SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP
Data de Depósito: 06/02/2004
Assinatura: Ana Paula Jampaio Fraga

Difeomorfismos do produto de esferas e mergulho de esferas neste produto

Mario Henrique Andrade Claudio[1]

Orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto _____

Prof. Dr. José Eduardo Prado Pires de Campos _____

Prof. Dr. Laércio Aparecido Lucas _____

Aos meus pais e minhas irmãs.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que sempre está ao meu lado me guiando pelos caminhos mais seguros, me iluminando e colocando nesse meu caminhar, seus braços sempre a disposição para me carregar e dar descanso quando o fardo da vida faz com que minhas pernas fraquejem.

Ao Prof. Oziride Manzoli Neto, o Dide, pela orientação não apenas neste trabalho mas em todo meu tempo acadêmico, aconselhando-me sempre de maneira a incentivar meu crescimento profissional, e acima de tudo pessoal.

Aos meus pais, Luiz Antonio e Ursulina, e minhas irmãs, Vanessa e Perla, que acreditam e incentivam-me em todos os passos de minha vida, estando sempre ao meu lado. Obrigado por serem meu porto seguro.

À toda minha família, especialmente minhas avós, que colaboraram muito para que esta etapa fosse concluída, com suas orações e ações para meu fortalecimento espiritual e físico durante toda a caminhada.

Aos amigos da minha cidade, Tietê, Sinésio, Eduardo e Luis, aos amigos da graduação e da pós-graduação, Aline, Alex, Fábio, Flávia, Grazielle, Kelly, Luci Any, Mariana, Paula e Romário, que estiveram ao meu lado sempre dispostos a dar o apoio que inúmeras vezes precisei, me levantando, me guiando, me incentivando. Obrigado por acreditarem em mim.

A todas as outras pessoas, professores e funcionários do ICMC, que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito obrigado
a todos!

Resumo

Seja M o produto de n cópias da esfera p-dimensional S^p com $p \geq 1$ e $n \geq 2$. Estudaremos nesta dissertação todos os automorfismos de $H_p(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ que são realizados por difeomorfismos de M, fazendo uma classificação destes. Como uma aplicação, veremos uma classificação completa das esferas p-dimensionais mergulhadas suavemente em M a menos de difeomorfismos de M.

Abstract

Let M be the product of n copies of the p-dimensional sphere S^p with $p \geq 1$ and $n \geq 2$. We will study in this work all automorphisms of $H_p(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ which can be realized by a diffeomorphism of M, making a classification of them. As an application, we will see a complete classification of smoothly embedded p-dimensional spheres in M up to diffeomorphisms of M.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Álgebra 3

1.2 Homologia e cohomologia 8

1.3 Homotopia 13

1.4 Topologia das variedades diferenciáveis 16

1.5 Difeomorfismos do produtos de esferas 17

2 Classificação das matrizes que representam automorfismos **22**

2.1 Lemas básicos 22

2.2 Teorema de classificação das matrizes que representam automorfismos 28

2.3 Alguns resultados especiais 36

3 Classificação dos mergulhos de esferas **38**

3.1 O teorema de classificação de esferas mergulhadas no produto de esferas . . . 38

4 Casos especiais **46**

4.1 Classificação de esferas mergulhadas no produto de esferas, caso $n = 2$ 46

4.2 O caso orientável 47

Referências Bibliográficas **50**

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar todos os automorfismos de $H_p(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$ que são realizados como homomorfismos induzidos por difeomorfismos de M, onde $M = S^p \times \ldots \times S^p$, o produto de n cópias da p-esfera S^p com $p \geq 1$ e $n \geq 2$, e classificar mergulhos suaves de S^p em M. Todo difeomorfismo $f : M \to M$ induz um automorfismo f_* de $H_p(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, o qual pode ser considerado como um elemento de $GL(n;\mathbb{Z}) = \{A \in M(n \times n;\mathbb{Z}); detA = \pm 1\}$, o grupo das matrizes de ordem n em $\mathbb{Z}$ com determinante ± 1 e munido da multiplicação, e seja D_p o subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$ consistindo de todos os automorfismos que são induzidos por difeomorfismos de M.

Em 1962, C.T. Wall [22], em 1967, R.Z. Goldstein [6] e em 1969, H. Sato [18], fizeram um estudo deste problema para o caso $n = 2$. O que estudaremos aqui é uma generalização desses resultados feita em Lucas [14], que mostra:

(i) D_p coincide com $GL(n;\mathbb{Z})$ para $p = 1, 3, 7$,

(ii) D_p é um subgrupo de índice $2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)/n!$ para p ímpar com $p \neq 1, 3, 7$,

(iii) D_p é um subgrupo finito de ordem $2^n n!$ para p par.

Em 1968, R.Z. Goldstein [7] fez uma classificação das esferas p-dimensionais mergulhadas suavemente em M a menos de difeomorfismos de M, para o caso $n = 2$ e $p \geq 4$. A classificação aqui apresentada é uma generalização deste caso, mais precisamente, se supormos que $p = 1$ e $n \geq 4$, ou $p = 2, 3$ e $n \geq 3$, ou $p \geq 4$ e $n \geq 2$ veremos uma lista de formas padrões de tais mergulhos e que qualquer esfera p-dimensional mergulhada suavemente pode ser aplicada continuamente a exatamente uma das formas padrões por um difeomorfismo de M.

Apresentamos o trabalho em quatro capítulos como a seguir:

No capítulo 1 enunciamos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento da dissertação.

No capítulo 2 provaremos o principal resultado deste trabalho, o Teorema 2.2.1, que é

uma generalização do caso $n = 2$, feito por Wall e Goldstein, que trata da classificação das matrizes que representam automorfismos de M.

No capítulo 3, como uma aplicação do Teorema 2.2.1 (classificação das matrizes que representam automorfismos), apresentaremos o Teorema 3.1.2, que trata da classificação de esferas mergulhadas.

No capítulo 4, veremos a prova do Teorema 3.1.2 (classificação de esferas mergulhadas feita por Goldstein [7]) quando consideramos $n = 2$, e posteriormente analisaremos quais modificações são necessárias ao teorema 3.1.2 quando consideramos as orientações de S^p e de M.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos sobre álgebra, topologia diferencial e algébrica, com aplicações de alguns deles que serão necessários nos capítulos posteriores.

1.1 Álgebra

Comecemos relembrado alguns resultados sobre matrizes. Veja Hoffman-Kunze [13] para mais detalhes.

Define-se por operações elementares sobre as linhas de uma matriz A de dimensão $m \times n$ sobre um corpo F, as operações:

(i) A transposição de duas quaisquer linhas.

(ii) A multiplicação de uma linha por um escalar não nulo.

(iii) A adição de qualquer múltiplo de uma linha a qualquer outra linha.

Define-se operações elementares sobre as colunas de uma matriz A, de maneira análoga.

Vejamos também a definição da adjunta de uma transformação linear:

Considere dois espaços vetoriais V e W sobre um corpo F e uma transformação linear T de V em W. Então T induz uma transformação linear de W^* em V^*, duais de W e V respectivamente, como segue. Suponhamos que g seja um funcional linear sobre W e seja

$$f(\alpha) = g(T\alpha)$$

para cada α em V. Então a igualdade acima define uma função f de V em F, a saber, a composta de T, uma função de V em W, com g, uma função de W em F. Como T e g são

ambas lineares, temos que f também é linear, isto é, f é um funcional linear sobre V. Assim T nos fornece uma função T^t que a cada funcional linear g sobre W faz corresponder um funcional linear $f = T^t g$ sobre V, definido na igualdade acima. Notemos também que T^t é na verdade uma transformação linear de W^* em V^*; de fato, se g_1 e g_2 estão em W^* e c é um escalar

$$[T^t(cg_1 + g_2)](\alpha) = (cg_1 + g_2)T\alpha = cg_1(T\alpha) + g_2(T\alpha) = c(T^t g_1)(\alpha) + (T^t g_2)(\alpha)$$

de modo que $T^t(cg_1 + g_2) = cT^t g_1 + T^t g_2$.

Teorema 1.1.1. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo F. Para cada transformação linear T de V em W existe uma única transformação linear T^t de W^* em V^* tal que*

$$(T^t g)(\alpha) = g(T\alpha)$$

para todo g em W^* e α em V.

Denominamos T^t como a adjunta (ou transposta) de T.

Outro fato a recordar é: se *det* é a função determinante das matrizes quadradas sobre um anel comutativo com unidade, e se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as linhas da matriz A, escrevemos $detA = det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, então

$$det(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \alpha_i', \ldots, \alpha_n) = cdet(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n) + det(\alpha_1, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n).$$

Esse mesmo resultado é válido se considerarmos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as colunas da matriz A.

Os resultados abaixo sobre grupos e anéis podem ser encontrados com maiores detalhes em Cohn [4].

Vejamos inicialmente que a intersecção de qualquer conjunto de subgrupos de um grupo G (mesmo um número infinito) é um subgrupo de G. Se X é qualquer subconjunto de G podemos considerar a coleção de todos subgrupos H de G tal que $X \subseteq H$ e formar suas intersecções, digamos T. Então T será um subgrupo de G e pode ser caracterizado como o menor subgrupo contendo X. Um modo mais construtivo para descrever T seria: seja T' o conjunto de todos os produtos nos elementos de $X \cup X^{-1}$, isto é, os produtos formados pelos elementos de X e seus inversos, incluindo 1 como o produto vazio. T' é um subgrupo e $T' \supseteq X$. E mais, qualquer subgrupo contendo X também contém T'. Logo $T \supseteq T'$, mas da definição de T como a intersecção de todos os subgrupos contendo X temos $T \subseteq T'$, com isso $T = T'$. Esse subgrupo T é chamado o subgrupo gerado por X e escrito $< X >$, enquanto X é chamado conjunto gerador de T.

Recordemos também da definição do produto direto de dois grupos:

Definição 1.1.2. *Sejam G grupo e A, B subgrupos de G; então G é o produto direto de A e B se cada elemento de A comuta com cada elemento de B e g de G pode ser unicamente escrito na forma*

$$g = ab \qquad (a \in A, b \in B).$$

A definição pode também ser escrita como segue

Proposição 1.1.3. *Um grupo G é o produto direto de seus subgrupos A e B se, e somente se, A, B são normais em $G, G = AB$ e $A \cap B = 1$.*

Mais geralmente, chamamos um grupo G o produto direto dos subgrupos $A_1, \ldots, A_r$ se quaisquer dois dos grupos A_i comutam elemento a elemento e todo $g \in G$ pode ser unicamente escrito da forma

$$g = a_1 a_2 \ldots a_r \qquad (a_i \in A_i).$$

Analogamente à proposição anterior, temos por indução

Corolário 1.1.4. *Sejam G grupo e $A_1, \ldots, A_r$ subgrupos quaisquer de G; então G é o produto direto de $A_1, \ldots, A_r$ se, e somente se, cada A_i é normal em G, $G = A_1 A_2 \ldots A_r$ e $A_1 \ldots A_{i-1} \cap A_i = 1$ para $i = 2, \ldots, r$.*

Para uma generalização do produto direto: sejam A, B dois grupos e suponha que A age por automorfismos sobre B. Isso significa que cada $a \in A$ define um automorfismo de B, escrito $b \mapsto b^a$, de tal modo que

$$b^1 = b, \qquad (b^a)^{a'} = b^{aa'}, \qquad (a, a' \in A, b \in B).$$

Temos assim um homomorfismo $\lambda : A \to \mathrm{Aut}B$, e reciprocamente, qualquer homomorfismo λ define uma A-ação sobre B.

Então podemos definir um grupo G, chamado o produto semi-direto de A e B com a ação dada de A sobre B, como segue. Os elementos de G são novamente pares $(a, b), a \in A, b \in B$, com multiplicação

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1^{a_2} b_2).$$

Essa multiplicação é associativa:

$$[(a_1, b_1)(a_2, b_2)](a_3, b_3) = (a_1 a_2 a_3, b_1^{a_2 a_3} b_2^{a_3} b_3) = (a_1, b_1)[(a_2, b_2)(a_3, b_3)];$$

o neutro é $(1_A, 1_B)$ e $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, (b^{-1})^{a^{-1}})$. Temos assim um grupo; os elementos $(a, 1)$ formam um subgrupo A_1 isomorfo a A e os elementos $(1, b)$ formam um subgrupo B_1 isomorfo a B. B_1 é normal em G e $G/B_1 \cong A$; em geral A_1 não é normal em G.

Recordemos que R é um Domínio de Integridade se R é um anel não trivial comutativo sem divisores de zero.

Seja R um Domínio de Integridade e suponha que para cada $a \in R$, $a \neq 0$, um inteiro não negativo $\varphi(a)$ está associado tal que

1. $\varphi(ab) \geq \varphi(a)$ para todo $a, b \neq 0$ em R,

2. para quaisquer $a, b \in R$, se $b \neq 0$, existe $q, r \in R$ tal que

$$a = bq + r, \qquad onde\ \varphi(r) < \varphi(b) \text{ ou } r = 0.$$

Geralmente assumimos que φ não é constante, isto é, φ assume mais que um valor (por 2, φ pode ser constante apenas se R é um corpo). Qualquer domínio com essas propriedades é dito ser Euclidiano. Em geral $\mathbb{Z}$ é um anel Euclidiano se considerarmos $\varphi(a) = \mid a \mid$. Para verificar que um anel é Euclidiano é mais conveniente trocarmos a condição 2 acima por outra condição equivalente:

2'. Para quaisquer $a, b \in R, b \neq 0$, se $\varphi(a) \geq \varphi(b)$, existe $c \in R$ tal que

$$\varphi(a - bc) < \varphi(a) \quad \text{ou } a = bc.$$

Teorema 1.1.5. *Em um anel Euclidiano R quaisquer dois elementos tem um máximo divisor comum e um mínimo múltiplo comum; se o máximo divisor comum de a e b é d, então existem $u, v \in R$ tal que $d = au + bv$.*

Também é interessante recordarmos alguns resultados sobre grupos abelianos livres:

A expressão de um elemento de um grupo em termos de um conjunto de geradores simplifica muito no caso do grupo ser abeliano. Assim se A é um grupo abeliano, gerado por $a_1, \ldots, a_n$, todo elemento $x \in A$ pode ser escrito na forma

$$x = a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \qquad onde\ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

ou quando A é um grupo aditivo,

$$x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n. \qquad (2)$$

Vamos adotar a notação aditiva, então temos (2); em geral não podemos afirmar que os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são unicamente determinados por x. Em geral, se a_1 tem ordem finita m_1, podemos trocar α_1 por um múltiplo de m_1 e ainda obtemos x. Um objetivo natural

seria encontrar um conjunto de geradores $\{a_1, \ldots, a_n\}$ para A tal que todo elemento x pode ser escrito de um único modo na forma (2), onde α_i está restrito a $0 \leq \alpha_i < m_i$ no caso de a_i ter ordem finita m_i. Então $a_1, \ldots, a_n$ é chamada base de A. Escrevendo A como soma direta de grupos cíclicos A_i:

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n. \qquad (3)$$

Reciprocamente, se A pode ser escrito como uma soma direta de grupos cíclicos, isso nos leva a representação (2) para seus elementos, a qual é única se os α_i são suficientemente pequenos sempre que a_i tem ordem finita.

Proposição 1.1.6. *Se A é um grupo abeliano qualquer, então o subconjunto tA de elementos de ordem finita é um subgrupo.*

O subgrupo tA é chamado subgrupo de torção de A, seus elementos são chamados elementos de torção de A, enquanto os elementos restantes de A são livres de torção. O grupo A é chamado de grupo de torção se $tA = A$, e livre de torção se $tA = 0$ (tA é um grupo de torção e A/tA é livre de torção).

Um grupo de torção finitamente gerado deve ser finito. Se A é gerado por $a_1, \ldots, a_n$ e a_i tem ordem finita m_i, então todo elemento pode ser escrito na forma (2) com $0 \leq \alpha_i < m_i$, então existe no máximo $m_1 m_2 \ldots m_n$ diferentes elementos em A.

Para descrever os grupos livre de torção finitamente gerados temos

Definição 1.1.7. *Um grupo abeliano A é dito ser abeliano livre sobre $e_1, \ldots, e_n$ se todo elemento de A pode ser escrito unicamente da forma*

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \qquad \textit{onde } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Z}.$$

Em outras palavras, um grupo abeliano livre é um grupo com uma base consistindo de elementos livre de torção. É claro que A terá em geral muitas bases diferentes, mas todas terão o mesmo número de elementos pois, escrevendo $2A = \{2x; x \in A\}$, esse número é n, onde

$$[A : 2A] = 2^n.$$

Esse número n é chamado o rank do grupo abeliano livre A.

Teorema 1.1.8. *Seja F_n um grupo abeliano livre sobre $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Então qualquer aplicação de E em um grupo abeliano A estende a um único homomorfismo $F_n \to A$. Em particular, qualquer grupo abeliano finitamente gerado pode ser escrito como uma imagem homomorfa de um grupo abeliano livre.*

Assim, F_n com a aplicação inclusão $E \to F_n$ é universal para aplicações de E em grupos abelianos livres.

A definição de um grupo abeliano livre pode ser estendida para o caso de rank infinito e todo grupo abeliano pode ser escrito como uma imagem homomorfa de um grupo abeliano livre adequado. Para grupos abelianos finitamente gerados, o grupo livre tem uma caracterização simples que não estende ao caso geral:

Proposição 1.1.9. *Um grupo abeliano finitamente gerado é livre se, e somente se, é livre de torção.*

Corolário 1.1.10. *Todo grupo abeliano finitamente gerado é a soma direta de um grupo finito e um grupo livre.*

1.2 Homologia e cohomologia

Podemos encontrar mais detalhes em Spanier [19]:

Definição 1.2.1. *Um complexo de cadeias $C = (C_q, \partial_q)$ é definido por um par de seqüências, sendo uma seqüência de grupos abelianos C_q, $q \in \mathbb{Z}$, e uma seqüência de homomorfismos $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$, tal que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. É definido também $C_q = 0$ se $q < 0$.*

A um complexo de cadeias $C = (C_q, \partial_q)$ se associa de modo natural certos subgrupos dos grupos de cadeias C_q. Os homomorfismos ∂_q são denominados operadores bordo, os elementos de C_q são chamados de q-cadeias, o grupo $Z_q(C) = ker\partial_q$ é chamado de grupo dos q-ciclos, o grupo $B_q(C) = Im\partial_{q+1}$ é chamado de grupo dos q-bordos. Sendo $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, então $B_q(C) \subset Z_q(C)$ e o grupo quociente

$$H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$$

é chamado de q-ésimo grupo de homologia do complexo C.

Sejam C um complexo de cadeias e G um grupo abeliano. Podemos formar o complexo de cadeias $C \otimes G = (C_q \otimes G, \partial_q \otimes 1)$ com $\partial_q \otimes 1 : C_q \otimes G \to C_{q-1} \otimes G$, onde $1 : G \to G$ é o homomorfismo identidade. Definimos $H_q(C; G) = H_q(C \otimes G)$ como sendo o q-ésimo grupo de homologia do complexo C com coeficientes no grupo G.

A relação entre os grupos $H_q(C; G)$ e $H_q(C)$ é dada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2.2. *(Teorema dos Coeficientes Universais para Homologia) Sejam C um complexo de cadeias livre, isto é, os C_q são grupos abelianos livres, e G um grupo abeliano. Então*

$$H_q(C; G) \cong H_q(C) \otimes G \oplus Tor(H_{q-1}(C), G).$$

Definição 1.2.3. *Sejam G um grupo abeliano e $C = (C_q, \partial_q)$ um complexo de cadeias. Formamos o grupo abeliano $C^q = Hom(C_q, G)$, isto é, seus elementos são homomorfismos $h : C_q \to G$ chamados de q-cocadeias de C. O cobordo de h e uma $(q+1)$-cocadeia, denotada por $\delta^q h$, $\delta^q h = (-1)^{q+1} h \circ \partial_{q+1} : C_{q+1} \to G$. Em outras, palavras o operador bordo $\partial_{q+1} : C_{q+1} \to C_q$ induz $\partial^*_{q+1} : Hom(C_q, G) \to Hom(C_{q+1}, G)$ e $\delta^q = (-1)^{q+1}\partial^*_{q+1}$. Observe que $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$. Segue-se que (C^q, δ^q) é um complexo de cocadeias com coeficientes em G. Denotaremos $Hom(C, G) = (Hom(C_q, G), \delta^q)$. A homologia do complexo $Hom(C, G)$ é a cohomologia de C com coeficientes em G. Denotaremos por $H^q(C; G)$, isto é,*

$$H^q(C; G) = ker\delta^q / Im\delta^{q-1}.$$

Um elemento de $ker(\delta^q)$ é chamado de q-cociclo e um elemento de $Im(\delta^{q-1})$ é chamado de q-cobordo.

Teorema 1.2.4. *(Coeficientes Universais para Cohomologia) Sejam C um complexo de cadeias livre e G um grupo abeliano. Então,*

$$H^q(C; G) \cong Hom(H_q(C), G) \oplus Ext(H_{q-1}(C), G).$$

Em Greenberg [8] podemos encontrar os resultados de homologia e cohomologia singular para um espaço topológico X, descritos abaixo.

Considere os vetores $E_0 = (0, 0, \ldots), E_1 = (1, 0, \ldots), E_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ em $\mathbb{R}^\infty$. Identificamos $\mathbb{R}^n$ como o subespaço onde todas as componentes depois da n-ésima são iguais a zero. Para qualquer $q \geq 0$, Δ_q é o simplexo geométrico q-dimensional gerado por $E_0, \ldots, E_q$, chamado q-simplexo padrão.

Sendo $P_0, \ldots, P_q$ pontos em algum espaço afim E, $(P_0, \ldots, P_q)$ denotará a restrição a Δ_q da única aplicação afim $\mathbb{R}^q \to E$ aplicando E_0 em P_0, ..., E_q em P_q. Assim $(P_0, \ldots, P_q)$ é a aplicação identidade de Δ_q, denotada por δ_q.

Dado um espaço X, um q-simplexo singular em X é uma aplicação $\Delta_q \to X$. Definimos $S_q(X)$ como o $\mathbb{A}$-módulo livre gerado por todos os q-simplexos singulares (onde módulo é um grupo abeliano aditivo e $\mathbb{A}$ o anel dos coeficientes). Os elementos de $S_q(X)$ são combinações lineares

$$\sum_\sigma v_\sigma \sigma$$

onde σ corresponde aos q-simplexos singulares, e os coeficientes v_σ são de $\mathbb{A}$. Essas somas são chamadas q-cadeias singulares.

Para $q > 0$, defina $F^i_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, para $0 \leq i < q$, sendo a aplicação afim $(E_0 \ldots \widehat{E}_i \ldots E_q)$, onde $\widehat{E}_i$ significa omitir E_i. Com isso definimos a i-ésima face $\sigma^{(i)}$ de

σ como sendo o $(q-1)$-simplexo singular $\sigma \circ F_q^i$. Assim F_q^i é a i-ésima face de δ_q. F_q^i aplica Δ_{q-1} afim e homeomorficamente sobre a face de Δ_q oposta ao vértice E_i.

Agora definimos o bordo de um q-simplexo singular sendo a $(q-1)$-cadeia singular

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

e $\partial\partial = 0$.

Uma q-cadeia singular c tal que $\partial(c) = 0$ é chamada um ciclo; se $c = \partial(c')$ para alguma $(q+1)$-cadeia c', c é chamada um bordo. Como $\partial\partial = 0$ os bordos formam um submódulo B_q do módulo Z_q dos ciclos; e Z_q/B_q é chamado o q-ésimo módulo de homologia singular de X, denotado por $H_q(X;\mathbb{A})$, ou simplesmente $H_q(X)$ quando a referência ao anel $\mathbb{A}$ é conhecida.

Definição 1.2.5. *O módulo $S^q(X)$ de todas as cocadeias singulares sobre X é $Hom_{\mathbb{A}}(S_q(X), \mathbb{A}) = S_q(X)^*$. Assim a cocadeia singular de dimensão q é um homomorfismo $\mathbb{A}$-linear $c : S_q(X) \to \mathbb{A}$. Se denotamos o valor desse homomorfismo sobre uma cadeia z por $[z, c]$, temos então as igualdades*

$$[z_1 + z_2, c] = [z_1, c] + [z_2, c]$$

$$[z, c_1 + c_2] = [z, c_1] + [z, c_2]$$

$$[\nu z, c] = \nu[z, c] = [z, \nu c] \qquad \nu \in \mathbb{A}$$

tal que $[,]$ é bilinear.

Como S_q é um funtor de espaços topológicos em $\mathbb{A}$-módulos e $Hom_{\mathbb{A}}(\ ,\mathbb{A})$ é um contrafuntor na categoria de $\mathbb{A}$-módulos, o funtor composto S^q é um contrafuntor de espaços topológicos em $\mathbb{A}$-módulos. Mais explicitamente, se $f : X \to Y$ é uma aplicação qualquer, então $S^q(f) : S^q(Y) \to S^q(X)$ é definido pela fórmula

$$[z, S^q(f)c] = [S_q(f)z, c]$$

para qualquer q-cadeia z, q-cocadeia c. Quando z é um q-simplexo singular σ, a fórmula se torna

$$[\sigma, S^q(f)c] = [f \circ \sigma, c]$$

em outras palavras, $S^q(f)$ é a transposta $S_q(f)^t$ de $S_q(f)$.

Proposição 1.2.6. *Existe um único homomorfismo $\delta : S^q(X) \to S^{q+1}(X)$ satisfazendo*

$$[\partial z, c] = [z, \delta c]$$

para toda $(q+1)$-cadeia z e q-cocadeia c. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação qualquer, então

$$\delta S^q(f) = S^{q+1}(f)\delta.$$

E mais,

$$\delta\delta = 0.$$

Chamamos δ o operador cobordo.

Definimos os módulos de cociclos e cobordos por

$$Z^q(X) = Kernel\ \delta : S^q(X) \to S^{q+1}(X)$$

$$B^q(X) = Imagem\ \delta : S^{q-1}(X) \to S^q(X)$$

e o grupo de cohomologia $H^q(X;\mathbb{A})$ por

$$H^q(X) = Z^q(X)/B^q(X).$$

Os grupos de homologia e cohomologia deste trabalho, terão coeficientes inteiros.

Seja

$$S^*(X) = \oplus_{q>0} S^q(X).$$

Vamos definir um produto, denominado cup, em $S^*(X)$: queremos que seja bilinear e que $c \smile d \in S^{p+q}(X)$ se $c \in S^p(X)$ e $d \in S^q(X)$. Para definir $c \smile d$, é suficiente especificar $[\sigma, c \smile d]$ para qualquer $(p+q)$-simplexo singular σ. Para isso considere as aplicações afins

$$\lambda_p : \Delta_p \to \Delta_{p+q}$$

$$\rho_q : \Delta_q \to \Delta_{p+q}$$

dadas por $\lambda_p = (E_0 \dots E_p)$, $\rho_q = (E_p E_{p+1} \dots E_{p+q})$. Fazendo

$$[\sigma, c \smile d] = [\sigma\lambda_p, c][\sigma\rho_q, d]$$

onde o lado direito é o produto de dois escalares em $\mathbb{A}$. Se $c = \Sigma_p c_p$, $d = \Sigma_q d_q$ são elementos arbitrários de $S^*(X)$, temos por definição

$$c \smile d = \sum_{p,q} c_p \smile d_q$$

Proposição 1.2.7. *O produto cup em $S^*(X)$ é bilinear, associativo, e tem como elemento identidade a 0-cocadeia 1 definida por $[x, 1] = 1$ para todo ponto $x \in X$.*

Proposição 1.2.8. *O operador cobordo é uma derivação do anel-graduado $S^*(X)$, isto é,*

$$\delta(c \smile d) = \delta c \smile d + (-1)^p c \smile \delta d$$

para $c \in S^p(X)$, $d \in S^q(X)$.

Corolário 1.2.9. *A soma direta $Z^*(X)$ do módulo dos cociclos é um subanel de $S^*(X)$ e a soma direta $B^*(X)$ do módulo dos cobordos é um ideal em $Z^*(X)$, conseqüentemente passando o produto cup ao quociente, a soma direta $H^*(X)$ dos módulos de cohomologia torna-se uma $\mathbb{A}$-álgebra graduada.*

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Então f induz homomorfismos $S^q(f) : S^q(Y) \to S^q(X)$ para todo q, e conseqüentemente um homomorfismo $S^*(f) : S^*(Y) \to S^*(X)$ definido por

$$S^*(f)(\sum_p c_p) = \sum_p S^p(f)(c_p)$$

Similarmente temos um homomorfismo de módulo $H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$.

Proposição 1.2.10. *$S^*(f)$ e $H^*(f)$ são homomorfismos de anéis.*

Corolário 1.2.11. *S^* e H^* são contrafuntores da categoria de espaços topológicos para a categoria das $\mathbb{A}$-álgebras graduadas.*

Teorema 1.2.12. *Em $H^*(X)$ temos*

$$a \smile b = (-1)^{pq} b \smile a$$

para $a \in H^p(X), b \in H^q(X)$. Em particular, se $a = b$ e p é ímpar, $a \smile a = 0$, contanto que $\mathbb{A}$ tenha característica diferente de 2.

Ainda em Greenberg [8] temos

Teorema 1.2.13. *(Fórmula de Künneth) Se X e Y são espaços topológicos, existe um isomorfismo natural*

$$H_n(X \times Y) \cong \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes H_q(Y) \oplus \sum_{r+s=n-1} Tor(H_r(X), H_s(Y))$$

para todo n.

Em Spanier [19] podemos encontrar o seguinte resultado de homologia e cohomologia para variedades diferenciáveis:

Teorema 1.2.14. *(Dualidade de Poincaré) Seja M uma n-variedade compacta com bordo ∂M. Se $(M, \partial M)$ é orientável, então:*

$$H^p(M, \partial M) \cong H_{n-p}(M),$$

$$H^p(M) \cong H_{n-p}(M, \partial M).$$

1.3 Homotopia

As seguintes definições podem ser encontradas em Hilton [10].

Sejam X, Y espaço de Hausdorff conexos por caminhos e considere aplicações contínuas de X em Y. Dizemos que $f_0, f_1 : X \to Y$ são homotópicas se existe uma aplicação contínua $F : X \times I \to Y$, onde I é o intervalo unitário $0 \leq t \leq 1$, tal que $F(x, 0) = f_0(x), F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$ (se f_0 é homotópica a f_1 escrevemos $f_0 \sim f_1$).

Agora sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $gf : X \to X$ e $fg : Y \to Y$ são homotópicas as aplicações identidades apropriadas. Então dizemos que X e Y tem o mesmo tipo de homotopia. Chamamos f e g equivalências de homotopia e $g(f)$ uma homotopia inversa de $f(g)$. Considerando 1 como a aplicação identidade de qualquer espaço nele mesmo, então $gf \sim 1$ e $fg \sim 1$.

Seja I^n o n-cubo Euclidiano, consistindo dos pontos $(t_1, \ldots, t_n)$ com $0 \leq ti \leq 1$, $i = 1; 2, \ldots, n$. O bordo de I^n, escrito $\dot{I}^n$, consiste dos pontos de I^n onde $t_i = 0$ para no mínimo um valor de i.

Agora seja X um espaço de Hausdorff conexo por caminhos e seja $x_0 \in X$. Sejam $f, g : I^n \to X$ tal que $f(1, t_2, \ldots, t_n) = g(0, t_2, \ldots, t_n)$ e defina $h : I^n \to X$ por

$$h(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Então h é contínua e escrevemos $h = f + g$.

Suponha agora que f, g aplicam $\dot{I}^n$ em x_0, e seja $M_n(X, x_0)$ a coleção de todas as aplicações contínuas de pares $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$. Então $f + g$ está definida e pertence a $M_n(X, x_0)$. Assim temos uma adição em $M_n(X, x_0)$. Seja $\pi_n(X, x_0)$ a coleção de todas as classes de homotopia das aplicações contínuas de pares $(I^n, \dot{I}^n) \to (X, x_0)$, e seja $[f]$ a classe de f. Se $f, g \in M_n(X, x_0)$, então $[f + g]$ depende apenas de $[f]$ e $[g]$, e com isso a adição introduzida em $M_n(X, x_0)$ induz uma adição em $\pi_n(X, x_0)$.

A adição definida em $\pi_n(X, x_0)$ não é apenas descrita em termos da adição particular em $M_n(X, x_0)$, existem outras formas equivalentes de definir esta operação.

Teorema 1.3.1. *Segundo a operação de adição, a coleção de classes, $\pi_n(X, x_0)$, é um grupo. $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano se $n > 1$.*

O grupo $\pi_n(X, x_0)$ é chamado o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto base $x_0 \in X$. Quando $n = 1$, $\pi_1(X, x_0)$ é chamado de grupo fundamental de X.

Os próximos resultados podem ser encontrados em Spanier [19]:

Teorema 1.3.2. *(Teorema de Hurewicz) Seja X um espaço simplesmente conexo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$\pi_j(X) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n-1,$$

$$H_j(X) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n-1.$$

No caso de uma das condições acima estar verificada, tem-se $H_n(X) \cong \pi_n(X)$.

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia fraca se f induz uma correspondência biunívoca entre as componentes conexas por caminhos de X e Y e se para todo $q \geq 1$ e $x \in X$, $f_\# : \pi_q(X, x) \to \pi_q(Y, f(x))$ é um isomorfismo. Observe que se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então f é uma equivalência de homotopia fraca. Se X e Y forem variedades de classe C^∞, então tem a estrutura de CW-complexos e os conceitos de equivalência de homotopia fraca e equivalência de homotopia coincidem.

Também em Spanier [19], são estabelecidas correspondências entre os elementos de $\pi_n(X, x_0)$ e as classes de homotopia das aplicações contínuas $f : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, $p_0 \in S^n$, ou $g : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$, onde D^n é o disco orientado n-dimensional unitário e S^{n-1} sua fronteira, isto é, a $(n-1)$-esfera unitária.

Seja Y um subespaço fechado e conexo por caminhos de X e $y_0 \in Y$. Os elementos do grupo de homotopia relativo $\pi_n(X, Y, y_0)$ estão em correspondência com as classes de homotopia de aplicações contínuas $g' : (D^n, S^{n-1}, p_0) \to (X, Y, y_0)$, onde $g'(D^n) \subset X$, $g'(S^{n-1}) \subset Y$ e $g'(p_0) = y_0$. Note que um elemento de $\pi_{n-1}(Y, y_0)$ é representado pela restrição de g' a S^{n-1}, $g'|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, p_0) \to (Y, y_0)$.

Considere $S^p \vee S^q = S^p \times \{q_0\} \cup \{p_0\} \times S^q \subset S^p \times S^q$, onde $p_0 \in S^p, q_0 \in S^q, p, q \geq 2$. Os elementos de $\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *)$ estão em correspondência com as classes de homotopia de aplicações contínuas $g' : (D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q), w) \to (S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *)$, onde $g'(D^p \times D^q) \subset S^p \times S^q$, $g'(\partial(D^p \times D^q)) \subset S^p \vee S^q$ e $g'(w) = *$, com $w \in S^{p-1} \times S^{q-1} = \partial D^p \times \partial D^q \subset \partial(D^p \times D^q) = S^{p+q-1}$ e $* = (p_0, q_0)$. Assim, cada elemento $\gamma \in \pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *)$ é representado por uma aplicação contínua $g' : (D^p \times D^q, \partial(D^p \times D^q), w) \to (S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *)$.

Observe que $H_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong \mathbb{Z}$. Segue-se do teorema de Hurewicz relativo, em Spanier [19] pag. 397, que $\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *) \cong H_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) \cong \mathbb{Z}$, pois $S^p \times S^q$ e $S^p \vee S^q$ são, neste caso, simplesmente conexos.

Defina o homomorfismo bordo

$$d : \pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *) \to \pi_{p+q-1}(S^p \vee S^q, *)$$

como sendo $d(\gamma) = \alpha_1$, onde α_1 é a classe de homotopia representada por $g' \mid_{\partial(D^p \times D^q)} : (\partial(D^p \times D^q), w) \to (S^p \vee S^q, *)$.

Definição 1.3.3. *(Colchete de Whitehead) considere as classes de homotopia $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ e $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ representadas pelas aplicações contínuas $g_1 : (S^p, p_0) \to (X, x_0)$ e $g_2 : (S^q, q_0) \to (X, x_0)$ e a aplicação $g_1 \vee g_2 : (S^p \vee S^q, *) \to (X, x_0)$ com $(g_1 \vee g_2)(p_0, q_0) = x_0, (g_1 \vee g_2)(x, q_0) = g_1(x), (g_1 \vee g_2)(p_0, y) = g_2(y)$. Seja γ um gerador de $\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *) \cong \mathbb{Z}$ escolhido através da fixação de uma orientação adequada de $S^p \times S^q$. Para a composta abaixo*

$$\pi_{p+q}(S^p \times S^q, S^p \vee S^q, *) \xrightarrow{d} \pi_{p+q-1}(S^p \vee S^q, *) \xrightarrow{(g_1 \vee g_2)_\#} \pi_{p+q-1}(X, x_0)$$

defina

$$[\alpha, \beta] = ((g_1 \vee g_2)_\# \circ d)(\gamma) = (g_1 \vee g_2)_\#(\alpha_1) \in \pi_{p+q-1}(X, x_0).$$

O elemento $[\alpha, \beta]$ é chamado de Colchete de Whitehead (ou produto de Whitehead) de α e β. Observe que $[\alpha, \beta]$ só depende das classes de homotopia α e β e não dos particulares representantes g_1 e g_2.

Uma propriedade do Colchete de Whitehead que vamos precisar no segundo capítulo é a "bilinearidade", isto é, para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ tem-se

$$[m\alpha, n\beta] = mn[\alpha, \beta].$$

O fato de que o Colchete de Whitehead $[\alpha, \beta]$ é bilinear em α e β, se $p, q \geq 2$, pode ser encontrado em Whitehead [23].

Para os enunciados e demonstrações a seguir ver Cartan [3].

Proposição 1.3.4. *A aplicação contínua $g_1 \vee g_2 : S^p \vee S^q \to X$ se estende a uma aplicação contínua $F : S^p \times S^q \to X$ se, e somente se, $[\alpha, \beta] = 0$ em $\pi_{p+q-1}(X, x_0)$.*

Definição 1.3.5. *(Definição de H-espaço) Seja (X, x_0) espaço topológico X com ponto base $x_0 \in X$. Dizemos que X é um H-espaço se existe uma aplicação contínua $f : X \times X \to X$, com $f(x_0, x_0) = x_0$ tal que as aplicações $f_1 : X \to X, f_1(x) = f(x, x_0)$, e $f_2 : X \to X, f_2(x) = f(x_0, x)$, são homotópicas à identidade $id : X \to X$. O ponto $x_0 \in X$ é o elemento neutro de X a menos de homotopia.*

Foi demonstrado em Adams [1], que S^p tem estrutura de H-espaço se, e somente se, $p = 1, 3, 7$. Nestes casos, a aplicação $f : S^p \times S^p \to S^p$ é a multiplicação dos complexos, dos quatérnios e dos octônios de norma igual a 1 respectivamente (ver também Cartan [3]).

Proposição 1.3.6. *Se p é um número ímpar $p \neq 1, 3, 7$, ou seja , S^p não é um H-espaço, então $[\gamma, \gamma]$ é um elemento de ordem 2 de $\pi_{2p-1}(S^p)$, onde γ é um gerador de $\pi_p(S^p) \cong \mathbb{Z}$.*

1.4 Topologia das variedades diferenciáveis

Veremos agora algumas definições e propriedades sobre variedades diferenciáveis, que poderão ser vistas com maiores detalhes em Hirsch [11].

Seja $f : M \to N$ uma aplicação de classe C^1 (onde M, N são variedades $C^r, r \geq 1$). Dizemos que f é imersiva em $x \in M$ se a aplicação linear $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ for injetiva, e submersiva de $T_x f$ for sobrejetiva. Se f é imersiva em todos os pontos de M ela é uma imersão; se ela é submersiva em todo ponto, f é uma submersão.

Dizemos que f é um mergulho se f é uma imersão que aplica M homeomorficamente sobre sua imagem.

Sejam M e N variedades diferenciáveis orientadas de dimensão n, ambas sem bordo, com M compacta e N conexa. Seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável de classe C^∞ e $x \in M$ um ponto regular de f (ou seja, x é um ponto onde f é submersiva). Observe que, nestas condições, a derivada de f no ponto x, denotada por $d_x f$, é um isomorfismo entre os espaços tangentes em x e em $f(x)$. Dizemos que f preserva a orientação em x se $d_x f$ levà uma base de $T_x M$ da orientação de M numa base de $T_{f(x)} N$ da orientação de N. Se isto não ocorre, dizemos que f inverte a orientação em x.

Definição 1.4.1. *(Grau de uma aplicação diferenciável) Seja $x \in M$ um ponto regular. Dizemos que o grau de f no ponto x é igual a 1 se $d_x f$ preserva a orientação. Denotaremos por $deg_x f = 1$. Se $d_x f$ inverte a orientação, então o grau de f no ponto x é igual a -1.*

Para cada valor regular $y \in N$ de f, definimos também o grau de f sobre y como sendo

$$deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} deg_x f.$$

Se $f^{-1}(y)$ for vazio, $deg(f,y) = 0$ por definição. Observe que $f^{-1}(y)$ tem um número finito de pontos, pois M é compacta.

O grau de uma aplicação contínua f, denotado por $degf$, é definido como sendo o grau de uma aplicação h, $deg(h,z)$, onde $h : M \to N$ é uma aplicação C^∞ homotópica a f e $z \in N$ é um valor regular para h.

Por resultados de Hirsch [11], tal aplicação $h : M \to N$ existe e $degf$ independe de h e z.

Se N é compacta, então $f_*[M] = (degf)[N]$ em $H_n(N;\mathbb{Z})$, com $[M]$ e $[N]$ classes fundamentais de M eN respectivamente.

Agora, se P, Q são variedades, uma isotopia de P em Q é uma homotopia

$$F : P \times I \to Q,$$

$$F(x,t) = F_t(x)$$

tal que a aplicação

$$\widehat{F} : P \times I \to Q \times I,$$

definida por $\widehat{F}(x,t) = (F_t(x), t)$, é um mergulho.

Quando $P = Q$ e cada F_t é um difeomorfismo, e $F_0 = 1_Q$, então F é chamada uma difeotopia.

Outro resultado de variedades diferenciáveis é o teorema de aproximação, o qual podemos encontrar em Haefliger [9], e diz

Teorema 1.4.2. *(a) Qualquer mergulho topológico (respectivamente imersão topológica) de uma variedade diferenciável V^n em uma variedade diferenciável W^m pode ser aproximado por um mergulho diferenciável se $m \geq 3(n+1)/2$ (resp. uma imersão diferenciável se $m > 3n/2$).*

(b) Sejam f_0, f_1 dois mergulhos diferenciáveis (resp. imersões) de V^n em W^m. Qualquer homotopia na categoria de mergulhos topológicos (resp. imersões) pode ser aproximado por uma isotopia diferenciável se $m > 3(n+1)/2$ (resp. uma homotopia na categoria de imersões diferenciáveis se $m > (3n+1)/2$).

1.5 Difeomorfismos do produtos de esferas

As definições e os resultados a seguir podem ser encontrados em Lucas [15].

Denotaremos por $*$ um ponto base de S^p, com uma orientação fixada e consideremos α_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, classes de homologia que geram $H_p(M;\mathbb{Z})$ representadas por $S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\}, \{*\} \times S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\}, \ldots, \{*\} \times \ldots \times \{*\} \times S^p$.

Definição 1.5.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e $f_* : H_p(M) \to H_p(M)$ dada por:*

$$f_*(\alpha_j) = \Sigma_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i.$$

Chamamos a matriz

$$I_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de matriz da induzida por f na base $\{\alpha_i\}$ de $H_p(M;\mathbb{Z})$.

Os a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ de cada coluna de I_f são os graus das composições

$$S^p \xrightarrow{k_j} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi_i} S^p,$$

onde k_j é a inclusão do j-ésimo fator em M e π_i é a projeção no i-ésimo fator.

Vamos denotar $GL(n;\mathbb{Z}) = \{A \in M(n \times n;\mathbb{Z}); detA = \pm 1\}$, o grupo das matrizes de ordem n em $\mathbb{Z}$ com determinante ± 1 e munido da multiplicação.

Definição 1.5.2. *Dizemos que uma matriz $A \in GL(n;\mathbb{Z})$ é realizada por um difeomorfismo de M se existe um difeomorfismo $f : M \to M$ tal que $I_f = A : H_p(M) \to H_p(M)$ na base canônica $\{\alpha_i\}$ de $H_p(M)$.*

Definição 1.5.3. *Seja D_p o subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$ consistindo das matrizes $A \in GL(n;\mathbb{Z})$ tais que $I_f = A$ para algum difeomorfismo $f : M \to M$.*

Definição 1.5.4. *Seja $\mathfrak{S}_n$ o grupo das permutações de ordem n, isto é, $\mathfrak{S}_n$ é o grupo das bijeções $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, definimos $B_\sigma = (b_{ij}) \in GL(n;\mathbb{Z})$ como sendo*

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = \sigma(j), \\ 0 & caso\ contrário. \end{cases}$$

Observemos que a aplicação contínua $\gamma : \mathfrak{S}_n \to GL(n;\mathbb{Z})$ definida por $\gamma(\sigma) = B_\sigma$ é um monomorfismo. De fato, para $\sigma, \mu \in \mathfrak{S}_n$, considere $B_\sigma = (a_{ij})$ e $B_\mu = (b_{jk})$, onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad e \quad b_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu(k) = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Faça $B_\sigma \cdot B_\mu = C = (c_{ik}) = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})$.

Seja $j = \mu(k)$. Então temos $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = a_{i1} \cdot 0 + \ldots + a_{ij} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij}$, ou seja

$$c_{ik} = 1 \Leftrightarrow a_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = \sigma(j) \Leftrightarrow i = \sigma \circ \mu(k),$$

$$c_{ik} = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \neq \sigma(j) \Leftrightarrow i \neq \sigma \circ \mu(k).$$

Isto implica que $C = B_{\sigma\circ\mu} = \gamma(\sigma \circ \mu)$ e tem-se que

$$\gamma(\sigma) \cdot \gamma(\mu) = B_\sigma \cdot B_\mu = B_{\sigma\circ\mu} = \gamma(\sigma \circ \mu)$$

e logo γ é um homomorfismo.

Mostremos que γ é injetiva, isto é, se $\sigma \neq \mu$, então $\gamma(\sigma) \neq \sigma(\mu)$. Considere $\gamma(\sigma) = B_\sigma = (a_{ij})$ e $\gamma(\mu) = B_\mu = (b_{ij})$. Como $\sigma \neq \mu$, existe l com $1 \leq l \leq n$ tal que $\sigma(l) \neq \mu(l)$. Faça $m = \mu(l) \neq \sigma(l) = k$ e tem-se que

$$\sigma(l) = k \Rightarrow a_{kl} = 1 \quad e \quad a_{ml} = 0,$$

$$\mu(l) = m \Rightarrow b_{ml} = 1 \quad e \quad b_{kl} = 0.$$

Logo $a_{kl} \neq b_{kl}$, ou seja, $B_\sigma \neq B_\mu$ e assim $\gamma(\sigma) \neq \gamma(\mu)$. Portanto γ é injetiva.

De agora em diante, identificaremos $\mathfrak{S}_n$ com $\gamma(\mathfrak{S}_n) \subset GL(n;\mathbb{Z})$ pelo isomorfismo $\gamma : \mathfrak{S}_n \to \gamma(\mathfrak{S}_n)$.

Seja $\eta : GL(n;\mathbb{Z}) \to GL(n;\mathbb{Z}_2)$ o homomorfismo canônico, definido por $\eta(X) = \overline{X}$, onde $X = (x_{ij})$, $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})$ e $\overline{x}_{ij} \equiv x_{ij}(mod 2)$, e seja $G_1 = \eta^{-1}(\eta(\mathfrak{S}_n))$. Uma matriz em $GL(n;\mathbb{Z})$ está em G_1 se, e somente se, cada uma de suas linhas e colunas contém exatamente um ímpar.

Observe que G_1 é um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$. Como identificamos $\mathfrak{S}_n$ com $\gamma(\mathfrak{S}_n)$, e $\gamma(\mathfrak{S}_n)$ é um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$, pois é a imagem de um grupo por um homomorfismo, então temos que $\mathfrak{S}_n$ é um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$. Agora, como cada matriz de $\mathfrak{S}_n$ possui entradas 0 ou 1 temos que $\eta(\mathfrak{S}_n) = \overline{\mathfrak{S}_n}$, e $\eta(\mathfrak{S}_n)$ é um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z}_2)$.

Mostremos então que G_1 é um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$:

(i) $I \in G_1$ pois $\eta(I) = \overline{I}$ que é o elemento identidade do grupo $\eta(\mathfrak{S}_n)$.

(ii) Sejam $A, B \in G_1$, logo temos $\eta(A \cdot B) = \eta(A)\eta(B)$ que pertence a $\eta(\mathfrak{S}_n)$ pois este é grupo. Logo $A \cdot B \in G_1$.

(iii) seja $A \in G_1$, então $\eta(A) \in \eta(\mathfrak{S}_n)$ que é grupo, logo $[\eta(A)]^{-1}$ está em $\eta(\mathfrak{S}_n)$ e como η é homomorfismo, temos $[\eta(A)]^{-1} = \eta(A^{-1})$. Portanto, $A^{-1} \in G_1$, ou seja, G_1 é subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$.

Além disso, seja G_2 o subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$ gerado por $\mathfrak{S}_n$ junto com a matriz diagonal $R \in GL(n;\mathbb{Z})$ com entradas da diagonal $-1, 1, \ldots, 1$, ou seja $G_2 =< \mathfrak{S}_n, R >$. Note que G_2 é um subgrupo de G_1, o que podemos ver diretamente da definição de subgrupo gerado.

Observação 1.5.5. η é um epimorfismo. De fato, para $X, Y \in GL(n;\mathbb{Z})$ temos que $\eta(X \cdot Y) = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y} = \eta(X) \cdot \eta(Y)$. Logo η é um homomorfismo. Verifiquemos agora que η é sobrejetiva: considere $X \in GL(n;\mathbb{Z}_2)$ então as entradas de X são $\overline{0}$ e $\overline{1}$, e o determinante de X é diferente de $\overline{0}$. Basta então considerar a matriz Y em $GL(n;\mathbb{Z})$ com entradas 0 onde é $\overline{0}$ em X e 1 onde é $\overline{1}$ em X. Assim, $\eta(Y) = X$ e portanto η é sobrejetiva.

Além disso, o índice $[GL(n;\mathbb{Z}) : G_1]$ de G_1 em $GL(n;\mathbb{Z})$ é igual a $2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)/n!$, por Newmam [17].

Observemos primeiro a ordem de $GL(n;\mathbb{Z}_2)$: seja $A \in GL(n;\mathbb{Z}_2)$, então o determinante de A é diferente de zero, ou seja, A é não singular. Escrevamos A como a matriz de seus vetores coluna, $A = [C_1, \ldots, C_n]$. Então, por A ser não singular seus vetores coluna são linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}_2$. Com isso vemos que existem $2^n - 1$ escolhas possíveis para C_1, uma vez que apenas $C_1 = 0$ deve ser excluído. Suponha que escolhemos $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Então C_{k+1} pode ser escolhido como qualquer vetor o qual não fica no subespaço gerado pelos vetores independentes $C_1, \ldots, C_k$. Como esse subespaço contém 2^k elementos e como existem 2^n vetores no total, C_{k+1} pode ser escolhido de $2^n - 2^k$ maneiras. Disso segue que A pode ser escolhido de $(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1})$ maneiras. Logo, a ordem de $GL(n;\mathbb{Z}_2)$ é

$$(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1}) = (2^n-1)2(2^{n-1}-1)\ldots 2^{n-1}(2^1-1)$$
$$= 2^{1+\ldots+n-1}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1) = 2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1).$$

No caso de $\eta(\mathfrak{S}_n)$, como $\mathfrak{S}_n$ é um grupo de permutação de n elementos, então a ordem de $\mathfrak{S}_n$ é $n!$. Assim, a ordem de $\eta(\mathfrak{S}_n)$ é $n!$. Com isso temos

$$\frac{\mid GL(n;\mathbb{Z}_2) \mid}{\mid \eta(\mathfrak{S}_n) \mid} = \frac{2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)}{n!}.$$

Mostremos agora que o índice $[GL(n;\mathbb{Z}) : G_1]$ de G_1 em $GL(n;\mathbb{Z})$ é igual a $[GL(n;\mathbb{Z}_2) : \eta(\mathfrak{S}_n)]$.

Assim, por Lucas [15], temos: seja $m = [GL(n;\mathbb{Z}_2) : \eta(\mathfrak{S}_n)]$. Note que a ordem de $GL(n;\mathbb{Z}_2)$ é finita e é igual a $2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)$. Em particular, m é finito e é igual a

$$\frac{2^{(n^2-n)/2}(2^1-1)(2^2-1)\ldots(2^n-1)}{n!}.$$

Consideremos as classes laterais à direita de $\mathfrak{S} = \eta(\mathfrak{S}_n)$ em $GL(n;\mathbb{Z}_2)$ dadas por $\mathfrak{S}k_1, \mathfrak{S}k_2, \ldots, \mathfrak{S}k_m$, onde $k_1, k_2, \ldots, k_m \in GL(n;\mathbb{Z}_2)$ são representantes de classes. Como η é um epimorfismo existem elementos $g_1, g_2, \ldots, g_m \in GL(n;\mathbb{Z})$ tais que $\eta(g_i) = k_i$. Afirmamos que $G_1g_1, G_1g_2, \ldots, G_1g_m$ são classes laterais à direita, distintas, de $GL(n;\mathbb{Z})$. Pois se $G_1g_i = G_1g_j$, então $g_jg_i^{-1} \in G_1$. Logo, $\eta(g_jg_i^{-1}) = \eta(g_j)\eta(g_i)^{-1} = k_jk_i^{-1} \in \mathfrak{S} = \eta(\mathfrak{S}_n)$ e segue-se que $\mathfrak{S}k_i = \mathfrak{S}k_j$ e $i = j$. Isto mostra que as classes laterais à direita $G_1g_1, G_1g_2, \ldots, G_1g_m$ são todas distintas.

Seja $g \in GL(n;\mathbb{Z})$. Mostremos que $g \in G_1g_i$ para algum g_i. Tem-se que $\eta(g) \in GL(n;\mathbb{Z}_2)$ e $\eta(g) \in \mathfrak{S}k_i$ para algum inteiro i, ou seja, $\eta(g) = \sigma k_i$ com $\sigma \in \mathfrak{S} = \eta(\mathfrak{S}_n)$. Considere $x = gg_i^{-1}$. Tem-se $\eta(x) = \eta(gg_i^{-1}) = \eta(g)\eta(g_i)^{-1} = \sigma k_ik_i^{-1} = \sigma \in \mathfrak{S}$. Logo, $x \in \eta^{-1}(\eta(\mathfrak{S}_n)) = G_1$, ou seja, $gg_i^{-1} \in G_1$. Assim $g \in G_1g_i$. Segue-se que todo elemento de $GL(n;\mathbb{Z})$ está em alguma classe à direita de G_1 em $GL(n;\mathbb{Z})$. Então, $G_1g_1, G_1g_2, \ldots, G_1g_m$ consistem de todas as classes à direita de G_1 em $GL(n;\mathbb{Z})$. Portanto,

$$[GL(n;\mathbb{Z}) : G_1] = m.$$

Outro modo de verificarmos a igualdade entre os índices segue do isomorfismo abaixo

$$\frac{GL(n;\mathbb{Z})}{\eta^{-1}(\eta(\mathfrak{S}_n))} \approx \frac{GL(n;\mathbb{Z}_2)}{\eta(\mathfrak{S}_n)}$$

uma vez que η é um epimorfismo.

Observação 1.5.6. O subgrupo G_2 é finito de ordem $2^n n!$. De fato, G_2 é isomorfo ao produto semi-direto de $(\mathbb{Z}_2)^n$ por $\mathfrak{S}_n$ com respeito a ação padrão de $\mathfrak{S}_n$ sobre $(\mathbb{Z}_2)^n$.

Como $G_2 =< \mathfrak{S}_n, R >$, sabemos que a ordem de $\mathfrak{S}_n = n!$ e o produto de elementos de $\mathfrak{S}_n$ por R apenas muda o elemento -1 de linha e coluna, e quando multiplicamos por mais fatores R podemos fazer aparecer mais entradas -1. Logo, fixada uma matriz de $\mathfrak{S}_n$ podemos trocar alguns 1 por -1 e como as matrizes de $\mathfrak{S}_n$ possuem n linhas, podemos fazer essa troca de 2^n maneiras diferentes, ou seja, para cada matriz fixada de $\mathfrak{S}_n$ podemos encontrar uma bijeção que troca 1 por -1, entre as n linhas da matriz fixada e o conjunto das partes de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Logo, a ordem de G_2 é $2^n n!$.

Capítulo 2

Classificação das matrizes que representam automorfismos

Todo difeomorfismo $f : M \to M$ induz um automorfismo f_* de $H_p(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, o qual pode ser considerado como um elemento de $GL(n;\mathbb{Z}) = \{A \in M(n \times n;\mathbb{Z}); detA = \pm 1\}$ e seja D_p o subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$ consistindo de todos os automorfismos que são induzidos por difeomorfismos de M. O resultado principal deste capítulo é o Teorema 2.2.1, o qual nos diz que

(i) D_p coincide com $GL(n;\mathbb{Z})$ para $p = 1, 3, 7$,

(ii) D_p coincide com G_1 (o subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$, no qual cada elemento possui apenas um ímpar em cada linha e coluna), para p ímpar com $p \neq 1, 3, 7$,

(iii) D_p coincide com $G_2 =< \mathfrak{S}_n, R >$ (onde $\mathfrak{S}_n$ é o grupo das matrizes de permutação e R é a matriz com entradas na diagonal -1, 1, ..., 1), para p par.

Os lemas da seção 1 e o Teorema 2.2.1 da seção 2, podem ser encontrados em Lucas [14].

2.1 Lemas básicos

Nesta seção veremos alguns lemas necessários a demonstração do teorema de classificação das matrizes que representam automorfismos. O primeiro lema será usado para mostrarmos que D_p contém os subgrupos $GL(n;\mathbb{Z}), G_1, G_2$, dependendo de p.

Lema 2.1.1. *1. O grupo $GL(n;\mathbb{Z})$ é gerado pelas matrizes $\mathfrak{S}_n$, R e a matriz*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. O grupo G_1 é gerado pelas matrizes de $\mathfrak{S}_n$, R e a matriz

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Demonstração:

1. Se X está no subgrupo gerado por todas as matrizes de $\mathfrak{S}_n$, R e T, ou seja, $X \in < \mathfrak{S}_n, R, T >$ então $detX = \pm 1$ e $X \in GL(n;\mathbb{Z})$.

   Mostremos que para qualquer matriz $A \in GL(n;\mathbb{Z})$, então $A \in < \mathfrak{S}_n, R, T >$. Para isto, basta mostrar que A pode ser transformada na matriz identidade $I_{n\times n}$ por um número finito de operações elementares-linha e elementares-coluna (ver definições dadas no capítulo 1), já que estas operações são representadas por multiplicações pelos elementos citados acima.

   Isto será feito por indução sobre n.

   Se $n = 1$, então o resultado segue imediatamente.

   Suponha $n \geq 2$, e considere a matriz A como sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Para a última coluna de A, defina

$$v = min\{|\, a_{in} \,|; 1 \leq i \leq n, a_{in} \neq 0\}.$$

Fazendo uma operação elementar-linha do tipo (i), vista no capítulo 1, se necessário, pode-se assumir que $v = \mid a_{nn} \mid$. Fazendo operações elementares-linha do tipo (iii), vista no capítulo 1, obtém-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} + v_1 a_{n1} & a_{12} + v_1 a_{n2} & \dots & a_{1n-1} + v_1 a_{nn-1} & a_{1n} + v_1 a_{nn} \\ a_{21} + v_2 a_{n1} & a_{22} + v_2 a_{n2} & \dots & a_{2n-1} + v_2 a_{nn-1} & a_{2n} + v_2 a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} + v_{n-1} a_{n1} & a_{n-12} + v_{n-1} a_{n2} & \dots & a_{n-1n-1} + v_{n-1} a_{nn-1} & a_{n-1n} + v_{n-1} a_{nn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

onde escolhemos $v_i, 1 \leq i \leq n-1$, tais que

(a) $v_i = 0$ se $a_{in} = 0$

(b) se $a_{in} \neq 0$, então $\mid a_{in} + v_i a_{nn} \mid < \mid a_{in} \mid$.

Repetindo esta operação, pode-se obter uma matriz da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & \dots & b_{n-1n-1} & 0 \\ * & * & \dots & * & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Seja

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-11} & b_{n-12} & \dots & b_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

Como $detA = \pm 1$, segue que $b_{nn} = \pm 1$ e $detB = \pm 1$, ou seja, $B \in GL(n-1; \mathbb{Z})$.

Aplicando uma operação elementar-linha do tipo (ii), vista no capítulo 1, se necessário, podemos assumir que $b_{nn} = 1$ e por operações elementares-coluna, pode-se obter a matriz

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela hipótese de indução, obtém-se a matriz identidade $I_{n \times n}$ por operações elementares. Portanto $A \in < \mathfrak{S}_n, R, T >$ e $GL(n; \mathbb{Z}) = < \mathfrak{S}_n, R, T >$.

2. Denotemos os homomorfismos γ, η, já definidos anteriormente, por γ_n, η_n, respectivamente. Recordemos que para $\eta_n : GL(n;\mathbb{Z}) \to GL(n;\mathbb{Z}_2)$ uma matriz $A \in GL(n;\mathbb{Z})$ está em G_1 se, e somente se, A contém em todas as linhas e colunas um único elemento ímpar e os outros todos pares. Também pela definição de γ, estamos identificando $\mathfrak{S}_n$ com um subgrupo de $GL(n;\mathbb{Z})$ por γ_n para todo $n \geq 2$.

   Como $\eta_n(R), \eta_n(U) \in \eta_n(\mathfrak{S}_n)$, obviamente temos que $< \mathfrak{S}_n, R, U > \subset G_1$. seja $A \in G_1$. Mostremos que $A \in < \mathfrak{S}_n, R, U >$. Para isto, basta mostrar que A pode ser transformada na matriz identidade $I_{n\times n}$ por um número finito de operações elementares, mas aqui, em lugar de operação do tipo (iii), temos que usar a operação do tipo a seguir:

   $(iii)'$ A adição de qualquer múltiplo par de uma linha a qualquer outra linha (similarmente para operações elementares-coluna).

   Vamos mostrar isso por indução sobre n.

   Se $n = 1$, é óbvio. Suponha que $n \geq 2$ e a matriz A seja dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   Defina

$$v = min\{|a_{in}|; 1 \leq i \leq n, a_{in} \neq 0\}.$$

   Por uma operação elementar-linha do tipo (i) pode-se assumir que $v = |a_{nn}|$. Por operações elementares-linha sobre a matriz A, obtém-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} + v_1 a_{n1} & a_{12} + v_1 a_{n2} & \dots & a_{1n-1} + v_1 a_{nn-1} & a_{1n} + v_1 a_{nn} \\ a_{21} + v_2 a_{n1} & a_{22} + v_2 a_{n2} & \dots & a_{2n-1} + v_2 a_{nn-1} & a_{2n} + v_2 a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} + v_{n-1} a_{n1} & a_{n-12} + v_{n-1} a_{n2} & \dots & a_{n-1n-1} + v_{n-1} a_{nn-1} & a_{n-1n} + v_{n-1} a_{nn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   onde $v_i \equiv 0(mod 2)$ e pode-se escolher v_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, de tal modo que

   (c) se $a_{in} = 0$, então $v_i = 0$

   (d) se $a_{in} \neq 0$ e $|a_{in}| > |a_{nn}|$, então $|a_{in} + v_i a_{nn}| < |a_{in}|, v_i \equiv 0(mod 2)$

   (e) se $a_{in} \neq 0$ e $|a_{in}| = |a_{nn}|$, então $v_i = 0$.

Se $a_{1n} = a_{2n} = \ldots = a_{n-1n} = 0$, como $detA = \pm 1$, então por uma operação elementar-linha do tipo (ii) se necessário, podemos assumir que $a_{nn} = 1$. Como $A \in G_1$ segue que $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn-1}$ são todos pares, em seguida, aplicando as operações elementares-coluna do tipo $(iii)'$ podemos assumir que A é da forma

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para alguma matriz $C \in GL(n-1;\mathbb{Z})$.

Se não ocorrer a hipótese do parágrafo anterior, então podemos escolher v_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, como em $(c), (d), (e)$. Neste caso, se $\mid a_{nn} \mid$ é um número par, pode ocorrer que para algum outro $\mid a_{kn} \mid$ tenhamos $\mid a_{kn} \mid = \mid a_{nn} \mid$ e assim, por (e), $v_k = 0$. Mas nem todos os $v_i's$ são nulos, pois por hipótese $A \in G_1$, isto é, A contém em todas as linhas e colunas um único elemento ímpar. Logo, para algum i, podemos aplicar (d), ou seja, $\mid a_{in} + v_i a_{nn} \mid < \mid a_{in} \mid$. Seja $\mid a_{nn} \mid$ um número ímpar. Como por hipótese para algum i, $a_{in} \neq 0$ e é par, segue que $\mid a_{in} \mid \neq \mid a_{nn} \mid$. Portanto para algum i, $v_i \neq 0$ também. Repetindo este tipo de operação um número finito de vezes, podemos assumir que a hipótese do parágrafo anterior ocorre.

Mostremos que a matriz C está em $\eta_{n-1}^{-1}(\eta_{n-1}(\mathfrak{G}_{n-1})) \subset GL(n-1;\mathbb{Z})$. Como a matriz $A \in G_1$, isto significa que toda linha e toda coluna de A contém apenas um elemento ímpar e os outros são todos pares. Então, para C também apenas um elemento de cada linha e cada coluna é um número ímpar e os outros são pares. Logo $C \in \eta_{n-1}^{-1}(\eta_{n-1}(\mathfrak{G}_{n-1}))$.

Aplicando a hipótese de indução, obtém-se a matriz identidade $I_{n\times n}$ por operações elementares dos tipos $(i), (ii), (iii)'$. Portanto $A \in < \mathfrak{G}_n, R, U >$.

□

Os próximos dois lemas serão utilizados para demonstrar que D_p está contido nos subgrupos $GL(n;\mathbb{Z}), G_1, G_2$, dependendo de p.

Lema 2.1.2. *Se p é ímpar com $p \neq 1, 3, 7$, então para todo difeomorfismo $f : M \to M$, temos $I_f \in G_1$.*

Demonstração: Seja

$$I_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

realizada pelo difeomorfismo f, com determinante igual a ± 1.

Considere a seguinte composta

$$S^p \times S^p \xrightarrow{k} M \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} S^p$$

onde k e π serão definidas a seguir. Sejam os geradores canônicos $w_1, w_2 \in \pi_p(S^p \times S^p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, w \in \pi_p(S^p) \cong \mathbb{Z}$ e o homomorfismo abaixo:

$$(\pi \circ f \circ k)_\# : \pi_p(S^p \times S^p) \to \pi_p(S^p)$$

definido por

$$(\pi \circ f \circ k)_\#(w_1) = a_{ji}w,$$

$$(\pi \circ f \circ k)_\#(w_2) = a_{jl}w,$$

onde k é a inclusão para i e l ésimos fatores e π é a projeção no j-ésimo fator. Tomemos a restrição de $\pi \circ f \circ k$ a $S^p \vee S^p = S^p \times \{v\} \cup \{u\} \times S^p \subset S^p \times S^p$, onde $u, v \in S^p$. Então pela definição de Colchete de Whitehead, a restrição $\pi \circ f \circ k \mid_{S^p \vee S^p}$ determina um elemento de $\pi_{2p-1}(S^p)$ que é o Colchete de Whitehead dado por:

$$[a_{ji}w, a_{jl}w] = a_{ji}a_{jl}[w, w],$$

pois o Colchete de Whitehead é bilinear. Como S^p não é um H-espaço quando p é ímpar com $p \neq 1, 3, 7$, então por Cartan [3] (prop. 3 e pag. 18) temos que $[w, w]$ é diferente de zero e é um elemento de ordem 2. Como $\pi \circ f \circ k$ restrita a $S^p \vee S^p$ pode ser estendida a $S^p \times S^p$, então por Cartan [3] (prop. 2) obtemos

$$a_{ji}a_{jl}[w, w] = 0 (\Leftrightarrow a_{ji}a_{jl} \equiv 0 (mod 2)).$$

Portanto, o produto de dois elementos quaisquer da mesma linha de I_f é sempre um número par. Como $det I_f = \pm 1$, cada linha e cada coluna da matriz I_f, tem exatamente um número ímpar, os demais são todos pares, isto implica que $\eta(I_f) \in \eta(\mathfrak{S}_n)$, ou seja, $I_f \in \eta^{-1}(\eta(\mathfrak{S}_n)) = G_1$. □

Lema 2.1.3. *Se p é par, então para todo difeomorfismo $f : M \to M$ temos $I_f \in G_2$.*

Demonstração: Sejam $I_f = (a_{ij})$ e $\{\alpha_i^*\}$ a base de $H^p(M) \cong Hom(H_p(M);\mathbb{Z})$ dual a $\{\alpha_i\}$. Pelo Teorema da Dualidade de Poincaré, vemos que $\alpha_1^* \smile \alpha_1^* = \alpha_2^* \smile \alpha_2^* = \ldots = \alpha_n^* \smile \alpha_n^* = 0$, e que $\{\alpha_i^* \smile \alpha_j^* : 1 \leq i < j \leq n\}$ é uma base de $H^{2p}(M) \cong H_{(n-2)p}(M) \cong \mathbb{Z}^{\frac{n!}{(n-2)!2!}}$. O homomorfismo f^* induzido por f na cohomologia $H^p(M)$ corresponde a transposta I_f^t de I_f com respeito a base dual. Como p é par, $\alpha_i^* \smile \alpha_j^* = \alpha_j^* \smile \alpha_i^*$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Assim, para todo k com $1 \leq k \leq n$, temos $f^*(\alpha_k^*) = \Sigma_{i=1}^n a_{ki}\alpha_i^*$ e

$$0 = f^*(0) = f^*(\alpha_k^* \smile \alpha_k^*) = f^*(\alpha_k^*) \smile f^*(\alpha_k^*) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ki}a_{kj}(\alpha_i^* \smile \alpha_j^*).$$

Isso implica que $a_{ki}a_{kj} = 0$ para $i \neq j$. Como $detI_f = \pm 1$, temos que $I_f \in G_2$. □

2.2 Teorema de classificação das matrizes que representam automorfismos

Agora veremos uma generalização do caso estudado por Wall [22] e Goldstein [6] quando $n = 2$.

Teorema 2.2.1. *Temos*

$$D_p = \begin{cases} GL(n;\mathbb{Z}) & se \quad p = 1, 3, 7, \\ G_1 & se \quad p \text{ é ímpar e } p \neq 1, 3, 7, \\ G_2 & se \quad p \text{ é par.} \end{cases}$$

Demonstração: Para $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, seja $f_\sigma : M \to M$ o difeomorfismo definido por

$$f_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}), \ (x_1, \ldots, x_n) \in M$$

A matriz de representação I_{f_σ} de $(f_\sigma)_* : H_p(M) \to H_p(M)$ com respeito a base $\{\alpha_i\}$ é dada por $\sigma \in \mathfrak{S}_n \subset GL(n;\mathbb{Z})$. Sendo $\sigma = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, podemos determinar a_{ij} através da composição

$$S_1 \xrightarrow{k_1} M \xrightarrow{f_\sigma} M \xrightarrow{\pi_i} S^p$$

onde $S_1 = S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\} \subset M$.

Para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$(\pi_i \circ f_\sigma \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = \begin{cases} x & \text{se } i = \sigma^{-1}(1) \\ * & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que a_{i1} é igual ao grau de $\pi_i \circ f_\sigma \circ k_1$. Como $deg(\pi_i \circ f_\sigma \circ k_1)$ é igual ao grau da aplicação constante para $i \neq \sigma^{-1}(1)$, temos $a_{i1} = 0$ para $i \neq \sigma^{-1}(1)$. Como $deg(\pi_{\sigma^{-1}(1)} \circ f_\sigma \circ k_1)$ é igual ao grau da aplicação identidade, temos que $a_{\sigma^{-1}(1)1} = 1$.

Similarmente os graus de $\pi_i \circ f_\sigma \circ k_j$, da j-ésima coluna de I_{f_σ} são $a_{\sigma^{-1}(j)j} = 1$ e os demais a_{ij} são todos nulos para $2 \leq j \leq n$.

Quando escrevemos na forma matricial obtemos I_{f_σ}.

Seja $r : S^p \to S^p$ a reflexão, definida por

$$r(y_1, \ldots, y_{p+1}) = (-y_1, \ldots, y_{p+1}), \ (y_1, \ldots, y_{p+1}) \in S^p$$

onde identificamos S^p com a esfera unitária em $\mathbb{R}^{p+1}$. O grau de r é igual a -1. Assim, para o difeomorfismo $f_r : M \to M$, definido por

$$f_r(x_1, \ldots, x_n) = (r(x_1), \ldots, x_n), \ (x_1, \ldots, x_n) \in M$$

Se a matriz de representação I_{f_r} é igual a $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, podemos determinar a_{i1} através da composição

$$S^p \xrightarrow{k_1} M \xrightarrow{f_r} M \xrightarrow{\pi_i} S^p$$

para $i = 1, \ldots, n$. Temos que se $x = (y_1, \ldots, y_{p+1}) \in S^p$ então

$$(\pi_1 \circ f_r \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = r(x)$$

$$(\pi_2 \circ f_r \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = *$$

$$\vdots$$

$$(\pi_n \circ f_r \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = *$$

Observe que a_{i1} é igual ao grau de $\pi_i \circ f_\sigma \circ k_1$. Como $deg(\pi_i \circ f_\sigma \circ k_1)$ é igual ao grau da aplicação constante para $i \neq 1$, temos $a_{i1} = 0$ para $i \neq 1$. Como $deg(\pi_1 \circ f_\sigma \circ k_1) = deg(r)$, temos que $a_{11} = -1$.

Usando um raciocínio análogo, podemos mostrar que $a_{ii} = 1$ para $i = 2, 3, \ldots, n$ e que $a_{ij} = 0$ para $j \geq 2$ e $i \neq j$.

Note que a matriz de representação I_{f_r} de $(f_r)_*$ é igual a R dada no capítulo anterior.

Por Adams [1], temos que S^p tem a estrutura de um H-espaço se, e somente se, $p = 1, 3, 7$.

Assim, quando $p = 1, 3, 7$, para $x_1, x_2 \in S^p$, denotamos por $x_1 x_2$ o produto de x_1 e x_2 induzido pela estrutura de H-espaço de S^p. Note que para todo $x \in S^p$, temos o inverso de "x",

que denotaremos por x^{-1}. Definamos $f_t : M \to M$ por $f_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1x_2, x_2, \ldots, x_n)$. Observe que f_t é um difeomorfismo cujo inverso é dado por

$$f_t^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1x_2^{-1}, x_2, \ldots, x_n).$$

De fato, e para mostrarmos isso, provaremos que $\lambda : S^p \to S^p$ dada por $\lambda(x) = x^{-1}$ é uma aplicação C^∞, quando $p = 1, 3, 7$.

1. (Caso $p = 1$) Mostremos que $\lambda : S^1 \to S^1$, $\lambda(x) = x^{-1}$ é uma aplicação C^∞. Vamos identificar $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$ (Complexos). Então os elementos da esfera $S^1 \subset \mathbb{C}$ dada por

   $$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid = 1\}$$

   são os complexos de módulo 1.

   Sabemos que todo complexo não nulo $z \in \mathbb{C}$ possui inverso multiplicativo denotado por z^{-1}. É fácil verificar para $z \in S^1$ que $\overline{z} = z^{-1}$, onde $\overline{z} = a - bi$ é o conjugado do complexo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Assim a aplicação

   $$\lambda_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \lambda_1(a, b) = (a, -b)$$

   é C^∞, cuja restrição

   $$\lambda_1 \mid_{S^1} : S^1 \to S^1, \ \lambda_1(z) = z^{-1} = \overline{z}$$

   também é C^∞, pois S^1 é uma subvariedade C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

2. (Caso $p = 3$) Mostremos que $\lambda : S^3 \to S^3$, $\lambda(x) = x^{-1}$ é C^∞. Podemos identificar $\mathbb{R}^4$ com os quatérnios $\mathbb{H}$ por

   $$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto w = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k, \ w \in S^3,$$

   o seu conjugado $\overline{w} = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k$ satisfaz $\overline{w} = w^{-1}$. Segue-se então que

   $$\lambda_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

   definida por

   $$\lambda_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$$

   é C^∞, cuja restrição

   $$\lambda_2 \mid_{S^3} = \lambda : S^3 \to S^3, \ \lambda(w) = w^{-1} = \overline{w}$$

   também é C^∞, pois S^3 é uma subvariedade C^∞ de $\mathbb{R}^4$.

3. (Caso $p = 7$) Mostremos que $\lambda : S^7 \to S^7$, $\lambda(x) = x^{-1}$ é C^∞.

   o conjunto dos números octônios $\mathbb{O}$ (ou números de Cayley) é definido como

$$\mathbb{O} = \{c = (w_1, w_2); w_1, w_2 \in \mathbb{H}\}$$

   A multiplicação de dois octônios $c_1 = (w_1, w_2)$ e $c_2 = (w_3, w_4)$ é definida por

$$c_1c_2 = (w_1, w_2)(w_3, w_4) = (w_1w_3 - \overline{w_4}w_2, w_4w_1 + w_2\overline{w_3})$$

   Os octônios tem um elemento neutro $e = (1, 0)$ que satisfaz

$$ec = ce = c$$

   para todo $c \in \mathbb{O}$. Também é natural identificar $e = (1, 0) \in \mathbb{O}$ com o elemento $1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{O}$. Definimos o conjugado $\overline{c}$ de um octônio $c = (w_1, w_2)$ como sendo

$$\overline{c} = (\overline{w_1}, -w_2)$$

   Então $c\overline{c} = \mid c \mid^2 e = (\mid w_1 \mid^2 + \mid w_2 \mid^2)e$ pode ser identificado com o número real não negativo $\mid c \mid^2$, e $\mid c \mid^2 = 0$ se, e somente se, $c = (0, 0)$.

   Se $c \neq (0, 0)$, então o inverso de c, denotado por c^{-1}, é dado por

$$c^{-1} = \overline{c} / \mid c \mid^2$$

   Observe que nos octônios $\mathbb{O}$ a multiplicação é distributiva com relação a adição e que forma uma álgebra de divisão, isto é, valem todos os axiomas de um corpo com exceções da comutatividade e associatividade. Como fizemos no caso anterior, os octônios podem se identificados com o $\mathbb{R}^8$ e os elementos da esfera $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ dada por

$$S^7 = \{c \in \mathbb{O}; \mid c \mid^2 = 1\}$$

   são os octônios de módulo 1, então $c^{-1} = \overline{c}$ para $c \in S^7$. Segue-se de modo similar ao anterior que $\lambda : S^7 \to S^7$, $\lambda(x) = x^{-1}$ é C^∞.

   Com isso podemos concluir que $f_t^{-1} : M \to M$ é de classe C^∞, ou seja, $f_t : M \to M$ definida por $f_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1x_2, x_2, \ldots, x_n)$ é um difeomorfismo.

Ainda para $p = 1, 3, 7$, considere a composição abaixo

onde $S_1 = S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\} \subset M$.

Seja $f : S^p \times S^p \to S^p$ a multiplicação dos complexos se $p = 1$, dos quatérnios se $p = 3$ e dos octônios se $p = 7$, de norma igual a 1, e vamos assumir que $* = x_0$ é o elemento neutro de S^p. Note que $f_1, f_2 : S^p \to S^p$ definidas por $f_1(x) = f(x, x_0)$ e $f_2(x) = f(x_0, x)$ respectivamente são aplicações de grau 1, pois são homotópicas a aplicação identidade. Considere as aplicações compostas abaixo

$$(\pi_1 \circ f_t \circ k_1)(x_1, *, \ldots, *) = x_1 * = x_1 = f_1(x_1)$$

$$(\pi_2 \circ f_t \circ k_1)(x_1, *, \ldots, *) = *$$

$$\vdots$$

$$(\pi_n \circ f_t \circ k_1)(x_1, *, \ldots, *) = *$$

Assim $deg(\pi_1 \circ f_t \circ k_1) = deg(f_1) = 1$ e $a_{11} = 1$. Os graus de $(\pi_i \circ f_t \circ k_1)$, para $i = 2, 3, \ldots, n$, são iguais a zero, portanto $a_{i1} = 0$ para $i \geq 2$.

Considere agora, as aplicações compostas abaixo

$$S_2 \xrightarrow{k_2} M \xrightarrow{f_t} M \xrightarrow{\pi_i} S^p$$

onde $S_2 = \{*\} \times S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\} \subset M$, e

$$(\pi_1 \circ f_t \circ k_2)(*, x_2, *, \ldots, *) = *x_2 = x_2 = f_2(x_2)$$

$$(\pi_2 \circ f_t \circ k_2)(*, x_2, *, \ldots, *) = x_2$$

$$(\pi_3 \circ f_t \circ k_2)(*, x_2, *, \ldots, *) = *$$

$$\vdots$$

$$(\pi_n \circ f_t \circ k_2)(*, x_2, *, \ldots, *) = *$$

Então, $deg(\pi_1 \circ f_t \circ k_2) = deg(f_2) = 1$. Portanto, $a_{12} = 1$. Similarmente obtém-se $a_{22} = 1$, $a_{i2} = 0$ para $i \geq 3$. Com um raciocínio análogo, temos $a_{ii} = 1$ para $i \geq 3$ e $a_{ij} = 0$ para $j \geq 3$ e $i \neq j$.

Com isso, vemos que para $p = 1, 3, 7$, a matriz de representação de $(f_t)_*$ é dada por

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-2}$$

onde I_{n-2} denota a matriz identidade $(n-2) \times (n-2)$.

Assim T é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, para cada $x \in S^p$ definamos as aplicações C^∞,

$$\theta_x : S^p \to S^p \quad e \quad \varphi_x : S^p \to S^p$$

por

$$\theta_x(y) = y - 2 < x, y > x \quad e \quad \varphi_x(y) = x - 2 < x, y > y,$$

para $y \in S^p$, respectivamente, onde $<,>$ denota o produto interno de $\mathbb{R}^{p+1}$. A aplicação θ_x é a reflexão com respeito ao hiperplano H ortogonal a x.

Vamos verificar os graus destas aplicações: como θ_x é uma reflexão, o grau de θ_x é igual a -1. Para determinar o grau de φ_x, primeiramente observemos que para todo x, x', pontos de S^p, φ_x e $\varphi_{x'}$ são homotópicas, pois S^p é conexa por caminhos. Como o grau de uma aplicação é um invariante por homotopia, vamos calcular o grau de φ_x no ponto $x = (0, \dots, 0, 1) \in S^p$. Neste caso, para $y = (y_1, \dots, y_{p+1}) \in S^p$, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_x(y) &= (0, \dots, 0, 1) - 2y_{p+1}(y_1, \dots, y_{p+1}) \\ &= (-2y_{p+1}y_1, \dots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2). \end{aligned}$$

Seja $q = (0, \dots, 0, -1) \in S^p$, então $\varphi_x(y) = q$ se, e somente se,

$$(-2y_{p+1}y_1, \dots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2) = (0, \dots, 0, -1).$$

Isto implica que $\varphi_x^{-1}(q) = \{(0, \dots, 0, +1), (0, \dots, 0, -1)\}$. Denotemos

$$q_+ = (0, \dots, 0, +1) \quad e \quad q_- = (0, \dots, 0, -1)$$

Para calcular $d_{q_+}\varphi_x$ e $d_{q_-}\varphi_x$, vamos especificar claramente os espaços tangentes $T_{q_+}S^p$ e $T_{\varphi_x(q_+)}S^p = T_qS^p = T_{q_-}S^p$. Como sabemos o espaço tangente a S^p num ponto $u \in S^p$, T_uS^p, consiste de vetores normais a u no ponto u. Então $T_{q_+}S^p$ é o espaço p-dimensional, cuja base é

$$\{\partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_p\}.$$

Aqui, estamos denotando $(y_1, \ldots, y_{p+1})$ como coordenadas de $\mathbb{R}^{p+1}$. Vamos fixar a orientação de S^p por esta base ordenada. Então, a base orientada de $T_q S^p = T_{q_-} S^p$ é

$$\{\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_{p-1}, -\partial/\partial y_p\}.$$

Agora vamos determinar a matriz $d_{q_+}\varphi_x$ em relação as bases acima.

Usando a equação

$$\varphi_x(y) = (-2y_{p+1}y_1, \ldots, -2y_{p+1}y_p, 1 - 2y_{p+1}^2)$$

tem-se

$$d_{q_+}\varphi_x(\partial/\partial y_1) = (-2y_{p+1}, 0, \ldots, 0)\,|_{y=q_+} = (-2, 0, \ldots, 0) = -2(\partial/\partial y_1)$$

$$\vdots$$

$$d_{q_+}\varphi_x(\partial/\partial y_{p-1}) = (0, \ldots, 0, -2y_{p+1}, 0, 0)\,|_{y=q_+} = (0, \ldots, 0, -2, 0, 0) = -2(\partial/\partial y_{p-1}).$$

Finalmente calculamos

$$d_{q_+}\varphi_x(\partial/\partial y_p) = (0, \ldots, 0, -2y_{p+1}, 0)\,|_{y=q_+} = (0, \ldots, 0, -2, 0) = -2(\partial/\partial y_p) = 2(-\partial/\partial y_p).$$

Na forma matricial, podemos escrever $d_{q_+}\varphi_x$ como matriz de ordem p

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Com isso concluímos que q_+ é ponto regular e $deg_{q_+}(\varphi_x) = (-1)^{p-1} = (-1)^{p+1}$.

Com um argumento similar mostra-se que a matriz de $d_{q_-}(\varphi_x)$ é da forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}.$$

Consequentemente, q_- também é um ponto regular e $deg_{q_-}(\varphi_x) = 1$.

Logo q é um valor regular e o grau de φ_x é igual a $(-1)^{p+1} + 1$.

Portanto as aplicações $\theta_x : S^p \to S^p$ e $\varphi_x : S^p \to S^p$ tem graus -1 e $(-1)^{p+1} + 1$, respectivamente.

Se p é ímpar, então para o difeomorfismo $f_u : M \to M$ definido por

$$f_u(x_1, \ldots, x_n) = (\theta_{x_2}(x_1), x_2, \ldots, x_n), \ (x_1, \ldots, x_n) \in M$$

a matriz de representação de $(f_u)_*$ é dada por $I_{f_u} = UR$, onde

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-2}$$

ou seja,

$$UR = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato, para isso considere a composta abaixo

$$S_1 \xrightarrow{k_1} M \xrightarrow{f_u} M \xrightarrow{\pi_i} S^p$$

onde $S_1 = S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\} \subset M$

Logo, para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$(\pi_1 \circ f_u \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = \theta_*(x)$$

$$(\pi_2 \circ f_u \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = *$$

$$\vdots$$

$$(\pi_n \circ f_u \circ k_1)(x, *, \ldots, *) = *$$

Assim, $deg(\pi_1 \circ f_u \circ k_1) = deg(\theta_{x_2}) = -1$ e $a_{11} = -1$, e os graus de $(\pi_i \circ f_u \circ k_1)$ para $i \geq 2$ são iguais a zero, logo $a_{i1} = 0$ para $i \geq 2$.

Considere agora a composição

$$S_2 \xrightarrow{k_2} M \xrightarrow{f_u} M \xrightarrow{\pi_i} S^p$$

onde $S_2 = \{*\} \times S^p \times \{*\} \times \ldots \times \{*\} \subset M$.

Para $i = 1, 2, \ldots, n$, temos

$$(\pi_1 \circ f_u \circ k_2)(*, x, *, \ldots, *) = \theta_x(*) = \varphi_*(x)$$

$$(\pi_2 \circ f_u \circ k_2)(*, x, *, \ldots, *) = x$$

$$(\pi_3 \circ f_u \circ k_2)(*, x, *, \ldots, *) = *$$
$$\vdots$$
$$(\pi_n \circ f_u \circ k_2)(*, x, *, \ldots, *) = *$$

Assim, $deg(\pi_1 \circ f_u \circ k_2) = deg(\varphi_*) = 2$, já que p é ímpar e $a_{12} = 2$, agora, $deg(\pi_2 \circ f_u \circ k_2)$ é igual ao grau da aplicação identidade, logo é 1, e $a_{22} = 1$, e os graus de $\pi_i \circ f_u \circ k_2$ para $i \geq 3$ são iguais a zero, logo $a_{i2} = 0$ para $i \geq 3$.

Similarmente, temos que $a_{ii} = 1$ para $i \geq 3$ e $a_{ij} = 0$ para $j \geq 3$ e $i \neq j$. Portanto, a matriz de representação de $(f_u)_*$ é dada por UR.

Usando o Lema 2.1.1 junto com os difeomorfismos $f_\sigma, (\sigma \in \mathfrak{S}_n)$, f_r, f_l e f_u, vemos que D_p contém os subgrupos $GL(n;\mathbb{Z}), G_1, G_2$.

Combinando os Lemas 2.1.2 e 2.1.3, vemos que D_p está contido nos subgrupos $GL(n;\mathbb{Z})$, G_1, G_2. E com isso completamos a prova do Teorema 2.2.1.

□

2.3 Alguns resultados especiais

(a) Seja $A \in GL(n;\mathbb{Z})$ uma matriz realizada por um difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$. Então temos que f preserva a orientação de M se, e somente se,

1. $detA = 1$ quando p é ímpar;
2. O número de entradas negativas de A é par quando p é par.

De fato, se f preserva a orientação de M sabemos então que $detA = 1$ para qualquer p, em particular para o caso em que p é ímpar. Observe que no caso onde p é par, pelo Lema 2.1.3, temos que $A \in G_2$, e como toda matriz em G_2 possui apenas um elemento não nulo (1 *ou* -1) em cada linha e cada coluna, concluímos que seu determinante é o produto desses elementos não nulos, e temos por hipótese que f preserva a orientação de M, ou seja, $detA = 1$ então a matriz deve possuir um número par de entradas negativas.

Reciprocamente, se $detA = 1$ quando p é ímpar, então sabemos que f preserva a orientação de M. Agora, se quando p é par o número de entradas negativas em A é par, temos pelo Lema 2.1.3 que $detA = 1$, e logo, f preserva a orientação de M.

(b) D_p^+, o grupo formado pelas matrizes que podem ser realizadas por um difeomorfismo que preserva a orientação, é um subgrupo de D_p de índice 2, uma vez que det é

um epimorfismo de D_p em $\mathbb{Z}_2$, onde D_p^+ é o núcleo de *det*. Assim, pelo teorema do isomorfismo

$$\frac{D_p}{D_p^+} \approx \mathbb{Z}_2$$

e como

$$\frac{\mid D_p \mid}{\mid D_p^+ \mid} = [D_p : D_p^+] \; e \; \frac{\mid D_p \mid}{\mid D_p^+ \mid} = \mid \mathbb{Z}_2 \mid = 2$$

obtemos

$$[D_p : D_p^+] = 2.$$

Em particular, quando p é ímpar e D_p é igual a $GL(n;\mathbb{Z})$ ou a G_1, temos que $D_p^+ = D_p \cap SL(n;\mathbb{Z})$, onde $SL(n;\mathbb{Z}) = \{A \in M(n;\mathbb{Z}); detA = 1\}$. Quando p é par $D_p = G_2$, sabemos que $\mid G_2 \mid = 2^n n!$ e $[G_2 : D_p^+] = 2$, logo $\mid D_p^+ \mid = 2^{n-1}n!$ e como G_2 é isomorfo ao produto semi-direto de $\mathbb{Z}_2^n$ por $\mathfrak{S}_n$ temos que D_p^+ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ por $\mathfrak{S}_n$.

(c) Seja $\pi_0 Diff(M)$ o grupo de difeotopia de M, isto é, o grupo das classes de isotopia de difeomorfismos de M. A aplicação que associa à classe de um difeomorfismo f de M a matriz I_f é o homomorfismo natural $\varphi : \pi_0 Diff(M) \to GL(n;\mathbb{Z})$, cuja a imagem foi determinada no Teorema 2.2.1 e o núcleo é o subgrupo $\pi_0 SDiff(M)$ de $\pi_0 Diff(M)$, onde $SDiff(M)$ é o grupo de difeomorfismos de M os quais induzem a aplicação identidade em $H_p(M)$, segundo Sato [18].

Capítulo 3

Classificação dos mergulhos de esferas

Neste capítulo, veremos uma completa classificação dos mergulhos suaves de p-esferas em M a menos de difeomorfismos, sob certas condições sobre n e p, veja Lucas [14].

Pelo teorema de Hurewicz, temos que $\pi_p(M) \cong H_p(M)$, logo toda classe de homologia de $H_p(M)$ pode ser representada por uma aplicação contínua da p-esfera (orientada). Então, pelo teorema de aproximação de Haefliger [9], temos

1. Se $p = 1, 2$ e $n \geq 3$, ou se $p \geq 3$ e $n \geq 2$, então toda classe de homologia de $H_p(M)$ pode ser representada por uma p-esfera mergulhada suavemente.

2. Se $p = 1$ e $n \geq 4$, ou $p = 2, 3$ e $n \geq 3$, ou $p \geq 4$ e $n \geq 2$, então duas p-esferas mergulhadas suavemente em M representando a mesma classe de homologia são sempre suavemente isotópicas.

   Observe que as condições em 2 implicam as condições em 1.

3.1 O teorema de classificação de esferas mergulhadas no produto de esferas

Definamos equivalência entre duas p-esferas mergulhadas suavemente em produto de esferas:

Definição 3.1.1. *Dizemos que duas p-esferas mergulhadas suavemente (não orientadas) em M são equivalentes se existe um difeomorfismo de M aplicando uma na outra, onde o difeomorfismo pode não preservar a orientação.*

Vejamos agora, o teorema de classificação de esferas mergulhadas:

Teorema 3.1.2. *Toda p-esfera mergulhada suavemente em M é equivalente a exatamente uma das seguintes p-esferas mergulhadas suavemente:*

(i) Para $p = 1, 3, 7$, uma p-esfera representando $(i, 0, \ldots, 0)$, com $i = 0, 1, 2, \ldots$, em $H_p(M) \cong \mathbb{Z}^n$.

(ii) Para p ímpar com $p \neq 1, 3, 7$, uma p-esfera representando 0 ou

$$(\underbrace{i, \ldots, i}_{j}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j}), \quad i = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

(iii) Para p par, uma p-esfera representando $(i_1, \ldots, i_n)$ com $0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n$.

Demonstração: Segundo a condição (2) de Haefliger citada acima, precisamos nos preocupar apenas com as classes de homologia dos mergulhos. Seja S uma p-esfera mergulhada suavemente em M representando $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ em $H_p(M) \cong \mathbb{Z}^n$. Podemos assumir que α é não nulo. Seja d o máximo divisor comum de $a_1, \ldots, a_n$.

(i) Existe um automorfismo algébrico de $H_p(M)$ que leva $\alpha/d = (a_1/d, \ldots, a_n/d)$ em $(1, 0, \ldots, 0)$. De fato, pensemos primeiro no caso $n = 2$, onde temos $\alpha/d = (a_1/d, a_2/d)$. Como a_1/d e a_2/d são primos entre si, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $ra_1/d + sa_2/d = 1$. Logo, sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_1/d & -s \\ a_2/d & r \end{pmatrix}$$

temos,

$$\begin{pmatrix} a_1/d & -s \\ a_2/d & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1/d \\ a_2/d \end{pmatrix}$$

e $detA = 1$. Assim

$$A \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sendo $n = 3$, temos $\alpha/d = (a_1/d, a_2/d, a_3/d)$.

Se $a_1/d, a_2/d$ e a_3/d não são dois a dois primos entre si, então tomemos $a_1/d, a_2/d$, tal que $mdc(a_1/d, a_2/d) = l$ e logo, $mdc(l, a_3/d) = 1$.

Assim, existem $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$r_1 a_1/d + r_2 a_2/d = l \quad e \quad r_3 a_3/d + r_4 l = 1 \qquad (1)$$

Com isso, consideremos a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a_1/d & -r_2 & y \\ a_2/d & r_1 & x \\ a_3/d & 1 & r_4 \end{pmatrix},$$

onde precisamos encontrar x e y de modo que $detA$ seja 1.

Temos que $detA = r_4 l - x(a_1/d + r_2 a_3/d) + y(a_2/d - r_1 a_3/d)$.

Considerando $x = -r_3 a_2/ld$ e $y = -r_3 a_1/ld$ obtemos

$$detA = r_4 l + r_3 a_2/ld(a_1/d + r_2 a_3/d) - r_3 a_1/ld(a_2/d - r_1 a_3/d)$$

e usando as igualdades de (1) concluímos que $detA = 1$.

Para verificar que $detA = 1$ quando consideramos x e y como acima podemos também olhar para a matriz A, que fica da forma

$$\begin{pmatrix} a_1/d & -r_2 & -r_3 a_1/ld \\ a_2/d & r_1 & -r_3 a_2/ld \\ a_3/d & 1 & r_4 \end{pmatrix}.$$

Observe que por (1) $r_4 = 1/l - r_3 a_3/dl$ e A fica da forma

$$\begin{pmatrix} a_1/d & -r_2 & -r_3 a_1/ld \\ a_2/d & r_1 & -r_3 a_2/ld \\ a_3/d & 1 & 1/l - r_3 a_3/dl \end{pmatrix}$$

e $detA$ será

$$det \begin{pmatrix} a_1/d & -r_2 & 0 \\ a_2/d & r_1 & 0 \\ a_3/d & 1 & 1/l \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1/d & -r_2 & -r_3 a_1/ld \\ a_2/d & r_1 & -r_3 a_2/ld \\ a_3/d & 1 & -r_3 a_3/dl \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1.$$

Assim

$$A \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

No caso em que $a_1/d, a_2/d$ e a_3/d são dois a dois primos entre si, basta considerar $l = 1$.

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que existe tal automorfismo para o caso $n-1$.

Consideremos o caso onde temos n elementos, ou seja, $\alpha/d = (a_1/d, \ldots, a_n/d)$. Supondo que para $n-1$ elementos o máximo divisor comum não é 1, podemos considerar sem perda de generalidade que $a_1/d, \ldots, a_{n-1}/d$ sejam esses elementos, temos assim que $mdc(a_1/d, \ldots, a_{n-1}/d) = t$. Logo $mdc(t, a_n/d) = 1$, então existem $\gamma, \beta \in \mathbb{Z}$ tal que $\gamma t + \beta a_n/d = 1$.

Sendo

$$A = \begin{pmatrix} a_1/d & b_{1\ 2} & \ldots & b_{1\ n-1} & b_{1\ n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}/d & b_{n-1\ 2} & \ldots & b_{n-1\ n-1} & b_{n-1\ n} \\ a_n/d & 1 & \ldots & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

Temos, por hipótese de indução, que conseguimos construir a matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_1/d & b_{1\ 2} & \ldots & b_{1\ n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}/d & b_{n-1\ 2} & \ldots & b_{n-1\ n-1} \end{pmatrix}$$

de modo que seu determinante seja t.

Observe que $\gamma = \frac{1}{t} - \frac{\beta a_n}{dt}$.

Logo, temos que A é da forma

$$\begin{pmatrix} & & & & b_{1\ n} \\ & B & & & \vdots \\ & & & & b_{n-1\ n} \\ a_n/d & 1 & \ldots & 1 & \frac{1}{t} - \frac{\beta a_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Agora, queremos que $detA$ seja 1, então considerando

$$b_{1\ n} = -\beta a_1/dt,\ b_{2\ n} = -\beta a_2/dt,\ \ldots\ , b_{n-1\ n} = -\beta a_{n-1}/dt$$

obtemos

$$A = \begin{pmatrix} & & & & -\beta a_1/dt \\ & B & & & \vdots \\ & & & & -\beta a_{n-1}/dt \\ a_n/d & 1 & \dots & 1 & \frac{1}{t} - \frac{\beta a_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Logo $detA$ será

$$det \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & B & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ a_n/d & 1 & \dots & 1 & 1/t \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} & & & & -\beta a_1/dt \\ & B & & & \vdots \\ & & & & -\beta a_{n-1}/dt \\ a_n/d & 1 & \dots & 1 & -\beta a_n/dt \end{pmatrix} = t \cdot 1/t + 0 = 1.$$

E assim

$$A \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Portanto

$$A^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pelo Teorema 2.2.1, temos que $D_p = GL(n; \mathbb{Z})$, então o automorfismo acima é realizado por um difeomorfismo que aplica S a uma p-esfera mergulhada suavemente em M representando $(d, 0, \dots, 0)$ em $H_p(M)$.

Podemos concluir disso, que S é equivalente a todas as p-esferas mergulhadas suavemente em M representado elementos de $H_p(M)$ cujo mdc de suas coordenadas seja d, e como d é um invariante de cada classe de equivalência, temos que as classes acima não são equivalentes umas as outras.

(ii) Lembrando que $\mathfrak{S}_n$ é o grupo das matrizes formadas a partir dos grupos de permutação, que R é a matriz com diagonal $-1, 1, \dots, 1$ e que G_1 é o grupo das matrizes que contém exatamente um inteiro ímpar em cada uma de suas linhas e colunas, então por uma ação de $\mathfrak{S}_n$ e R podemos transformar o elemento α/d em $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ de modo que $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$.

Suponha que $b_j > b_{j+1} > 0$ para algum j. Então podemos encontrar um número par e tal que

$$| b_j - eb_{j+1} | \leq b_{j+1}$$

De fato,

$$\begin{aligned} -b_{j+1} \leq b_j - eb_{j+1} \leq b_{j+1} \\ \Rightarrow -b_j - b_{j+1} \leq -eb_{j+1} \leq -b_j + b_{j+1} \\ \Rightarrow \frac{-b_j - b_{j+1}}{b_{j+1}} \leq -e \leq \frac{-b_j + b_{j+1}}{b_{j+1}} \\ \Rightarrow \frac{b_j + b_{j+1}}{b_{j+1}} \geq e \geq \frac{b_j - b_{j+1}}{b_{j+1}} \end{aligned}$$

e observe que $\frac{b_j+b_{j+1}}{b_{j+1}}$ é maior que 2, pois se $b_j = n + k$, $b_{j+1} = n$ com $n, k \in \mathbb{Z}_+$, temos

$$\frac{n + n + k}{n} = \frac{2n + k}{n} = 2 + \frac{k}{n} > 2.$$

E temos também que $\frac{b_j-b_{j+1}}{b_{j+1}}$ é maior que 0. Logo sempre existe um par satisfazendo a desigualdade.

Agora, por uma ação de G_1 podemos transformar α/d em um elemento da forma $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, pois se para algum j temos $b_j > b_{j+1} > 0$ então considerando a matriz que consiste da matriz identidade com o número par $-e$ na posição j $j+1$, onde e é o par tal que

$$| b_j - eb_{j+1} | \leq b_{j+1}$$

Chamando essa matriz de A temos

$$A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ b_{j+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j - eb_{j+1} \\ b_{j+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Neste caso estamos considerando $b_j - eb_{j+1} = b_{j+1}$. Caso $b_j - eb_{j+1} < b_{j+1}$, por uma ação de $\mathfrak{S}_n$, e uma ação de R se $b_j - eb_{j+1} < 0$, obtemos o elemento $(b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_j - eb_{j+1}, \ldots, b_n)$ de modo que $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_{j-1} \geq b_{j+1} \geq \ldots \geq b_j - eb_{j+1} \geq \cdots \geq b_n \geq 0$.

Considerando a composição de todas as transformações em G_1 que atuam de maneira análoga a matriz A sobre $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, juntamente com as ações de $\mathfrak{S}_n$ e R se necessário, obtemos uma matriz B em G_1 tal que

$$B \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde o número de 1´s é exatamente o número de b_i´s ímpares e conseqüentemente, o número de 0´s corresponde ao número de b_i´s pares. Podemos ver que isso ocorre quando observamos o processo de troca de b_j por $\mid b_j - eb_{j+1} \mid$, este procedimento diminui os valores das coordenada, e como estamos fazendo a troca por uma combinação linear de elementos da n-upla, isso mantém o seu mdc que é 1, para a nova n-upla. Com isso, temos que a n-upla final não pode ser o vetor nulo pois alteraria o mdc. Logo, em algum momento a combinação linear dos elementos da n-upla será 1, e a partir disso conseguimos trocar os ímpares por 1 e os pares por 0.

Assim, se considerarmos o elemento $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ inicial, onde $mdc(a_1, \ldots, a_n) = 1$, temos pelo processo realizado acima que existe um elemento $\overline{B} \in G_1$ representando o difeomorfismo de M que aplica S em uma p-esfera mergulhada suavemente em M representando $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ em $H_p(M)$ (Lembre-se que neste caso $G_1 = D_p$, que é o conjunto das matrizes de representação dos automorfismos $f_* : H_p(M) \to H_p(M)$ induzidos pelos difeomorfismos $f : M \to M$).

Observe também, que para dois elementos $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ em $H_p(M)$ onde $mdc(a_1, \ldots, a_n) = mdc(b_1, \ldots, b_n) = d$ e possuem o mesmo número j de coordenadas tal que a_i/d e b_k/d são ímpares, são levados no mesmo elemento $(\underbrace{d, \ldots, d}_{j}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-j})$ por ações de G_1, ou seja d e j são invariantes segundo a ação de G_1. Portanto todas as classes no Teorema 3.1.2(ii) são distintas.

(iii) Quando p é par temos que $D_p = G_2 =< \mathfrak{S}_n, R >$. Logo, por uma ação de G_2, podemos transformar qualquer elemento $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in H_p(M)$ em um elemento $(i_1, \ldots, i_n)$ com $0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_n$, em $H_p(M)$.

Dado dois elementos $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\beta = (b_1, \ldots, b_n)$ em $H_p(M)$, tais que para cada

a_i exista um b_k com $\mid a_i \mid = \mid b_k \mid$ e para cada b_k exista um a_i com $\mid a_i \mid = \mid b_k \mid$, ou seja, exista uma bijeção entre α e β mantendo módulo das coordenadas, então existem matrizes $A, B \in G_2$ tal que $A\alpha = B\beta$, ou $B^{-1}A\alpha = \beta$. Disso podemos concluir que para um elemento $(a_1, \ldots, a_n) \in H_p(M)$ a n-upla não ordenada $(\mid a_1 \mid, \ldots, \mid a_n \mid)$ é invariante segundo a ação de G_2. Portanto as classes são todas distintas.

$\square$

Capítulo 4

Casos especiais

4.1 Classificação de esferas mergulhadas no produto de esferas, caso $n = 2$

O teorema apresentado no capítulo anterior foi provado por Goldstein [7], quando $n = 2$ e $p \geq 4$, ou seja, Goldstein provou que qualquer p-esfera mergulhada em $S^p \times S^p$ é equivalente a um dos seguintes mergulhos suaves:

1. A esfera representando $(i, 0)$, $i = 1, 2, \ldots$ em $H_p(S^p \times S^p)$, quando $p = 3, 7$,
2. Uma esfera como acima ou uma representando (i, i), $i = 1, 2, \ldots$, quando $p \neq 3, 7$,
3. Uma esfera representando (i, j) onde $0 \leq i \leq j$, quando p é par e maior que 2.

Para provar este resultado, Goldstein considera a S^p mergulhada em $S^p \times S^p$ representando (m, n) em $H_p(S^p \times S^p)$, excluindo os casos onde m, n são nulos e considerando d como o máximo divisor comum entre m e n. Depois faz a demonstração para cada caso:

(Caso 1) Existem inteiros a e b tais que

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -n/d & m/d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{Z})$$

então pela prop. 2.5 de Goldstein [6], existe um difeomorfismo f tal que $f_* = g$. Com isso, $f(S^p)$ representa $(d, 0)$ e as classes acima são todas distintas.

(Caso 2) Se m/d ou $-n/d$ é par, digamos m/d, então podemos encontrar inteiros a e b, onde a é par e $am/d + bn/d = 1$. Assim

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -n/d & m/d \end{pmatrix} \in G_1$$

e podemos encontrar um difeomorfismo f_1 tal que $f_1(S^p)$ representa $(d,0)$ (se n/d é par então b pode ser escolhido sendo par). Se m/d e n/d são ímpares, então podemos encontrar inteiros a e b tal que $am/d + bn/d = 1$. Claramente a ou b é par e

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ a - n/d & b + m/d \end{pmatrix} \in G_1.$$

Uma esfera que representa (i,i) é diferente de uma que representa $(j,0)$, já que se existisse um difeomorfismo que mandasse uma esfera sobre a outra, então em sua matriz, teríamos duas entradas x e y na mesma linha ou coluna, tal que $\mid x \mid = \mid y \mid$ e tal matriz não pertence a G_1.

(Caso 3) Como as entradas das matrizes em G_2 são sempre $0, 1$ e -1, o único difeomorfismo que pode ocorrer, troca as posições de m e n, ou multiplica m ou n por -1. E com isso a demonstração é concluída.

4.2 O caso orientável

Se considerarmos as orientações de M e/ou as orientações das p-esferas mergulhadas, na Definição 3.1.1, então obteremos resultados um pouco diferentes do Teorema 3.1.2, como a seguir.

Considerando apenas a orientação da p-esfera mergulhada e ignorando a orientação de M, temos pela prova do Teorema 3.1.2 o mesmo resultado, pois se considerarmos as duas possíveis orientações, (S^p, or) e $(S^p, -or)$, existe um difeomorfismo de M que leva (S^p, or) em $(S^p, -or)$. Logo elas são equivalentes, e como não estamos considerando a orientação de M, o resultado do teorema não se altera.

Quando p é ímpar, para cada p-esfera na lista, existe um difeomorfismo invertendo a orientação de M que preserva as classes de homologia. De fato, se $p = 1, 3, 7$ temos pelo Teorema 3.1.2 que uma esfera S^p mergulhada suavemente em M é equivalente a p-esfera mergulhada representando $(i, 0, \ldots, 0)$ com $i = 0, 1, 2, \ldots$, em $H_p(M) \cong \mathbb{Z}^n$, não importando se n é par ou ímpar e se a esfera S^p está orientada ou não.

Com isso, o difeomorfismo que inverte a orientação de M, leva a p-esfera mergulhada em M, equivalente a p-esfera representando $(i, 0, \ldots, 0)$, na esfera S^p equivalente a p-esfera representando $(-i, 0, \ldots, 0)$ com $i = 0, 1, 2, \ldots$, preservando desse modo, a classe de homologia.

Agora, se $p \neq 1, 3, 7$, temos pelo Teorema 3.1.2 que uma esfera S^p mergulhada suavemente

em M é equivalente a uma p-esfera mergulhada representando 0 ou

$$(\underbrace{i,\ldots,i}_{j},\underbrace{0,\ldots,0}_{n-j}),\ i=0,1,2,\ldots \text{ e } j=1,2,\ldots,n,$$

em $H_p(M)$, não importando se n é par ou ímpar e se a esfera S^p está orientada ou não.

Assim, o difeomorfismo que inverte a orientação de M leva a esfera S^p mergulhada em M, equivalente a p-esfera representando $(i,\ldots,i,0,\ldots,0)$, na esfera S^p equivalente a p-esfera representando $(-i,\ldots,-i,0,\ldots,0)$ com $i=0,1,2,\ldots$, e logo, preservando a classe de homologia.

Quando p é par e n é ímpar, temos o mesmo resultado, se considerarmos apenas a orientação de M e ignorarmos a da S^p, já que existe um difeomorfismo invertendo a orientação de M que age como a multiplicação por -1 em $H_p(M)$, pois sendo p par, temos pelo Teorema 3.1.2 que toda p-esfera mergulhada suavemente em M é equivalente a p-esfera representando $(i_1,\ldots,i_n)$ com $i_1 \leq \ldots \leq i_n$, não importando se n é par ou ímpar e se S^p está orientada ou não.

Sendo n ímpar, temos que a matriz representando o difeomorfismo que inverte a orientação de M,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}$$

age multiplicando os elementos de $H_p(M)$ por -1.

Seja S a p-esfera mergulhada suavemente em (M, or) representando $(a_1,\ldots,a_n) \in H_p(M)$. Pela ação do difeomorfismo que inverte a orientação de M, temos que S está mergulhada em $(M,-or)$ representando $(-a_1,\ldots,-a_n) \in H_p(M)$, e pelo Teorema 3.1.2, tanto $(a_1,\ldots,a_n)$ quanto $(-a_1,\ldots,-a_n)$ são equivalentes ao elemento $(i_1,\ldots,i_n)$ com $i_1 \leq \ldots \leq i_n$, em $H_p(M)$. Então podemos ignorar a orientação da p-esfera e considerar apenas a de M.

Falta analisarmos os casos:

Caso 1: p é par, n é ímpar e consideram-se as orientações de S^p e de M.

Caso 2: p e n são pares e consideram-se as orientações de S^p e de M.

Caso 3: p e n são pares e considera-se apenas a orientação de M.

No caso 1, seja S uma p-esfera mergulhada suavemente em M representando $(a_1,\ldots,a_n) \in H_p(M)$. Ignorando, por um momento, as orientações de S e M, teremos pelo Teorema 3.1.2 que $(a_1,\ldots,a_n)$ é equivalente ao elemento $(i_1,\ldots,i_n)$ com $i_1 \leq \ldots \leq i_n$, em $H_p(M)$.

Vamos considerar os casos onde $i_1 > 0$, já que no caso $i_1 = 0$ caímos no caso onde a p-esfera mergulhada não possui componente nesta coordenada, caindo no caso $n-1$. Agora, olhando para $(i_1, \ldots, i_n)$, considerando as orientações de S e M, para cada coordenada negativa em $(a_1, \ldots, a_n)$, multiplicamos i_1 por -1. Realizando este processo, estaremos corrigindo as orientações de S e M, caso tenham mudado. Logo, se r é o número de $a_i's$ negativos, então $((-1)^r i_1, \ldots, i_n)$, em $H_p(M)$ é equivalente a $(a_1, \ldots, a_n)$, quando consideramos as orientações de S e M.

Para os casos 2 e 3 podemos usar um raciocínio análogo ao anterior. Desta maneira, torna-se necessário adicionar p-esferas representado $(i_1, \ldots, i_n)$ com $i_1 \leq 0 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_n$ e $\mid i_1 \mid \leq i_2$.

Referências Bibliográficas

[1] J.F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., (2) 72 (1960) 20-104.

[2] S.O. Ajala, *Diffeomorphism groups of connected sum of a product of spheres and classification of manifolds*, Internat. Math. Sci., 10 (1987) 17-33.

[3] H. Cartan, *Suspension et invariant de Hopf*, Exposé 5, Séminaire H. Cartan, 11e. année, 1958/59.*Invariant de Hopf et opérations cohomologiques secondaires*, École Normale Supérieure, Paris, 1959.

[4] P.M. Cohn, *Classic Algebra*, John Wiley & Sons Ltd, 2000.

[5] G.E. Cooke, R.L. Finny, *Homology of cell complexes*, Princeton University Press and University of Tokio Press, Princeton, New Jersey, 1967.

[6] R.Z. Goldstein, *Piecewise linear unknotting of $S^p \times S^q$ in S^{p+q+1}*, Michigan Math. J., 14 (1967) 405-415.

[7] R.Z. Goldstein, *Embedding a p-sphere in a product of p-spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968) 621-623.

[8] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Northeastern University, W. A. Benjamin, Inc. New York 1967.

[9] A. Haefliger, *Differentiable imbeddings*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 109-112.

[10] P.J. Hilton, *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge, at the University Press, 1953.

[11] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, 1976.

[12] J.P.E. Hodgson, *Diffeomorphisms of some smooth metastably connected manifolds*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 71 (1972) 19-23.

[13] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora Polígono S.A., 1971.

[14] L.A. Lucas, O. Saeki, *Diffeomorphisms of a product of spheres and embedded spheres*, Top. and its Aplic., 123 (2002) 471-478.

[15] L.A. Lucas, *Mergulhos em codimensão um de produto cartesiano de três esferas*, Tese, ICMC, Universidade de São Paulo, Junho 1998.

[16] B.R. McDonald, *Linear Algebra Over Comutative Rings*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math. Vol. 87, Marcel Dekker, New York, 1984.

[17] M. Newman, *Integral Matrices*, Pure Appl. Math., Vol. 45, Academic Press, New York, 1972.

[18] H. Sato, *Diffeomorphism groups of $S^p \times S^q$ and exotic spheres*, Quart.J. Math. Oxford (2) 20 (1969) 255-276.

[19] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Series In Higer Mathematics, 1966.

[20] N.E. Steenrod, *Cohomology operations*, Ann. of Math. Stud., Vol. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962, Lectures by N.E. Steenrod written and revised by D.B.A. Epstein.

[21] E.C. Turner, *Diffeomorphisms homotopic to the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973) 489-498.

[22] C.T. Wall, *Killing the middle homotopy groups of odd dimensional manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962) 421-433.

[23] J.H.C. Whitehead, *On adding relations to homotopy groups*, Ann. of Math. (2) 42 (1941) 409-428.