

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 06/02/2004

Assinatura: *Ana Paula Jampa J. J. J.*

Bifurcação de pontos de equilíbrio em sistemas acoplados com simetria do tipo produto coroa

*Luci Any Francisco Roberto*¹

Orientador: *Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Fevereiro/2004

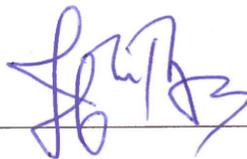
¹Este trabalho teve suporte financeiro da Fapesp proc: 01/12533-6

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel



Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues



Profa. Dra. Isabel Salgado Labouriau



*Ao meu Pai Di-
rando, por ensinar-me
a aprender sempre, à
minha mãe Helena,
pelo exemplo de de-
dicação, e à minha
irmã Ligia pelo amor e
carinho.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por minha existência pois, através dela, pude realizar este trabalho.

À minha orientadora Prof. Dra. Miriam Garcia Manoel pelos ensinamentos, confiança e fundamental orientação no desenvolvimento deste trabalho. Obrigada pela confiança transmitida e principalmente, por acreditar em mim!

Em especial ao meu namorado Marcelo pelo amor, carinho, compreensão, apoio e por suportar o meu mau humor nas horas difíceis.

Aos meus Pais pelo grande apoio, compreensão, por sofrerem comigo nas minhas dificuldades, por torcerem por mim e mais do que tudo, pelo infinito amor, quero compartilhar com vocês minha extrema alegria.

À minha querida irmã, Ligia por estar sempre me apoiando, torcendo por mim e cujo carinho e amor me reergueu e me deu forças.

Aos meus amigos Flávia, Mariana, Grazielle, Mario Ronaldinho, Aline, Fábio e Alex por tudo que eles me proporcionaram com suas atenções, amizades e carinhos. Valeu pessoal!!!

À minha amiga Patrícia pelo companherismo e apoio que inúmeras vezes precisei.

A todos os professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação pela gentileza e atenção diariamente prestados.

A todos das escolas E.E.P.G. Profa. Dirce de Almeida Braga Wrasek e E.E.P.S.G. Coripheu de Azevedo Marques que sempre me incentivaram para que eu concluísse esta etapa da minha vida.

À Fapesp pela bolsa de estudo concedida.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

Neste projeto estudamos bifurcações de pontos de equilíbrio em sistemas de N células acopladas que possuem um grupo de simetria “global” \mathcal{G} e cada célula possui sua simetria “interna” \mathcal{L} , onde \mathcal{G} é um subgrupo do grupo \mathbf{S}_N das permutações de N elementos e \mathcal{L} é um grupo de Lie compacto. O acoplamento que consideramos é invariante segundo as simetrias internas de cada célula; neste caso, a combinação dos grupos \mathcal{L} e \mathcal{G} que leva à simetria total do sistema é a do grupo \mathcal{L} produto coroa \mathcal{G} , $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, ou seja, $\mathcal{L}^N \rtimes \mathcal{G}$. Relacionamos as bifurcações de pontos de equilíbrio que ocorrem em sistemas acoplados com grupo de simetria $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ às bifurcações com simetria \mathcal{L} ou \mathcal{G} . Fazemos um aplicação dos resultados obtidos para um caso não degenerado de N células acopladas com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Vemos como a teoria invariante para $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ está relacionada às teorias invariantes para os grupos $\mathbf{O}(2)$ e \mathbf{S}_N . Verificamos que, a menos de conjugação, existem exatamente N ramos de soluções, a saber, as com subgrupos de isotropias axiais. Além disso, discutimos a estabilidade das soluções e direção dos ramos.

Abstract

In this project we study steady-state bifurcation in system of N coupled cells that possess a “global” symmetry group \mathcal{G} , and in which each cell possess its own “internal” symmetry group \mathcal{L} , where \mathcal{G} is a subgroup of the permutation group \mathbf{S}_N of N elements and \mathcal{L} is a compact Lie group. The coupling we consider is invariant under the internal symmetries of each cell and the combination of the groups \mathcal{L} and \mathcal{G} leads to the total symmetry group given by \mathcal{L} wreath product \mathcal{G} , $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, i. e., $\mathcal{L}^N \rtimes \mathcal{G}$. We relate the steady-state bifurcations that occur in the coupled system with symmetry group $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ to bifurcations with symmetry \mathcal{L} or \mathcal{G} . We apply the results to a non-degenerate system of N coupled cells with symmetry $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. We see how the invariant theory for $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ is related to the invariant theories for $\mathbf{O}(2)$ and \mathbf{S}_N . We check that, up to conjugacy, there are exactly N branches, namely, those with axial subgroup. Moreover, we discuss stability and directions of the solution branches.

Sumário

Introdução	v
1 Preliminares teóricas	1
1.1 Teoria de grupos	1
1.1.1 Grupos de Lie	1
1.1.2 Representação e ação	4
1.1.3 Integração invariante	7
1.2 Irredutibilidade	8
1.2.1 Definições básicas e exemplos	8
1.2.2 Decomposição isotípica	10
1.3 Teoria básica de bifurcação equivariante	14
1.3.1 Os conceitos de germe e bifurcação	14
1.3.2 Funções invariantes	15
1.3.3 Aplicações lineares equivariantes	19
1.3.4 Aplicações não lineares equivariantes	21
1.4 Quebra de simetria em bifurcação de pontos de equilíbrio	23
1.4.1 Órbitas e subgrupos de isotropia	23
1.4.2 Subespaço de ponto fixo	26
1.4.3 Lema dos Ramos Equivariantes	28
1.4.4 Estabilidade de soluções	31
2 Sistemas de células acopladas com simetria do tipo produto coroa	34
2.1 EDOs de sistemas acoplados com simetria do tipo produto coroa	35
2.2 Teoria linear do grupo $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$	37
2.3 Quebra de simetria em bifurcação $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante	39
2.3.1 Subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$	40
2.3.2 Exemplos	43
2.3.3 Subgrupos de isotropia e subgrupos de isotropia maximais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$	46
3 Bifurcação de pontos de equilíbrio com simetria $O(2) \wr S_N$	49
3.1 Teoria invariante e equivariante para o grupo $O(2) \wr \mathcal{G}$	50

3.2	Teoria invariante e equivariante para o grupo	
	$O(2) \wr S_N$	54
3.3	Diagramas de bifurcação e estabilidade de soluções	60
A	Redução de Liapunov-Schmidt	74
A.1	A Redução de Liapunov-Schmidt com simetria	77
	Referências Bibliográficas	81

Lista de Figuras

1.1	Polígono regular de 5 lados	24
1.2	Ramos de soluções (a) subcrítico e (b) supercrítico	31
2.1	Diagramas da células ativas/inativas em um anel de 15 células idênticas com simetria interna $\mathbf{O}(2)$	44
2.2	Diagramas da células ativas/inativas em um anel de 12 células idênticas com simetria interna $\mathbf{O}(2)$	47
3.1	a) Acoplamento de 4 células duas a duas: $\mathcal{G} = \mathbf{S}_4$, b) Acoplamento de 5 células duas a duas: $\mathcal{G} = \mathbf{S}_5$	49
3.2	Variedade de transição	70
3.3	Diagrama para $(a, b) \in D_j, 1 \leq j < N$	70
3.4	Diagrama para $(a, b) \in A_j, 1 \leq j \leq N$	70
3.5	Diagrama para $(a, b) \in C_1$	71
3.6	Diagrama para $(a, b) \in C_N$	71

Lista de Tabelas

1.1	Tipos de órbitas e subgrupos de isotropia do grupo \mathbf{D}_n agindo em \mathbb{C} com n ímpar	25
2.1	Subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{15}$ a menos de conjugação	43
2.2	Subgrupos de \mathbf{D}_{12}	45
2.3	Subgrupos axiais do $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{12}$	46
3.1	Decomposição de \mathbb{C}^N em subespaços invariantes por $\Sigma(\mathbb{Z}_2^k, \{1, \dots, j\})$, $1 \leq j \leq N$	69
3.2	Ramos e estabilidade de soluções do problema de bifurcação com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ relativamente aos seus subgrupos de isotropia	69

Introdução

Nos últimos vinte e cinco anos, a presença de simetria em sistemas dinâmicos tem sido foco de atenção de vários autores. Em bifurcação de pontos de equilíbrio, simetrias impõem fortes restrições na forma das soluções e na maneira pela qual as bifurcações ocorrem. O termo bifurcação se refere ao fenômeno de aparecimento de novas soluções de equilíbrio num sistema além da solução trivial com a variação do parâmetro de bifurcação. Iniciamos este trabalho apresentando a teoria geral de bifurcações de pontos de equilíbrio no contexto com simetria seguindo [10]. Mais precisamente, considerando um grupo de Lie compacto Γ agindo em um espaço vetorial V , estudamos pontos de equilíbrio de um sistema do tipo

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0 \tag{0.0.1}$$

com a variação do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, onde $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ é uma aplicação Γ -equivariante (ou com grupo de simetria Γ), isto é,

$$\gamma g(x, \lambda) = g(\gamma x, \lambda), \quad \forall x \in V, \forall \gamma \in \Gamma. \tag{0.0.2}$$

Neste contexto, duas definições básicas são as de um subgrupo de isotropia de um elemento $x \in V$ e a de um subespaço de ponto fixo de um subgrupo Σ : Dado $x \in V$, o subgrupo de isotropia de x , denotado por Σ_x , é definido como

$$\Sigma_x = \{\sigma \in \Gamma; \sigma x = x\}.$$

O subespaço de ponto fixo de Σ , denotado por $Fix\Sigma$, é definido como

$$Fix(\Sigma) = \{v \in V : \sigma v = v, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

No contexto com simetria a questão fundamental é: Para g como em (0.0.2), para quais subgrupos Σ de Γ devemos esperar encontrar ramos de soluções de equilíbrio de (0.0.1) tendo Σ como seu grupo de simetrias? Pensamos no grupo total de simetria Γ da solução trivial se quebrando para o subgrupo Σ de simetrias de um novo ramo de soluções não triviais. Em outras palavras, ganhamos novas soluções embora com menos simetria que as originais. Este processo é chamado *quebra espontânea de simetria*. O Lema dos Ramos Equivariantes responde a questão acima, garantindo que, genericamente, para cada subgrupo de isotropia Σ com $\dim Fix\Sigma = 1$, chamados subgrupos axiais, existe um único ramo de soluções tal que o grupo de simetria de cada solução neste ramo é Σ .

Mais recentemente, tem havido um aumento de interesse no estudo de bifurcações em sistemas de “células” acopladas, por exemplo, um conjunto de osciladores acoplados. O objetivo deste trabalho é estudar bifurcação de pontos de equilíbrio em tais sistemas no contexto com simetria. Em geral, uma célula em tais sistemas é representada por uma equação diferencial $x' = f(x)$, definida num espaço vetorial V de dimensão finita, com a hipótese de existência de um ponto de equilíbrio, por exemplo $x = 0$, ou seja, $f(0) = 0$. Um sistema de N células idênticas acopladas é um sistema de equações diferenciais em V^N da forma

$$x'_j = f(x_j) + g_j(x_1, \dots, x_N), \quad 1 \leq j \leq N,$$

com $g_j(x) = 0$ se $x_i = 0$ para $i \neq j$ e $g_j(x) = 0$, se $x_j = 0$. As funções g_j 's dão o acoplamento entre a célula j com as demais células do sistema.

Uma forma de construir um sistema de células acopladas e que tem sido tratada recentemente por vários autores é assumir simetrias “internas” (para as células individuais) e impor restrições de simetrias “globais” nas funções de acoplamento. Vamos descrever em mais detalhes a seguir: Quando tais células são idênticas, as simetrias globais induzidas no sistema de equações diferenciais associado [4] dependem da forma exata de acoplamento. Por exemplo, um sistema de N células acopladas num anel [9] possui simetria do grupo diedral \mathbf{D}_N , grupo de simetrias do polígono regular de N lados. Outro padrão é o acoplamento do tipo duas a duas, onde cada célula é acoplada a qualquer outra do sistema, induzindo neste sistema as simetrias do grupo \mathbf{S}_N , grupo das permutações de N elementos. Estas simetrias induzidas pelo padrão de acoplamento são as chamadas simetrias globais do problema. O grupo das simetrias globais é sempre um subgrupo \mathcal{G} de \mathbf{S}_N . Um outro conjunto de simetrias para as células acopladas tem sido considerado mais recentemente; ele ocorre quando as equações diferenciais que governam a dinâmica em cada célula têm suas próprias simetrias. Isto ocorre, por exemplo, quando cada célula é vista como um objeto geométrico com certas simetrias - como um disco circular - e a dinâmica em cada célula é governada por equações diferenciais invariantes por estas simetrias. Um outro exemplo comum é um conjunto de osciladores de Van der Pol acoplados, cada um dos quais possui a simetria da reflexão $(x, y) \mapsto (-x, y)$, onde (x, y) são as variáveis de estado de um dos osciladores. Estas simetrias são chamadas simetrias internas do sistema, que denotamos abaixo por \mathcal{L} .

Quando tais sistemas dependem de um parâmetro, a forma como pontos de equilíbrio bifurcam com a variação deste parâmetro depende tanto das simetrias globais quanto das simetrias internas. Um fato sutil nesta discussão é que o grupo total de simetrias do problema depende da forma exata do acoplamento. Embora em qualquer sistema acoplado o grupo é obtido a partir de \mathcal{G} e \mathcal{L} , a forma como estes grupos combinam também depende da forma de acoplamento. Existem dois tipos naturais de acoplamento que levam a dois grupos distintos. Em um deles, o acoplamento é invariante segundo qualquer simetria interna de cada célula e consiste do grupo “produto coroa” $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. No segundo tipo, as simetrias internas devem ser aplicadas a todas as células simultaneamente e consiste, neste caso, do produto direto $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$. Neste projeto tratamos do primeiro tipo de acoplamento.

Relacionamos neste trabalho as bifurcações de pontos de equilíbrio que ocorrem em sistemas acoplados com grupo de simetria $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ às bifurcações de problemas \mathcal{L} -equivariantes e problemas \mathcal{G} -equivariantes seguindo os resultados obtidos em [4]. Esta correspondência organiza o problema, reduzindo-o a questões mais simples cujas respostas são obtidas de resultados conhecidos. Fazemos uma aplicação ao estudo de existência e estabilidade de pontos de equilíbrio para um problema particular de osciladores acoplados com simetria do grupo $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.

No Capítulo 1, tratamos da teoria de grupos. Introduzimos a idéia de um grupo de Lie compacto Γ , noções e propriedades de ação e representação de Γ num espaço vetorial V . Descrevemos exemplos fundamentais como o grupo ortogonal $\mathbf{O}(N)$, o grupo do círculo \mathbf{S}^1 , o grupo diedral \mathbf{D}_N , o grupo das permutações \mathbf{S}_N e o grupo “produto coroa” juntamente com suas ações. Com a definição de integral de Haar mostramos que podemos identificar um grupo de Lie compacto Γ com um subgrupo de $\mathbf{O}(N)$. Descrevemos a decomposição de uma dada representação em representações mais simples, chamadas representações irredutíveis. Neste capítulo, discutimos a teoria básica de bifurcação equivariante e tratamos das noções de uma aplicação $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ Γ -equivariante, uma função $f : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariante, subgrupos de isotropia e bifurcações com quebra espontânea de simetria. Apresentamos também um dos resultados mais importantes antes desta teoria, o Lema dos Ramos Equivariantes. Para finalizar o capítulo, discutimos estabilidade de pontos de equilíbrio em sistemas equivariantes.

No Capítulo 2, apresentamos resultados sobre o tema principal, isto é, bifurcação de pontos de equilíbrio em sistemas de equações diferenciais ordinárias de N células idênticas acopladas. Consideramos este sistema com presença de simetria global \mathcal{G} e interna \mathcal{L} , com o acoplamento invariante segundo elementos de \mathcal{L} e que leva à simetria do tipo produto coroa de \mathcal{L} e \mathcal{G} , $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Caracterizamos os subgrupos de isotropia de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ e descrevemos os subgrupos axiais e maximais. Os resultados obtidos foram aplicados aos casos das ações de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{15}$ e $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{12}$ no plano.

No Capítulo 3, fazemos uma aplicação da teoria apresentada nos capítulos anteriores para estudar bifurcações de pontos de equilíbrio para um sistema de N células idênticas acopladas com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ em $V = \mathbb{C}^N$ onde V é uma representação $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -absolutamente irredutível. Obtemos a forma geral de um campo vetorial $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante a um parâmetro de bifurcação. Mostramos como a teoria invariante para $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ está relacionada às teorias invariantes para os grupos $\mathbf{O}(2)$ e \mathcal{G} , onde \mathcal{G} é um subgrupo de \mathbf{S}_N . Descrevemos os ramos de soluções (x, λ) para $g(x, \lambda) = 0$ vindos do Lema dos Ramos Equivariantes e verificamos que, a menos de conjugação, existem exatamente N desses ramos.

Finalmente, no Apêndice A desenvolvemos a Redução de Liapunov-Schmidt em sistemas definidos em espaços de dimensão infinita quando a parte linear do operador tem núcleo de dimensão finita. Esta redução estabelece uma correspondência local entre as soluções do sistema original com as soluções do sistema reduzido. Além disso, no caso em que o sistema original possui simetria mostramos que o sistema reduzido pela Redução

de Liapunov-Schmidt preserva esta simetria.

Capítulo 1

Preliminares teóricas

A idéia principal deste trabalho envolve bifurcação de pontos de equilíbrio em sistemas com simetria. Uma simetria de um sistema definido num conjunto \mathcal{X} é uma transformação de \mathcal{X} que preserva algumas estruturas particulares deste sistema. Nos nossos estudos \mathcal{X} é um espaço vetorial de dimensão finita, as transformações são aplicações lineares em \mathcal{X} , e a estrutura a ser preservada é um problema de bifurcação particular.

1.1 Teoria de grupos

No estudo de problemas com simetria, a teoria de grupos é indispensável. A seguir apresentamos alguns fatos sobre grupos de Lie.

1.1.1 Grupos de Lie

Para definirmos grupo de Lie apresentamos algumas definições.

Definições 1.1.1 *Uma parametrização n -dimensional de um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^j$ é uma aplicação suave (C^∞) $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^j$ com $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $\phi(V) = X$ e a aplicação $\phi : V \rightarrow X$ é um difeomorfismo, ou seja, $\phi : V \rightarrow X$ é uma bijeção e ϕ e ϕ^{-1} são suaves.*

*Suponhamos $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ e $x \in Y$. Uma **vizinhança relativamente aberta** de x em Y é um conjunto da forma $U \cap Y$ com $U \subseteq \mathbb{R}^k$ um conjunto aberto com $x \in U$.*

*Chamamos $N \subseteq \mathbb{R}^k$ uma **variedade suave de dimensão n** quando todo ponto $x \in N$ tem uma vizinhança relativamente aberta $U \cap Y$ admitindo uma parametrização n -dimensional $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^k$.*

Agora introduzimos a nossa definição de maior interesse.

Definição 1.1.2 *Um grupo de Lie é um grupo G que é uma variedade suave tal que as operações de multiplicação $G \times G \rightarrow G$ e inversão $G \rightarrow G$ são aplicações suaves.*

O grupo linear $\mathbf{GL}(n)$ das matrizes $n \times n$ inversíveis é um grupo de Lie. De fato, como o grupo $\mathbf{GL}(n)$ é um subconjunto aberto do espaço das matrizes $n \times n$, então $\mathbf{GL}(n)$ é uma variedade suave. Agora, multiplicação de matrizes $n \times n$ é uma aplicação polinomial, e certamente suave, e assim a restrição da multiplicação ao grupo $\mathbf{GL}(n)$ também é suave. Como todas as matrizes de $\mathbf{GL}(n)$ possuem determinante diferente de zero, então todas têm inversa e assim a aplicação inversa também é suave.

Definição 1.1.3 Grupo de Lie linear é um subgrupo $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n)$ fechado.

Nos nossos estudos precisamos que Γ seja um grupo de Lie. Para nossos propósitos, consideramos um grupo de Lie como um subgrupo fechado Γ de $\mathbf{GL}(n)$, que pela Definição 1.1.3 estes são os grupos de Lie linear e para o termo grupo de Lie é dada uma definição mais geral, Definição 1.1.2. Entretanto, existe um teorema (ver Bourbaki [1960]) que afirma que todo grupo de Lie compacto no sentido geral é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear. Identificando o espaço das matrizes $n \times n$ com o espaço topológico \mathbb{R}^{n^2} podemos falar das propriedades topológicas do grupo de Lie. Em particular, dizemos que um grupo de Lie Γ é um subconjunto fechado de $\mathbf{GL}(n)$ e também um subgrupo.

Às vezes nos referimos a certos grupos como grupos de Lie, mas que na verdade são subgrupos isomorfos a algum subgrupo do $\mathbf{GL}(n)$. Por exemplo, nos referimos ao grupo com dois elementos $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ como sendo um grupo de Lie e a maneira mais correta seria $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ isomorfo ao grupo de Lie $\{I_n, -I_n\} \subset \mathbf{GL}(n)$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Apresentamos a seguir alguns exemplos de grupos de Lie.

Exemplos 1.1.4 1. O grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$ consiste de todas as matrizes, A , $n \times n$ tal que

$$AA^t = I_n,$$

onde A^t é a matriz transposta de A , isto é,

$$\mathbf{O}(n) = \{A \in \mathbf{GL}(n); AA^t = I_n\}.$$

2. O grupo especial ortogonal $\mathbf{SO}(n)$ consiste de todas as matrizes $A \in \mathbf{O}(n)$ tal que $\det A = 1$:

$$\mathbf{SO}(n) = \{A \in \mathbf{O}(n); \det A = 1\} \subset \mathbf{O}(n) \subset \mathbf{GL}(n).$$

Este grupo é chamado de grupo das rotações em \mathbb{R}^n . Em particular, $\mathbf{SO}(2)$ consiste das rotações no plano

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Desta maneira, podemos identificar $\mathbf{SO}(2)$ com o grupo cíclico \mathbf{S}^1 , onde a identificação é dada pela aplicação:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mapsto \theta.$$

O grupo $\mathbf{O}(2)$ é gerado por $\mathbf{SO}(2)$ juntamente com a reflexão

$$\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.2)$$

3. Seja \mathbf{Z}_n o grupo cíclico de ordem n . Podemos identificar \mathbf{Z}_n com o grupo das matrizes de rotação 2×2 geradas por $R_{2\pi/n}$.
4. O grupo diedral \mathbf{D}_n de ordem $2n$ é gerado pelo grupo \mathbf{Z}_n e um elemento de ordem 2 que não comuta com \mathbf{Z}_n . Identificamos \mathbf{D}_n com o grupo gerado pelas matrizes $R_{2\pi/n}$ e pela reflexão de (1.1.2). Geometricamente, \mathbf{D}_n é o grupo de simetrias do polígono regular de n lados, enquanto \mathbf{Z}_n é o subgrupo das rotações simétricas.
5. Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie.
6. O toro de dimensão n , $\mathbf{T}^n = \underbrace{\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \dots \times \mathbf{S}^1}_{n\text{-vezes}}$, é isomorfo a um grupo de Lie, com o isomorfismo que leva $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbf{T}^n$ à matriz

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{\theta_n} \end{pmatrix} \in GL(2n).$$

7. \mathbb{R}^n é isomorfo ao grupo de Lie das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1),$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \dots, n$.

Vimos que um dado grupo abstrato pode ser representado de várias maneiras como grupo de matrizes. A questão que surge é: quando dois grupos de matrizes que são isomorfos como subgrupos abstratos são considerados essencialmente os mesmos? Esta questão leva diretamente à teoria de representação a seguir.

Temos que \mathbb{R}^{n^2} é um espaço topológico, logo podemos falar das propriedades topológicas bem como das algébricas de um grupo de Lie. Em particular, dizemos que um grupo de Lie Γ é compacto ou conexo se ele é compacto ou conexo como subconjunto de \mathbb{R}^{n^2} . Daí, Γ é um grupo de Lie compacto se, e somente se, as entradas das matrizes que definem Γ são limitadas, isto porque já temos, por definição, que Γ é fechado. Segue que $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, \mathbf{T}^n e os grupos finitos são exemplos de grupos de Lie compactos.

1.1.2 Representação e ação

Seja Γ um grupo de Lie e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Dizemos que Γ age linearmente em V se existe uma aplicação contínua, a ação de Γ em V ,

$$\begin{aligned} \Gamma \times V &\rightarrow V \\ (\gamma, v) &\rightarrow \gamma \cdot v \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

tal que

a) para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação

$$\begin{aligned} \rho_\gamma : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto \rho_\gamma(v) = \gamma \cdot v \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

é linear

b) se $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ então

$$\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot v) = (\gamma_1 \gamma_2) \cdot v. \quad (1.1.5)$$

A aplicação ρ que leva γ em $\rho_\gamma \in \mathbf{GL}(V)$ é chamada uma **representação** de Γ em V , onde $\mathbf{GL}(V)$ denota o conjunto das transformações lineares invertíveis de V em V . Nas próximas seções omitimos o ponto da operação escrevendo γv no lugar de $\gamma \cdot v$. Como exemplo, temos a ação do grupo cíclico \mathbf{S}^1 no espaço vetorial $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\mapsto \theta \cdot z = e^{i\theta} z. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Neste exemplo, a linearidade de (1.1.4) segue imediatamente da definição (1.1.6). Vamos verificar que vale (1.1.5). Para $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{S}^1$,

$$\theta_1 \cdot (\theta_2 \cdot z) = \theta_1 \cdot (e^{i\theta_2} z) = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} z = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} z = (\theta_1 + \theta_2) \cdot z,$$

onde $+$ denota o “produto” no grupo \mathbf{S}^1 . Desta ação surge uma representação ρ de \mathbf{S}^1 onde ρ_θ é a matriz de rotação

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Apesar dos conceitos de ação e representação serem essencialmente os mesmos eles possuem uma pequena diferença no ponto de vista, ou seja, uma ação diz como um elemento γ do grupo transforma um dado elemento $v \in V$, enquanto que uma representação diz como que γ transforma o espaço todo V . Uma ação de um grupo Γ em um espaço vetorial V pode ser definida especificando-se (1.1.3) somente para os geradores de Γ . Esta ação é consistente no sentido de que (1.1.5) está satisfeita.

Exemplos 1.1.5 1. Todo grupo de Lie linear Γ é um grupo de matrizes em $\mathbf{GL}(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como tal, Γ tem uma ação natural em $V = \mathbb{R}^n$ dada pela multiplicação usual de uma matriz $n \times n$ por um vetor $n \times 1$.

2. Todo grupo Γ tem uma ação trivial em $V = \mathbb{R}^n$ definida por

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\gamma, x) &\mapsto \gamma \cdot x = x. \end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que Γ age trivialmente em V .

3. Para todo inteiro K o grupo cíclico \mathbf{S}^1 tem uma ação em $V = \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\theta, z) &\mapsto \theta \cdot z = e^{iK\theta} z. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Notamos que se $K = 0$ temos a ação trivial do item anterior e se $K = 1$ temos a ação (1.1.6).

4. Cada ação de $\mathbf{S}^1 \cong \mathbf{SO}(2)$ definida por (1.1.7) é estendida a uma ação de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} se consideramos

$$\kappa \cdot z = \bar{z}, \quad (1.1.8)$$

onde κ é a reflexão (1.1.2).

5. Todo grupo de Lie $\Gamma \subset \mathbf{GL}(n)$ age no espaço das matrizes $n \times n$ por semelhança

$$\gamma \cdot A = \gamma A \gamma^{-1}.$$

6. O grupo das permutações dos elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, $\Gamma = \mathbf{S}_n$, age em \mathbb{R}^n pela ação

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)}), \quad (1.1.9)$$

onde $\sigma \in \Gamma$ e $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Verificamos que (1.1.9) define uma ação. Sejam $\sigma, \tau \in \mathbf{S}_n$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $Y = \tau \cdot X = (x_{\tau^{-1}(1)}, x_{\tau^{-1}(2)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)}) \in \mathbb{R}^n$.

$$\sigma \cdot (\tau \cdot X) = \sigma \cdot Y = (y_{\sigma^{-1}(1)}, y_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, y_{\sigma^{-1}(n)}) =$$

$$(x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(1)}, x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\tau^{-1}\sigma^{-1}(n)}) = (x_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, x_{(\sigma\tau)^{-1}(2)}, \dots, x_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) = (\sigma\tau) \cdot X$$

Esta ação é fundamental no próximo capítulo, pois ela é usada na definição da ação do produto coroa.

Definição 1.1.6 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e Γ um grupo de Lie agindo em V e W . Dizemos que estas ações são isomorfas, ou que os espaços V e W são Γ -isomorfos, se existe um isomorfismo linear $A : V \rightarrow W$ que comuta com todo elemento de Γ , isto é,*

$$A(\gamma \cdot v) = \gamma \cdot (Av) \quad (1.1.10)$$

para todo $v \in V$ e $\gamma \in \Gamma$.

Notamos que a ação de γ do lado esquerdo de (1.1.10) é em V , enquanto que do lado direito é em W .

É fácil estender estas idéias para o caso onde Γ age em V e um outro grupo Δ , isomorfo a Γ , age em W . Por exemplo, a ação (1.1.7, 1.1.8) de $\mathbf{O}(2)$ para os inteiros K e $-K$ são isomorfas. De fato, denote as duas ações pelos símbolos \cdot e $*$. Defina $A(z) = \bar{z}$. Então para $\gamma \in \mathbf{SO}(2)$ e κ a reflexão (1.1.2) temos:

$$A(\gamma \cdot z) = A(e^{i\theta K} z) = \overline{e^{iK\theta} z} = e^{-iK\theta} \bar{z} = e^{-iK\theta} (A(z)) = \gamma * (A(z))$$

e

$$A(\kappa \cdot z) = A(\bar{z}) = \overline{\bar{z}} = z = \kappa * \bar{z} = \kappa * A(z).$$

Da mesma maneira, os grupos $\mathbf{SO}(2)$ e \mathbf{S}^1 são isomorfos e a ação (1.1.7) de \mathbf{S}^1 em \mathbb{C} com $K = 1$ é isomorfa à ação padrão do $\mathbf{SO}(2)$ definida no item 1) do exemplo anterior.

Definimos a seguir o principal grupo do nosso trabalho, o grupo produto coroa e a sua ação em V^n , onde $V = \mathbb{R}^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.1.7 *Sejam \mathcal{K} e \mathcal{G} grupos e a aplicação $\sigma \rightarrow \nu_\sigma$ um homomorfismo de \mathcal{G} no grupo dos automorfismos $A(\mathcal{K})$ de \mathcal{K} . Então o conjunto de todos os pares ordenados (k, σ) , $k \in \mathcal{K}$ e $\sigma \in \mathcal{G}$, forma um grupo, o **produto semi-direto** de \mathcal{K} e \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{K} \dot{\wr} \mathcal{G}$, com a operação de multiplicação*

$$(k, \sigma)(k', \sigma') = (k\nu_\sigma(k'), \sigma\sigma').$$

Definição 1.1.8 *Dados um grupo \mathcal{L} e um subgrupo \mathcal{G} do grupo \mathbf{S}_n das permutações, o **produto coroa** de \mathcal{L} e \mathcal{G} é o produto semi-direto de \mathcal{L}^n e \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$.*

Observação 1.1.9 O produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é um grupo gerado por \mathcal{L}^n e \mathcal{G} . A seguir apresentamos a estrutura do grupo produto coroa e sua ação em V^n .

Seja $V = \mathbb{R}^k$. A ação do grupo produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em V^n é dado por:

$$(l, \sigma) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (l_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, l_2 x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, l_n x_{\sigma^{-1}(n)}). \quad (1.1.11)$$

As permutações agem naturalmente em $l \in \mathcal{L}^n$ por

$$\sigma \cdot l = (l_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, l_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Estes são os automorfismos da Definição 1.1.7. O grupo produto coroa é de fato um grupo com a operação

$$(h, \tau)(l, \sigma) = (h\tau(l), \tau\sigma).$$

1.1.3 Integração invariante

Seja Γ um grupo de Lie compacto de $\mathbf{GL}(n)$. Usando integral de Haar, que definimos a seguir, identificamos Γ com um subgrupo ortogonal do grupo $\mathbf{O}(n)$. Este tipo de integração é invariante sob translação por elementos de Γ .

Definição 1.1.10 Dada $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua a valores reais, a operação

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$$

ou

$$\int_{\Gamma} f$$

é uma integral em Γ se:

i) (Linearidade) $\int_{\Gamma} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{\Gamma} f + \mu \int_{\Gamma} g$, para $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ii) (Positividade) Se $f(\gamma) \geq 0$ e $\gamma \in \Gamma$ qualquer, então $\int_{\Gamma} f \geq 0$.

É uma integral de Haar se além de i) e ii) também tem a propriedade

iii) (Invariância por translação) $\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)$ para todo $\delta \in \Gamma$ fixado.

Se Γ é um grupo de Lie compacto, então Γ é limitado, logo $\int_{\Gamma} 1$ é finito. Daí, podemos sempre assumir que a integral de Haar satisfaz $\int_{\gamma \in \Gamma} 1 = 1$, o que nos permite considerar a integral de Haar normalizada.

Exemplo 1.1.11 Seja Γ um grupo de Lie finito de ordem $|\Gamma|$. Então a integral de Haar normalizada em Γ é

$$\int_{\Gamma} f \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma).$$

Proposição 1.1.12 Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em um espaço vetorial n -dimensional V , ρ_{γ} a aplicação linear em $\mathbf{GL}(V)$ associada a $\gamma \in \Gamma$. Então existe um produto escalar em V tal que, qualquer que seja $\gamma \in \Gamma$, a matriz ρ_{γ} numa base ortonormal de V é ortogonal, isto é, $\rho_{\gamma} \cdot \rho_{\gamma}^t = Id_{n \times n}$.

Demonstração Seja \langle, \rangle um produto escalar em V . Definimos

$$\langle v, w \rangle_{\Gamma} := \int_{\Gamma} \langle \rho_{\gamma} v, \rho_{\gamma} w \rangle. \quad (1.1.12)$$

Segue da linearidade e da positividade da integral de Haar que (1.1.12) é um produto interno. Este produto interno é invariante sob Γ pela Invariância por translação da integral de Haar. De fato, para $v, w \in V$ e $\gamma, \delta \in \Gamma$ temos

$$\langle \rho_{\gamma} v, \rho_{\gamma} w \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \langle \underbrace{\rho_{\delta}}_{\gamma v}, \underbrace{\rho_{\delta}}_{\gamma w} \rangle = \int_{\Gamma} \langle \rho_{\delta} v, \rho_{\delta} w \rangle = \langle v, w \rangle_{\Gamma}.$$

Para $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ base ortonormal de V relativamente ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$, consideramos que ρ_δ é a matriz que representa $\rho(\delta)$ nessa base. Então, $\rho_\delta b_i$ é a i -ésima coluna de ρ_δ . Além disso, $\langle \rho_\delta b_i, \rho_\delta b_j \rangle_\Gamma = \langle b_i, b_j \rangle_\Gamma = \delta_{ij}$. Portanto, $\rho_\delta \cdot \rho_\delta^t = Id_{n \times n}$. \square

Observação 1.1.13 Pela proposição anterior podemos identificar grupos de Lie compactos em $\mathbf{GL}(n)$ com subgrupos fechados de $\mathbf{O}(n)$.

1.2 Irreducibilidade

Nesta seção apresentamos um resultado que decompõe a representação de um grupo de Lie compacto Γ em soma direta de representações mais simples, que chamamos irreduzíveis. Além disso, garantimos que esta decomposição sempre existe e apresentamos um exemplo que mostra que em geral esta decomposição não é única.

1.2.1 Definições básicas e exemplos

Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente no espaço vetorial V .

Definições 1.2.1 1. Um subespaço $W \subset V$ é chamado Γ -invariante se $\gamma w \in W$ para qualquer $\gamma \in \Gamma$ e $w \in W$.

2. Uma representação ou ação de Γ em V é dita **irreduzível** se os únicos subespaços Γ -invariantes de V são os triviais, isto é, $\{0_V\}$ e V .

3. Um subespaço $W \subset V$ é dito Γ -**irreduzível** (ou irreduzível se está claro que o grupo é Γ) se W é Γ -invariante e a ação de Γ em W é irreduzível.

Como exemplo de ações irreduzíveis consideramos as ações de $\mathbf{SO}(2)$ e de $\mathbf{O}(2)$ sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ definidas no Exemplo 1.1.5, para $K \neq 0$.

Uma das propriedades fundamentais das ações dos grupos de Lie compactos é que subespaços invariantes sempre têm complemento invariante.

Proposição 1.2.2 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo no espaço vetorial V . Seja $W \subset V$ um subespaço Γ -invariante. Então existe um subespaço complementar Γ -invariante $Z \subset V$ de W tal que

$$V = W \oplus Z.$$

Demonstração Pela Proposição 1.1.12 existe um produto interno Γ -invariante, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$, em V . Seja $Z = W^\perp = \{v \in V; \langle v, w \rangle_\Gamma = 0, \forall w \in W\}$. Como o produto interno é Γ -invariante então $\forall \gamma \in \Gamma, v \in W^\perp$ e $w \in W$,

$$\langle \gamma v, w \rangle_\Gamma = \langle v, \gamma^{-1} w \rangle_\Gamma = 0,$$

ou seja, $\gamma v \in W^\perp$, $\forall \gamma \in \Gamma$ e $v \in W^\perp$. Portanto, $Z = W^\perp \subset V$ é um subespaço invariante e W possui um subespaço complementar invariante. \square

Segue diretamente desta proposição que toda representação de um grupo de Lie pode ser escrita como soma direta de subespaços irredutíveis. Esta decomposição do espaço em que o grupo está agindo é em um certo sentido análoga à diagonalização de matrizes, que também é feita com o propósito de simplificação dos cálculos.

Corolário 1.2.3 (Teorema da Redutibilidade Completa) *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existem subespaços Γ -irredutíveis V_1, V_2, \dots, V_s de V tais que*

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s. \quad (1.2.13)$$

Demonstração Podemos assumir V não nulo. Então existe um subespaço Γ -invariante; considere V_1 o subespaço não vazio de menor dimensão e Γ -invariante. Pela Proposição 1.1.12 existe um subespaço $Z \subset V$ Γ -invariante e complementar de V_1 . Repetindo o processo em Z obtemos um subespaço $V_2 \subset V$ Γ -invariante. Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, então o processo deve parar permitindo encontrar a decomposição (1.2.13). \square

Os exemplos a seguir ilustram decomposições de espaços vetoriais sob a ação de certos grupos.

Exemplos 1.2.4 1. *Consideremos a ação do $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^3 como segue. Seja $\theta \in \mathbf{SO}(2)$ agindo em \mathbb{R}^3 por rotação de 2θ no plano- (x, y) e deixando o eixo- z fixado, isto é, definimos*

$$\theta \cdot (x, y, z) = (x \cos(2\theta) - y \sin(2\theta), x \sin(2\theta) + y \cos(2\theta), z).$$

Considere a reflexão $\kappa \in \mathbf{O}(2)$ agindo em \mathbb{R}^3 por:

$$\kappa \cdot (x, y, z) = (x, -y, -z).$$

Podemos decompor o espaço V como $V_1 \oplus V_2$ onde $V_1 = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$ e $V_2 = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$. Temos que V_1 e V_2 são $\mathbf{O}(2)$ -irredutíveis, ou seja, invariantes e $\mathbf{O}(2)$ age irredutivelmente nelas.

2. *Existe uma ação irredutível padrão de $\mathbf{O}(3)$ no espaço vetorial V das matrizes simétricas 3×3 com traço zero. Tais matrizes têm a forma*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & c \\ c & c & (a+d) \end{pmatrix}$$

e V tem dimensão 5. Consideramos a ação de $\mathbf{O}(3)$ em V por semelhança:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(3) \times V &\rightarrow V \\ (\gamma, A) &\mapsto \gamma \cdot A = \gamma^t A \gamma \end{aligned}$$

para qualquer $\gamma \in \mathbf{O}(3)$ e $A \in V$. Como $\mathbf{O}(2) \subset \mathbf{O}(3)$, identificamos $\delta \in \mathbf{O}(2)$ com

$$\left(\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \mathbf{O}(3).$$

Tomando $\mathbf{O}(2)$ desta maneira em $\mathbf{O}(3)$ podemos olhar para $\mathbf{O}(2)$ agindo em V . Verificamos então que $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \\ c & d & 0 \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$,

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\} \text{ são } \mathbf{O}(2)\text{-irredutíveis.}$$

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3.$$

Em geral, a decomposição de V em (1.2.13) não é única. Na próxima subseção entendemos a origem desta não unicidade e encontramos condições para que uma decomposição do tipo (1.2.13) seja única. O exemplo a seguir mostra esta não unicidade da decomposição.

Exemplo 1.2.5 Seja $V = M_2(\mathbb{R})$. Consideramos a ação de $\mathbf{SO}(2)$ em V pela multiplicação de matrizes pela esquerda, isto é, $\theta \in \mathbf{SO}(2)$ e $A \in V$,

$$\theta \cdot A = R_\theta A.$$

Para $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$, temos que $V = V_1 \oplus V_2$ e que V_1 e V_2 são $\mathbf{SO}(2)$ -irredutíveis. Mas se consideramos $V'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 8c & c \\ 8d & d \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$, temos V'_2 também $\mathbf{SO}(2)$ -irredutível, e $V = V_1 \oplus V'_2$.

1.2.2 Decomposição isotópica

Apresentamos aqui um resultado que garante a unicidade de uma decomposição do tipo (1.2.13).

Teorema 1.2.6 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V .

- A menos de Γ -isomorfismo, existe um número finito de subespaços distintos de V Γ -irredutíveis. Denotamos por U_1, U_2, \dots, U_t .
- Defina W_k como sendo a soma de todos os subespaços W Γ -irredutíveis de V tal que W é Γ -isomorfo a U_k . Então,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_t. \quad (1.2.14)$$

Definição 1.2.7 Os subespaços W_k são chamados **componentes isotópicas** de V do tipo U_k para a ação de Γ .

A observação a seguir justifica por que os subespaços W_k são chamados componentes isotópicas e mostra a unicidade da decomposição (1.2.14).

Observação 1.2.8 Por construção, a decomposição isotópica (1.2.14) é única. De fato, suponhamos que exista uma outra decomposição do tipo (1.2.14), $V = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_s$, onde cada X_i é a soma de todos os subespaços $X \subset V$ Γ -irredutíveis com X Γ -isomorfo a U_i . Como temos somente t U_i 's então $s = t$ e, além disso, pela própria definição, segue que $X_i = W_i$, portanto $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_t = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$.

Corolário 1.2.9 a) Se $W \subset V$ é Γ -irredutível então $W \subset W_k$ para um único k .

b) Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Seja $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ uma decomposição de V em soma direta de subespaços Γ -irredutíveis. Se as representações de Γ em V_j são todas distintas (não Γ -isomorfas) então os únicos subespaços não nulos Γ -irredutíveis de V são V_1, V_2, \dots, V_s .

Demonstração

- a) Sabemos pelo item a) do Teorema 1.2.6 que existe somente um número finito de subespaços Γ -irredutíveis não isomorfos que denotamos por U_1, \dots, U_t . Suponhamos que W é Γ -isomorfo a U_i e U_j , $i \neq j$. Então, existem isomorfismos $A_i : W \rightarrow U_i$ e $A_j : W \rightarrow U_j$ tais que, para $\gamma \in \Gamma$, $A_i(\gamma w) = \gamma A_i(w)$ e $A_j(\gamma w) = \gamma A_j(w)$. Desde que A_j é um isomorfismo temos que $A_i \circ A_j^{-1} : U_i \rightarrow U_j$ é um isomorfismo, o que é uma contradição. Portanto, W está contido em um único W_k .
- b) Consideramos as componentes isotópicas W_k de V . Como cada V_j é Γ -irredutível, então $V_j \subset W_k$ para algum k . Se $V_i \subset W_k$ e $V_j \subset W_k$, para $i \neq j \in \{1, 2, \dots, s\}$ então, V_i e V_j são Γ -isomorfos a U_k : absurdo, pois, temos por hipótese que as representações de Γ nos V_i 's são todas distintas. Logo, $V_j = W_k$ para algum k . Se $W \neq 0$ é um subespaço Γ -irredutível de V , por a) segue que $W \subset W_k$ para algum k , mas $V_j = W_k$ para algum j e V_j é Γ -irredutível. Daí, $W = V_j$.

□

Os lemas a seguir foram usados para demonstrar o Teorema 1.2.6.

Lema 1.2.10 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo no espaço vetorial W . Suponha que

$$W = \sum_{\alpha} U_{\alpha}$$

onde cada U_{α} é um subespaço Γ -invariante Γ -isomorfo a U por alguma representação irredutível fixa de Γ . Então todo subespaço Γ -irredutível de W é Γ -isomorfo a U .

Observação 1.2.11 Devido à não unicidade, um subespaço Γ -irredutível de W pode não ser um dos U_{α} 's. O lema diz que, desde que todos os U_{α} 's são Γ -isomorfos, todo subespaço de W é Γ -isomorfo a algum U_{α} .

Demonstração (Lema 1.2.10)

Na maneira como o lema está enunciado, o conjunto dos índices α pode ser infinito. Isto não representa um aumento na generalidade se primeiro mostrarmos que

$$W = U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_s}, \quad (1.2.15)$$

onde s é um número finito. Para mostrar este fato usamos indução. Suponhamos que achamos um subespaço

$$W' = U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_{t-1}} \subset W.$$

Se $W' = W$ então segue o resultado, caso contrário, existe $U_{\alpha_t} \subset W$ tal que $U_{\alpha_t} \not\subset W'$. Além disso, $U_{\alpha_t} \cap W' \subset U_{\alpha_t}$, mas como U_{α_t} é Γ -irredutível e a intersecção é Γ -invariante, então $U_{\alpha_t} \cap W' = \{0\}$. Portanto, a soma $W' + U_{\alpha_t}$ é a soma direta $W'' = U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_t}$.

Se $W = W''$ segue o resultado, caso contrário repetimos o processo. Como W é um espaço vetorial de dimensão finita então o processo tem um número finito de etapas e (1.2.15) vale para um s suficientemente grande.

Agora mostramos que se X é um subespaço Γ -irredutível de W , então X é Γ -isomorfo a U .

Existe $t \leq s$ tal que

$$X \not\subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_{t-1}} \quad (1.2.16)$$

e

$$X \subset U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_{t-1}} \oplus U_{\alpha_t} \quad (1.2.17)$$

e, além disso, este t é único.

Notamos que

$$X \cap (U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_{t-1}}) = \{0\}, \quad (1.2.18)$$

pois esta intersecção é um subespaço Γ -invariante de X , e X é, por hipótese, Γ -irredutível.

Consideramos a aplicação projeção π dada por:

$$\pi : U_{\alpha_1} \oplus U_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus U_{\alpha_t} \rightarrow U_{\alpha_t}.$$

Como (1.2.18) está satisfeito, para $x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t} \in X$ temos que $x_{\alpha_t} \neq 0$ e pela restrição (isomorfismo) $\pi_X = \pi|_X : X \rightarrow \pi(X)$ temos que

$$\pi_X(\gamma x) = \pi_X(\gamma(x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t})) =$$

$$\pi_X(\gamma x_{\alpha_1} + \cdots + \gamma x_{\alpha_t}) = \gamma x_{\alpha_t} = \gamma \pi_X(x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_t}) = \gamma \pi_X(x),$$

ou seja, π_X é um Γ -isomorfismo de X em $\pi(X)$. Como X é irredutível então $\pi|_X(X)$ também é irredutível, mas $\pi|_X(X) \subseteq U_{\alpha_t}$, logo $\pi|_X(X) = U_{\alpha_t}$ e X é Γ -isomorfo a U_{α_t} e então a U .

□

Lema 1.2.12 *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Sejam X e Y subespaços de V Γ -invariantes tal que não existem dois subespaços Γ -irredutíveis $W \subset X$ e $Z \subset Y$ que são Γ -isomorfos. Então*

- a) $X \cap Y = \{0\}$
 b) Se $W \subset X \oplus Y$ é Γ -irredutível, então $W \subset X$ ou $W \subset Y$.

Demonstração

- a) Como X e Y são invariantes, então $X \cap Y$ é invariante. Qualquer subespaço $A \subseteq X \cap Y$ é um subespaço irredutível de X e de Y . Consideramos o isomorfismo identidade

$$\begin{aligned} i: A_X &\rightarrow A_Y \\ a &\mapsto a; \end{aligned}$$

$$i(\gamma a) = \gamma a = \gamma i(a),$$

logo, $A_X \subset X$ e $A_Y \subset Y$ são Γ -isomorfos, absurdo. Portanto, o único subespaço irredutível em $X \cap Y$ é o nulo. Logo, $X \cap Y = \{0\}$.

- b) Seja $W \subset X$ subespaço Γ -irredutível. Como X, Y e W são invariantes então $X \cap W$ e $Y \cap W$ são invariantes, mas W é irredutível, então $W \cap X = \{0\}$ ou $W \subset X$. Analogamente, $W \cap Y = \{0\}$ ou $W \subset Y$. Suponhamos que $W \not\subseteq X$ e $W \not\subseteq Y$ e $W \cap X = \{0\} = W \cap Y$. Sejam $\pi_X: X \oplus Y \rightarrow X$ e $\pi_Y: X \oplus Y \rightarrow Y$ projeções. Analogamente à demonstração do lema anterior, W é Γ -isomorfo a $\pi_X(W) \subset X$ e W é Γ -isomorfo a $\pi_Y(W) \subset Y$, ou seja, X e Y possuem subespaços Γ -isomorfos, absurdo. Portanto, $W \subset X$ ou $W \subset Y$.

□

Demonstração (Teorema 1.2.6) Escolhamos um subespaço irredutível $U_1 \subset V$. Seja W'_1 a soma de todos os subespaços invariantes que são Γ -isomorfos a U_1 . Se $W'_1 \neq V$, então tomamos seu complementar invariante Z em V e repetimos o processo em Z . Sejam $U_2 \subset V$ um subespaço irredutível e W'_2 a soma de todos os subespaços de Z que são Γ -isomorfos a U_2 . Se $W'_1 \oplus W'_2 \neq V$ tomamos um complementar de W'_2 em Z , e repetimos o processo. Como a dimensão de V é finita então o processo é finito com

$$V = W'_1 \oplus \cdots \oplus W'_s$$

onde cada W'_k é a soma de conjuntos Γ -isomorfos a subespaços irredutíveis de V , digamos, isomorfos a $U_k \subset V$ e se $k \neq j$, então U_k não é Γ -isomorfo a U_j .

Verificamos que $W_k = W'_k$. Suponhamos que U é um subespaço irredutível de V . Pelo item b) do Lema 1.2.12 $U \subset W'_k$ para algum índice k . Como W'_k é soma de subespaços Γ -isomorfos a U_k verificamos a parte a) do teorema.

Como todo irredutível de V está contido em W'_k para algum k , então $W_k = W'_k$ e segue o item b).

□

1.3 Teoria básica de bifurcação equivariante

Antes de apresentarmos a teoria de bifurcação equivariante, apresentamos na próxima subseção os conceitos básicos de germe e de bifurcação.

1.3.1 Os conceitos de germe e bifurcação

Definição 1.3.1 *Sejam $v_0 \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação C^∞ definida em uma vizinhança de V . Então o germe de f em v_0 , ou simplesmente o germe de f , é o conjunto $\{g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : \text{existe uma vizinhança } W \text{ de } v_0 \text{ contida em } U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W\}$ e é denotado por $f : (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

Seja V um espaço vetorial. Consideramos o sistema do tipo

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0$$

com $g : V \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow V$ um germe de aplicação diferenciável de classe C^∞ . Os **pontos de equilíbrio** do sistema são precisamente as soluções de $g(x, \lambda) = 0$. Queremos discutir o número de soluções x para diferentes valores de λ . Como $x(t) = x_0$ é solução de equilíbrio se, e somente se, $\dot{x} = 0$, então podemos formular o problema com a equação

$$g(x, \lambda) = 0, \tag{1.3.19}$$

onde x é chamada **variável de estado** e λ é chamado **parâmetro de bifurcação**.

Para cada λ , seja $n(\lambda)$ o número de x 's para o qual (x, λ) é uma solução de (1.3.19). Nosso estudo é local; assim, assumimos que (1.3.19) pode somente estar definido em uma vizinhança de uma solução (x_0, λ_0) onde $n(\lambda)$ varia na vizinhança de λ_0 . O conjunto dos (x, λ) desta vizinhança tal que $g(x, \lambda) = 0$ é chamado **diagrama de bifurcação** de g .

Definição 1.3.2 *Assuma que $g(x_0, \lambda_0) = 0$. Chamamos (x_0, λ_0) ponto de bifurcação da equação (1.3.19) se, para cada λ , o número de soluções $n(\lambda)$ variar conforme λ varia numa vizinhança de λ_0 .*

Se (x_0, λ_0) for um ponto de bifurcação, então $(dg)_{x_0, \lambda_0} = 0$, pois pelo Teorema da Função Implícita se $(dg)_{x_0, \lambda_0} \neq 0$ então (1.3.19) pode ser unicamente resolvida para x como uma função de λ . Em outras palavras, para cada λ perto de λ_0 existe exatamente uma solução de (1.3.19) próxima de x_0 e, portanto, $n(\lambda)$ não varia. Por conveniência, consideramos germe em uma vizinhança da origem em $V \times \mathbb{R}$. De fato, se o ponto de bifurcação não for a origem, podemos transladar o sistema de coordenadas e realizar um estudo local em torno da origem. Logo, suponhamos $(dg)_{0,0} = 0$.

Agora apresentamos a teoria de bifurcação equivariante iniciando com funções invariantes.

1.3.2 Funções invariantes

Definição 1.3.3 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo num espaço vetorial V . Dizemos que uma função a valores reais $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é **invariante** sob a ação de Γ , ou é Γ -invariante, se

$$f(\gamma x) = f(x) \quad (1.3.20)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$.

Pela linearidade da ação de Γ é suficiente verificar (1.3.20) para os geradores do grupo Γ .

Exemplos 1.3.4 a) Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \equiv \{1, -1\}$ agindo não trivialmente sobre \mathbb{R} , isto é, $1 \cdot x = x$ e $-1 \cdot x = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathbb{Z}_2 -invariante se, e somente se, f é uma função par.

Agora, se f é um polinômio invariante por \mathbb{Z}_2 , então todos os seus termos possuem potência par. Portanto, existe um polinômio $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = h(x^2). \quad (1.3.21)$$

b) Consideramos a ação padrão do grupo \mathbf{S}^1 sobre $V = \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$: $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$. (ver Exemplo 1.1.5)

Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathbf{S}^1 -invariante quando

$$f(z) = f(e^{i\theta} z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ e $\theta \in \mathbf{S}^1$. A aplicação que a cada $\theta \in \mathbf{S}^1$ associa $e^{i\theta} z$ forma um círculo centrado na origem e de raio $|z|$, então as funções que são \mathbf{S}^1 -invariantes são aquelas constantes neste círculo.

Mostramos que se f é um polinômio \mathbf{S}^1 -invariante em \mathbb{C} então existe um polinômio $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = h(z\bar{z}). \quad (1.3.22)$$

Escrevamos f nas coordenadas $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad (1.3.23)$$

onde $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Exigimos que os coeficientes sejam complexos de tal maneira que o polinômio f seja real. Desde que f é real, $f = \bar{f}$ e então

$$\overline{a_{\beta\alpha}} = a_{\alpha\beta}. \quad (1.3.24)$$

Por (1.3.23) temos que

$$f(e^{i\theta} z) = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta. \quad (1.3.25)$$

Por (1.3.20) temos que

$$\sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \bar{z}^\beta.$$

Logo,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } a_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.3.26)$$

Portanto, $f(z) = \sum a_{\alpha\alpha} (z\bar{z})^\alpha$. Por (1.3.24), $a_{\alpha\alpha} = \overline{a_{\alpha\alpha}}$, ou seja, $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$.

Se consideramos o polinômio $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $h(x) = \sum a_{\alpha\alpha} (x)^\alpha$, então $f(z) = h(z\bar{z})$ como afirmado em (1.3.22).

- c) Seja $\Gamma = \mathbf{D}_n$ com sua ação padrão sobre $V = \mathbb{C}$, ou seja, a ação do Exemplo 1.1.5-4 tomando $K = 1$ e $\theta = \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$. Verificamos que para todo polinômio $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbf{D}_n -invariante existe um polinômio $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(z) = g(z\bar{z}, z^n + \bar{z}^n). \quad (1.3.27)$$

Para isto seguimos a idéia do item anterior. Escrevemos f na forma (1.3.23). Desde que \mathbf{D}_n é gerado por $\theta = 2\pi/n$ e κ onde $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$ e $\kappa \cdot z = \bar{z}$, f é \mathbf{D}_n -invariante se satisfaz

1. $f(\theta z) = f(z) \Leftrightarrow$ (1.3.26) vale para $\theta = 2\pi/n$
2. $f(\kappa z) = f(z) \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Em suma, f é \mathbf{D}_n -invariante se, e somente se,

- a) $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$
- b) $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$
- c) $a_{\alpha\beta} = 0$ ou $\alpha \equiv \beta \pmod{n}$, isto é, ou $\alpha - \beta = kn; k \in \mathbb{Z}$

Reescrevemos (1.3.23) da seguinte forma:

$$f(z) = \sum A_{\alpha\beta} (z^\alpha \bar{z}^\beta + z^\beta \bar{z}^\alpha), \quad (1.3.28)$$

onde

$$A_{\alpha\beta} = \begin{cases} a_{\alpha\beta} & \text{se } \alpha \neq \beta \\ a_{\frac{\alpha+\beta}{2}} & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$$

Fatoramos em (1.3.28) alguns termos e usamos c) para chegar em

$$f(z) = \sum_{j,k} B_{jk} (z\bar{z})^j (z^{kn} + \bar{z}^{kn}),$$

para certos B_{jk} . Finalmente, usando a igualdade

$$(z^{kn} + \bar{z}^{kn}) = (z^n + \bar{z}^n (z^{(k-1)n} + \bar{z}^{(k-1)n})) \quad (z\bar{z})^n (z^{(k-2)n} + \bar{z}^{(k-2)n}),$$

indutivamente em k crescente, obtemos

$$f(z) = \sum_{l,m} C_{lm}(z\bar{z})^l (z^n + \bar{z}^n)^m,$$

para certos coeficientes C_{lm} . Se consideramos $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x, y) = \sum_{l,m} C_{lm}(x)^l (y)^m,$$

mostramos a afirmação (1.3.27).

Dado um grupo de Lie compacto Γ é possível encontrar um subconjunto finito de polinômios Γ -invariantes μ_1, \dots, μ_s tal que todos os polinômios invariantes podem ser escritos como função polinomial de μ_1, \dots, μ_s . Este conjunto, que pode não ser único, gera o conjunto dos polinômios Γ -invariantes e é chamado **base de Hilbert**. O conjunto dos polinômios Γ -invariantes é denotado por $\mathcal{P}(\Gamma)$. Desde que o produto e soma de polinômios Γ -invariantes são ainda Γ -invariantes, então $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um anel. Um resultado importante, iniciado por Hilbert e provado por Weyl [1946], é o teorema que segue. Ressaltamos que a demonstração é técnica e não foi estudada em detalhes.

Teorema 1.3.5 (Hilbert e Weyl): *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

Demonstração [10], cap. XII §6(a).

Observação 1.3.6 Pela Proposição 1.1.12 podemos assumir um grupo de Lie compacto Γ como subgrupo do $\mathbf{O}(n)$. Assim, a norma

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

é sempre Γ -invariante.

Um resultado análogo ao Teorema 1.3.5 também vale para as funções analíticas reais, já que estas podem ser escritas como séries de Taylor. Além disso, o Teorema de Schwarz [1975], que apresentamos abaixo, é um resultado deste tipo que vale para germes C^∞ (Definição 1.3.1) quando o grupo de Lie é compacto.

Definição 1.3.7 \mathcal{E}_s denota o anel dos germes C^∞ de \mathbb{R}^s em \mathbb{R} e $\mathcal{E}(\Gamma)$ denota o anel dos germes C^∞ Γ -invariantes de V em \mathbb{R} .

Teorema 1.3.8 (Schwarz [1975]): *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Seja μ_1, \dots, μ_s uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$. Seja $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Então existe um germe suave $h \in \mathcal{E}(s)$ tal que*

$$f(x) = h(\mu_1(x), \dots, \mu_s(x)). \quad (1.3.29)$$

Demonstração [10], cap. XII §6(b).

Definição 1.3.9 O conjunto dos polinômios Γ -invariantes tem uma relação se existe um polinômio não-nulo $r(y_1, \dots, y_s)$ tal que

$$r(\mu_1(x), \dots, \mu_s(x)) \equiv 0.$$

O anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um anel polinomial se ele tem uma base de Hilbert sem relação.

Um exemplo de um grupo agindo em um espaço vetorial tal que $\mathcal{P}(\Gamma)$ não é um anel polinomial é dado por $\Gamma = \mathbf{Z}_2$ agindo em \mathbb{R}^2 , onde a ação do elemento $-1 \in \mathbf{Z}_2$ é definida por $x \mapsto -x$. Então $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$ é o anel gerado pelos monômios de grau par, isto é, pela base de Hilbert

$$\mu_1 = x_1^2, \mu_2 = x_1x_2, \mu_3 = x_2^2,$$

mas esta base tem a relação

$$\mu_1\mu_3 - \mu_2^2 \equiv 0.$$

Na verdade, é possível mostrar neste exemplo que nenhuma base de Hilbert elimina todas as relações, portanto $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$ não é um anel polinomial.

O resultado a seguir permite-nos determinar se uma dada base de Hilbert μ_1, \dots, μ_s torna $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$ um anel polinomial. Definamos a aplicação $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}^s$, chamada discriminante de Γ , por:

$$\rho(x) = (\mu_1(x), \dots, \mu_s(x)).$$

Lema 1.3.10 Se o Jacobiano $(d\rho)_x$ para algum x é sobrejetor, então $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um anel polinomial.

Aplicando o lema acima no exemplo onde $\Gamma = \mathbf{Z}_2$, temos $\rho(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ e $(d\rho)_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Assim, é impossível $(d\rho)_x$ ser sobrejetor para algum x . Já no Exemplo 1.3.4c $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n)$ é um anel polinomial. De fato, de (1.3.27) temos que

$$\mu_1 = z\bar{z}, \mu_2 = z^n + \bar{z}^n$$

é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n)$ e

$$(d\rho)_z = \begin{pmatrix} \bar{z} & z \\ n\bar{z}^{n-1} & n\bar{z}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Temos que $\det(d\rho) = n(\bar{z}^n - z^n)$ é não nulo para $z \neq 0$ e, então, $(d\rho)_z$ é sobrejetor para algum z não nulo e, pelo Lema 1.3.10, $\mathcal{P}(\mathbf{D}_n)$ é um anel polinomial.

Até mesmo quando $\mathcal{P}(\Gamma)$ é um anel polinomial a unicidade de (1.3.29) para germes não analíticos não precisa ser satisfeita. Por exemplo, \mathbf{Z}_2 agindo em \mathbb{R} com a ação padrão, $\{x^2\}$ é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)$ e pelo Teorema 1.3.8 todo germe $f \in \mathcal{E}(\mathbf{Z}_2)$ pode ser escrito como $f(x) = h(x^2)$, onde h é um germe suave de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Definamos o germe suave

$$k(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Notemos que

$$f(x) = h(x^2) + k(x^2),$$

pois $k(x^2) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a unicidade falha para este exemplo.

1.3.3 Aplicações lineares equivariantes

Consideramos Γ um grupo de Lie compacto agindo linearmente no espaço vetorial V .

Definição 1.3.11 Uma aplicação $F : V \rightarrow V$ comuta com Γ , ou é Γ -equivariante, se

$$F(\gamma v) = \gamma F(v) \quad (1.3.30)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $v \in V$.

Exemplos 1.3.12 1. Consideramos a ação padrão de $\mathbf{SO}(2)$ em \mathbb{R}^2 definida pela rotação de $\theta \in \mathbf{SO}(2)$. Isto é,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

agindo em

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

pela multiplicação de matrizes. Verificamos facilmente que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ comuta com $\mathbf{SO}(2)$ se, e somente se, $a = d$ e $b = -c$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = (a^2 + c^2) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.3.31)$$

onde φ é tal que $\cos \varphi = \frac{a}{a^2+c^2}$ e $\sin \varphi = \frac{c}{a^2+c^2}$. Concluimos que uma aplicação linear de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 comuta com $\mathbf{SO}(2)$ se, e somente se, é da forma (1.3.31).

2. Consideramos a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{R}^2 . Suponhamos que $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ comuta com $\mathbf{O}(2)$. Desde que $\mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{O}(2)$ então M deve satisfazer (1.3.31), isto é, $M = \begin{pmatrix} m & -n \\ n & m \end{pmatrix}$, para $m, n \in \mathbb{R}$. Além disso, M deve comutar com $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e então, $n = 0$. Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3.32)$$

é um múltiplo da identidade.

Definição 1.3.13 Uma representação de um grupo Γ sobre um espaço vetorial V é **absolutamente irredutível** se as únicas aplicações lineares que comutam com Γ são as múltiplas da identidade.

Para justificar esta terminologia temos:

Lema 1.3.14 Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Se a ação de Γ é absolutamente irredutível, então ela é irredutível.

Demonstração Suponhamos que Γ age não irredutivelmente sobre V . Então existe um subespaço próprio $W \subsetneq V$ Γ -invariante e, pela Proposição 1.2.2, seu complemento W^\perp em V também é Γ -invariante. Definamos $\pi : W \oplus W^\perp \rightarrow V$ a projeção sobre W . Para qualquer $v = v_1 + v_2 \in V = W \oplus W^\perp$, onde $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$,

$$\pi(\gamma v) = \pi(\gamma v_1 + \gamma v_2) = \gamma v_1 = \gamma \pi(v),$$

logo π comuta com a ação de Γ e π não é um múltiplo da identidade, pois $\pi \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, Γ não age absolutamente irredutivelmente sobre V . □

Lema 1.3.15 *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V , $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear que comuta com Γ e $W \subset V$ subespaço irredutível. Então:*

- i) $A(W)$ é invariante
- ii) $A(W) = \{0\}$ ou as representações de Γ em W e $A(W)$ são Γ -isomorfas

Demonstração

- i) Seja $z = A(w) \in A(W)$ para algum $w \in W$, então

$$\gamma z = \gamma A(w) = A(\gamma w) \in A(W)$$

e $\gamma z \in A(W)$, ou seja, $A(W)$ é invariante.

- ii) Para qualquer $v \in \ker A$ e $\gamma \in \Gamma$

$$A(\gamma v) = \gamma A(v) = \gamma 0 = 0.$$

Logo, $\ker A$ é invariante o que implica $(\ker A) \cap W$ invariante. Como W é irredutível, então $W \subset \ker A$ ou $W \cap (\ker A) = \{0\}$. Se $W \subset (\ker A)$, então $A(W) = \{0\}$ ou se $W \cap (\ker A) = \{0\}$, então W e $A(W)$ são Γ -isomorfos. □

Este lema implica que:

Teorema 1.3.16 *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo no espaço vetorial V . Decomponha V em componentes isotópicas*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s.$$

Seja $A : V \rightarrow V$ uma aplicação linear que comuta com Γ . Então

$$A(W_k) \subset W_k \tag{1.3.33}$$

para cada $k = 1, 2, \dots, s$.

Demonstração Pela descrição de cada W_k temos que

$$W_k = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

é Γ -isomorfo a um subespaço U_k irredutível de V . Cada V_j é irredutível e pelo Lema anterior $A(V_j)$ é invariante e $A(V_j) = \{0\}$ ou $A(V_j)$ é Γ -isomorfo a U_k . Se $A(V_j) = \{0\}$ então $A(V_j) \subset W_k$, pois W_k é subespaço. Se $A(V_j)$ é Γ -isomorfo a U_k então $A(V_j) \subset W_k$, pois W_k é a soma de todos invariantes Γ -isomorfos a U_k . Portanto, $A(V_j) \subset W_k$ para cada j . Pela linearidade de A ,

$$A(V_1) \oplus A(V_2) \oplus \cdots \oplus A(V_r) \subset W_k$$

$$A(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r) \subset W_k$$

$$A(W_k) \subset W_k.$$

□

Este teorema garante que um aplicação linear Γ -equivariante deixa toda componente isotópica invariante.

1.3.4 Aplicações não lineares equivariantes

O objetivo agora é apresentar uma maneira eficiente de descrever aplicações não-lineares que comutam com a ação de um grupo.

Consideramos Γ um grupo de Lie compacto agindo num espaço vetorial V .

Lema 1.3.17 *Sejam $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Γ -invariante e $g : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante. Então, $fg : V \rightarrow V$ é Γ -equivariante.*

Demonstração $(fg)(\gamma v) = f(\gamma v)g(\gamma v) = f(v)g(\gamma v) = \gamma f(v)g(v) = \gamma(fg)(v)$
 $\Rightarrow (fg)(\gamma v) = \gamma(fg)(v).$

□

Se consideramos a ação padrão de \mathbf{Z}_2 em \mathbb{R} , concluimos que as aplicações $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbf{Z}_2 -equivariantes são as aplicações ímpares.

Sejam $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ o espaço das aplicações polinomiais Γ -equivariantes de V em V e $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ o espaço dos germes na origem Γ -equivariantes C^∞ de V em V . O Lema 1.3.17 implica que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel dos polinômios Γ -invariantes $\mathcal{P}(\Gamma)$. Analogamente, $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ é um módulo sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Os resultados para $\Gamma = \mathbf{Z}_2$ em símbolos são:

a) $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{Z}_2) = \mathcal{P}(\mathbf{Z}_2)\{x\}$

b) $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{Z}_2) = \mathcal{E}(\mathbf{Z}_2)\{x\}.$

Dizemos que as aplicações polinomiais Γ -equivariantes g_1, \dots, g_r geram o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$ se todo Γ -equivariante g pode ser escrito como

$$g = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_r g_r \quad (1.3.34)$$

para polinômios Γ -invariantes f_1, f_2, \dots, f_r . Uma definição similar pode ser feita para $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$. O próximo teorema é correspondente ao Teorema 1.3.5 para o caso equivariante.

Teorema 1.3.18 *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe um número finito de aplicações polinômiais g_1, \dots, g_r Γ -equivariantes que geram o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$.*

Demonstração [10], cap. XII, §6(c).

Agora vamos ver uma versão do Teorema de Schwarz para as aplicações Γ -equivariantes. Esta foi provada por Poénaru em 1976.

Teorema 1.3.19 *(Poénaru[1976]) Sejam Γ um grupo de Lie compacto e g_1, \dots, g_r geradores do módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Então, g_1, \dots, g_r geram $\overrightarrow{\mathcal{E}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.*

Demonstração [10], cap. XII, §6(c).

Os exemplos a seguir são obtidos diretamente a partir dos Exemplos 1.3.4 e do Teorema 1.3.19.

Exemplos 1.3.20 a) *Seja $\Gamma = \mathbf{S}^1$ com a ação padrão sobre \mathbb{C} , isto é, $\theta \in \mathbf{S}^1$ e $z \in \mathbb{C}$, $\theta z = e^{i\theta} z$. Verificamos que todas as aplicações \mathbf{S}^1 -equivariantes $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}(\mathbf{S}^1)$ têm a forma*

$$g(z) = p(z\bar{z})z + q(z\bar{z})iz, \quad (1.3.35)$$

onde p e q são germes de funções em $\mathbb{R}, 0$.

b) *Consideramos $\Gamma = \mathbf{O}(2)$ agindo com a ação padrão sobre \mathbb{C} . Afirmamos que toda a aplicação $\mathbf{O}(2)$ -equivariante $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}(\mathbf{O}(2))$ tem a forma*

$$g(z) = p(z\bar{z})z. \quad (1.3.36)$$

c) *Seja $\Gamma = \mathbf{D}_n$ com a ação padrão sobre \mathbb{C} . Todo o germe \mathbf{D}_n equivariante tem a forma*

$$g(z) = p(u, v)z + q(u, v)\bar{z}^{n-1},$$

onde $u = z\bar{z}$ e $v = z^n + \bar{z}^n$.

Para finalizar esta seção discutimos quando um germe g Γ -equivariante é escrito de forma única como em (1.3.34).

Definição 1.3.21 Dizemos que g_1, \dots, g_r geram $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ livremente sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$, ou que $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é um **módulo livre** sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$, se a relação

$$f_1 g_1 + \dots + f_r g_r \equiv 0,$$

onde $f_j \in \mathcal{P}(\Gamma)$, implicar que

$$f_1 \equiv \dots \equiv f_r \equiv 0.$$

Com esta estrutura temos que se g_1, \dots, g_r geram $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ livremente sobre $\mathcal{P}(\Gamma)$ então qualquer $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ é escrito de maneira única como $g \equiv f_1 g_1 + \dots + f_r g_r$. Nos exemplos anteriores os módulos são livres.

1.4 Quebra de simetria em bifurcação de pontos de equilíbrio

Aqui, estudamos bifurcação de pontos de equilíbrio para sistemas de EDO

$$\frac{dx}{dt} + g(x, \lambda) = 0. \quad (1.4.37)$$

Supomos que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz

$$g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda),$$

isto é, g é Γ -equivariante na variável x , onde Γ é um grupo de Lie compacto e $\lambda \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de bifurcação. Uma **solução de equilíbrio** $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ satisfaz $dx/dt = 0$, isto é,

$$g(x, \lambda) = 0.$$

Focalizamos aqui em simetrias que uma solução x pode possuir.

1.4.1 Órbitas e subgrupos de isotropia

Seja Γ um grupo de Lie agindo no espaço vetorial V .

Definições 1.4.1 A órbita de $x \in V$ pela ação de Γ é o conjunto

$$\Gamma x = \{\gamma x; \gamma \in \Gamma\}. \quad (1.4.38)$$

O subgrupo de isotropia de $x \in V$ é

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma; \gamma x = x\}. \quad (1.4.39)$$

Suponhamos $f : V \rightarrow V$ Γ -equivariante, então $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$. Se $x \in V$ é tal que $f(x) = 0$ então $f(\gamma x) = \gamma f(x) = \gamma 0 = 0$, isto é, se x é uma solução, então todos os elementos da sua órbita Γx também são.

O lema a seguir mostra qual a relação entre os subgrupos de isotropia de elementos na mesma órbita.

Lema 1.4.2 *Pontos na mesma órbita pela ação de Γ possuem subgrupos de isotropia conjugados, ou seja,*

$$\Sigma_{\gamma x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}. \quad (1.4.40)$$

Demonstração Sejam $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Para $\sigma \in \Sigma_x$, queremos mostrar que $\gamma \sigma \gamma^{-1} \in \Sigma_{\gamma x}$. De fato, $\gamma \sigma \gamma^{-1}(\gamma x) = \gamma \sigma x = \gamma x \in \Sigma_{\gamma x}$. Portanto, $\Sigma_{\gamma x} \supseteq \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$.

Por outro lado, se $\delta \in \Sigma_{\gamma x}$, então $\delta \gamma x = \gamma x$ e $\gamma^{-1} \delta \gamma x = \gamma^{-1} \gamma x = x$, ou seja, $\gamma^{-1} \Sigma_{\gamma x} \gamma \subseteq \Sigma_x$. Logo, $\Sigma_{\gamma x} \subseteq \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}$.

□

Um método conveniente de descrever geometricamente a ação de um grupo de Lie Γ em V é agrupar em um conjunto W todos os pontos de V que têm subgrupos de isotropia conjugados. Dizemos que W é um **tipo de órbita** da ação.

Ilustramos estas idéias considerando a ação do grupo diedral \mathbf{D}_n em \mathbb{C} gerada por

$$\kappa : z \mapsto \bar{z} \text{ e}$$

$$\xi : z \mapsto e^{2\pi i/n} z.$$

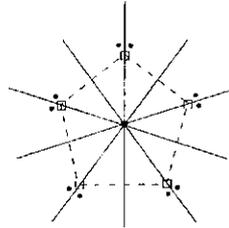


Figura 1.1: Polígono regular de 5 lados

Geometricamente, identificamos a ação do grupo \mathbf{D}_n como sendo as simetrias do polígono regular de n lados no plano centrado na origem. Na Figura 1.1 temos o polígono de 5 lados. Deduzimos os tipos de órbitas da ação do grupo \mathbf{D}_n , onde os resultados dependem se n é par ou ímpar, no nosso caso n é ímpar. Se na Figura 1.1 consideramos o vértice com símbolo \square . Notamos que a ação dos elementos ξ^j e κ , para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, leva este em cada um dos outros vértices, ou seja, os vértices constituem uma órbita. O subgrupo de isotropia de um vértice no eixo real é o grupo \mathbb{Z}_2^n gerado por κ . Como todos os vértices pertencem a uma única órbita segundo \mathbf{D}_5 , então, pelo Lema 1.4.2, os subgrupos de isotropia de todos os vértices são conjugados. Se tomamos $0 \neq t \in \mathbb{R}$, então $\Sigma_{tz} = \Sigma_z$, ou seja, todos os pontos exceto a origem que pertencem às retas que passam por um vértice e pela origem têm mesmo subgrupo de isotropia.

Consideramos agora um ponto próximo do eixo real, mas não no eixo, indicado por \bullet na Figura 1.1. Se aplicamos κ ou ξ^j , para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, obtemos uma órbita com $2n - 10$ elementos, mas o único elemento do grupo \mathbf{D}_5 que fixa estes é a identidade. Portanto, todos os elementos que estão entre as retas vértice-origem pertencem a um mesmo tipo de órbita.

Tipo de órbita	Subgrupo de isotropia	Tamanho da órbita
$\{0\}$	\mathbf{D}_n	1
$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z^n) = 0, z \neq 0\}$	\mathbf{Z}_2	n
$\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z^n) \neq 0\}$	1	$2n$

Tabela 1.1: Tipos de órbitas e subgrupos de isotropia do grupo \mathbf{D}_n agindo em \mathbb{C} com n ímpar

Finalmente, a origem forma ela própria uma órbita e com subgrupo de isotropia todo \mathbf{D}_5 . Portanto, \mathbb{C} possui 3 tipos de órbitas pela ação de \mathbf{D}_5 . Na Tabela 1.1 listamos os tipos de órbitas para n ímpar geral.

No caso quando n é par, os pontos pertencentes às retas que ligam a origem com o ponto médio entre os vértices possuem subgrupos de isotropia não triviais e não conjugados àqueles listados na Tabela 1.1.

Vimos neste exemplo que quanto maior a órbita, menor o subgrupo de isotropia. Formalizamos esta observação como segue:

Proposição 1.4.3 *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V .*

a) *Se $|\Gamma| < \infty$, então $|\Gamma| = |\Sigma_x| |\Gamma x|$.*

b) $\dim \Gamma = \dim \Sigma_x + \dim \Gamma x$.

Observação 1.4.4 • A proposição anterior nos diz que a ordem de Γ é o produto da ordem de Σ_x pelo tamanho da órbita de x , Γx .

- Grupos de Lie são sempre variedades suaves e têm dimensão bem definida. Assim, subgrupos de isotropia são subgrupos de Lie, e ambos $\dim \Gamma$ e $\dim \Sigma_x$ estão bem definidos. Similarmente, órbitas de grupos de Lie são sempre subvariedades e possuem dimensões bem definidas.

Demonstração (Proposição 1.4.3) Considere a aplicação natural

$$\begin{aligned} \varphi: \Gamma &\rightarrow \Gamma x \\ \gamma &\mapsto \gamma x \end{aligned}$$

Notamos que φ é sobrejetora em Γx e $\varphi^{-1}(x) = \{\gamma \in \Gamma; \varphi(\gamma) = x\} = \Sigma_x$. Definamos o subespaço quociente de um subgrupo Σ de Γ por

$$\Gamma/\Sigma = \{\gamma\Sigma; \gamma \in \Gamma\}.$$

Dizemos que os quocientes de Σ em Γ são os conjuntos

$$\gamma\Sigma = \{\gamma\delta; \delta \in \Sigma\}.$$

A aplicação φ induz uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} \psi: \Gamma/\Sigma_x &\rightarrow \Gamma x \\ \gamma &\mapsto \psi(\gamma) = \gamma x \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{|\Gamma|}{|\Sigma_x|} = \frac{|\Gamma|}{|\Sigma_x|} - |\Gamma x| \rightarrow |\Gamma| = |\Gamma x| |\Sigma_x|.$$

Desde que φ e ψ são aplicações suaves e $(d\psi)$ é invertível, pelo Teorema da Função Inversa $\dim(\Gamma/\Sigma_x) = \dim(\Gamma x)$, então $\dim(\Gamma) = \dim(\Sigma_x) + \dim(\Gamma x)$. □

1.4.2 Subespaço de ponto fixo

Definição 1.4.5 *Seja $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. O subespaço de ponto fixo de Σ é*

$$Fix(\Sigma) = \{x \in V; \sigma x = x, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Notamos que $Fix(\Sigma)$ é sempre um subespaço vetorial de V desde que

$$Fix(\Sigma) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \ker(\sigma - id).$$

Os subespaços de ponto fixo mais simples são $Fix(\mathbf{1})$ e o $Fix(\Gamma)$. Como $\mathbf{1}$ fixa todos os elementos de V , então $Fix(\mathbf{1}) = V$. Por outro lado, $Fix(\Gamma)$ consiste de todos os elementos que são fixados por Γ , ou seja, é o subespaço em que Γ age trivialmente. Em nosso trabalho, assumimos que $Fix(\Gamma) = \{0\}$.

Verificamos que os subespaços de ponto fixo têm a propriedade de invariância por uma aplicação Γ -equivariante:

Lema 1.4.6 *Sejam $f : V \rightarrow V$ uma aplicação Γ -equivariante e $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo. Então,*

$$f(Fix(\Sigma)) \subseteq Fix(\Sigma). \quad (1.4.41)$$

Demonstração Sejam $\sigma \in \Sigma$ e $x \in Fix(\Sigma)$. Então,

$$f(x) = f(\sigma x) = \sigma f(x),$$

σ fixa $f(x)$, daí, $f(x) \in Fix(\Sigma)$. □

No lema acima não exigimos Σ um subgrupo de isotropia. Contudo, $Fix(\Sigma)$ é uma soma W de todos os subespaços $Fix(\Delta)$ tal que $\Delta \supset \Sigma$ e Δ é um subgrupo de isotropia. De fato, seja $x \in Fix(\Sigma)$ e $\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma; \gamma x = x\}$ seu subgrupo de isotropia, então $\Sigma \subset \Sigma_x$ e $x \in Fix(\Sigma_x)$. Desde que tomamos $\Delta = \Sigma_x$,

$$x \in Fix(\Sigma) \subset Fix(\Sigma_x) \subset W.$$

Logo,

$$Fix(\Sigma) \subset W.$$

Reciprocamente, se $w \in W$ e $w = w_1 + \dots + w_k$, onde $w_j \in Fix(\Delta_j)$ e $\Delta_j \supset \Sigma$ subgrupo de isotropia, temos que $\forall \sigma \in \Sigma$, $\sigma w_j = w_j$, isto é, $w_j \in Fix(\Sigma)$ e $w = w_1 + \dots + w_k \in Fix(\Sigma)$. Concluimos que $Fix(\Sigma) = W$.

Como consequência do Lema 1.4.6 temos que se $Fix(\Gamma) = \{0\}$ então zero tem que ser fixado pela aplicação f Γ -equivariante, ou seja f possui solução trivial. Além disso temos:

• **Proposição 1.4.7** *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $Fix(\Gamma) = \{0\}$
- b) Toda aplicação Γ -equivariante $f : V \rightarrow V$ satisfaz $f(0) = 0$
- c) A única função Γ -invariante é a função nula.

Demonstração a) \Rightarrow b) Mostramos anteriormente.

b) \Rightarrow a) Sejam $v \in Fix(\Gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ e $f : V \rightarrow V$ a aplicação constante $f(x) = v$. Notamos que

$$\gamma f(x) = \gamma v = v = f(\gamma x),$$

ou seja, f é Γ -equivariante. Agora, por hipótese temos $0 = f(0) = v$. Como isto vale para qualquer $v \in Fix(\Gamma)$, $Fix(\Gamma) = \{0\}$.

a) \Rightarrow c) Seja $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ linear e invariante. Podemos escrever, pelo Teorema de Representação de Riesz (ver [11]), $L(x) = \langle v, x \rangle_{\Gamma}$ para algum $v \in V$. Afirmação: $v \in Fix(\Gamma)$. Logo, $L(x) = \langle v, x \rangle_{\Gamma} = \langle 0, x \rangle_{\Gamma} = 0$. Portanto, $L \equiv 0$.

Prova da afirmação: como L é invariante então $\forall \gamma \in \Gamma$, $L(x) = L(\gamma^{-1}x)$. Então, $\langle v, x \rangle_{\Gamma} = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle_{\Gamma} = \langle \gamma v, x \rangle_{\Gamma}$ para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$, daí, $\gamma v = v$, ou seja, $v \in Fix(\Gamma) = \{0\}$.

c) \Rightarrow b) Seja $f : V \rightarrow V$ equivariante. Queremos mostrar que $f(0) = 0$. Para isto definimos $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x) = \langle f(0), x \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno invariante, isto é possível pela Proposição 1.1.12. Afirmamos que a função L é invariante. Se isto ocorre então $L \equiv 0$ e $f(0) = 0$. Para verificar a afirmação calculamos $L(\gamma x) = \langle f(0), \gamma x \rangle = \langle \gamma^{-1}f(0), x \rangle = \langle f(0), x \rangle = L(x)$. Portanto, L é invariante e segue que $f(0) = 0$. □

A seguir temos um dos principais resultados do nosso trabalho. Mas antes introduzimos duas definições que facilitarão nos enunciados dos lemas e teoremas.

Definição 1.4.8 *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Um subgrupo $\Sigma \subset \Gamma$ é **axial** se ele é um subgrupo de isotropia tendo subespaço de ponto fixo de dimensão um. Em símbolos, $\dim(Fix\Sigma) = 1$.*

Uma outra classe de subgrupos de isotropia é apresentada na próxima definição.

Definição 1.4.9 *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Um subgrupo isotropia $\Sigma \subseteq \Gamma$ é **maximal** se não existe um subgrupo de isotropia Δ de Γ satisfazendo $\Sigma \subsetneq \Delta \subsetneq \Gamma$.*

Observação 1.4.10 • Sejam Σ e Δ subgrupos de isotropia de Γ . Se $\Sigma \subseteq \Delta$ então $Fix\Sigma \supseteq Fix\Delta$. De fato, seja $v \in Fix\Delta$, então para todo $\delta \in \Delta$ temos que $\delta v = v$. Mas $\Delta \supset \Sigma$, então para todo $\sigma \in \Sigma$, $\sigma v = v$, ou seja, $v \in Fix\Sigma$. Portanto, $Fix\Sigma \supset Fix\Delta$.

- Se Σ é um subgrupo axial segue que Σ é um subgrupo de isotropia maximal. De fato, suponhamos que o subgrupo axial Σ não é subgrupo de isotropia maximal. Então, existe um subgrupo de isotropia Δ tal que $\Gamma \supseteq \Delta \supseteq \Sigma$. Como $\dim \text{Fix} = 1$, então $\text{Fix}\Delta \subsetneq \text{Fix}\Sigma$ e $\dim \text{Fix}\Delta = 0$, o que é uma contradição, pois Δ é um subgrupo de isotropia. Portanto, Σ é um subgrupo de isotropia maximal. Verificamos que se $\dim \text{Fix} = 1$ e $\Sigma \subsetneq \Delta$, então $\text{Fix}\Delta \subsetneq \text{Fix}\Sigma$. Se $x \in \text{Fix}\Delta$, então $\delta x = x$ para todo $\delta \in \Delta$. Como $\Sigma \subsetneq \Delta$ temos que $\sigma x = x$ para todo $\sigma \in \Sigma$, ou seja, $x \in \text{Fix}\Sigma$ e $\text{Fix}\Delta \subset \text{Fix}\Sigma$. Suponhamos que $\text{Fix}\Delta = \text{Fix}\Sigma$. Como $\dim \text{Fix}\Sigma = 1$, então existe $w_0 \in V$ não nulo tal que $\text{Fix}\Sigma = [w_0] = \text{Fix}\Delta$. Além disso, Σ e Δ são subgrupos de isotropia, então existem $x_0, y_0 \in V$ não nulos, onde $\Sigma = \Sigma_{x_0}$ e $\Delta = \Sigma_{y_0}$. Daí, $x_0 \in \text{Fix}\Sigma = [w_0]$ e $y_0 \in \text{Fix}\Delta = [w_0]$. Portanto,

$$\Sigma = \Sigma_{x_0} = \Sigma_{y_0} = \Delta,$$

o que é uma contradição. Logo, $\text{Fix}\Delta \subsetneq \text{Fix}\Sigma$.

1.4.3 Lema dos Ramos Equivariantes

Apresentamos aqui um resultado devido a Vanderbauwheds [1980] e Cicogna [1981] que garante sob certas condições no subgrupo de isotropia Σ existência um único ramo de soluções de 1.4.37 com a simetria de Σ . A principal hipótese sobre Σ é que ele seja axial.

Observação 1.4.11 Denotamos $\mathcal{E}_{x,\lambda}$ o espaço dos germes $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ em uma vizinhança da origem, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável padrão e $\lambda \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de bifurcação de 1.4.37. De maneira análoga, \mathcal{E}_λ é o espaço dos germes das funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} na variável λ .

Definição 1.4.12 Seja Γ um grupo de Lie agindo em um espaço vetorial V . Um **problema de bifurcação com grupo de simetria Γ** , ou Γ -equivariante, é um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ satisfazendo $g(0,0) = 0$ e $(dg)_{0,0} = 0$.

Seja g um germe em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$, isto é,

$$g : V \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow V$$

satisfazendo

$$g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda) \tag{1.4.42}$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\text{Fix}(\Gamma) = \{0\}$, então pela Proposição 1.4.7, $g(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí, $g(0,0) = 0$. Exigimos também que $(dg)_{0,0} = 0$. Lembramos que dg é a matriz Jacobiana de g obtida diferenciando g nas $|V|$ - direções de g . Se $(dg)_{0,0}$ é não nulo podemos usar redução de Liapunov-Schmidt com simetrias para reduzir g ao caso em que o Jacobiano se anula. A redução de Liapunov-Schmidt é apresentada no Apêndice A. É claro que este processo mudará n para um n' menor e

também mudará a representação de Γ , mas este processo preserva as simetrias. Assim, assumimos que esta redução já tenha sido feita e, portanto, $(dg)_{0,0} = 0$.

É suposto que $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ satisfaz um conjunto finito \mathcal{P} de igualdades envolvendo um número finito de derivadas de g em $(0,0)$. Um subconjunto $S \subseteq \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ se diz *genérico* para \mathcal{P} se $g \in S$ satisfaz as igualdades em \mathcal{P} e um conjunto finito de desigualdades que envolvem um conjunto finito de derivadas de g na origem que não contradizem as igualdades de \mathcal{P} .

Proposição 1.4.13 *Sejam $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma família de aplicações Γ -equivariantes a um parâmetro com $G(0,0) = 0$ e $V = \ker(dG)_{0,0}$. Então, genericamente, a ação de Γ em V é absolutamente irredutível.*

A Proposição 1.4.13 dá suporte à nossa última hipótese de que Γ age absolutamente irredutivelmente em \mathbb{R}^n e que $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um problema de bifurcação Γ -equivariante. Usamos a hipótese da ação de Γ ser absolutamente irredutível como segue. Diferenciando (1.4.12) com relação a x em $(x, \lambda) = (0, \lambda)$, temos

$$(dg)_{0,\lambda}\gamma = \gamma(dg)_{0,\lambda} \quad (1.4.43)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Como Γ é absolutamente irredutível, então as únicas matrizes que comutam com Γ são as múltiplas da identidade; daí, $(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)I$ com $c \in \mathcal{E}_\lambda$. Desde que $(dg)_{0,0} = 0$ temos $c(0) = 0$. Agora assumimos que

$$c'(0) \neq 0. \quad (1.4.44)$$

Teorema 1.4.14 (*Lema dos Ramos Equivariantes*) *Seja Γ um grupo de Lie com ação absolutamente irredutível em V e seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(\Gamma)$ um problema de bifurcação Γ -equivariante satisfazendo (1.4.44). Seja Σ um subgrupo axial. Então existe um único ramo suave de soluções para $g = 0$ tal que o subgrupo de isotropia de toda solução é Σ .*

Podemos reescrever o Lema dos Ramos Equivariantes como segue: Genericamente, problemas de bifurcação com grupo de simetria Γ têm soluções correspondentes a todos os subgrupos axiais. Desde que Σ é um subgrupo axial segue que Σ é um subgrupo de isotropia maximal. Assim, o Lema dos Ramos Equivariantes nos dá um método para encontrar soluções correspondentes a uma classe especial dos subgrupos de isotropia maximais.

Teorema 1.4.15 *Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Assumimos*

- a) $Fix(\Gamma) = \{0\}$
- b) $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo axial
- c) $g : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ um problema de bifurcação Γ -equivariante satisfazendo

$$(dg_\lambda)_{0,0}(x_0) \neq 0 \quad (1.4.45)$$

onde $x_0 \in Fix(\Sigma)$ é não nulo.

Então existe um ramo suave de soluções $(tx_0, \lambda(t))$ para a equação $g(x, \lambda) = 0$.

As observações a seguir mostram que o Lema dos Ramos Equivariantes segue do Teorema 1.4.15.

Observação 1.4.16 1. Ações irredutíveis não triviais satisfazem $Fix(\Gamma) = \{0\}$. De fato, como a ação de Γ é irredutível e $Fix\Gamma$ é Γ -invariante, então $Fix(\Gamma) = V$, ou $Fix\Gamma = \{0\}$. Como a ação é não trivial, então $Fix(\Gamma) = \{0\}$.

2. Quando a ação de Γ em V é absolutamente irredutível, vimos anteriormente que

$$(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)I.$$

Logo,

$$(dg_\lambda)_{0,0}(x_0) = Kc'(0),$$

onde K é um vetor constante não nulo. Por (1.4.45), $c'(0) \neq 0$. Assim, (1.4.44) é equivalente a (1.4.45).

Demonstração (Teorema 1.4.15) Segue do Lema 1.4.6 que

$$g : Fix(\Sigma) \times \mathbb{R} \rightarrow Fix(\Sigma).$$

Como $\dim Fix(\Sigma) = 1$ temos que $Fix(\Sigma) = \{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$ para $x_0 \neq 0$, $x_0 \in Fix(\Sigma)$ e existe $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(tx_0, \lambda) = h(t, \lambda)x_0.$$

Com a hipótese $Fix(\Gamma) = \{0\}$ pela Proposição 1.4.7 $g(0, \lambda) = 0$. Ainda,

$$g(0, \lambda) = 0 \Leftrightarrow h(0, \lambda)x_0 = 0 \Leftrightarrow h(0, \lambda) = 0.$$

Pelo Teorema de Taylor (em torno de $t = 0$) temos

$$h(t, \lambda) = tk(t, \lambda)$$

tal que $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g(tx_0, \lambda) = k(t, \lambda)tx_0 = k(0, \lambda)(tx_0) + \dots$. Como $(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)I_{n \times n}$ em que $c(0) = 0$ e $c'(0) \neq 0$, temos que $c(\lambda) = k(0, \lambda)$ em que $k(0, 0) = 0$ e $k_\lambda(0, 0) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existe e é única $\Lambda : U \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ tal que

$$k(t, \Lambda(t)) \equiv 0 \text{ e } \Lambda(0) = 0.$$

Logo,

$$g(tx_0, \Lambda(t)) = \underbrace{k(t, \Lambda(t))}_{=0} tx_0 \equiv 0.$$

Portanto, $(tx_0, \Lambda(t))$ é um ramo de soluções de $g = 0$. □

Consideramos $\Gamma = \mathbf{D}_n$ e $V = \mathbb{C}$. Sabemos que o subgrupo de isotropia de todo ponto no eixo real é o subgrupo \mathbf{Z}_2^k com dois elementos gerado por $\kappa : z \mapsto \bar{z}$. Mais ainda, os

únicos elementos em \mathbb{C} fixados por κ são os reais. Assim, $Fix(\mathbb{Z}_2^\kappa) = \mathbb{R}$ e $\dim Fix(\mathbb{Z}_2^\kappa) = 1$. Concluimos, usando o Lema dos Ramos Equivariantes que, genericamente, problemas de bifurcação \mathbf{D}_n -equivariantes têm ramos de soluções consistindo de soluções com simetria \mathbb{Z}_2^κ .

Seja $x_0 \in Fix\Sigma$ tal que $x_0 \neq 0$. Na prova do Teorema 1.4.15 dizemos que um ramo de soluções não triviais de $g|_{Fix\Sigma \times \mathbb{R}} = 0$ tem a forma $(tx_0, \Lambda(t))$ onde $\Lambda(0) = 0$.

Definições 1.4.17 Dizemos que o ramos citado acima é **transcrítico** se $\Lambda'(0) \neq 0$ e **degenerado** se $\Lambda'(0) = 0$.

Entre os ramos transcríticos temos a seguinte divisão: o ramo $(tx_0, \Lambda(t))$ é **subcrítico** se, para todo t não nulo próximo da origem,

$$t\Lambda'(t) < 0,$$

e é **supercrítico** se, para todo t não nulo próximo da origem,

$$t\Lambda'(t) > 0.$$

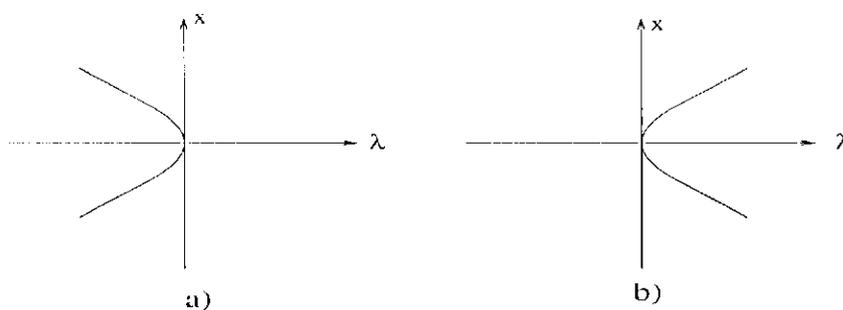


Figura 1.2: Ramos de soluções (a) subcrítico e (b) supercrítico

A Figura 1.2 ilustra um ramo de soluções subcrítico e um supercrítico.

1.4.4 Estabilidade de soluções

Estudamos aqui a estabilidade das soluções e introduzimos um novo tipo de estabilidade, a estabilidade orbital.

Consideramos x_0 um ponto de equilíbrio para um sistema de EDOs

$$\frac{dx}{dt} + g(x) = 0. \quad (1.4.46)$$

Definições 1.4.18 1. x_0 é *assintoticamente estável* se toda trajetória $x(t)$ da EDO que inicia próximo de x_0 permanece próximo de x_0 para $t > 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$.

2. x_0 é *neutramente estável* se a trajetória fica próximo de x_0 para todo $t > 0$.

3. x_0 é instável se sempre existe uma trajetória iniciando próximo de x_0 que não permanece próximo de x_0 para $t > 0$.
4. x_0 é linearmente estável se todos os autovalores da matriz $(dg)_{x_0}$ têm parte real positiva.

O teorema padrão afirma que se x_0 é linearmente estável então x_0 é assintoticamente estável. Em Hirsch e Smale [1974] (p.187) temos que se algum autovalor de $(dg)_{x_0}$ possui parte real negativa, então x_0 é instável.

Vimos um outro tipo de estabilidade que surge no contexto com simetria, a estabilidade orbital. Sejam Γ um grupo de Lie agindo em V , $g : V \rightarrow V$ aplicação Γ -equivariante, x_0 um ponto de equilíbrio do sistema (1.4.46) e $\Sigma = \Sigma_{x_0}$ o subgrupo de isotropia de x_0 . Afirmamos que $\dim \Sigma < \dim \Gamma$ implica que x_0 não pode ser assintoticamente estável. De fato, relembramos da Proposição 1.4.3b) que $\dim \Gamma = \dim \Sigma_{x_0} + \dim \Gamma x_0$. Com isso temos que a órbita Γx_0 é uma subvariedade de V de dimensão positiva. Assim existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma x_0 \in \Gamma x_0$ é solução de equilíbrio arbitrariamente próximo de x_0 . As trajetórias iniciando nestes equilíbrios são fixados por todo tempo não tendendo a x_0 . Assim, x_0 não é assintoticamente estável. Contudo, x_0 pode ser neutramente estável. Na verdade, x_0 pode satisfazer um tipo específico de estabilidade neutra:

Definição 1.4.19 *O ponto de equilíbrio x_0 é orbitalmente estável se x_0 é neutramente estável e se quando $x(t)$ é uma trajetória iniciando próximo de x_0 , então $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existe e pertence a Γx_0 .*

Existe um critério linear para a estabilidade orbital. Para mostrar isto, primeiro indicamos porque a estabilidade linear falha. Temos que

$$\ker(dg)_{x_0} \supset T_{x_0}(\Gamma x_0) \quad (1.4.47)$$

onde $T_{x_0}(\Gamma x_0)$ denota o espaço tangente de Γx_0 em x_0 . Segue de (1.4.47) que $(dg)_{x_0}$ dever ter autovalor nulo. De fato, $x_0 \in T_{x_0}(\Gamma x_0) \subset \ker(dg)_{x_0} \Rightarrow (dg)_{x_0}(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é autovetor associado ao autovalor nulo. Com isso, nem todos os autovalores de $(dg)_{x_0}$ possuem parte real positiva, então a estabilidade linear não é possível em x_0 .

Definição 1.4.20 *Seja x_0 um ponto de equilíbrio de (1.4.46), onde g comuta com a ação de Γ . O ponto de equilíbrio x_0 é linearmente orbitalmente estável se os autovalores de $(dg)_{x_0}$, diferentes daqueles que surgiram do $T_{x_0}(\Gamma x_0)$, têm parte real positiva.*

Em outras palavras, x_0 é linearmente orbitalmente estável se aqueles autovalores de $(dg)_{x_0}$ não forçados pela ação de grupo a serem zero possuem parte real positiva.

Teorema 1.4.21 *Estabilidade linear orbital implica em estabilidade orbital.*

Como vimos em (1.4.43), dg satisfaz

$$(dg)_{\gamma x \gamma} = \gamma(dg)_x. \quad (1.4.48)$$

Seja $\Sigma \in \Gamma$ o subgrupo de isotropia de x . Então para todo $\sigma \in \Sigma$ a igualdade (1.4.48) fica

$$(dg)_x \sigma = \sigma(dg)_x, \quad (1.4.49)$$

isto é, $(dg)_x$ comuta com Σ . Sendo $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ a decomposição isotópica de V em relação a Σ , então pelo Teorema 1.3.16 temos que

$$(dg)_x(W_j) \subseteq W_j, \quad j = 1, \dots, k. \quad (1.4.50)$$

As restrições de $(dg)_x$ estão frequentemente sujeitas a condições extras. Por exemplo, suponhamos que Σ é uma ação absolutamente irredutível em W_j . Então $(dg)_x|_{W_j}$, aplicação linear que comuta com Γ , é um múltiplo da identidade.

Agora consideramos dois exemplos: \mathbf{D}_n e $\mathbf{O}(2)$ em suas representações padrão em \mathbb{C} . Em cada caso lembramos que se $x \in \mathbb{C}$ é real o seu subgrupo de isotropia é o \mathbf{Z}_2^k gerado por $\kappa : z \mapsto \bar{z}$. Em coordenadas reais a matriz de κ é dada por

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $W_1 = \mathbb{R}$ e $W_2 = i\mathbb{R}$. A ação L em W_1 é a identidade e em W_2 é menos a identidade. As representações são distintas e absolutamente irredutíveis.

Como $(dg)_x$ comuta com \mathbf{Z}_2^k , então

$$(dg)_x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}; \quad a, d \in \mathbb{R}. \quad (1.4.51)$$

No caso $\Gamma = \mathbf{D}_n$, a forma (1.4.51) é tudo o que podemos dizer. Quando $\Gamma = \mathbf{O}(2)$ temos que $y(t) = \gamma(t)x \in \mathbf{O}(2)x$, com $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Desde que x é ponto de equilíbrio e g é $\mathbf{O}(2)$ -equivariante

$$g(y(t)) \equiv 0.$$

Dai;

$$0 = \frac{d}{dt}g(y(t))|_{t=0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $d = 0$ e

$$(dg)_x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

Enfatizamos que usando a estrutura de simetria de g pudemos obter $(dg)_x$ sem de fato calcular as derivadas da g explicitamente.

Capítulo 2

Sistemas de células acopladas com simetria do tipo produto coroa

Tratamos neste capítulo da parte central do projeto: bifurcação de pontos de equilíbrio em sistemas acoplados em presença de simetria.

Discutimos a estrutura de sistemas de células acopladas como sistema de equações diferenciais ordinárias onde simetrias do sistema são obtidas através do grupo \mathcal{G} das permutações das células - chamadas **simetrias globais** do sistema - e do grupo \mathcal{L} das simetrias internas de cada célula - chamadas **simetrias internas**. As simetrias global e interna podem ser combinadas de duas maneiras, dependendo de como a simetria interna afeta o acoplamento. Algebricamente, estas duas combinações são dadas pelo “produto coroa” $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ ou pelo “produto direto” $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$. Os nossos estudos são direcionados para a teoria do produto coroa.

O produto coroa ocorre quando o acoplamento é invariante sob a ação do grupo de simetrias internas. O principal objetivo é relacionar bifurcações de pontos de equilíbrio que ocorrem em sistemas com o grupo de simetria combinado $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ às bifurcações correspondentes em sistemas com simetria \mathcal{L} ou \mathcal{G} .

Em um acoplamento de células idênticas, as simetrias são induzidas pela maneira como as equações diferenciais estão associadas e essas simetrias dependem do tipo exato de acoplamento. O grupo \mathcal{G} das simetrias globais é sempre um subgrupo finito de \mathbf{S}_N . Por exemplo, consideramos um sistema de N células acopladas em um anel; este sistema tem a simetria do grupo diedral \mathbf{D}_N . Um outro exemplo é o acoplamento “dois a dois” onde cada célula está acoplada a todas as outras. Este tipo de acoplamento leva à simetria do grupo das permutações \mathbf{S}_N .

O conjunto das simetrias internas, por sua vez, ocorre quando as equações diferenciais que governam a dinâmica de cada célula possuem sua própria simetria e a dinâmica nas células são governadas por equações diferenciais parciais que são invariantes sob tais simetrias.

Estudamos a seguir propriedades que o acoplamento deve possuir quando as simetrias internas e globais combinadas formam o produto coroa. A partir destas propriedades podemos obter uma forma geral para um sistema com simetria produto coroa.

2.1 EDOs de sistemas acoplados com simetria do tipo produto coroa

Iniciamos com a forma de acoplamento geral de sistemas de EDOs que possuem a hipótese de células idênticas com acoplamento idêntico; esta forma de acoplamento permitirá ilustrarmos como o tipo de acoplamento muda o tipo de simetria.

Sejam X_j a variável de estado da j -ésima célula e $X = (X_1, \dots, X_N)$ a variável de estado de um sistema com N células. A hipótese de que as células são idênticas implica que $X_j \in \mathbb{R}^k$ para cada j e $X \in (\mathbb{R}^k)^N$. Nosso objetivo é estudar ramos de soluções de pontos de equilíbrio de um sistema da forma

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad (2.1.1)$$

ou seja, sistema de células acopladas

$$\frac{dX_j}{dt} = f_j(X_j) + h_j(X),$$

onde f_j governa a dinâmica interna da j -ésima célula e h_j governa o acoplamento entre as células para $j = 1, \dots, N$. Desde que consideramos as células idênticas, assumimos que $f_j = f$ para $j = 1, \dots, N$.

Para formular nossa hipótese sobre acoplamento, definimos a **matriz de conexão** C por

$$C(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{se a célula } i \text{ está acoplada à célula } j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para continuar motivando a idéia, assumimos que o acoplamento tem a forma

$$h_j(X) = \sum_{i=1}^N C(i, j) h_{ij}(X_i, X_j),$$

onde h_{ij} modela o acoplamento das células i e j . Isto é, consideramos que o efeito do acoplamento na j -ésima célula é encontrado somando as influências de todas as células acopladas à j -ésima célula. A hipótese de que as células estão idênticamente acopladas implica que $h_{ij} = h$, $i, j = 1, \dots, N$.

Assim, o sistema (2.1.1) é do tipo

$$\begin{pmatrix} dX_1/dt \\ dX_2/dt \\ \vdots \\ dX_N/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X_1) \\ f(X_2) \\ \vdots \\ f(X_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N C(i, 1) h(X_i, X_1) \\ \sum_{i=1}^N C(i, 2) h(X_i, X_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N C(i, N) h(X_i, X_N) \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Discutimos a seguir as simetrias globais presentes neste sistema. Seja $\sigma \in \mathbf{S}_N$ uma permutação. A ação de σ no espaço das posições é dada por

$$\sigma \cdot X = (X_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, X_{\sigma^{-1}(N)}).$$

Agora $\sigma \in \mathbf{S}_N$ é uma simetria do sistema (2.1.2) se, e somente se,

$$F(\sigma X) = \sigma F(X).$$

Notamos que

$$\frac{d\sigma X}{dt} = \sigma \frac{dX}{dt} \Leftrightarrow \sigma^{-1} \frac{d\sigma X}{dt} = \frac{dX}{dt}.$$

Isto implica que

$$\sigma^{-1} \begin{pmatrix} f(X_{\sigma^{-1}(1)}) \\ f(X_{\sigma^{-1}(2)}) \\ \vdots \\ f(X_{\sigma^{-1}(N)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X_1) \\ f(X_2) \\ \vdots \\ f(X_N) \end{pmatrix}$$

e analogamente para $h(X_i, X_j)$. Quanto à matriz de conexão, se identificamos a permutação $\sigma \in \mathbf{S}_N$ com uma matriz $N \times N$ notamos que σ é uma simetria do sistema se $\sigma C \sigma^{-1} = C$. Verificamos isto considerando um sistema de N células e seus possíveis tipos de acoplamento, já que a simetria global depende da forma exata do acoplamento das células, além de que a matriz de uma permutação à esquerda troca linhas e à direita troca colunas. Em suma, σ é uma simetria do sistema (2.1.2) se $\sigma C \sigma^{-1} = C$. O grupo das simetrias globais \mathcal{G} consiste precisamente destas simetrias.

Analisamos agora as restrições impostas em (2.1.2) pela ação do grupo das simetrias internas $\mathcal{L} \subset \mathbf{O}(k)$. Para $l \in \mathcal{L}$ ser uma simetria interna exigimos que

$$f(lX_j) = lf(X_j),$$

para $j = 1, \dots, N$. Se simetrias internas são simetrias de (2.1.2) elas dependem das propriedades do termo de acoplamento h . Como um mínimo, exigimos que quando l age simultaneamente em cada célula, então

$$h(lX_i, lX_j) = lh(X_i, X_j). \quad (2.1.3)$$

Se definimos

$$l \cdot X = (lX_1, \dots, lX_N),$$

então

$$F(l \cdot X) = lF(X)$$

e l é uma simetria de (2.1.2). Segue que $\mathcal{L} \times \mathcal{G}$ são simetrias de (2.1.2) onde \mathcal{L} é visto como o subgrupo diagonal de \mathcal{L}^N . Contudo, também consideramos sistemas acoplados onde a ação de l em cada célula é uma simetria de (2.1.2). Isto é, supomos que

$$h(X_i, lX_j) = lh(X_i, X_j) \quad (2.1.4)$$

$$h(lX_i, X_j) = h(X_i, X_j). \quad (2.1.5)$$

Qualquer duas das equações (2.1.3), (2.1.4) e/ou (2.1.5) implica na terceira. Neste caso, o grupo \mathcal{L}^N é um grupo de simetria de (2.1.2).

O produto coroa $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é um grupo gerado por \mathcal{L}^N e \mathcal{G} . Sob estas condições, é um grupo de simetria de (2.1.2). (Ver Observação 1.1.9, para a definição da ação de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ em \mathbb{R}^{kN} .)

Um exemplo de acoplamento com simetria do produto coroa é dado por

$$h(X_i, X_j) = |X_i|^2 X_j.$$

Neste caso, o sistema fica

$$\frac{dX_j}{dt} = f(X_j) + \sum_{i=1}^N C(i, j) |X_i|^2 X_j,$$

para $j = 1, \dots, N$.

Definição 2.1.1 \mathcal{G} é um subgrupo transitivo de \mathbf{S}_N se para quaisquer $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ existe $\sigma \in \mathcal{G}$ tal que $\sigma(i) = j$, ou seja, se a ação de \mathcal{G} possui uma única órbita em \mathbf{S}_N .

Estamos interessados no tipo de acoplamento que leva à simetria do produto coroa. Para simplificar a análise assumimos que as simetrias globais agem transitivamente nas células, isto é, assumimos que \mathcal{G} é um subgrupo transitivo do \mathbf{S}_N . Nos referimos a esta hipótese de transitividade por (H_T) .

2.2 Teoria linear do grupo $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$

Quando consideramos bifurcação de pontos de equilíbrio a partir de um equilíbrio invariante pelo grupo todo, fazemos a hipótese genérica (H_S) de que $\Gamma = \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age absolutamente irreduzivelmente no núcleo das equações linearizadas. Veja Proposição 1.4.13.

Seja $W \subset V^N$ um subespaço Γ -irreduzível. Em particular, W é um subespaço invariante pelo subgrupo \mathcal{L}^N . Se \mathcal{L}^N age trivialmente em W , então as simetrias locais não terão efeito nas bifurcações. Como estamos interessados em estudar bifurcações com simetria local e global associadas, assumimos: $(H_{\mathcal{L}})$ \mathcal{L}^N age não trivialmente em W .

Seja $U_j = \{v_j \in V; (0, \dots, v_j, \dots, 0) \in W, j = 1, \dots, N\}$. Cada $U_j \subset W$ é um subespaço \mathcal{L} -invariante. De fato, se $v_j \in U_j$, então $(0, \dots, v_j, \dots, 0) \in W$. Como W é \mathcal{L}^N -invariante, então $(l_1 0, \dots, l_j v_j, \dots, l_N 0) \in W$ e $l_j v_j \in U_j$.

Lema 2.2.1 Assumimos as hipóteses (H_T) , (H_S) e $(H_{\mathcal{L}})$. Então

- a) U_j é \mathcal{L} -irreduzível.
- b) Todos os U_j são \mathcal{L} -isomorfos a um único espaço U \mathcal{L} -irreduzível.
- c) $W = U^N$.

Demonstração Por construção, $W \supset U_1 \oplus \cdots \oplus U_N$. Afirmamos que

$$W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_N.$$

Notemos que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_N$ é \mathcal{G} -invariante pois \mathcal{G} somente permuta os subespaços U_j . Também por construção, $U_1 \oplus \cdots \oplus U_N$ é \mathcal{L}^N -invariante, pois cada U_j é \mathcal{L} -invariante. Verificamos agora que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_N \neq \{0\}$. Por hipótese, \mathcal{L}^N age não trivialmente em W . Suponhamos que $(v_1, \dots, v_N) \in W$ e $l \in \mathcal{L}$, então $(l, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{L}^N$ e

$$(l, 1_{\mathcal{L}}, \dots, 1_{\mathcal{L}})(v_1, \dots, v_N) = (lv_1, v_2, \dots, v_N) \in W.$$

Logo, $(lv_1 - v_1, 0, \dots, 0) \in W$ para todo $l \in \mathcal{L}$. Por $(H_{\mathcal{L}})$, existe l tal que $(v_1, \dots, v_N) \neq (lv_1, \dots, lv_N)$ que, sem perda de generalidade, supõe que \mathcal{L} age não trivialmente na primeira componente de vetores em W . Logo, $U_1 \neq \{0\}$ e $U_1 \oplus \cdots \oplus U_N \neq \{0\}$. Como W é irredutível, segue a afirmação.

Os elementos de \mathcal{G} são permutações dos U_j 's e como age transitivamente nos U_j , segue todos os U_j são \mathcal{L} -isomorfos. Isto é, $U_j \cong U$, $j = 1, \dots, N$. Agora, se $U_0 \subset U$ é \mathcal{L} -irredutível, então U_0^N é Γ -invariante. A irredutibilidade de $W = U^N$ implica que $U_0 = U$ e U é \mathcal{L} -irredutível. □

Mostramos no próximo lema que se $Fix_U \mathcal{L} = \{0\}$, então Γ age absolutamente irredutivelmente em U^N se, e somente se, \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em U . Seja $\mathcal{D}_{\Gamma}(W)$ o espaço das aplicações lineares de W em W que comutam com Γ .

Lema 2.2.2 *Suponhamos $\Gamma = \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$, onde \mathcal{G} é um subgrupo transitivo do \mathbf{S}_N e $Fix_U(\mathcal{L}) = \{0\}$. Então,*

$$\mathcal{D}_{\Gamma}(U^N) \cong \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(U).$$

Demonstração Suponhamos que $A : U \rightarrow U$ é uma aplicação linear que comuta com \mathcal{L} . Então $A^N : U^N \rightarrow U^N$ comuta com \mathcal{L}^N e com \mathcal{G} . De fato, para $(l_1, \dots, l_N) \in \mathcal{L}^N$

$$\begin{aligned} (l_1, \dots, l_N) \cdot A^N(u_1, \dots, u_N) &= (l_1, \dots, l_N) \cdot (A(u_1), \dots, A(u_N)) = \\ &= (l_1 A(u_1), \dots, l_N A(u_N)) = (A(l_1 u_1), \dots, A(l_N u_N)) = A^N(l_1 u_1, \dots, l_N u_N) = \\ &= A^N((l_1, \dots, l_N) \cdot (u_1, \dots, u_N)) \end{aligned}$$

e para $\sigma \in \mathbf{S}_N$

$$\begin{aligned} \sigma \cdot A^N(u_1, \dots, u_N) &= \sigma \cdot (A(u_1), \dots, A(u_N)) = \sigma \cdot (v_1, \dots, v_N) = (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(N)}) = \\ &= (A(u_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, A(u_{\sigma^{-1}(N)})) = A^N(\sigma \cdot (u_1, \dots, u_N)). \end{aligned}$$

Portanto, A^N comuta com Γ .

Reciprocamente, suponhamos que $B : U^N \rightarrow U^N$ é linear e comuta com Γ . Em coordenadas, seja $B = (C_1, \dots, C_N)$. Então,

$$(l_1 C_1(u_1, \dots, u_N), \dots, l_N C_N(u_1, \dots, u_N)) =$$

$$(l_1, \dots, l_N) \cdot (C_1(u_1, \dots, u_N), \dots, C_N(u_1, \dots, u_N)) = \\ (C_1(l_1 u_1, \dots, l_N u_N), \dots, C_N(l_1 u_1, \dots, l_N u_N)).$$

Segue que, $C_j(l_1 u_1, \dots, l_N u_N) = l_j C_j(u_1, \dots, u_N)$, para todo $j = 1, \dots, N$. Escolhemos um dos C_j 's, digamos C_i . Por linearidade, podemos escrever, para cada $i = 1, \dots, N$,

$$C_i(u_1, \dots, u_N) = D_1^i(u_1) + \dots + D_i^i(u_i) + \dots + D_N^i(u_N),$$

com $D_j^i : U \rightarrow U$ linear, $j = 1, \dots, N$. A equivariância de C_i implica que cada D_j^i para $j = 1, \dots, N$, $j \neq i$ é \mathcal{L} -invariante, pois

$$l_i C_i(u_1, \dots, u_N) = D_1^i(u_1) + \dots + l_i D_i^i(u_i) + \dots + D_N^i(u_N)$$

e

$$C_i(l_1 u_1, \dots, l_N u_N) = D_1^i(l_1 u_1) + \dots + D_i^i(l_i u_i) + \dots + D_N^i(l_N u_N).$$

Daí, $D_1^i(u_1) + \dots + l_i D_i^i(u_i) + \dots + D_N^i(u_N) = D_1^i(l_1 u_1) + \dots + D_i^i(l_i u_i) + \dots + D_N^i(l_N u_N)$. Desde que $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$, segue da Proposição 1.4.7 que as aplicações lineares D_j^i para $j = 1, \dots, N$, $j \neq i$ são nulas. Daí, $C_i(u_1, \dots, u_N) = D_i^i(u_i)$. Assim,

$$B(u_1, \dots, u_N) = (D_1^1(u_1), \dots, D_N^N(u_N))$$

onde cada $D_j^j : U \rightarrow U$ comuta com \mathcal{L} , para $j = 1, \dots, N$. Como \mathcal{G} é um subgrupo transitivo, então todos os D_j^j 's são iguais. □

Dos dois lemas Lema 2.2.1 e Lema 2.2.2 temos o seguinte resultado:

Lema 2.2.3 *Assumimos as hipóteses (H_T) , (H_S) e $(H_{\mathcal{L}})$. Então $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ age absolutamente irredutivelmente em W se, e somente se, $W \cong U^N$ e \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente sobre U .*

O Lema 2.2.2 indica a forma dos auto-espacos críticos nos pontos de equilíbrio: o núcleo da linearização é genericamente Γ -absolutamente irredutível. Por (H_T) e $(H_{\mathcal{L}})$, este núcleo deve ter a forma U^N onde U é \mathcal{L} -absolutamente irredutível.

2.3 Quebra de simetria em bifurcação $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -equivariante

Assumimos que W é o núcleo da linearização de (2.1.2) em um equilíbrio Γ -invariante. Com a hipótese genérica (H_S) de que Γ age absolutamente irredutivelmente em W e com a hipótese adicional $(H_{\mathcal{L}})$ de que \mathcal{L}^N age não trivialmente em W , pelos resultados da Seção 2.2 podemos escrever $W = U^N$ onde \mathcal{L} age absolutamente irredutivelmente em U e $\text{Fix}_U(\mathcal{L}) = \{0\}$.

Na subseção a seguir apresentamos a forma geral dos subgrupos axiais do produto coroa a menos de conjugação.

2.3.1 Subgrupos axiais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$

Apresentamos inicialmente algumas notações.

Definição 2.3.1 Um subconjunto de índices $J \subset \{1, \dots, N\}$ é chamado um **bloco** se existe um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ que age transitivamente em J .

Observamos que todos os conjuntos unitários são blocos.

Para cada bloco J associamos o subgrupo de permutações

$$\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathcal{G}; \sigma(J) = J\}$$

que age transitivamente em J , já que ele contém \mathcal{H} .

Para $A \subset \mathcal{L}$ um subgrupo qualquer, definimos o subgrupo

$$\Sigma(A, J) = (B_1 \times \dots \times B_N) \dot{+} \mathcal{Q}_J,$$

onde

$$B_j = \begin{cases} A & \text{se } j \in J \\ \mathcal{L} & \text{se } j \notin J. \end{cases}$$

Lema 2.3.2 Para cada bloco J e cada subgrupo axial $A \subset \mathcal{L}$ agindo em U , o subgrupo $\Sigma(A, J) \subset \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é um subgrupo axial.

Demonstração Sejam $x \in U$ um vetor não nulo fixado por A e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ onde

$$x_j = \begin{cases} x & \text{se } j \in J \\ 0 & \text{se } j \notin J \end{cases}.$$

Afirmção: $\Sigma(A, J)$ fixa \mathbf{x} . De fato, $(l, \sigma) \in \Sigma(A, J) \Rightarrow (l_1, \dots, l_N, \sigma) \in \Sigma(A, J)$ onde

$$\begin{cases} l_i \in A & \text{se } i \in J \\ l_i \in \mathcal{L} & \text{se } i \notin J \end{cases} \quad \text{e} \quad \sigma \in \mathcal{Q}_J \Rightarrow \sigma^{-1}(j) \in J \quad \text{se } j \in J. \quad \text{Logo,}$$

$(l, \sigma)\mathbf{x} = (l_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, l_N x_{\sigma^{-1}(N)})$ onde $l_j x_{\sigma^{-1}(j)} = \begin{cases} l_j x & \text{se } j \in J \\ 0 & \text{se } j \notin J \end{cases}$, pois $\sigma \in \mathcal{Q}_J$ e $x_j = x$ para $j \in J$. Além disso, temos que para $j \in J$, $l_j \in A$. Como x é fixado por A , então $l_j x = x$ para $j \in J$. Portanto, $\Sigma(A, J)$ fixa \mathbf{x} .

Por outro lado, seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N) \in U^N$ fixado por $\Sigma(A, J)$. Então $y_j = 0$ se $j \notin J$ e y_j é um múltiplo de x se $j \in J$. Desde que \mathcal{Q}_J age transitivamente em J então todos os y_j 's são iguais. Logo, $\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) = \mathbb{R}\{\mathbf{x}\}$.

Agora vamos mostrar que $\Sigma(A, J)$ é o subgrupo de isotropia $\Sigma_{\mathbf{x}}$ de \mathbf{x} . Da afirmação acima temos que $\Sigma(A, J) \subset \Sigma_{\mathbf{x}}$. Suponhamos que (l, σ) fixa \mathbf{x} , isto é, $(l, \sigma) \in \Sigma_{\mathbf{x}}$. Então, σ deve preservar J , ou seja, $\sigma \in \mathcal{Q}_J$. Assim, $(1_{\mathcal{L}^N}, \sigma) \in \Sigma(A, J)$, $(l, 1)$ fixa \mathbf{x} ,

$$(l, 1)(1_{\mathcal{L}^N}, \sigma) = (l, \sigma) \in \Sigma(A, J)$$

e

$$\Sigma_{\mathbf{x}} \subset \Sigma(A, J).$$

Portanto, $\Sigma(A, J)$ é um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. □

Mostramos na Proposição 2.3.4 abaixo que qualquer subgrupo axial do produto coroa é conjugado a um subgrupo axial da forma $\Sigma(A, J)$.

Sejam

$$\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{L} \wr \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

a aplicação projeção e $U_J = \{(x_1, \dots, x_N) \in U^N; x_j = 0 \text{ se } j \notin J\}$. Temos então o seguinte lema:

Lema 2.3.3 *Suponhamos Σ um subgrupo axial de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$. Então, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em algum bloco J e $Fix_{U^N}(\Sigma) \subset U_J$.*

Demonstração Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in Fix(\Sigma)$ não nulo. Seja $J \subset \{1, \dots, N\}$ tal que $j \in J$ se $x_j \neq 0$. Mostramos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em J .

Primeiramente, mostramos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J \subset J$. Seja $i \in J$. Para qualquer $(l, \sigma^{-1}) \in \Sigma$, $\sigma^{-1} \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$. Queremos $\sigma^{-1}(i) \in J$. Como $\mathbf{x} \in Fix(\Sigma)$, então $(l, \sigma)\mathbf{x} = \mathbf{x}$, isto é, $(l_1 x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, l_N x_{\sigma^{-1}(N)}) = (x_1, \dots, x_N)$. Daí, $x_i \neq 0 \Rightarrow l_i x_{\sigma^{-1}(i)} \neq 0 \Rightarrow x_{\sigma^{-1}(i)} \neq 0 \Rightarrow \sigma^{-1}(i) \in J$. Portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J \subset J$.

Agora mostramos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em J . Para isto, verificamos que para $i, j \in J$ ($x_i, x_j \neq 0$) existe $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\sigma^{-1}(i) = j$. Suponhamos que não existe $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\sigma^{-1}(i) = j$, ou seja, para qualquer $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$, $\sigma^{-1}(i) \neq j$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que não existe $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\sigma^{-1}(1) = 2$. Construímos primeiramente o seguinte subconjunto de J ,

$$J_1 = \{j \in J; \sigma^{-1}(j) \neq 2, \forall \sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)\}.$$

Notemos que $1 \in J_1$, logo, $J_1 \neq \emptyset$. Verificamos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J_1 \subset J_1$. De fato, não existe $\delta \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que para $j \in J_1$

$$\underbrace{\delta^{-1}(\sigma^{-1}(j))}_{\in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J_1} = 2,$$

pois $\delta^{-1}\sigma^{-1} \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ e então $\delta^{-1}\sigma^{-1}(j) \neq 2$. Portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J_1 \subset J_1$.

Agora, definimos

$$J_2 = J_1^c = \{j \in J; \sigma^{-1}(j) = 2, \text{ para algum } \sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)\}.$$

Temos que $2 \in J_2$ (considerando σ a permutação trivial); logo, $J_2 \neq \emptyset$. Verificamos que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)J_2 \subset J_2$. Sejam $\sigma \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ e $j \in J_2$. Queremos mostrar que $\sigma^{-1}(j) \in J_2$, isto é, que existe $\delta \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\delta^{-1}\sigma^{-1}(j) = 2$. Suponhamos que não existe $\delta \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ tal que $\delta^{-1}\sigma^{-1}(j) = 2$, ou seja, para todo $\delta \in \pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$, $\delta^{-1}\sigma^{-1}(j) \neq 2$. Como δ é qualquer, então $\delta^{-1}\sigma^{-1}$ percorre todo $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ e então $j \in J_1$, o que é uma contradição.

Por construção, J_1 e J_2 são subconjuntos disjuntos de J . Então, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ onde

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{se } j \in J_1 \\ 0 & \text{se } j \notin J_1 \end{cases}$$

e $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ onde

$$z_j = \begin{cases} x_j & \text{se } j \in J_2 \\ 0 & \text{se } j \notin J_2 \end{cases}$$

são elementos fixados por Σ e linearmente independentes: absurdo, pois $\dim \text{Fix}(\Sigma) = 1$. Portanto, $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em J . □

Na próxima proposição, supomos que o bloco J , cuja existência é garantida pelo Lema 2.3.3, é $J = \{1, \dots, s\}$ onde $s \leq N$.

Proposição 2.3.4 *Sejam $\Sigma \in \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ subgrupo axial e $x \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma)$ não nulo. Recenunere as células, se necessário, tal que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$. Seja A o subgrupo de isotropia de x_1 em \mathcal{L} . Então*

a) Σ é conjugado a $\Sigma(A, J)$

b) $A \subset \mathcal{L}$ é axial.

Demonstração Iniciamos provando que \mathbf{x} e $(x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)$ têm subgrupos de isotropia conjugados. Desde que $\pi_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ age transitivamente em J , podemos encontrar para cada $j \in J$ um elemento $(l, \sigma) \in \Sigma$ tal que $\sigma(1) = j$. Como $(l, \sigma)\mathbf{x} = \mathbf{x}$, temos

$$x_j = l_j x_{\sigma^{-1}(j)} = l_j x_1.$$

Seja $h = (l_1^{-1}, l_2^{-1}, \dots, l_s^{-1}, 1, \dots, 1)$. Para $(k, \delta) \in \Sigma$ concluímos com o Lema 1.4.2 que

$$\begin{aligned} \text{Fix}_{U^N}(h\Sigma h^{-1}) &= \mathbb{R}\{h(x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)\} \\ &= \mathbb{R}\{(x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)\}. \end{aligned}$$

Como $h\Sigma h^{-1}$ é maximal, segue que $h\Sigma h^{-1}$ é o subgrupo de isotropia de $(x, \dots, x, 0, \dots, 0)$, onde $x = x_1$ e como $\Sigma(A, J)$ fixa $(x, \dots, x, 0, \dots, 0)$, segue que $\Sigma(A, J) \subset h\Sigma h^{-1}$. De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 2.3.2 temos que $\Sigma(A, J) \supset h\Sigma h^{-1}$. Portanto, $\Sigma(A, J) = h\Sigma h^{-1}$.

Mostremos agora que

$$\text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) = \{(y_1, \dots, y_1, 0, \dots, 0); y_1 \in \text{Fix}_U(A)\}.$$

Seja $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_N) \in \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J))$. Como \mathbf{y} é fixado por $A^s \times \mathcal{L}^{N-s}$, então para $j > s$, $y_j = 0$ e para $j \leq s$, y_j é fixado por A . Além disso, \mathcal{Q}_J age transitivamente em J , então todos y_j 's não nulos são iguais, isto é, $y_1 = \dots = y_s$.

Como Σ e $\Sigma(A, J)$ são conjugados segue que $\dim \text{Fix}_{U^N}(\Sigma(A, J)) = 1$ e y_1 é um múltiplo de x . Então $\dim \text{Fix}_U(A) = 1$. Portanto, A é um subgrupo axial. □

2.3.2 Exemplos

Estudamos nesta subseção dois exemplos de acoplamento de células com grupo de simetria $\mathbf{O}(2)$: anéis de 15 e 12 células, levando às simetrias globais dos grupos diedrais \mathbf{D}_{15} e \mathbf{D}_{12} respectivamente. Assim, temos $\mathcal{G} = \mathbf{D}_{15}$ e $\mathcal{L} = \mathbf{O}(2)$, ambos agindo em $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ com suas ações padrões. Como estes exemplos mostram, uma notável consequência dos resultados gerais é que sistemas com acoplamento produto coroa frequentemente possuem simultaneamente células com uma dinâmica não trivial enquanto que outras permanecem *inativas*. Começamos calculando os subgrupos axiais destes exemplos.

a) Subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{15}$

Seja $X = \{0, 1, 2, \dots, 14\}$ em que \mathbf{D}_{15} age por permutações cíclicas e inversão. Iniciamos classificando os blocos J . Para isto, devemos encontrar todos os subgrupos $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, a menos de conjugação, e então os blocos são as \mathcal{H} -órbitas. Os possíveis subgrupos de \mathbf{D}_{15} são $\mathbf{Z}_3 = \langle R_{2\pi/3} \rangle$, $\mathbf{Z}_5 = \langle R_{2\pi/5} \rangle$, $\mathbf{Z}_{15} = \langle R_{2\pi/15} \rangle$, $\mathbf{D}_1 \simeq \langle \kappa \rangle$, \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_5 , \mathbf{D}_{15} . Para encontrarmos as \mathcal{H} -órbitas consideramos um anel circular com 15 células e um eixo de simetria passando pela célula 0. Notemos que as órbitas dos grupos cíclicos são formadas por células igualmente espaçadas e, a menos de conjugação, podemos assumir que a célula 0 é um bloco. Na Tabela 2.1 para os grupos diedrais somente listamos os blocos que não foram listados nos grupos cíclicos. Por exemplo, as órbitas de \mathbf{D}_5 agindo em X são $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ e $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$, mas somente o segundo bloco é novo já que o primeiro é também uma \mathbf{Z}_5 -órbita. Para cada bloco J já calculamos o subgrupo associado $\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathbf{D}_{15}; \sigma(J) = J\}$, também mostrado na Tabela 2.1.

\mathcal{G}	J =células ativas	\mathcal{Q}_J
$\mathbf{1}$	$\{0\}$	\mathbf{D}_1
\mathbf{Z}_3	$\{0, 5, 10\}$	\mathbf{D}_3
\mathbf{Z}_5	$\{0, 3, 6, 9, 12\}$	\mathbf{D}_5
\mathbf{Z}_{15}	$\{0, \dots, 14\}$	\mathbf{D}_{15}
\mathbf{D}_1	$\{\pm k\}; k=1, \dots, 7$	\mathbf{D}_1
\mathbf{D}_3	$\{1, 4, 6, 9, 11, 14\}$	\mathbf{D}_3
\mathbf{D}_3	$\{2, 3, 7, 8, 12, 13\}$	\mathbf{D}_3
\mathbf{D}_5	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$	\mathbf{D}_{15}

Tabela 2.1: Subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{15}$ a menos de conjugação

O único subgrupo de isotropia axial $A \subset \mathbf{O}(2)$, a menos de conjugação, é $\mathbf{Z}_2^k = \langle \kappa \rangle$. Pelo Lema 2.3.2 e Proposição 2.3.4, os subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{15}$, a menos de conjugação, são os grupos $\Sigma(\mathbf{Z}_2^k, J)$. Seja J' o complementar de J em X . Suponhamos que $x = (x_0, x_1, \dots, x_{14}) \in \text{Fix}(\Sigma(\mathbf{Z}_2^k, J))$. Então, $x_j \in \text{Fix}(\mathbf{O}(2))$ se $j \in J'$, isto é, $x_j = 0$ se $j \in J'$. Chamamos tais células de **inativas** e todas as outras

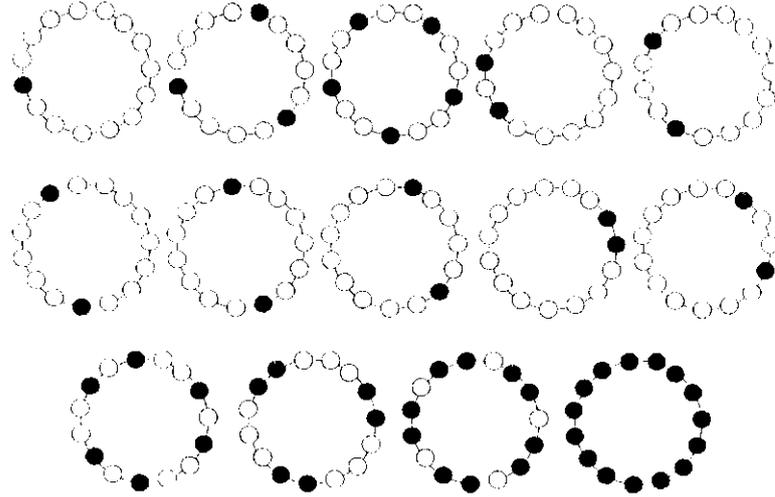


Figura 2.1: Diagramas da células ativas/inativas em um anel de 15 células idênticas com simetria interna $\mathbf{O}(2)$.

de **ativas**. Desde que \mathcal{Q}_J age transitivamente em J , então todas as células ativas x_j são iguais para $j \in J$. Assim, qualquer posição com subgrupo de isotropia $\Sigma(\mathbb{Z}_2^k, J)$ corresponde às células inativas para $j \in J'$ e às células ativas para $j \in J$. Os diagramas da Figura 2.1 representam os 14 padrões de acoplamento das células ativas/inativas, a menos de conjugação, que resulta desta classificação. A lista é típica para anel de N células com simetria interna $\mathbf{O}(2)$ quando N é ímpar. Considerando simetrias internas mais complicadas somente impomos mais possíveis escolhas de A . A parte crucial é a lista de blocos que depende somente de \mathcal{G} .

b) Subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{12}$

Quando N é par a classificação é similar, mas existem duas classes de conjugação distintas de subgrupos diedrais de mesma ordem.

Para $N = 12$ consideramos $\xi = R_{\frac{2\pi}{12}}$ o elemento de ordem 12 que gera \mathbf{D}_{12} e κ o elemento de ordem 2. Sabemos que $\kappa, \xi\kappa \in \mathbf{D}_{12}$ são elementos de ordem 2 mas, ao contrário do caso N ímpar não são conjugados; daí, estes geram duas classes de conjugação distintas.

Seguindo o roteiro do exemplo anterior, calculamos primeiramente os subgrupos de \mathbf{D}_{12} a menos de conjugação. Os subgrupos de \mathbf{D}_{12} estão representados na Tabela 2.2 com as suas respectivas ordens.

Para o subgrupo de ordem 12 poderíamos considerar o subgrupo gerado pelos elementos ξ^4 e ξ^3 , ou seja, $\langle \xi^4, \xi^3 \rangle$. Mas, para $j = 0, \dots, 11$ e $l = 0, \dots, 11$,

$$\frac{2\pi}{4}j + \frac{2\pi}{3}l = \frac{6\pi j + 8\pi l}{12} = \frac{2\pi}{12}(3j + 4l) = \frac{2\pi}{12}m;$$

Ordem	Subgrupo
1	trivial= $\{1_{\mathbf{D}_{12}}\}$
2	$\mathbf{Z}_2 = \langle \xi^6 \rangle$
2	$\mathbf{Z}_2^k = \langle k \rangle$
2	$\mathbf{Z}_2^{\xi\kappa} = \langle \xi\kappa \rangle$
3	$\mathbf{Z}_3 = \langle \xi^4 \rangle$
4	$\mathbf{D}_2 = \langle \xi^6, \kappa \rangle$
4	$\mathbf{D}_2^{\xi\kappa} = \langle \xi^6, \xi\kappa \rangle$
6	$\mathbf{D}_3 = \langle \xi^4, \kappa \rangle$
6	$\mathbf{D}_3^{\xi\kappa} = \langle \xi^4, \xi\kappa \rangle$
8	$\mathbf{D}_4 = \langle \xi^3, \kappa \rangle$
8	$\mathbf{D}_4^{\xi\kappa} = \langle \xi^3, \xi, \kappa \rangle$
12	\mathbf{Z}_{12}
12	$\mathbf{D}_6 = \langle \xi^2, \kappa \rangle$
12	$\mathbf{D}_6^{\xi\kappa} = \langle \xi^2, \xi\kappa \rangle$
24	$\mathbf{D}_{12} = \langle \xi, \kappa \rangle$

Tabela 2.2: Subgrupos de \mathbf{D}_{12}

$m = 0, 1, 2, \dots, 11$, isto é, os elementos deste subgrupo são as rotações de $\frac{2\pi}{12}m$, para $m = 0, 1, 2, \dots, 11$, que é conjugado a \mathbf{Z}_{12} .

A partir dos subgrupos obtemos os blocos e então os subgrupos \mathcal{Q}_j apresentados na Tabela 2.3. Na Figura 2.2 temos os 15 diagramas padrões de acoplamento das células ativas/inativas que resultam da Tabela 2.3.

Observação 2.3.5 Nos exemplos a) e b) notamos a ocorrência simultânea de células ativas e inativas. Este fenômeno é consequência das regras de acoplamento do produto coroa, o que - sob certas circunstâncias - poderia de fato desacoplar células inativas de suas vizinhanças. Mais geralmente, assumimos que $Fix(\mathcal{L}) = \{0\}$ e tomamos um subconjunto qualquer $K \subset \{1, 2, \dots, N\}$ não necessariamente um bloco. Consideramos um subconjunto $\Upsilon \subset \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ da forma

$$\Upsilon = B_1 \times \dots \times B_N$$

onde

$$B_k = \begin{cases} \mathcal{L} & \text{se } k \in K \\ \mathbf{1} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$Fix\Upsilon = Fix(B_1) \times \dots \times Fix(B_N)$$

onde

$$Fix(B_k) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } k \in K \\ U & \text{caso contrário} \end{cases}$$

\mathcal{G}	J =células ativas	\mathcal{Q}_J
$\mathbf{1}$	$\{0\}$	\mathbf{Z}_2
\mathbf{Z}_2	$\{0, 6\}$	\mathbf{D}_2
\mathbf{Z}_2^K	$\{\pm j\}; j=1, \dots, 6$	\mathbf{D}_2
$\mathbf{Z}_2^{\xi_K}$	$\{0, 1\}, \{2, 11\}, \{3, 10\}$	$\mathbf{D}_2^{\xi_K}$
\mathbf{Z}_3	$\{0, 4, 8\}$	\mathbf{D}_3
\mathbf{Z}_4	$\{0, 3, 6, 9\}$	\mathbf{D}_4
\mathbf{D}_2	$\{1, 5, 7, 11\}$	\mathbf{D}_2
$\mathbf{D}_2^{\xi_K}$	$\{0, 1, 6, 7\}$	$\mathbf{D}_2^{\xi_K}$
\mathbf{Z}_6	$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$	\mathbf{D}_6
\mathbf{D}_3	mesmos blocos do \mathbf{Z}_3 e \mathbf{Z}_6	\mathbf{D}_3
$\mathbf{D}_3^{\xi_K}$	$\{0, 1, 4, 5, 8, 9\}$	$\mathbf{D}_3^{\xi_K}$
\mathbf{D}_4	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$	\mathbf{D}_4
$\mathbf{D}_4^{\xi_K}$	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$	$\mathbf{D}_4^{\xi_K}$
\mathbf{D}_6	$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \equiv \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$	\mathbf{D}_6
$\mathbf{D}_6^{\xi_K}$	X	$\mathbf{D}_6^{\xi_K}$
\mathbf{Z}_{12}	X	\mathbf{D}_{12}
\mathbf{D}_{12}	X	\mathbf{D}_{12}

Tabela 2.3: Subgrupos axiais do $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{D}_{12}$

e U é o subespaço apresentado no Lema 2.2.1. Pelo fato de ser um subespaço de ponto fixo, tal subespaço é invariante pela dinâmica. Qualquer solução não nula da restrição da EDO original ao $\text{Fix}Y$ é uma posição do sistema em que as células em K são todas inativas. Além disso, as células ativas não são necessariamente idênticas. Assim, seria possível, por exemplo, arranjar as células onde o comportamento de algumas delas fosse caótico enquanto que células na sua vizinhança permanecessem inativas.

2.3.3 Subgrupos de isotropia e subgrupos de isotropia maximais de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$

Sejam $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ subgrupos de isotropia de \mathcal{L} não conjugados dois a dois. Seja

$$J = J_1 \cup \dots \cup J_r$$

uma partição do conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$, tal que $r \leq s$. Um subconjunto J_i é chamado *parte* da partição J . Seja

$$\mathcal{Q}_J = \{\sigma \in \mathcal{G} : \sigma(J_i) = J_i, \text{ para } 1 \leq i \leq r\}.$$

Para simplificar os índices definimos

$$\mathcal{X} : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$$

por

$$\mathcal{X}(i) = k \text{ para } i \in J_k.$$

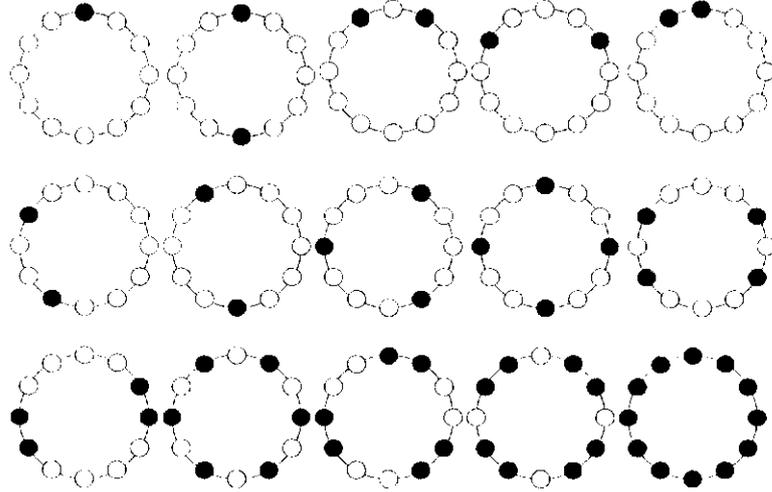


Figura 2.2: Diagramas da células ativas/inativas em um anel de 12 células idênticas com simetria interna $\mathbf{O}(2)$.

Assim, $\mathcal{X}(i)$ denota a parte de J a que i pertence. Denotamos $\Sigma_J = B_1 \times \cdots \times B_N$, onde $B_i = \Sigma_{\mathcal{X}(i)}$. Finalmente, definimos

$$\Sigma = \Sigma_J \wr Q_J. \quad (2.3.6)$$

A proposição a seguir mostra que Σ em (2.3.6) é um subgrupo de isotropia. Fica claro na demonstração que a desigualdade $r \leq s$ e a condição de $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ serem subgrupos de isotropia não conjugados dois a dois são ambas hipóteses necessárias para Σ ser um subgrupo de isotropia.

Proposição 2.3.6 Σ como em (2.3.6) é um subgrupo de isotropia de $\Gamma = \mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ agindo em U^N e todo subgrupo de isotropia de Γ é conjugado a um tal Σ .

Demonstração Seja $w_i \in U$ um vetor cujo subgrupo de isotropia em \mathcal{L} é Σ_i , para $i = 1, \dots, s$. Seja $v = (v_1, \dots, v_N)$ onde $v_i = w_{\mathcal{X}(i)}$. Por construção, Σ fixa v . Desde que os Σ_i s são não conjugados então os w_i 's pertencem a \mathcal{L} -órbitas distintas; daí, qualquer elemento de $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ que fixa v deve preservar as partes de J . Segue que nenhum elemento fora de Σ fixa v . Logo, Σ é um subgrupo de isotropia.

Reciprocamente, consideramos o subgrupo de isotropia Σ de $v = (v_1, \dots, v_N) \in U^N$. Construimos uma partição J tomando dois índices l e m em uma mesma parte se v_l e v_m pertencem a uma mesma órbita de \mathcal{L} . Consideramos $J = J_1 \cup \cdots \cup J_r$ a partição acima e w_1, \dots, w_r os representantes de cada uma das órbitas em \mathcal{L} associadas a esta partição. Daí, se $j \in J_i$ então $v_j = l_i w_i$ para algum $l_i \in \mathcal{L}$. Logo, $v = lw$ onde $l \in \mathcal{L}^N$ e a j -ésima coordenada de w vale w_i se $j \in J_i$. Pela construção de w , Σ é o seu subgrupo de isotropia. Se consideramos $o \in Q_J$ temos que $v = (l, \sigma)w$, ou seja, v e w pertencem a uma mesma $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ -órbita. Logo, o subgrupo de isotropia de v é conjugado ao subgrupo de isotropia Σ . \square

A partir do subgrupo de isotropia Σ podemos calcular seu subespaço de ponto fixo. Refinamos a partição J a uma partição K onde o subgrupo Q_J age transitivamente em cada parte de K . Definamos $\rho(i) = j$ se i pertence à j -ésima parte de K . Então

$$\text{Fix}_{U^N}(\Sigma) = \{(z_1, \dots, z_N) \in U^N; z_i = z_j \text{ se } \rho(i) = \rho(j)\},$$

pois $\rho(i) = \rho(j)$ implica que i e j pertencem a uma mesma parte de K e como Q_J age transitivamente em cada parte de K , então $z_i = z_j$.

Agora consideramos J_i^K o número de partes de K que estão contidas na parte J_i da partição J . Então

$$\dim \text{Fix}_{U^N}(\Sigma) = \sum_{i=1}^s J_i^K \dim \text{Fix}_U \Sigma_i,$$

já que $\text{Fix}(B_1 \times \dots \times B_N) = \text{Fix} B_1 \times \dots \times \text{Fix} B_N$.

Podemos agora classificar os subgrupos de isotropia maximais. Suponhamos que Σ é um subgrupo de isotropia maximal correspondente a uma partição J . Como Σ pode ser aumentado trocando um dos Σ_j 's por \mathcal{L} , então um destes Σ_j 's deve ser o próprio \mathcal{L} , digamos Σ_2 (correspondente à parte J_2). Além disso, como Σ é maximal, isto também implica que existe somente mais uma parte J_1 correspondente a um subgrupo de isotropia Σ_1 maximal relativamente à ação de \mathcal{L} em U .

Se $\Sigma_J \dot{+} Q_J$ é um subgrupo de isotropia maximal com $\Sigma_2 = \mathcal{L}$, então J_1 é um bloco, isto é, Q_J age transitivamente em J_1 . De fato, caso contrário, poderíamos refinar J tal que Q_J agisse transitivamente nas novas partes de J_1 . Então, novamente, poderíamos aumentar o subgrupo de isotropia tomando $\Sigma_1 = \mathcal{L}$ em todas as partes de J_1 , exceto em uma. Temos então:

Proposição 2.3.7 *Todo subgrupo de isotropia maximal em $\mathcal{L} \wr \mathcal{G}$ é da forma $\Sigma = \Sigma_J \dot{+} Q_J$, onde J é uma partição de $\{1, 2, \dots, N\}$ com no máximo duas partes, digamos, $J = J_1 \cup J_2$, onde J_1 um bloco, J_2 pode ser vazio e $\Sigma_J = B_1 \times \dots \times B_N$ tal que $B_i = \Sigma_1$ é um subgrupo de isotropia maximal, se $i \in J_1$ e $B_i = \mathcal{L}$ se $i \in J_2$.*

Esta proposição é útil quando mostramos no Capítulo 3 que os únicos subgrupos de isotropia de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ que geram ramos de soluções de um problema de bifurcação $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante são os subgrupos axiais.

Capítulo 3

Bifurcação de pontos de equilíbrio com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$

Nosso objetivo neste capítulo é usar a teoria apresentada no Capítulo 2 para encontrar os padrões em bifurcação de pontos de equilíbrio para sistemas de N células acopladas (identicamente) duas a duas, onde cada célula tem simetria interna $\mathbf{O}(2)$. A Figura 3.1 ilustra acoplamentos de 4 ou 5 células duas a duas. O grupo produto coroa em questão é $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Supomos que a dinâmica de cada célula ocorre no plano e então consideramos a ação padrão de $\mathbf{O}(2)$ em \mathbb{C} (ver Exemplo 1.1.5-4).

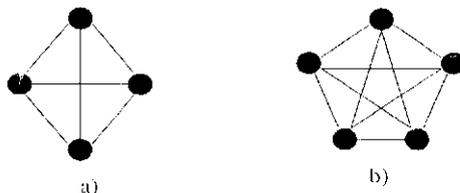


Figura 3.1: a) Acoplamento de 4 células duas a duas: $\mathcal{G} = \mathbf{S}_4$, b) Acoplamento de 5 células duas a duas: $\mathcal{G} = \mathbf{S}_5$

Iniciamos mostrando como a teoria invariante para $\mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G}$ está relacionada às teorias de $\mathbf{O}(2)$ e de \mathcal{G} , onde \mathcal{G} é um subgrupo de \mathbf{S}_N . Depois, aplicamos estes resultados ao grupo $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.

Introduzimos as equações gerais correspondentes a um sistema de N -células acopladas duas a duas. A partir das soluções correspondentes aos subgrupos de simetria com subespaços de ponto fixo unidimensional encontramos o padrão genérico de soluções de equilíbrio. Verificamos que, a menos de conjugação, existem somente N tipos de subgrupos de simetria com subespaços de ponto fixo unidimensional. Genericamente, o Lema dos Ramos Equivariantes garante a existência de soluções com estas simetrias. Para determinar a estabilidade e a direção da criticalidade destas soluções é suficiente dar condições para os coeficientes dos termos de ordem menor do que três na equação geral do campo de vetores. Além disso, os autovalores associados às derivadas calculadas em cada uma destas soluções são reais.

Finalmente, mostramos que genericamente os únicos ramos de soluções para problemas de bifurcação com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ são aqueles obtidos pelo Lema dos Ramos Equivariantes.

3.1 Teoria invariante e equivariante para o grupo $\mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G}$

Considere o grupo $\mathbf{O}(2)$ com a ação do Exemplo 1.1.5-4, \mathcal{G} um subgrupo de \mathbf{S}_N e W um espaço vetorial de dimensão finita. Consideramos a ação de \mathcal{G} em W^N dada por (1.1.9).

O teorema a seguir mostra como podemos descrever a estrutura do anel $\mathcal{P}(\mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G})$ a partir de $\mathcal{P}(\mathbf{O}(2))$ e $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Teorema 3.1.1 *Seja $V = \mathbb{C}$. Seja \mathcal{G} um subgrupo de \mathbf{S}_N e $\Gamma = \mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G}$. Consideramos a ação de Γ em V^N como em (1.1.11) e a ação de \mathcal{G} em \mathbb{R}^N como em (1.1.9).*

Se μ_1, \dots, μ_s formam um base de Hilbert para $\mathcal{P}(\mathcal{G})$, então para todo $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ existe $h \in \mathcal{E}_s$ tal que

$$f(z) = h(\mu_1(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N), \dots, \mu_s(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N))$$

para $z = (z_1, \dots, z_N) \in V^N$.

Para demonstrar este teorema utilizamos a invariância sob $\mathbf{O}(2)^N$:

Lema 3.1.2 *Seja $V = \mathbb{C}$ e $p : V^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial. Se p é invariante sob $\mathbf{O}(2)^N$ então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$p(z) = h(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N),$$

para $z = (z_1, \dots, z_N) \in V^N$.

Demonstração Seja $p : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial invariante sob $\mathbf{O}(2)^N$. Podemos escrever p nas coordenadas $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N$ em V^N na forma

$$p(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

onde $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in (\mathbb{Z}^+)^N$.

Como p é uma função real então $p = \bar{p}$, ou seja

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta = \sum_{\alpha, \beta} \bar{a}_{\alpha\beta} \bar{z}^\alpha z^\beta.$$

Logo, $a_{\beta\alpha} = \bar{a}_{\alpha\beta}$.

Como p é $\mathbf{O}(2)^N$ -invariante, então

$$p(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_N} z_N) = p(z_1, \dots, z_N).$$

para todo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbf{S}^{1N}$, ou seja,

$$\sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} (e^{i\theta} z)^\alpha (\overline{e^{i\theta} z})^\beta = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} e^{i[\theta_1(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + \theta_N(\alpha_N - \beta_N)]} z^\alpha \bar{z}^\beta = p(z), \quad (3.1.1)$$

onde $z = (z_1, \dots, z_N)$, $z^\alpha = (z_1^{\alpha_1}, \dots, z_N^{\alpha_N})$ e $z^\alpha \bar{z}^\beta = z_1^{\alpha_1} \bar{z}_1^{\beta_1} \dots z_N^{\alpha_N} \bar{z}_N^{\beta_N}$.

Em (3.1.1) temos que

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{i[\theta_1(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + \theta_N(\alpha_N - \beta_N)]}.$$

Dai,

$$a_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{ou} \\ \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \dots \text{ e } \alpha_N = \beta_N.$$

Portanto,

$$p(z) = \sum a_{\alpha\alpha} (z_1 \bar{z}_1)^{\alpha_1} \dots (z_N \bar{z}_N)^{\alpha_N},$$

onde $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$.

Se tomamos $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sum a_{\alpha\alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$, temos o resultado desejado.

□

Demonstração (Teorema 3.1.1)

Como \mathcal{G} é um subgrupo do \mathbf{S}_N , segue do Teorema 1.3.5 a existência de uma base de Hilbert finita $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ para o anel $\mathcal{P}(\mathcal{G})$. Agora pelo resultado de Schwarz (Teorema 1.3.8) é suficiente mostrar que $\mu_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N), \dots, \mu_s(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N)$ geram o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Seja $p : V^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \in \mathcal{P}(\Gamma)$. Em particular, p é $\mathbf{O}(2)^N$ -invariante e pelo Lema 3.1.2 temos que existe $h : V^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$p(z) = h(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N).$$

Além disso, p é \mathcal{G} -invariante o que implica h \mathcal{G} -invariante, ou seja, existe $\tilde{h} \in \mathcal{E}_s$ tal que

$$h(x_1, \dots, x_N) = \tilde{h}(\mu_1(x_1, \dots, x_N), \dots, \mu_s(x_1, \dots, x_N)).$$

Concluimos que $\mu_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N), \dots, \mu_s(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N)$ é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$. Segue do Teorema 1.3.8 que se $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ então existe $g \in \mathcal{E}_s$ tal que

$$f(z) = g(\mu_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N), \dots, \mu_s(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N)).$$

□

Idéias similares estão implícitas nos cálculos para obtenção de um sistema de geradores para $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G})$:

Teorema 3.1.3 *Seja $V = \mathbb{C}$ um subgrupo do \mathbf{S}_N e $\Gamma = \mathbf{O}(2) \wr \mathcal{G}$. Considere a ação de Γ em \mathbb{C}^N e a ação de \mathcal{G} no \mathbb{R}^N como definida anteriormente.*

Se g_1, \dots, g_s gera o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\mathcal{G})$ sobre o anel $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ então

$$g_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) * z_1, \dots, g_s(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) * z$$

gera o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$, onde $z = (z_1, \dots, z_N) \in V^N$ e o símbolo $$ entre dois vetores é usado para denotar o vetor obtido multiplicando componentes de mesmo índice desses vetores.*

Para provar o Teorema 3.1.3 usamos a equivariância sob $\mathbf{O}(2)^N$ a partir do lema a seguir.

Lema 3.1.4 *Seja $V = \mathbb{C}$ e $q : V^N \rightarrow V^N$ uma aplicação com componentes polinomiais. Se q é $\mathbf{O}(2)^N$ -equivariante então existem funções polinomiais $h_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, N$ tais que*

$$q(z) = (h_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) z_1, \dots, h_N(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) z_N),$$

para todo $z = (z_1, \dots, z_N) \in V^N$.

Demonstração Suponhamos $q \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{O}(2)^N)$, onde $q = (q_1, \dots, q_N)$ com $q_i : V^N \rightarrow V$ para $i = 1, \dots, N$. Então, para todo $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \mathbf{S}^{1^N}$ e $z \in V^N$ temos

$$\theta q(z) = q(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_N} z_N).$$

Por outro lado,

$$\theta q(z) = (e^{i\theta_1} q_1(z), \dots, e^{i\theta_N} q_N(z)).$$

Assim, para $j = 1, \dots, N$,

$$q_j(z) = e^{-i\theta_j} q_j(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_N} z_N). \quad (3.1.2)$$

Nas coordenadas $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N$ escrevemos

$$q_1(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \quad (3.1.3)$$

Considerando $j = 1$ em (3.1.2) temos

$$q_1(z) = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} e^{i[\theta_1(\alpha_1 - \beta_1 - 1) + \dots + \theta_N(\alpha_N - \beta_N)]} z^\alpha \bar{z}^\beta. \quad (3.1.4)$$

De (3.1.3) e (3.1.4), segue que

$$a_{\alpha\beta} = 0 \text{ ou} \\ \alpha_1 = \beta_1 + 1 \text{ e } \dots \text{ e } \alpha_N = \beta_N.$$

Assim,

$$q_1(z) = \sum a_{\beta_1+1\beta_1\beta_2\beta_2\dots\beta_N\beta_N} (z_1\bar{z}_1)^{\beta_1} \dots (z_N\bar{z}_N)^{\beta_N} z_1.$$

Seja

$$h_1(x) = \sum \operatorname{Re}(a_{\beta_1+1\beta_1\beta_2\beta_2\dots\beta_N\beta_N}) x^\beta$$

e

$$t_1(x) = \sum \operatorname{Im}(a_{\beta_1+1\beta_1\beta_2\beta_2\dots\beta_N\beta_N}) x^\beta.$$

Então,

$$q_1(z) = h_1(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N)z_1 + it_1(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N)z_1.$$

Nós também temos

$$q(\kappa z_1, \dots, z_N) = (\kappa q_1(z), q_2(z), \dots, q_N(z)),$$

que implica que $q_1(z_1, z_2, \dots, z_N) = \overline{q_1(z)}$. Portanto,

$$t_1(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N) \equiv 0.$$

De maneira análoga, mostramos que para $i = 2, \dots, N$ existem outros h_i tais que

$$q_i(z) = h_i(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N)z_i.$$

Portanto,

$$q(z) = (h_1(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N)z_1, \dots, h_N(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N)z_N).$$

□

Demonstração (Teorema 3.1.3)

Desde que \mathcal{G} é um grupo de Lie compacto agindo no \mathbb{R}^N , temos pelo Teorema 1.3.18 que existe um número finito de polinômios que geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathcal{G})$, digamos, g_1, \dots, g_r .

Mostremos que

$$\{g_1(z_1z_1, \dots, z_Nz_N) * z, \dots, g_r(z_1z_1, \dots, z_Nz_N) * z\}$$

gera o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$.

Pelo Lema 3.1.4, se $q \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{O}(2)^N)$, então existem funções polinomiais $h_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, N$ tais que

$$q(z) = (h_1(z_1z_1, \dots, z_Nz_N), \dots, h_N(z_1z_1, \dots, z_Nz_N)) * z = (h_1, \dots, h_N)(z_1\bar{z}_1, \dots, z_N\bar{z}_N) * z.$$

Além disso, se $q \in \vec{\mathcal{P}}(\mathcal{G})$, então $h = (h_1, \dots, h_N) \in \vec{\mathcal{P}}(\mathcal{G})$ e

$$h(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^r p_i(x_1, \dots, x_N) g_i(x_1, \dots, x_N),$$

onde $p_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios \mathcal{G} -invariantes. Portanto,

$$q(z) = \sum_{i=1}^r p_i(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) g_i(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) * z,$$

onde concluímos que o conjunto $\{g_1(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) * z, \dots, g_s(z_1 \bar{z}_1, \dots, z_N \bar{z}_N) * z\}$ é base do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Segue do Teorema 1.3.19 que este conjunto gera o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$. \square

3.2 Teoria invariante e equivariante para o grupo $O(2) \wr S_N$

A partir dos resultados da seção anterior obtemos a forma geral para um problema de bifurcação com simetria $O(2) \wr S_N$. Mas antes, vamos encontrar a forma geral de um germe $f \in \vec{\mathcal{E}}(S_N)$. Para isto precisamos do Teorema fundamental das funções simétricas, que veremos a seguir.

Definição 3.2.1 *Seja R um anel comutativo arbitrário com elemento identidade. Um polinômio em $R[x_1, \dots, x_N]$ que é invariante pela ação do S_N é chamado **função simétrica**.*

Veremos que são exemplos de funções simétricas somas e produtos polinômios da forma $s_p = \sum_{i=1}^N x_i^p$, como $p \in \mathbb{N}$.

Introduzindo uma nova indeterminada z e considerando a função

$$f(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_N)$$

que é S_N -invariante nas variáveis x_1, \dots, x_N temos que

$$f(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_N) = z^N - \sigma_1 z^{N-1} + \sigma_2 z^{N-2} + \dots + (-1)^N \sigma_N, \quad (3.2.5)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + \dots + x_N \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + \dots + x_{N-1} x_N \\ \sigma_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{N-2} x_{N-1} x_N \\ &\vdots \\ \sigma_N &= x_1 x_2 \dots x_N. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

O coeficiente σ_i é a somatória de todos os possíveis produtos com ordem i nas indeterminadas x_1, \dots, x_N . Ainda, cada σ_i é uma função simétrica desde que f é S_N -invariante em x_1, \dots, x_N . Chamamos $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ **funções simétricas elementares** em x_1, \dots, x_N .

Um polinômio da forma $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ é uma função simétrica de x_1, \dots, x_N . Um termo da forma $c\sigma_1^{\mu_1} \dots \sigma_N^{\mu_N}$ de $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ é um polinômio homogêneo nas variáveis x_1, \dots, x_N de grau $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + N\mu_N$, desde que cada σ_i é um polinômio homogêneo de ordem i . A soma $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + N\mu_N$ é chamada de **peso** do termo $c\sigma_1^{\mu_1} \dots \sigma_N^{\mu_N}$. O peso de um polinômio $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ é definido como sendo o maior peso ocorrido entre os termos $c\sigma_1^{\mu_1} \dots \sigma_N^{\mu_N}$.

Teorema 3.2.2 (Teorema fundamental das funções simétricas) *Um polinômio simétrico de grau k no anel polinomial $R[x_1, \dots, x_N]$ pode ser escrito como $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ de peso k , onde $\sigma_1, \dots, \sigma_N$.*

Observação 3.2.3 Se em ambos os membros de (3.2.5) tomamos $x_N = 0$, temos

$$(z - x_1) \dots (z - x_{N-1})z = z^N - (\sigma_1)_0 z^{N-1} + \dots + (-1)^{N-1} (\sigma_{N-1})_0 z,$$

onde $(\sigma_i)_0$ é a expressão que obtemos tomando $x_N = 0$ em σ_i . Se dividimos a expressão acima por z obtemos

$$(z - x_1) \dots (z - x_{N-1}) = z^{N-1} - (\sigma_1)_0 z^{N-2} + \dots + (-1)^{N-1} (\sigma_{N-1})_0.$$

Nesta equação temos que $(\sigma_1)_0, \dots, (\sigma_{N-1})_0$ são os coeficientes da função simétrica de ordem $N - 1$ nas indeterminadas x_1, \dots, x_{N-1} .

Demonstração (Teorema fundamental das funções simétricas)

A prova segue por indução em N . Para $N = 1$ o teorema é verdadeiro, todo polinômio $p(x_1)$ em uma variável x_1 é simétrico e $x_1 = \sigma_1$. Assim, $p(x_1) = p(\sigma_1)$. Assumimos que o teorema vale para todo polinômio nas $N - 1$ variáveis x_1, \dots, x_{N-1} . Vamos verificar que o teorema vale para polinômios nas N variáveis x_1, \dots, x_{N-1}, x_N .

Para polinômios de grau zero nas N variáveis o teorema é trivial, pois o polinômio é constante. Então assumimos que o teorema está provado para todo polinômio de grau $< k$.

Seja $p(x_1, \dots, x_N)$ um polinômio simétrico de grau k . Tomando $x_N = 0$, temos por hipótese de indução que

$$p(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = \varphi((\sigma_1)_0, \dots, (\sigma_{N-1})_0),$$

onde φ está em função das funções elementares simétricas nas indeterminadas x_1, \dots, x_{N-1} e é de peso $\leq k$. Portanto, $\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1})$ tem peso $\leq k$.

Construamos

$$p_1 = p(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) - \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}).$$

O polinômio $p_1(x_1, \dots, x_N)$ é simétrico. O primeiro termo do lado direito é de grau k , o segundo tem peso $\leq k$ e assim como um polinômio nas variáveis (x_1, \dots, x_N) tem grau $\leq k$, conseqüentemente p_1 é de grau $\leq k$. Além disso, para $x_N = 0$, p_1 é nulo; logo, todos

os termos possuem a variável x_N . Desde que a função p_1 é simétrica, todos os termos contêm as variáveis x_1, \dots, x_{N-1} , ou seja, podemos fatorar $\sigma_N = x_1 \dots x_N$:

$$p_1 = \sigma_N q(x_1, \dots, x_N),$$

onde q é um polinômio simétrico de grau $\leq k - N < k$. Logo, por hipótese de indução, q pode ser escrita em função de $\sigma_1, \dots, \sigma_N$:

$$q = \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_N),$$

onde ψ é um polinômio de peso $\leq k - N$. Portanto, podemos representar p da seguinte forma:

$$p = p_1 + \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}) = \sigma_N \psi(\sigma_1, \dots, \sigma_N) + \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_{N-1}).$$

O lado direito representa um polinômio nas variáveis σ_i 's e deve ter no máximo peso k . O peso não pode ser menor do que k porque senão p teria grau menor do que k . Portanto, o lado direito possui peso exatamente k .

□

Proposição 3.2.4 *Seja $\mu_i(x_1, \dots, x_N) = x_1^i + \dots + x_N^i$, $i = 1, \dots, N$. Então, as funções simétricas elementares dadas em (3.2.6) podem ser escritas em função dos μ_i 's, $i = 1, \dots, N$.*

Demonstração Consideramos $c_i = (-1)^i \sigma_i$, tal que $\prod_{i=1}^N (1 - x_i t) = \sum_{i=0}^N c_i t^i$. Então os μ_i 's estão relacionados com os c_i 's pela Fórmula de Newton

1. $\mu_r + c_1 \mu_{r-1} + c_2 \mu_{r-2} + \dots + c_{r-1} \mu_1 + c_r r = 0$ se $1 \leq r \leq N$
2. $\mu_r + c_1 \mu_{r-1} + c_2 \mu_{r-2} + \dots + c_N \mu_{r-N} = 0$ se $r \geq N$

Como $r \leq N$ então consideramos a equação 1. Tomando $r = 1$, $c_1 = -\mu_1$. Para $r = 2$, $c_2 = \frac{\mu_2 - \mu_1^2}{2}$ usando que $\mu_1 = -c_1$. Prosseguindo desta maneira, verificamos que cada c_i pode ser escrito em função dos μ_i 's e então cada σ_i pode ser escrito em função dos μ_i 's.

□

Pelo Teorema 3.2.2 as funções simétricas podem ser escritas em função das funções elementares simples que por sua vez podem ser escritas em função dos μ_k 's, logo $\{\mu_k; k = 1, \dots, N\}$ é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\mathbf{S}_N)$. É com esta base que trabalhamos até o final deste capítulo.

Corolário 3.2.5 *Seja $f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ um germe suave. Se $f \in \mathcal{P}(\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N)$, então existe $h \in \mathcal{E}_N$ tal que*

$$f(z) = h(\mu_1, \dots, \mu_N)$$

para $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ e

$$\mu_k = (z_1 \bar{z}_1)^k + \dots + (z_N \bar{z}_N)^k,$$

para $k = 1, \dots, N$.

Demonstração Pelo Teorema 3.2.2 e Proposição 3.2.4 $\{\mu_k; k = 1, \dots, N\}$ é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\mathbf{S}_N)$, o resultado segue do Teorema 3.1.1. \square

Antes de apresentarmos o próximo corolário, vamos encontrar a base do módulo $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{S}_N)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\mathbf{S}_N)$.

Lema 3.2.6 O módulo $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{S}_N)$ é gerado sobre o anel $\mathcal{E}(\mathbf{S}_N)$ por

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_N^k \end{pmatrix},$$

para $k = 0, \dots, N-1$.

Demonstração Pelo Teorema 1.3.19 restringimos nossa atenção aos polinômios.

Seja $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \in \vec{\mathcal{P}}(\mathbf{S}_N)$, ou seja, $g(\sigma x) = \sigma g(x)$ para $\sigma \in \mathbf{S}_N$. Temos que o conjunto

$\{(1k); k = 2, \dots, N\}$ gera \mathbf{S}_N , onde $(1k)$ denota a permutação entre os inteiros 1 e k e deixa os demais $N-2$ inteiros de $1, \dots, N$.

Para $\sigma = (1k)$, $x = (x_1, \dots, x_N)$ e $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}$, temos

$$\sigma g(x) = \sigma \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \\ \vdots \\ g_N(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k(x) \\ \vdots \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_N(x) \end{pmatrix}.$$

Por outro lado,

$$\begin{pmatrix} g_1(\sigma x) \\ \vdots \\ g_k(\sigma x) \\ \vdots \\ g_N(\sigma x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_k, \dots, x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_k(x_k, \dots, x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_N(x_k, \dots, x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$g_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_N) = g_1(x_k, \dots, x_1, \dots, x_N).$$

Além disso, se $\delta = (ij)$ com $i \neq 1$ e $j \neq 1$, então $\delta = (1i)(1j)(1i)$ e $\delta g(x) = g(\delta x)$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_N(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_j(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_N(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N) \end{pmatrix}.$$

Logo, $g_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = g_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N)$.

Portanto,

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_N) \\ g_1(x_2, x_1, x_3, \dots, x_N) \\ \vdots \\ g_1(x_N, x_2, \dots, x_{N-1}, x_1) \end{pmatrix}.$$

onde

$$g_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N)$$

para $1 \leq \dots \leq i, j \leq \dots \leq N$. Para isto, g_1 deve ser S_{N-1} -invariante nas $N-1$ últimas indeterminadas. Assim, podemos escrever g_1 como um polinômio de x_1 e dos elementos da base de Hilbert de $\mathcal{P}(S_{N-1})$, ou seja,

$$g_1(x) = p(x_1, x_2 + x_3 + \dots + x_N, x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2, \dots, x_2^{N-1} + x_3^{N-1} + \dots + x_N^{N-1}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} g(x) &= \\ & \begin{pmatrix} p(x_1, x_2 + x_3 + \dots + x_N, x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2, \dots, x_2^{N-1} + x_3^{N-1} + \dots + x_N^{N-1}) \\ p(x_2, x_1 + x_3 + \dots + x_N, x_1^2 + x_3^2 + \dots + x_N^2, \dots, x_1^{N-1} + x_3^{N-1} + \dots + x_N^{N-1}) \\ \vdots \\ p(x_N, x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1}, x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2, \dots, x_1^{N-1} + x_2^{N-1} + \dots + x_{N-1}^{N-1}) \end{pmatrix} = \\ & \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_N} \begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} (x_2 + x_3 + \dots + x_N)^{\alpha_2} \dots (x_2^{N-1} + x_3^{N-1} + \dots + x_N^{N-1})^{\alpha_N} \\ x_2^{\alpha_1} (x_1 + x_3 + \dots + x_N)^{\alpha_2} \dots (x_1^{N-1} + x_3^{N-1} + \dots + x_N^{N-1})^{\alpha_N} \\ \vdots \\ x_N^{\alpha_1} (x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1})^{\alpha_2} \dots (x_1^{N-1} + x_2^{N-1} + \dots + x_{N-1}^{N-1})^{\alpha_N} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desde que

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_N)^\alpha - (X_2 + \dots + X_N)^\alpha = [X_1 + (X_2 + \dots + X_N)]^\alpha - (X_2 + \dots + X_N)^\alpha =$$

$$X_1^\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{i} X_1^{\alpha-i} (X_2 + \dots + X_N)^i,$$

ou seja, $(X_2 + \cdots + X_N)^\alpha = (X_1 + X_2 + \cdots + X_N)^\alpha - X_1^\alpha - \sum_{i=1}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{i} X_1^{\alpha-i} (X_2 + \cdots + X_N)^i$, e temos

$$\begin{pmatrix} (X_2 + X_3 + \cdots + X_N)^\alpha \\ (X_1 + X_3 + \cdots + X_N)^\alpha \\ \vdots \\ (X_1 + X_2 + \cdots + X_{N-1})^\alpha \end{pmatrix} = (X_2 + X_3 + \cdots + X_N)^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_1^\alpha \\ X_2^\alpha \\ \vdots \\ X_N^\alpha \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{N-1} \binom{\alpha}{i} \begin{pmatrix} X_1^{(\alpha-i)} (X_2 + X_3 + \cdots + X_N)^i \\ X_2^{(\alpha-i)} (X_1 + X_3 + \cdots + X_N)^i \\ \vdots \\ X_N^{(\alpha-i)} (X_1 + X_2 + \cdots + X_{N-1})^i \end{pmatrix}.$$

Logo, para cada $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ podemos escrever

$$\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1} (x_2 + x_3 + \cdots + x_N)^{\alpha_2} \cdots (x_2^{N-1} + x_3^{N-1} + \cdots + x_N^{N-1})^{\alpha_N} \\ x_2^{\alpha_1} (x_1 + x_3 + \cdots + x_N)^{\alpha_2} \cdots (x_1^{N-1} + x_3^{N-1} + \cdots + x_N^{N-1})^{\alpha_N} \\ \vdots \\ x_N^{\alpha_1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1})^{\alpha_2} \cdots (x_1^{N-1} + x_2^{N-1} + \cdots + x_{N-1}^{N-1})^{\alpha_N} \end{pmatrix}$$

como soma de termos da forma

$$\prod_{k=1}^N (x_1^k + \cdots + x_N^k)^\alpha \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_N^i \end{pmatrix}$$

para inteiros $\alpha, i \geq 0$.

Como sabemos que

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = x^N - \sigma_1 x^{N-1} + \sigma_2 x^{N-2} + \cdots + (-1)^N \sigma_N,$$

onde os σ_i 's são polinômios simétricos elementares e que $f(x_i) = 0$ para $i = 1, \dots, N$, então $x_i^N = \sigma_1 x_i^{N-1} - \sigma_2 x_i^{N-2} + \cdots + (-1)^{N+1} \sigma_N$, para $i = 1, \dots, N$. Daí,

$$\begin{pmatrix} x_1^N \\ x_2^N \\ \vdots \\ x_N^N \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} x_1^{N-1} \\ x_2^{N-1} \\ \vdots \\ x_N^{N-1} \end{pmatrix} - \cdots + (-1)^{N+1} \sigma_N \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na igualdade acima, fazendo a multiplicação coordenada a coordenada pelo vetor $\begin{pmatrix} x_1^{k-N} \\ x_2^{k-N} \\ \vdots \\ x_N^{k-N} \end{pmatrix}$ para $k \geq N$ temos que

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_N^k \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ \vdots \\ x_N^{k-1} \end{pmatrix} - \cdots + (-1)^{N+1} \sigma_N \begin{pmatrix} x_1^{k-N} \\ x_2^{k-N} \\ \vdots \\ x_N^{k-N} \end{pmatrix}.$$

Assim, os termos da forma $\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_N^k \end{pmatrix}$ podem ser escritos como combinação dos elemen-

tos da forma $\begin{pmatrix} x_1^{k-j} \\ x_2^{k-j} \\ \vdots \\ x_N^{k-j} \end{pmatrix}$, para $j = 1, \dots, N$, sobre os polinômios simétricos. Se existir j

tal que $k - j \geq N$ repetimos o processo.

Portanto, as funções \mathbf{S}_N -equivariantes $\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_N^k \end{pmatrix}$ para $k = 0, \dots, N - 1$ geram $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{S}_N)$

sobre $\mathcal{E}(\mathbf{S}_N)$. □

Corolário 3.2.7 O módulo $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N)$ é gerado sobre o anel $\mathcal{E}(\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N)$ por

$$\begin{pmatrix} (z_1 \bar{z}_1)^k z_1 \\ (z_2 \bar{z}_2)^k z_2 \\ \vdots \\ (z_N \bar{z}_N)^k z_N \end{pmatrix}, \quad (3.2.7)$$

$k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Demonstração Pelo Lema 3.2.6 e pelo Teorema 3.1.3 segue o resultado. □

3.3 Diagramas de bifurcação e estabilidade de soluções

Consideramos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{z} = g(z, \lambda), \quad (3.3.8)$$

onde $z \in \mathbb{C}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{C}^N \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^N$ é um germe na origem $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante. Supomos $N \geq 3$.

Nesta seção mostramos que, genericamente, os únicos ramos de soluções não triviais de (3.3.8) que bifurcam em $\lambda = 0$ são aqueles obtidos pelo Lema dos Ramos Equivariantes

(Teorema 1.4.11). Além disso, estudamos a estabilidade destes ramos e plotamos os diagramas de bifurcação.

Pelos resultados obtidos na Seção 3.2 sabemos que existem polinômios p_0, \dots, p_{N-1} de \mathbb{R}^N em $\mathbb{R} \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -invariantes tal que

$$g(z, \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k(\mu_1, \dots, \mu_N, \lambda) \begin{pmatrix} (z_1 \bar{z}_1)^k z_1 \\ (z_2 \bar{z}_2)^k z_2 \\ \vdots \\ (z_N \bar{z}_N)^k z_N \end{pmatrix}, \quad (3.3.9)$$

onde

$$\mu_j = (z_1 \bar{z}_1)^j + \dots + (z_N \bar{z}_N)^j,$$

para $j = 1, \dots, N$ e $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Observação 3.3.1 Seja $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um campo vetorial $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante. De maneira análoga ao que foi feito para obter a forma (3.3.9) de g , obtemos que f é da forma:

$$f(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} q_k(\nu_1, \dots, \nu_N, \lambda) \begin{pmatrix} (x_1^2)^k x_1 \\ \vdots \\ (x_N^2)^k x_N \end{pmatrix}, \quad (3.3.10)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $\nu_j = (x_1^2)^j + \dots + (x_N^2)^j$ para $j = 1, \dots, N$ e q_0, \dots, q_{N-1} são polinômios de \mathbb{R}^{N+1} em $\mathbb{R} \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$ -invariantes. Comparando (3.3.9) e (3.3.10) concluímos que a restrição de g a $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ é um campo $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante. Usamos este fato no final deste capítulo.

Para $g(z, \lambda) = 0$ ser um problema de bifurcação com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$, devemos exigir $g(0, 0) = 0$ e $(dg)_{0,0} = 0$. Para isto, devemos ter

$$p_0(0, 0) = 0. \quad (3.3.11)$$

Temos que

$$\Sigma_{(0, \dots, 0)} = \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N, \quad (3.3.12)$$

e a ação de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ em \mathbb{C}^N é absolutamente irredutível pela Proposição 1.4.13.

Por (3.3.12), $\text{Fix}(\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N) = \{0\}$. Logo, pela Proposição 1.4.7 b), segue que $z = 0$ é uma solução de (3.3.8) para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais ainda, se consideramos a hipótese genérica

$$c'(0) = \partial p_0 / \partial \lambda(0, 0) > 0, \quad (3.3.13)$$

onde $(dg)_{0,\lambda} = p_0(0, \lambda)I = c(\lambda)I$, então $c(\lambda)$ é crescente em torno da origem. Como $c(0) = 0$, então para $\lambda < 0$, $c(\lambda) < 0$ e para $\lambda > 0$, $c(\lambda) > 0$. Desde que $(dg)_{0,\lambda} = c(\lambda)I$, então $c(\lambda)$ são os autovalores de $(dg)_{0,\lambda}$. Logo, $z = 0$ é assintoticamente estável para $\lambda < 0$ e instável para $\lambda > 0$. Nosso objetivo agora é encontrar as soluções não nulas que podem aparecer desta perda de estabilidade de $z = 0$ em $\lambda = 0$. Tais soluções frequentemente possuem subgrupos de isotropia Σ menor do que $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.

Iniciamos encontrando os subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ usando os resultados apresentados no Capítulo 2.

Proposição 3.3.2 *Existem N classes de conjugação de subgrupos axiais para o grupo $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ com a ação (1.1.11). Estes subgrupos são:*

$$\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, \{1, 2, \dots, j\}) = (\mathbf{Z}_2^\kappa)^j \times \mathbf{O}(2)^{N-j} \wr \mathbf{S}_j \times \mathbf{S}_{N-j} \quad (3.3.14)$$

para $j = 1, \dots, N$.

Observação 3.3.3 É imediato que um resultado análogo para o grupo $\mathbf{Z}_2^\kappa \wr \mathbf{S}_N$ é válido trocando \mathbf{Z}_2^κ por $\mathbf{1}$. Este resultado será usado no final deste capítulo (ver da Proposição 3.3.8).

Demonstração (Proposição 3.3.2) Como o único subgrupo axial de $\mathbf{O}(2)$, a menos de conjugação, é $\mathbf{Z}_2^\kappa = \{1, \kappa\}$, segue da Proposição 2.3.4 que os subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$, a menos de conjugação, são os subgrupos da forma $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J)$, para cada bloco $J \subset \{1, 2, \dots, N\}$. Escrevemos

$$\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J) = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_N \wr Q_J,$$

com

$$B_j = \begin{cases} \mathbf{Z}_2^\kappa & \text{se } j \in J \\ \mathbf{O}(2) & \text{se } j \notin J \end{cases}$$

e

$$Q_J = \{\sigma \in \mathbf{S}_N : \sigma(J) = J\}.$$

Isto é, $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J)$ é o produto direto de um número de cópias de \mathbf{Z}_2^κ , para cada célula $j \in J$ e cópias de $\mathbf{O}(2)$ para as células restantes, todas estendidas por Q_J . Para qualquer subconjunto de índices de $\{1, \dots, N\}$, existe um subgrupo $\mathcal{H} \subset \mathbf{S}_N$ que age transitivamente nele. Daí, todo subconjunto J de índices de $\{1, \dots, N\}$ é um bloco. Tomando $J = \{i_1, \dots, i_p\}$ com $p \geq 1$, temos que

$$Q_J = (\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_{N-p})_J$$

é o conjunto das permutações que deixa o bloco J invariante, ou seja, o grupo das permutações de \mathbf{S}_N tal que os índices do bloco J são permutados por elementos de \mathbf{S}_p e os índices do complementar de J em $\{1, \dots, N\}$, digamos J' , são permutados por elementos de \mathbf{S}_{N-p} .

Seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \text{Fix}(\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J))$. Como $x_j \in \text{Fix}(\mathbf{O}(2))$ se $j \in J'$, então $x_j = 0$. Desde que Q_J age transitivamente em J , todas as células x_j para $j \in J$ são iguais. Assim, qualquer posição com subgrupo de isotropia $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J)$ corresponde a células inativas para $j \in J'$ e a células ativas e idênticas para $j \in J$.

Mais ainda, se J_1 e J_2 são dois blocos distintos com mesmo número de índices, então $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J_1)$ e $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J_2)$ são conjugados. Daí, se chamamos $J_i = \{1, \dots, i\}$, a menos de conjugação, os subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ são da forma $\Sigma(\mathbf{Z}_2^\kappa, J_j)$, para $j = 1, \dots, N$. \square

Proposição 3.3.4 Consideramos o sistema (3.3.8) onde g é como (3.3.9). Assumimos as condições (3.3.11) e (3.3.13) (assim, o ponto de equilíbrio $(0, \lambda)$ é subcriticamente estável e supercriticamente instável, para λ próximo da origem).

Então para cada $\Sigma_j = \Sigma(\mathbb{Z}_2^k, J_j)$ com $j = 1, \dots, N$, existe localmente um único ramo de soluções para (3.3.8) com tal simetria.

- a) O ramo Σ_j é supercrítico(subcrítico) se $jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0(> 0)$, para $j = 1, \dots, N$.
- b) O ramo Σ_1 é estável se $jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0$ e $p_1(0) > 0$.
- c) O ramo Σ_j para $1 < j < N$ é sempre instável se assumimos $p_1(0) \neq 0$.
- d) O ramo Σ_N é estável se $Np_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0$ e $p_1(0) < 0$.

Observação 3.3.5 Para facilitar a notação nas figuras que veremos após a demonstração, consideramos $a = p_{0,\mu_1}(0)$ e $b = p_1(0)$. As curvas $b = 0$ e $ja + b = 0$, $j = 1, \dots, N$, definidas a partir das desigualdades dos itens a)-d) acima, definem um conjunto no plano-a,b que denominamos **variedade de transição**. Em cada região do plano determinada pela variedade de transição, temos diagramas de bifurcação qualitativamente equivalentes.

Demonstração (Proposição 3.3.4)

- a) Com as condições (3.3.11) e (3.3.13) o Lema dos Ramos Equivariantes afirma que para cada $\Sigma_j = \Sigma(\mathbb{Z}_2^k, J_j)$ existe localmente um único ramo de soluções com a simetria de tal subgrupo.

Temos que

$$Fix(\Sigma_j) = \{(x, \dots, \underbrace{x}_{j\text{-ésima posição}}, \dots, 0, \dots, 0); x \in \mathbb{R}\}.$$

Restringindo g a cada $Fix(\Sigma_j)$ e resolvendo a equação $g = 0$, temos:

$$g((x, \dots, x, 0, \dots, 0), \lambda) =$$

$$p_0(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + p_1(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda) \begin{pmatrix} x^3 \\ \vdots \\ x^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots +$$

$$p_{N-1}(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda) \begin{pmatrix} x^{2(N-1)+1} \\ \vdots \\ x^{2(N-1)+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Colocando x em evidência em cada linha e considerando $x > 0$, temos:

$$p_0(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda) + p_1(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda)x^2 + \dots + p_{N-1}(jx^2, jx^4, \dots, jx^{2(N-1)}, \lambda)x^{2(N-1)} = 0. \quad (3.3.15)$$

Expandindo g em torno da origem, temos

$$g(0, \lambda) \equiv p_{0,\mu_1}(0)jx^2 + p_{1,\mu_1}(0)jx^2x^2 + \dots + p_{N-1,\mu_1}(0)jx^{2(N-1)}x^2 + p_{0,\lambda}(0)\lambda + p_{1,\lambda}(0)\lambda x^2 + \dots + p_{N-1,\lambda}(0)\lambda x^{N-1} + p_1(0)x^2 + \dots + p_{N-1}(0)x^{2(N-1)}.$$

Numa vizinhança da origem, consideramos os termos de menor ordem:

$$x^2(jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0)) + p_{0,\lambda}(0)\lambda + \dots$$

Assim, a equação do ramo com simetria Σ_j é dada por

$$x^2(jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0)) + p_{0,\lambda}(0)\lambda = 0,$$

ou seja,

$$\Lambda(x) = -x^2(jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0)) \underbrace{(p_{0,\lambda}(0))^{-1}}_{>0}.$$

Agora,

$$x\Lambda'(x) = -2x^2(jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0)) \underbrace{(p_{0,\lambda}(0))^{-1}}_{>0}.$$

Logo, da Definição 1.4.17 segue que o ramo $(x, \Lambda(x))$ é

- subcrítico se $jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) > 0$
- supercrítico se $jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0$.

Se assumimos

$$jp_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) \neq 0,$$

para $j = 1, \dots, N$, então as direções estão determinadas.

Discutimos agora a estabilidade dos ramos de soluções não triviais com simetria Σ_j , $j = 1, \dots, N$. Usando as coordenadas $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_N, \bar{z}_N$ para g e denotando as componentes de g por g_i com $i = 1, \dots, N$, a derivada da g é dada por:

$$(dg) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g_{1z_1} & g_{1\bar{z}_1} & g_{1z_2} & g_{1\bar{z}_2} & \cdots & g_{1z_N} & g_{1\bar{z}_N} \\ g_{2z_1} & g_{2\bar{z}_1} & g_{2z_2} & g_{2\bar{z}_2} & \cdots & g_{2z_N} & g_{2\bar{z}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{Nz_1} & g_{N\bar{z}_1} & g_{Nz_2} & g_{N\bar{z}_2} & \cdots & g_{Nz_N} & g_{N\bar{z}_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \bar{w}_1 \\ w_2 \\ \bar{w}_2 \\ \vdots \\ w_N \\ \bar{w}_N \end{pmatrix}.$$

Ao longo da solução trivial $z_1 = \cdots = z_N = 0$, temos

$$(dg)_{0,\lambda} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = p_{0,\lambda}(0, \lambda) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = (\lambda p_{0,\lambda}(0, 0) + \dots) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}.$$

Como já vimos, $(dg)_{0,\lambda}$ é múltiplo da identidade com os autovalores $p_0(0, \lambda)$ cujo sinal é determinado por $\lambda p_{0,\lambda}(0)$.

Agora consideramos separadamente os ramos de soluções não triviais com simetria Σ_1, Σ_j com $1 < j < N$ e Σ_N . A razão de separar em casos os subgrupos Σ_j é que para estes três casos podemos decompor \mathbb{C}^N em subespaços invariantes pelas derivadas calculadas em pontos representativos dos subespaços de ponto fixo correspondentes de maneiras ligeiramente diferentes. Para cada subgrupo Σ_j , a decomposição é garantida pelo Teorema 1.3.16, já que $(dg)|_{Fix\Sigma_j}$ comuta com Σ_j .

b) Consideremos o ramo de soluções Σ_1 e $(x, 0, \dots, 0) \in Fix\Sigma_1$. Temos

$$\begin{aligned} & (dg)_{\underbrace{(x, 0, \dots, 0, \lambda)}_{(x_0, \lambda)}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} g_{1z_1}w_1 + g_{1\bar{z}_1}\bar{w}_1 + g_{1z_2}w_2 + g_{1\bar{z}_2}\bar{w}_2 + \cdots + g_{1z_N}w_N + g_{1\bar{z}_N}\bar{w}_N \\ g_{2z_1}w_1 + g_{2\bar{z}_1}\bar{w}_1 + g_{2z_2}w_2 + g_{2\bar{z}_2}\bar{w}_2 + \cdots + g_{2z_N}w_N + g_{2\bar{z}_N}\bar{w}_N \\ \vdots \\ g_{Nz_1}w_1 + g_{N\bar{z}_1}\bar{w}_1 + g_{Nz_2}w_2 + g_{N\bar{z}_2}\bar{w}_2 + \cdots + g_{Nz_N}w_N + g_{N\bar{z}_N}\bar{w}_N \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

com as derivadas parciais das componentes de g avaliadas no ponto (x_0, λ) .

A expressão acima pode ser simplificada, resultando em

$$(dg)_{\underbrace{(x, 0, \dots, 0, \lambda)}_{(x_0, \lambda)}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1z_1}(x_0)(w_1 + \bar{w}_1) \\ p_0(x^2, \dots, x^{2N})w_2 \\ \vdots \\ p_0(x^2, \dots, x^{2N})w_N \end{pmatrix}.$$

A igualdade $g_{1z_1}(\mathbf{x}_0, \lambda) = g_{1\bar{z}_1}(\mathbf{x}_0, \lambda)$ segue de (3.3.15).

A comutatividade de $(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)}$ com Σ_1 nos dá uma decomposição de \mathbb{C}^N em três subespaços, digamos V_0 , V_1 , e V_2 , tais que $(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)}(V_j) \subseteq V_j$ para $j = 0, 1, 2$: consideramos

$$V_0 = \ker(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)} = \{(iy, 0, \dots, 0) : y \in \mathbb{R}\}$$

e tomamos

$$V_1 = \text{Fix}\Sigma_1 = \{(y, 0, \dots, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

O subespaço V_2 é complementar da soma de V_0 com V_1 , ou seja,

$$V_2 = \{(0, z_2, \dots, z_N) : z_i \in \mathbb{C}, i = 2, \dots, N\}.$$

Agora vamos estudar a estabilidade do ramo. Consideramos $(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)}|_{V_1}$:

$$(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2g_{1,z_1}(x, 0, \dots, 0, \lambda) \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $2g_{1,z_1}(x, 0, \dots, 0, \lambda)$ é um autovalor. Além disso, se consideramos a expansão de $g_{1,z_1}(x, 0, \dots, 0, \lambda)$ em torno da origem e utilizamos a equação do ramo, temos

$$g_{1,z_1}(x, 0, \dots, 0, \lambda) \cong (p_{0,\mu_1}(0) + p_1(0))x^2.$$

Logo, o sinal de $g_{1,z_1}(x, 0, \dots, 0, \lambda)$ é dado pelo sinal de $p_{0,\mu_1}(0) + p_1(0)$.

Para $(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)}|_{V_2}$, temos

$$(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)} \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = p_0(x^2, \dots, x^{2N}) \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}.$$

Assim, $p_0(x^2, \dots, x^{2N})$ é autovalor de $(dg)_{(x,0,\dots,0,\lambda)}|_{V_2}$. Se consideramos a expansão de $p_0(x^2, \dots, x^{2N})$ em torno da origem e usamos a equação do ramo, concluímos que

$$p_0(x^2, \dots, x^{2N}) \cong -p_1(0)x^2,$$

ou seja, o sinal de $p_0(x^2, \dots, x^{2N})$ é determinado por $-p_1(0)x^2$. Desta forma, concluímos que o ramo de soluções com simetria Σ_1 é estável se $p_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0$ e $p_1(0) > 0$.

c) Para Σ_j com $1 < j < N$, suponha que $(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda) = (x, \dots, \underbrace{x}_{j\text{-ésima}}, 0, \dots, 0, \lambda)$ é uma solução com $(x, \dots, x, 0, \dots, 0) \in \text{Fix}\Sigma_j$.

Calculando as derivadas parciais das componentes de g no ponto $(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)$ obtemos:

$$(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,z_1}(w_1 + \bar{w}_1) + g_{1,z_2}(w_2 + \bar{w}_2 + \dots + w_j + \bar{w}_j) \\ g_{1,z_1}(w_2 + \bar{w}_2) + g_{1,z_2}(w_1 + \bar{w}_1 + w_3 + \bar{w}_3 + \dots + w_j + \bar{w}_j) \\ \vdots \\ g_{1,z_1}(w_j + \bar{w}_j) + g_{1,z_2}(w_1 + \bar{w}_1 + \dots + w_{j-1} + \bar{w}_{j-1}) \\ p_0(jx^2, \dots, jx^{2N})w_{j+1} \\ \vdots \\ p_0(jx^2, \dots, jx^{2N})w_N \end{pmatrix},$$

com g_{1,z_1} e g_{1,z_2} avaliados em $(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)$.

De maneira análoga ao que foi feito para o caso Σ_1 , vamos decompor \mathbb{C}^N em subespaços invariantes por $(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)}$ e depois estudar a estabilidade do ramo com simetria Σ_j , $1 < j < N$.

Os subespaços invariantes da decomposição de \mathbb{C}^N são:

$$V_0 = \ker(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)} = \{(iy_1, \dots, iy_j, 0, \dots, 0) : y_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, j\},$$

$$V_1 = \text{Fix}\Sigma_j = \{(y, \dots, y, 0, \dots, 0) : y \in \mathbb{R}\},$$

$$V_2 = \{(0, \dots, 0, z_{j+1}, \dots, z_N) : z_k \in \mathbb{C}, k = j+1, \dots, N\}$$

e

$$V_3 = \mathbb{R}\{(1-j, 1, \dots, \underbrace{1}_{j\text{-ésima}}, 0, \dots, 0), (1, 1-j, \dots, 1, 0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1-j, 1, 0, \dots, 0)\}.$$

Considerando a restrição $(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)}|_{V_1}$ temos

$$(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)} \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (2g_{1,z_1}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)) + 2(j-1)g_{1,z_2}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda))) \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $2g_{1,z_1}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)) + 2(j-1)g_{1,z_2}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda))$ é autovalor de $(dg)_{(\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)}|_{V_1}$. Agora,

$$g_{1,z_1}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)) + (j-1)g_{1,z_2}((\mathbf{x}_{0_j}, \lambda)) \cong (jp_{0,\mu}(0) + \mu_1(0))x^2.$$

Já a restrição $(dg)_{(x, \dots, x, 0, \dots, 0, \lambda)}|_{V_2}$ nos dá $p_0(jx^2, \dots, x^{2N}, \lambda)$ como autovalor e

$$p_0(jx^2, \dots, x^{2N}, \lambda) \cong -p_1(0)x^2. \quad (3.3.16)$$

Da forma da derivada podemos ter mais informações do que somente decompor \mathbb{C}^N em subespaços invariantes para (dg) . De fato, os $j - 1$ autovetores escolhidos para gerar V_3 correspondem a um único autovalor

$$2(g_{1,z_1}((\mathbf{x}_{0j}, \lambda)) - g_{1,z_2}((\mathbf{x}_{0j}, \lambda))).$$

Além disso, usando a equação do ramo temos que o sinal deste autovalor é determinado por

$$p_1(0). \quad (3.3.17)$$

Concluimos, por (3.3.16) e (3.3.17), que os ramos Σ_j , $1 < j < N$, são instáveis para $p_1(0) \neq 0$.

- d) Para o ramo Σ_N , consideramos (x, \dots, x, λ) uma solução com $(x, \dots, x) \in \text{Fix}\Sigma_N$. Então

$$(dg)_{(x, \dots, x, \lambda)} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1,z_1}(w_1 + \bar{w}_1) + g_{1,z_2}(w_2 + \bar{w}_2 + \dots + w_N + \bar{w}_N) \\ \vdots \\ g_{1,z_1}(w_N + \bar{w}_N) + g_{1,z_2}(w_1 + \bar{w}_1 + \dots + w_{N-1} + \bar{w}_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Podemos decompor \mathbb{C}^N em 3 subespaços invariantes por $(dg)_{(x, \dots, x, \lambda)}$ e a única diferença do item b) é que não temos o subespaço correspondente a V_2 .

O núcleo é $V_0 = \{(iy_1, \dots, iy_N); y_k \in \mathbb{R}\}$. Para o subespaço $V_1 = \text{Fix}\Sigma_N = \{(y, \dots, y); y \in \mathbb{R}\}$ temos o autovalor

$$2(g_{1,z_1}(x, \dots, x, \lambda) + (N - 1)g_{1,z_2}(x, \dots, x, \lambda))$$

cujos sinais são determinados por

$$Np_{0,\mu_1}(0) + p_1(0).$$

Para $V_3 = \mathbb{R}\{(1 - N, 1, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1 - N, 1)\}$, o único autovalor associado a este subespaço é

$$2(g_{1,z_1}(x, \dots, x, \lambda) - g_{1,z_2}(x, \dots, x, \lambda))$$

cujos sinais são determinados por

$$p_1(0).$$

Conclusão: o ramo Σ_N é estável se $Np_{0,\mu_1}(0) + p_1(0) < 0$ e $p_1(0) < 0$.

□

Os resultados obtidos na proposição acima são resumidos na Tabela 3.1 e Tabela 3.2. A partir destes resultados, obtemos os diagramas de bifurcação correspondentes às soluções de $g = 0$, onde g é dada em (3.3.9) com as hipóteses de definição

$$p_0(0) = 0$$

e as hipóteses de não degeneração

$$p_{0,\lambda}(0) > 0, \quad p_1(0) \neq -jp_{0,\mu_1}(0), \quad j = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad p_1(0) \neq 0.$$

Subgrupos Axiais	Elemento da órbita	Subespaços invariantes
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1\})$	$(x, 0, \dots, 0); x \in \mathbb{R}$	$V_0 = \{(iy, 0, \dots, 0), y \in \mathbb{R}\}$ $V_1 = \{(y, 0, \dots, 0), y \in \mathbb{R}\}$ $V_2 = \{(0, z_2, \dots, z_N), z_k \in \mathbb{C}\}$
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1, \dots, j\})$ $1 < j < N$	$(x, \dots, x, 0, \dots, 0); x \in \mathbb{R}$	$V_0 = \{(iy_1, \dots, iy_j, 0, \dots, 0), y_k \in \mathbb{R}\}$ $V_1 = \{(y, \dots, y, 0, \dots, 0); y \in \mathbb{R}\}$ $V_2 = \{(0, \dots, 0, z_{j+1}, \dots, z_N); z_k \in \mathbb{C}\}$ $V_3 = \mathbb{R}\{(1-j, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1-j, 1, 0, \dots, 0)\}$
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1, \dots, N\})$	$(x, \dots, x); x \in \mathbb{C}$	$V_0 = \{(iy_1, \dots, iy_N), y_k \in \mathbb{R}\}$ $V_1 = \{(y, \dots, y); y \in \mathbb{R}\}$ $V_3 = \mathbb{R}\{(1-N, 1, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 1-N, 1)\}$

Tabela 3.1: Decomposição de \mathbb{C}^N em subespaços invariantes por $\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1, \dots, j\}), 1 \leq j \leq N$

Subgrupo de isotropia	Equação do ramo	Autovalores
$\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$	$z_1 = \dots = z_N = 0$	$p_{0,\lambda}$
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1\})$	$\lambda = -\frac{p_{0,\mu_1} + p_1}{p_{0,\lambda}} x^2 + \dots$	$p_{0,\mu_1} + p_1,$ $-p_1$
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1, \dots, j\})$ $1 < j < N$	$\lambda = -\frac{j p_{0,\mu_1} + p_1}{p_{0,\lambda}} x^2 + \dots$	$j p_{0,\mu_1} + p_1,$ $-p_1,$ p_1
$\Sigma(\mathbf{Z}_2^N, \{1, \dots, N\})$	$\lambda = -\frac{N p_{0,\mu_1} + p_1}{p_{0,\lambda}} x^2 + \dots$	$N p_{0,\mu_1} + p_1,$ p_1

Tabela 3.2: Ramos e estabilidade de soluções do problema de bifurcação com simetria $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ relativamente aos seus subgrupos de isotropia

A Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.5 e Figura 3.6 representam os diagramas em cada uma dessas regiões com a estabilidade das soluções e direção dos ramos. Os ramos pontilhados são instáveis, enquanto que os ramos com linha cheia são estáveis.

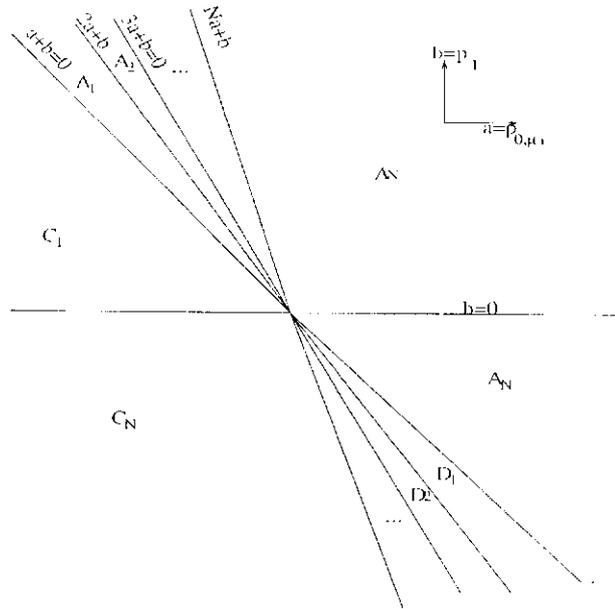


Figura 3.2: Variedade de transição

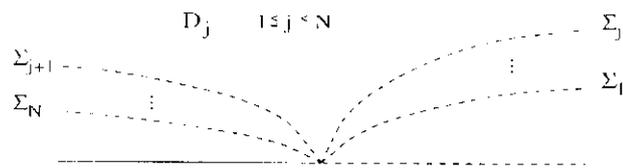


Figura 3.3: Diagrama para $(a, b) \in D_j, 1 \leq j < N$

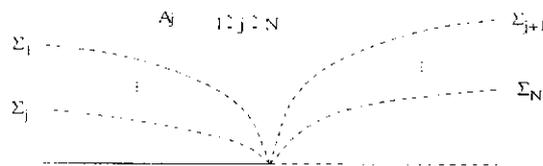
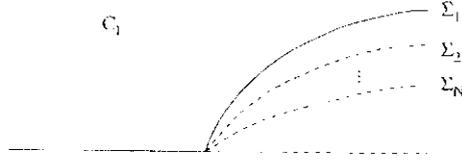
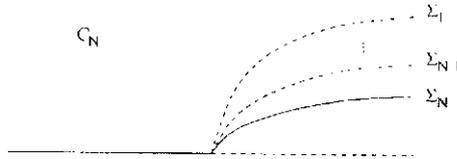


Figura 3.4: Diagrama para $(a, b) \in A_j, 1 \leq j \leq N$

Figura 3.5: Diagrama para $(a, b) \in C_1$ Figura 3.6: Diagrama para $(a, b) \in C_N$

O nosso objetivo agora é verificar que, genericamente, o problema de bifurcação $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante possui exatamente N ramos de soluções não triviais com a simetria dos subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Isto é dado na Proposição 3.3.8. Antes, apresentamos dois lemas e uma conjectura.

Lema 3.3.6 Σ é um subgrupo de isotropia maximal de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ (de $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$) se, e somente se, Σ é um subgrupo axial de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ (de $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$).

Demonstração Segue diretamente da Proposição 2.3.4 e Proposição 2.3.7. \square

Lema 3.3.7 Seja $z_0 \in \mathbb{C}^N$ e tomemos $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $x_0 \in \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N \cdot z_0$. Se Σ_{z_0} é um subgrupo de isotropia submaximal de z_0 em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$, então Σ_{x_0} é um subgrupo de isotropia submaximal em $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$.

Demonstração Seja Σ_{z_0} o subgrupo de isotropia de z_0 submaximal em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Então, existe Σ um subgrupo de isotropia tal que $\Sigma_{z_0} \subsetneq \Sigma \subsetneq \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Considerando $x_0 = \gamma \cdot z_0$ para algum $\gamma \in \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ e Σ_{x_0} seu subgrupo de isotropia em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$, temos

$$\Sigma_{x_0} = \gamma \Sigma_{z_0} \gamma^{-1} \subsetneq \gamma \Sigma \gamma^{-1} \subsetneq \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N,$$

ou seja, Σ_{x_0} é subgrupo de isotropia submaximal em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.

Agora vamos mostrar que Σ_{x_0} é um subgrupo de isotropia submaximal em $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$. Como Σ_{x_0} é um subgrupo de isotropia submaximal em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$, segue do Lema 3.3.6 que Σ_{x_0} não é subgrupo axial, ou seja, $\dim \text{Fix} \Sigma_{x_0} > 1$. Daí, existem pelo menos duas coordenadas de $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)$ que são distintas e não nulas; sem perda de generalidade, supomos que $x_0^1 \neq x_0^2$, $x_0^1, x_0^2 \neq 0$.

Temos que

$$\Sigma_{x_0} = \Sigma_{(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)} \subsetneq \bigcap_{i=1}^N \Sigma_{(0, \dots, x_i^0, \dots, 0)} \subsetneq \Sigma_{(x_0^1, 0, \dots, 0)} \subseteq \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N,$$

o que implica

$$\Sigma_{x_0} \cap \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N \subsetneq \Sigma_{(x_0^1, 0, \dots, 0)} \cap \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N \subsetneq \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N \cap \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N = \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N.$$

Como $x_0 \in \mathbb{R}^N$, então $\Sigma_{x_0}, \Sigma_{(x_0^1, 0, \dots, 0)} \subseteq \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$. Logo,

$$\Sigma_{x_0} \subsetneq \Sigma_{(x_0^1, 0, \dots, 0)} \subsetneq \mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N,$$

ou seja, Σ_{x_0} é um subgrupo de isotropia submaximal de $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$. □

Conjectura do Subgrupo de Isotropia Maximal (MISC) [6]: Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo absolutamente irreduzivelmente em \mathbb{R}^N . Seja $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ um campo vetorial Γ -equivariante com $(dg)_{0,0} \equiv 0$. Então, genericamente, cada ramo de soluções não trivial de $g = 0$ corresponde a um subgrupo de isotropia maximal. Mais ainda, cada subgrupo de isotropia maximal corresponde a um ramo de soluções de $g = 0$ para algum g .

Em [6] está provado que o resultado acima vale para os grupos de Weyl $W(B_k)$, ou seja, o grupo das transformações do \mathbb{R}^k da forma

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (\pm x_{\sigma(1)}, \pm x_{\sigma(2)}, \dots, \pm x_{\sigma(k)}),$$

onde σ é uma permutação em \mathbf{S}_k . Notamos que $\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{S}_N$ é um grupo de Weyl $W(B_N)$. Usamos este fato na demonstração da Proposição 3.3.8 abaixo.

Proposição 3.3.8 *Um problema de bifurcação $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante possui, genericamente, exatamente N ramos de soluções não triviais, a saber, as com simetrias correspondentes aos N subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.*

Demonstração Consideramos $g : \mathbb{C}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^N$ um campo vetorial $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante, onde g é da forma (3.3.9), com $z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^N) \in \mathbb{C}^N$ e $(z_0, \lambda) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{R}$ solução de g , ou seja, $g(z_0, \lambda) = 0$. Então, existe $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^N) \in \mathbb{R}^N$ tal que $x_0 \in \mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N \cdot z_0$, ou seja, x_0 pertencente à órbita de z_0 pela ação de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Daí, $g(x_0, \lambda) = 0$ e portanto, para $f = g|_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}}$, temos $f(x_0, \lambda) = 0$. Notamos que f é $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$ -equivariante (ver Observação 3.3.1).

Suponhamos que o subgrupo de isotropia de z_0, Σ_{z_0} , seja não axial em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Pelo Lema 3.3.6, temos que Σ_{z_0} é submaximal em $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$. Segue do Lema 3.3.7 que Σ_{x_0} é um subgrupo de isotropia submaximal de $\mathbf{Z}_2^k \wr \mathbf{S}_N$. Portanto, x_0 é uma solução do campo f com subgrupo de isotropia submaximal Σ_{x_0} . Mas pelo MISC e Observação 3.3.3, segue

que, genericamente, um problema de bifurcação com simetria $\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{S}_N$ possui, a menos de conjugação, somente N ramos de soluções não triviais com simetrias correspondentes aos N subgrupos de isotropia maximais de $\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{S}_N$.

Concluimos, juntamente com o Lema 3.3.6 e a Proposição 3.3.2, que as únicas soluções não triviais do campo g estão associadas aos N subgrupos axiais de $\mathbf{O}(2) \wr \mathbf{S}_N$.

□

Apêndice A

Redução de Liapunov-Schmidt

Neste apêndice desenvolvemos a Redução de Liapunov-Schmidt em sistemas definidos em espaços de dimensão infinita quando a parte linear do operador tem núcleo de dimensão finita. A Proposição A.0.12 nos garante uma correspondência local entre as soluções do sistema original com as soluções do sistema reduzido. Além disso, no caso em que o sistema original possui simetria, a Proposição A.1.3 afirma que o sistema reduzido pela Redução de Liapunov-Schmidt preserva esta simetria. Introduzimos inicialmente alguns conceitos para superar as dificuldades que surgem pelo fato da dimensão ser infinita.

Definições A.0.9 *Seja \mathcal{X} e \mathcal{Y} espaços de Banach. Um operador limitado $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é chamado **Fredholm** se as seguintes condições estão satisfeitas:*

- i) $\ker L$ é um subespaço de dimensão finita de \mathcal{X} .
- ii) $\text{Im } L$ é um subespaço fechado de \mathcal{Y} de codimensão finita.

Se L é Fredholm, o índice de L é o inteiro

$$i(L) = \dim \ker L - \text{codim } \text{Im } L.$$

O resultado a seguir apresenta uma importante propriedade de um operador de Fredholm.

Proposição A.0.10 *Se $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ é um operador de Fredholm, então existem subespaços M e N de \mathcal{X} e \mathcal{Y} , respectivamente, tais que*

$$a) \mathcal{X} = \ker L \oplus M, \quad b) \mathcal{Y} = N \oplus \text{Im } L. \quad (\text{A.0.1})$$

Demonstração Berger[1977],§1.3F

□

Observação A.0.11 *Se L é um operador de Fredholm com índice zero, $\dim \ker L = \dim N$. Em particular, se $\ker L = \{0\}$, então L é invertível.*

Discutimos o uso dos complementos ortogonais em (A.0.1), isto é,

$$\begin{aligned} \text{(a)} M &= (\ker L)^\perp, \\ \text{(b)} N &= (\text{Im } L)^\perp, \end{aligned} \quad (\text{A.0.2})$$

onde para um subespaço $S \subset \mathcal{Y}$ definimos

$$S^\perp = \{u \in \mathcal{Y} : \langle u, v \rangle = 0, \text{ para todo } v \in S\}.$$

Para operadores diferenciais, \mathcal{X} e \mathcal{Y} são subespaços do espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, onde Ω é um domínio limitado no \mathbb{R}^N . Este espaço tem o produto interno:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi)v(\xi)d\xi. \quad (\text{A.0.3})$$

Nem sempre é verdade que $\mathcal{Y} = S \oplus S^\perp$ se $S \subset \mathcal{Y}$ de dimensão infinita e $S \oplus S^\perp = \{0\}$. Contudo, esta decomposição é permitida quando

- a) S tem dimensão finita
- b) S é a imagem de um operador diferencial elíptico.

No caso a), a decomposição é obtida pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. No caso b), a discussão envolve a **alternativa de Fredholm**,

$$(\text{Im } L)^\perp = \ker L^*, \quad (\text{A.0.4})$$

onde L^* é o operador adjunto de L . Como consequência, temos a decomposição

$$\mathcal{Y} = (\text{Im } L) \oplus (\text{Im } L)^\perp$$

e

$$i(L) = \dim \ker L + \dim \ker L^*.$$

Apresentamos a seguir o método da redução de Liapunov-Schmidt e discutimos cada passo. A Redução de Liapunov-Schmidt se aplica à linearização de operadores elípticos e Fredholm de índice zero.

Seja

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k+1} &\rightarrow \mathcal{Y} \\ \Phi(0, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.0.5})$$

uma aplicação suave entre espaços de Banach. Queremos usar a redução de Liapunov-Schmidt para resolver

$$\Phi(u, \alpha) = 0, \quad (\text{A.0.6})$$

para u e α próximos da origem. Seja L a diferencial de Φ na origem, ou seja,

$$Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(hu, 0) - \Phi(0, 0)}{h}$$

Assumimos que L é um operador de Fredholm de índice zero e denotamos $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ com $\alpha_0 = \lambda$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ parâmetros auxiliares.

Passo 1 Decomponha \mathcal{X} e \mathcal{Y} como

$$\begin{aligned} \text{a)} \mathcal{X} &= \ker L \oplus M \\ \text{b)} \mathcal{Y} &= N \oplus \text{Im } L \end{aligned} \quad (\text{A.0.7})$$

Isto segue da Proposição A.0.10, pois L é um operador de Fredholm.

Passo 2 Reescreva (A.0.6) como

$$\begin{aligned} \text{a)} E\Phi(u, \alpha) &= 0 \\ \text{b)} (I - E)\Phi(u, \alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.0.8})$$

onde $E: \mathcal{Y} \rightarrow \text{Im } L$ é a projeção associada à decomposição (A.0.7b).

Passo 3 Use (A.0.7a) para escrever $u = v + w$, onde $v \in \ker L$ e $w \in M$. Aplique o Teorema de Função Implícita para resolver (A.0.8a) com w como uma função de v e α . Isto leva a uma função $W: \ker L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ tal que

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0. \quad (\text{A.0.9})$$

Vamos verificar que de fato podemos aplicar o Teorema da Função Implícita. Para isto, consideramos a aplicação $F: \ker L \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \text{Im } L$ dada por

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha). \quad (\text{A.0.10})$$

A diferencial de F com respeito a w na origem é:

$$E \cdot d\Phi_{0,0} = E \cdot L = L.$$

Agora argumentamos que

$$L: M \rightarrow \text{Im } L \quad (\text{A.0.11})$$

é invertível. No caso finito isto segue pois L restrito a M é bijetora sobre a sua imagem. No caso em que os espaços são de Banach, (A.0.11) é ainda bijetora, e com a hipótese de que L é Fredholm temos que L é invertível. Portanto, o Teorema da Função Implícita garante que (A.0.8a) pode ser resolvida para $w = W(v, \alpha)$.

Passo 4 Defina $\phi: \ker L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ por

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (\text{A.0.12})$$

Passo 5 Escolha uma base v_1, \dots, v_n para $\ker L$ e v_1^*, \dots, v_n^* para $(\text{Im } L)^\perp$. Defina

$g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle. \quad (\text{A.0.13})$$

Como L é Fredholm de índice zero, temos que

$$\dim \ker L = \dim(\text{Im } L)^\perp$$

e este número é finito. Assim, as bases para $\ker L$ e $(\text{Im } L)^\perp$ contêm o mesmo número de vetores.

Obtemos o seguinte resultado:

Proposição A.0.12 *Se a linearização de (A.0.6) é um operador de Fredholm de índice zero, então soluções de (A.0.6) estão localmente em correspondência com soluções do sistema*

$$g_i(x, \alpha) = 0,$$

onde g_i , $i = 1, \dots, n$, é definido em (A.0.13).

A.1 A Redução de Liapunov-Schmidt com simetria

Mostramos aqui que quando Φ em (A.0.5) é Γ -equivariante, Γ um grupo de Lie compacto, então podemos efetuar a Redução de Liapunov-Schmidt de forma que o problema reduzido preserve as simetrias de Γ do problema original.

Seja Γ um grupo de Lie compacto. Dizemos que Γ age no espaço de Banach \mathcal{Y} se para cada $\gamma \in \Gamma$ existe uma aplicação linear invertível $R_\gamma : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ com a propriedade que para todo $\gamma, \delta \in \Gamma$,

$$R_{\gamma\delta} = R_\gamma \circ R_\delta. \quad (\text{A.1.14})$$

Consideremos \mathcal{X} subespaço de \mathcal{Y} invariante pela ação de Γ e consideremos $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ uma aplicação que comuta com a ação de Γ , ou seja,

$$\Phi(R_\gamma u) = R_\gamma \Phi(u), \quad \forall u \in \mathcal{X}, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{A.1.15})$$

No primeiro passo da Redução de Liapunov-Schmidt devemos escolher complementares para certos subespaços de Banach. Quando o sistema possui simetria é importante escolher estes subespaços complementares tais que eles sejam Γ -invariantes. Consideramos os seguintes fatos:

- a) Γ age em \mathcal{Y}
- b) $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ comuta com Γ
- c) $L = (d\Phi)_0$ é um operador diferencial elíptico.

(A.1.16)

Mais ainda, precisamos encontrar somente os complementos Γ -invariantes M e N , tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \ker L \oplus M, \\ \mathcal{Y} &= N \oplus \text{Im } L. \end{aligned} \quad (\text{A.1.17})$$

Lema A.1.1 *Sejam Γ , Φ , \mathcal{X} , \mathcal{Y} e L como em (A.1.16). Então,*

- a) L comuta com Γ
- b) $\ker L$ é um subespaço Γ -invariante de \mathcal{X}
- c) $\text{Im } L$ é um subespaço Γ -invariante de \mathcal{Y} .

Demonstração

- a) Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $u \in \mathcal{X}$. Usamos a regra da cadeia para diferenciar a identidade $\Phi(\gamma u) = \gamma \Phi(u)$ e avaliar em $u = 0$, obtendo $(d\Phi)_0 \cdot \gamma = \gamma \cdot (d\Phi)_0$, ou seja, $L\gamma = \gamma L$.
- b) Se $u \in \ker L$, então para todo $\gamma \in \Gamma$, $L\gamma u = \gamma Lu = 0$, ou seja, $\gamma u \in \ker L$, logo $\ker L$ é Γ -invariante.
- c) Se $u \in \text{Im } L$, ou seja, $u = Lw$ para $w \in \mathcal{X}$, então $\gamma \cdot u = \gamma \cdot Lw = L(\gamma \cdot w)$. Logo, $\text{Im } L$ é Γ -invariante.

□

Vimos anteriormente que se L é um operador elíptico podemos considerar os complementos (A.1.17)

$$M = (\ker L)^\perp, \quad N = (\text{Im } L)^\perp. \quad (\text{A.1.18})$$

Tomando o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em \mathcal{Y} Γ -invariante. Afirmamos que os complementos ortogonais (A.1.18) são Γ -invariantes. De fato, sejam $u \in (\ker L)^\perp$, $\gamma \in \Gamma$ e $v \in \ker L$. Pelo Lema A.1.1, $\ker L$ é Γ -invariante; logo para qualquer $v \in \ker L$, temos $\gamma^{-1}v \in \ker L$. Assim, $0 = \langle u, \gamma^{-1}v \rangle = \langle \gamma u, v \rangle$, ou seja, $(\ker L)^\perp$ é Γ -invariante. Agora, consideramos $w \in \text{Im } L$, com $w = \gamma v$. Daí, para qualquer $u \in (\text{Im } L)^\perp$, $0 = \langle u, v \rangle = \langle u, \gamma^{-1}w \rangle$. Pela invariância do produto interno, $\langle \gamma u, w \rangle = 0$. Logo, $(\text{Im } L)^\perp$ é Γ -invariante.

Observação A.1.2 Se o produto interno em \mathcal{Y} não é preservado por Γ , podemos construir, a partir dele, um produto interno que é preservado por Γ , pois Γ é um grupo de Lie compacto (ver Proposição 1.1.12).

Provamos a seguir que a simetria do sistema é preservada pela equação reduzida.

Seja

$$\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Y}$$

$$\Phi(0, 0) = 0$$

uma aplicação suave entre espaços de Banach. Queremos resolver

$$\Phi(u, \alpha) = 0, \quad (\text{A.1.19})$$

numa vizinhança da origem. Seja Γ um grupo de Lie compacto que age em \mathcal{Y} , e suponhamos Φ comutando com Γ . Suponhamos $L = (d\Phi)_{0,0}$ um operador diferencial elíptico de Fredholm de índice zero.

A seguinte proposição focaliza a aplicação reduzida ϕ obtida no passo 4. Esta versão de equação reduzida é mais conveniente nas análises teóricas, pois ela independe da escolha das coordenadas do passo 5. Depois de demonstrar a proposição discutiremos o passo 5 e as propriedades de simetria de g .

Proposição A.1.3 Na Redução de Liapunov-Schmidt de (A.1.19), se M e N em (A.0.7) são subespaços Γ -invariantes, então a aplicação

$$\phi : \ker L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$$

definida por (A.0.12) comuta com a ação de Γ , isto é,

$$\phi(\gamma u, \alpha) = \gamma \phi(u, \alpha) \quad \forall u \in \ker L, \quad \forall \gamma \in \Gamma. \quad (\text{A.1.20})$$

Demonstração Seja $E : \mathcal{Y} \rightarrow \text{Im } L$ a projeção com $\ker E = N$. Queremos que E comute com Γ . Suponhamos que $u = v + w$ onde $v \in \text{Im } L$ e $w \in N$. Pela linearidade de E e da ação de Γ ,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot E(u) = \gamma E(v + w) &= \gamma(E(v) + E(w)) = \gamma E(v) = \gamma v = E(\gamma v) = E(\gamma v) + E(\gamma w) = \\ &= E(\gamma v + \gamma w) = E(\gamma(v + w)) = E(\gamma u). \end{aligned}$$

Assim, $\text{Im } L$ é um subespaço Γ -invariante. Além disso, $I - E$ também comuta com Γ .

Seja $W : \ker L \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ a função definida em (A.0.9). Afirmamos que

$$W(\gamma \cdot v, \alpha) = \gamma W(v, \alpha) \quad (\text{A.1.21})$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Daí, para $u = v + w$, com $v \in \ker L$ e $w \in M$,

$$\gamma \cdot \phi(v, \alpha) = \gamma(I - E)(v + W(v, \alpha), \alpha) = (I - E)(\gamma v + W(\gamma v, \alpha), \alpha) = \phi(\gamma \cdot v, \alpha).$$

Logo, ϕ comuta com Γ .

Verifiquemos então a validade de (A.1.21). Para isto usamos a unicidade das soluções pelo Teorema da Função Implícita. Fixamos $\gamma \in \Gamma$ e definimos:

$$W_\gamma(v, \alpha) = \gamma^{-1} W(\gamma v, \alpha).$$

Temos que

$$E\Phi(v + W_\gamma(v, \alpha)) = E\Phi(\gamma^{-1}(\gamma v + W(\gamma v, \alpha))) = \gamma^{-1}(E\Phi(\gamma v + W(\gamma v, \alpha))).$$

Como (A.0.9) é válido para todo $v \in \ker L$ e $\ker L$ é Γ -invariante, então

$$E\Phi(v + W_\gamma(v, \alpha)) \equiv 0.$$

Daí, W_γ também resolve a equação (A.0.8a), e $W_\gamma(0, 0) = \gamma^{-1} W(0, 0) = 0$. Pela unicidade de soluções garantida pelo Teorema da Função Implícita, concluímos que

$$W(\gamma v, \alpha) = \gamma W(v, \alpha).$$

□

Finalmente, discutimos a escolha das bases para $\ker L$ e $(\text{Im } L)^\perp$ no passo 5 da Redução de Liapunov-Schmidt. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base arbitrária para $\ker L$. Desde que Γ age linearmente no $\ker L$, para cada $\gamma \in \Gamma$, existe uma matriz $a_{ij}(\gamma)$, $n \times n$, tal que

$$\gamma v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma) v_j. \quad (\text{A.1.22})$$

Queremos escolher uma base v_1^*, \dots, v_n^* de $(\text{Im } L)^\perp$ para a mesma matriz $a_{ij}(\gamma)$, isto é, de forma que

$$\gamma v_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\gamma) v_j^*. \quad (\text{A.1.23})$$

Falamos em **escolha consistente** das bases se (A.1.22) e (A.1.23) valem simultaneamente. Se fazemos uma escolha consistente de bases para $\ker L$ e $(\text{Im } L)^\perp$, então a equação reduzida $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ vai satisfazer

$$g(A(\gamma)x, \alpha) = A(\gamma)g(x, \alpha) \quad (\text{A.1.24})$$

onde $A(\gamma)$ é a matriz $n \times n$ $(a_{i,j}(\gamma))_{n \times n}$.

Qualquer representação pode ser decomposta na soma direta de representações irredutíveis (ver Corolário 1.2.3). Agora, a aplicação linear L é um isomorfismo entre M e $\text{Im } L$. Desde que L comuta com Γ , L induz um isomorfismo de representações de Γ em \mathcal{X} e \mathcal{Y} . Na verdade, as representações de Γ em $\ker L$ e $(\text{Im } L)^\perp$ devem ser isomorfas. Esta afirmação não é difícil para se provar quando $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ e ambos têm dimensão finita, mas exige mais cuidado quando a dimensão é infinita (ver [8], cap. VII, §3). Vamos definir “representações isomorfas”. Sejam v_1, \dots, v_n e v_1^*, \dots, v_n^* bases para $\ker L$ e $(\text{Im } L)^\perp$, respectivamente. Então definimos as matrizes $A(\gamma)$ como em (A.1.22) e a matriz $B(\gamma)$ a partir de

$$\gamma v_i^* = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\gamma) v_j^*.$$

Dizer que as representações são isomorfas significa que existe uma matriz invertível S tal que, para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$B(\gamma) = S^{-1}A(\gamma)S.$$

Portanto, por uma mudança de base podemos sempre satisfazer (A.1.23).

Concluimos deste apêndice que se Φ é Γ -equivariante, então a Redução de Liapunov-Schmidt leva a um problema também Γ -equivariante, ou seja, a Redução de Liapunov-Schmidt preserva as simetrias do sistema original.

Referências Bibliográficas

- [1] Armstrong, M.A. (1988) *Groups and Symmetry* (Spring-Verlag, New York)
- [2] Colm, P.M. (2000) *Classic Algebra* (Wiley, New York).
- [3] Dias, A.P.S. (1997) Bifurcations with wreath product symmetry. *PhD thesis*, University of Warwick, Inglaterra.
- [4] Dionne, B., Golubitsky, M. and Stewart, I. (1996) Coupled cells with internal symmetry. I. Wreath products. *Nonlinearity* **9** no. 2, 559-574.
- [5] Field, M. (1996) *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*, Research Notes in Mathematics **356** (Longman, London).
- [6] Field, M and Richardson, R. (1989) Symmetry breaking and maximal isotropy subgroup conjecture for reflection groups, *Arch. Rational Mech. Anal.* **105**, 61-94.
- [7] Gibson, C.G (1979) *Singular Points of Smooth Mapping* (Pitman Publishing Limited).
- [8] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. (1984) *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* Vol. 1, Appl. Math. Sci. **51** (Springer-Verlag, New York).
- [9] Golubitsky, M. and Stewart, I. (1986) Hopf bifurcation with dihedral group symmetry: coupled nonlinear oscillators. In: Multiparameter Bifurcation Theory (M. Golubitsky and J. Guckenheimer, Eds.) *Contemporary Math* **56**, 131-173.
- [10] Golubitsky, M., Stewart, I. and Schaeffer, D. (1985) *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Vol. II, Appl. Math. Sci. **69** (Springer-Verlag, New York).
- [11] Hoffman, K. e Kunze, R., (1979) *Álgebra linear* (Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro).
- [12] Miller Jr, W. (1972) *Symmetry Groups and their Applications*. Pure and Applied Math. **50** (Academic Press, NY and London).
- [13] Stewart, I. (1945) *Galois Theory* (Chapman and Hall, London).
- [14] Van der Waelder, B.L. (1948) *Modern Algebra* Vol. 1 (Frederick Ungar Publishing CO, New York).