Continuidade de atratores para problemas parabólicos semilineares com difusibilidade grande localizada

Karina Schiabel Silva

Orientador: *Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa:	30/03/2006
Visto do Orientador:	

USP – São Carlos
Maio/2006

Ao meu marido, Ricardo, com amor.

“Para tudo há um tempo, para cada coisa há um momento debaixo dos céus: tempo para nascer, e tempo para morrer; tempo para plantar, e tempo para arrancar o que foi plantado; tempo para matar, e tempo para sarar; tempo para demolir, e tempo para construir; tempo para chorar, e tempo para rir; tempo para gemer, e tempo para dançar; tempo para atirar pedras, e tempo para ajuntá-las; tempo para dar abraços, e tempo para apartar-se. Tempo para procurar, e tempo para perder; tempo para guardar, e tempo para jogar fora; tempo para rasgar, e tempo para costurar; tempo para calar, e tempo para falar; tempo para amar, e tempo para odiar; tempo para a guerra, e tempo para a paz”.

(Ecle 3, 1-8)

Agradecimentos^{*}

Não obstante sejam muitas as pessoas a quem devo agradecer, não posso deixar de atribuir especial merecimento a algumas delas.

Ao meu marido, Ricardo Parreira da Silva, não somente pela valiosa colaboração neste trabalho, mas principalmente pelo amor, carinho, atenção e compreensão diante de meus descertos.

À minha família, em especial aos meus pais, José Maria e Ana Maria Schiabel, e à minha irmã, Daniela Schiabel, pelo carinho e torcida constantes.

A Ariane Di Tullio, Daniel Mancini, Érica Filletti, Erika Cappellini, Esdras Costa, Fábio Nascimento, Gizele Martins, Marcelo Nascimento e Paula Di Tullio, pela amizade preciosa e fiel de tantos anos.

Aos colegas de curso, funcionários e docentes do ICMC-USP.

Ao Prof. José Gaspar Ruas Filho, pelo primeiro incentivo e pelos conselhos edificantes, e à Prof^a. Vera Lúcia Carbone, pela amizade e também pela importante contribuição na realização deste trabalho.

Particularmente, ao Prof. Alexandre Nolasco de Carvalho, quero não apenas agradecer pela prontidão, incentivo e paciência sempre demonstrados em sua orientação, mas também registrar minha admiração por sua inteligência, disciplina e seriedade profissional.

^{*}Este trabalho foi parcialmente financiado pela CAPES e pelo CNPq.

Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento assintótico de problemas parabólicos semilineares do tipo

$$u_t - \operatorname{div}(p(x)\nabla u) + \lambda u = h(u)$$

em um domínio limitado e suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com condições de Neumann na fronteira, quando o coeficiente de difusão p torna-se grande em uma sub-região Ω_0 que é interior ao domínio físico Ω . Provamos que, sob determinadas hipóteses, a família de atratores se comporta semicontinua-mente inferior e superiormente quando a difusão explode em Ω_0 .

Abstract

In this work we study the asymptotic behavior of semilinear parabolic problems of the form

$$u_t - \operatorname{div}(p(x)\nabla u) + \lambda u = h(u)$$

in a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ and Neumann boundary conditions when the diffusion coefficient p becomes large in a subregion Ω_0 which is interior to the physical domain Ω . We prove, under suitable assumptions, that the family of attractors behave upper and lower-semicontinuously as the diffusion blows up in Ω_0 .

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Introdução	1
1 Resultados preliminares	7
1.1 Semigrupos e seus geradores	7
1.1.1 Operadores setoriais	11
1.1.2 Potências fracionárias de operadores setoriais	11
1.1.3 Problema de Cauchy abstrato	12
1.2 Teoria geral de atratores	13
1.2.1 Existência e limitação	14
1.2.2 Caracterização de atratores para sistemas gradientes	18
1.2.3 Continuidade de atratores	19
1.3 Teoremas de imersões de Sobolev	21
1.3.1 Teorema do Traço	22
2 Equações de reação e difusão com condições de fronteira não-lineares	25
2.1 Problemas parabólicos com condições de fronteira não-lineares	25
2.1.1 Existências local e global de solução	28
2.1.2 Existência de atratores e estimativas uniformes	31
2.2 Problema perturbado	32
2.3 Problema limite	36

3	Teoria linear	41
3.1	Convergência compacta do resolvente	43
3.2	Continuidade do espectro	47
3.3	Convergência dos semigrupos lineares	53
4	Continuidade dos atratores	57
4.1	Continuidade dos semigrupos não-lineares	58
4.2	Semicontinuidade superior dos atratores	63
4.3	Continuidade dos conjuntos de equilíbrio	64
4.3.1	Linearização em torno de um ponto de equilíbrio	65
4.4	Continuidade das variedades instáveis	77
4.5	Semicontinuidade inferior dos atratores	89
	Referências bibliográficas	91
	Índice remissivo	93

Introdução

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave, $\Gamma = \partial\Omega$, e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ um parâmetro. Neste trabalho estudamos o comportamento das soluções da família de equações parabólicas

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = g(u^\varepsilon) & \text{em } \Gamma \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda > 0$, $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

O parâmetro ε representa o fato que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, a difusibilidade p_ε se torna muito grande em uma região Ω_0 , que é interior ao domínio Ω . Esta situação pode ser encontrada, por exemplo, em modelos de condução de calor em materiais compostos, onde o calor pode se difundir muito mais rapidamente em uma parte da região do que em outras.

Sejam Ω_0 um sub-domínio suave de Ω , com $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ e m um inteiro positivo tal que $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$, onde $\Omega_{0,i}$ são sub-domínios suaves e conexos de Ω com $\bar{\Omega}_{0,i} \cap \bar{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Denotemos por $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$, e $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$, $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0 , respectivamente. Notemos que $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \Gamma_0$.

Os coeficientes de difusão $p_\varepsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções regulares e limitadas em Ω , satisfazendo

$$0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon, \quad (2)$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Também assumimos que a difusão é grande em Ω_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, mais precisamente,

$$p_\varepsilon(x) \rightarrow \begin{cases} p_0(x), & \text{uniformemente sobre } \Omega_1, (p_0 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_1, (0, \infty))); \\ \infty, & \text{uniformemente sobre subconjuntos compactos de } \Omega_0. \end{cases}$$

Uma vez que difusibilidade grande implica uma rápida redistribuição das não-homogeneidades espaciais, para valores pequenos de ε , a solução do problema (1) deverá ser aproximadamente espacialmente constante em Ω_0 . Por esta razão, suponhamos que u^ε convirja para

alguma função u , em algum sentido, e que assuma um valor espacialmente constante sobre Ω_0 , que denotaremos por $u_{\Omega_0}(t)$.

Notemos agora que se a função limite u está em $H^1(\Omega)$, seu valor constante sobre Ω_0 , $u_{\Omega_0}(t)$, pode não ser arbitrário. Também na fronteira $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, devemos ter $u|_{\Gamma_0} = u_{\Omega_0}(t)$.

Sobre Ω_1 , temos

$$u_t^\varepsilon - \operatorname{div} (p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f(u^\varepsilon).$$

Das propriedades de convergência da função $p_\varepsilon(x)$ é razoável termos no limite

$$u_t - \operatorname{div} (p_0(x) \nabla u) + \lambda u = f(u), \text{ para } u \in H^1(\Omega).$$

Sobre Ω_0 , temos

$$\int_{\Omega_0} u_t^\varepsilon(x, t) dx - \int_{\Omega_0} \operatorname{div} (p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) dx + \int_{\Omega_0} \lambda u^\varepsilon(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(u^\varepsilon(x, t)) dx.$$

Do Teorema da Divergência segue que

$$\int_{\Omega_0} \operatorname{div} (p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon) dx = - \int_{\Gamma_0} p_\varepsilon(x) \langle \nabla u^\varepsilon, \vec{n} \rangle dx,$$

onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário interior em Ω_0 na fronteira Γ_0 de Ω_0 , e assim

$$\int_{\Omega_0} u_t^\varepsilon(x, t) dx + \int_{\Gamma_0} p_\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_0} \lambda u^\varepsilon(x, t) dx = \int_{\Omega_0} f(u^\varepsilon(x, t)) dx.$$

Passando ao limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) |\Omega_0| + \int_{\Gamma_0} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_0} \lambda dx u_{\Omega_0}(t) = |\Omega_0| f(u_{\Omega_0}(t)).$$

Dividindo ambos os lados por $|\Omega_0|$, temos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\dot{u}_{\Omega_0}(t) + \frac{1}{|\Omega_0|} \left(\int_{\Gamma_0} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_0} \lambda dx u_{\Omega_0}(t) \right) = f(u_{\Omega_0}(t)),$$

que é a equação relacionando o fluxo de calor de Ω_1 para Ω_0 através de Γ_0 com o calor total absorvido em Ω_0 e o calor colocado em Ω_0 . Também relaciona o valor de u_{Ω_0} com os valores de u em Ω_1 , através do termo integral ao longo de Γ_0 .

Com estas considerações heurísticas, e considerando que no limite trabalhamos com o espaço das funções constantes sobre Ω_0 , escrevemos o problema limite da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u = f(u) & \text{em } \Omega_1 \\ u|_{\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}} & \text{em } \Omega_{0,i}, i = 1, \dots, m \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left[\int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda dx u_{\Omega_{0,i}} \right] = f(u_{\Omega_{0,i}}) & i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(u) & \text{em } \Gamma \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (3)$$

É importante observarmos que o problema (1) é uma perturbação singular do problema (3) onde fazemos o coeficiente de difusão grande em sub-regiões do domínio.

Consideramos

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\},$$

e, para $u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$,

$$A_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u.$$

Seja ainda

$$\mathcal{D}(A_0) = \left\{ u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) \in L^2(\Omega_1), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\},$$

e, para $u \in \mathcal{D}(A_0)$,

$$\begin{aligned} A_0 u &= (-\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u) \chi_{\Omega_1} \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left(\int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} dx \right) \chi_{\Omega_{0,i}}, \end{aligned}$$

sendo χ_B a função característica do conjunto B e, em geral, $Y_{\Omega_0} = \{u \in Y : u \text{ é constante em } \Omega_0\}$.

Mostramos que os problemas (1) e (3) possuem soluções globalmente definidas em $H^1(\Omega)$ e $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$, respectivamente. Além disso, lançando mão de algumas hipóteses de crescimento e sinal sobre as não-linearidades f e g e ainda uma condição de dissipatividade, provamos que estes problemas possuem atratores globais $\mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_0$, que são uniformemente limitados em $H^1(\Omega)$ e $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$, respectivamente, e também em $L^\infty(\Omega)$. Este fato nos permite cortar as não-linearidades f e g de tal forma estas tornem-se limitadas e suas derivadas até segunda ordem

também sejam limitadas. Sendo assim, assumimos, sem perda de generalidade, que existem constantes $C_f > 0$ e $C_g > 0$ satisfazendo

$$|f^{(j)}(s)| \leq C_f, |g^{(j)}(s)| \leq C_g, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2.$$

Em [8], Carbone e Ruas-Filho mostraram a continuidade dos atratores para $n = 1$. No caso do problema unidimensional, é possível mostrar que autovalores consecutivos λ_n^0 e λ_{n+1}^0 do problema linear de (3) estão separados por intervalos de comprimento $\lambda_{n+1}^0 - \lambda_n^0$, que divergem para $+\infty$ quando $n \rightarrow \infty$ (propriedade chamada de *gap*) e que a convergência dos autovalores e autovetores do problema linear de (1) para os autovalores e autovetores do problema (3) garantem a existência de variedades invariantes (de mesma dimensão) para estes problemas e, por fim, a convergência C^1 dessas variedades permitem concluir a continuidade dos atratores para estes problemas. Entretanto, a técnica utilizada em [8] não pode ser aplicada para $n > 1$, uma vez que não podemos garantir a existência do *gap*.

Para $n \geq 1$, a semicontinuidade superior dos atratores foi provada em [5]. Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal estudaram a caracterização dos problemas de autovalores associados a (1) e (3).

Com o objetivo de provar a continuidade dos atratores, organizamos este trabalho da seguinte forma: o Capítulo 1 contém definições, notações e resultados preliminares que são utilizados no decorrer dos demais capítulos. Na Seção 1.2, em particular, versamos sobre a teoria geral de atratores. Provamos que o fato da não-linearidade ser globalmente limitada nos permite concluir a existência de atratores globais e sua limitação uniforme nos espaços de potências fracionárias.

Estudamos, no Capítulo 2, as equações de reação-difusão com condições de fronteira não-lineares. O capítulo é constituído de alguns resultados abstratos, baseados principalmente em [5] e [10], das formulações das equações abstratas associadas aos problemas (1) e (3) e do estudo das propriedades dos operadores.

Apresentamos no Capítulo 3 definições e resultados úteis na demonstração da convergência compacta dos operadores resolventes. Estudamos em seguida o comportamento espectral dos operadores lineares e, finalmente, mostramos um teorema de aproximação do tipo Trotter-Kato para os semigrupos lineares.

Reservamos o Capítulo 4 para tratarmos da continuidade dos atratores. Utilizando os resultados obtidos no capítulo anterior e a Fórmula da Variação das Constantes, provamos que a família de semigrupos não-lineares $\{T_\varepsilon(t) : t \geq 0\}$ associada a (3) é contínua em $\varepsilon = 0$ em inter-

valos compactos de $(0, \infty)$. Deste fato segue facilmente a semicontinuidade superior da família de atratores. Em seguida reunimos os primeiros resultados imprescindíveis à demonstração da semicontinuidade inferior dos atratores, a saber, a continuidade dos conjuntos de equilíbrio e das variedades instáveis. Assumimos que todos os pontos de equilíbrio do problema (3) são hiperbólicos. Mostramos então que o conjunto das soluções de equilíbrio de (3), que denotamos $\mathcal{E}_0$, tem cardinalidade finita n_0 , com elementos distintos $u_1, \dots, u_{n_0}$. Em seguida, mostramos que existe $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que o problema (1) tem exatamente n_0 soluções de equilíbrio, denotadas por $u_1^\varepsilon, \dots, u_{n_0}^\varepsilon$, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Para estas soluções, obtemos a convergência $u_j^\varepsilon \rightarrow u_j$ em $H^1(\Omega)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, para $j = 1, \dots, n_0$. Finalizando o capítulo, lançamos mão da continuidade dos semigrupos lineares para mostrarmos que as variedades instáveis locais $W_{\varepsilon, \text{loc}}^u(u_j^\varepsilon)$ dos pontos de equilíbrio u_j^ε são contínuas em $\varepsilon = 0$. Em seguida mostramos que (1) e (3) têm estrutura gradiente para, finalmente, demonstrarmos a semicontinuidade inferior da família de atratores.

Resultados preliminares

O objetivo deste capítulo é reunir alguns dos resultados que serão utilizados nos capítulos subsequentes. Reservamos as duas primeiras seções deste capítulo para introduzir definições e combinar resultados clássicos da teoria de semigrupos e de atratores. Tais resultados podem ser encontrados principalmente em Carvalho [12], Hale [14] e Pazy [17]. Na Seção 1.3, estudamos os Teoremas de Imersão de Sobolev e o Teorema do Traço, que serão muito úteis no estudo de problemas com condições de fronteira não-lineares.

1.1 Semigrupos e seus geradores

Em toda a seção, X denotará um espaço de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$, e $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos em X , munido da norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \|Ax\|_X.$$

Denotaremos ainda por $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ o dual topológico de X .

Um *semigrupo fortemente contínuo* (ou um C_0 -*semigrupo*) de operadores lineares em X é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que

- (i) $T(0) = I_X$.
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, para quaisquer $t, s \geq 0$.
- (iii) $\|T(t)x - x\|_X \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, para todo $x \in X$.

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema 1.1. *Suponhamos que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ seja um semigrupo fortemente contínuo. Então existem $M \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

◇

Se $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$, onde

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \quad Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Notemos que o operador A é fechado e densamente definido. Definimos o *conjunto resolvente* $\rho(A)$ de um operador A como sendo

$$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) \text{ é contínuo, injetivo e sobrejetivo} \}.$$

O conjunto complementar de $\rho(A)$ é chamado *espectro* de A e é denotado por $\sigma(A)$.

O resultado a seguir reúne alguns fatos importantes sobre semigrupos fortemente contínuos.

Teorema 1.2. *Suponhamos que $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ seja um semigrupo fortemente contínuo.*

- (i) *Para qualquer $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ é contínuo para $t \geq 0$.*
- (ii) *$t \mapsto \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é semicontínua inferiormente e, portanto, mensurável.*
- (iii) *Se A é o gerador infinitesimal de $T(t)$, então A é densamente definido e fechado. Para $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

- (iv) *$\bigcap_{m \geq 1} \mathcal{D}(A^m)$ é denso em X .*

- (v) *Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ e β dado no Teorema 1.1, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \text{para todo } x \in X.$$

◇

Teorema 1.3 (Hille-Yosida). *Suponhamos que $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ seja um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \quad \text{para todo } t \geq 0;$$

- (ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido, cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda - \omega|}, \quad \text{para todo } \lambda > \omega.$$

◇

Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$ com norma $\|\cdot\|_X$ e $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ o seu dual topológico, munido da norma usual $\|\cdot\|_{X^*}$ ($\|x^*\|_{X^*} = \sup \{\operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle : \|x\|_X = 1\}$). A aplicação dualidade $J : X \rightarrow 2^{X^*}$ é uma função multívoca definida por

$$J(x) = \left\{ x^* \in X^* : \operatorname{Re} \langle x^*, x \rangle = \|x\|_X^2, \|x^*\|_{X^*} = \|x\|_X \right\}.$$

Temos ainda que $J(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é *dissipativo* se para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$.

Lema 1.4. *O operador linear A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \lambda \|x\|_X \tag{1.1}$$

para quaisquer $x \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda > 0$.

◇

Teorema 1.5 (Lumer-Phillips). *Suponhamos que A seja um operador linear densamente definido em um espaço de Banach X .*

- (i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é dissipativo (de fato, $\operatorname{Re} \langle x^*, Ax \rangle \leq 0$ para todo $x^* \in J(x)$ e para todo $x \in \mathcal{D}(A)$) e $R(\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$.*

- (ii) *Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

◇

A seguir recordamos a definição de operadores adjuntos. Seja X um espaço de Banach com dual X^* . Seja $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com domínio denso. O *adjunto* $S^* : \mathcal{D}(S^*) \subset X^* \rightarrow X^*$ de S é o operador linear definido por: $\mathcal{D}(S^*)$ é o conjunto dos $x^* \in X^*$ para os quais existe $y^* \in X^*$ com

$$\langle x^*, Sx \rangle = \langle y^*, x \rangle \quad \text{para todo } x \in \mathcal{D}(S). \quad (1.2)$$

Se $x^* \in \mathcal{D}(S^*)$, então $y^* = S^*x^*$, onde y^* é o elemento de X^* satisfazendo (1.2). Notemos que, sendo $\mathcal{D}(S)$ denso em X , existe no máximo um $y^* \in X^*$ para o qual (1.2) vale.

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Identificamos H e H^* e denotamos ambos por H .

Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um operador $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ é *simétrico* se $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ e $A \subset A^*$, ou seja, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathcal{D}(A)$. A é *auto-adjunto* se $A = A^*$.

Corolário 1.6. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações sobre X .* $\diamond$

Em muitos exemplos, a técnica utilizada para verificar as estimativas espectrais necessárias para se garantir que um operador A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de operadores é a determinação da chamada imagem numérica, que definimos a seguir.

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo X , a sua *imagem numérica* $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{ \langle x^*, Ax \rangle : x \in \mathcal{D}(A), \|x\|_X = 1, x^* \in X^*, \|x^*\|_{X^*} = 1, \langle x^*, x \rangle = 1 \}. \quad (1.3)$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert, $W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{D}(A), \|x\|_X = 1 \}$.

Teorema 1.7. *Sejam $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ um operador fechado densamente definido, $W(A)$ sua imagem numérica, Σ um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$. Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$, então $\lambda - A$ é injetivo, tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\|_X \geq \text{dist}(\lambda, W(A)) \|x\|_X. \quad (1.4)$$

Além disso, se $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\text{dist}(\lambda, W(A))}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma. \quad (1.5)$$

$\diamond$

1.1.1 Operadores setoriais

Dizemos que um operador linear A em um espaço de Banach X é um *operador setorial* se ele é fechado, densamente definido e existem $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que

$$\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está no conjunto resolvente de A e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \text{para todo } \lambda \in \Sigma_{a,\phi}.$$

Seja $\Delta = \{z : \phi_1 < \arg z < \phi_2, \phi_1 < 0 < \phi_2\}$ e, para $z \in \Delta$, seja $T(z)$ um operador linear limitado. A família $\{T(z) : z \in \Delta\}$ é um *semigrupo analítico* sobre Δ se

- (i) $z \mapsto T(z)$ é analítica em Δ .
- (ii) $T(0) = I$ e $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para cada $x \in X$.
- (iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, quaisquer que sejam $z_1, z_2 \in \Delta$.

Teorema 1.8. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-At} : t \geq 0\}$,*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda,$$

sendo Γ contorno em $\rho(-A)$, com $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$, para algum $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. $\diamond$

1.1.2 Potências fracionárias de operadores setoriais

Suponhamos que A seja um operador setorial para o qual $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$. Então, para todo $\alpha > 0$, definimos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

O operador A^α é chamado *operador de potência fracionária* associado ao operador A . Definimos A^α como sendo a inversa de $A^{-\alpha}$, para $\alpha > 0$, com $\mathcal{D}(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$, e A^0 como sendo a identidade em X .

Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial e $\alpha \geq 0$, então o *espaço de potência fracionária* X^α associado a A é definido como $X^\alpha = \mathcal{D}(A_1^\alpha)$, munido da norma do gráfico $\|x\|_\alpha =$

$\|A_1^\alpha x\|_X$, $x \in X^\alpha$, onde $A_1 = A + aI$ satisfaz $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$. Observemos que se $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então podemos ter $X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$.

Teorema 1.9. *Se A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para todo $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X , injetivo, e satisfaz $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$, quaisquer que sejam $\alpha > 0, \beta > 0$. Além disso, para $0 < \alpha < 1$,*

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen} \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

◇

Os seguintes resultados podem ser encontrados em Henry [15].

Teorema 1.10. *Se A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então X^α é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$ e, para $\alpha \geq \beta \geq 0$, temos $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$. Ademais, se A tem resolvente compacto, então a imersão $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ é compacta para $\alpha > \beta \geq 0$.* ◇

Teorema 1.11. *Seja A um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$. Para todo $\alpha \geq 0$, existe uma constante $C_\alpha < \infty$ satisfazendo*

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad \text{para } t > 0.$$

◇

Lema 1.12 (Desigualdade do Momento). *Para quaisquer $\beta < \alpha < \gamma$, se $x \in \mathcal{D}(A^\gamma)$, vale a seguinte desigualdade:*

$$\|A^\alpha x\| \leq C(\beta, \alpha, \gamma) \|A^\gamma x\|^{\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta}} \|A^\beta x\|^{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}.$$

◇

1.1.3 Problema de Cauchy abstrato

Consideramos nesta seção equações não-lineares da forma

$$\begin{cases} u_t + Au = f(t, u), & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial positivo, tal que suas potências fracionárias A^α estão bem definidas, e os espaços $X^\alpha = \mathcal{D}(A^\alpha)$ com a norma do gráfico $\|x\|_\alpha = \|A^\alpha x\|$ estão definidos para $\alpha \geq 0$. Assumimos ainda que $f : U \rightarrow X$, em que $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ é aberto.

Uma *solução* de (1.6) é uma função contínua $u: [t_0, t_1) \rightarrow X$, diferenciável em (t_0, t_1) , com $u(t_0) = u_0$, $f(\cdot, u(\cdot)): [t_0, t_1) \rightarrow X$ contínua, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, para $t \in (t_0, t_1)$, e que satisfaz a equação (1.6).

O teorema seguinte garante a existência de soluções locais para a equação (1.6).

Teorema 1.13. *Sejam A um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$, e $f: U \rightarrow X$. Suponhamos que f seja Hölder contínua na variável t e localmente Lipschitz contínua na variável x em U , ou seja, suponhamos que para $(t_1, u_1) \in U$ exista uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, u_1) tal que, para $(t, u), (s, v) \in V$,*

$$\|f(t, u) - f(s, v)\|_X \leq L(|t - s|^\theta + \|u - v\|_\alpha), \quad (1.7)$$

sendo θ e L constantes positivas. Então, qualquer que seja $(t_0, u_0) \in U$, existe um instante $\tau = \tau(t_0, u_0) > 0$ de tal maneira que a equação (1.6) possui uma única solução u definida em $(t_0, t_0 + \tau)$. $\diamond$

Acerca da existência de soluções globais para a equação (1.6), temos o seguinte resultado:

Teorema 1.14. *Suponhamos que as hipóteses sobre A e f enunciadas no Teorema 1.13 estejam satisfeitas, e assumamos também que, para todo conjunto limitado $B \subset U$, a imagem $f(B)$ seja limitada em X . Se u é uma solução de (1.6) em (t_0, t_1) e t_1 é maximal então, ou $t_1 = \infty$ ou existe uma seqüência $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_1^-$ de tal maneira que $(t_n, u(t_n)) \rightarrow \partial U$.* $\diamond$

1.2 Teoria geral de atratores

Sejam X um espaço de Banach e $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador setorial com resolvente compacto. Suponhamos que $\text{Re } \sigma(-A) = \{\text{Re } \mu : \mu \in \sigma(-A)\} \subset (-\infty, 0)$. Utilizando a notação de potências fracionárias introduzida na seção anterior, podemos afirmar que existem constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M t^{-\alpha} e^{-\omega t}, \text{ para todo } t > 0. \quad (1.8)$$

Estudaremos nesta seção a existência de atratores globais para o problema parabólico

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(u) \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{cases} \quad (1.9)$$

em que o operador A satisfaz as condições dadas acima e $f : X^\alpha \rightarrow X$ é globalmente Lipschitz e globalmente limitada. Também é nosso objetivo estudar a continuidade dos atratores correspondentes a uma família de semigrupos. A principal referência bibliográfica desta seção é Hale [14].

Segue do que fizemos na subseção anterior que as soluções para o problema (1.9) estão globalmente definidas. Se $u(t, u_0)$ denota uma solução de (1.9), podemos definir um C_0 -semigrupo não-linear $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$ através da relação

$$T(t)u_0 := u(t, u_0),$$

de modo que o semigrupo em questão seja dado pela Fórmula da Variação das Constantes

$$T(t)u_0 = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(T(s)u_0)ds. \quad (1.10)$$

1.2.1 Existência e limitação

Nesta subseção enunciamos importantes resultados que conduzem à existência e limitação de atratores para o semigrupo gerado pela equação (1.9).

Para provarmos a existência de atratores, introduzimos a seguir algumas definições necessárias e também alguns lemas úteis.

Para cada $u_0 \in X^\alpha$, a *órbita positiva* $\gamma^+(u_0)$ por u_0 é definida como $\gamma^+(u_0) = \{T(t)u_0 : t \geq 0\}$. Uma *órbita negativa* por u_0 é uma função contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ tal que $\phi(0) = u_0$ e, para todo $s \leq 0$, $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $0 \leq t \leq -s$. Uma *órbita completa* por u_0 é uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ tal que $\phi(0) = u_0$ e que, para todo $s \in \mathbb{R}$, satisfaz $T(t)\phi(s) = \phi(t+s)$, para $t \geq 0$.

Como a imagem $T(t)$ pode não ser todo o espaço X^α , dizer que existe uma órbita negativa ou uma órbita completa impõe certas restrições sobre u_0 . Além disso, como $T(t)$ em geral não é injetivo, uma órbita negativa (se existe uma) pode não ser única. Seja a órbita negativa por u_0 definida como a união de todas as órbitas negativas por u_0 . Então

$$\begin{aligned} \gamma^-(u_0) &= \bigcup_{t \geq 0} H(t, u_0) \\ H(t, u_0) &= \{y \in X^\alpha : \text{existe uma órbita negativa } u_0 \text{ definida por} \\ &\quad \phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha \text{ com } \phi(0) = u_0 \text{ e } \phi(-t) = y\}. \end{aligned}$$

Uma órbita completa $\gamma(u_0)$ por u_0 é definida como $\gamma(u_0) = \gamma^+(u_0) \cup \gamma^-(u_0)$. Para todo $B \subset X^\alpha$, sejam $\gamma^+(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma^+(u_0)$, $\gamma^-(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma^-(u_0)$, $\gamma(B) = \bigcup_{u_0 \in B} \gamma(u_0)$, respectivamente, as órbitas positiva, negativa e completa por B quando existem.

Para todo conjunto $B \subset X^\alpha$, definimos o *conjunto ω -limite* $\omega(B)$ de B e o *conjunto α -limite* $\alpha(B)$ de B como

$$\omega(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \quad \alpha(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} H(t, B)}.$$

Dizemos que um conjunto $B \subset X^\alpha$ *atrai um conjunto C sob $T(t)$* se $\text{dist}(T(t)C, B) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Um conjunto $S \subset X^\alpha$ é *invariante* se, para $u_0 \in S$, existe uma órbita completa $\gamma(u_0)$ por u_0 de tal forma que $\gamma(u_0) \subset S$.

Um conjunto $\mathcal{A} \subset X^\alpha$ é um *atrator global* para $\{T(t) : t \geq 0\}$ se é um conjunto compacto, invariante e atrai subconjuntos limitados de X^α .

Lema 1.15. *Um conjunto $S \subset X^\alpha$ é invariante se, e somente se, $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que S seja invariante. Então, para todo $x \in S$, existe uma órbita completa $\gamma(x)$ de x tal que $\gamma(x) \subset S$. Em particular, existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow H^1(\Omega)$ de x . Fixando $t_0 \geq 0$ e tomando $y = \phi(-t_0)$, temos $y \in S$ e $T(t_0)y = x$. Logo, $S \subset T(t)S$, para todo $t \geq 0$. Por outro lado, se $x \in S$, então $\gamma^+(x) = \{T(t)x : t \geq 0\} \subset S$, ou seja, $T(t)S \subset S$, qualquer que seja $t \geq 0$. Consequentemente, $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$.

Suponhamos agora que $T(t)S = S$, para todo $t \geq 0$. Se $x \in S$, existe $y_1 \in S$ tal que $T(1)y_1 = x := y_0$. Do mesmo modo, existe $y_2 \in S$ tal que $T(2)y_2 = y_1$. Prosseguindo indutivamente, obtemos $T(1)y_n = y_{n-1}$, para todo $n \geq 1$. Observemos ainda que $T(k)y_n = y_{n-k}$, para todo $k \leq n$. Seja $s \in (-\infty, 0]$, e escolhamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $s \in (-n, -n+1]$.

Definamos $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ por $\phi(s) = T(s+n)y_n$. Então $\phi(s) \in S$, para todo $s \leq 0$, $\phi(0) = T(0+1)y_1 = x$ e, para quaisquer $0 \leq t \leq -s$, $s < 0$, $s \in (-n, -n+1]$, temos $T(t)\phi(s) = T(t)T(s+n)y_n = T(t+s+n)y_n$. Por outro lado, se $0 \leq t \leq -s$, então $t+s \leq 0$ e $t+s \in (-j, -j+1]$, para algum $j \leq n$. Logo, $\phi(t+s) = T(t+s+j)y_j$. Mas

$$\begin{aligned} T(t)\phi(s) &= T(t+s+n)y_n = T(t+s+j+n-j)y_n = T(t+s+j)T_0(n-j)y_n \\ &= T(t+s+j)y_{n-(n-j)} = T(t+s+j)y_j = \phi(t+s). \end{aligned}$$

Desta forma, a função ϕ definida acima é contínua, e então, definindo $\bar{\phi} : \mathbb{R} \rightarrow X^\alpha$ por

$$\bar{\phi}(s) = \begin{cases} T(s)x, & s > 0 \\ \phi(s), & s \leq 0, \end{cases}$$

segue que $\bar{\phi}$ é uma órbita completa de x que está inteiramente contida em S . Portanto, S é invariante. $\square$

Lema 1.16. *Se $S \subset X^\alpha$ é invariante sob $\{T(t) : t \geq 0\}$ e $v \in S$, então existe uma órbita completa de v .* $\diamond$

Lema 1.17. *Um ponto $v \in \omega(B)$ se, e somente se, existem uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \in B$ tais que $T(t_n)v_n \rightarrow v$.* $\diamond$

Lema 1.18. *Um ponto $v \in \alpha(B)$ se, e somente se, existem seqüências $t_n \rightarrow +\infty$ e $v_n \in B$ tais que cada v_n possui uma única órbita negativa $\phi_n : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ ($\phi_n(0) = v_n$) e $\phi_n(-t_n)v_n \rightarrow v$.* $\diamond$

Lema 1.19. *Para todo conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, o conjunto $\gamma^+(B)$ é limitado e $T(t)\gamma^+(B)$ é compacto, para todo $t > 0$.*

Demonstração. Como a imersão $X^\alpha \hookrightarrow X^\beta$ é compacta para $\alpha > \beta \geq 0$ e $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ é limitado, segue que $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$ é compacto. Usando a Fórmula da Variação das Constantes, as estimativas usuais e as hipóteses sobre B e f , segue que $\gamma^+(B)$ é limitado em X^α sempre que B é limitado em X^α . Logo, como $\gamma^+(B)$ é limitado, temos que $\{T(s)B : s \geq t\} = T(t)\gamma^+(B)$ é compacto, e o resultado segue. $\square$

Lema 1.20. *Para todo $u_0 \in X^\alpha$, $\omega(u_0)$ é não-vazio, conexo, compacto, invariante e atrai u_0 .* $\diamond$

Lema 1.21. *Seja $u_0 \in X^\alpha$ seja tal que existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ de u_0 e tal que $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ seja compacto. Definamos*

$$\alpha_\phi(u_0) = \{v \in X^\alpha : \text{existe } t_n \rightarrow \infty \text{ tal que } \phi(-t_n) \rightarrow v\}.$$

Então $\alpha_\phi(u_0)$ é não-vazio, conexo, compacto e invariante.

Demonstração. Notemos inicialmente que $\alpha_\phi(u_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\phi((-\infty, t])}$, e deste fato segue claramente que $\alpha_\phi(u_0)$ é não-vazio, conexo e compacto. Mostremos agora que $\alpha_\phi(u_0)$ é invariante. De fato, se $v \in \alpha_\phi(u_0)$, então existe uma seqüência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $\phi(-t_n) \rightarrow v$. Da continuidade de $T(t) : X^\alpha \rightarrow X^\alpha$, segue que $T(t)\phi(-t_n) = \phi(t - t_n) \rightarrow T(t)v$, e então $T(t)v \in \alpha_\phi(u_0)$. Por outro lado, se $w \in \alpha_\phi(u_0)$, existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ (sem perda de generalidade, assumiremos que $t_n \geq t$, $n \in \mathbb{N}$) tal que $\phi(-t_n) \rightarrow w$. Como $\{\phi(-t_n - t) : n \in \mathbb{N}\}$ é relativamente compacto, tomando subsequências se necessário, existe $z \in X^\alpha$ tal que $\phi(-t_n - t) \rightarrow z$ e $z \in \alpha_\phi(u_0)$. Da unicidade do limite, segue que $T(t)z = w$. $\square$

Lema 1.22. *Existe constante $N > 0$ tal que, para cada conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe um instante $\tau_B > 0$ de tal forma que*

$$\sup_{t \geq \tau_B} \sup_{w \in T(t)B} \|w\|_{X^\alpha} \leq N. \quad (1.11)$$

Além disso,

$$\sup_{\substack{B \subset X^\alpha \\ B \text{ limitado}}} \sup_{v \in \omega(B)} \|v\|_{X^\alpha} \leq N. \quad (1.12)$$

Demonstração. Dados um conjunto limitado $B \subset X^\alpha$ e $v \in B$, segue de (1.10) que

$$T(t)v = e^{-A_0 t} v + \int_0^t e^{-A_0(t-s)} f(T(s)v) ds.$$

Das hipóteses sobre f e A , segue a existência de uma constante K tal que $\|f(w)\|_X \leq K$, para todo $w \in X^\alpha$ e

$$\|T(t)v\|_{X^\alpha} \leq M e^{-\beta t} \|v\|_{X^\alpha} + MK \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} ds.$$

Como v está em um subconjunto limitado de X^α , existe τ_B tal que

$$\|T(t)v\|_{X^\alpha} \leq 1 + MK\beta^{-\alpha}\Gamma(1-\alpha) =: N, \quad t \geq \tau_B.$$

Sendo N independente de $B \subset X^\alpha$, a demonstração está concluída. $\square$

Lema 1.23. *Se $B \subset X^\alpha$ é um conjunto limitado, então $\omega(B)$ é não-vazio, compacto, invariante e atrai B sob $\{T(t) : t \geq 0\}$. Além disso, se B é conexo, então $\omega(B)$ é conexo.* $\diamond$

Teorema 1.24. *Se $B_N = \{u \in X^\alpha : \|u\|_{X^\alpha} \leq N\}$, então $\omega(B_N)$ é o atrator global para $\{T(t) : t \geq 0\}$.*

Demonstração. Claramente, $\omega(B)$ é compacto, invariante, conexo e atrai B_N . Notemos primeiramente que para todo conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, existe τ_B tal que $T(t)B \subset B_N$, para todo $t \geq \tau_B$. Como B_N é atraído por $\omega(B_N)$ e B_N atrai B , o resultado segue. $\square$

Deste resultado e do lema 1.22 segue que

Corolário 1.25. *O atrator $\omega(B_N)$ do semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é limitado.* $\diamond$

Lema 1.26. *Para todo conjunto limitado $B \subset X^\alpha$, para o qual o conjunto $\overline{\gamma^-(B)}$ é não-vazio e compacto, o conjunto, $\alpha(B)$ é não-vazio, compacto e invariante.* $\diamond$

1.2.2 Caracterização de atratores para sistemas gradientes

Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem *estrutura gradiente* se existe uma função contínua $V : X^\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

(i) $\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto V(T(t)u_0) \in \mathbb{R}$ é não-crescente

(ii) $\mathcal{E} = \{u \in X^\alpha : Au + f(u) = 0\} = \{u_0 \in X^\alpha : V(T(t)u_0) = V(u_0), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$

Definimos a *variedade estável* de $u_0^* \in \mathcal{E}$ como

$$W^s(u_0^*) = \{u_0 \in X : u(t, u_0) \rightarrow u_0^* \text{ quando } t \rightarrow \infty\}.$$

e o *variedade instável* de $u_0^* \in \mathcal{E}$ como

$$W^u(u_0^*) = \{u_0 \in X : u(t, u_0) \text{ está definido para todo } t \leq 0 \text{ e } u(t, u_0) \rightarrow u_0^* \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$$

Mostramos nesta seção que se o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ tem estrutura gradiente e o conjunto $\mathcal{E}$ consiste apenas de pontos isolados, então o atrator $\mathcal{A}$ pode ser escrito como a união das variedades instáveis dos elementos de $\mathcal{E}$.

Lema 1.27. *Se todos os pontos de $\mathcal{E}$ são isolados, então para todo $u_0 \in X^\alpha$, temos que $\omega(u_0) = \{u_0^*\}$, para algum $u_0^* \in \mathcal{E}$. Como consequência deste fato, $T(t)u_0 \rightarrow u_0^*$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Notemos inicialmente que se $v \in \omega(u_0)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $T(t_n)u_0 \rightarrow v$. Como $V(T(t)u_0)$ é decrescente e limitada inferiormente, existe um $\ell \in \mathbb{R}$ tal que $V(T(t)u_0) \rightarrow \ell$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, como $T(t)T(t_n)u_0 \rightarrow T(t)v$ e V é contínua, temos que $V(T(t)v) = \ell$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, como $V(T(t_n)u_0) \rightarrow V(v)$, segue que $V(v) = \ell = V(T(t)v)$ e $v \in \mathcal{E}$. Como o conjunto $\mathcal{E}$ consiste de apenas um número finito de pontos e $\omega(u_0)$ é conexo, segue que $\omega(u_0) = \{u_0^*\}$, para algum $u_0^* \in \mathcal{E}$. $\square$

O próximo resultado garante que se existe uma órbita negativa de u_0 que é limitada, então u_0 está na variedade invariante de algum $u_0^* \in \mathcal{E}$.

Lema 1.28. *Suponhamos que $u_0 \in X^\alpha$ seja tal que existe uma órbita negativa $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow X^\alpha$ de u_0 e que $\overline{\phi((-\infty, 0])}$ seja compacto. Se $\mathcal{E}$ possui apenas pontos isolados, então existe $u_0^* \in \mathcal{E}$ de tal forma que $\alpha_\phi(u_0) = \{u_0^*\}$. Como consequência deste fato, temos que $\phi(t) \rightarrow u_0^*$ quando $t \rightarrow -\infty$.*

Demonstração. Notemos inicialmente que se $v \in \alpha_\phi(u_0)$, então existe uma seqüência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $\phi(-t_n) \rightarrow v$. Como $V(\phi(-t))$ é crescente e limitada superiormente, existe um $r \in \mathbb{R}$ de tal modo que $V(\phi(-t)) \rightarrow r$ quando $t \rightarrow \infty$. Como anteriormente, temos $V(T(t)v) = r$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e $v \in \mathcal{E}$. Como o conjunto $\mathcal{E}$ consiste de apenas um número finito de pontos e $\alpha_\phi(u_0)$ é conexo, resulta que $\alpha_\phi(u_0) = \{u_0^*\}$, para algum $u_0^* \in \mathcal{E}$. Além disso, para qualquer seqüência $t_n \rightarrow \infty$, $\{\phi(-t_n)\}$ possui uma subsequência que converge para u_0^* , e portanto $\phi(t) \rightarrow u_0^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. $\square$

Lema 1.29. *Seja S um subconjunto relativamente compacto de X^α , invariante sob $\{T(t) : t \geq 0\}$. Se $v \in S$, então existem $v^+, v^- \in \mathcal{E}$ tais que $v \in W^u(v^+)$ e $v \in W^s(v^-)$.*

Demonstração. Seja $v \in S$. Como S é invariante, existe uma órbita completa $\mathbb{R} \ni t \mapsto T(t)v \in S$ de v . Da compacidade de $\bar{S}$, segue que esta órbita completa é compacta. Do Lema 1.27, existe $u_1^* \in \mathcal{E}_0$ tal que $T(t)v \rightarrow u_1^*$. Da mesma forma, do Lema 1.28, existe $u_2^* \in S$ tal que $\phi(t)v \rightarrow u_2^*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Fazendo $v^- = u_1^*$, e $v^+ = u_2^*$, segue o resultado. $\square$

Deste lema resulta o seguinte resultado:

Teorema 1.30. *Seja $\mathcal{A}$ o atrator para $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então $\mathcal{A} = \bigcup_{u_0^* \in \mathcal{E}} W^u(u_0^*)$.* $\diamond$

1.2.3 Continuidade de atratores

Sejam X um espaço de Banach, Λ um espaço topológico e $J_\lambda \subset X$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Denotemos por $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ a métrica induzida pela norma de X . Dizemos que:

- (a) a família $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é *semicontínua superiormente* em $\lambda = \lambda_0$ se $\sup_{u_\lambda \in J_\lambda} d(u_\lambda, J_{\lambda_0}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$.
- (b) a família $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é *semicontínua inferiormente* em $\lambda = \lambda_0$ se $\sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} 0$.

O lema seguinte fornece uma definição alternativa de semicontinuidade superior e inferior.

Lema 1.31. (i) *A família $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$ se toda seqüência $\{u_{\lambda_n}\}$, com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, possui uma subsequência convergente para um elemento de J_{λ_0} .*

(ii) *Se J_{λ_0} é compacto e para todo $u \in J_{\lambda_0}$, existe uma seqüência $\{u_{\lambda_n}\}$ com $u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, tal que $u_{\lambda_n} \rightarrow u$, então $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$.*

Demonstração. Provemos primeiramente o item (i). Para tanto suponhamos, por absurdo, que a família $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ não seja semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$. Então existem $\eta > 0$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ tais que $\sup_{u_{\lambda_n} \in J_{\lambda_n}} d(u_{\lambda_n}, J_{\lambda_0}) > \eta$. Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\bar{u}_n \in J_{\lambda_n}$ tal que $d(\bar{u}_n, J_{\lambda_0}) > \frac{\eta}{2}$. Agora, por hipótese, a seqüência $\{\bar{u}_{\lambda_n}\}$ admite uma subseqüência convergente, que denotaremos também por $\{\bar{u}_{\lambda_n}\}$, para, digamos, $\bar{u}_0 \in J_{\lambda_0}$ quando $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Por outro lado,

$$d(\bar{u}_{\lambda_n}, \bar{u}_0) > d(\bar{u}_{\lambda_n}, J_{\lambda_0}) > \frac{\eta}{2},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, uma contradição.

Para provar (ii), suponhamos que a família $\{J_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ não seja semicontínua inferiormente em $\lambda = \lambda_0$. Então existem $\eta > 0$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ tais que $\sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_{\lambda_n}) > \eta$. Como J_{λ_0} é compacto, existe $u_0 = u_0(n) \in J_{\lambda_0}$ tal que $d(u_0, J_{\lambda_n}) = \sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_{\lambda_n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso, existem uma subseqüência de $u_0(n)$, que denotaremos da mesma forma, e $\bar{u}_0 \in J_{\lambda_0}$ de tal modo que $u_0(n) \rightarrow \bar{u}_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por hipótese, existe uma seqüência $\{u_n\}$, com $u_n \in J_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $u_n \rightarrow \bar{u}_0$, ou seja, $d(u_n, \bar{u}_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$d(\bar{u}_0, u_n) > d(\bar{u}_0, J_{\lambda_n}) = \sup_{u \in J_{\lambda_0}} d(u, J_{\lambda_n}) > \eta,$$

contradizendo o fato de que $u_n \rightarrow \bar{u}_0$ quando $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. □

Seja $\{T_\lambda(t) : t \geq 0\}$ uma família de semigrupos tais que, para cada $\lambda \in \Lambda$, o semigrupo $\{T_\lambda(t) : t \geq 0\}$ possua um atrator global $\mathcal{A}_\lambda$.

O seguinte teorema garante que, se a união dos atratores é relativamente compacta em X e a família de semigrupos $\{T_\lambda(t) : \lambda \in \Lambda, t \geq 0\}$ é contínua com relação ao parâmetro λ , então a família de atratores $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ é semicontínua superiormente.

Teorema 1.32. *Suponhamos que o conjunto $\cup \{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ seja relativamente compacto em X e que para $u_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} u_{\lambda_0}$ em X , nós tenhamos $\|T_\lambda(t)u_\lambda - T_{\lambda_0}(t)u_{\lambda_0}\| \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Então a família de atratores $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é semicontínua superiormente em $\lambda = \lambda_0$.*

Demonstração. Se $\{u_{\lambda_n}\}$ é uma seqüência tal que $u_{\lambda_n} \in \mathcal{A}_{\lambda_n}$, $n \in \mathbb{N}$, segue da compacidade do conjunto $\cup \{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ que existe $u_{\lambda_0} \in X$, com $u_{\lambda_n} \rightarrow u_{\lambda_0}$ quando $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Para mostrarmos que $u_{\lambda_0} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$, basta provarmos que existe uma solução completa limitada que passa por u_{λ_0} .

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma órbita completa limitada

$$\begin{aligned}\phi_n : \mathbb{R} &\rightarrow X \\ t &\mapsto \phi_n(t, u_{\lambda_n})\end{aligned}$$

por u_{λ_n} . Para $t \geq 0$, segue da continuidade dos semigrupos não-lineares que

$$\phi_n(t, u_{\lambda_n}) = T_{\lambda_n}(t, u_{\lambda_n}) \xrightarrow{\lambda_n \rightarrow \lambda_0} T_{\lambda_0}(t, u_{\lambda_0}).$$

Para $t < 0$, construímos a órbita por u_{λ_0} do seguinte modo: para $t \in (-k, -k+1]$, $k \in \mathbb{Z}^+$, consideramos a seqüência $\{\phi_n(-k, u_{\lambda_n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda}$. Seguindo o raciocínio que anteriormente foi usado para a seqüência $\{u_{\lambda_n}\}$, obtemos que $\phi_n(-k, u_{\lambda_n}) \rightarrow \psi_0(-k, u_{\lambda_0})$. Portanto,

$$\begin{aligned}\phi_n(t, u_{\lambda_n}) &= \phi_n(t+k, \phi_n(-k, u_{\lambda_n})) \\ &= T_{\lambda_n}(t+k, \phi_n(-k, u_{\lambda_n})) \rightarrow T_{\lambda_0}(t+k, \psi_0(-k, u_{\lambda_0})) := \tilde{\phi}_0(t, u).\end{aligned}$$

Finalmente, definindo

$$\phi_0(t, u_{\lambda_0}) = \begin{cases} T_{\lambda_0}(t, u_{\lambda_0}), & \text{para } t \geq 0; \\ \tilde{\phi}_0(t, u_{\lambda_0}), & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

segue que $\phi_0(t, u_{\lambda_0})$ é uma órbita completa limitada por u_{λ_0} . Portanto, $u_{\lambda_0} \in \mathcal{A}_{\lambda_0}$. $\square$

1.3 Teoremas de imersões de Sobolev

De uma forma geral, as propriedades de imersão de Espaços de Sobolev dependem das propriedades de regularidade do domínio Ω . Os resultados desta seção, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em Adams [1] e Brezis [7].

Dados um ponto $x \in \mathbb{R}^N$, uma bola aberta B_1 com centro em x , e uma bola aberta B_2 que não contém x , o conjunto $C_x = B_1 \cap \{x + \lambda(y-x) : y \in B_2, \lambda > 0\}$ é um *cone finito* em $\mathbb{R}^N$ com vértice em x .

Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tem a *propriedade do cone* se existe um cone finito C de tal forma que cada ponto $x \in \Omega$ é o vértice de um cone finito C_x contido em Ω e congruente a C .

Teorema 1.33 (Rellich-Kondrachov). *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja limitado e de classe $\mathcal{C}^1$. Então*

- (i) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, p^*)$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ e $p < N$,
- (ii) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$ e $p = N$,
- (iii) $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, onde $p > N$,

com imersões compactas. ◇

Teorema 1.34. *Suponhamos que Ω seja um domínio que tenha a propriedade do cone em $\mathbb{R}^N$, e sejam $s > 0$ e $1 < p < N$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

- (i) Se $N > sp$, então $W^{s,p} \rightarrow L^r(\Omega)$, para $p \leq r \leq \frac{Np}{N-sp}$.
- (ii) Se $N = sp$, então $W^{s,p} \rightarrow L^r(\Omega)$, para $p \leq r < \infty$.
- (iii) Se $N < (s-j)p$ par algum inteiro não-negativo j , então $W^{s,p} \rightarrow C_B^j(\Omega)$.

Se $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$, então

- (iv) $W^{m,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ e $1 \leq p < N$,
- (v) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, para todo $q \in [p, \infty)$ e $p = N$,
- (vi) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, onde $p > N$,

com imersões contínuas. ◇

1.3.1 Teorema do Traço

A caracterização dos traços em $\partial\Omega$ de funções definidas em $W^{m,p}(\Omega)$ têm importantes aplicações no estudo de problemas não-homogêneos com condições de fronteira não-lineares para operadores diferenciais definidos em Ω .

Um domínio Ω de $\mathbb{R}^N$ possui a propriedade de C^m -regularidade uniforme se existem uma cobertura aberta, enumerável e localmente finita $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de sua fronteira $\partial\Omega$, e uma sequência $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de transformações m -suaves e injetoras, com $\phi_j : U_j \rightarrow B_{\mathbb{R}^N}(0, 1)$, de tal maneira que

- (i) existe $\delta > 0$ tal que $\bigcup_{j=1}^{\infty} \phi_j^{-1}(B_{\mathbb{R}^N}(0, \frac{1}{2})) \supset \Omega_\delta$, onde $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) < \delta\}$;
- (ii) existe um inteiro positivo m tal que toda coleção contendo $m+1$ conjuntos da cobertura $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ possui intersecção vazia;

- (iii) para cada j , $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{x \in B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) : x_N > 0\}$, onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$;
- (iv) se $(\phi_{j,1}, \phi_{j,2}, \dots, \phi_{j,n})$ e $(\psi_{j,1}, \psi_{j,2}, \dots, \psi_{j,N})$ denotam as componentes de ϕ_j e $\psi_j = \phi_j^{-1}$ respectivamente, então existe uma constante positiva M de tal modo que, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$, e $1 \leq i, j \leq N$,

$$\begin{aligned} |D^\alpha \phi_{j,i}(x)| &\leq M, & x \in U_j \\ |D^\alpha \psi_{j,i}(x)| &\leq M, & x \in B_{\mathbb{R}^N}(0, 1) \end{aligned}$$

Para facilitar, diremos apenas que o domínio Ω é C^m -regular em $\mathbb{R}^N$.

Recordando que a restrição de funções em $C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ a Ω é densa em $W^{m,p}(\Omega)$, para $u \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$ definimos a seguinte aplicação linear

$$u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u), \quad \gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial n^j} \Big|_{\partial \Omega}, \quad (1.13)$$

onde $\frac{\partial^j u}{\partial n^j} \Big|_{\partial \Omega}$ denota a restrição a $\partial \Omega$ da j -ésima derivada direcional na direção da normal interior a $\partial \Omega$.

Teorema 1.35. *Se Ω é um domínio C^m -regular em $\mathbb{R}^N$ e $1 < p < \infty$, então a aplicação γ dada em 1.13 pode ser estendida por continuidade a um isomorfismo e um homeomorfismo de $W^{m,p}(\Omega)/\text{Ker} \gamma$ sobre $\prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial \Omega)$.* $\diamond$

Ao observarmos o Teorema 1.35 podemos considerar a aplicação

$$W^{m,p} \ni u \xrightarrow{i} i(u) = u|_{\partial \Omega} \in W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial \Omega)$$

e assim constatarmos que ele nos fornece ambas implicações, direta e recíproca, de teoremas de imersão para o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ no sentido de que a aplicação i mapeia continuamente o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ no espaço $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial \Omega)$, e reciprocamente, se v é uma função em $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial \Omega)$, então existe uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ com $v = u|_{\partial \Omega}$ e ainda

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq K \|v\|_{W^{m-\frac{1}{p},p}},$$

ou seja, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ também é mapeado continuamente no espaço $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial \Omega)$.

Uma abordagem mais detalhada do Teorema do Traço e suas implicações pode ser encontrada em Adams [1].

Equações de reação e difusão com condições de fronteira não-lineares

Nosso objetivo neste capítulo é escrever o problema proposto numa forma semilinear abstrata e introduzir os espaços de funções que nos serão adequados para estudá-lo. Com este intuito, reservamos a primeira seção para combinar resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções para equações de reação e difusão com condições de fronteira não-lineares e também estudamos existência e limitação uniforme de atratores para semigrupos gerados por estas equações. Nas Seções 2.2 e 2.3 empregamos os resultados obtidos na seção anterior aos problemas (2.6) e (2.8).

2.1 Problemas parabólicos com condições de fronteira não-lineares

Sejam Ω um domínio limitado e suave do $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = \partial\Omega$ e consideremos o seguinte problema de reação e difusão com condições não-lineares na fronteira

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(p(x)\nabla u) + \lambda u = f(u) & \text{em } \Omega \\ p(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(u) & \text{em } \Gamma, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $p \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ e as não-linearidades $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem determinadas condições de crescimento e dissipatividade que caracterizaremos posteriormente.

Para estudar o comportamento assintótico das soluções da equação (2.1), precisamos determinar em que espaços trabalharemos. Com este objetivo, introduzimos nesta seção espaços de funções e operadores para que o problema (2.1) possa ser escrito em uma forma semilinear abstrata.

Consideraremos os espaços Sobolev usuais $H^1(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$, e os espaços de traço $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e $W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$. Denotaremos por H^{-s} o espaço dual de H^s , para Ω ou Γ . O produto de dualidade entre estes espaços será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s,s}$ e, em particular, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotará o produto em L^2 , sendo que escreveremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ para diferenciar se nos referimos a funções sobre Ω ou Γ quando se fizer necessário.

Denotaremos por γ o operador traço definido em $H^s(\Omega)$, com valores em $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, para $s > \frac{1}{2}$. Além disso, para uma função $u \in H^s(\Omega)$, identificaremos seu traço, $\gamma(u) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, com a forma linear $\gamma(u) \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset H^{-s}(\Omega)$ de tal forma que, para qualquer $\phi \in H^s(\Omega)$,

$$\langle \gamma(u), \phi \rangle_{-s,s} := \langle u, \phi \rangle_\Gamma := \int_\Gamma \gamma(u) \gamma(\phi) dx,$$

ou seja, usamos as imersões $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \subset H^{-s}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Além disso, do Teorema do Traço, o operador traço $\gamma: W^{1,q}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{q}}(\Gamma)$ é um isomorfismo.

Consideraremos também o operador derivada normal, relativo ao operador difusão $-\text{div}(p(x)\nabla u)$, definido da seguinte forma: se

$$u \in Z := \{z \in H^1(\Omega) : -\text{div}(p(x)\nabla z) \in L^2(\Omega)\},$$

então $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e é definido por

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \gamma(v) \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= - \int_\Omega -\text{div}(p(x)\nabla u) v dx + \int_\Omega p(x) \nabla u \nabla v dx \\ &= \int_\Omega \text{div}(p(x) \nabla u) v dx, \end{aligned} \quad (2.2)$$

qualquer que seja $v \in H^1(\Omega)$.

Sob estas condições e assumindo que $\lambda > 0$, introduzimos o isomorfismo isométrico canônico entre $H^1(\Omega)$ e seu dual, $H^{-1}(\Omega)$, de tal maneira que, para $u, \phi \in H^1(\Omega)$,

$$\langle L(u), \phi \rangle_{-1,1} = \int_\Omega p(x) \nabla u \nabla \phi dx + \int_\Omega \lambda u \phi dx.$$

Desta forma, podemos reescrever (2.2) como

$$\langle L(u), v \rangle_{-1,1} = \langle -\text{div}(p(x)\nabla u) + \lambda u, v \rangle + \left\langle \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \gamma(v) \right\rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Também consideramos em $H^1(\Omega)$ o produto escalar

$$a(u, v) = \int_\Omega p(x) \nabla u \nabla v dx = \langle Lu, v \rangle_{-1,1},$$

que nos fornece uma norma em $H^1(\Omega)$, equivalente à norma usual.

Suponhamos que u seja uma solução de (2.1) e seja $\varphi \in H^1(\Omega)$. Então

$$u_t \varphi - \operatorname{div}(p(x) \nabla u) \varphi + \lambda u \varphi = f(u) \varphi,$$

de modo que integrando por partes resulta que

$$\int_{\Omega} u_t \varphi dx + \int_{\Omega} p(x) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda u \varphi dx = \int_{\Omega} f(u) \varphi dx + \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(\varphi) dx.$$

Notemos também que

$$\langle g(\gamma(u)), \gamma(\varphi) \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(\varphi) dx = \int_{\Gamma} \gamma(g(u)) \gamma(\varphi) dx = \langle \gamma(g(u)), \gamma(\varphi) \rangle_{-1,1}.$$

Logo,

$$\langle u_t, \varphi \rangle_{-1,1} + \langle Au, \varphi \rangle_{-1,1} = \langle f(u), \varphi \rangle_{-1,1} + \langle g(\gamma(u)), \gamma(\varphi) \rangle_{-1,1},$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1}$ representa o produto de dualidade entre $(H^1(\Omega))'$ e $H^1(\Omega)$ e $Au : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, com $H^1(\Omega) \ni \varphi \mapsto \langle Au, \varphi \rangle = \int_{\Omega} p(x) \nabla u \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \lambda u \varphi dx$.

Em $L^2(\Omega)$, definimos $A : \mathcal{D}(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ como o operador dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) &= \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\} \\ Au &= -\operatorname{div}(p(x) \nabla u) + \lambda u, \quad u \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

com $\lambda > 0$.

Assim, podemos escrever o problema (2.1) na forma abstrata

$$\begin{cases} u_t + Au = h(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde h é definida como $h(u) = f_{\Omega}(u) + g_{\Gamma}(u)$, no sentido que

$$\langle f_{\Omega}(u) + g_{\Gamma}(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} f(u) \phi dx + \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(\phi) dx,$$

para funções-teste ϕ escolhidas apropriadamente.

Proposição 2.1. *O operador A definido acima é positivo, auto-adjunto, e tem resolvente compacto em $L^2(\Omega)$. Em particular, A é um operador setorial em $L^2(\Omega)$ e suas potências fracionárias verificam $X^{\alpha} \subset H^{2\alpha}(\Omega)$, para $\alpha \geq 0$ e em particular*

$$X^1 = \mathcal{D}(A), \quad H^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega), \quad X^0 = L^2(\Omega), \quad X^{-\frac{1}{2}} = H^{-1}(\Omega),$$

onde convencionamos $H^{-1}(\Omega) := (H^1(\Omega))'$.

A realização de L em $L^2(\Omega)$, ou seja, a restrição de L ao domínio $\mathcal{D} = \{u \in H^1(\Omega) : Lu \in L^2(\Omega)\}$ coincide com A e $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A)$. Além disso, L é um operador setorial em $H^{-1}(\Omega)$ com domínio $H^1(\Omega)$.

2.1.1 Existências local e global de solução

Os resultados e a notação que serão utilizados nesta subseção são provenientes de Carvalho, Oliva, Pereira e Rodríguez-Bernal [10]. Para mais detalhes podem ser consultados também Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [4, 5].

Suponhamos que R seja um operador setorial em um espaço de Hilbert X , com $\operatorname{Re}(\sigma(R)) > 0$. Podemos então definir as potências fracionárias R^α de R , bem como os espaços de potência fracionária $X^\alpha := \mathcal{D}(R^\alpha)$, munidos da norma do gráfico, $\alpha \in \mathbb{R}$, onde $X^{-\alpha} = (X^\alpha)'$, para $\alpha > 0$. Além disso, R é setorial em X^α com domínio $X^{\alpha+1}$, para qualquer α , veja Henry [15].

Teorema 2.2. *Suponhamos que $h : X^\alpha \rightarrow X^\beta$ seja localmente Lipschitz e limitada sobre conjuntos limitados, onde $0 \leq \alpha - \beta < 1$. então o problema parabólico abstrato*

$$\begin{cases} u_t + Ru = h(u) \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha \end{cases}$$

tem uma única solução localmente definida, dada pela Fórmula da Variação das Constantes

$$u(t) = e^{-Rt}u_0 + \int_0^t e^{-R(t-r)}h(u(r))dr,$$

onde e^{-Rt} denota o semigrupo analítico gerado por $-R$. Além disso, u verifica

$$u \in C([0, T], X^\alpha) \cap C((0, T), X^{\beta+1}), \quad u_t \in C((0, T), X^\gamma),$$

para todo $\gamma < \beta + 1$ e a equação é verificada em X^β . Além disso, ou a solução está definida para todo $t \geq 0$, ou a solução “explode”, na norma X^α , em tempo finito. $\diamond$

Aplicamos este resultado ao operador A definido na seção anterior, considerando, para tanto, aplicações não-lineares da forma $h(u) := f_\Omega(u) + g_\Gamma(u)$, onde, ao menos, $f_\Omega : X^\alpha \rightarrow L^2(\Omega)$ e $g_\Gamma : X^\alpha \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, para algum $\alpha > 0$. Notemos que h age em funções teste $\phi \in H^r(\Omega)$, para $r > \frac{1}{2}$, como $\langle h(u), \phi \rangle = \langle f_\Omega(u), \phi \rangle_\Omega + \langle g_\Gamma(u), \phi \rangle_\Gamma$. Dependendo das propriedades extras de regularidade de g_Γ , iremos considerar

$$h : X^\alpha \rightarrow X^\beta$$

para $\alpha > 0$ e $\beta \leq 0$ escolhidos apropriadamente. Investiguemos tais valores apropriados, lembrando primeiramente que, para os resultados abstratos, devemos ter $0 \leq \alpha - \beta < 1$.

Como estamos considerando o caso em que $g \neq 0$, devemos ter $\beta < 0$, caso contrário, poderíamos tomar $\beta = 0$. Para que possamos ler a equação em $H^{-1}(\Omega)$, vamos considerar também $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$. As estimativas de energia na solução exigem que $u, u_t \in H^1(\Omega)$, para $t > 0$, e então segue do Teorema 2.2 que β deve satisfazer $\beta + 1 > \frac{1}{2}$, ou seja, $\beta > -\frac{1}{2}$.

Por outro lado, se queremos que o termo não-linear $g(u)$ dependa dos valores de u em Γ , devemos ter $\alpha > \frac{1}{4}$ a fim de que o traço de u esteja bem definido; caso contrário, podemos tomar $\alpha \geq 0$. Pelo fato de querermos que o dado inicial esteja ao menos em $H^1(\Omega)$, precisamos ter $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Notemos, finalmente, que no caso de termos não-nulos na fronteira, existem, naturalmente, limitações superiores para α e β . Em verdade, $\alpha < \frac{3}{4}$, já que para $\alpha \geq \frac{3}{4}$, o espaço X^α incorpora a condição de fronteira $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ e, com relação a β , da regularidade no Teorema 2.2, devemos ter $\beta + 1 < \frac{3}{4}$, ou seja, $\beta < -\frac{1}{4}$.

Em resumo, se $g \neq 0$, então

$$\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}, \quad -\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1,$$

enquanto que, se $g = 0$, temos o caso canônico $\beta = 0$, $0 \leq \alpha < 1$.

Com isto, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3. *Suponhamos que f_Ω , g_Γ , α e β satisfaçam as condições acima e*

$$h : X^\alpha \rightarrow X^\beta$$

seja localmente Lipschitz contínua e limitada sobre conjuntos limitados. Então, para cada $u_0 \in X^\alpha$, existe uma única solução localmente definida de

$$\begin{cases} u_t + Au = h(u) \\ u(0) = u_0 \in X^\alpha, \end{cases} \quad (2.4)$$

dada por

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-r)}h(u(r))dr,$$

onde e^{-At} denota o semigrupo analítico gerado por $-A$ que verifica

$$u \in C([0, T], X^\alpha) \cap C((0, T), X^{\beta+1}), \quad u_t \in C((0, T), X^\gamma),$$

para todo $\gamma < \beta + 1$ e

$$\int_{\Omega} u_t \phi \, dx + \int_{\Omega} p(x) \nabla u \nabla \phi \, dx + \int_{\Omega} \lambda u \phi \, dx + \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx + \langle g(\gamma(u)), \gamma(\phi) \rangle_{\Gamma},$$

para toda $\phi \in H^1(\Omega)$. Em particular, temos

$$\begin{cases} u + Au = f(u) & \text{em } \Omega \\ p(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(u) & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

e, ou a solução está definida para todo $t > 0$, ou ela explode em tempo finito na norma X^α .

Em particular, se

$$\begin{aligned} f_{\Omega} : X^\alpha &\rightarrow L^2(\Omega) \\ g_{\Gamma} : X^\alpha &\rightarrow L^2(\Gamma) \quad \text{ou} \quad H^{-r}(\Gamma), \quad \text{com} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

são funções não-lineares localmente Lipschitz, para $\alpha + \frac{r}{2} < \frac{3}{4}$, então existe β tal que $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$ verifica todas as afirmações acima. $\diamond$

Consideremos agora a condição de crescimento :

(C) Se $n = 2$, assumimos que para cada $\eta > 0$ existe uma constante $C_\eta > 0$ tal que, para $j = f, g$, temos

$$|j(u) - j(v)| \leq C_\eta (e^{\eta|u|^2} + e^{\eta|v|^2}) |u - v|, \text{ para quaisquer } u, v \in \mathbb{R},$$

ou, se $n \geq 3$, assumimos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(u) - f(v)| \leq C |u - v| (|u|^{\frac{4}{n-2}} + |v|^{\frac{4}{n-2}} + 1)$$

$$|g(u) - g(v)| \leq C |u - v| (|u|^{\frac{2}{n-2}} + |v|^{\frac{2}{n-2}} + 1),$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$.

Sob estas condições, o problema (2.1) está localmente bem posto em X^α .

Para obtermos que as soluções de (2.1) estão globalmente definidas, assumiremos a seguinte condição de sinal sobre os termos não-lineares:

(S) Assumamos que existam $B_0, C_0 \in \mathbb{R}$ e $B_1, C_1 \leq 0$ de tal forma que

$$u f(u) \leq -C_0 u^2 + C_1 |u|,$$

$$ug(u) \leq -B_0 u^2 + B_1 |u|,$$

para todo $u \in \mathbb{R}$.

Então temos o seguinte resultado acerca da existência global das soluções:

Teorema 2.4. *Assumamos que as condições de crescimento (C) e de sinal (S) estejam satisfeitas. Então, para todo $u_0 \in X^\alpha$ a solução $u(t, u_0)$ da equação (2.1) começando em u_0 existe para $t \geq 0$.* $\diamond$

2.1.2 Existência de atratores e estimativas uniformes

Para provarmos a existência de um atrator global para o problema (2.1) devemos assumir também uma *condição de dissipatividade*, que apresentamos a seguir. Em Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal [3, 4, 5] podem ser encontrados mais detalhes sobre existência e limitação uniforme de atratores para este problema.

(D) *Assumamos que a condição (S) esteja satisfeita e sejam C_0 e B_0 as constantes de (S). Assumamos que seja positivo o primeiro autovalor, μ_1 , do problema*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) + (\lambda + C_0)u = \mu u & \text{em } \Omega \\ p(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + B_0 u = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (2.5)$$

Sob esta condição, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5. *Suponhamos que as condições de crescimento (C), de sinal (S) e de dissipatividade (D) sejam válidas. Então o semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ associado a (2.1) tem um atrator global, $\mathcal{A}$, em X^α .* $\diamond$

Além disso, este atrator é uniformemente limitado em $L^\infty(\Omega)$. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.6. *Suponhamos que as condições de crescimento (C) e dissipatividade (D) estejam satisfeitas. Denotemos por ϕ a solução de*

$$\begin{cases} \operatorname{div}(p(x)\nabla \phi) + (\lambda + C_0)\phi = C_1, & \text{em } \Omega \\ p(x)\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} + B_0 \phi = B_1 & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

Então $0 \leq \phi \in L^\infty(\Omega)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t, x, u_0)| \leq \phi(x)$, uniformemente em $x \in \bar{\Omega}$ e para u_0 em subconjuntos limitados de X^α . Em particular, para cada $v \in \mathcal{A}$, temos $|v(x)| \leq \phi(x)$. $\diamond$

2.2 Problema perturbado

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave, $\Gamma = \partial\Omega$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ um parâmetro. Consideremos a equação de reação e difusão

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - \operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = f(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = g(u^\varepsilon) & \text{em } \Gamma \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $\lambda > 0$, as não-linearidades $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfazem as condições e crescimento **(C)** e de sinal **(S)** dadas na seção anterior e os coeficientes de difusão $p_\varepsilon : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções regulares e limitadas em Ω , satisfazendo

$$0 < m_0 \leq p_\varepsilon(x) \leq M_\varepsilon,$$

para todo $x \in \Omega$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Procedendo de modo inteiramente análogo à seção anterior, podemos reescrever o problema (2.6) como uma equação semilinear abstrata

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + A_\varepsilon u^\varepsilon = h(u^\varepsilon) \\ u^\varepsilon(0) = u_0^\varepsilon, \end{cases} \quad (2.7)$$

onde, para $X = L^2(\Omega)$, A_ε é o operador linear dado por

$$A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset X \rightarrow X$$

$$u \mapsto A_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u,$$

sendo $\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in X, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$ e h definida como $h(u) = f_\Omega(u) + g_\Gamma(u)$, no sentido que

$$\langle f_\Omega(u) + g_\Gamma(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} f(u)\phi dx + \int_{\Gamma} g(\gamma(u))\gamma(\phi)dx,$$

para funções-teste ϕ escolhidas apropriadamente.

Vejamos algumas propriedades dos operadores $A_\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. O resultado seguinte pode ser encontrado em Rodríguez-Bernal [18]:

Teorema 2.7. *Para $\lambda > 0$, o operador B_ε , definido pela forma bilinear*

$$a_\varepsilon(u, v) = \langle B_\varepsilon u, v \rangle_{-1,1} = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x)\nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \lambda uv dx$$

é um isomorfismo entre $H^1(\Omega)$ e seu dual $H^{-1}(\Omega)$. A realização de B_ε em $L^2(\Omega)$ sob condição de Neumann na fronteira, que denotaremos por A_ε , é um operador positivo, auto-adjunto e com resolvente compacto, com domínio

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\},$$

e para $u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$,

$$A_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u) + \lambda u.$$

Demonstração. Observemos inicialmente que a forma bilinear a_ε é coerciva em $H^1(\Omega)$ para $\lambda > 0$, pois

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, u) &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^2 dx \\ &\geq m_0 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |u|^2 dx \\ &\geq \min \{m_0, \lambda\} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right) \\ &= C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Desta forma, B_ε é um operador injetivo, já que $\langle B_\varepsilon u, u \rangle = 0$ implica $u = 0$. Claramente, a forma bilinear a_ε é simétrica, e a continuidade segue de

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u, v) &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \lambda uv dx \\ &\leq M_\varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max \{M_\varepsilon, \lambda\} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Segue então que $B_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ e, pelo Teorema de Lax-Milgram, qualquer que seja $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, existe um único $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a_\varepsilon(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\langle B_\varepsilon u, v \rangle = \langle \varphi, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H^1(\Omega),$$

e $B_\varepsilon u = \varphi$ em $H^{-1}(\Omega)$, o que mostra que o operador B_ε é um isomorfismo.

Consideremos agora o operador $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. O domínio de A_ε é dado de forma natural por

$$\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : B_\varepsilon u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{D}(A_\varepsilon) = H_0^1(\Omega) \cap \left\{ u \in H^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$. Para tanto, seja $u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$. Então $B_\varepsilon u \in L^2(\Omega)$ e, para toda $\varphi \in H^1(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \int_{\Omega} \lambda u \varphi \, dx = \int_{\Omega} B_\varepsilon u \varphi \, dx,$$

ou seja, u é solução fraca do problema de Neumann

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) + \lambda u = B_\varepsilon u, & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

e $u \in H^2(\Omega)$. A outra inclusão é imediata. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \langle B_\varepsilon u, v \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \lambda u v \, dx \\ &= \int_{\Omega} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) v \, dx + \int_{\Gamma} p_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda u v \, dx \\ &= \langle -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) + \lambda u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Como $u \in L^2(\Omega)$, dizer que $B_\varepsilon u \in L^2(\Omega)$ equivale a dizer que $-\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) \in L^2(\Omega)$. Logo, $\mathcal{D}(A_\varepsilon) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\}$ e A_ε é dado por

$$A_\varepsilon u = -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) + \lambda u, \text{ para todo } u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon).$$

Ainda, a identidade $a_\varepsilon(u, v) = \langle A_\varepsilon u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ nos dá que o operador A_ε é positivo e simétrico. Como A_ε é sobrejetivo, segue que A_ε é auto-adjunto.

Resta-nos verificar que A_ε tem resolvente compacto. Como A_ε é bijetivo e fechado, temos que A_ε^{-1} é fechado, e portanto segue do Teorema do Gráfico Fechado que A_ε^{-1} é contínuo. Logo, $0 \in \rho(A_\varepsilon)$, e então basta provarmos que A_ε^{-1} é compacto. Para tanto, seja $\{g_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$. Temos

$$\langle A_\varepsilon v^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla v^\varepsilon|^2 \, dx + \int_{\Omega} \lambda |v^\varepsilon|^2 \, dx = \int_{\Omega} g_\varepsilon v^\varepsilon \, dx,$$

e assim, se $C_1 = \min\{m_0, \lambda\}$ e C_2 é a constante de imersão de $H^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, então segue da Desigualdade de Young que

$$C_1 \|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla v^\varepsilon|^2 dx + \lambda \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2}{\lambda} \|g_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_2 \lambda}{2} \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2$$

e

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_3,$$

onde $C_3 = \frac{2}{\lambda} \left(C_1 - \frac{C_2 \lambda}{2} \right)^{-1}$.

Logo, $A_\varepsilon^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H^1(\Omega))$ e portanto é um operador compacto de $L^2(\Omega)$ nele mesmo, já que a inclusão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta.

Deste modo, o operador $(\mu - A_\varepsilon)^{-1}$ é compacto, para todo $\mu \in \rho(A_\varepsilon)$. $\square$

Teorema 2.8. Para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, o operador $A_\varepsilon : \mathcal{D}(A_\varepsilon) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ é setorial e

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{M}{|\mu + \lambda|}, \quad \text{para todo } \mu \in \Sigma_{-\lambda, \phi},$$

para alguma constante M independente de ε .

Demonstração. Como $\langle A_\varepsilon u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \lambda \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}$, resulta que o operador $-A_\varepsilon$ é dissipativo, satisfazendo $\langle -A_\varepsilon u, u \rangle_{L^2(\Omega)} \leq -\lambda \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Temos que $W(-A_\varepsilon) \subset (-\infty, -\lambda]$, sendo

$$W(-A_\varepsilon) = \left\{ \langle -A_\varepsilon u, u \rangle_{L^2(\Omega)} : u \in \mathcal{D}(A_\varepsilon), \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}$$

a imagem numérica de $-A_\varepsilon$. Desta forma, $\mathcal{R} := \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\lambda] \subset \mathbb{C} \setminus W(-A_\varepsilon)$ é aberto e conexo.

Temos ainda que $0 \in \mathcal{R} \cap \rho(-A_\varepsilon)$. Do Teorema 1.7 resulta que, se $\mu \in \mathcal{R}$, então

$$\|(\mu - (-A_\varepsilon))^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon))}.$$

Logo, se $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $\mu \in \Sigma_{-\lambda, \phi} := \{w \in \mathbb{C} : |\arg(w + \lambda)| < \pi - \phi\}$, temos

$$\text{dist}(\mu, W(-A_\varepsilon)) \geq \text{dist}(\mu, (-\infty, -\lambda]) = |\mu + \lambda| \sin(\pi - \arg(\mu + \lambda)) \geq |\mu + \lambda| \sin \phi,$$

obtendo assim

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{M}{|\mu + \lambda|}, \quad \text{para todo } \mu \in \Sigma_{-\lambda, \phi},$$

em que $M = \frac{1}{\sin \phi}$ independe de ε . $\square$

2.3 Problema limite

Sejam Ω_0 um sub-domínio suave de Ω , com $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ e m um inteiro positivo tal que $\Omega_0 = \bigcup_{i=1}^m \Omega_{0,i}$, onde $\Omega_{0,i}$ são sub-domínios suaves e conexos de Ω com $\bar{\Omega}_{0,i} \cap \bar{\Omega}_{0,j} = \emptyset$, para $i \neq j$. Denotemos por $\Omega_1 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$, e $\Gamma_{0,i} = \partial\Omega_{0,i}$, $\Gamma_0 = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_{0,i}$ as fronteiras de $\Omega_{0,i}$ e Ω_0 , respectivamente. Notemos que $\partial\Omega_1 = \Gamma \cup \Gamma_0$, onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Assumimos que a difusão é grande em Ω_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$, mais precisamente,

$$p_\varepsilon(x) \rightarrow \begin{cases} p_0(x), & \text{uniformemente sobre } \Omega_1, (p_0 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}_1, (0, \infty))); \\ \infty, & \text{uniformemente sobre subconjuntos compactos de } \Omega_0. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, o problema limite de (2.6) quando $\varepsilon \rightarrow 0$ é dado por

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u = f(u) & \text{em } \Omega_1 \\ u|_{\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}} & \text{em } \Omega_{0,i}, i = 1, \dots, m \\ \dot{u}_{\Omega_{0,i}} + \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} dx = f(u_{\Omega_{0,i}}) & i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g(u) & \text{em } \Gamma \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Seja u uma solução de (2.8). Multiplicando a primeira equação por $\varphi \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u \text{ é constante em } \Omega_0\}$ e usando que $\int_{\Omega} \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) \varphi dx = \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) \varphi dx$, podemos escrever a equação (2.8) na forma semilinear abstrata

$$\begin{cases} u_t + A_0 u = h(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 u &= (-\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u) \chi_{\Omega_1} \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \left(\int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} dx \right) \chi_{\Omega_{0,i}} \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{D}(A_0) = \left\{ u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) \in L^2(\Omega_1), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\}.$$

Analogamente ao caso dos operadores A_ε do problema perturbado, podemos demonstrar os seguintes resultados acerca do operador A_0 :

Teorema 2.9. *Para todo $\lambda > 0$, a forma bilinear*

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} \lambda uv dx,$$

com $u, v \in H_{\Omega_0}^1(\Omega)$, define um isomorfismo B_0 entre $H_{\Omega_0}^1(\Omega)$ e seu dual $H_{\Omega_0}^{-1}(\Omega)$. A $L_{\Omega_0}^2(\Omega)$ -realização de B_0 com condição de Neumann na fronteira é um operador não-limitado, positivo, auto-adjunto e com resolvente compacto A_0 , com domínio

$$\mathcal{D}(A_0) = \left\{ u \in H_{\Omega_0}^1(\Omega) : -\operatorname{div}(p_0(x) \nabla u) \in L^2(\Omega_1), \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ em } \Gamma \right\},$$

e para $u \in \mathcal{D}(A_0)$,

$$\begin{aligned} A_0 u &= (-\operatorname{div}(p_0(x) \nabla u) + \lambda u) \chi_{\Omega_1} \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} \right) \chi_{\Omega_{0,i}}. \end{aligned}$$

◇

Teorema 2.10. *O operador $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \subset L_{\Omega_0}^2(\Omega) \rightarrow L_{\Omega_0}^2(\Omega)$ é setorial.*

◇

É fácil ver que a estimativa setorial obtida no Teorema 2.8 continua válida para $\varepsilon = 0$, com o mesmo valor de M . Desta forma, podemos condensar os Teoremas 2.8 e 2.10 na seguinte condição de estabilidade:

(E) *Para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, existem constantes $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ e $M_E \geq 1$ de tal maneira que $\Sigma_{-\lambda, \phi} = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu + \lambda)| < \pi - \phi\} \subset \rho(-A_\varepsilon)$ e*

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_E}{|\mu + \lambda|}, \quad \text{para todo } \mu \in \Sigma_{-\lambda, \phi}.$$

Figura 1: Setor $\Sigma_{-\lambda, \phi}$

Observemos que os resultados acima nos permitem definir os espaços de potências fracionárias $X_\varepsilon^\alpha := \mathcal{D}(A)_\varepsilon^\alpha$ dos operadores A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, e $0 \leq \alpha \leq 1$. Tais espaços verificam $X_\varepsilon^\alpha \subset H^{2\alpha}(\Omega)$ e, em particular, $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$, munido do produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla \phi \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \lambda \phi \psi dx$$

e $X_0^{\frac{1}{2}} = H_{\Omega_0}^1(\Omega)$, com o produto interno

$$\langle \phi, \psi \rangle_{X_0^{\frac{1}{2}}} = \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla \phi \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \lambda \phi \psi dx.$$

Para simplificar, passaremos a denotar por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ o produto de dualidade entre $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s, s}$ o produto de dualidade entre $X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$ e $X_\varepsilon^{\frac{s}{2}}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Assim, definimos a não-linearidade $h : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$ de (2.7) e (2.9) por $h := f_\Omega + g_\Gamma$, no sentido que

$$\langle f_\Omega(u) + g_\Gamma(u), \phi \rangle_{-s, s} = \int_{\Omega} f(u) \phi dx + \int_{\Gamma} g(\gamma(u)) \gamma(\phi) dx, \quad (2.10)$$

para funções $\phi \in X^{\frac{s}{2}}$.

Além disso, os operadores $-A_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, geram semigrupos analíticos $\{e^{-A_\varepsilon t} : t \geq 0\}$ em X_ε^α , para os quais temos a seguinte estimativa:

$$\|e^{-A_\varepsilon t}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^\beta, X_\varepsilon^\alpha)} \leq M_\omega t^{\beta-\alpha} e^{-\omega t}, \quad \omega < \lambda, \text{ para todo } t > 0, \quad (2.11)$$

onde a constante M_ω independe de ε .

Ademais, se $u^\varepsilon(t, u_0^\varepsilon)$ denota uma solução de (2.6), e $u^0(t, u_0^0)$ representa uma solução de (2.8), podemos definir, para cada $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, um C_0 -semigrupo não-linear $T_\varepsilon(t) : X_\varepsilon^\alpha \rightarrow X_\varepsilon^\alpha$ através da relação

$$T_\varepsilon(t)u_0^\varepsilon := u^\varepsilon(t, u_0^\varepsilon).$$

Com o intuito de simplificar, denotaremos a solução de (2.8) apenas por $u(t, u_0)$.

Para garantirmos que o semigrupo gerado pela equação (2.8) possui um atrator global, basta assumirmos a condição de dissipatividade

(D₀) *Assumamos que a condição (S) esteja satisfeita e sejam C_0 e B_0 as constantes de (S).*

Assumamos que seja positivo o primeiro autovalor, μ_1 do problema limite

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + (\lambda + C_0)u = \mu u & \text{em } \Omega_1 \\ u|_{\Omega_{0,i}} := u_{\Omega_{0,i}} & \text{em } \Omega_{0,i}, i = 1, \dots, m \\ \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} (\lambda + C_0)u_{\Omega_{0,i}} dx = \mu(u_{\Omega_{0,i}}) & i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + B_0 u = 0 & \text{em } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

e utilizarmos os resultados obtidos na seção precedente.

A existência de um atrator global para o problema perturbado (2.6) seguirá da convergência dos autovalores do problema perturbado para os autovalores do problema limite, que estudaremos no próximo capítulo. De fato, se o primeiro autovalor do problema limite (2.12) é positivo, a convergência de autovalores implicará que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o primeiro autovalor do problema perturbado será também positivo. Isto nos dará uma condição de dissipatividade sobre o problema perturbado.

Teoria linear

O comportamento espectral dos operadores lineares desempenha um papel fundamental na análise das propriedades de continuidade da dinâmica não-linear. Reservamos então este capítulo para estudar o comportamento da parte linear dos operadores. Na primeira seção provamos a convergência compacta dos operadores resolventes com o objetivo de usá-la como ferramenta para analisarmos a convergência espectral dos operadores lineares. Na Seção 3.2 estudamos o comportamento do espectro dos operadores A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Mais precisamente, obtemos condições necessárias e suficientes para garantir que os autovalores e as autofunções de A_ε convirjam para os autovalores e autofunções do operador A_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Este fato está provado em Rodríguez-Bernal [18], mas neste trabalho é uma consequência direta da convergência compacta dos operadores resolventes. Na Seção 3.3, utilizamos os resultados obtidos sobre convergência espectral dos operadores lineares para mostrar um teorema de aproximação do tipo Trotter-Kato para os semigrupos lineares. Este caminho para obter a continuidade dos semigrupos lineares foi usado por Arrieta e Carvalho [2].

Primeiramente vamos considerar os problemas de autovalores

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = \mu u^\varepsilon & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.1)$$

e o problema limite

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u = \mu u & \text{em } \Omega_1 \\ \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} dx = \mu u_{\Omega_{0,i}} & i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (3.2)$$

Utilizando a notação introduzida anteriormente, queremos mostrar que $A_\varepsilon^{-1} \rightarrow A_0^{-1}$ compactamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Deste fato seguirá a convergência dos autovalores e autofunções associadas a estes operadores. Para tanto, vamos estudar as propriedades de convergência das soluções do problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + \lambda u^\varepsilon = h^\varepsilon & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x) \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad (3.3)$$

para a solução do problema limite

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_0(x)\nabla u) + \lambda u = h_0 & \text{em } \Omega_1 \\ \frac{1}{|\Omega_{0,i}|} \int_{\Gamma_{0,i}} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dx + \int_{\Omega_{0,i}} \lambda u_{\Omega_{0,i}} dx = h_{\Omega_{0,i}} & i = 1, \dots, m \\ p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases} \quad (3.4)$$

sempre que $X_\varepsilon \ni h_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} h_0 \in X_0$ em X .

Vejam algumas definições:

Dizemos que uma sequência $\{u^\varepsilon\}$ com $u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ e dizemos que $\{u^\varepsilon\}$ converge $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -fracamente para $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se

$$\int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u^\varepsilon \phi dx \rightarrow \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u \phi dx, \text{ para toda } \phi \in X_0^{\frac{1}{2}}.$$

Notemos que $\{u^\varepsilon\}$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se, e somente se,

$$\int_{\Omega_1} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda (u^\varepsilon - u)^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_0} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Denotamos por $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ o espaço dual de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Como $X_0^{\frac{1}{2}}$ é um subespaço fechado de $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, dada $h_\varepsilon \in X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, temos que h_ε é um funcional linear limitado em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ e sua restrição a $X_0^{\frac{1}{2}}$, que também denotamos por h_ε , é um elemento de $X_0^{-\frac{1}{2}}$.

Dadas seqüências $\{\varepsilon_n\} \rightarrow 0$, $\{h_{\varepsilon_n}\}$, $h_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$, e $h_0 \in X_0^{-\frac{1}{2}}$, dizemos que h_{ε_n} converge para h_0 e denotamos $h_{\varepsilon_n} \rightarrow h_0$ se $\|h_{\varepsilon_n} - h_0\|_{X_0^{-\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $h_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \rightarrow h_0(u)$ sempre que u_{ε_n} $X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$ -converge para u .

3.1 Convergência compacta do resolvente

O resultado seguinte está destinado a mostrar que a família de soluções de (3.3) converge para uma solução do problema limite (3.4).

Teorema 3.1. *Sejam $\{\varepsilon_n\}$ uma seqüência em $(0, \varepsilon_0]$ que converge para zero, $\{h_{\varepsilon_n}\}, h_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}, n \in \mathbb{N}$, de tal maneira que $\|h_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\{u_{\varepsilon_n}\}$ satisfazendo $A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n} = h_{\varepsilon_n}$.*

Então existe uma subsequência de $\{u_{\varepsilon_n}\}$, que denotamos também por $\{u_{\varepsilon_n}\}$, e $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ de tal modo que $\{u_{\varepsilon_n}\}$ converge para u $X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ -fracamente e fortemente em X . Além disso, se $\{h_{\varepsilon_n}\} \subset X_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}$ converge $X_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}}$ -fracamente para $h \in X_0^{-\frac{1}{2}}$, então $\{u_{\varepsilon_n}\}$ converge para u $X_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}$ -fracamente e fortemente em X , onde u é a solução de

$$A_0 u = h.$$

Demonstração: Notemos inicialmente que, se $\|h_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}} \leq 1$, então existe uma constante C_1 de tal maneira que $\|h_{\varepsilon_n}\|_{X_0^{-\frac{1}{2}}} \leq C_1$. Como $X_0^{-\frac{1}{2}}$ é reflexivo, existem uma subsequência, que denotaremos também por $\{h_{\varepsilon_n}\}$, e $h_0 \in X_0^{-\frac{1}{2}}$ de tal maneira que $\langle h_{\varepsilon_n}, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle h_0, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, para toda $\phi_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} |\langle h_{\varepsilon_n}, \phi_{\varepsilon_n} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle h_0, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}| &\leq |\langle h_{\varepsilon_n}, \phi_{\varepsilon_n} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle h_{\varepsilon_n}, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}| + |\langle h_{\varepsilon_n}, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} - \langle h_0, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}| \\ &\leq \|h_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}} \|\phi_{\varepsilon_n} - \phi_0\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} + o(1) \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $\langle h_{\varepsilon_n}, \phi_{\varepsilon_n} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rightarrow \langle h_0, \phi_0 \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ sempre que $\{\phi_{\varepsilon_n}\}$ $X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}$ -converge para ϕ_0 quando $n \rightarrow \infty$.

Observemos ainda que

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}}^2 = \int_{\Omega} p_{\varepsilon_n}(x) |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u_{\varepsilon_n}|^2 dx \leq \|h_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{-\frac{1}{2}}} \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}},$$

de modo que $\|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}} \leq 1$. Ainda, como $0 < m_0 \leq p_{\varepsilon}(x)$, para todo $x \in \Omega$ e para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, então

$$m_0 \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |u_{\varepsilon_n}|^2 dx \leq \|u_{\varepsilon_n}\|_{X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}}}^2 \leq 1, \quad (3.5)$$

ou seja, $\{\|u_{\varepsilon_n}\|_{H^1(\Omega)}\}$ é limitada. Logo, existem uma subsequência $\{u_{\varepsilon_{n_k}}\}$, que denotaremos simplesmente por $\{u_{\varepsilon_n}\}$, e $u \in H^1(\Omega)$ de tal forma que $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ fracamente em $H^1(\Omega)$ e

fortemente em $L^2(\Omega)$. Igualmente, segue de (3.5) que

$$m_0 \int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx + \lambda \int_K |u_{\varepsilon_n}|^2 dx \leq 1,$$

para todo subconjunto aberto K com $K \subset\subset \Omega$ e, sendo $H^1(K)$ reflexivo, podemos assumir que $u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ fracamente em $H^1(K)$. Logo, $\int_K |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx$. Por outro lado, existe uma constante $C_2 > 0$ de tal modo que

$$\inf_{x \in K} \{p_{\varepsilon_n}(x)\} \int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx \leq \int_K p_{\varepsilon_n}(x) |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 dx \leq C_2,$$

e, como $p_{\varepsilon_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ sobre subconjuntos compactos de Ω_0 , temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 = 0$.

Temos ainda que u é constante em K , pois $\int_K |\nabla u|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \rightarrow 0$. Agora, como

$$\Omega_0 = \bigcup_{\substack{i=1 \\ K_i \subset\subset \Omega}}^{\infty} K_i, \text{ segue que } u \in X_0^{\frac{1}{2}}.$$

Suponhamos agora que $X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \ni \phi_{\varepsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_0 \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Neste caso, ϕ_{ε_n} converge para ϕ_0 em X e, como $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u$ em X , segue que $\int_{\Omega} u_{\varepsilon_n} \phi_{\varepsilon_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u \phi_0 dx$. Logo,

$$\int_{\Omega_1} p_{\varepsilon_n}(x) \nabla u_{\varepsilon_n} \nabla \phi_{\varepsilon_n} dx + \int_{\Omega} \lambda u_{\varepsilon_n} \phi_{\varepsilon_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi_0 dx + \int_{\Omega} \lambda u \phi_0 dx.$$

Desta forma, se $\phi \in X_0^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{\varepsilon_n}(x) \nabla u_{\varepsilon_n} \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u_{\varepsilon_n} \phi dx &= \int_{\Omega_1} p_{\varepsilon_n}(x) \nabla u_{\varepsilon_n} \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u_{\varepsilon_n} \phi dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u \phi dx, \end{aligned}$$

e, de $A_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n} = h_{\varepsilon_n}$ e da convergência $\langle h_{\varepsilon_n}, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rightarrow \langle h_0, \phi \rangle$, segue que $\langle A_0 u, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \langle h_0, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, para toda $\phi \in X_0^{\frac{1}{2}}$, ou seja,

$$\langle A_0 u, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega} \lambda u \phi dx = \langle h_0, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

Para $h_0 \in X_0^{-\frac{1}{2}}$, temos

$$0 = \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi dx + \int_{\Omega_1} \lambda u \phi dx - \int_{\Omega_1} h_0 \phi dx + \int_{\Omega_0} \lambda u \phi dx - \int_{\Omega_0} h_0 \phi dx \quad (3.6)$$

para toda $\phi \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Ademais, se $\phi \in C_c^1(\Omega_1) \subset X_0^{\frac{1}{2}}$, então $pu_{x_j} \in H^1(\Omega_1)$, $1 \leq j \leq N$, e

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_1} p_0(x) \nabla u \nabla \phi + \int_{\Omega_1} \lambda u \phi \, dx - \int_{\Omega_1} h_0 \phi \, dx \\ &= - \int_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_0(x) \nabla u) \phi \, dx + \int_{\Omega_1} \lambda u \phi \, dx - \int_{\Omega_1} h_0 \phi \, dx. \end{aligned}$$

Segue portanto que

$$-\operatorname{div}(p_0(x) \nabla u) + \lambda u = h_0 \text{ quase sempre em } \Omega_1 \quad (3.7)$$

e além disso, supondo por um momento que $m = 1$, usando (3.7) e integrando por partes em (3.6), obtemos

$$0 = \int_{\Gamma_0} p_0(x) \phi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dx + \int_{\Omega_0} \lambda u \phi \, dx - \int_{\Omega_0} h_0 \phi \, dx = \phi_{\Omega_0} \left(\int_{\Gamma_0} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dx + |\Omega_0| \lambda u_{\Omega_0} - |\Omega_0| h_{\Omega_0} \right)$$

e

$$\frac{1}{|\Omega_0|} \int_{\Gamma_0} p_0(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dx + \lambda u_{\Omega_0} = h_{\Omega_0}.$$

□

Introduzimos a seguir um pouco da terminologia que será utilizada adiante.

Suponhamos que Y seja um espaço de Banach e Y_0 um subespaço fechado de Y . Dizemos que a família de operadores $\{S_\varepsilon \in \mathcal{L}(Y) : \varepsilon \in (0, 1]\}$ converge para $S \in \mathcal{L}(Y_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se $S_\varepsilon v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S v$ em Y , sempre que $Y \ni v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v \in Y_0$ em Y , e denotamos esta convergência por $S_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S$.

Observemos que a convergência acima não representa a convergência forte de operadores, uma vez que o vetor limite deve estar necessariamente em um subespaço específico Y_0 de Y . Situações mais gerais podem ser vistas em Carvalho e Piskarev [9].

Sejam Y um espaço de Banach e Y_0 um subespaço fechado de Y . Uma família de operadores $\{S_\varepsilon \in \mathcal{L}(Y) : \varepsilon \in (0, 1]\}$ é Y_0 -coletivamente compacta se cada operador S_ε é compacto, $\varepsilon \in (0, 1]$, e, para toda família limitada $\{v_\varepsilon \in Y : \varepsilon \in (0, 1]\}$, existe uma subsequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que $\{S_{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}\}$ converge para um elemento de Y_0 . Dizemos que uma família de operadores $\{S_\varepsilon \in \mathcal{L}(Y) : \varepsilon \in (0, 1]\}$ converge Y_0 -compactamente para $S \in \mathcal{L}(Y_0)$ se a família é Y_0 -coletivamente compacta e $S_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} S$.

Caso não haja dúvida quanto ao espaço Y_0 , utilizaremos simplesmente os termos *família coletivamente compacta* e *convergência compacta* para referirmo-nos aos termos definidos anteriormente.

Um dos resultados necessários para obtermos a continuidade do espectro e a continuidade uniforme do operador resolvente é a convergência compacta $A_\varepsilon^{-1} \rightarrow A_0^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Prosseguimos então com este resultado.

Teorema 3.2. *A família $\{A_\varepsilon^{-1} : X \rightarrow X, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ converge compactamente para o operador $A_0^{-1} : X_0 \rightarrow X_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Seja $\{h_\varepsilon\} \subset X$ tal que $h_\varepsilon \rightarrow h \in X_0$ em X . Então $h_\varepsilon \rightarrow h$ em $X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ e $\{h_\varepsilon\}_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}$ é limitada. Como $A_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ é isomorfismo, temos $A_\varepsilon^{-1}h_\varepsilon := u^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Além disso, pelo Teorema 3.1, existe $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ de tal forma que $\{u^\varepsilon\}$ converge para u $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -fracamente e fortemente em X . Logo,

$$A_\varepsilon^{-1}h_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}h \text{ em } X,$$

o que nos dá a convergência $A_\varepsilon^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-1}$.

Provemos agora que a família $\{A_\varepsilon^{-1} : X \rightarrow X, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ é coletivamente compacta. Claramente, para cada $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ fixado, o operador $A_\varepsilon^{-1} : X \rightarrow X$ é compacto, já que $A_\varepsilon^{-1} : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ é isomorfismo e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow X$ compactamente. Seja agora $\{h_\varepsilon\}$ uma família limitada em X . Então $\{h_\varepsilon\}_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}$ é limitada e, se v^ε é tal que $A_\varepsilon v^\varepsilon = h_\varepsilon$, temos

$$\int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla v^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda |v^\varepsilon|^2 dx = \langle h_\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \leq \|h_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \|v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}},$$

e $\{v^\varepsilon\}_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$ é limitada e possui uma subsequência convergente em X para $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$, completando a demonstração. $\square$

Lema 3.3. *Se S_ε converge compactamente para S , então existe uma constante $M > 0$ de tal forma que $\|S_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq M$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.*

Demonstração. Suponhamos que $\|S_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(Y)}$ não seja limitada. Então existem seqüências $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e $\{u_n\} \subset Y$ de tal forma que $\|S_{\varepsilon_n} u_n\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Como S_ε converge compactamente para S quando $\varepsilon \rightarrow 0$, existem uma subsequência, que denotaremos também por $\{S_{\varepsilon_n} u_n\}$, e $u \in Y_0$ tais que $S_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$, uma contradição. $\square$

Lema 3.4. *Suponhamos que $\{S_\varepsilon \in \mathcal{L}(Y) : \varepsilon \in (0, 1]\}$ convirja compactamente para S quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e que, além disso, $\mathcal{N}(I + S) = \{0\}$. Então existem constantes $\varepsilon_0 > 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\|(I + S_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y)} \leq M, \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (3.8)$$

Demonstração. Devemos mostrar primeiramente que existe um ε_0 tal que $\mathcal{N}(I + S_\varepsilon) = \{0\}$, todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Suponhamos, por absurdo, que existam seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\} \subset Y$, $u_n \in \mathcal{N}(I + S_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\|u_n\|_Y = 1$. Como S_ε converge compactamente para S quando $\varepsilon \rightarrow 0$, existem uma subsequência, que denotaremos também por $\{S_{\varepsilon_n} u_n\}$, e $u \in Y_0$ tais que $S_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $0 = u_n + S_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow u$ e $u_n \rightarrow -u$, e portanto $-(I + S)u = 0$, com $\|u\|_Y = 1$, o que contradiz a hipótese.

Notemos ainda que mostrar (3.8) é equivalente a mostrar que $\|(I + S_\varepsilon)u^\varepsilon\|_Y \geq \frac{1}{M}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ para todo $u^\varepsilon \in Y$ com $\|u^\varepsilon\|_Y = 1$. Suponhamos então que isto não seja válido, ou seja, suponhamos que existam seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}$, com $u_n \in Y$, $\|u_n\|_Y = 1$, de tal maneira que $\|(I + S_{\varepsilon_n})u_n\| \rightarrow 0$. Denotemos também por $\{S_{\varepsilon_n} u_n\}$ a subsequência convergente de $\{S_{\varepsilon_n} u_n\}$, e suponhamos que $S_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow u \in Y_0$, $\|u\|_Y = 1$. Então $u_n + S_{\varepsilon_n} u_n \rightarrow 0$ e $u_n \rightarrow -u$. Logo, $(I + S)u = 0$, uma contradição, pois $\|u\|_Y = 1$. Logo, a estimativa em (3.8) é válida. $\square$

Lema 3.5. *Para todo $\mu \in \rho(-A_0)$, existem ε_μ tal que $\mu \in \rho(-A_\varepsilon)$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$, e uma constante $M_\mu > 0$ tais que*

$$\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\mu, \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu].$$

Além disso, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração. Seja $\mu \in \rho(-A_0)$. Então, a igualdade $(\mu + A_0) = A_0(I + \mu A_0^{-1})$ implica a existência de $(I + \mu A_0^{-1})^{-1}$. Pelo Lema 3.4, existe $\varepsilon_\mu \in (0, \varepsilon_0]$ tal que $(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ está bem definido, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]$, e é uniformemente limitado. Logo, $(\mu + A_\varepsilon)^{-1} = (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1} A_\varepsilon^{-1}$ existe. Como A_ε^{-1} converge compactamente para A_0^{-1} quando $\varepsilon \rightarrow 0$, temos que $\{\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} : \varepsilon \in (0, \varepsilon_\mu]\}$ é limitado. Assim, a limitação de $\{(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\mu\}$ nos garante que $(\mu + A_\varepsilon)^{-1}$ converge compactamente para $(\mu + A_0)^{-1}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

3.2 Continuidade do espectro

Nesta seção estudamos as propriedades de convergência espectral dos operadores lineares. O resultado seguinte nos diz que o espectro de A_ε , para ε pequeno, aproxima-se do espectro de A_0 .

Como os operadores A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, são auto-adjuntos e têm resolvente compacto, os espectros $\sigma(-A_\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, consistem apenas de autovalores reais e isolados.

Teorema 3.6. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *Para todo $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}, \mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n}), n \in \mathbb{N}$, tais que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$.*
- (ii) *Se para alguma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, temos que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$, com $\mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n}), n \in \mathbb{N}$, então $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$.*

Demonstração. (i) Seja $\mu_0 \in \sigma(-A_0)$ e consideremos $U = U(\mu_0, \delta) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \mu_0| \leq \delta\}$, sendo δ escolhido de tal forma que $U \cap \sigma(-A_0) = \{\mu_0\}$. Nosso objetivo é mostrar que existe um $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que $U \cap \sigma(-A_\varepsilon) \neq \emptyset$, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Mostremos primeiramente que existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ e $\mu \in \partial U$. Para tanto, é suficiente provarmos que $\|(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado, para quaisquer $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, $\mu \in \partial U$, já que $\|A_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Suponhamos, por absurdo, que existam seqüências $\{\mu_n\} \subset \partial U$, $\mu_n \rightarrow \bar{\mu} \in \partial U$, $\{u_n\} \subset X$, $\|u_n\|_X = 1$, e $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tais que

$$\|(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\|_X \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Observemos agora que

$$\mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n = (\mu_n - \bar{\mu}) A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n + \bar{\mu} A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n \rightarrow v,$$

uma vez que $A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n$ é relativamente compacto. Assim, como $u_n + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n \rightarrow 0$, obtemos que $u_n \rightarrow -v$ e $\|v\|_X = 1$. Ainda, segue que $u_n + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1} u_n \rightarrow -(I + \bar{\mu} A_0^{-1})v$ e $(I + \bar{\mu} A_0^{-1})v = 0$, $\|v\|_X = 1$, uma contradição, pois $\bar{\mu} \in \rho(-A_0)$.

Suponhamos, novamente por redução ao absurdo, que $U \subset \rho(-A_\varepsilon)$, qualquer que seja $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Como a função $\mu \mapsto (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}$ é holomorfa para todo $\mu \in \partial U$, segue do que fizemos anteriormente e do Teorema do Máximo Módulo que

$$\|(I + \mu_0 A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \max_{\substack{|\mu - \mu_0| = \delta \\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}} \|(I + \mu_0 A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = C_1 < \infty,$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Logo, para $u \in X$ e $\varepsilon_n \rightarrow 0$, obtemos

$$\|u\|_X = \|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})^{-1}(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u\|_X \leq C_2 \|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u\|_X,$$

de maneira que $\|(I + \mu_0 A_0^{-1})u\|_X \geq \frac{1}{C_2} \|u\|_X$ e $\mu_0 \in \rho(-A_0)$, uma contradição. Portanto, $U(\mu_0, \delta)$ contém algum ponto de $\sigma(-A_\varepsilon)$, para ε apropriadamente pequeno.

(ii) Consideremos as seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}, \mu_n \in \sigma(-A_{\varepsilon_n})$, tais que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $\{u_n\} \subset X$, com $\|u_n\|_X = 1$ e $\|(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\|_X = 0$. Então

$$\|(I + \mu_0 A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\|_X \leq \|(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})u_n\|_X + \|(\mu - \mu_n)A_{\varepsilon_n}^{-1}u_n\|_X \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Como $\{A_{\varepsilon_n}^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente compacta e $\|u_n\|_X = 1$, tomando subseqüências se necessário, resulta que $\mu_0(A_{\varepsilon_n})^{-1}u_n \rightarrow v$ e $u_n \rightarrow -v$, $\|v\|_X = 1$. Portanto, $(I + \mu_0 A_0^{-1})v = 0$, $\|v\|_X = 1$, o que significa que $\mu \in \sigma(-A_0)$. $\square$

O seguinte resultado trata da convergência uniforme dos operadores resolventes sobre determinados conjuntos limitados de X .

Lema 3.7. *Seja K um subconjunto compacto de $\rho(-A_0)$. Então existe uma constante $\varepsilon_K > 0$ de tal forma que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$ e*

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} < \infty. \quad (3.9)$$

Se $f_\Omega \in L^2(\Omega)$, $g_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ e $h = f_\Omega + g_\Gamma \in X_0^{-\frac{s}{2}}$ é definida por

$$\langle h, \phi \rangle_{-s,s} = \int_\Omega f_\Omega \phi + \int_\Gamma g_\Gamma \phi, \quad \forall \phi \in X_0^{\frac{s}{2}}, \quad (3.10)$$

então estendemos h a $X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$ de maneira natural, e obtemos

$$\sup_{\mu \in K} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + A_0)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.11)$$

Além disso, se J é um subconjunto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$ constituído por elementos da forma $f_\Omega + g_\Gamma$, com f_Ω (respectivamente g_Γ) variando em um subconjunto limitado de $L^2(\Omega)$ (respectivamente $L^2(\Gamma)$), temos

$$\sup_{\substack{\mu \in K \\ h \in J}} \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + A_0)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (3.12)$$

Demonstração. Vamos primeiramente provar que existe $\varepsilon_K > 0$ tal que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$. Suponhamos, para tanto, que existam seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{\mu_n\} \subset K$ tais que μ_n é autovalor de $-A_{\varepsilon_n}$. Como K é compacto, podemos assumir que existe $\bar{\mu} \in K$ de tal forma que $\mu_n \rightarrow \bar{\mu}$. Segue do Teorema 3.6, item (ii), que $\bar{\mu} \in \sigma(-A_0)$, o que é uma contradição. Para

provamos (3.9), assumamos que existam seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{\mu_n\} \subset K$, $\mu_n \rightarrow \bar{\mu} \in K$ de tal maneira que

$$\|(I + \mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow \infty.$$

Como $\mu_n A_{\varepsilon_n}^{-1}$ converge compactamente para $\bar{\mu} A_0^{-1}$, isto contradiz o Lema 3.4. Logo,

$$\sup_{\substack{\mu \in K \\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_k]}} \|(I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

Além disso, da Desigualdade do Momento, segue a existência de uma constante C_1 de tal modo que, para quaisquer $0 < \alpha < 1$, $u \in X$, temos

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon^\alpha (\mu + A_\varepsilon)^{-1} u\|_X &\leq C_1 \|A_\varepsilon (\mu + A_\varepsilon)^{-1} u\|_X^\alpha \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} u\|_X^{1-\alpha} \\ &\leq C_1 \|(I - \mu(\mu + A_\varepsilon)^{-1})u\|_X^\alpha \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1} u\|_X^{1-\alpha} \end{aligned}$$

provando (3.9).

Fazemos a prova de (3.11) do seguinte modo: sejam $u^\varepsilon = (\mu + A_\varepsilon)^{-1} h$ e $u = (\mu + A_0)^{-1} h$.

Então

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (u^\varepsilon)^2 dx &= \langle h, u^\varepsilon \rangle_{-s,s} \\ \int_{\Omega_1} p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla u dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u^\varepsilon u dx &= \langle h, u \rangle_{-s,s} \\ \int_{\Omega_1} p_0(x) |\nabla u|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u^2 dx &= \langle h, u \rangle_{-s,s}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle h, u^\varepsilon - u \rangle_{-s,s} &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon|^2 dx - \int_{\Omega_1} p_0(x) |\nabla u|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (u^\varepsilon)^2 dx - (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (u^\varepsilon - u)^2 dx - \int_{\Omega_1} (p_\varepsilon(x) - p_0(x)) |\nabla u|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega_1} p_\varepsilon(x) \nabla u^\varepsilon \nabla u dx + 2(\lambda + \mu) \int_{\Omega} u^\varepsilon u dx - 2 \int_{\Omega_1} p_0(x) |\nabla u|^2 dx - 2(\lambda + \mu) \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (u^\varepsilon - u)^2 dx - \int_{\Omega_1} (p_\varepsilon(x) - p_0(x)) |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Segue facilmente do Teorema 3.1 que $u^\varepsilon \rightarrow u$ $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -fracamente. Logo, $\langle h, u^\varepsilon - u \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \rightarrow 0$ e portanto $\langle h, u^\varepsilon - u \rangle_{-s,s} \rightarrow 0$. Além disso, como $p_\varepsilon \rightarrow p_0$ uniformemente em Ω_1 e $\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 < \infty$,

da expressão acima concluímos que u^ε $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -converge para u .

Consideremos agora J um subconjunto limitado de $X_0^{-\frac{s}{2}}$ dado da seguinte forma: existem M_1 e M_2 tais que, se $h \in J$, então

$$h = f_\Omega + g_\Gamma$$

com $\|f_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq M_1$ e $\|g_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq M_2$. Denotemos por J_ε o conjunto das extensões naturais $h_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{s}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ de elementos $h : X_0^{\frac{s}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ de J à $X_\varepsilon^{\frac{s}{2}}$. É fácil ver que

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} \sup_{h_\varepsilon \in J_\varepsilon} \|h_\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} < \infty.$$

Segue do fato que $\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$, do fato que $\|u^\varepsilon - u\|_X \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e da Desigualdade do Momento que $\|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{s}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Isto garante que $\sup_{h \in J} \langle h, u^\varepsilon - u \rangle_{-s, s} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. O resultado agora segue da identidade

$$\langle h, u^\varepsilon - u \rangle_{-s, s} = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla u^\varepsilon - \nabla u|^2 dx + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} (u^\varepsilon - u)^2 dx - \int_{\Omega_1} (p_\varepsilon(x) - p_0(x)) |\nabla u|^2 dx.$$

□

Sejam μ um ponto isolado de $\sigma(-A_0)$ e $\delta > 0$ tais que $\{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| \leq \delta\} \cap \sigma(-A_0) = \{\mu\}$. Definimos o *auto-espaço generalizado* associado a μ como

$$W(\mu, -A_0) = Q_0(\mu)X.$$

onde

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\mu|=\delta} (z + A_0)^{-1} dz.$$

Como $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| = \delta\}$ é compacto e $K \subset \rho(-A_0)$, então, pelo lema anterior, existe um ε_K tal que $K \subset \rho(-A_\varepsilon)$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$. Para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$, o auto-espaço generalizado $W(\mu, -A_\varepsilon) = Q_\varepsilon(\mu)X$, onde

$$Q_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\mu|=\delta} (z + A_\varepsilon)^{-1} dz.$$

Acerca das projeções Q_ε e Q_0 , temos o seguinte resultado:

Lema 3.8. *Qualquer que seja $\mu \in \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| = \delta\}$, $Q_\varepsilon(\mu)$ converge compactamente para $Q_0(\mu)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Como $(\mu + A_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\mu + A_0)^{-1}$, para todo μ tal que $|\mu - \mu_0| = \delta$, e

$$\left\{ \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \right\}$$

é limitado, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$Q_\varepsilon(\mu_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \mu_0| = \delta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu - \mu_0| = \delta} (\mu + A_0)^{-1} d\mu = Q_0(\mu_0).$$

Podemos escrever

$$Q_\varepsilon(\mu_0) = A_\varepsilon^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - \mu_0| = \delta} (I + zA_\varepsilon^{-1})^{-1} dz.$$

Como, do Lema (3.5), $\|I + zA_\varepsilon^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1}$ é uniformemente limitado, temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z - \mu_0| = \delta} (I + zA_\varepsilon^{-1})^{-1} dz$$

é uniformemente limitada, e também, como $A_\varepsilon^{-1} \rightarrow A_0^{-1}$ compactamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta que $Q_\varepsilon(\mu_0)$ converge compactamente para $Q_0(\mu_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Teorema 3.9. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dim W(\mu, -A_\varepsilon) = \dim W(\mu, -A_0)$, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
- (ii) Para todo $u \in W(\mu_0, -A_0)$, existe uma seqüência $\{u^\varepsilon\}$, $u^\varepsilon \in W(\mu_0, -A_\varepsilon)$, tal que $u^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$.
- (iii) Para toda seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, a seqüência $\{u_n\}$, $u_n \in W(\mu, -A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\|u_n\|_X = 1$, possui uma subseqüência convergente e todo ponto limite desta seqüência pertence ao auto-espaço generalizado $W(\mu_0, -A_0)$.

Demonstração. (i) Mostremos primeiramente que existe $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ tal que $\text{posto}(Q_\varepsilon(\mu_0)) \geq \text{posto}(Q_0(\mu_0))$, $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Suponhamos então que exista uma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ de tal forma que $\text{posto}(Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)) < \text{posto}(Q_0(\mu_0))$. Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base para $W(\mu_0, -A_0) = Q_0(\mu_0)X_0$; então

$$\{Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)v_1, \dots, Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)v_k\}$$

é um conjunto linearmente dependente em X . Escolhamos $\alpha_1^n, \dots, \alpha_k^n$ de tal forma que $\sum_{i=1}^k |\alpha_i^n| = 1$ e

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i^n Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)v_i = 0.$$

Tomando subsequências se necessário, podemos assumir que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tais que $\alpha_i^n \rightarrow \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$. Logo,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i Q_0(\mu_0) v_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k |\alpha_i| = 1,$$

contradizendo a independência linear de $\{v_1, \dots, v_k\}$. Logo, existe um $\bar{\varepsilon}$ tal que posto $(Q_\varepsilon(\mu_0)) \geq \text{posto}(Q_0(\mu_0))$, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Assumamos agora que $\text{posto}(Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)) > \text{posto}(Q_0(\mu_0))$, para alguma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in W(\mu_0, -A_{\varepsilon_n})$, $\|u_n\|_X = 1$, tal que $\text{dist}(u_n, W(\mu_0, A_0)) = \|u_n\|_X = 1$. Da convergência compacta, podemos assumir que $Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n = u_n \rightarrow Q_0(\mu_0)u_0 = u_0$, e assim,

$$1 \leq \|u_n - Q_0(\mu_0)u_n\|_X = \|Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n - Q_0(\mu_0)u_n\|_X \rightarrow 0,$$

uma contradição.

(ii) Sejam $u \in W(\mu_0, -A_0)$ e $u^\varepsilon = Q_\varepsilon(\mu_0)u$. Como $Q_\varepsilon(\mu_0)u \rightarrow Q_0(\mu_0)u$ e $u = Q_0(\mu_0)u$, temos que $u^\varepsilon \rightarrow u$.

(iii) Suponhamos que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e consideremos $\{u_n\} \subset X$, $u_n \in W(\mu_0, -A_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_X = 1$. Como $Q_\varepsilon(\mu_0) \rightarrow Q_0(\mu_0)$ compactamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então $\{Q_\varepsilon(\mu_0) : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é coletivamente compacta. Logo, $u_n = Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n$ possui uma subsequência convergente, digamos, $u_n \rightarrow u$, ou seja, $Q_{\varepsilon_n}(\mu_0)u_n \rightarrow Q_0(\mu_0)u$ e $u \in W(\mu_0, -A_0)$. $\square$

3.3 Convergência dos semigrupos lineares

A continuidade do espectro obtida na seção anterior nos permite obter estimativas sobre o comportamento dos semigrupos lineares, que serão úteis na análise da dinâmica não-linear.

As propriedades dos operadores A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, implicam, para cada $\omega < \lambda$, na existência de uma constante M_ω , independente de ε , de tal modo que

$$\left\| e^{-A_\varepsilon t} u \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq M_\omega t^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\omega t} \|u\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}. \quad (3.13)$$

para todo $t > 0$ e todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Teorema 3.10. *Sejam K um subconjunto compacto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Se $h = f_\Omega + g_\Gamma \in K$ é como em (3.10) e estendemos h de forma natural a $X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$, então existe uma função $v : (0, \varepsilon_0] \rightarrow$*

$\mathbb{R}^+$, $v(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, de tal forma que

$$\sup_{h \in K} \left\| e^{-A_\varepsilon t} h - e^{-A_0 t} h \right\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} \leq v(\varepsilon) e^{-\omega t} t^{-\theta - \frac{(1+s)}{2}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

Demonstração. Sejam $\delta \in (0, 1)$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}$ fixados. Trabalharemos separadamente os casos $0 < t < \delta$ e $t \geq \delta$.

Como h está em um subconjunto compacto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$ e $0 < t < \delta$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| e^{-A_\varepsilon t} h - e^{-A_0 t} h \right\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} &\leq 2M_\omega e^{-\omega t} t^{-\left(\frac{1+s}{2}\right)} \\ &\leq 2M_\omega e^{-\omega t} t^\theta t^{-\theta - \left(\frac{1+s}{2}\right)} \\ &\leq 2M_\omega e^{-\omega t} \delta^\theta t^{-\theta - \left(\frac{1+s}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Observemos agora que, como os operadores A_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, são setoriais, os operadores $-A_\varepsilon$ geram semigrupos analíticos $\{e^{-A_\varepsilon t} : t \geq 0\}$, que são dados por

$$e^{-A_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\mu t} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

onde Γ é a fronteira do setor $\Sigma_{-\lambda, \phi}$, orientada de maneira que a parte imaginária de μ cresce quando μ percorre Γ . Desta forma, para $\bar{\omega} < \lambda$, temos

$$e^{(-A_\varepsilon + \bar{\omega} I)t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{(\mu + \bar{\omega})t} (\mu + \bar{\omega} + A_\varepsilon - \bar{\omega})^{-1} d\mu, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Fazendo a mudança de variáveis $\mu + \bar{\omega} \mapsto \mu$, e denotando $B_\varepsilon := A_\varepsilon - \bar{\omega} I$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, podemos escrever

$$e^{-B_\varepsilon t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{\mu t} (\mu + B_\varepsilon)^{-1} d\mu, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

sendo Γ_0 a fronteira do setor $\Sigma_{0, \phi}$. Nosso objetivo é estimar, para $t \geq \delta$, a diferença

$$2\pi t^{\frac{1+s}{2}} \left\| e^{-B_\varepsilon t} h - e^{-B_0 t} h \right\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} = \left\| \int_{\Gamma_0} t^{\frac{1+s}{2}} e^{\mu t} [(\mu + B_\varepsilon)^{-1} h - (\mu + B_0)^{-1} h] d\mu \right\|_{X_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}. \quad (3.14)$$

Vejamos que a integral do lado direito em (3.14) é convergente. Para $\mu \in \Gamma_0$, obtivemos previamente a estimativa setorial $\|(\mu + B_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}})} \leq \frac{M}{|\mu|}$, para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Logo,

$$\begin{aligned} \|B_\varepsilon(\mu + B_\varepsilon)^{-1} h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &= \|(I - \mu(\mu + B_\varepsilon)^{-1}) h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \\ &\leq \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} + |\mu| \|(\mu + B_\varepsilon)^{-1} h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \\ &\leq M_1 \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}. \end{aligned}$$

Da Desigualdade do Momento com $\beta = \frac{-s}{2} < \alpha = \frac{1}{2} < \gamma = 1 - \frac{s}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|B_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_X \\
 &\leq C \|B_\varepsilon^{\frac{1-s}{2}}(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_X^{\frac{1+s}{2}} \|B_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_X^{\frac{1-s}{2}} \\
 &= C \|B_\varepsilon(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}^{\frac{1+s}{2}} \|(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}^{\frac{1-s}{2}} \\
 &\leq C M_1^{\frac{1+s}{2}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}^{\frac{1+s}{2}} \frac{M^{\frac{1-s}{2}}}{|\mu|^{\frac{1-s}{2}}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}^{\frac{1-s}{2}} \\
 &\leq \frac{M_2}{|\mu|^{\frac{1-s}{2}}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}},
 \end{aligned}$$

e assim, $\|(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + B_0)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2M_2}{|\mu|^{\frac{1-s}{2}}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}.$

Desta forma, temos

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_{\Gamma_0} t^{\frac{1+s}{2}} e^{\mu t} [(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + B_0)^{-1}h] d\mu \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq t^{\frac{1+s}{2}} \int_{\Gamma_0} |e^{\mu t}| \frac{2M_2}{|\mu|^{\frac{1-s}{2}}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\mu \\
 &\stackrel{\gamma=\mu t}{=} 2M_2 t^{\frac{1+s}{2}} \int_{\Gamma_0} |e^\gamma| |\gamma|^{\frac{s-1}{2}} t^{\frac{1-s}{2}} \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \frac{d\gamma}{t} \\
 &= M_3 \|h\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Para $t \geq \delta$, procedemos da seguinte forma: como a integral do lado direito em (3.14) é uniformemente convergente em ε , dado $\eta > 0$, podemos escrever $\Gamma_0 = \Gamma_1^\eta \cup \Gamma_2^\eta$, com Γ_1^η limitada e Γ_2^η satisfazendo

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} \sup_{h \in K} \left\| t^{\frac{1+s}{2}} \int_{\Gamma_2^\eta} e^{\mu t} [(\mu + B_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + B_0)^{-1}h] d\mu \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \frac{\eta}{2}.$$

Sobre Γ_1^η , fazemos a mudança de variáveis $\beta = \mu t$ em (3.14), obtendo

$$\left\| t^{\frac{1+s}{2}} \int_{\Gamma_1^\eta} e^\beta \left[\left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right] \frac{d\beta}{t} \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}.$$

Agora, novamente lançando mão da Desigualdade do Momento e da estimativa setorial que obtivemos, segue que

$$\left\| \left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq 2 \frac{M^{\frac{1+s}{2}}}{|\frac{\beta}{t}|^{\frac{1+s}{2}}} \|h\|_X = \frac{M_4}{|\beta|^{\frac{1+s}{2}}} t^{\frac{1+s}{2}} \|h\|_X,$$

ou seja,

$$\sup_{h \in K} \left\| \left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{M_5}{|\beta|^{\frac{1+s}{2}}} t^{\frac{1+s}{2}}.$$

Também, como $t \geq \delta$, temos que $\frac{1}{t} \in \left[0, \frac{1}{\delta}\right] \subset \subset \mathbb{R}$ e, para $\beta \in \Gamma_1^\eta$, $\frac{\beta}{t}$ está em um subconjunto compacto de $\rho(-B_0)$. Logo, como no Lema 3.7, garantimos a existência de uma função $\tilde{v} : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\tilde{v}(\varepsilon) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, com

$$\sup_{h \in K} \left\| \left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \tilde{v}(\varepsilon), \quad \text{para } t \geq \delta \text{ e } \beta \in \Gamma_1^\eta.$$

Interpolando as duas últimas expressões (com $1 - 2\theta$ e 2θ , respectivamente), obtemos

$$\sup_{h \in K} \left\| \left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{M_5^{1-2\theta}}{|\beta|^{(\frac{1+s}{2})-\theta}} t^{(\frac{1+s}{2})-\theta} \tilde{v}(\varepsilon)^{2\theta}.$$

Logo, existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{h \in K} \left\| 2\pi t^{\theta - (\frac{1+s}{2})} \int_{\Gamma_1^\eta} e^\beta \left[\left(\frac{\beta}{t} + B_\varepsilon \right)^{-1} h - \left(\frac{\beta}{t} + B_0 \right)^{-1} h \right] d\beta \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{\Gamma_1^\eta} |e^\beta| \frac{M_6}{|\beta|^{(\frac{1+s}{2})-\theta}} \tilde{v}(\varepsilon)^{2\theta} d|\beta| \\ &< \frac{\eta}{2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\sup_{h \in K} \|e^{-B_\varepsilon t} h - e^{-B_0 t} h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\eta}{4\pi} t^{-\theta - (\frac{1+s}{2})} + \frac{\eta}{4\pi} t^{-\theta - (\frac{1+s}{2})}, \quad \text{para } t \geq \delta.$$

Portanto, existe uma função $v : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $v(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, satisfazendo

$$\sup_{h \in K} \|e^{-A_\varepsilon t} h - e^{-A_0 t} h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq v(\varepsilon) e^{-\omega t} t^{-(\frac{1+s}{2})-\theta}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

□

De forma inteiramente análoga, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.11. *Sejam K um subconjunto compacto de $X_0^{\frac{1}{2}}$ e $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Então existe uma função $\tilde{v} : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\tilde{v}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, de tal forma que*

$$\sup_{u \in K} \|e^{-A_\varepsilon t} u - e^{-A_0 t} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \tilde{v}(\varepsilon) e^{-\omega t} t^{-\theta - \frac{1}{2}}, \quad \text{para todo } t > 0.$$

◇

Continuidade dos atratores

Neste capítulo estudamos a continuidade da família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : 0 \in (0, \varepsilon_0]\}$ para (2.6) e $\mathcal{A}_0$ para (2.8) quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Na Seção 4.1 examinamos a continuidade dos semigrupos não-lineares, que é uma consequência da continuidade dos resolventes e de um teorema de aproximação do tipo Trotter-Kato obtidos no capítulo anterior, e também da Fórmula da Variação das Constantes. Destes resultados segue a semicontinuidade superior dos atratores contida na Seção 4.2.

A demonstração da semicontinuidade inferior da família de atratores requer hipóteses e resultados adicionais, além dos já obtidos nos capítulos precedentes. Mais precisamente, assumiremos na Seção 4.3.1 que todos as soluções de equilíbrio de (2.8) são hiperbólicas. Em seguida, provamos a continuidade dos conjuntos de equilíbrio. Na Seção 4.4 provamos que as variedades instáveis de u_j , para $j = 1, \dots, n_0$ são contínuas em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, utilizando a convergência do semigrupos linearizados. Concluimos, na última seção, a semicontinuidade inferior e, portanto, a continuidade da família de atratores.

Antes de prosseguirmos, voltemos por um momento à questão da existência de atratores para os semigrupos associados ao problema (2.6). Notemos que o problema (2.5) é o problema limite para

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + (\lambda + C_0)u^\varepsilon = \mu u^\varepsilon & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \vec{n}} + B_0 u^\varepsilon = 0 & \text{em } \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

Do Teorema 3.2 e da hipótese $(\mathbf{D}_0)$, segue que o primeiro autovalor do problema (4.1) também é positivo, para ε suficientemente pequeno. Disto segue que a seguinte condição de dissipatividade $(\mathbf{D}_\varepsilon)$ está satisfeita:

$(\mathbf{D}_\varepsilon)$ Assumamos que a condição $(\mathbf{S})$ e a condição de dissipatividade $(\mathbf{D}_0)$ estejam satisfeitas e sejam C_0 e B_0 as constantes de $(\mathbf{S})$. Então existe $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ de tal maneira que o primeiro autovalor, μ_1^ε , do problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p_\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon) + (\lambda + C_0)u^\varepsilon = \mu u & \text{em } \Omega \\ p_\varepsilon(x)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{n}} + B_0 u^\varepsilon = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

é positivo, para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Com isto, segue do Teorema 2.5 que os semigrupos gerados por (2.6) têm atratores globais $\mathcal{A}_\varepsilon$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$. Além disso, temos o seguinte resultado

Teorema 4.1. Os atratores globais $\mathcal{A}_\varepsilon \subset X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ para os semigrupos $\{T_\varepsilon(t) : t \geq 0\}$, $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, associados aos problemas (2.6) e (2.8) satisfazem

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \sup_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$$

e

$$\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \sup_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|w\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Demonstração: A existência local de soluções segue de [4]; enquanto a existência dos atratores e limitação uniforme em $L^\infty(\Omega)$ seguem de [3]. Com isto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que as não-linearidades f e g são globalmente Lipschitz e globalmente limitadas. Para obtermos a estimativa remanescente, procedemos de maneira usual, utilizando a Fórmula de Variação das Constantes e (2.11). $\square$

Deste ponto em diante assumimos, sem perda de generalidade, que f e g são globalmente Lipschitz e uniformemente limitadas com derivadas uniformemente limitadas até segunda ordem. Mais precisamente, assumiremos que existem constantes L_f, L_g, C_f e C_g de tal forma que

$$|j(s) - j(t)| \leq L_j |t - s|, \text{ para quaisquer } s, t \in \mathbb{R}, j = f, g,$$

$$|f^{(i)}(s)| \leq C_f, |g^{(i)}(s)| \leq C_g, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2.$$

4.1 Continuidade dos semigrupos não-lineares

Para estudarmos a continuidade dos semigrupos não-lineares, usaremos a seguinte formulação da Desigualdade de Gronwall, de Henry [15]:

Lema 4.2 (Desigualdade de Gronwall generalizada). *Sejam $t < r$, $\phi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função contínua, $a : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $b > 0$ e $0 < \beta \leq 1$. Assumamos que*

$$\phi(t) \leq a(t) + b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds, \quad t \leq r. \quad (4.2)$$

Então

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t),$$

onde

$$B^k a(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^k}{\Gamma(k\beta)} (s-t)^{k\beta-1} a(s) ds.$$

Além disso, se $a(t)$ é constante, com $a(t) \equiv a$, então

$$\phi(t) \leq a E_{\beta}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}})(s-t) \leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)}.$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, $\rho > 0$, então temos

$$\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} [E_{\beta}((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}})(s-t) - 1] \leq \frac{c_0}{b} [e^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)} - 1],$$

e, finalmente, se $\psi : [t, r] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$, $\rho > 0$, então

$$\phi(t) \leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r (s-t)^{\beta-1} e^{\rho s} e^{d(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(s-t)} \psi(s) ds.$$

Demonstração: Se

$$(B\phi)(t) = b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \phi(s) ds,$$

segue de (4.2) que

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq a(t) + (B\phi)(t) \leq a(t) + (Ba)(t) + (B^2\phi)(t) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (B^k a)(t) + (B^n \phi)(t). \end{aligned}$$

Suponhamos, por indução, que

$$(B^{n-1}\phi)(t) = \int_t^r \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (s-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(s) ds.$$

Então

$$\begin{aligned}
 B(B^{n-1}\phi)(t) &= b \int_t^r (s-t)^{\beta-1} \left[\int_t^s \frac{(b\Gamma(\beta))^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} (\theta-t)^{(n-1)\beta-1} \phi(\theta) d\theta \right] ds \\
 &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{\beta-1} (\theta-s)^{(n-1)\beta-1} ds \right] d\theta \\
 &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) \left[\int_0^{\theta-t} u^{\beta-1} (\theta-t-u)^{(n-1)\beta-1} du \right] d\theta.
 \end{aligned}$$

Fazendo $z = \frac{u}{\theta-t}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (B^n \phi)(t) &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^\beta \left[\int_0^1 z^{\beta-1} (\theta-t)^{(n-1)\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz \right] d\theta \\
 &= \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n-1}}{\Gamma((n-1)\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^{n\beta-1} d\theta \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz.
 \end{aligned}$$

Ainda, lembrando que

$$\int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{(n-1)\beta-1} dz = B(\beta, (n-1)\beta) = \frac{\Gamma(\beta) \Gamma((n-1)\beta)}{\Gamma(n\beta)},$$

obtemos

$$(B^n \phi)(t) = \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r \phi(\theta) (\theta-t)^{n\beta-1} d\theta.$$

Estudemos a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\beta)}$. Se $a_n = \Gamma(n\beta)^{-1}$, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Gamma(n\beta)}{\Gamma((n+1)\beta)} = \frac{B(\beta, n\beta)}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{n\beta-1} dt.$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Logo,

$B^n \phi(t) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\phi(t) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (B^k a)(t).$$

Suponhamos agora que $a(t)$ seja constante, com $a(t) \equiv a$. Então

$$\begin{aligned}
 (B^n a)(t) &= \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} (s-t)^{n\beta-1} ds \\
 &= \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{n\beta \Gamma(n\beta)} (r-t)^{n\beta} \\
 &= \frac{ab^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta + 1)} (r-t)^{n\beta},
 \end{aligned}$$

e assim

$$\phi(t) \leq a E_\beta((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)) \leq a c e^{(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}}(r-t)}.$$

Se $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho(s-r)} ds$, com $\alpha = 1 - \beta$, então

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho(\theta-r)} d\theta \right] ds \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_t^\theta u^{n\beta-1} (\theta-t-u)^{-\alpha} ds \right] d\theta. \end{aligned}$$

Fazendo $v = \frac{u}{\theta-t}$ temos

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} \left[\int_0^1 v^{n\beta-1} (\theta-t)^{n\beta-1} (\theta-t)^{1-\alpha} (1-v)^{-1+\beta} dv \right] d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta B(\beta, n\beta) \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho(\theta-r)} (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\ &\leq c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) \leq c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_0^{r-t} s^{(n+1)\beta-1} ds = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta + 1)} (r-t)^{(n+1)\beta}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) \leq \frac{c_0}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{\Gamma((n+1)\beta + 1)} (r-t)^{(n+1)\beta} = \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\beta)^{\frac{1}{\beta}}(r-t)) - 1].$$

Segue que $\phi(t) \leq \frac{c_0}{b} [E_\beta(b^{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\beta)^{\frac{1}{\beta}}(r-t)) - 1] \leq \frac{c_0}{b} [e^{b^{\frac{1}{\beta}} \Gamma(\beta)^{\frac{1}{\beta}}(r-t)} - 1]$.

Por fim, suponhamos que $a(t) = c_0 \int_t^r (s-t)^{-\alpha} e^{\rho s} \psi(s) ds$. Então

$$\begin{aligned} (B^n a)(t) &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} (s-t)^{n\beta-1} \left[\int_s^r (\theta-s)^{-\alpha} e^{\rho\theta} \psi(\theta) d\theta \right] ds \\ &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) \left[\int_t^\theta (s-t)^{n\beta-1} (\theta-s)^{-\alpha} ds \right] d\theta \\ &= c_0 \int_t^r \frac{b^n \Gamma(\beta)^n}{\Gamma(n\beta)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} B(\beta, n\beta) d\theta \\ &= c_0 \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} \int_t^r e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(t) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (B^n a)(t) = c_0 \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{(n+1)\beta-1} d\theta \\
&= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n \Gamma(\beta)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\beta)} (\theta-t)^{n\beta} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
&= c_0 \Gamma(\beta) \int_t^r \tilde{E}_\beta((b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}} (\theta-t)) e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta \\
&\leq c_0 c' \Gamma(\beta) \int_t^r e^{d(b\Gamma(\beta))^{\frac{1}{\beta}} (\theta-t)} e^{\rho\theta} \psi(\theta) (\theta-t)^{\beta-1} d\theta.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.3. *Suponhamos que $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ e $u^\varepsilon \rightarrow u$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Então existe uma função $\bar{v} : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\bar{v}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ que satisfaz*

$$\|T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) - T_0(t, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \bar{v}(\varepsilon), \quad t \in (0, \tau).$$

Demonstração. Os semigrupos não-lineares $T_\varepsilon(t, u^\varepsilon)$ são dados pela Fórmula da Variação das Constantes,

$$T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) = e^{-A_\varepsilon t} u^\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_\varepsilon(r, u^\varepsilon)) dr, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) - T_0(t, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t} u^\varepsilon - e^{-A_0 t} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_\varepsilon(r, u^\varepsilon)) - e^{-A_0(t-r)} h(T_0(r, u))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr.
\end{aligned}$$

A partir da continuidade dos semigrupos lineares obtida na seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\|e^{-A_\varepsilon t} u^\varepsilon - e^{-A_0 t} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|e^{-A_\varepsilon t} u^\varepsilon - e^{-A_\varepsilon t} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|e^{-A_\varepsilon t} u - e^{-A_0 t} u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\
&\leq \|e^{-A_\varepsilon t} (u^\varepsilon - u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + o(1) \\
&\leq M_\omega e^{-\omega t} \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + o(1).
\end{aligned}$$

De maneira natural podemos estender $h(T_0(t, u)) : X_0^{\frac{s}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$ a $h(T_0(t, u)) : X_\varepsilon^{\frac{s}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$; ou seja, podemos escrever $h(T_0(t, u)) \in X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$. Temos então que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_\varepsilon(r, u^\varepsilon)) - e^{-A_0(t-r)} h(T_0(r, u))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr &\leq \\
&\leq \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_\varepsilon(r, u^\varepsilon)) - e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_0(r, u))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr \\
&\quad + \int_0^t \|e^{-A_\varepsilon(t-r)} h(T_0(r, u)) - e^{-A_0(t-r)} h(T_0(r, u))\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr.
\end{aligned}$$

Para $r \in [0, t]$, temos que $h(T_0(r, u))$ está em um subconjunto compacto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$, de modo que podemos afirmar que a integral $\int_0^t \left\| [e^{-A_\varepsilon(t-r)} - e^{-A_0(t-r)}] h(T_0(r, u)) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr$ é $o(1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Além disso, se L_h é a constante de Lipschitz de h , então

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\| e^{-A_\varepsilon(t-r)} [h(T_\varepsilon(r, u^\varepsilon)) - h(T_0(r, u))] \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr &\leq \\ &\leq \int_0^t M_\omega (t-r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\omega(t-r)} L_h \|T_\varepsilon(r, u^\varepsilon) - T_0(r, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr \\ &= M_\omega L_h \int_0^t (t-r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\omega(t-r)} \|T_\varepsilon(r, u^\varepsilon) - T_0(r, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{\omega t} \|T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) - T_0(t, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M_\omega \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + o(1) e^{\omega t} \\ &\quad + M_\omega L_h \int_0^t (t-r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{\omega r} \|T_\varepsilon(r, u^\varepsilon) - T_0(r, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Observemos agora que os dois primeiros termos do lado direito da desigualdade acima podem ser majorados por $\tilde{M}v(\varepsilon)$, $\tilde{M} = \tilde{M}(\tau)$, quando $t \in (0, \tau)$ e $v(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Deste modo, se $\varphi(t) = e^{\omega t} \|T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) - T_0(t, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\varphi(t) \leq \tilde{M}v(\varepsilon) + M_\omega L_h \int_0^t (t-r)^{-(\frac{1+s}{2})} \varphi(r) dr \quad \text{em } (0, \tau), \tau < \infty.$$

Do Lema 4.2 segue então que

$$\varphi(t) \leq 2\tilde{M}v(\varepsilon) C,$$

com $C = C(M_\omega, L, \tau)$ constante.

Portanto, existe uma função $\bar{v} : (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^+$, com $\bar{v}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ satisfazendo

$$\|T_\varepsilon(t, u^\varepsilon) - T_0(t, u)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \bar{v}(\varepsilon), \quad t \in (0, \tau).$$

□

4.2 Semicontinuidade superior dos atratores

Estamos agora aptos a provar o seguinte resultado:

Teorema 4.4. *A família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]\}$ é semicontínua superiormente em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Consideremos seqüências $\{u_n\}$, $u_n \in \mathcal{A}_{\varepsilon_n}$, $n \in \mathbb{N}$, e $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Como, do Teorema 4.1, $\sup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \sup_{w \in \mathcal{A}_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \infty$, $\bigcup_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]} \mathcal{A}_\varepsilon$ é compacto em X , existe $u \in X$ tal que $u_n \rightarrow u$ fortemente em X e $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ -fracamente. Também temos que

$$\int_{\Omega} p_{\varepsilon_n}(x) |\nabla u_n^2| dx \leq C_1, \text{ para alguma constante } C_1 > 0.$$

Logo, procedendo como no Teorema 3.1, concluímos que $u \in X_0^{\frac{1}{2}}$. Resta-nos mostrar que $u \in \mathcal{A}_0$. Para tanto, é suficiente provarmos que existe uma órbita completa limitada por u . Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos uma órbita completa limitada

$$\begin{aligned} \varphi_n : \mathbb{R} &\rightarrow X_{\varepsilon_n}^{\frac{1}{2}} \\ t &\mapsto \varphi_n(t, u_n) \end{aligned}$$

por u_n . Para $t \geq 0$, segue da continuidade dos semigrupos não-lineares que

$$\varphi_n(t, u_n) = T_{\varepsilon_n}(t, u_n) \rightarrow T_0(t, u).$$

Para $t < 0$, construímos a órbita por u do seguinte modo: para $t \in (-k, -k+1]$, $k \in \mathbb{Z}^+$, consideramos a seqüência $\{\varphi_n(-k, u_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\bigcup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]} \mathcal{A}_\varepsilon$. Seguindo o raciocínio que anteriormente foi usado para a seqüência $\{u_n\}$, obtemos que $\varphi_n(-k, u_n) \rightarrow \psi_0(-k, u)$. Portanto,

$$\varphi_n(t, u_n) = \varphi_n(t+k, \varphi_n(-k, u_n)) = T_{\varepsilon_n}(t+k, \varphi_n(-k, u_n)) \rightarrow T_0(t+k, \varphi_0(-k, u)) := \tilde{\varphi}_0(t, u).$$

Finalmente, definindo

$$\varphi_0(t, u) = \begin{cases} T_0(t, u), & \text{para } t \geq 0; \\ \tilde{\varphi}_0(t, u), & \text{para } t < 0, \end{cases}$$

segue que $\varphi_0(t, u)$ é uma órbita completa limitada por u . Portanto, $u \in \mathcal{A}_0$. □

4.3 Continuidade dos conjuntos de equilíbrio

As *soluções de equilíbrio* de (2.6) e (2.8) são aquelas que independem do tempo, ou seja, as soluções de equilíbrio de (2.6), $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, são as soluções da equação elíptica

$$A_\varepsilon u - h(u) = 0, \tag{E_\varepsilon}$$

e as soluções de

$$A_0 u - h(u) = 0 \quad (E_0)$$

são as soluções de equilíbrio do problema limite (2.8).

Definimos $\mathcal{E}_\varepsilon = \{u : A_\varepsilon u - h(u) = 0\}$ e denotamos a variedade instável de $u_*^\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon$ por $W^u(u_*^\varepsilon)$, ou seja,

$$W^u(u_*^\varepsilon) = \{\eta \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : u(t, \eta) \text{ está definido para todo } t \leq 0 \text{ e } u(t, \eta) \rightarrow u_*^\varepsilon \text{ quando } t \rightarrow -\infty\},$$

para $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Antes de darmos mais detalhes de sobre como construir $W^u(u_*)$ ao menos em uma vizinhança de u_* , vamos olhar por um momento para um problema linear. Considerando a mudança de variáveis $v = u - u_0^*$ no problema (2.8), somando e subtraindo $h'(u_*)v$ ao lado direito, obtemos

$$\begin{cases} \dot{v} + \bar{A}_0 v = h(v + u_*) - h(u_*) - h'(u_*)v \\ v(0) = u_0 - u_* = v_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\bar{A}_0 = (A_0 - h'(u_*))$. Nesta equação, para v muito pequeno, a parte não-linear é muito pequena. É natural então considerarmos o que acontece quando desprezamos a não-linearidade, ou seja, o que acontece com a equação

$$\begin{cases} \dot{v} + \bar{A}_0 v = 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Se Q_0^+ é a projeção definida pelo espectro de $\bar{A}_0$ do lado direito do eixo imaginário, segue que para $v_0 \in Q_0 X_0^{\frac{1}{2}}$, a solução $v(t, v_0)$ de (4.4) existe para todo $t \leq 0$ e $v(t, v_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $v + u_* \rightarrow u_*$ quando $t \rightarrow -\infty$. Este fato serve como inspiração para o que queremos fazer. Quando perturbamos (4.4) com uma não-linearidade muito pequena, devemos observar soluções de (4.3) que existem para todo $t \leq 0$. Naturalmente, o dado inicial para o qual tais soluções existem não estará em $Q_0^+ X_0^{\frac{1}{2}}$, mas em uma variedade não-linear próxima.

4.3.1 Linearização em torno de um ponto de equilíbrio

Reservamos esta seção para os resultados concernentes à existência e à convergência das soluções de (E_ε) e (E_0) .

Seja u_* uma solução de (E_ε) , e consideremos a mudança de variáveis $v = u - u_*$ no problema (2.8). Então, ao adicionarmos e subtrairmos o termo $h'(u_*)v$, obtemos

$$\begin{cases} \dot{v} + \bar{A}_0 v = h(v + u_*) - h(u_*) - h'(u_*)v \\ v(0) = u - u_* = v_0, \end{cases}$$

onde $\bar{A}_0 := A_0 - h'(u_*)$.

Dizemos que uma solução u_* de (E_0) é *hiperbólica* se $\sigma(A_0 - h'(u_*))$ é disjunto do eixo imaginário.

Assumiremos daqui em diante a seguinte condição de hiperbolicidade:

(H) $\sigma(A_0 - h'(u_*)) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu = 0\} = \emptyset$.

Teorema 4.5 (Teorema de Schauder). *Sejam E um espaço vetorial normado e $B \subset E$ compacto e convexo. Então toda função contínua $T : B \rightarrow B$ possui um ponto fixo.*

A proposição seguinte garante que $\mathcal{E}_0 = \{u : A_0 u - h(u) = 0\}$ tem cardinalidade finita.

Proposição 4.6. *Se $\mathcal{E}_0 = \{u : A_0 u - h(u) = 0\}$ tem apenas pontos isolados, então $\mathcal{E}_0$ tem cardinalidade finita. Todo ponto de equilíbrio hiperbólico u_* de (2.7) é isolado.*

Demonstração. Observemos primeiramente que a não-linearidade $h : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_0^{-\frac{s}{2}}$ é uniformemente limitada:

$$\begin{aligned}
\|h(u)\|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} &= \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} |\langle h(u), \phi \rangle|_{-s,s} = \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \langle f(u), \phi \rangle_{\Omega} + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \langle g(\gamma(u)), \gamma(\phi) \rangle_{\Gamma} \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \int_{\Omega} f(u(x)) \phi(x) dx + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \int_{\Gamma} g(\gamma(u(x))) \gamma(\phi(x)) dx \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_{\Omega} f(u(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \phi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_{\Gamma} g(\gamma(u(x)))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma} \gamma(\phi(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_f \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} + C_g \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|\gamma(\phi)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C_1 C_f \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|\phi\|_{X_0^{\frac{s}{2}}} + C_2 C_g \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{s}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|\phi\|_{X_0^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq C_h,
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de imersão e $C_h = C_1 C_f + C_2 C_g$. Logo, a aplicação

$$X_0^{\frac{1}{2}} \ni u \mapsto A_0^{-1} h(u) \in X_0^{1-\frac{s}{2}} \subset\subset X_0^{\frac{1}{2}}$$

é compacta de $X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X_0^{\frac{1}{2}}$ e, além disso, se C_3 é a constante de imersão de $X_0^{1-\frac{s}{2}}$ em $X_0^{\frac{1}{2}}$, então esta aplicação leva $X_0^{\frac{1}{2}}$ na bola $B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(0, C_3 C_h)$, pois

$$\begin{aligned} \|A_0^{-1}h(u)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} &\leq C_3 \|A_0^{-1}h(u)\|_{X^{1-\frac{s}{2}}} = C_3 \|A_0^{1-\frac{s}{2}}A_0^{-1}h(u)\|_{X_0} \\ &= C_3 \|A_0^{-\frac{s}{2}}h(u)\|_{X_0} = C_3 \|h(u)\|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} \leq C_3 C_h. \end{aligned}$$

Segue portanto do Teorema de Schauder que (E_0) tem ao menos uma solução.

Já que A_0 tem resolvente compacto, segue que o conjunto $\mathcal{E}_0 = \{u : A_0 u - h(u) = 0\}$ é compacto em $X_0^{\frac{1}{2}}$. Se mostrarmos que toda solução de (E_0) é isolada, então estará provado que existe apenas um número finito delas. Para tanto, notemos que $u \in \mathcal{E}_0$ é uma solução de (E_0) se, e somente se, u é ponto fixo de

$$\Phi(u) = -(A_0 - h'(u_*))^{-1}(h'(u_*)u - h(u)).$$

Vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\Phi : \overline{B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta)} \rightarrow \overline{B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta)}$ é uma contração. Neste caso, u_* será o único elemento de $\mathcal{E}_0$ em $B = \overline{B_{X_0^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta)}$ e, portanto, isolado. Para ver isto, observemos que se $u, v \in B$, então

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} &= \|(A_0 - h'(u_*))^{-1}[h(u) - h(v) - h'(u_*)(u - v)]\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left\| A_0^{-\frac{s}{2}} A_0^{\frac{s}{2}} A_0^{\frac{1}{2}} (A_0 - h'(u_*))^{-1} [h(u) - h(v) - h'(u_*)(u - v)] \right\|_{X_0} \\ &= \left\| A_0^{\frac{1+s}{2}} (A_0 - h'(u_*))^{-1} [h(u) - h(v) - h'(u_*)(u - v)] \right\|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} \\ &= \left\| A_0^{-\left(\frac{1-s}{2}\right)} A_0 (A_0 - h'(u_*))^{-1} [h(u) - h(v) - h'(u_*)(u - v)] \right\|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} \quad (4.5) \\ &\leq C_4 \|h(u) - h(v) - h'(u_*)(u - v)\|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} \\ &\leq C_4 \| [h'(\theta u + (1 - \theta)v) - h'(u_*)](u - v) \|_{X_0^{-\frac{s}{2}}} \\ &\leq C_5 \|(\theta u + (1 - \theta)v) - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \|u - v\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq 2C_5 \delta \|u - v\|_{X_0^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo δ tal que $2C_5 \delta < \frac{1}{2}$, obtemos que Φ é uma contração. Notemos ainda que se $v \in B$, então $\|\Phi(v) - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} = \|\Phi(v) - \Phi(u_*)\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \leq \|v - u_*\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} < \delta$, o que mostra que $\Phi(B) \subset B$, ou seja, Φ tem um único ponto fixo em B e o resultado está demonstrado. $\square$

A semicontinuidade superior da família dos conjuntos de equilíbrio $\{\mathcal{E}_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é uma consequência imediata da convergência compacta:

Proposição 4.7. *Suponhamos que exista uma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ tal que (E_ε) tenha uma solução u_{ε_n} , para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, tomando subsequências se necessário, existe uma solução u_* de (E_0) de forma que $\|u_{\varepsilon_n} - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Como $0 \in \rho(A_{\varepsilon_n})$, temos

$$u_{\varepsilon_n} = A_{\varepsilon_n}^{-1} h(u_{\varepsilon_n}).$$

Temos que a família $\{A_{\varepsilon_n}^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$ é coletivamente compacta e também que $|h(u_{\varepsilon_n})| \leq C_h$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim existem uma subsequência que denotaremos também por u_{ε_n} , e u_* tais que $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_*$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Da continuidade do operador resolvente e da continuidade da função h segue que $u_* = A_0^{-1} h(u_*)$, de modo que u_* é solução de (E_0) . $\square$

Uma *medida de não-compactidade* β em um espaço métrico completo Y é uma função $\beta : 2^Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\beta(A) = 0$ se, e somente se, A é pré-compacto.
- (ii) $\beta(A \cup B) = \max\{\beta(A), \beta(B)\}$.
- (iii) $\beta(A + B) \leq \beta(A) + \beta(B)$.

Lema 4.8. *Para todo $0 < \theta < 1$, a seqüência $\{A_\varepsilon^{-\theta}\}$ é coletivamente compacta e $A_\varepsilon^{-\theta} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A_0^{-\theta}$ em X .*

Demonstração. Sejam $\Sigma_{-\lambda, \phi}$ como na condição de estabilidade (E) e Γ a fronteira de $\Sigma_{-\lambda, \phi}$. Como

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu,$$

segue que a integral acima é absolutamente uniformemente convergente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]$. Logo, dado $\eta > 0$, podemos dividir o contorno $\Gamma = \Gamma_1^\eta \cup \Gamma_2^\eta$ de tal maneira que Γ_1^η seja limitada e a integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\eta} \left\| \mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} d\mu \leq \eta, \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda].$$

Sobre Γ_1^η , reescrevemos a integral como

$$B_\varepsilon := \frac{A_\varepsilon^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^\eta} \mu^{-\theta} A_\varepsilon (\mu + A_\varepsilon)^{-1} d\mu,$$

e usamos que $\|\mu^{-\theta} A_\varepsilon (\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_X = \|\mu^{-\theta} (I + \mu A_\varepsilon^{-1})^{-1}\|_X$ é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]$ e também que $\{A_\varepsilon^{-1} : \varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]\}$ é coletivamente compacto para garantir que $\{B_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]\}$ é coletivamente compacto. Seja $\beta : 2^X \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma medida de não-compacidade. Agora, tomando quaisquer seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}$, $u_n \in X$, $\|u_n\|_X = 1$, obtemos

$$\beta\left(\left\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\right\}\right) \leq \beta(B_{\varepsilon_n}\{u_n\}) + \beta\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^\eta} \mu^{-\theta} (\mu + A_{\varepsilon_n})^{-1} d\mu \{u_n\}\right) \leq \eta.$$

Logo, dadas seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{u_n\}$, com $u_n \in X$, $\|u_n\|_X = 1$, temos que $\beta(\{A_{\varepsilon_n}^{-\theta} u_n\}) = 0$ e que $\{A_\varepsilon^{-\theta} : \varepsilon \in (0, \varepsilon_\lambda]\}$ é coletivamente compacta.

Do Teorema da Convergência Dominada e do Lema 3.5, temos

$$A_\varepsilon^{-\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\| -\mu^{-\theta} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} d\mu \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left\| \mu^{-\theta} (\mu + A_0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} d\mu = A_0^{-\theta},$$

para todo $\mu \in \Gamma$. □

Pretendemos agora mostrar a convergência compacta $\bar{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{A}_0$. Para tanto, devemos estudar a família de operadores $\{h'(u_\varepsilon^*) : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$. Prosseguimos então com o seguinte resultado:

Lema 4.9. *Seja $\{u^\varepsilon\}$ uma seqüência tal que $u^\varepsilon \rightarrow u \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, e consideremos a família de operadores*

$$\begin{aligned} D_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} &\rightarrow X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}} \\ v &\mapsto D_\varepsilon v = h'(u^\varepsilon)v = f'_\Omega(u^\varepsilon)v + g'_\Omega(u^\varepsilon)v \end{aligned} \tag{4.6}$$

e também o operador

$$\begin{aligned} D_0 : X_0^{\frac{1}{2}} &\rightarrow X_0^{-\frac{s}{2}} \\ v &\mapsto D_0 v = h'(u)v = f'_\Omega(u)v + g'_\Gamma(u)v. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Então, se $\{z_\varepsilon\}$ é uma seqüência tal que $z_\varepsilon \rightarrow z \in X_0^{\frac{1}{2}}$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, temos que $D_\varepsilon z_\varepsilon \rightarrow D_0 z$ em $X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|h'(u^\varepsilon)z - h'(u)z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \|f'_\Omega(u^\varepsilon)z - f'_\Omega(u)z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} + \|g'_\Gamma(\gamma(u^\varepsilon))\gamma(z) - g'_\Gamma(\gamma(u))\gamma(z)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left| \langle f'(u^\varepsilon)z - f'(u)z, \phi \rangle_\Omega \right| \\
&\quad + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left| \langle g'(\gamma(u^\varepsilon))\gamma(z) - g'(\gamma(u))\gamma(z), \gamma(\phi) \rangle_\Gamma \right| \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \int_\Omega |f'(u^\varepsilon(x)) - f'(u(x))| z(x) \phi(x) \, dx \\
&\quad + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \int_\Gamma |g'(\gamma(u^\varepsilon(x))) - g'(\gamma(u(x)))| \gamma(z(x)) \gamma(\phi(x)) \, dx \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Omega |f'(u^\varepsilon(x))z(x) - f'(u(x))z(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\phi(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Gamma |g'(\gamma(u^\varepsilon(x)))\gamma(z(x)) - g'(\gamma(u(x)))\gamma(z(x))|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \left(\int_\Gamma |\gamma(\phi(x))|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Omega |f''(\theta(x)u^\varepsilon(x) - (1-\theta(x))u(x))|^2 |u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 |z(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Gamma |g''(\gamma(\theta(x)u^\varepsilon(x) - (1-\theta(x))u(x)))|^2 |\gamma(u^\varepsilon(x) - u(x))|^2 \right. \\
&\quad \left. |\gamma(z(x))|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\gamma(\phi)\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C_1 C_f \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Omega |u^\varepsilon(x) - u(x)|^2 |z(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + C_2 C_g \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \left(\int_\Gamma |\gamma(u^\varepsilon(x) - u(x))|^2 |\gamma(z(x))|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\gamma(\phi)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|h'(u^\varepsilon)z - h'(u)z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq C_3 \|(u^\varepsilon - u)^2\|_{L^2(\Omega)} \|z^2\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C_4 \sup_{\substack{\phi \in X_0^{\frac{1}{2}} \\ \|\phi\| \leq 1}} \|(\gamma(u^\varepsilon - u))^2\|_{L^2(\Gamma)} \|(\gamma(z))^2\|_{L^2(\Gamma)} \|\phi\|_{H^s(\Omega)} \\
&\leq C_3 \|u^\varepsilon - u\|_{L^4(\Omega)} \|z\|_{L^4(\Omega)} + C_5 \|(\gamma(u^\varepsilon - u))^2\|_{L^2(\Gamma)} \|(\gamma(z))^2\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq C_6 \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|z\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} + C_7 \|(\gamma(u^\varepsilon - u))^2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|(\gamma(z))^2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\
&\leq C_6 \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|z\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} + C_8 \|(u^\varepsilon - u)^2\|_{X_\varepsilon^{\frac{s}{2}}} \|z^2\|_{X_0^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq C_6 \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|z\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} + C_9 \|u^\varepsilon - u\|_X \|z\|_X \\
&\leq C_{10} \|u^\varepsilon - u\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|z\|_{X_0^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|D_\varepsilon z_\varepsilon - D_0 z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \|h'(u^\varepsilon)z_\varepsilon - h'(u^\varepsilon)z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} + \|h'(u^\varepsilon)z - h'(u)z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \\
&\leq \|h'(u^\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}})} \|z_\varepsilon - z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + o(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.10. Para todo $0 \leq \theta < 1$, existe um $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$ de tal modo que

$$\left\{ (A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - D_\varepsilon)^{-1} : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_\mu \right\}$$

é coletivamente compacto, uniformemente limitado e $(A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - D_\varepsilon)^{-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (A_0)^\theta (A_0 - D_0)^{-1}$ compactamente.

Demonstração. Sejam $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ fixado, r_1 e r_2 tais que $1 > \alpha + r_1 \geq \theta$ e $r_2 = 1 - \alpha - r_1$.

Notemos que

$$(A_\varepsilon)^\theta (A_\varepsilon - D_\varepsilon)^{-1} = (A_\varepsilon)^{-(\alpha+r_1-\theta)} (I - (A_\varepsilon)^{-r_2} D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\alpha-r_1})^{-1} (A_\varepsilon)^{-r_2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon^{-(\alpha+r_1-\theta)} [I - A_\varepsilon^{-r_2} D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}]^{-1} A_\varepsilon^{-r_2} &= A_\varepsilon^\theta A_\varepsilon^{-\alpha-r_1} [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1})]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\theta [A_\varepsilon^{r_2} (I - A_\varepsilon^{-r_2} D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}) A_\varepsilon^{\alpha+r_1}]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\theta [(A_\varepsilon^{r_2} - D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1}) A_\varepsilon^{\alpha+r_1}]^{-1} \\
&= A_\varepsilon^\theta (A_\varepsilon - D_\varepsilon)^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $\alpha + r_1 < 1$ e $r_2 < 1$, segue do Lema 4.8 que $\{(A_\varepsilon)^{-r_2} D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\alpha-r_1}\}$ é coletivamente compacto. Logo, pelo Lema 3.4, $(I - A_\varepsilon^{-r_2} D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1})^{-1}$ é uniformemente limitado, pois $(A_\varepsilon^{-r_2} D_\varepsilon A_\varepsilon^{-\alpha-r_1})^{-1} \rightarrow (A_0^{-r_2} D_0 A_0^{-\alpha-r_1})$ compactamente. Por fim, sendo $\alpha + r_1 - \theta < 1$, o resultado segue. $\square$

Reunimos a seguir os resultados referentes aos operadores $\bar{A}_\varepsilon$ e $\bar{A}_0$ dos problemas linearizados obtidos anteriormente.

Lema 4.11. *Existem um setor $\Sigma_{\omega, \varphi}$, $\varphi < \frac{\pi}{2}$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, uma constante $\bar{\varepsilon}$ e uma constante $\bar{M}$ de tal modo que*

$$\|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{\bar{M}}{|\mu - \omega|}, \quad (4.8)$$

para todo $\mu \in \Sigma_{\omega, \varphi}$ e para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$.

Demonstração. Segue da hipótese (E) e da Desigualdade do Momento que, para $\mu \in \Sigma_{0, \phi} \subset \rho(-A_\varepsilon)$,

$$\left\| A_\varepsilon^{\frac{1}{2}} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1 \frac{M^{\frac{1}{2}}}{|\mu|^{\frac{1}{2}}}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Temos que $D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ é uniformemente limitado em ε e

$$(\mu + A_\varepsilon - D_\varepsilon) = [I - D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mu + A_\varepsilon)^{-1}] (\mu + A_\varepsilon).$$

Seja $R > 0$ de tal maneira que $\left\| D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mu + A_\varepsilon)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{2}$ para $|\mu| > R$ e $\mu \in \Sigma_{0, \phi}$. Então o operador $(I - D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mu + A_\varepsilon)^{-1})$ é invertível e

$$\left\| [I - D_\varepsilon (A_\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} (A_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (\mu + A_\varepsilon)^{-1}]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2.$$

Logo, se $\omega > R$ e φ é escolhido de forma que $\Sigma_{\omega, \varphi} \subset \{\mu \in \Sigma_{0, \phi} : |\mu| > R\}$, temos

$$\begin{aligned} \|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq 2 \|(\mu + A_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq 2 \frac{M_E}{|\mu + \lambda|} \leq \frac{\bar{M}}{|\mu - \omega|}. \end{aligned}$$

$\square$

Notemos que, do Lema 4.10, $\bar{A}_\varepsilon^{-1}$ converge compactamente para $\bar{A}_0^{-1}$. Assim, procedendo da mesma forma como no Lema 3.7, obtemos o seguinte resultado:

Lema 4.12. *de $\rho(-\bar{A}_0)$. Então existe uma constante $\varepsilon_K > 0$ de tal forma que $K \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]$ e*

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \sup_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_K]} \sup_{\mu \in K} \|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^\alpha)} < \infty. \quad (4.9)$$

Se $f_\Omega \in L^2(\Omega)$, $g_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ e $h = f_\Omega + g_\Gamma \in X_0^{-\frac{s}{2}}$ é definida por

$$\langle h, \phi \rangle_{-s,s} = \int_\Omega f_\Omega \phi + \int_\Gamma g_\Gamma \phi, \quad \forall \phi \in X_0^{\frac{s}{2}}, \quad (4.10)$$

então estendemos h a $X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}$ de maneira natural, e obtemos

$$\sup_{\mu \in K} \|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + \bar{A}_0)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.11)$$

Além disso, se J é um subconjunto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$ constituído por elementos da forma $f_\Omega + g_\Gamma$, com f_Ω (g_Γ) variando em um subconjunto limitado de $L^2(\Omega)$ ($L^2(\Gamma)$), temos

$$\sup_{\substack{\mu \in K \\ h \in J}} \|(\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1}h - (\mu + \bar{A}_0)^{-1}h\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (4.12)$$

◇

A cada ponto isolado $\mu \in \sigma(-\bar{A}_0)$, associamos seu auto-espaço generalizado

$$W(\mu, -\bar{A}_0) = Q_0(\mu)X,$$

onde

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\mu|=\delta} (z + \bar{A}_0)^{-1} dz$$

e δ é escolhido de modo que não exista nenhum ponto de $\sigma(-\bar{A}_0)$ no disco $\{z \in \mathbb{C} : |z-\mu| \leq \delta\}$.

Denotamos por $W(\mu, -\bar{A}_\varepsilon) = Q_\varepsilon(\mu)X$, onde

$$Q_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\mu|=\delta} (z + \bar{A}_\varepsilon)^{-1} dz.$$

Como nos Teoremas 3.6 e 3.9, nosso próximo resultado garante que o espectro de $-\bar{A}_\varepsilon$, para ε pequeno, se aproxima do espectro de $-\bar{A}_0$.

Como A_ε é setorial, tem resolvente compacto e $h'(u_*^\varepsilon) \in \mathcal{L}(X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}, X_0^{-\frac{s}{2}})$, então o operador $\bar{A}_\varepsilon$ é setorial com resolvente compacto. Desta forma, os espectros de $-\bar{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ consistem apenas de autovalores isolados.

Teorema 4.13. *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *para todo $\mu_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$, existem seqüências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \sigma(-\bar{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, tais que $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$.*
- (ii) *se para alguma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, e alguma seqüência $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \sigma(-\bar{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, temos $\mu_n \rightarrow \mu_0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $\mu_0 \in \sigma(-\bar{A}_0)$.*
- (iii) *existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\dim W(\mu, -\bar{A}_\varepsilon) = \dim W(\mu, -\bar{A}_0)$, para todo $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.*
- (iv) *para todo $u \in W(\mu_0, -\bar{A}_0)$, existe uma seqüência $\{u_\varepsilon\}$, $u_\varepsilon \in W(\mu_0, -\bar{A}_\varepsilon)$, tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$.*
- (v) *toda seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{u_n\}$, $u_n \in W(\mu, -\bar{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, com $\|u_n\|_X = 1$ tem uma subseqüência convergente e todo ponto limite desta seqüência está em $W(\mu_0, -\bar{A}_0)$.*

◇

Proposição 4.14. *Suponhamos que o problema (E_0) tenha uma solução u_* e que $0 \notin \sigma(A_0 - h'(u_*))$. Então existem $\bar{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ tais que o problema (E_ε) possui exatamente uma solução, u_ε^* , em $\{w^\varepsilon \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|w^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \delta\}$, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Além disso, $\|u_\varepsilon^* - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que em uma vizinhança da solução u_* de (E_0) existe uma única solução u_ε^* de (E_ε) . Considerando a seqüência constante $u_\varepsilon = u^*$, podemos usar o Lema 4.10 com $\theta = \frac{1}{2}$, para garantir a existência de uma constante $C_1 > 0$ de tal maneira que

$$\|(A_\varepsilon - h'(u_*))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} \leq C_1, \quad \text{para } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Temos ainda que $|h''(u)| \leq C_h$, para todo $u \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Observemos agora que mostrar que u^ε é solução de (E_ε) é equivalente a mostrar que u^ε é ponto fixo da aplicação

$$\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon) = -(A_\varepsilon - h'(u_*))^{-1}(h'(u_*)u^\varepsilon - h(u^\varepsilon)).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(u_*) &= -(A_\varepsilon - h'(u_*))^{-1}(h'(u_*)u_* - h(u_*)) \\ &= -(A_\varepsilon - h'(u_*))^{-1}(h'(u_*)u_* - Au_*) \\ &= (A_\varepsilon - h'(u_*))^{-1}(A - h'(u_*))u_* \rightarrow u_* \end{aligned} \tag{4.13}$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para mostrarmos que existe $\delta > 0$ de tal forma que $\Phi_\varepsilon : \bar{B}_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta) \rightarrow \bar{B}_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta)$ é uma contração, procedemos de forma inteiramente análoga à (4.5), obtendo

$$\begin{aligned} \|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon) - \Phi_\varepsilon(v^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq C_2 \|(\theta u^\varepsilon - (1 - \theta)v^\varepsilon) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq 2C_2 \delta \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

para quaisquer $u^\varepsilon, v^\varepsilon \in B = \bar{B}_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*, \delta)$. Basta, portanto, escolhermos $\delta > 0$ tal que $2C_2 \delta < \frac{1}{2}$. Além disso, se $u^\varepsilon \in B$, então

$$\begin{aligned} \|\Phi(u^\varepsilon) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \|\Phi_\varepsilon(u^\varepsilon) - \Phi_\varepsilon(u_*)\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

De (4.13) segue que existe $\bar{\varepsilon}$ tal que

$$\|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\delta}{2},$$

e assim, se $u^\varepsilon \in B$, obtemos

$$\|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Logo, $\Phi_\varepsilon(B) \subset B$ e $\Phi_\varepsilon : B \rightarrow B$ é uma contração, para todo $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, de modo que existe um único ponto fixo de Φ_ε em B , que chamaremos de u_*^ε . Finalmente, vejamos que $u_*^\varepsilon \rightarrow u_*$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &= \|\Phi_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \|\Phi_\varepsilon(u_*^\varepsilon) - \Phi_\varepsilon(u_*)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

de maneira que $\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq 2 \|\Phi_\varepsilon(u_*) - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Corolário 4.15. *Suponhamos que as hipóteses da Proposição 4.14 estejam satisfeitas. Assumamos que (E_0) tenha exatamente n_0 soluções $u_1, \dots, u_{n_0}$, e que $0 \notin \sigma(A_0 - h'(u_j))$, para $j = 1, \dots, n_0$. Então existe $\bar{\varepsilon}$ suficientemente pequeno de tal modo que, para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, o problema (E_ε) tem exatamente n_0 soluções $u_1^\varepsilon, \dots, u_{n_0}^\varepsilon$. Além disso, para cada $j = 1, \dots, n_0$, temos*

$$\|u_j^\varepsilon - u_j\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. Da Proposição 4.7 segue que, para ε suficientemente pequeno, toda solução u^ε do problema (E_ε) está em uma vizinhança do conjunto de equilíbrio de (E_0) . Além disso, pela Proposição 4.14, em uma vizinhança de u_j existe apenas uma solução de (E_ε) , u_j^ε , que converge para u_j , $j = 1, \dots, n_0$. $\square$

Denotemos por $\sigma_\varepsilon^+ = \{\mu \in \sigma(-\bar{A}_\varepsilon) : \operatorname{Re} \mu > 0\}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Seja $Q_0^+(\sigma^+)$ a projeção determinada por σ_0^+ , isto é,

$$Q_0^+(\sigma_0^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (\mu + \bar{A}_0)^{-1} d\mu,$$

onde Γ^+ é uma curva em $\{\mu \in \rho(-A_0) : \operatorname{Re} \mu > 0\}$, que envolve σ_0^+ . Do Lema ??, segue a existência de um ε_Γ tal que $\Gamma^+ \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon)$ for $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\Gamma^+]$. Seja $Q_\varepsilon^+(\sigma_\varepsilon^+, -\bar{A}_\varepsilon)$ projeção dada por

$$Q_\varepsilon^+(\sigma_\varepsilon^+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (\mu + \bar{A}_\varepsilon)^{-1} d\mu.$$

Consideremos $-\bar{A}_\varepsilon^+$ e $-\bar{A}_\varepsilon^-$ as restrições de $-\bar{A}_\varepsilon$ a $W_\varepsilon^+ = Q_\varepsilon^+(\sigma_\varepsilon^+)X$ e ao espaço $W_\varepsilon^- = (I - Q_\varepsilon^+(\sigma_\varepsilon^+))X$, respectivamente. Denotemos $-\bar{A}_\varepsilon^\pm = -\bar{A}_\varepsilon|_{W_\varepsilon^\pm}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Teorema 4.16. *São válidas as seguintes afirmações:*

- (i) existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\dim W(\sigma_\varepsilon^+, -\bar{A}_\varepsilon^+) = \dim W(\sigma_0^+, -\bar{A}_0^+)$, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.
- (ii) para todo $u \in W(\sigma_0^+, -\bar{A}_0^+)$, existe uma seqüência $\{u_\varepsilon\}$, $u_\varepsilon \in W(\sigma_\varepsilon^+, -\bar{A}_\varepsilon)$, tal que $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u$.
- (iii) toda seqüência $\{u_n\}$, $u_n \in W(\sigma_{\varepsilon_n}^+, -\bar{A}_{\varepsilon_n})$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, com $\|u_n\|_X = 1$ possui uma subsequência convergente e todo ponto limite desta seqüência está em $W(\sigma_0^+, -\bar{A}_0^+)$.
- (iv) existem $\beta > 0$ e $\varepsilon_\beta > 0$ tais que $\sigma(-\bar{A}_\varepsilon^+) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \mu| > \beta\} = \emptyset$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta]$.
- (v) existem $\frac{\pi}{2} > \phi_\beta > 0$, $\omega_\beta > 0$ e $\varepsilon_\beta > 0$ tais que $\Sigma_{-\omega_\beta, \phi_\beta} \subset \rho(-\bar{A}_\varepsilon^-)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta]$ e

$$\|(\mu + \bar{A}_\varepsilon^-)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_\beta}{|\mu - \omega_\beta|}, \text{ para todo } \mu \in \Sigma_{-\omega_\beta, \phi_\beta} \text{ e para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_\beta]. \quad (4.14)$$

$\diamond$

4.4 Continuidade das variedades instáveis

Recordemos que estamos assumindo que todas as soluções de equilíbrio de (2.8) são hiperbólicas, ou seja, que cada solução de (E_0) é tal que o operador $-\bar{A}_0$ tem espectro $\sigma(-\bar{A}_0)$ disjunto do eixo imaginário.

Já sabemos que $\sigma_0^+ = \sigma(-\bar{A}_0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ consiste de um número finito (possivelmente zero) de autovalores com multiplicidades finitas, e existem uma constante $\beta > 0$ e uma projeção Q_0^+ de posto finito sobre σ_0^+ tal que

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\bar{A}_0 t} Q_0^+ \right\|_{\mathcal{L}(X_0^{-\frac{s}{2}})} &\leq M e^{\beta t}, \quad t \leq 0 \\ \left\| e^{-\bar{A}_0 t} (I - Q_0^+) \right\|_{\mathcal{L}(X_0^{-\frac{s}{2}}, X_0^{\frac{1}{2}})} &\leq M t^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta t}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como vimos na seção anterior, para ε suficientemente pequeno, existe uma solução u_*^ε de (E_ε) , tal que $u_*^\varepsilon \rightarrow u_*$ em $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Proposição 4.17. *Sejam u_*^ε solução de (E_ε) e u_* solução de (E_0) tais que $u_*^\varepsilon \rightarrow u_*$. Se $\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon - h'(u_*^\varepsilon)$, então existe um $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que $\sigma(-\bar{A}_\varepsilon)$ não intercepta o eixo imaginário, para $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, e $\|(A_\varepsilon - h'(u_*^\varepsilon))^{-1}\| \leq C$, com C independente de ε . Além disso, se Q_ε^+ denota a projeção definida pelo conjunto espectral $\sigma_\varepsilon^+ = \{\mu \in \sigma(-\bar{A}_\varepsilon) : \operatorname{Re} \mu > 0\}$, então Q_ε^+ converge compactamente para Q_0^+ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ (e então $\operatorname{posto}(Q_\varepsilon^+) = \operatorname{posto}(Q_0^+)$, para $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$), e a família de conjuntos σ_ε^+ é semicontínua inferior e superiormente em $\varepsilon = 0$. $\diamond$*

Proposição 4.18. *Para ε suficientemente pequeno, o ponto de equilíbrio u_*^ε de (E_ε) é hiperbólico e existe $\beta > 0$ tal que, se Q_ε^+ é a projeção determinada por σ_ε^+ , então*

$$\begin{aligned} \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon t} Q_\varepsilon^+ \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}})} &\leq M e^{\beta t}, \quad t \leq 0 \\ \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon t} (I - Q_\varepsilon^+) \right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}, X_\varepsilon^{\frac{1}{2}})} &\leq M t^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta t}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$\diamond$

Assumamos que (E_0) tenha apenas um número finito de soluções $u_1, \dots, u_m$. Nesta seção mostramos que as variedades instáveis locais de u_k , para $k = 1, \dots, m$ fixado, são contínuas. A existência destas variedades segue da teoria canônica de variedades invariantes, veja [15].

Mostramos que as variedades instáveis estão próximas para ε pequeno. Para tanto, usamos os resultados de convergência da parte linear, obtidos nos capítulos precedentes.

Pela Proposição 4.14, temos que $\|u_*^\varepsilon - u_*\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Segue então da Proposição 4.17 que $\sigma(-\bar{A}_\varepsilon)$ se comporta continuamente quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para trabalharmos em uma vizinhança do ponto de equilíbrio u_*^ε , reescrevemos o problema (2.6) para $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_*^\varepsilon$, obtendo

$$\dot{w}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon w^\varepsilon = h(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)w^\varepsilon, \quad (4.17)$$

onde $\bar{A}_\varepsilon = A_\varepsilon - h'(u_*^\varepsilon)$.

Para obtermos as projeções Q_ε^+ procedemos do seguinte modo: denotamos por $\{\mu_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ os autovalores de $\bar{A}_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ (ordenados e contando suas multiplicidades), e por $\{\phi_i^\varepsilon\}_{i=1}^\infty$ um correspondente sistema ortonormal de autofunções. Ordenamos os autovalores de tal maneira que $\mu_1^\varepsilon \geq \dots \geq \mu_k^\varepsilon > \omega > 0 > -\omega > \mu_{k+1}^\varepsilon \geq \mu_{k+2}^\varepsilon \geq \dots$, $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, para algum $\omega > 0$ e $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$. Consideramos $W_\varepsilon = [\phi_1^\varepsilon, \dots, \phi_k^\varepsilon]$ e $W_\varepsilon^\perp = \left\{ \psi \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \int_\Omega \psi \phi = 0, \text{ para qualquer } \phi \in W_\varepsilon \right\}$.

Sejam $Q_\varepsilon^+ : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ as projeções ortogonais sobre W_ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$,

$$Q_\varepsilon^+ \psi = \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega \psi \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon.$$

Se $\psi \in W_\varepsilon$, então $\psi = \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega \psi \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon$ e

$$\|\psi\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} = \left(\sum_{i=1}^k (1 + \mu_i^\varepsilon) \left(\int_\Omega \psi \phi_i^\varepsilon \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como os autovalores $\mu_i^\varepsilon \rightarrow \mu_i^0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ para $1 \leq i < \infty$, segue que W_ε é isomorfo a W_0 , para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$. Ademais, $W_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$, é isomorfo a $\mathbb{R}^k$ através do isomorfismo I_ε dado por

$$W_\varepsilon \ni \psi \mapsto \left(\int_\Omega \psi \phi_1^\varepsilon, \dots, \int_\Omega \psi \phi_k^\varepsilon \right) \in \mathbb{R}^k.$$

Notemos que I_ε é um operador limitado com inversa I_ε^{-1} limitada e que as normas de I_ε e I_ε^{-1} são uniformemente limitadas, para $\varepsilon \in [0, \bar{\varepsilon}]$.

Este fato nos permite decompor o espaço $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ em dois espaços, $\mathbb{R}^k$ e $(I - Q_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Esta decomposição do espaço induz uma decomposição da solução w^ε de (4.17), da seguinte maneira:

$$w^\varepsilon = v^\varepsilon + z^\varepsilon, \text{ com } v^\varepsilon = \sum_{i=1}^k v_i \phi_i^\varepsilon, v_i = \int_\Omega w \phi_i^\varepsilon \text{ e } z^\varepsilon = (I - Q_\varepsilon^+)w^\varepsilon.$$

Assim, como $v^\varepsilon = Q_\varepsilon^+ w^\varepsilon$, $z^\varepsilon = (I - Q_\varepsilon^+)w^\varepsilon$ e $Q_\varepsilon^+, (I - Q_\varepsilon^+)$ comutam com $\bar{A}_\varepsilon$, obtemos

$$\dot{v}_i + \mu_i^\varepsilon v_i = \int_\Omega [(h(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon))] \phi_i^\varepsilon$$

e

$$\begin{aligned} \dot{z}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon z^\varepsilon &= (I - Q_\varepsilon^+)(h(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)) \\ &= h(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)(w^\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$- \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega [h(w^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)(w^\varepsilon)] \phi_i^\varepsilon \right) \phi_i^\varepsilon. \quad (4.19)$$

Denotando $v = (v_1, \dots, v_k)^t$ e $H_\varepsilon(v, z) = (H_1(v, z), \dots, H_k(v, z))^t$, onde

$$H_j(v, z) = \int_\Omega \left[h \left(\sum_{i=1}^k v_i \phi_i^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon \right) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon) \left(\sum_{i=1}^k v_i \phi_i^\varepsilon + z^\varepsilon \right) \right] \phi_j^\varepsilon$$

e também

$$G_\varepsilon(v, z) = (I - Q_\varepsilon^+)(h(v^\varepsilon + z^\varepsilon + u_*^\varepsilon) - h(u_*^\varepsilon) - h'(u_*^\varepsilon)(v^\varepsilon + z^\varepsilon)),$$

resulta que $H_\varepsilon(0, 0) = 0 = G_\varepsilon(0, 0)$. Além disso, H_ε e G_ε são continuamente diferenciáveis e satisfazem $\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial v}(0, 0) = 0 = \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial v}(0, 0)$. Como as projeções Q_ε^+ , $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, são uniformemente limitadas e a função h não depende de ε segue que, dado $\rho > 0$, existem $\bar{\varepsilon} > 0$ e $\delta > 0$ de tal forma que se $\|v\|_{\mathbb{R}^k} + \|z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta$ e $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, então

$$\begin{aligned} \|H_\varepsilon(v, z)\|_{\mathbb{R}^k} &\leq \rho, \\ \|G_\varepsilon(v, z)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \rho, \\ \|H_\varepsilon(v, z) - H_\varepsilon(\tilde{v}, \tilde{z})\|_{\mathbb{R}^k} &\leq \rho \left(\|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^k} + \|z - \tilde{z}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right), \\ \|G_\varepsilon(v, z) - G_\varepsilon(\tilde{v}, \tilde{z})\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \rho \left(\|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^k} + \|z - \tilde{z}\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Procedendo como na demonstração do Lema 4.9 podemos escolher ρ e δ uniformemente para $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ satisfazendo as desigualdades acima. Este é o ponto chave para obtermos que as

variedades instáveis locais estão definidas em uma pequena vizinhança do ponto de equilíbrio u_*^ε , uniformemente para $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Podemos estender H_ε e G_ε fora de $B_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}(u_*^\varepsilon, \delta)$ de tal forma que as estimativas em (4.20) permaneçam válidas para quaisquer $v^\varepsilon \in W$ e $z^\varepsilon \in W_\varepsilon^\perp$.

Observação 1. O procedimento para se estender uma função g definida em uma bola de raio $\frac{1}{n}$ de tal maneira que ela se torne globalmente de Lipschitz contínua, sem alterar sua constante de Lipschitz é o seguinte: dada uma função $g : V \times Z \rightarrow Y$, V, Z e Y espaços de Banach, definimos

$$g_n(v, z) = \begin{cases} g(v, z), & \|v + z\| \leq \frac{1}{n} \\ g\left(\frac{v}{n\|v + z\|}, \frac{z}{n\|v + z\|}\right), & \|v + z\| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

As constantes de Lipschitz para g_n são justamente as constantes de Lipschitz para g quando restrita a $B_{\frac{1}{n}}$, ou seja, $\|g_n(v_1, z_1) - g_n(v_2, z_2)\| \leq L_{g_n}(\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|)$ e L_{g_n} é a constante de Lipschitz de g na bola.

Este procedimento aplicado a H_ε e G_ε nos fornece as extensões desejadas para H_ε e G_ε .

Denotemos $\bar{A}_\varepsilon^+ := \text{diag}(\mu_1^\varepsilon, \dots, \mu_k^\varepsilon)$ e $\bar{A}_\varepsilon^- := \bar{A}_\varepsilon|_{(I - Q_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}$. Podemos então reescrever a equação (4.17) como

$$\begin{cases} \dot{v}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ v^\varepsilon &= H_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \\ \dot{z}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^- z^\varepsilon &= G_\varepsilon(v^\varepsilon, z^\varepsilon), \end{cases} \quad (4.21)$$

onde H_ε e G_ε satisfazem (4.20), para quaisquer $v^\varepsilon \in \mathbb{R}^k$ e $z^\varepsilon \in (I - Q_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Além disso, para apropriadas constantes positivas M, β , independentes de ε , $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, temos

$$\begin{aligned} \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^- t} z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M e^{-\beta t} \|z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, \quad t \geq 0, \\ \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^- t} z\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M t^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta t} \|z\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}, \quad t > 0, \\ \|e^{-\bar{A}_\varepsilon^+ t} v\|_{\mathbb{R}^k} &\leq M e^{\beta t} \|v\|_{\mathbb{R}^k}, \quad t \leq 0. \end{aligned}$$

Em seguida mostraremos que para $\rho > 0$ escolhido apropriadamente, a variedade instável para u_*^ε é dada localmente por

$$W_\varepsilon^u = \left\{ (v, z) : z = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v), v \in \mathbb{R}^k \right\},$$

onde $\mathcal{S}_\varepsilon^* : \mathbb{R}^k \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ é limitada e Lipschitz contínua. Além disso, para qualquer $R > 0$,

$$\sup_{v \in B_{\mathbb{R}^k}(0, R)} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(v) - \mathcal{S}_0^*(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Proposição 4.19. *Assumamos que u_* seja um equilíbrio hiperbólico de (2.8). Então, pela Proposição 4.14, o problema (2.6) tem uma única solução de equilíbrio, u_*^ε , próxima a u_* . Para $D > 0, \Delta > 0, 0 < \vartheta < 1$ dados, seja $\rho_0 > 0$ de tal forma que, para todo $0 < \rho \leq \rho_0$, sejam válidas as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}
\rho M \beta^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) &\leq D \\
\rho M^2(1+\Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) &\leq \Delta \\
\frac{\beta}{2} &\leq 2\beta - \rho M(1+\Delta) \leq 2\beta \\
\rho M \beta^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)}\right] &\leq \vartheta < 1 \\
\gamma = \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)}\right] &> 0 \\
\rho M \beta^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) + \left[\rho^2 M^2 \beta^{-1}(1+\Delta)(2\beta - (\rho M(1+\Delta))^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right))\right] &\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Assumamos que, para ρ escolhido como acima, as funções H_ε e G_ε satisfaçam (4.20) para qualquer $(v, z) \in \mathbb{R}^k \times (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Então existe $\mathcal{S}_\varepsilon^* : \mathbb{R}^k \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ de tal maneira que

$$\|\mathcal{S}_\varepsilon^*\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^k} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq D, \quad \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(v) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^k}$$

e

$$W_\varepsilon^u = \left\{ (v, z) : z = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v), v \in \mathbb{R}^k \right\}.$$

Além disso, para qualquer $R > 0$,

$$\sup_{v \in B_{\mathbb{R}^k}(0, R)} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(v) - \mathcal{S}_0^*(v)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Demonstração. Mostraremos primeiramente a existência da variedade invariante.

Seja $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, \mathcal{S}_\varepsilon)$ a solução de

$$\dot{v}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon)), \quad \text{para } t < \tau, v^\varepsilon(\tau) = \eta. \tag{4.23}$$

Consideremos

$$\mathcal{X} = \left\{ \mathcal{S} : \mathbb{R}^k \rightarrow (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|\mathcal{S}\| \leq D, \|\mathcal{S}(v) - \mathcal{S}(\tilde{v})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|v - \tilde{v}\|_{\mathbb{R}^k} \right\}.$$

É fácil ver que $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo.

Seja $\mathcal{S}_\varepsilon \in \mathcal{X}$ e definamos $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ por

$$\Phi(\mathcal{S}_\varepsilon)(\eta) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\bar{A}_\varepsilon(\tau-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(s), \mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon(s))) dr. \quad (4.24)$$

Notemos que

$$\|\Phi(\mathcal{S}_\varepsilon)(\cdot)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \int_{-\infty}^{\tau} \rho M (\tau-r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta(\tau-r)} dr = \rho M \beta^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \leq D. \quad (4.25)$$

Suponhamos agora que $\mathcal{S}_\varepsilon, \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon \in \mathcal{X}$, que $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^k$ e denotemos $v^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \eta, \mathcal{S}_\varepsilon)$, $\tilde{v}^\varepsilon(t) = \psi(t, \tau, \tilde{\eta}, \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon)$. Então

$$v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t) = e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-\tau)} (\eta - \tilde{\eta}) + \int_{\tau}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} [H_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon)) - H_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon))] dr.$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^k} &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + M \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} \|H_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon)) - H_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon))\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} \left[\|\mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon) - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} \right] dr \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} \left[\|\mathcal{S}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon) - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(\tilde{v}^\varepsilon)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + (1+\Delta) \|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} \right] dr \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + \rho M \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} [(1+\Delta) \|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} + \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\|] dr \\ &\leq M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + \rho M (1+\Delta) \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} \|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\quad + \rho M \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\| \int_t^{\tau} e^{\beta(t-r)} dr. \end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = e^{-\beta(t-\tau)} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^k}$. Então

$$\phi(t) \leq M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} + \rho M \int_t^{\tau} e^{\beta(\tau-r)} dr \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\| + \rho M (1+\Delta) \int_t^{\tau} \phi(r) dr.$$

Assim, resulta da Desigualdade de Gronwall Generalizada que

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - \tilde{v}^\varepsilon(t)\|_{\mathbb{R}^k} &\leq \left[M e^{\beta(t-\tau)} \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} + \rho M \beta^{-1} (1 - e^{\beta(t-\tau)}) \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\| \right] \\ &\quad \times e^{[\rho M (1+\Delta) - \beta](\tau-t)} \\ &\leq [M \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} + \rho M \beta^{-1} \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\|] e^{[\rho M (1+\Delta) - \beta](\tau-t)} \end{aligned}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathcal{S}_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta(\tau-r)} \\ &\quad \times \|G_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon(v^\varepsilon)) - G_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon, \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon))\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &\leq \rho M \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^{-(\frac{1+s}{2})} e^{-\beta(\tau-r)} \left[(1 + \Delta) \|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\| \right] dr, \end{aligned}$$

substituindo as estimativas obtidas para $\|v^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathcal{S}_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \rho M \beta^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\| \\ &\quad + \rho M^2(1+\Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k}. \end{aligned}$$

Sejam

$$I_{\mathcal{S}}(\varepsilon) := \rho M \beta^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \left[1 + \frac{\rho M(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right]$$

e

$$I_\eta(\varepsilon) := \rho M^2(1+\Delta) \left(\frac{\beta}{2}\right)^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right).$$

Dado $\vartheta < 1$, existe um ρ_0 tal que, para $\rho \leq \rho_0$, $I_{\mathcal{S}}(\varepsilon) \leq \vartheta$ e $I_\eta(\varepsilon) \leq \Delta$ e

$$\|\Phi(\mathcal{S}_\varepsilon)(\eta) - \Phi(\tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon)(\tilde{\eta})\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \Delta \|\eta - \tilde{\eta}\|_{\mathbb{R}^k} + \vartheta \|\mathcal{S}_\varepsilon - \tilde{\mathcal{S}}_\varepsilon\|. \quad (4.26)$$

Das desigualdades (4.25) e (4.26), segue que Φ é uma contração de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$. Logo, existe um único ponto fixo $\mathcal{S}_\varepsilon^* = \Phi(\mathcal{S}_\varepsilon^*)$ em $\mathcal{X}$.

Provemos agora que $W_\varepsilon^u = \{(v, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v)) : v \in \mathbb{R}^k\}$ é uma variedade invariante para (4.21). Seja $(v^0, z^0) \in W_\varepsilon^u$, $z^0 = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^0)$. Denotemos por $v_*^\varepsilon(t)$ a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{v}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ v^\varepsilon = H_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) \\ v^\varepsilon(0) = v_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Isto define uma curva $(v_*^\varepsilon(t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(v_*^\varepsilon(t))) \in W_\varepsilon^u$, $t \in \mathbb{R}$. Contudo, a única solução da equação

$$\dot{z}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^- z^\varepsilon = G_\varepsilon(v_*^\varepsilon(t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(v_*^\varepsilon(t)))$$

que permanece limitada quando $t \rightarrow -\infty$ é

$$z_*^\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} G_\varepsilon(v_*^\varepsilon(r), \mathcal{S}_\varepsilon^*(v_*^\varepsilon(r))) dr = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v_*^\varepsilon(t)).$$

Portanto, $(v_*^\varepsilon(t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(v_*^\varepsilon(t)))$ é uma solução de (4.21) passando por (v^0, z^0) , o que prova a invariância.

A seguir provamos que se H_ε e G_ε satisfazem (4.20) para todo $(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \times (I - Q_\varepsilon^+)X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ com ρ apropriadamente pequeno e se $(v^\varepsilon(t), z^\varepsilon(t))$, $t \in \mathbb{R}$ é uma solução global para (4.17) que está em $W^u(u_\varepsilon^*)$, então $z^\varepsilon(t) = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Nosso objetivo é mostrar que existem constantes $M \geq 1$ e $\gamma > 0$ de tal maneira que

$$\|z^\varepsilon(t) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} \|z^\varepsilon(t_0) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}}, \quad t_0 \leq t. \quad (4.27)$$

Quando $t_0 \rightarrow -\infty$, obtemos $z^\varepsilon(t) = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $\xi^\varepsilon(t) = z^\varepsilon(t) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$ e $y^\varepsilon(r, t)$, $r \leq t$ a solução de

$$\begin{cases} \dot{y}^\varepsilon + \bar{A}_\varepsilon^+ y^\varepsilon = H_\varepsilon(y^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon)), & r \leq t \\ y^\varepsilon(t, t) = v^\varepsilon(t). \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(r, t) - v^\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^k} &= \left\| \int_r^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(r-\theta)} [H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(v^\varepsilon(\theta), z^\varepsilon(\theta))] d\theta \right\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\leq \rho M \int_r^t e^{\beta(r-\theta)} \left[(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{\mathbb{R}^k} + \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(\theta)) - z^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \right] d\theta \\ &\leq \rho M \int_r^t e^{\beta(r-\theta)} \left[(1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - v^\varepsilon(\theta)\|_{\mathbb{R}^k} + \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \right] d\theta. \end{aligned}$$

Se $\phi^\varepsilon(r) = e^{-\beta r} \|y^\varepsilon(r, t) - v^\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^k}$, então

$$\phi^\varepsilon(r) \leq \rho M (1 + \Delta) \int_r^t \phi^\varepsilon(\theta) d\theta + \rho M \int_r^t e^{-\beta \theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta, \quad r \leq t.$$

Da Desigualdade de Gronwall segue que

$$\|y^\varepsilon(r, t) - v^\varepsilon(r)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \rho M \int_r^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta-r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta, \quad r \leq t. \quad (4.28)$$

Seja agora $r \leq t_0 \leq t$. Então,

$$\begin{aligned} \|y^\varepsilon(r, t) - y^\varepsilon(r, t_0)\|_{\mathbb{R}^k} &= \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(r-t_0)} [y^\varepsilon(t_0, t) - v(t_0)] \right\|_{\mathbb{R}^k} \\ &+ \left\| \int_{t_0}^r e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(r-\theta)} [H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t))) - H_\varepsilon(y^\varepsilon(\theta, t_0), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(\theta, t_0)))] d\theta \right\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\leq \rho M^2 e^{\beta(r-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta \\ &+ \rho M \int_r^{t_0} e^{\beta(r-\theta)} (1 + \Delta) \|y^\varepsilon(\theta, t) - y^\varepsilon(\theta, t_0)\|_{\mathbb{R}^k} d\theta \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\|y^\varepsilon(r, t) - y^\varepsilon(r, t_0)\|_{\mathbb{R}^k} \leq \rho M^2 \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta - r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta \quad (4.29)$$

Vamos agora estimar $\xi(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \xi^\varepsilon(t) &= e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)} \xi^\varepsilon(t_0) = z^\varepsilon(t) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)} [z^\varepsilon(t_0) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0))] \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(r), z^\varepsilon(r)) dr - \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t)) + e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)} \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t_0)) \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon(r), z^\varepsilon(r)) dr - \int_{-\infty}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} G_\varepsilon(y^\varepsilon(r, t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t))) dr \\ &\quad + e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)} \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t_0-r)} G_\varepsilon(y^\varepsilon(r, t_0), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t_0))) dr \\ &= \int_{t_0}^t e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} [G_\varepsilon(v^\varepsilon(r), z^\varepsilon(r)) - G_\varepsilon(y^\varepsilon(r, t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t)))] dr \\ &\quad - \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-r)} [G_\varepsilon(y^\varepsilon(r, t), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t))) - G_\varepsilon(y^\varepsilon(r, t_0), \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t_0)))] dr \end{aligned}$$

Assim, usando (4.28) e (4.29),

$$\begin{aligned} \|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)} \xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} [\|v^\varepsilon(r) - y^\varepsilon(r, t)\|_{\mathbb{R}^k} + \|z^\varepsilon(r) - \mathcal{S}_\varepsilon^*(y^\varepsilon(r, t))\|_{\mathbb{R}^k}] dr \\ &\quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)} \|y^\varepsilon(r, t) - y^\varepsilon(r, t_0)\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr + \rho M(1+\Delta) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \|v^\varepsilon(r) - y^\varepsilon(r, t)\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-r)} \|y^\varepsilon(r, t) - y^\varepsilon(r, t_0)\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &\quad + \rho^2 M^2 (1+\Delta) \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \int_r^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta - r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta dr \\ &\quad + \rho^2 M^3 (1+\Delta) \int_{-\infty}^{t_0} e^{-\beta(t-s)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta - r)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta dr \\ &\leq \rho M \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &\quad + \rho^2 M^2 (1+\Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \int_{t_0}^\theta e^{(2\beta - \rho M(1+\Delta))r} dr d\theta \\ &\quad + \rho^2 M^3 (1+\Delta) e^{-\beta t} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))\theta} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \int_{-\infty}^{t_0} e^{(2\beta - \rho M(1+\Delta))r} dr d\theta, \end{aligned}$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \|\xi^\varepsilon(t) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(t-t_0)}\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-r)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &+ \frac{\rho^2 M^3(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} e^{-\beta(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-(\beta - \rho M(1+\Delta))(\theta-t_0)} \|\xi^\varepsilon(\theta)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} d\theta, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} e^{\beta(t-t_0)} \|\xi^\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} &\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(r-t_0)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &+ \frac{\rho^2 M^3(1+\Delta)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \int_{t_0}^t e^{-(2\beta - \rho M(1+\Delta))(r-t_0)} e^{\beta(r-t_0)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr \\ &\leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} + \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right] \int_{t_0}^t e^{\beta(r-t_0)} \|\xi^\varepsilon(r)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Gronwall segue ainda que

$$\|\xi^\varepsilon(t)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} \leq M \|\xi^\varepsilon(t_0)\|_{X_\varepsilon^{-\frac{s}{2}}} e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (4.30)$$

onde

$$\gamma = \beta - \left[\rho M + \frac{\rho^2 M^2(1+\Delta)(1+M)}{2\beta - \rho M(1+\Delta)} \right].$$

Logo, $z^\varepsilon(t) = \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon(t))$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Mostramos, por fim, que os pontos fixos $\mathcal{S}_\varepsilon^*$ dependem continuamente de ε em $\varepsilon = 0$, ou seja, se $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ é tal que a variedade instável é dada pelo gráfico de $\mathcal{S}_\varepsilon^*$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, queremos mostrar que

$$\|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| := \sup_{\eta \in B_{\mathbb{R}^k}^k(0, R)} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(\eta) - \mathcal{S}_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Para tanto, observemos primeiramente que, como a aplicação $\mathbb{R}^k \ni v^0 \mapsto G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0))$ é contínua, ela leva subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^k$ em subconjuntos relativamente compactos de $X_0^{-\frac{s}{2}}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(\eta) - \mathcal{S}_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-\bar{A}_0^-(\tau-r)} G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr \\ &\leq \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_\varepsilon(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\tau} \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^-(\tau-r)} G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) - e^{-\bar{A}_0^-(\tau-r)} G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

Denotando as três últimas integrais por I_1, I_2 e I_3 , respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_{-\infty}^{\tau} M e^{-\beta(\tau-r)} (\tau-r)^{-(\frac{1+s}{2})} \rho [(1+\Delta) \|v^\varepsilon - v^0\|_{\mathbb{R}^k} + \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\|] dr \\ &\leq \rho M \beta^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \\ &\quad + \rho M (1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)} (\tau-r)^{-(\frac{1+s}{2})} \|v^\varepsilon(r) - v^0(r)\|_{\mathbb{R}^k} dr. \end{aligned}$$

Como $G_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G_0$ pontualmente sobre compactos, temos que $G_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} G_0$ uniformemente e portanto I_2 é $o(1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainda, como $G_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0))$ está em um conjunto compacto de $X_0^{-\frac{s}{2}}$, garantimos, como no Teorema 3.10, que I_3 também é $o(1)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(\eta) - \mathcal{S}_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq o(1) + \rho M \beta^{(\frac{s-1}{2})} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \\ &\quad + \rho M (1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta(\tau-r)} (\tau-r)^{(\frac{s-1}{2})} \|v^\varepsilon(r) - v^0(r)\|_{\mathbb{R}^k} dr. \end{aligned}$$

É suficiente então estimarmos $\|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\mathbb{R}^k}$. Como $\|\eta\|_{\mathbb{R}^k} \leq R$, procedendo como acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\mathbb{R}^k} &\leq \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-\tau)} \eta - e^{-\bar{A}_0^+(t-\tau)} \eta \right\|_{\mathbb{R}^k} \\ &\quad + \int_t^\tau \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} H_\varepsilon(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} H_\varepsilon(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\quad + \int_t^\tau \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} H_\varepsilon(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) - e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} H_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\quad + \int_t^\tau \left\| e^{-\bar{A}_\varepsilon^+(t-r)} H_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) - e^{-\bar{A}_0^+(t-r)} H_0(v^0, \mathcal{S}_0^*(v^0)) \right\|_{\mathbb{R}^k} dr \\ &\leq o(1) + \rho M \int_t^\tau e^{\beta(t-r)} dr \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \\ &\quad + \rho M (1+\Delta) \int_t^\tau e^{\beta(t-r)} \|v^\varepsilon - v^0\|_{\mathbb{R}^k} dr. \end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = e^{\beta(\tau-t)} \|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\mathbb{R}^k}$. Então

$$\phi(t) \leq o(1) + \rho M \int_t^\tau e^{\beta(\tau-r)} dr \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| + \rho M (1+\Delta) \int_t^\tau \phi(r) dr,$$

e obtemos

$$\|v^\varepsilon(t) - v^0(t)\|_{\mathbb{R}^k} \leq [o(1) + \rho M \beta^{-1} \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\|] e^{[\rho M (1+\Delta) - \beta](\tau-t)}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_\varepsilon^*(\eta) - \mathcal{S}_0^*(\eta)\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} &\leq o(1) + \rho M \beta^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \\
&\quad + \rho M(1+\Delta) \int_{-\infty}^{\tau} e^{[-2\beta + \rho M(1+\Delta)](\tau-s)} (\tau-s)^{-\left(\frac{1+s}{2}\right)} ds \\
&\quad [o(1) + \rho M \beta^{-1} \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\|] \\
&\leq o(1) + \rho M \beta^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \\
&\quad + \left[\rho M(1+\Delta) (2\beta - \rho M(1+\Delta))^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \rho M \beta^{-1} \right] \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| &= \sup_{\eta \in B_{\mathbb{R}}^k(0, R)} \|\mathcal{S}_\varepsilon^*(\eta) - \mathcal{S}_0^*(\eta)\| \leq o(1) + \left\{ \rho M \beta^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left[\rho^2 M^2 \beta^{-1} (1+\Delta) (2\beta - \rho M(1+\Delta))^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \right] \right\} \|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\|,
\end{aligned}$$

e $\|\mathcal{S}_\varepsilon^* - \mathcal{S}_0^*\| \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. □

Corolário 4.20. *Existe $\delta > 0$ de tal maneira que*

$$W_{\varepsilon, \text{loc}}^u = \{(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in \mathbb{R}^k \times (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : (v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in W_\varepsilon^u, \|v\|_{\mathbb{R}^k} + \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta\}$$

é dada por

$$W_{\varepsilon, \text{loc}}^u = \{(v^\varepsilon, \mathcal{S}_\varepsilon^*(v^\varepsilon)) : v^\varepsilon \in \mathbb{R}^k\} \cap \{(v^\varepsilon, z^\varepsilon) \in \mathbb{R}^k \times (I - Q_\varepsilon^+) X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} : \|v^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^k} + \|z^\varepsilon\|_{X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}} < \delta\}.$$

Figura 2: $W_{\varepsilon, \text{loc}}^u(u_*^\varepsilon)$

Como consequência imediata da Proposição 4.19, temos

Corolário 4.21. *Assumamos que as condições da Proposição 4.19 estejam satisfeitas, que o problema (E_0) tenha exatamente n_0 soluções $u_1, \dots, u_{n_0}$, e que todas elas sejam hiperbólicas. Então existe $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que o problema (E_ε) tem exatamente n_0 soluções, e suas variedades instáveis locais $W_{\varepsilon, \text{loc}}^u(u_j^\varepsilon)$, $j = 1, \dots, n_0$, se comportam continuamente em ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$.* $\diamond$

4.5 Semicontinuidade inferior dos atratores

Para provarmos a semicontinuidade inferior da família de atratores, devemos ainda verificar que os semigrupos gerados pelas equações (2.6) e (2.8) têm estrutura gradiente.

Consideremos, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, o funcional $V_\varepsilon : X_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$V_\varepsilon(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda \varphi^2 dx - \int_{\Omega} H(\varphi) dx, \quad (4.31)$$

onde H é uma primitiva de h . Este funcional é não-crescente com relação à variável t ao longo das soluções de (2.6). Com efeito, denotemos por conveniência a solução de (2.6) por $u(t, x)$.

Então

$$\frac{d}{dt} V_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} p_\varepsilon(x) \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} \lambda u u_t dx - \int_{\Omega} h(u) u_t dx. \quad (4.32)$$

Logo, do Teorema de Gauss, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_\varepsilon(u) &= \int_{\partial\Omega} p_\varepsilon(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} u_t dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) u_t dx + \int_{\Omega} \lambda u u_t dx - \int_{\Omega} h(u) u_t dx \\ &= \int_{\Omega} [-\operatorname{div}(p_\varepsilon(x) \nabla u) + \lambda u - h(u)] u_t dx = \int_{\Omega} -(u_t)^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Para o problema limite, consideramos o funcional $V_0 : X_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$, definido da seguinte forma:

$$V_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} p_0(x) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \lambda u^2 dx - \int_{\Omega} H(u) dx.$$

Teorema 4.22. *A família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é semicontínua inferiormente em $\varepsilon = 0$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{A}_0$. Como $T_0(t)$ é gradiente, temos $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{u_*^0 \in \mathcal{E}_0} W^u(u_*^0)$, de modo que $u \in W^u(u_*)$, para algum $u_* \in \mathcal{E}_0$. Sejam $\tau \in \mathbb{R}$ e $v \in W_{0,\text{loc}}^u(u_*)$ tais que $T_0(\tau)v = u$. Seja ainda u_*^ε tal que $u_*^\varepsilon \rightarrow u_*$. Da convergência das variedades invariantes segue a existência de uma sequência $\{v^\varepsilon\}$, $v^\varepsilon \in W_{\varepsilon,\text{loc}}^u(u_*^\varepsilon)$ tal que $v^\varepsilon \rightarrow v$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Finalmente, da continuidade dos semigrupos não-lineares, temos que $T_\varepsilon(\tau)v^\varepsilon \rightarrow T_0(\tau)v = u$. Para concluir a demonstração, resta-nos apenas observar que se $u^\varepsilon = T_\varepsilon(\tau)v^\varepsilon$, então $u^\varepsilon \in \mathcal{A}_\varepsilon$, pois $v^\varepsilon \in \bigcup_{u_*^\varepsilon \in \mathcal{E}_\varepsilon} W^u(u_*^\varepsilon) = \mathcal{A}_\varepsilon$ e $\mathcal{A}_\varepsilon$ é invariante. $\square$

Figura 3: Semicontinuidade inferior dos atratores

Corolário 4.23. A família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ é contínua em $\varepsilon = 0$. $\diamond$

Observemos, por fim, que a continuidade da família de atratores $\{\mathcal{A}_\varepsilon : \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$ nos fornece uma caracterização para o atrator $\mathcal{A}_0$ como um tipo de *omega-limite* da família $\mathcal{A}_\varepsilon$:

Corolário 4.24. $\mathcal{A}_0 = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{\varepsilon \leq s} \mathcal{A}_\varepsilon} \supset \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{A}_\varepsilon$.

Referências bibliográficas

- [1] ADAMS, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press Inc., (1975).
- [2] ARRIETA, J. M. AND CARVALHO, A. N., *Spectral convergence and nonlinear dynamics of reaction-diffusion equations under perturbations of the domain*, Journal of Differential Equations, **199**, 143-178, (2004).
- [3] ARRIETA, J. M., CARVALHO, A. N., RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary condition. Uniform bounds*, Communications in Partial Differential Equations, **25** (1-2), 1-37, 2000.
- [4] ARRIETA, J. M., CARVALHO, A. N., RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities*, Journal of Differential Equations, **156**, 376-406, 1999.
- [5] ARRIETA, J. M., CARVALHO, J. M. AND RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Upper semicontinuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions*, Journal of Differential Equations, **168**, 33-59, (2000).
- [6] ARRIETA, J. M. , CARVALHO, A. N. AND RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Perturbation of the diffusion and upper semicontinuity for attractors*, Journal of Differential Equations, **168**, 33-59, (2000).
- [7] BRÉZIS, H. *Analisis Funcional, teoria e aplicaciones*, Masson, Paris, Alianza Editorial, (1983).
- [8] CARBONE, V. L. AND RUAS-FILHO, J. G., *Continuity of attractors in a singular problem arising in composite materials*, Nonlinear Analysis, **65**, 1285-1305, (2006).
- [9] CARVALHO, A. N. AND PISKAREV, S., *A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems*, Notas do ICMC/USP - Série Matematica # 197, (2005).

- [10] CARVALHO, A. N., OLIVA, S.M., PEREIRA, A. L. AND RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Attractors for parabolic problems with nonlinear boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **207**, 409-461, (1997).
- [11] CARVALHO, A. N. AND HINES, G., *Lower semicontinuity of unstable manifolds for gradient systems*, Dynamical Systems and Applications, **9**, nº1, 37-50, (2000).
- [12] CARVALHO, A. N., *Equações parabólicas semilineares*, Notas de Aula, ICMC-USP, (2002).
- [13] CONWAY, E., HOFF, D. AND SMOLLER, J., *Large time behavior of solutions of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, SIAM J. Appl. Math. **35**, 1-16, (1978).
- [14] HALE, J. K., *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematics Surveys and Monographs, **25**, American Mathematical Society, (1989).
- [15] HENRY, D. B. , *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, **840**, Springer-Verlag, (1980).
- [16] KATO, T., *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, (1995).
- [17] PAZY, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, **44**, Springer-Verlag, (1983).
- [18] RODRÍGUEZ-BERNAL, A., *Localized spatial homogenizations and large diffusion*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **29**, 1361-1380,(1998).

Índice remissivo

- Aplicação dualidade, 9
- Atrator global, 15
- Condição
 - de crescimento, 30
 - de dissipatividade, 31
 - de estabilidade, 37
 - de sinal, 30
- Cone finito, 21
- Conjunto
 - α –limite, 15
 - ω –limite, 15
 - invariante, 15
 - resolvente, 8
- Convergência
 - $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ –convergência, 42
 - $X_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ –convergência fraca, 42
 - compacta, 45
- Desigualdade
 - de Gronwall generalizada, 59
 - do Momento, 12
- Espaço
 - de potência fracionária, 11
- Espectro, 8
- Estrutura gradiente, 18
- Família coletivamente compacta, 45
- Gerador infinitesimal, 8
- Imagem numérica, 10
- Medida de não-compacidade, 68
- Operador
 - dissipativo, 9
 - adjunto, 10
 - auto-adjunto, 10
 - de potência fracionária, 11
 - setorial, 11
 - simétrico, 10
- Orbita
 - completa, 14
 - negativa, 14
 - positiva, 14
- Propriedade
 - de C^m – regularidade uniforme, 22
 - do cone, 21
- Semicontinuidade
 - inferior, 19
 - superior, 19
- Semigrupo
 - analítico, 11
 - fortemente contínuo, 7
- Solução, 13

de equilíbrio, 64

Teorema

de Hille-Yosida, 9

de Lumer-Phillips, 9

de Rellich-Kondrakov, 21

de Schauder, 66

Variedade

estável, 18

instável, 18