) \rightarrow G'(b_0)$ um isomorfismo satisfazendo $\phi \circ G(\xi) = G'(\xi) \circ \phi$ para $\xi \in \pi_1(B, b_0)$. Então existe um único isomorfismo $\Phi : G \rightarrow G'$ tal que $\Phi(b_0) = \phi$.*

Lema 1.19. *Seja B conexo por caminhos, e G_0 um grupo no qual $\pi_1(B, b_0)$ age. Então existe um sistema de coeficientes locais G em B tal que $G(b_0) = G_0$ e que induz a dada ação de $\pi_1(B, b_0)$ sobre $G(b_0)$.*

Portanto quando estamos lidando com espaços conexos por caminhos, um sistema de coeficientes locais, é simplesmente um homomorfismo de grupos

$$\Omega : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(G(b_0)),$$

onde $\text{Aut}(G(b_0))$ é o grupo dos automorfismos de $G(b_0)$, com a operação de composição.

Alguns sistemas de coeficientes locais surgem de forma natural. Por exemplo, a bijeção $\Omega(\theta) : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$, dado por $\Omega(\theta)(\alpha) = \theta\alpha$, para $\theta, \alpha \in \pi_1(B, b_0)$, estende-se a um isomorfismo de grupos abelianos

$$\Omega(\theta)_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\pi_1(B, b_0)] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1(B, b_0)].$$

O homomorfismo $\Omega : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[\pi_1(B, b_0)])$ dada por $\Omega(\theta) = \Omega(\theta)_{\mathbb{Z}}$ é um sistema de coeficientes locais. Raciocínio análogo pode ser feito se

$$\Omega(\theta) : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_1(B, b_0)$$

for $\Omega(\theta)(\alpha) = \theta\alpha\theta^{-1}$.

Sejam A e B são espaços topológicos e $f : A \rightarrow B$ é uma aplicação. Dado um sistema de coeficientes locais G em B , podemos definir o sistema de coeficientes locais f^*G induzido por f em A da seguinte forma: A cada ponto $a \in A$ atribui-se o grupo $f^*G(a) = G(f(a))$, e a cada elemento de $\xi \in \pi_1(A, a_1, a_2)$, o homomorfismo $f^*G(\xi) = G(f \circ \xi)$.

A seguir definiremos de forma resumida o conceito de CW -complexo, e algumas de suas propriedades que serão usadas constantemente neste trabalho.

Definição 1.20. *Um CW-complexo K é um espaço com uma decomposição celular, cujo esqueletos são indutivamente construídos como segue:*

1. K^0 é um espaço discreto, cada ponto sendo uma 0-célula.
2. K^n é obtido colando-se a K^{n-1} uma família disjunta D_i^n de n -discos fechados via funções contínuas $\varphi_i : \partial D_i^n \rightarrow K^{n-1}$, isto é; tome a soma topológica $K^{n-1} + \sum D_i^n$ e passe para o espaço quociente $K^{n-1} \cup_{\varphi_i} \sum D_i^n$, dado pelas identificações $x \sim \varphi_i(x)$, $x \in \partial D_i^n$. A aplicação quociente

$$p : K^{n-1} + \sum D_i^n \rightarrow K^{n-1} \cup_{\varphi_i} \sum D_i^n$$

projeta cada $\text{int}(D_i^n)$ homeomorficamente para uma n -célula e_i^n , e φ_i é chamada **aplicação de colagem** para e_i^n .

3. $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K^n$ é atribuído a topologia fraca com respeito a $\bar{e}_i^n = p(D_i^n)$, isto é; um subconjunto de K é fechado se, e somente se, sua interseção com cada $\bar{e}_i^n$ é fechado.

Quando K tem um número finito de células, dizemos que K é **finito** e sua **dimensão** é a dimensão da maior célula.

Definição 1.21. *Uma aplicação $\chi_{e^n} : D^n \rightarrow K$ é característica para uma n -célula e^n de K se χ_{e^n} aplica o interior de D^n homeomorficamente sobre e^n e $\chi_{e^n}|_{\partial D^n}$ é uma aplicação de colagem.*

Um espaço de recobrimento de um CW-complexo K pode ser decomposto como um CW-complexo $\tilde{K}$ tal que a aplicação projeção $p : \tilde{K} \rightarrow K$ manda cada célula $\tilde{e} \in \tilde{K}$ homeomorficamente para uma célula $e \in K$. Uma aplicação de colagem para $\tilde{e}^n$ é obtida por levantamentos das aplicações de colagem $\varphi : \partial D^n \rightarrow K^{n-1}$ de e^n para $\tilde{K}^{n-1} = p^{-1}(K^{n-1})$.

O complexo de cadeias $C(K) = (C_n(K), \partial_n)$ tem grupos $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$ ($n \geq 0$, e quando K tem dimensão finita r , $C_n = 0$ para todo $n > r$) e operadores bordo $n \geq 0$:

$$H_{n+1}(K^{n+1}, K^n) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K^n, K^{n-1})$$

As aplicações características $\chi_{e^n} : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (K^n, K^{n-1})$ para as n -células e^n de K determinam uma decomposição do n -ésimo grupo $C_n(K)$ como uma soma direta externa:

$$\oplus \chi_{e^n} : \oplus_{e^n} H_n(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_n(K^n, K^{n-1})$$

Isto dá ao grupo abeliano livre $C_n(K)$ uma base $\{\chi_{e^n}(1)\}$ ($1 \in \mathbb{Z} = H_n(D^n, S^{n-1})$ é o gerador) em correspondência bijetiva com o conjunto $\{e^n\}$ das n -células de K . Cada gerador $\chi_{e^n}(1)$ é usualmente abreviado pelo símbolo e^n da correspondente n -célula.

Em termos destes geradores, o operador bordo $\partial_{n+1} : C_{n+1}(K) \rightarrow C_n(K)$ ($n \geq 0$) é dado como uma combinação linear

$$\partial_{n+1}(e^{n+1}) = \sum_{e^n} [e^{n+1}, e^n] e^n,$$

onde o coeficiente inteiro $[e^{n+1}, e^n]$ é chamado **número de incidência** da $(n+1)$ -célula e^{n+1} sobre a n -célula e^n . O número de incidência $[e^{n+1}, e^n]$ é $q_* \circ (\chi_{e^{n+1}}|_{S^n})_*(1)$, onde $1 \in H_n(S^n)$ é o gerador, e

$$H_n(S^n) \xrightarrow{(\chi_{e^{n+1}}|_{S^n})_*} H_n(K^n) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K^n/(K^n - e^n)) = H_n(S^n)$$

Os grupos de homologia do complexo de cadeias $C(K)$ são isomorfos aos grupos de homologia $H_*(K)$.

Vamos agora definir o conceito de cohomologia com coeficientes locais.

Considere K um CW -complexo conexo e semilocalmente simplesmente conexo, logo K tem revestimento universal $p : \tilde{K} \rightarrow K$. Seja $C(\tilde{K})$ o complexo de cadeias

$(C_n(\tilde{K}), \tilde{\partial}_n)$ do recobrimento universal $\tilde{K}$. O grupo $\Pi = \pi_1(K, k_0)$ age à esquerda de $C_n(\tilde{K}) = H_n(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1})$ da seguinte forma. A cada elemento $\theta \in \Pi$, associamos um homeomorfismo $h_\theta : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ tal que $p \circ h_\theta = p$, estes homeomorfismos são aplicações celulares, e portanto induzem isomorfismos $(h_\theta)_* : C_n(\tilde{K}) \rightarrow C_n(\tilde{K})$. A ação de θ em $x \in C_n(\tilde{K})$ é $\theta x = (h_\theta)_*(x)$. Isto dá ao grupo $C_n(\tilde{K})$ uma estrutura de $\mathbb{Z}[\Pi]$ -módulo à esquerda, tornando $C(\tilde{K})$ um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}[\Pi]$ -módulos à esquerda.

As n -células $\tilde{e}_i^n$ de $\tilde{K}$ que estão sobre uma n -célula e_i^n em K são permutados pelo grupo Π de transformações de recobrimento. Portanto selecionando n -células $\tilde{e}_i^n$ em $\tilde{K}$, uma sobre cada n -célula e_i^n de K , produz uma $\mathbb{Z}[\Pi]$ -base $\{\tilde{e}_i^n\}$ para $C_n(\tilde{K})$ como um $\mathbb{Z}[\Pi]$ -módulo livre.

Se G é um sistema de coeficientes locais sobre K , o grupo Π age sobre $G(k_0)$, e consequentemente este também é um $\mathbb{Z}[\Pi]$ -módulo à esquerda.

Seja $\text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); G(k_0))$ o grupo de todos $\mathbb{Z}[\Pi]$ -homomorfismos. Escreva

$$\tilde{\delta}_n : \text{Hom}^\Pi(C_{n-1}(\tilde{K}); G(k_0)) \rightarrow \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); G(k_0))$$

para o homomorfismo definido por $\tilde{\delta}_n(\alpha) = \alpha \circ \tilde{\partial}_n$.

Assim temos um complexo de cocadeias $\{\text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); G(k_0)), \tilde{\delta}_n\}$ e,

$$H^n(K; G) = \frac{\text{Ker} \tilde{\delta}_{n+1}}{\text{Im} \tilde{\delta}_n}$$

é o grupo de cohomologia de K com coeficientes locais G .

Observação 1.22. Quando K for finito de dimensão r , tem-se $C_n(\tilde{K}) = 0$ para $n > r$, então

$$H^r(K; G) = \frac{\text{Hom}^\Pi(C_r(\tilde{K}); G(k_0))}{\text{Im} \tilde{\delta}_r}.$$

Qualquer homomorfismo de sistemas de coeficientes locais $\Phi : G \rightarrow H$ induz um homomorfismo $\Phi_* : H^n(K; G) \rightarrow H^n(K; H)$, pois o homomorfismo

$$\Phi_\# : \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); G(k_0)) \rightarrow \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); H(k_0))$$

dado por $\Phi_{\#}(\phi) = \Phi(k_0) \circ \phi$ é uma aplicação de cocadeias. Se Φ for isomorfismo, então Φ_* também é.

Agora vamos explorar com um pouco mais de detalhes o caso onde $G(k_0) = \mathbb{Z}$. Para obter a cohomologia com coeficientes usuais $H^n(K; \mathbb{Z})$ basta considerar a ação trivial de Π em $\mathbb{Z}$, isto é; $\theta 1 = 1$ para $\theta \in \Pi$.

Definição 1.23. O símbolo $\tilde{\mathbb{Z}}$ representará qualquer sistema de coeficientes locais $\Omega : \Pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$ sobre K com Ω sobrejetor.

Suponha que K é um CW -complexo finito de dimensão $r \geq 1$, que tem, n células de dimensão $r-1$, m células de dimensão r , com $m \leq n$.

Lema 1.24. $H^r(K; \mathbb{Z})$ é finito de cardinalidade ímpar se, e somente se, $H^r(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ é finito de cardinalidade ímpar.

Demonstração: O operador bordo $\tilde{\partial}_r : H_r(\tilde{K}^r, \tilde{K}^{r-1}) \rightarrow H_{r-1}(\tilde{K}^{r-1}, \tilde{K}^{r-2})$ é dado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix},$$

onde as colunas de A são definidas por

$$\tilde{\partial}_r(\tilde{e}_i^r) = \tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^{r-1} + \dots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^{r-1}$$

para $i = 1, \dots, m$. Seja $\phi \in \text{Hom}^{\Pi}(C_{r-1}(\tilde{K}); \mathbb{Z})$ dado por $\phi(\tilde{e}_j^{r-1}) = k_j$ para $j = 1, \dots, n$, o homomorfismo $\tilde{\delta}_r(\phi) \in \text{Hom}^{\Pi}(C_r(\tilde{K}); \mathbb{Z})$ tem a propriedade que $\tilde{\delta}_r(\phi)(\tilde{e}_i^r) = \phi \circ \tilde{\partial}_r(\tilde{e}_i^r) = \phi(\tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^{r-1} + \dots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^{r-1}) = \tilde{a}_{1i}\phi(\tilde{e}_1^{r-1}) + \dots + \tilde{a}_{ni}\phi(\tilde{e}_n^{r-1}) = \tilde{a}_{1i}k_1 + \dots + \tilde{a}_{ni}k_n$. Note que cada $\tilde{a}_{ij} \in \mathbb{Z}[\Pi]$, logo é da forma $\sum_{k=1}^p n_k \alpha_k$, daí a ação $(\sum_{k=1}^p n_k \alpha_k)1 = \bar{\epsilon}(\tilde{a}_{ij}) = \sum_{k=1}^p n_k(\alpha_k 1)$, onde $(\alpha_k 1)$ é 1 ou -1, ou seja;

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \bar{\epsilon}(\tilde{a}_{n1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{\epsilon}(\tilde{a}_{1m}) & \dots & \bar{\epsilon}(\tilde{a}_{nm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \circ \tilde{\partial}_r(\tilde{e}_1^r) \\ \vdots \\ \phi \circ \tilde{\partial}_r(\tilde{e}_m^r) \end{bmatrix}.$$

Isto significa que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[\Pi]; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\delta_r} & \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[\Pi]; \mathbb{Z}) \\
 \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
 \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varepsilon(A)^t} & \oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}
 \end{array}$$

é comutativo. Portanto

$$H^r(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = \frac{\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}}{\text{Im}(\bar{\varepsilon}(A)^t)}.$$

Pelo teorema 1.9, a cardinalidade de $H^r(K; \mathbb{Z})$ é o $\text{mdc}\{\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)\}$, onde $\varepsilon(d_i)$ são os subdeterminantes de $\varepsilon(A)^t$. Se este número é ímpar, significa que pelo menos um de seus subdeterminantes é ímpar. Como $\varepsilon(\tilde{a}_{ij}) \equiv \bar{\varepsilon}(\tilde{a}_{ij}) \pmod{2}$, $\bar{\varepsilon}(A)^t$ também terá um subdeterminante de ordem $m \times m$ ímpar. Aplicando novamente o teorema 1.9, $H^r(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ terá cardinalidade finita e ímpar. O mesmo raciocínio, mostra que se $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ tem cardinalidade ímpar, então $H^3(K; \mathbb{Z})$ terá cardinalidade ímpar. ■

A seguir veremos um exemplo de um 3-complexo, onde temos $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, porém $H^3(K; \mathbb{G}) \neq 0$.

Considere o 2-complexo $K^2 = S^1 \vee S^2$, isto é; o bouquet do círculo com a esfera. Seu recobrimento universal $\tilde{K}^2$, é a reta, onde em cada ponto de coordenada inteira cola-se uma esfera (veja figura 1.1). Como $\pi_2(K^2) = \pi_2(\tilde{K}^2) = H_2(\tilde{K}^2)$, tem-se $\pi_2(K^2, x_0) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, logo toda aplicação $f : (S^2, s_0) \rightarrow (S^1 \vee S^2, x_0)$ é da forma $f = \sum \alpha_i t^i$. Seja K o complexo obtido de K^2 colando-se uma 3-célula via a aplicação $2t - 1$. O operador bordo

$$(*) \quad 0 \longrightarrow H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \xrightarrow{\tilde{\partial}_3} H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1)$$

é dado por $\tilde{\partial}_3(y) = (2t - 1)y$, e da demonstração do lema anterior, $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$.

Figura 1.1:

Geometricamente $2t - 1$ aplica a tampa superior do cilindro sobre a esfera por uma aplicação de grau -1 , a lateral do cilindro é aplicado sobre o círculo uma vez, e a tampa inferior é levado na esfera por uma aplicação de grau 2 (ver figura 1.2).

Figura 1.2:

Considere o sistema de coeficientes locais $\Omega: \pi_1(K) = \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ sobre

K , dada por

$$\Omega(t)\left(\sum_{i=1}^p n_i t^{k_i}\right) = \sum_{i=1}^p n_i t^{1+k_i}.$$

Proposição 1.25. $H^3(K; \Omega)$ é isomorfo ao subgrupo de $\mathbb{Q}$ gerado pelas frações cujos denominadores são potências de 2.

Demonstração: Dualizando a sequência (*), obtemos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}^\Pi(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_3} & \mathrm{Hom}^\Pi(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]; \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx & & \\ \mathbb{Z}[t, t^{-1}] & \xrightarrow{\tilde{\delta}_3} & \mathbb{Z}[t, t^{-1}] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde $\tilde{\delta}_3(y) = (2t - 1)y$ para todo $y \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Segue que

$$H^3(K; \Omega) = \frac{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}{(2t - 1)}.$$

O quociente $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(2t - 1)$ é o subgrupo de $\mathbb{Q}$ gerado pelas frações cujos denominadores são potências de 2. Considere o homomorfismo de anéis $\phi : [t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Q}$ dado por $t^n \rightarrow \frac{1}{2^n}$. Sua imagem é o subgrupo de $\mathbb{Q}$ gerado pelas frações cujos denominadores são potências de 2. Seu núcleo contém o ideal gerado por $2t - 1$. De fato, $(2t - 1)$ é o núcleo de ϕ . Seja $\alpha = \sum_{i=0}^k \alpha_i t^i$ um elemento de $\mathbb{Z}[t]$ e suponha que $\phi(\alpha) = 0$, isto significa que

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{2^k} = 0$$

ou,

$$\frac{2^k \alpha_0 + 2^{k-1} \alpha_1 + 2^{k-2} \alpha_2 + \cdots + 2 \alpha_{k-1} + \alpha_k}{2^k} = 0,$$

mas isto significa que α_k é par. Façamos a prova por indução sobre o grau de α . Para $k = 1$, temos $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t$, e $\phi(\alpha) = 0$ se $2\alpha_0 + \alpha_1 = 0$, daí $\alpha = (2t - 1)(-\alpha_0)$. Suponhamos que para α de grau $k - 1$ com $\phi(\alpha) = 0$, tenhamos $\alpha \in (2t - 1)$, e

mostremos que esta propriedade também vale quando α tem grau k . Seja α de grau k , e $\phi(\alpha) = 0$, então α_k é par, daí existe $q, r \in \mathbb{Z}[t]$ tal que $\alpha = q(2t - 1) + r$ com $r = 0$ ou grau de r menor ou igual a $k - 1$. Mas $\phi(r) = \phi(\alpha - q(2t - 1)) = 0$, por hipótese de indução $r \in (2t - 1)$, logo $\alpha \in (2t - 1)$. Seja $\beta \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ um elemento arbitrário tal que $\phi(\beta) = 0$. Multiplicando β por t^n para algum n suficientemente grande, $t^n\beta$ tem a forma α para algum k . Como $\phi(t^n\beta) = 0$, pelo resultado acima, $t^n\beta = q(2t - 1)$ para algum $q \in \mathbb{Z}[t]$, daí $\beta = t^{-n}q(2t - 1)$. ■

Observação 1.26. Com o mesmo $K^2 = S^1 \vee S^2$ acima, se substituirmos a aplicação de colagem $2t - 1$ por $2t^2 - 1$, teremos da mesma forma $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$. Se considerarmos o sistema $\tilde{\mathbb{Z}}$ dado pela ação $tl = -l$, onde $t \in \pi_1(K) = \mathbb{Z}$ é o gerador, pela demonstração do lema 1.24, tem-se $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$. Ainda assim teremos $H^3(K; \Omega) \neq 0$.

1.3 Obstrução para Deformação

A referência desta seção é [WG], e também as Notas de aula do Professor Robin Brooks. Nesta seção vamos supor:

1. $f : K \rightarrow Y$ é uma aplicação, e $B \subset Y$ um subespaço.
2. K é um CW -complexo conexo finito.
3. Y é conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos, e semilocalmente simplesmente conexo.

Abordaremos o problema de deformar f por uma homotopia $\{f_t\}$ para uma nova aplicação $f_1 : K \rightarrow Y$ tal que $f_1(K) \subset B$. Os conjuntos de homotopia relativo $\pi_p(Y, B, b)$, onde $b \in B$, fazem um papel crucial em nossa investigação. Quando

$p > 1$ eles são grupos. Para $p = 0$ ou 1 eles são somente conjuntos. Porém a afirmação $\pi_p(Y, B, b) = 0$ tem significado para todo $p \geq 0$:

1. Dizer que $\pi_1(Y, B, b) = 0$ significa que o homomorfismo de grupos fundamentais $\pi_1(B, b) \rightarrow \pi_1(Y, b)$ induzido pela inclusão é sobrejetor.
2. Dizer que $\pi_0(Y, B, b) = 0$ significa que a aplicação entre componentes conexas por caminhos $\pi_0(B, b) \rightarrow \pi_0(Y, b)$ induzido pela inclusão é sobrejetor.

Lema 1.27. *Suponha que $n \geq 0$ e que para todo $p \leq n$ e todo $b \in B$ tem-se $\pi_p(Y, B, b) = 0$. Então existe uma homotopia $\{f_t\}$ começando em f tal que $f_1(K^n) \subset B$.*

De agora em diante assumiremos que dimensão de $\overline{K}$ é ≥ 3 , B é conexo por caminhos, e $\pi_1(Y, B, b) = \pi_2(Y, B, b) = 0$ para todo $b \in B$. Nestas condições $\pi_1(B, b) \simeq \pi_1(Y, b)$ para todo $b \in B$, e podemos deformar f para uma aplicação f_1 tal que $f_1(K^2) \subset B$.

Sejam $p: \tilde{K} \rightarrow K$ e $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$ os respectivos recobrimentos universais de K e Y . Usando as hipóteses acima, $\tilde{B} = q^{-1}(B)$ é conexo por caminhos e simplesmente conexo, portanto é um recobrimento universal de B . Logo o grupo $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{b})$ não depende da escolha de $\tilde{b}$ e escreveremos $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B})$ para $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B}, \tilde{b})$.

A composta $f \circ p$ tem levantamento $\tilde{f}$ através de q . Suponha que para algum $n > 2$ tenhamos tido sucesso para deformar f de tal forma que $f(K^{n-1}) \subset B$, daí temos o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\tilde{Y}, \tilde{B}) \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ (K^n, K^{n-1}) & \xrightarrow{f} & (Y, B) \end{array}$$

Como $H_p(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1}) = 0$ para $p < n$, e $\tilde{K}^{n-1}$ é simplesmente conexo, o homomorfismo de Hurewicz $\rho : \pi_n(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1}) \rightarrow H_n(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1})$ é isomorfismo. Podemos definir a composição

$$c^n(f) = (\tilde{f}_{\pi_n}) \circ \rho^{-1} : H_n(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1}) \rightarrow \pi_n(\tilde{K}^n, \tilde{K}^{n-1}) \rightarrow \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B})$$

Considere o seguinte sistema de coeficientes locais $\Omega : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B}))$ sobre Y . A cada $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ associa-se um homeomorfismo $h_\alpha : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$ tal que $q \circ h_\alpha = q$, daí este homeomorfismo induz um isomorfismo

$$(h_\alpha)_{\pi_n} : \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B}) \rightarrow \pi_n(\tilde{Y}, \tilde{B}),$$

ponha $\Omega(\alpha) = (h_\alpha)_{\pi_n}$. Denotaremos este sistema de coeficientes locais por $\Pi_n(Y, B)$. Logo $f^*\Pi_n(Y, B)$ é um sistema coeficientes locais sobre K .

A cocadeia $c^n(f) \in \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}), f^*\Pi_n(Y, B))$ é chamada a n -ésima cocadeia obstrução para deformar f em B .

Teorema 1.28. *São equivalentes:*

1. existe uma homotopia $\{f_t\}$ tal que $f_0 = f, f_1(K^n) \subset B$, e $f_t|_{K^{n-1}} = f|_{K^{n-1}}$ para todo $t \in I$.
2. $c^n(f) = 0$.

A cocadeia obstrução $c^n(f)$ é um cociclo, e portanto representa uma classe de cohomologia de $H^n(K; f^*\Pi_n(Y, B))$, chamada classe de obstrução para deformar f em B , que será denotada por $\omega^n(f)$.

Lema 1.29. *Suponha que $\{f_t\}$ é uma homotopia de f para outra aplicação f_1 , com $f_t(K^{n-2}) \subset B$ para todo $t \in I$, e ambos $f(K^{n-1}) \subset B$ e $f_1(K^{n-1}) \subset B$. Então $c^n(f)$ e $c^n(f_1)$ são cohomólogos, isto é; existe $d \in \text{Hom}^\Pi(C_{n-1}(\tilde{K}); f^*\Pi_n(Y, B))$ tal que*

$$\tilde{\delta}^n d = c^n(f_1) - c^n(f)$$

Observação 1.30. Se $\pi_p(Y, B) = 0$ para todo $p < n$ e $n > 2$. Então quaisquer duas aplicações homotópicas f' e f'' com $f'(K^{n-1}) \subset B$ e $f''(K^{n-1}) \subset B$, são homotópicas por uma homotopia $\{f_t\}$ tal que $f_t(K^{n-2}) \subset B$.

Lema 1.31. *Seja $f(K^{n-1}) \subset B$ e $\alpha \in \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); f^*\Pi_n(Y, B))$ cohomólogo a $c^n(f)$. Então existe uma homotopia $\{f_t\}$ de f tal que $\{f_t\}$ é constante sobre K^{n-2} , $f_1(K^{n-1}) \subset B$ e $c^n(f_1) = \alpha$.*

Teorema 1.32. *Suponha que $f(K^{n-1}) \subset B$ e que $\omega^n(f) = 0$. Então existe uma homotopia $\{f_t\}$ de f tal que $f_1(K^n) \subset B$. De fato, a homotopia pode ser escolhida de tal forma que esta seja constante sobre K^{n-2} .*

Capítulo 2

Teoria de Raízes

Este capítulo será dedicado ao estudo da seguinte questão. Para uma aplicação $f : K \rightarrow M$, definiremos o conceito de classes mínimas, e buscaremos propriedades sobre os espaços K e M para que exista uma aplicação na classe de homotopia de f que tem todas as classes mínimas. Na seção 2.1, vamos expor a teoria necessária para a definição do novo conceito. A seção 2.2, contém os resultados obtidos. As referências básicas para este capítulo são [BR1],[BG], e [TK].

2.1 Teoria de Nielsen

Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação entre espaços topológicos conexos por caminhos, e $a \in M$ um ponto arbitrário. Uma **raiz** da equação $f(x) = a$ é um ponto $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) = a$. Duas raízes x_0 e x_1 são **f -equivalentes** quando existe um caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$ de x_0 para x_1 tal que $f \circ \alpha \simeq a \text{ rel } \{0, 1\}$. Esta relação é de equivalência, e separa o conjunto das raízes em subconjuntos disjuntos, chamados **classes de Nielsen para raízes**, o conjunto de todas as classes de Nielsen será denotado por $\Gamma(f, a)$. O próximo resultado é demonstrado em ([TK], teorema 3.4).

Lema 2.1. *Se K é compacto, localmente conexo por caminhos, e M é espaço Hausdorff semilocalmente simplesmente conexo, então $\Gamma(f, a)$ é finito.*

Seja $\{f_t\}$ uma homotopia começando em $f : K \rightarrow M$. Então uma raiz x_0 de $f(x) = a$ é $\{f_t\}$ -relacionada com a raiz x_1 de $f_1(x) = a$, denotada por $x_0\{f_t\}x_1$, se existe um caminho α em K de x_0 para x_1 com $f_t \circ \alpha(t) \simeq a \text{ rel}\{0, 1\}$. O próximo resultado é demonstrado em ([TK], teorema 4.2).

Teorema 2.2. *Suponha que é dado uma homotopia $\{f_t\} : f = f_0 \simeq f_1 : K \rightarrow M$, raízes x_i de $f_i(x) = a$, $i = 0, 1$, e $x_0\{f_t\}x_1$. Sejam as classes em $\Gamma(f_i, a)$ contendo x_i denotadas por F_i . Então*

1. $x'_0 \in F_0$ se, e somente se, $x'_0\{f_t\}x_1$,
2. $x'_1 \in F_1$ se, e somente se, $x_0\{f_t\}x'_1$.

Em outras palavras, a relação $x_0\{f_t\}x_1$ induz uma correspondência de F_0 para F_1 sob $\{f_t\}$, que é denotada por $F_0\{f_t\}F_1$.

Definição 2.3. *Se uma classe de Nielsen para raízes $F \in \Gamma(f, a)$ corresponde a uma classe de raiz $\in \Gamma(f_1, a)$ para toda homotopia $\{f_t\}$ começando em f , então F é chamada essencial. O número de classes essenciais é chamado número de Nielsen para raízes e será denotado por $N(f, a)$.*

O próximo resultado pode ser encontrado em ([TK], teorema 4.4).

Lema 2.4. *O número de Nielsen é um invariante homotópico, isto é; se f e g são homotópicas, então $N(f, a) = N(g, a)$.*

Note que $N(f, a) \leq MR[f, a]$, sendo $MR[f, a] = \min\{\#(g^{-1}(a)) | g \in [f]\}$. Aqui $[]$ significa classe de homotopia.

Quando $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação entre espaços conexos, localmente conexos por caminhos, e semilocalmente simplesmente conexo e $a \in M$ é fechado, temos uma interpretação usando espaços de recobrimento de f -equivalência e $\{f_t\}$ -relação.

A aplicação f induz um homomorfismo $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)$ de grupos fundamentais. Como a imagem de $f_{\#}$ é um subgrupo de $\pi_1(M)$, existe um recobrimento $p^+ : M^+ \rightarrow M$ tal que $p_{\#}^+ \pi_1(M^+) = f_{\#} \pi_1(K)$. Podemos levantar f através de p^+ para f^+ fazendo o diagrama comutar.

Os lemas a seguir são demonstrados em ([BR1], lema 1 e lema 2).

Lema 2.5. *Suponha $\{f_t\}$ uma homotopia começando em f , e $\{f_t^+\}$ seu levantamento através de p^+ começando em f^+ . Então uma raiz x_0 de $f(x) = a$ é $\{f_t\}$ -relacionada com uma raiz x_1 de $f_1(x) = a$ se, e somente se, $f^+(x_0) = f_1^+(x_1)$.*

Lema 2.6. *Duas raízes x_0 e x_1 de $f(x) = a$ são f -equivalentes se, e somente se, $f^+(x_0) = f^+(x_1)$.*

Em outras palavras, os lemas acima dizem que para cada $a_i \in (p^+)^{-1}(a)$ o conjunto $(f^+)^{-1}(a_i)$ se for não vazio é uma classe de raiz, e a classe $(f^+)^{-1}(a_i)$ é essencial se, e somente se, $(f_1^+)^{-1}(a_i)$ é não-vazio para toda aplicação $f_1^+ : K \rightarrow M^+$ homotópica a f^+ . O próximo teorema foi demonstrado em ([BR1], teorema 1).

Teorema 2.7. *Suponha $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação entre espaços conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente simplesmente conexos. Suponha*

$a \in M$ é fechado e para algum inteiro $n > 2$, $\pi_m(M, M - a) = 0$ para todo $0 < m < n$. Se K é um complexo simplicial finito, então existe uma aplicação $f' : K \rightarrow M$ homotópica a f tal que $f'(x) = a$ tendo exatamente $N(f, a)$ classes de raízes.

Podemos perguntar quais condições são necessárias sobre K e M para que as classes de raízes sejam reduzidas a conjuntos unitários variando f por homotopias. Em ([BR3], proposição 4) é demonstrado que se K e M são variedades trianguláveis de mesma dimensão $n \geq 3$, existe f' homotópica a f com $f'(x_0) = a$ tendo exatamente $N(f, a)$ raízes. Porém em [BR1] um exemplo mostra que a hipótese de K ser variedade não é supérflua.

Motivados por estes resultados, pomos a seguinte questão: Seja $\mathfrak{F}_f$ o conjunto de todas as homotopias $\{f_t\}$ começando em $f : K \rightarrow M$. Para cada $F \in \Gamma(f, a)$ defina

$$\mu(F) = \min_{\{f_t\} \in \mathfrak{F}_f} \{ \#(F_1) \mid F_1 \in \Gamma(f_1, a) \text{ e } F\{f_t\}F_1 \}.$$

Se F for inessencial, então $\mu(F) = 0$. Quais propriedades devem ter os espaços K e M para que exista $\{f_t\} \in \mathfrak{F}_f$, onde $f_1 : K \rightarrow M$ tem todas suas classes mínimas, isto é; f_1 tem apenas classes essenciais, e se $F_1 \in \Gamma(f_1, a)$ é tal que $F\{f_t\}F_1$, então F_1 tem $\mu(F)$ pontos.

2.2 Classes Mínimas

O contexto em que vamos trabalhar é K um CW -complexo finito de dimensão $n \geq 3$ e M variedade conexa, fechada de mesma dimensão de K . Daqui em diante, a menos que se especifique, estas serão as hipóteses que estaremos admitindo.

Seja $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . Sabemos que $\tilde{p}$ induz um

isomorfismo

$$(\tilde{p}_*)^{-1} : \pi_n(M, M - a, y) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a), \tilde{y})$$

para todo $n \geq 2$. Agora como $\tilde{M}$ e $\tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a)$ são simplesmente conexos o homomorfismo de Hurewicz

$$\rho : \pi_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a), \tilde{y}) \rightarrow H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a))$$

é isomorfismo.

As inclusões $i_{\tilde{a}_i} : (\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a)) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{a}_i)$, onde $\tilde{a}_i \in \tilde{p}^{-1}(a)$ induz um isomorfismo

$$i_* = \sum_{\tilde{a}_i \in \tilde{p}^{-1}(a)} i_{\tilde{a}_i,*} : H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a)) \rightarrow \sum_{\tilde{a}_i \in \tilde{p}^{-1}(a)} H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{a}_i)$$

E por excisão temos o isomorfismo

$$(\text{Exc})^{-1} : \sum_{\tilde{a}_i \in \tilde{p}^{-1}(a)} H_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{a}_i) \rightarrow \sum_{\tilde{a}_i \in \tilde{p}^{-1}(a)} H_n(\tilde{V}_i, \tilde{V}_i - \tilde{a}_i) = \mathbb{Z}[\pi]$$

onde $\pi = \pi_1(M)$ e $\tilde{V}_i$ são vizinhanças euclidianas de $\tilde{a}_i$ sobre uma vizinhança V de a .

Seja $\gamma_i \in H_n(\tilde{V}_i, \tilde{V}_i - \tilde{a}_i)$ um gerador. Dado $\alpha \in \pi_n(M, M - a, y)$, tem-se

$$((\text{Exc})^{-1} \circ i_* \circ \rho \circ (\tilde{p}_*)^{-1})(\alpha) = n_1 \gamma_{i_1} + n_2 \gamma_{i_2} + \cdots + n_j \gamma_{i_j}$$

O elemento $n_i \gamma_i$ é representado pela classe de homologia de uma aplicação

$$\bar{g}_i : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \rightarrow (\tilde{V}_i, \tilde{V}_i - \tilde{a}_i)$$

(σ^n é um n -simplexo) tal que

$$(\bar{g}_i)_* : H_n(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \rightarrow H_n(\tilde{V}_i, \tilde{V}_i - \tilde{a}_i)$$

tem grau n_i e $(\bar{g}_i)^{-1}(\tilde{a}_i)$ é o baricentro de σ^n .

Definição 2.8. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação entre espaços topológicos, e $A \subset X$ um subespaço. Uma homotopia $h_t : A \rightarrow Y$ é chamada **homotopia parcial** de f se $h_0 = f|_A$. Um subespaço A de um espaço X tem a **propriedade da extensão de homotopia absoluta (AHEP)** em X se, para todo espaço Y e toda homotopia parcial $h_t : A \rightarrow Y$ de uma aplicação arbitrária $f : X \rightarrow Y$ tem uma extensão $g_t : X \rightarrow Y$, tal que $g_0 = f$.

Lema 2.9. Seja $h : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n, x_\sigma) \rightarrow (M, M - a, y)$ uma aplicação. Se $[h]$ tem p parcelas, isto é; $[h] = n_1\gamma_{i_1} + n_2\gamma_{i_2} + \cdots + n_p\gamma_{i_p}$, então $h \simeq \text{grel}\dot{\sigma}_n$ com

$$g : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n, x_\sigma) \rightarrow (M, M - a, y)$$

tendo exatamente p raízes.

Demonstração: Seja $\bar{g}_i$, $j = 1, \dots, p$ os representantes de $n_j\gamma_{i_j}$, como descrito acima. Como $\tilde{V}_i \cap (\tilde{p}^{-1}(a) - \tilde{a}_i) = \emptyset$ temos a inclusão

$$I_i : (\tilde{V}_i, \tilde{V}_i - \tilde{a}_i) \subset (\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a)),$$

daí a aplicação $I_{i_j} \circ \bar{g}_{i_j}$ representa a classe de homologia que pelo isomorfismo $(\text{Exc})^{-1} \circ i_*$ é levado em $n_j\gamma_{i_j}$. Sejam c_{i_j} caminhos em $\tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a)$, com $c_{i_j}(0) = \tilde{y}$ e $c_{i_j}(1) = (I_{i_j} \circ \bar{g}_{i_j})(x_\sigma)$; c_{i_j} induz um isomorfismo

$$\tau_{c_{i_j}} : \pi_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a), (I_{i_j} \circ \bar{g}_{i_j})(x_\sigma)) \rightarrow \pi_n(\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a), \tilde{y}),$$

e $\tau_{c_{i_j}}([I_{i_j} \circ \bar{g}_{i_j}])$ é representado por uma aplicação

$$\tilde{g}_{i_j} : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n, x_\sigma) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a), \tilde{y})$$

tal que $\tilde{g}_{i_j}^{-1}(\tilde{a}_{i_j})$ é apenas um ponto, e como aplicação de

$$(\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{M} - \tilde{p}^{-1}(a))$$

sua classe de homologia é homóloga a classe de homologia de $I_{i_j} \circ \bar{g}_{i_j}$. Daí

$$((\text{Exc})^{-1} \circ i_* \circ \rho)([\tilde{g}_{i_1}] + \cdots + [\tilde{g}_{i_p}]) = n_1\gamma_{i_1} + \cdots + n_p\gamma_{i_p}.$$

Defina $\tilde{g} = \tilde{g}_{i_1} + \cdots + \tilde{g}_{i_p}$, logo $\tilde{p} \circ \tilde{g} = g \simeq h$ com g tendo apenas p raízes. Como $\dot{\sigma}^n$ tem AHEP em σ^n podemos supor que a homotopia é relativa a $\dot{\sigma}^n$. ■

Corolário 2.10. *Seja $f : K \rightarrow M$ uma aplicação, e $F \in \Gamma(f, a)$. O número $\mu(F)$ é finito.*

Demonstração: Como no nosso contexto M é variedade de dimensão $n \geq 3$, temos $\pi_p(M, M - a) = 0$ para todo $0 \leq p < n$. Pelo lema 1.27 f é homotópica a uma aplicação f_1 sem raízes sobre o $n-1$ esqueleto. Seja e^n uma n -célula arbitrária de K , e $\chi_{e^n} : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n) \rightarrow (K, K^{n-1})$ sua aplicação característica. Pelo lema acima existe uma homotopia $h_t^{e^n} : (\sigma^n, \dot{\sigma}^n, x_\sigma) \rightarrow (M, M - a, y)$ tal que $h_0^{e^n} = f_1 \circ \chi_{e^n}$, $h_t^{e^n}|_{\dot{\sigma}^n} = f_1 \circ \chi_{e^n}$ e $h_1^{e^n}$ tem apenas um número finito de raízes. Logo existe uma homotopia $\{h_t\}$ bem definida sobre K por

$$h_t(x) = \begin{cases} h_t^{e^n} \circ \chi_{e^n}^{-1} & \text{se } x \in \text{inte}^n \\ f_1(x) & \text{se } x \in K^{n-1}. \end{cases}$$

Como K tem um número finito de células, h_1 tem apenas um número finito de raízes. ■

Lema 2.11. *Sejam F_1, F_2 classes essenciais de f , então $\mu(F_1) = \mu(F_2)$.*

Demonstração: Sejam f^+ e p^+ as aplicações obtidas antes do lema 2.5, $F_1 = (f^+)^{-1}(a_1)$ e $F_2 = (f^+)^{-1}(a_2)$, sendo $a_1, a_2 \in (p^+)^{-1}(a)$. Como M^+ é variedade, existe um homeomorfismo $h : M^+ \rightarrow M^+$ com $h(a_1) = a_2$ e $h \simeq id : M^+ \rightarrow M^+$. Logo $h \circ f^+ \simeq f^+$ e $(h \circ f)^{-1}(a_2) = (f^+)^{-1}(a_1)$, mas isto significa que $\mu(F_2) \leq \mu(F_1)$. Analogamente tem-se $\mu(F_1) \leq \mu(F_2)$. ■

O lema acima mostra que no caso do contradomínio ser variedade, todas as classes são essenciais ou todas são inessenciais. Mais ainda, temos um número bem definido $\mu_{CR}(f)$ associado a f , isto é; $\mu_{CR}(f) = \mu(F)$ para alguma classe de

raiz F de f . Portanto nosso problema é mostrar que $MR[f, a] = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f)$. Quando $\mu_{CR}(f) = 0$, ou seja, todas as classes são inessenciais, temos $N(f, a) = 0$ e o teorema 2.7, nos diz que $MR[f, a] = 0$. De agora em diante vamos supor que $N(f, a) > 0$, neste caso teremos que $N(f, a)$ é igual ao número de classes de Reidemeister, isto é; será o índice $[\pi_1(M) : f_\#(\pi_1(K))]$. O próximo resultado é demonstrado em ([BR1], lema 5).

Lema 2.12. *Seja $q : \tilde{M}^+ \rightarrow M^+$ o recobrimento universal de M^+ e $D = (p^+)^{-1}(a)$. Então as inclusões*

$$i_y : (\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(D)) \subset (\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(y)), \quad y \in D,$$

induzem um isomorfismo de $\pi_n(\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(D))$ sobre a soma direta

$$\sum_{y \in D} \pi_n(\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(y)),$$

enquanto para $0 < m < n$ tem-se $\pi_m(M^+, M^+ - D, y') = 0$ para qualquer $y' \in M^+ - D$.

Teorema 2.13. *Se existe f' homotópica a f tal que uma de suas classes de raízes F' tem $\mu_{CR}(f)$ pontos e estes pontos estão no interior de n -células, então $MR[f, a] = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f)$.*

Demonstração: Como $\pi_j(M, M - a) = 0$ para $j < n$ podemos supor que f não tem raízes sobre o $n - 1$ esqueleto de K . Seja $D = \{a_1, \dots, a_{N(f,a)}\}$. Para cada a_i o sistema de coeficientes locais sobre K para deformar f^+ em $M^+ - a_i$ é $(f^+)^* \Pi_n(M^+, M^+ - a_i)$, que será denotado por Γ_{a_i} , da mesma forma o sistema $(f^+)^* \Pi_n(M^+, M^+ - D)$ sobre K , para deformar f^+ em $M^+ - D$ será denotado por Γ_D . Para cada $a_i \in D$, as inclusões

$$i_{a_i} : (\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(D)) \subset (\tilde{M}^+, \tilde{M}^+ - q^{-1}(a_i))$$

induzem homomorfismos de coeficientes locais $k_{a_i} : \Gamma_D \rightarrow \Gamma_{a_i}$. Do lema 2.12, a soma direta

$$\left(\sum_{a_i \in D} k_{a_i} \right) : \Gamma_D \rightarrow \sum_{a_i \in D} \Gamma_{a_i}$$

é um isomorfismo de coeficientes locais. Consequentemente,

$$\left(\sum_{a_i \in D} (k_{a_i})_{\#} \right) : \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi_1(M)]) \rightarrow \sum_{a_i \in D} \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi_1(M^+)])$$

é um isomorfismo, onde cada $(k_{a_i})_{\#}$ é o homomorfismo induzido pelo homomorfismo de coeficientes k_{a_i} . Considere:

1. $c_i(f^+)$ a cocadeia para deformar f^+ em $M^+ - a_i$
2. $c_D(f^+)$ a cocadeia para deformar f^+ em $M^+ - D$
3. $c(f^+) = c_1(f^+) + \cdots + c_{N(f,a)}(f^+)$

Como $(k_{a_i})_{\#}(c_D(f^+)) = c_i(f^+)$ para cada $a_i \in D$, tem-se

$$\left(\sum_{a_i \in D} (k_{a_i})_{\#} \right)(c_D(f^+)) = c(f^+).$$

Da demonstração do lema 2.11, para cada $i = 1, \dots, N(f, a)$, existe f_i^+ homotópica a f^+ tal que $(f_i^+)^{-1}(a_i) = F'$. Pelo lema 1.29 as cocadeias $c_i(f_i^+)$ e $c_i(f^+)$ são cohomólogas. Logo $\bar{c} = c_1(f_1^+) + \cdots + c_{N(f,a)}(f_{N(f,a)}^+)$ é cohomóloga a $c(f^+)$. Daí existe $\bar{c}_D$ cohomóloga a $c_D(f^+)$ com $(\sum_{a_i \in D} (k_{a_i})_{\#})(\bar{c}_D) = \bar{c}$. Pelo lema 1.31, existe $\bar{f} : K \rightarrow M^+$ homotópica a f^+ com $\bar{f}|_{K^{n-2}} = f^+$, $\bar{f}(K^{n-1}) \subset M^+ - D$ e $c_D(\bar{f}) = \bar{c}_D$.

Agora se e^n contém p pontos de F' em seu interior, $c_i(f_i^+)(e^n)$ tem p parcelas em $\pi_n(M^+, M^+ - a_i) = \mathbb{Z}[\pi_1(M^+)]$. Mais isto significa que $\bar{g} = p^+ \circ \bar{f}$ quando restrita a e^n tem $p \cdot N(f, a)$ parcelas em $\pi_n(M, M - a) = \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$. Pelo lema 2.9, podemos estender $\bar{g}$ relativo ao bordo de e^n , tendo exatamente $p \cdot N(f, a)$ raízes.

Repetindo este processo em todo simplexo que contenha pontos de F' , obteremos uma aplicação g homotópica a f tendo exatamente $N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f)$ raízes. ■

Até o final deste capítulo K será um complexo simplicial e M uma variedade triangulável. Em [BG], define-se o número $NO(f, a; K)$ da seguinte forma:

1. Uma cocadeia $c_n \in \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi])$ é **elementar** se c_n é diferente de zero somente em um n -simplexo, chamado seu suporte, e tem valor em apenas um somando $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}[\pi_1(M) = \pi]$ indexado por $\alpha \in \pi$. Podemos então associar a cada cocadeia elementar um par (Δ^n, α) , onde Δ^n é seu suporte e α o índice do somando $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}[\pi]$ onde a cocadeia assume seu valor.
2. Duas cocadeias elementar são **disjuntas** se os pares (Δ^n, α) , (Δ^m, α') não são iguais.
3. Dado um cociclo arbitrário $c_n \in \text{Hom}^\Pi(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi])$, definimos um inteiro $l(c_n)$ como segue:
 - (a) O cociclo c_n pode ser unicamente escrito como uma soma de cociclos elementares disjuntos, isto é; $c_n = c_{n,1} + c_{n,2} + \dots + c_{n,r}$, onde cada $c_{n,i}$ é elementar.
 - (b) Uma soma parcial $c_{n,i_1} + \dots + c_{n,i_s}$ da decomposição de c_n é dita ser combinável se a interseção dos suportes de todas somandos elementares é não vazia e eles tem valores no mesmo somando $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}[\pi]$.
 - (c) Defina $l(c_n)$ sendo o número mínimo de somandos parciais combináveis entre todas as decomposições de c_n .
4. O número $NO(f, a; K)$ é definido como o mínimo dos números $l(c_n)$, onde c_n percorre o conjunto de todos os cociclos representantes da obstrução $\omega^n(f) \in H^n(K; \Gamma_D)$ para deformar f em $M - a$.

Lema 2.14.

$$NO(f, a; K) = \sum_{i=1}^{N(f,a)} NO(f^+, a_i; K).$$

Demonstração: Seja c_n^i um n -cociclo que representa a obstrução para deformar f^+ em $M^+ - a_i$ de modo que $l(c_n^i) = NO(f^+, a_i; K)$. Pelo isomorfismo

$$\left(\sum_{a_i \in D} (k_{a_i})_{\#} \right) : \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi]) \rightarrow \sum_{a_i \in D} \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi_1(M^+)]),$$

a cocadeia $\bar{c}_n$ satisfazendo

$$\left(\sum_{a_i \in D} (k_{a_i})_{\#} \right) (\bar{c}_n) = \sum_{i=1}^{N(f,a)} c_n^i$$

é um cociclo que representa a obstrução para deformar f em $M - a$. Tem-se

$$l(\bar{c}_n) = l(c_n^1) + \cdots + l(c_n^{N(f,a)}).$$

Vamos mostrar que $l(\bar{c}_n) = NO(f, a; K)$. Suponha que exista

$$\tilde{c}_n \in \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi])$$

cohomóloga a $\bar{c}_n$ com $l(\tilde{c}_n) \leq l(\bar{c}_n)$. Podemos decompor $\tilde{c}_n$ como uma soma de cociclos $\tilde{c}_n^1 + \cdots + \tilde{c}_n^{N(f,a)}$ tal que ao decomermos cada $\tilde{c}_n^i$ como uma soma de cociclos elementares, seus valores sobre os n -simplexos estarão em somandos $\mathbb{Z}$ cujos índices estão na mesma classe de Reidemeister, logo

$$l(\tilde{c}_n) = l(\tilde{c}_n^1) + \cdots + l(\tilde{c}_n^{N(f,a)}).$$

Agora

$$(k_{a_i})_{\#}(\tilde{c}_n) \in \text{Hom}^{\Pi}(C_n(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi_1(M^+)])$$

é cohomóloga a c_n^i , daí $l(\tilde{c}_n^i) \geq l(c_n^i)$. ■

Seja K um n -complexo homogêneo com a propriedade que todo $(n-1)$ -simplexo seja face de pelo menos dois n -simplexos. Para cada n -simplexo Δ^n seja $C(\Delta^n)$ o menor subcomplexo que contém todos n -simplexos Δ'^n que podem ser ligado a Δ^n por uma sequência de n -simplexos começando em Δ^n e terminando em Δ'^n tal que a interseção de dois consecutivos é um $(n-1)$ -simplexo que face apenas estes dois n -simplexos. Isto define uma cobertura de K por subcomplexos $\{K_1, \dots, K_r\}$. Para Λ um subconjunto de $\{1, \dots, r\}$, defina $K_\Lambda = \bigcap_{j \in \Lambda} K_j$.

Teorema 2.15. *Suponha que quando $K_\Lambda \neq \emptyset$, onde Λ é um subconjunto qualquer de $\{1, \dots, r\}$, todas as suas componentes conexas tem dimensão diferente de zero. Então*

$$MR[f, a] = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f).$$

Demonstração: Em ([BG], teorema 4.1), é demonstrado que sob estas hipóteses, dada qualquer aplicação $g : K \rightarrow M$ tem-se $MR[g, a] = NO(g, a; K)$. Pelo lema 2.14, tem-se

$$MR[f, a] = NO(f, a; K) = \sum_{i=1}^{N(f, a)} NO(f^+, a_i; K) = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f).$$

■

Corolário 2.16. *Se $K = M_1 \cup M_2$ é a união de duas variedades sem bordo de dimensão ≥ 3 , e $K_0 = M_1 \cap M_2$ tem a propriedade que $M_i - K_0$ são conexos por caminhos e todas as componentes de K_0 tem dimensão diferente de zero, então $MR[f, a] = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f)$.*

Demonstração: Uma cobertura de K é obtido da seguinte forma: $K_1 = \overline{M_1 - K_0}$, $K_2 = \overline{M_2 - K_0}$, e K_i para $i = 3, \dots, r$ são as componentes conexas de dimensão n de K_0 . A condição que quando $K_\Lambda \neq \emptyset$, onde Λ é um subconjunto de $\{1, \dots, r\}$, todas suas componentes conexas tem dimensão diferente de zero, é satisfeita, logo o resultado acima podem ser aplicados. ■

O exemplo abaixo mostra que a hipótese de K_Λ ter todas as componentes conexas de dimensão diferente de zero, é de fundamental importância.

Exemplo 2.17. Seja $K = \bigcup_{i=1}^4 S_i$, onde cada S_i é S^3 vista como o bordo de Δ^4 ,

$$S_1 = \partial \langle a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle, \quad S_2 = \partial \langle b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$$

$$S_3 = \partial \langle c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 \rangle, \quad S_4 = \partial \langle d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 \rangle$$

e são coladas da seguinte forma:

1. $S_1 \cap S_2 \quad a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2$
2. $S_2 \cap S_3 \quad b_0 = c_0, b_1 = c_1, b_3 = c_2$
3. $S_3 \cap S_4 \quad c_0 = d_0, c_2 = d_1, c_3 = d_2$

Note que $\bigcap_{i=1}^4 S_i = a_0$ (ver figura 2.1).

Figura 2.1:

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{P}^3$ uma aplicação com a propriedade que suas restrições $f|_{S_i} = f_i$ levanta-se para homeomorfismos $\tilde{f}_i : S_i \rightarrow S^3$ (ver diagrama abaixo).

$$\begin{array}{ccc}
 & & S^3 \\
 \nearrow \tilde{f}=(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_4) & & \downarrow p \\
 K & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^3
 \end{array}$$

Sendo $a = f(a_0)$, tem-se $p^{-1}(a) = \{\tilde{a}, -\tilde{a}\}$. Como toda aplicação homotópica a $\tilde{f}$ é sobrejetora, implica que $N(f, a) = 2$. Agora $\tilde{f}_i^{-1}(\tilde{a}) = a_0$ para $i = 1, \dots, 4$, ou seja, $\tilde{f}^{-1}(\tilde{a}) = a_0$. Isto significa que $\mu_{CR}(f) = 1$ e $N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f) = 2$. Como f tem sempre duas raízes restrita a cada esfera, $MR[f, a] \geq 3$.

Observo que no caso de dimensão 2, mesmo que K seja uma variedade, não teremos $MR[f, a] = N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f)$ para toda aplicação $f : K \rightarrow M$. Em [LX], constrói-se uma aplicação $f : T_2 \rightarrow T$ do bitoro no toro, tendo $MR[f, a] = 4$, porém $N(f, a) \cdot \mu_{CR}(f) = 3$.

Capítulo 3

Existência de Raízes

Neste capítulo vamos abordar a seguinte questão. Seja K um CW -complexo de dimensão 3, com m células de dimensão 3 e n células de dimensão 2 ($m \leq n$), M variedade conexa fechada de mesma dimensão que K , e $a \in M$ um ponto arbitrário. Se $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$ é possível existir $f : K \rightarrow M$ tal que $MR[f, a] \neq 0$? Na seção 3.1, damos exemplos de complexos com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, e alguns resultados que dizem quando não é possível construir tais complexos. Na seção 3.2, o problema é resolvida para uma grande classe de variedades com π_1 abeliano, e na seção 3.3, resolvemos o problema para a variedade M_{Q_8} obtida de S^3 pela ação do grupo dos quatérnios.

3.1 Complexos com Cohomologia Top Zero

Suponha que K tenha m células de dimensão r , e n -células de dimensão $r - 1$. Relembremos como se calcula $H^r(K; \mathbb{Z})$. Seja $p : \tilde{K} \rightarrow K$ o recobrimento universal de K . Considere a sequência

$$0 \longrightarrow H_r(\tilde{K}^r, \tilde{K}^{r-1}) \xrightarrow{\tilde{\partial}_r} H_{r-1}(\tilde{K}^{r-1}, \tilde{K}^{r-2}),$$

onde $\partial_r(\tilde{e}_i^r) = \tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^{r-1} + \dots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^{r-1}$ para $i = 1, \dots, m$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix},$$

então

$$H^r(K; \mathbb{Z}) = \frac{\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}}{\text{Im}(\varepsilon(A)^t)}$$

Pelo lema 1.9, se $n > m$, este quociente será infinito, então a primeira condição que temos que impor é $m \leq n$. Neste caso, $H^r(K; \mathbb{Z}) = 0$ se, e somente se, os subdeterminantes de ordem $m \times m$ da matriz $\varepsilon(A)^t$ são primos entre si.

Definição 3.1. Quando $m = n$, diremos que K é quadrado.

Lema 3.2. Se um complexo K^{r-1} tiver, $H_{r-1}(K^{r-1}) = 0$ ou $\pi_{r-1}(K^{r-1}) = 0$, então não é possível construir um complexo $K = K^r$, a partir de K^{r-1} com $H^r(K; \mathbb{Z}) = 0$.

Demonstração: O revestimento universal $p: \tilde{K} \rightarrow K$ é uma aplicação celular, logo induz o homomorfismo

$$p_*: H_r(\tilde{K}^r, \tilde{K}^{r-1}) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[\Pi] \rightarrow H_r(K^r, K^{r-1}) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z},$$

que é o aumento em cada parcela do somando. O diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_r(\tilde{K}^r, \tilde{K}^{r-1}) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_r} & H_{r-1}(\tilde{K}^{r-1}, \tilde{K}^{r-2}) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ H_r(K^r, K^{r-1}) & \xrightarrow{\partial_r} & H_{r-1}(K^{r-1}, K^{r-2}) \end{array}$$

diz que, se $\partial_r(e_i^r) = (a_{1i}, \dots, a_{ni})$, então $\tilde{\partial}_r(\tilde{e}_i^r) = (\tilde{a}_{1i}, \dots, \tilde{a}_{ni})$, sendo $\varepsilon(\tilde{a}_{ji}) = a_{ji}$ para $j = 1, \dots, n$, e $i = 1, \dots, m$. Um complexo K^r é obtido de K^{r-1} pela colagem de funções $\varphi: S^{r-1} \rightarrow K^{n-1}$, e se $H_{r-1}(K^{r-1}) = 0$ ou $\pi_{r-1}(K^{r-1}) = 0$, a induzida em homologia $\varphi_*: H_{r-1}(S^{r-1}) \rightarrow H_{r-1}(K^{r-1})$ é zero. Como ∂_r é definido em função de φ_* , teremos $\partial_r = 0$. Daí a matriz $\varepsilon(A)^t$ será nula. ■

Em particular K^{r-1} não pode ser uma variedade fechada não orientável. No caso $r = 3$, a única superfície fechada que pode ser K^2 é S^2 , sendo neste caso K^3 simplesmente conexo.

Corolário 3.3. *O único 2-complexo K^2 tendo uma célula em cada dimensão 0, 1, 2, que é possível construir um 3-complexo com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$ é $S^1 \vee S^2$.*

Demonstração: O 1-esqueleto de K^2 é o círculo S^1 , logo K^2 é obtido de S^1 pela colagem de uma 2-célula por uma aplicação $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ de grau n . Se $n = 0$, $K^2 = S^1 \vee S^2$. Vamos calcular $H_2(K^2)$.

$$0 \longrightarrow H_2(K^2, K^1) \xrightarrow{\partial_2} H_1(K^1, K^0) \xrightarrow{\partial_1} H_0(K^0) \longrightarrow 0$$

Aqui $\partial_2(p) = n \cdot p$ e $\partial_1 = 0$. Como $H_2(K^2) = \ker \partial_2$, se $n \neq 0$, tem-se $H_2(K^2) = 0$. Segue do lema anterior que não é possível construir K^3 a partir de K^2 com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$. ■

Vejamos alguns exemplos de 2-complexos, onde é possível construir 3-complexos com cohomologia 3 igual a zero.

Exemplo 3.4. Seja $K^2 = S^1 \vee \bigvee_{i=1}^n S^2$, o bouquet de S^1 com o bouquet de n -esferas S^2 . Seu recobrimento universal $\tilde{K}^2$, é a reta, onde em cada ponto de coordenada inteira cola-se $\bigvee_{i=1}^n S^2$. Tem-se $\pi_2(K^2) = H_2(\tilde{K}^2) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, e todo elemento é representado por uma n -upla $(p_1(t), \dots, p_n(t))$. Para obtermos um complexo K a partir de K^2 cuja cohomologia $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$ basta colarmos uma quantidade m de 3-células com $m \leq n$, tal que $\tilde{\partial}_3(\tilde{e}_i^3) = p_{1i}(t)\tilde{e}_1^2 + \dots + p_{ni}(t)\tilde{e}_n^2$ satisfaça a condição que os subdeterminantes de ordem $m \times m$ da matriz $\varepsilon(A)^t = [\varepsilon(p_{ij}(t))]$, são primos entre si.

Exemplo 3.5. Considere $K^2 = T \vee \bigvee_{i=1}^n S^2$, o bouquet do toro com o bouquet de n -esferas S^2 . Seu recobrimento universal $\tilde{K}^2$ é o plano $\mathbb{R}^2$ onde em cada ponto

(x, y) de coordenadas inteiras é colado $\bigvee_{i=1}^n S^2$ (a figura 3.1 representa o recobrimento de $T \vee S^2$). Contraindo $\mathbb{R}^2$ a um ponto, tem-se $\pi_2(K^2) = H_2(\tilde{K}^2) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[x, y, x^{-1}, y^{-1}]$. Portanto todo elemento de $\pi_2(K^2)$ é representado por uma n -upla $(p_1(x, y), \dots, p_n(x, y))$ de polinômios de Laurent em duas variáveis. Como acima obter complexos K de K^2 com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, é colar uma quantidade m de 3-célula com $m \leq n$ por polinômios, tal que a matriz $\varepsilon(A)^t = [\varepsilon(p_{ij}(x, y))]$ tenha seus subdeterminantes de ordem $m \times m$ primos entre si.

Figura 3.1:

Observação 3.6. Observo que T pode ser substituído por qualquer superfície orientável compacta S_g de genus $g \geq 1$.

Para construir um complexo de dimensão r , temos que colar células via aplicações $\varphi : S^{r-1} \rightarrow K^{r-1}$ a um complexo de dimensão $r - 1$. Mas estas aplicações representam elementos de $\pi_{r-1}(K^{r-1})$. Portanto é necessário o cálculo deste grupo de homotopia. No caso em que $r = 3$, temos uma ferramenta para calcular $\pi_2(K^2)$ para qualquer 2-complexo conexo. Esta técnica é apresentada com detalhes em ([HMS] capítulo 2). Passaremos agora a descrevê-la.

Todo CW -complexo conexo de dimensão 1, K^1 , tem o mesmo tipo de homotopia de $\bigvee_{i=1}^n S_i^1$ (bouquet de n -círculos). Seu grupo fundamental é:

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^n S^1\right) = F(x_1, \dots, x_n) = \text{grupo livre com } n\text{-geradores.}$$

Os 2-complexos K^2 são obtidos de K^1 colando-se uma quantidade p de células de dimensão 2, por aplicações $S^1 \rightarrow \bigvee_{i=1}^n S^1$. Mas estas aplicações representam elementos de π_1 . Logo todo 2-complexo conexo pode ser apresentado na forma, $K^2 = \{x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_p\}$, onde r_i são as aplicações de colagem. Tem-se

$$\pi_1(K^2) = \frac{F(x_1, \dots, x_n)}{N(r_1, \dots, r_p)}$$

onde $N(r_1, \dots, r_p)$ é o menor subgrupo normal gerado por $r_1, \dots, r_p$.

Denote por

$$|-| : F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{F(x_1, \dots, x_n)}{N(r_1, \dots, r_p)},$$

a projeção.

Seja $\tilde{K}^2$ o recobrimento universal de K^2 , o operador bordo

$$\tilde{\partial}_2 : H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1) \rightarrow H_1(\tilde{K}^1, \tilde{K}^0)$$

é obtido da seguinte forma: Para cada x_i considere a Derivada de Fox

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : F(x) \rightarrow \mathbb{Z}F(x)$$

sendo a única função que satisfaz:

$$\frac{\partial w_1 w_2}{\partial x_i} = \frac{\partial w_1}{\partial x_i} + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_i}, \text{ para todo } w_1, w_2 \in F(x).$$

cujo valor em x_j é $\delta_{i,j}$ (delta de Kronecker).

$$\tilde{\partial}_2(\tilde{e}_{r_j}^2) = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right\| \tilde{e}_{x_i}^1, \text{ para } j = 1, \dots, p.$$

Aqui $\| - \| : \mathbb{Z}F(x) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_1$ é a extensão natural do homomorfismo quociente acima.

Note que $\pi_2(K^2) = H_2(\tilde{K}^2) = \text{Ker } \tilde{\partial}_2$.

Exemplo 3.7. Seja $K^2 = \{x, y | x^2, y, xyx^{-1}y^{-1}\}$. Tem-se que $\pi_1(K^2) = \mathbb{Z}_2 = \{1, x\}$. O homomorfismo $\tilde{\partial}_2 : H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1) \rightarrow H_1(\tilde{K}^1, \tilde{K}^0)$ é dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1+x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 \end{bmatrix}$$

Note que o vetor $[0, x-1, x]$ pertence ao núcleo de $\tilde{\partial}_2$ e representa um elemento de $\pi_2(K^2)$. Colando-se uma 3-célula via esta aplicação obteremos um complexo K cuja cohomologia 3 é zero.

Exemplo 3.8. Seja $K^2 = \{x, y | x^3, y^2, (xy)^2\}$ (esta é a apresentação do grupo diedral D_3 de grau 3). Seu grupo fundamental é o conjunto $\pi_1(K^2) = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$, com a seguinte tabela de multiplicação:

*	1	x	x ²	y	xy	x ² y
1	1	x	x ²	y	xy	x ² y
x	x	x ²	1	xy	x ² y	y
x ²	x ²	1	x	x ² y	y	xy
y	y	x ² y	xy	1	x ²	x
xy	xy	y	x ² y	x	1	x ²
x ² y	x ² y	xy	y	x ²	x	1

O homomorfismo $\tilde{\partial}_2 : H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}_1) \rightarrow H_1(\tilde{K}_1, \tilde{K}_0)$ é dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1+x+x^2 & 0 & 1+xy \\ 0 & 1+y & x+y \end{bmatrix}$$

e os vetores $[-1-y, -1-x-x^2, y+xy+x^2y]$ e $[-1-y, -1-x-x^2, 1+x+x^2]$ pertencem ao núcleo de $\tilde{\partial}_2$, logo representam elementos de $\pi_2(K^2)$. Se K é obtido de K^2 colando-se uma 3-célula através de uma destas duas aplicações obtém-se um complexo K com cohomologia 3 igual a zero.

Observo que, se K^2 é um 2-complexo tendo n células de dimensão 2, ao colarmos m células de dimensão 3 via elementos $\alpha_i = [\tilde{a}_{1i}, \dots, \tilde{a}_{ni}] \in \text{Ker } \tilde{\partial}_2$ para $i = 1, \dots, m$, o operador bordo $\tilde{\partial}_3 : H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1)$ será da forma

$$\tilde{\partial}_3(\tilde{e}_i^3) = \tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^2 + \dots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^2,$$

onde $\tilde{e}_i^3$ é a célula que corresponde a aplicação de colagem α_i . Para um $\mathbb{Z}[\Pi]$ -módulo à esquerda A , teremos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[\Pi]; A) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_3} & \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[\Pi]; A) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ \oplus_{i=1}^n A & \xrightarrow{\tilde{\delta}_3} & \oplus_{i=1}^m A \end{array}$$

sendo que, para $b = [b_1, \dots, b_n] \in \oplus_{i=1}^n A$, o vetor $\tilde{\delta}_3(b) \in \oplus_{i=1}^m A$ é dado pelo produto

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{1m} & \dots & \tilde{a}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

3.2 Variedades com π_1 Abeliano

Suponha que M é uma 3-variedade que tem uma estrutura de CW -complexo com apenas uma célula e_M de dimensão 3. Dados quaisquer dois pontos $x, y \in M$ existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h(x) = y$ e h é homotópica a aplicação identidade de M . Isto mostra que o número $MR[f, a]$ independe do ponto a . Como nosso objetivo é o cálculo deste número, podemos admitir que o ponto a é interior a e_M .

Seja M^2 o 2-esqueleto de M , então M^2 é um retrato por deformação forte de $M - a$. Isto significa que, mostrar $MR[f, a] = 0$ é equivalente a deformar f em M^2 . Como f é homotópica a uma aplicação $f_1 : K \rightarrow M$ celular; podemos supor que $f(K^2) \subset M^2$. Pelo teorema 1.32, f é deformável em M^2 se, e somente se, a classe de obstrução $\omega^3(f) \in H^3(K; f^*\Pi_3(M, M^2))$ é zero.

Seja $q : \tilde{M} \rightarrow M$ o revestimento universal de M . Considere o seguinte sistema de coeficientes locais sobre M . A cada $\alpha \in \pi_1(M)$ associa-se um homeomorfismo

$$h_\alpha : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$$

tal que $q \circ h_\alpha = q$, logo temos o isomorfismo induzido em homologia

$$(h_\alpha)_* : H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \rightarrow H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2),$$

e define-se $\alpha x = (h_\alpha)_*(x) \forall x \in H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2)$. Denotaremos este sistema por $\mathcal{R}$. Note que $H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) = \mathbb{Z}[\pi]$, onde $\pi = \pi_1(M)$, e a ação é dada pelo homomorfismo

$$\Omega : \pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[\pi])$$

pondo $\Omega(\theta)(\alpha) = \theta\alpha$. Agora a composta $\Omega \circ f_\#$, onde $f_\# : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M)$, é um sistema de coeficientes sobre K , que é o sistema $f^*\mathcal{R}$.

Lema 3.9. *Os sistemas de coeficientes locais $\mathcal{R}$ e $\Pi_3(M, M^2)$ sobre M , são isomorfos.*

Demonstração: Pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) & \xrightarrow{(h_\alpha)\pi_3} & \pi_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) & \xrightarrow{(h_\alpha)_*} & H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \end{array}$$

O homomorfismo de Hurewicz é um homomorfismo entre os sistemas $\mathcal{R}$ e $\Pi_3(M, M^2)$. Como $H_p(\tilde{M}, \tilde{M}^2) = 0$ para $p < 3$ e $\pi_1(\tilde{M}^2) = 0$, o homomorfismo de Hurewicz é isomorfismo. ■

Daí $\omega^3(f) = 0$ se, e somente se, $\rho_*(\omega^3(f)) \in H^3(K; f^*\mathcal{R})$ é zero.

Observação 3.10. Para simplificar a notação, escreveremos $H^3(K; \mathbb{Z}[\pi])$ para o grupo $H^3(K; f^*\Pi_3(M, M^2))$. Também usaremos o símbolo $f_\#$ para sua extensão $(f_\#)_\mathbb{Z} : \mathbb{Z}[\Pi] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi]$.

Teorema 3.11. Suponha que $\tilde{\delta}_3 : H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1)$ é da forma

$$\tilde{\delta}_3(\tilde{e}_i^3) = \tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^2 + \cdots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^2$$

para $i = 1, \dots, m$. O homomorfismo $\psi \in \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[\Pi]; \mathbb{Z}[\pi])$, onde $\psi(\tilde{e}_i^3) = k_i$, para $i = 1, \dots, m$, pertence a imagem de

$$\tilde{\delta}_3 : \text{Hom}^\Pi(C_2(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi]) \rightarrow \text{Hom}^\Pi(C_3(\tilde{K}); \mathbb{Z}[\pi])$$

se, e somente se, o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[\pi]$, onde

$$P = \begin{bmatrix} f_\#(\tilde{a}_{11}) & \cdots & f_\#(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_\#(\tilde{a}_{1m}) & \cdots & f_\#(\tilde{a}_{nm}) \end{bmatrix}$$

e $k = [k_1, \dots, k_m]^t$.

Demonstração: $\psi \in \text{Im} \tilde{\delta}_3$ se, e somente se, existe $\phi \in \text{Hom}^\Pi(\oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[\Pi]; \mathbb{Z}[\pi])$ tal que $\tilde{\delta}_3(\phi) = \phi \circ \tilde{\delta}_3 = \psi$. Note que $\phi(\tilde{e}_j^2) = x_j$, para $j = 1, \dots, n$. Logo

$\phi(\tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^2 + \cdots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^2) = \tilde{a}_{1i}\phi(\tilde{e}_1^2) + \cdots + \tilde{a}_{ni}\phi(\tilde{e}_n^2)$, pela ação descrita cima, esta soma é; $f_{\#}(\tilde{a}_{1i})x_1 + \cdots + f_{\#}(\tilde{a}_{ni})x_n$ para $i = 1, \dots, m$. Ou seja;

$$\begin{bmatrix} f_{\#}(\tilde{a}_{11}) & \cdots & f_{\#}(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{\#}(\tilde{a}_{1m}) & \cdots & f_{\#}(\tilde{a}_{nm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}.$$

■

Lema 3.12. *A classe de obstrução $\rho_*(\omega^3(f))$ é representada pela cocadeia*

$$\tilde{f}_* : H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2).$$

Demonstração: Relembrando, $\omega^3(f)$ era representado pela cocadeia $c^3(f)$ definida por

$$c^3(f) = (\tilde{f}_{\pi_3}) \circ \rho^{-1} : H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow \pi_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow \pi_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2).$$

Pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) & \xrightarrow{\tilde{f}_{\pi_3}} & \pi_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \end{array}$$

a cocadeia que representa a classe $\rho_*(\omega^3(f))$ é $\rho_{\#}(c^3(f)) = c^3(f) \circ \rho = \tilde{f}_*$. ■

Corolário 3.13. *A classe de obstrução $\rho_*(\omega^3(f)) = 0$ se, e somente se, o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[\pi]$, onde $k = [\tilde{f}_*(\tilde{e}_1^3), \dots, \tilde{f}_*(\tilde{e}_m^3)]^t$, e P é a matriz do teorema 3.11.*

Demonstração: Dizer que $\rho_*(\omega^3(f)) = 0$, significa que a cocadeia que a representa está na imagem de $\tilde{\delta}_3$. Agora aplique o lema 3.12 e teorema 3.11. ■

Teorema 3.14. A cocadeia obstrução $\tilde{f}_* : H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) \rightarrow H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2)$, tem a propriedade que o sistema $Px = \tilde{f}_*(\tilde{e}_i^3)\tilde{\partial}_M(\tilde{e}_M)$ para $i = 1, \dots, m$, tem solução sobre o $\mathbb{Z}[\pi]$ -módulo $H_2(\tilde{M}^2, \tilde{M}^1)$, onde

$$\tilde{\partial}_M : H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) \rightarrow H_2(\tilde{M}^2, \tilde{M}^1).$$

Demonstração: Como $f : K \rightarrow M$ é uma aplicação celular o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_3(\tilde{K}^3, \tilde{K}^2) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_3} & H_2(\tilde{K}^2, \tilde{K}^1) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_*^2 \\ H_3(\tilde{M}, \tilde{M}^2) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_M} & H_2(\tilde{M}^2, \tilde{M}^1) \end{array}$$

é comutativo. Daí

$$\begin{aligned} \tilde{f}_*(\tilde{e}_i^3)\tilde{\partial}_M(\tilde{e}_M) &= \tilde{\partial}_M(f_*(\tilde{e}_i^3)\tilde{e}_M) = (\tilde{\partial}_M \circ \tilde{f}_*)(\tilde{e}_i^3) \\ &= (\tilde{f}_*^2 \circ \tilde{\partial}_3)(\tilde{e}_i^3) \\ &= \tilde{f}_*^2(\tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^2 + \dots + \tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^2) \\ &= \tilde{f}_*^2(\tilde{a}_{1i}\tilde{e}_1^2) + \dots + \tilde{f}_*^2(\tilde{a}_{ni}\tilde{e}_n^2) \\ &= f_{\#}(\tilde{a}_{1i})\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_1^2) + \dots + f_{\#}(\tilde{a}_{ni})\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_n^2), \end{aligned}$$

isto é;

$$\begin{bmatrix} f_{\#}(\tilde{a}_{11}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{\#}(\tilde{a}_{1m}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{nm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_*^2(\tilde{e}_1^2) \\ \vdots \\ \tilde{f}_*^2(\tilde{e}_n^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_*(\tilde{e}_1^3)\tilde{\partial}_M(\tilde{e}_M) \\ \vdots \\ \tilde{f}_*(\tilde{e}_m^3)\tilde{\partial}_M(\tilde{e}_M) \end{bmatrix}.$$

■

Teorema 3.15. Seja K um 3-complexo e $f : K \rightarrow S^1 \times S^2$ uma aplicação. Então $MR[f, a] = 0$ se uma das condições abaixo for satisfeita:

1. $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$,

2. $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito e $H^3(K; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ é livre de torção,

3. K é quadrado, e $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito.

Demonstração: Uma decomposição de $S^1 \times S^2$ como CW -complexo é obtido da seguinte forma:

1. Seu 1-esqueleto é S^1 .
2. Seu 2-esqueleto é $M^2 = S^1 \vee S^2$.
3. $S^1 \times S^2$ é obtido de M^2 colando-se uma 3-célula via a aplicação

$$t - 1 \in \pi_2(M^2) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}].$$

Geometricamente a aplicação $t - 1$ restrita a tampa superior identifica o bordo do disco ao ponto x_0 , sobre a lateral percorre o círculo, e na tampa inferior também identifica o bordo do disco ao ponto x_0 (ver figura 3.2).

Figura 3.2:

O operador bordo $\tilde{\partial}_{S^1 \times S^2} : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ é dado por $\tilde{\partial}_{S^1 \times S^2}(b) = (t - 1)b$.

Temos que mostrar que o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, onde $k_i = \tilde{f}_*(\tilde{e}_i^3)$ para $i = 1, \dots, m$. Pelo teorema 3.14, sabemos que $Px = (t - 1)k$ tem o vetor $e = [\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_1^2), \dots, \tilde{f}_*^2(\tilde{e}_n^2)]^t$ como solução. Sejam $d_1, \dots, d_r$ todos os subdeterminantes de ordem $m \times m$ da matriz P . O fato de $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, significa que os

inteiros $\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)$ são primos entre si. Segue do lema 1.12 que $Px = k$ tem solução.

O fato de $H^3(K; \mathbb{Z})$ ser finito, significa que $\varepsilon(d_i) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, r$. O sistema $Px = d_i k$ tem um vetor y como solução. Seja $q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tal que $d_i - q(t-1) = \varepsilon(d_i)$. Daí $P(y - qe) = Py - Pqe = d_i k - qk(t-1) = (d_i - q(t-1))k = \varepsilon(d_i)k$. Isto significa que a classe de obstrução $\rho_*(\omega^3(f))$ é um elemento de torção de $H^3(K; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$, sendo este grupo, livre de torção, esta classe é zero.

Se K é quadrado, a matriz P é quadrada. Se $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito, então $\varepsilon(\det(P)) \neq 0$, e isto obriga o vetor solução e do sistema $Px = k(t-1)$, ter a propriedade que $\varepsilon(\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_i^2)) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Mas isto significa que $e = (t-1)a$, onde $a = [a_1, \dots, a_n]^t$ é um vetor com entradas em $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Daí $Pa = k$. ■

Vamos agora considerar a variedade

$$M_A = \frac{S^2 \times [0, 1]}{(x, 0) \sim (-x, 1)}$$

Para obter uma decomposição de M_A como CW -complexo, basta colar uma 3-célula em $S^1 \vee S^2$ via a aplicação $t+1$. O operador bordo $\tilde{\partial}_{M_A} : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ é dado por $\tilde{\partial}_{M_A}(b) = (t+1)b$.

O fato de $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, não é suficiente para garantir que se tenha $MR[f, a] = 0$ para toda $f : K \rightarrow M_A$.

Teorema 3.16. *Existe um complexo K de dimensão 3, e uma aplicação $f : K \rightarrow M_A$, com $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, porém $MR[f, a] \neq 0$.*

Demonstração: Seja $K^2 = S^1 \vee \bigvee_{i=1}^2 S^2$, e K o complexo obtido de K^2 pela colagem da aplicação $(2t^2 + 2t, 2t^2 + 1)$. Pelo exemplo 3.4, tem-se $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$.

Vamos primeiro definir $f : S^1 \vee \bigvee_{i=1}^2 S^2 \rightarrow S^1 \vee S^2$ (ver figura 3.3) sobre o 2-esqueleto de K no 2-esqueleto de M_A , sendo:

1. $f|_{S^1}$ é a aplicação identidade sobre S^1 .

2. $f(e_1^2) = 3t + 2$, e $f(e_2^2) = t + 1$.

Como $(2t^2 + 2t).(3t + 2) + (2t^2 + 1).(t + 1) = k.(t + 1)$ esta função se estende a K . Note que $\tilde{f}_*(\tilde{e}^3) = k(t) = 8t^2 + 4t + 1$, logo $k(-1) = 5$. Isto mostra que k não é da forma $(2t^2 + 2t).a + (2t^2 + 1).b$, pois todo elemento desta forma, ao substituir $t = -1$ resulta um inteiro múltiplo de 3. ■

Figura 3.3:

Seja $f_{\#} : \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(M_A) = \mathbb{Z}$, e $\tilde{\mathbb{Z}}$ o sistema de coeficientes locais sobre K , dado pela seguinte ação de $\pi_1(K)$ em $\mathbb{Z}$. Para $\alpha \in \pi_1(K)$, defina

$$\alpha \cdot 1 = \begin{cases} 1 & \text{se } f_{\#}(\alpha) = t^k, \text{ com } k \text{ par,} \\ -1 & \text{se } f_{\#}(\alpha) = t^k, \text{ com } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Teorema 3.17. *Seja K um 3-complexo, e $f : K \rightarrow M_A$ uma aplicação. Então $MR[f, a] = 0$, se uma das condições abaixo for satisfeita:*

1. $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$,
2. $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ finito, e $H^3(K; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ livre de torção,
3. K é quadrado, e $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ é finito.

Demonstração: Como antes temos que mostrar que o sistema $Px = k$ tem solução, onde $k = [\tilde{f}_*(\tilde{e}_1^3), \dots, \tilde{f}_*(\tilde{e}_m^3)]^t$. Do teorema 3.14, sabemos que o sistema $Px = k(t+1)$ tem o vetor $e = [\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_1^2), \dots, \tilde{f}_*^2(\tilde{e}_m^2)]^t$ como solução. Da demonstração do lema 1.24, o fato de $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$, implica que os subdeterminantes de ordem $m \times m$ de P tem a propriedade que $d_1(-1), \dots, d_r(-1)$ são inteiros primos entre si, logo existem inteiros $p_1, \dots, p_r$ e $q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tal que $p_1 d_1 + \dots + p_r d_r - q(t+1) = 1$. Como o sistema $Px = d_i k$ tem solução para $i = 1, \dots, r$ e nenhum ideal maximal $\mathfrak{m}$ pode conter o conjunto $\{d_1, \dots, d_r, t+1\}$, pelo teorema 1.7 o sistema $Px = k$, tem solução.

Quando $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ é finito, temos que $d_i(-1) \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, r$. Seja $q \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ tal que $d_i - q(t+1) = d_i(-1)$, e y o vetor solução da equação $Px = d_i k$. Logo $P(y - qe) = Py - Pqe = d_i k - q(t+1)k = (d_i - q(t+1))k = d_i(-1)k$, isto significa que a classe de obstrução $\rho_*(\omega^3(f))$ é um elemento de torção. Se $H^3(K; \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ é livre de torção, então $\rho_*(\omega^3(f)) = 0$.

P é uma matriz quadrada e $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ ser finito implica que $\det(P)(-1) \neq 0$,

mas isto obriga a $\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_1^2)(-1) = 0, \dots, \tilde{f}_*^2(\tilde{e}_n^2)(-1) = 0$, ou seja, $e = a(t+1)$ e $Pa = k$. ■

Observação 3.18. Em virtude do lema 1.24, a hipótese de $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ ser finito nos itens 2 e 3, podem ser substituídas por $H^3(K; \mathbb{Z})$ ser finito de cardinalidade ímpar.

Definição 3.19. Sejam n e p números inteiros positivos relativamente primos. Construimos o espaço de lens $L(n, p)$ como o espaço quociente da bola B^3 como segue: Escreva os pontos de B^3 na forma (z, t) , onde z é complexo, t é real, e $|z|^2 + t^2 \leq 1$. Seja $\lambda = \exp(2\pi i/n)$. Defina $f : S^2 \rightarrow S^2$ pela equação

$$f(x) = (\lambda^p z, -t).$$

Identifique cada ponto $x = (z, t)$ do hemisfério inferior E_-^2 de $S^2 = \partial B^3$ com o ponto $f(x)$ do hemisfério superior E_+^2 . O espaço quociente resultante é chamado Espaço de Lens $L(n, p)$.

Em ([MJ], capítulo 4), é demonstrado que $M = L(n, p)$ tem uma decomposição celular com uma célula em cada dimensão 0, 1, 2, 3, e seu 2-esqueleto é $M^2 = \{x|x^n\}$. Como o recobrimento universal de $L(n, p)$ é S^3 , a sequência

$$0 \longrightarrow H_3(\tilde{M}^3, \tilde{M}^2) \xrightarrow{\tilde{\partial}_3} H_2(\tilde{M}^2, \tilde{M}^1) \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} H_1(\tilde{M}^1, \tilde{M}^0) \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} H_0(\tilde{M}^0) \longrightarrow 0,$$

dá a homologia da esfera, logo $\text{Im} \tilde{\partial}_3 = \text{Ker} \tilde{\partial}_2$. Mas o operador $\tilde{\partial}_2 : \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ é dado pela Derivada de Fox, isto é; $\tilde{\partial}_2(\tilde{e}^2) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$, que tem como Ker o ideal gerado por $x - 1$, daí $\tilde{\partial}_3(\tilde{e}^3) = x - 1$.

Teorema 3.20. Se K é um 3-complexo, e $f : K \rightarrow L(n, p)$ uma aplicação, então tem-se $MR[f, a] = 0$, quando uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$

2. $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito, e $H^3(K; \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ é livre de torção.

Demonstração: A demonstração segue a mesma linha dos anteriores. O sistema $Px = k(x-1)$ tem solução e queremos saber se $Px = k$ tem solução. Porém dizer que $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, significa dizer que os inteiros $\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)$ são primos entre si, ou seja, o conjunto $\{d_1, \dots, d_r, x-1\}$ não podem estar todos em um mesmo ideal maximal $\mathfrak{m}$, pelo teorema 1.7 o sistema $Px = k$ tem solução.

Na segunda parte mostra-se que o classe de obstrução é elemento de torção, como este é elemento de $H^3(K; \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n])$ tem que ser zero. ■

Observação 3.21. Neste caso se, $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito e K é quadrado, não é possível dizer que o sistema tem solução. Como antes teremos $e = a(x-1)$, porém isto implica que o sistema $Px = k + [p_1, \dots, p_n]^t(1+x+\dots+x^{n-1})$ tem solução para algum vetor $[p_1, \dots, p_n]^t$ com entradas inteiras.

Corolário 3.22. Toda aplicação $f : M_A \rightarrow \mathbb{P}^3$ com $f_\# : \pi_1(M_A) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^3)$ sobrejetor, é livre de raízes.

Demonstração: Sabemos que M_A é a colagem pela aplicação $t+1$ ao bouquet $S^1 \vee S^2$, e que $H^3(M_A; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$. Como $f_\#$ é sobrejetor, $f_\#(t) = x$. Logo teremos

$$H^3(M_A; \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]) = \frac{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2]}{(x+1)} = \mathbb{Z}.$$

Pelo teorema 3.20, tem-se $MR[f, a] = 0$. ■

Vamos agora considerar a variedade $S^1 \times \mathbb{P}^2$. Sua decomposição como CW -complexo é obtido da seguinte forma:

1. Seu 1-esqueleto é $K^1 = \vee_{i=1}^2 S_i^1$ o bouquet de dois círculos.
2. O 2-esqueleto é $K^2 = \{x, y | xyx^{-1}y^{-1}, x^2\}$. Note que K^2 é a união de um toro T e um espaço projetivo $\mathbb{P}^2$, e seu recobrimento universal $\tilde{K}^2$ é o cilindro

infinito $\mathbb{R} \times S^1$, onde em cada $n \times S^1$ (n um inteiro) é colado um esfera S^2 . A aplicação de recobrimento $p: \tilde{K}^2 \rightarrow K^2$, é a aplicação identificação $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ sobre cada S^2 , e a aplicação $g(z, t) = (z^2, t)$ sobre $\mathbb{R} \times S^1$ (ver figura 3.4).

Figura 3.4:

3. $S^1 \times \mathbb{P}^2$ é obtido de K^2 , colando-se uma 3-célula pela aplicação

$$p|D^2 \times [0, 1] : D^2 \times [0, 1] \rightarrow K_2.$$

O operador bordo $\tilde{\partial}_{S^1 \times \mathbb{P}^2} : \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2]$ é dado por

$$\tilde{\partial}_{S^1 \times \mathbb{P}^2}(b) = b(x + 1, y - 1).$$

Para uma aplicação $f : K \rightarrow S^1 \times \mathbb{P}^2$, considere o sistema $\tilde{\mathbb{Z}}$, dado pela ação de $\pi_1(K)$ em $\mathbb{Z}$ da seguinte forma:

$$\alpha 1 = \begin{cases} -1 & \text{se } f_{\#}(\alpha) = xy^k, \\ 1 & \text{se } f_{\#}(\alpha) = y^k. \end{cases}$$

Teorema 3.23. *Seja K um 3-complexo, e $f : K \rightarrow S^1 \times \mathbb{P}^2$ uma aplicação, então $MR[f, a] = 0$, se uma das condições valer:*

1. $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$.
2. $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$ é finito, e $H^3(K; \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2])$ é livre de torção.

Demonstração: Como $S^1 \times \mathbb{P}^2$ tem duas células em dimensão 2, $\tilde{f}_{\#}(\tilde{e}_i^2) = (c_i, d_i)$ para $i = 1, \dots, n$, e $c_i, d_i \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2]$. Pelo teorema 3.14 os sistemas $Px = k(x+1)$ e $Px = k(y-1)$ tem como soluções os vetores $c = [c_1, \dots, c_n]^t$ e $d = [d_1, \dots, d_n]^t$ respectivamente. Da demonstração do lema 1.24, o fato de $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}}) = 0$, significa que os subdeterminantes $d_1, \dots, d_r$ de tamanho $m \times m$ de P , tem a propriedade que os inteiros $d_1(-1, 1), \dots, d_r(-1, 1)$ são primos entre si, daí, existem inteiros $p_1, \dots, p_r$ e elementos $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2]$ tais que

$$p_1 d_1 + \dots + p_r d_r - q_1(x+1) - q_2(y-1) = 1,$$

isto significa que nenhum ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2]$ pode conter o conjunto $\{d_1, \dots, d_r, x+1, y-1\}$. Do teorema 1.7, o sistema $Px = k$ tem solução.

Como $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ é finito, algum subdeterminante d_i tem a propriedade que $d_i(-1, 1) \neq 0$. Análogo as demonstrações anteriores, mostra-se que $Px = kd_i(-1, 1)$ tem solução. ■

Observação 3.24. Pelo lema 1.24, a hipótese de $H^3(K; \tilde{\mathbb{Z}})$ ser finito no item 2 do teorema acima, pode ser substituída por $H^3(K; \mathbb{Z})$ finito de cardinalidade ímpar.

Passaremos agora a considerar o toro triplo $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$. O toro triplo é obtido quando faces opostas de um cubo unitário são identificadas pela translação (ver figura 3.5). Uma decomposição como CW -complexo de T^3 é obtido da seguinte forma:

1. Seu 1-esqueleto $K^1 = \vee_i^3 S_i^1$, o bouquet de três círculos.
2. Seu 2-esqueleto é $K^2 = \{x, y, z | xyx^{-1}y^{-1}, xzx^{-1}x^{-1}, yzy^{-1}z^{-1}\}$, isto é; cola-se três 2-células, via as aplicações $xyx^{-1}y^{-1}$, $xzx^{-1}x^{-1}$, $yzy^{-1}z^{-1}$. Note que K^2 é a união de três toros $T_{[x,y]}$, $T_{[z,x]}$, e $T_{[y,z]}$, seu recobrimento universal é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ formado pela união

$$\tilde{K}^2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

e a aplicação recobrimento $p : \tilde{K}^2 \rightarrow K^2$, é a aplicação recobrimento dos respectivos toros, quando restrito a cada plano que compõem a união.

3. Para obter T^3 basta colar uma 3-célula em K^2 pela aplicação que é a restrição de p a algum cubo de $\tilde{K}^2$.

O operador bordo $\tilde{\partial}_{T^3} : \mathbb{Z}[x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}] \rightarrow \oplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}[x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]$ é dado por $\tilde{\partial}_{T^3}(b) = b \cdot (x - 1, y - 1, z - 1)$. Como os elementos $x - 1$, $y - 1$, $z - 1$ são todos irredutíveis em $\mathbb{Z}[x, y, z]$ os ideais gerados por eles, são ideais primos, e considerados como ideais de $\mathbb{Z}[x, y, z, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}]$ também são primos.

Teorema 3.25. *Se K é um 3-complexo e $f : K \rightarrow T^3$ uma aplicação, então tem-se $MR[f, a] = 0$, se vale uma das seguintes condições:*

1. $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$,

Figura 3.5:

2. $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito, e $H^3(K; \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}])$ é livre de torção,
3. $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito, e K é quadrado.

Demonstração: Como T^3 tem 3 células de dimensão 2, $\tilde{f}_*^2(\tilde{e}_i^2) = (b_i, c_i, d_i)$ para $i = 1, \dots, n$ e $b_i, c_i, d_i \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}]$. Do teorema 3.14, os sistemas $Px = k(x-1)$, $Px = k(y-1)$, $Px = k(z-1)$ tem soluções $b = [b_1, \dots, b_n]^t$, $c = [c_1, \dots, c_n]^t$, $d = [d_1, \dots, d_n]^t$ respectivamente. Como antes a hipótese de $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, implica que os subdeterminantes $d_1, \dots, d_r$ tem aumentos primos entre si, aplicando lema 1.12, o sistema $Px = k$ tem solução.

A demonstração do item 2, segue a mesma linha das anteriores.

Demonstração um pouco diferente das outras, tem o item 3. Como P é uma matriz quadrada, podemos aplicar a Regra de Cramer para o sistema $Pb = k(x-1)$. Portanto

$$\det(P)b_i = \det \begin{bmatrix} f_{\#}(\tilde{a}_{11}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{1,i-1}) & k_1(x-1) & f_{\#}(\tilde{a}_{1,i+1}) & f_{\#}(\tilde{a}_{n1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{\#}(\tilde{a}_{1n}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{n,i-1}) & k_n(x-1) & f_{\#}(\tilde{a}_{n,i+1}) & f_{\#}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix}$$

pela propriedade 2, do determinante

$$\det(P)b_i = (x-1) \det \begin{bmatrix} f_{\#}(\tilde{a}_{11}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{1,i-1}) & k_1 & f_{\#}(\tilde{a}_{1,i+1}) & f_{\#}(\tilde{a}_{n1}) \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{\#}(\tilde{a}_{1n}) & \dots & f_{\#}(\tilde{a}_{n,i-1}) & k_n & f_{\#}(\tilde{a}_{n,i+1}) & f_{\#}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix}$$

isto significa que o produto $\det(P)b_i$, pertence ao ideal gerado por $x-1$. O fato de $H^3(K; \mathbb{Z})$ ser finito, implica que o aumento de $\det(P)$ não é zero. Como todo elemento de $(x-1)$ tem aumento zero, $\det(P) \notin (x-1)$, daí $b_i \in (x-1)$, pois $(x-1)$ é primo. Segue que, $b = [q_1, \dots, q_n]^t(x-1)$ onde $q_i \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}]$, daí $Pq = k$, para $q = [q_1, \dots, q_n]^t$. ■

3.3 Quatérnios Generalizados

Considere o grupo $Q_{4t} = \{x, y | x^t = y^2, xyx = y\}$, onde t é um número inteiro não-negativo. Iterando a segunda relação, tem-se $x^t y x^t = y$, que implica $x^{2t} = 1$. Qualquer elemento $w \in Q_{4t}$ tem uma única forma canônica $w = x^m y^\delta$, com $0 \leq m < 2t$, e $\delta = 0, 1$. O grupo Q_{4t} tem ordem $4t$. O grupo Q_{4t} pode ser olhado como um subgrupo do grupo dos elemento de norma 1 de

$$H(\mathbb{R}) = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

por colocar $x \rightarrow e^{\pi i/t}$, e $y \rightarrow j$. O anel $H(\mathbb{R})$ tem a seguinte tabela de multiplicação

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Quando t é potência de 2, Q_{4t} chama-se grupo dos quatérnios generalizados. Vejamos como é a tabela de multiplicação, para $t = 2$.

*	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
1	1	x	x^2	x^3	y	xy	x^2y	x^3y
x	x	x^2	x^3	1	xy	x^2y	x^3y	y
x^2	x^2	x^3	1	x	x^2y	x^3y	y	xy
x^3	x^3	1	x	x^2	x^3y	y	xy	x^2y
y	y	x^3y	x^2y	xy	x^2	x	1	x^3
xy	xy	y	x^3y	x^2y	x^3	x^2	x	1
x^2y	x^2y	xy	y	x^3y	1	x^3	x^2	x
x^3y	x^3y	x^2y	xy	y	x	1	x^3	x^2

O grupo Q_{4t} age sobre S^3 (ação de grupo em conjunto) sem pontos fixos, e o espaço órbita S^3/Q_{4t} , é um variedade orientável compacta de dimensão 3, que denotaremos por $M_{Q_{4t}}$. A estrutura de CW -complexo de $M_{Q_{4t}}$ tem um célula de dimensão 3 e duas células de dimensão 2, e o operador bordo

$$\tilde{\partial}_{M_{Q_{4t}}} : \mathbb{Z}[Q_{4t}] \rightarrow \mathbb{Z}[Q_{4t}] \oplus \mathbb{Z}[Q_{4t}]$$

é dado por $\tilde{\partial}_{M_{Q_{4t}}}(\tilde{e}^3) = (x - 1, -xy + 1)$ (ver [CE] pág. 253 e [SR]).

Como na seção anterior nosso objetivo é saber se é possível existir uma aplicação $f : K \rightarrow M_{Q_{4t}}$ tal que $MR[f, a] \neq 0$, supondo que $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$. Pelo corolário 3.13 e teorema 3.14, temos que resolver um sistema $Px = k$, sobre $\mathbb{Z}[Q_{4t}]$, onde $P = [p_{ij}]$ é uma matriz $m \times n$ e $k = [k_1, \dots, k_m]^t$, sabendo que os sistemas $Px = k(x - 1)$, e $Px = k(-xy + 1)$ tem solução.

Note que $\mathbb{Z}[Q_{4t}]$ não é abeliano, por isto todos os resultados para resolver sistemas descritos no capítulo 1, seção 1, não podem ser aplicados, com exceção do lema 1.13. Resolveremos apenas o caso $t = 2$. Com este objetivo vamos entender um pouco melhor a estrutura de $\mathbb{Z}[Q_8]$.

Seja $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus H(\mathbb{Q})$ o anel com produto coordenada a coordenada. Considere o isomorfismo de anéis $T : \mathbb{Q}[Q_8] \rightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \oplus H(\mathbb{Q})$ que leva:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow (1, 1, 1, 1, 1) \\ x &\rightarrow (1, 1, -1, -1, i) \\ x^2 &\rightarrow (1, 1, 1, 1, -1) \\ x^3 &\rightarrow (1, 1, -1, -1, -i) \\ y &\rightarrow (1, -1, 1, -1, j) \\ xy &\rightarrow (1, -1, -1, 1, k) \\ x^2y &\rightarrow (1, -1, 1, -1, -j) \\ x^3y &\rightarrow (1, -1, -1, 1, -k) \end{aligned}$$

A restrição $\bar{T} : \mathbb{Z}[Q_8] \rightarrow R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus H(\mathbb{Z})$ nos fornece uma inclusão. Nossa tática será primeiro achar uma solução do sistema $Px = k$ dentro de R , dado que R é mais fácil de manipular. Se $\alpha \in \mathbb{Z}[Q_8]$, denote por $\bar{\alpha} = \bar{T}(\alpha)$.

Note que, se $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + \alpha_4y + \alpha_5xy + \alpha_6x^2y + \alpha_7x^3y \in \mathbb{Z}[Q_8]$, então $\bar{\alpha} = \bar{T}(\alpha) = (\varepsilon(\alpha), \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4)$, onde

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 \\ \alpha^2 &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7 \\ \alpha^3 &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \alpha_7 \\ \alpha^4 &= (\alpha_0 - \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_3)i + (\alpha_4 - \alpha_6)j + (\alpha_5 - \alpha_7)k \end{aligned}$$

Lema 3.26. *Se o sistema $\bar{P}x = \bar{k}$ tem solução sobre R , onde $\bar{P} = [\bar{p}_{ij}]$, e $\bar{k} = [\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_m]$, então o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$.*

Demonstração: Note que T leva:

$$\begin{aligned}
 \frac{1+x+x^2+x^3+y+xy+x^2y+x^3y}{8} &\rightarrow (1, 0, 0, 0, 0) \\
 \frac{1+x+x^2+x^3-y-xy-x^2y-x^3y}{8} &\rightarrow (0, 1, 0, 0, 0) \\
 \frac{1-x+x^2-x^3+y-xy+x^2y-x^3y}{8} &\rightarrow (0, 0, 1, 0, 0) \\
 \frac{1-x+x^2-x^3-y+xy-x^2y+x^3y}{8} &\rightarrow (0, 0, 0, 1, 0) \\
 \frac{1-x^2}{2} &\rightarrow (0, 0, 0, 0, 1) \\
 \frac{x-x^3}{2} &\rightarrow (0, 0, 0, 0, i) \\
 \frac{y-x^2y}{2} &\rightarrow (0, 0, 0, 0, j) \\
 \frac{xy-x^3y}{2} &\rightarrow (0, 0, 0, 0, k)
 \end{aligned}$$

Isto mostra que todo elemento de R multiplicado por $(8, 8, 8, 8, 8) = \bar{T}(8)$ cai na imagem de $\bar{T}$. Observe que $\bar{T}(8)$ pertence ao centro de R , isto é; comuta com todos os elementos de R . Se $\bar{P}x = \bar{k}$, então $\bar{T}(8)\bar{P}x = \bar{P}\bar{T}(8)x = \bar{T}(8)\bar{k}$, ou seja; $P8x = 8k$ sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$. ■

Considere as funções $m : H(\mathbb{Z}) \rightarrow M_{4 \times 4}(\mathbb{Z})$ dada por

$$m(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

e $v : H(\mathbb{Z}) \rightarrow M_{1 \times 4}(\mathbb{Z})$ dada por $v(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = [a_0, a_1, a_2, a_3]$.

Note que se $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, então

$$\det(m(a)) = ((a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2)^2.$$

Se a soma $s(a) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ é ímpar, então o conjunto

$$\{(a_0)^2, (a_1)^2, (a_2)^2, (a_3)^2\}$$

tem uma quantidade ímpar de números ímpares, logo $\det(m(a))$ é ímpar, ou seja; $s(a) \equiv \det(m(a)) \pmod{2}$.

Seja $E_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_2)$ o conjunto das matrizes 4×4 sobre $\mathbb{Z}_2$ da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Este conjunto $E_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_2)$ é um anel comutativo com unidade, com as operações usuais de soma e multiplicação de matrizes. Como o determinante das matrizes deste anel é a soma dos elementos da primeira linha, isto é; $a + b + c + d$, temos

$$\det(E_1 + E_2) = \det(E_1) + \det(E_2)$$

para $E_1, E_2 \in E_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_2)$.

Lema 3.27. Se $A = [A_{ij}]$ é uma matriz $n \times n$ sobre o anel $E_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_2)$, isto é; uma matriz de blocos de tamanho 4×4 , considerando-a como uma matriz sobre $\mathbb{Z}_2$, seu determinante será

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \det(A_{1\sigma(1)}) \dots \det(A_{n\sigma(n)})$$

Demonstração: Como os blocos desta matriz são comutativos, o teorema 1.2 pode ser aplicado, logo $\det(A) = \det[\sum_{\sigma} A_{1\sigma(1)} \dots A_{n\sigma(n)}]$ como nossas matrizes A_{ij} tem a propriedade que determinante da soma é a soma dos determinantes, o resultado segue. ■

Lema 3.28. Considere o sistema $Ax = k$ sobre $H(\mathbb{Z})$, sendo $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ com $m \leq n$. Se o sistema $Ax = k(i-1)$ tem solução sobre $H(\mathbb{Z})$ e a matriz $s(A) = [s(a_{ij})]$ tem pelo menos um subdeterminante de ordem $m \times m$ ímpar, então o sistema $Ax = k$ tem solução em $H(\mathbb{Z})$.

Demonstração: Resolver o sistema $Ax = k$ sobre $H(\mathbb{Z})$ é equivalente a resolver o sistema $m(A)x = v(k)$ sobre $\mathbb{Z}$, onde $m(A)$ é a matriz de blocos $m(a_{ij})$, e

$v(k) = [v(k_1), \dots, v(k_m)]^t$. Multiplicando a equação $Ax = k(i-1)$ por $-i-1$ pela direita, obtemos $Ax(-i-1) = k2$. Portanto o sistema $m(A)x = v(k)2$ tem solução sobre $\mathbb{Z}$. Se acharmos uma submatriz de $m(A)$ de ordem $4m \times 4m$ com determinante ímpar, aplicando teorema 1.7 o sistema $m(A)x = v(k)$ terá solução em $\mathbb{Z}$, e conseqüentemente $Ax = k$ tem solução sobre $H(\mathbb{Z})$. Por hipótese existe uma $m \times m$ submatriz $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ de A com $\det(s(\tilde{A}))$ ímpar. Seja $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ a projeção. Note que $\phi(m(a_{ij})) \in E_{4 \times 4}(\mathbb{Z}_2)$, pelo lema 3.27

$$\det(\phi(m(\tilde{A}))) = \sum_{\sigma} \det(\phi(m(\tilde{a}_{1\sigma(1)}))) \dots \det(\phi(m(\tilde{a}_{m\sigma(m)})))$$

Como $s(a_{ij}) \equiv \det(m(a_{ij})) \pmod{2}$, tem-se

$$\phi(\det m(\tilde{A})) = \sum_{\sigma} \phi(s(\tilde{a}_{1\sigma(1)}) \dots s(\tilde{a}_{m\sigma(m)}))$$

Daí $\det(m(\tilde{A})) \equiv \det(s(\tilde{A})) \pmod{2}$, isto é; $\det(m(\tilde{A}))$ é ímpar. ■

Considere as funções $M : \mathbb{Z}[Q_8] \rightarrow M_{8 \times 8}(\mathbb{Z})$ dada por

$$\begin{aligned} M(b) &= M(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4y + b_5xy + b_6x^2y + b_7x^3y) \\ &= \begin{bmatrix} b_0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_6 & b_7 & b_4 & b_5 \\ b_1 & b_0 & b_3 & b_2 & b_7 & b_4 & b_5 & b_6 \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & b_5 & b_6 & b_7 & b_4 \\ b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_4 & b_1 & b_0 & b_3 & b_2 \\ b_6 & b_7 & b_4 & b_5 & b_2 & b_1 & b_0 & b_3 \\ b_7 & b_4 & b_5 & b_6 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e $V : \mathbb{Z}[Q_8] \rightarrow M_{1 \times 8}(\mathbb{Z})$ dada por

$$V(b) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4y + b_5xy + b_6x^2y + b_7x^3y) = [b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7].$$

Lema 3.29. *Seja $b \in \mathbb{Z}[Q_8]$, se $\varepsilon(b)$ é ímpar, então $\det(M(b))$ é ímpar.*

Demonstração: A matriz de T é

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e tem inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O produto

$$T^{-1}M(b)T = \begin{bmatrix} \varepsilon(b) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & m(b^4) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

Portanto $\det(M(b)) = \det(T^{-1}M(b)T)$, como $T^{-1}M(b)T$ é uma matriz diagonal de blocos, tem-se $\det(T^{-1}M(b)T) = \varepsilon(b)b^1b^2b^3\det(b^4)$. Agora

$$b^4 = (b_0 - b_2) + (b_1 - b_3)i + (b_4 - b_6)j + (b_5 - b_7)k,$$

se $\varepsilon(b)$ é ímpar, então $s(b^4)$ também é ímpar. Como b^1, b^2, b^3 são todos congruentes a $\varepsilon(b) \pmod{2}$, segue que $\det(M(b))$ é ímpar, por ser produto de ímpares. ■

Observe que se $\varepsilon(b)$ é ímpar, então

$$\phi(T^{-1}M(b)T) = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \phi(m(b^4)) \end{bmatrix}$$

e, se $\varepsilon(b)$ é par, então

$$\phi(T^{-1}M(b)T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi(m(b^4)) \end{bmatrix}.$$

Como $\phi(m(b^4))$ pertence a $E_{4 \times 4}$, e o produto de matrizes bloco, é o produto de seus blocos, estas matrizes tem a propriedade de comutarem duas a duas. Mais ainda, o determinante da soma é a soma dos determinantes.

Lema 3.30. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$, tal que A tenha uma submatriz $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ de tamanho $m \times m$ com $\det(\varepsilon(\tilde{A}))$ ímpar, então, para todo $k \in \mathbb{Z}[Q_8]$, o sistema $Ax = (\det M(\tilde{A}))k$, tem solução em $\mathbb{Z}[Q_8]$.*

Demonstração: Resolver um sistema $Ax = k$ sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$ é equivalente a resolver um sistema $M(A)x = V(k)$ sobre $\mathbb{Z}$, onde $M(A) = [M(a_{ij})]$ e $V(k) = [V(k_1), \dots, V(k_m)]^t$. A submatriz $\tilde{A}$ de A , corresponde a uma submatriz $M(\tilde{A})$ de tamanho $8m \times 8m$ de $M(A)$. Seja $\mathcal{T}$ a matriz de tamanho $8m \times 8m$, diagonal de blocos, cujos blocos da diagonal é a matriz T , logo $\mathcal{T}^{-1}$ é a matriz diagonal de blocos, cujos blocos da diagonal é T^{-1} , e $\mathcal{T}^{-1}M(\tilde{A})\mathcal{T} = [T^{-1}M(\tilde{a}_{ij})T]$. Como antes

$$\det(M(\tilde{A})) = \det(\mathcal{T}^{-1}M(\tilde{A})\mathcal{T}).$$

Observe que $\phi(\mathcal{T}^{-1}M(\tilde{A})\mathcal{T})$ é formado por blocos das matrizes 8×8 descritas acima. Como estas matrizes comutam duas a duas, e o determinante da soma é a soma dos determinante, tem-se

$$\det(\phi(\mathcal{T}^{-1}M(\tilde{A})\mathcal{T})) = \sum_{\sigma} \det(\phi(T^{-1}M(\tilde{a}_{1\sigma(1)})T)) \dots \det(\phi(T^{-1}M(\tilde{a}_{m\sigma(m)})T)).$$

Pelo lema 3.29, $\varepsilon(\tilde{a}_{ij}) \equiv \det(T^{-1}M(\tilde{a}_{ij})T) \pmod{2}$. Daí

$$\phi(\det(\mathcal{T}^{-1}M(\tilde{A})\mathcal{T})) = \phi\left(\sum_{\sigma} \varepsilon(\tilde{a}_{1\sigma(1)}) \dots \varepsilon(\tilde{a}_{m\sigma(m)})\right),$$

isto é; $\det(M(\tilde{A}))$ é ímpar. Portanto o sistema $M(A)x = (\det M(\tilde{A}))V(k)$ tem solução sobre $\mathbb{Z}$, e consequentemente o sistema $Ax = (\det M(\tilde{A}))k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$. ■

Teorema 3.31. *Seja K um CW-complexo de dimensão 3, com m células de dimensão 3, n células de dimensão 2, e $m \leq n$. Se $H^3(K; \mathbb{Z})$ é finito de cardinalidade ímpar, então para toda aplicação $f : K \rightarrow M_{Q_8}$, tem-se que $H^3(K; f^*\Pi_3(M_{Q_8}, M^2))$ é torção.*

Demonstração: A hipótese de $H^3(K; \mathbb{Z})$ ser finito de cardinalidade ímpar implica que a matriz P do teorema 3.11, tem alguma submatriz $\tilde{P}$ de ordem $m \times m$

com determinante ímpar. Pelo lema 3.30, o sistema $Px = \det(M(\tilde{P}))k$ tem solução para todo $k \in \mathbb{Z}[Q_8]$, isto significa que todo elemento de

$$\text{Hom}^\Pi(C_3(\tilde{K}); \mathbb{Z}[Q_8])$$

caí na imagem de $\tilde{\delta}_3$, ao ser multiplicado por $(\det M(\tilde{P}))$. ■

Teorema 3.32. *Seja K um 3-complexo e $f : K \rightarrow M_{Q_8}$ uma aplicação. Se $H^3(K; \mathbb{Z}) = 0$, então $MR[f, a] = 0$.*

Demonstração: Temos que mostrar que o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$ sabendo que os sistemas $Px = k(x - 1)$, $Px = k(-xy + 1)$ tem solução, e que os subdeterminantes $\{d_1, \dots, d_r\}$ da matriz $\varepsilon(P)$ tem a propriedade que $\{\varepsilon(d_1), \dots, \varepsilon(d_r)\}$ são primos entre si.

Primeiro vamos olhar o sistema $\bar{P}x = \bar{k}$ dentro de R . Resolver este sistema é equivalente a resolver os sistemas $\varepsilon(P)x = \varepsilon(k)$, $P^1x = k^1$, $P^2x = k^2$, $P^3x = k^3$, $P^4x = k^4$, onde $P^1 = [p_{ij}^1]$, $P^2 = [p_{ij}^2]$, $P^3 = [p_{ij}^3]$, $P^4 = [p_{ij}^4]$, e $k^i = [k_1^i, \dots, k_m^i]^t$ para $i = 1, \dots, 4$. Note que os quatro primeiros sistemas tem que ser resolvido em $\mathbb{Z}$, e o último em $H(\mathbb{Z})$. Como os subdeterminantes de ordem $m \times m$ de $\varepsilon(P)$ são primos entre si, o primeiro sistema tem solução.

Note que $T(x - 1) = (0, 0, -2, -2, i - 1)$ e $T(-xy + 1) = (0, 2, 2, 0, -k + 1)$, daí $P^1x = 2k^1$, $P^2x = 2k^2$, $P^3x = -2k^3$, e $P^4x = k^4(i - 1)$, tem solução. Como os inteiros $\varepsilon(p_{ij})$, p_{ij}^1 , p_{ij}^2 , p_{ij}^3 , e $s(p_{ij}^4)$ são congruentes mod 2, as matrizes P^1 , P^2 , P^3 , e $s(P^4)$ tem subdeterminantes de ordem $m \times m$ ímpar. Pelo teorema 1.7, os três primeiros sistemas tem solução, e pelo lema 3.28 o último sistema tem solução.

Portanto o sistema $\bar{P}x = \bar{k}$ tem solução em R . Usando o lema 3.26, o sistema $Px = 8k$ tem solução em $\mathbb{Z}[Q_8]$. Porém o lema 3.30 diz que $Px = k$ (número ímpar) tem solução sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$. Isto significa que os sistemas $M(P)x = 8V(k)$, e $M(P)x = (\text{número ímpar})V(k)$ tem solução sobre $\mathbb{Z}$. Pelo teorema 1.7 o sistema $M(P)x =$

$V(k)$ tem solução sobre $\mathbb{Z}$, e consequentemente o sistema $Px = k$ tem solução sobre $\mathbb{Z}[Q_8]$. ■

Referências Bibliográficas

- [AM] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [BG] L.D. Borsari and D.L. Gonçalves. *Obstruction theory and minimal number of coincidences for maps from a complex into a manifold*, to Appear TMNA.
- [BR1] Robin B.S. Brooks. *On the sharpness of the Δ_2 and Δ_1 Nielsen numbers*, J. Reine Angew. Math 259, 101-108 (1973).
- [BR2] Robin B.S. Brooks. *Coincidences, roots and fixed points*, Doctoral Dissertation, Univ. of California, Los Angeles, 1967.
- [BR3] Robin B.S. Brooks. *On Removing Coincidences of two maps when only one, rather than both, of them may be deformed by a homotopy*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 39, No 3, 45-52 (1971).
- [CE] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [CLM] Paul Camion, L.S. Levy, and H.B. Mann. *Linear Equations over a Commutative Ring*, Journal of Algebra 18, 432-446 (1971).
- [CW] Wai-Sin Ching. *Linear Equations over Commutative Rings*, Linear Algebra and Its Applications 18, 257-266 (1977).

- [HG] J.A. Hermida and T. Sánchez-Giralda. *Linear Equations over Commutative Rings and Determinantal Ideals*, Journal of Algebra 99, 72-79 (1986).
- [HMS] Cynthia Hog-Angeloni, Wolfgang Metzler and Allan J. Sieradski. *Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 197, Cambridge University Press, 1993.
- [KSW] Istvan Kovacs, Daniel S. Silver, and Susan G. Williams. *Determinants of Commuting-Block Matrices*, Amer. Math. Monthly 106 n^o10, 950-952 (1999).
- [LX] Xiasong Lin. *On the Root Classes of Mapping*, Acta Mathematica Sinica, New Series 2, 199-206 (1986).
- [MB] Bernard R. McDonald. *Linear Algebra over Commutative Rings*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Marcel Dekker, 1984.
- [MJ] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.
- [SN] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [SR] Richard G. Swan. *Periodic Resolutions for Finite Groups*, Annals of Mathematics Vol. 72, No 2, 267-291 (1960).
- [TK] Kiang Tsai-han. *The Theory of Fixed Point Classes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg and Science Press Beijing, 1989.
- [WG] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.