Trivialidade topológica de germes pré quase homogêneos

Liane Mendes Feitosa Soares

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 08/07/2003.

Assinatura:_____.

Trivialidade topológica de germes pré quase homogêneos

Liane Mendes Feitosa Soares

Orientador: Prof. Dr. Marcelo José Saia

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

**USP - São Carlos
Julho de 2003**

Aos meus pais Alice e Epifânio, ao meu marido Carlos Humberto e às minhas irmãs Diane e Chistiane.

Agradecimentos

À Deus, por me conceder a graça de ser mãe.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo José Saia pela orientação, incentivo e amizade, decisivos para a realização deste trabalho.

Aos meus primeiros mestres e amigos da Universidade Federal do Piauí, sem os quais eu não teria prosseguido: Vicente, Xavier, Barnabé e Benício.

Aos meus pais, Alice e Epifânio, pelo exemplo de vida e por entender anos de ausência.

Às minhas irmãs Diane e Chistiane, pelo carinho e palavras de incentivo.

Ao meu marido e colega de profissão Carlos Humberto, pelo amor, pelo incentivo e por está ao meu lado nos momentos mais difíceis e nos momentos mais importantes.

Enfim, agradeço aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Este trabalho foi patrocinado pelo CNPq, através de bolsa de Doutorado junto ao ICMC-USP.

Resumo

Neste trabalho utilizamos a técnica da construção de campos de vetores controlados para obter estimativas para a $\mathcal{A}$ -trivialidade topológica de famílias de aplicações analíticas $g_\lambda : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $g_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$. Estas estimativas foram obtidas com a fixação de filtrações em $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_p$ definidas a partir de um poliedro de Newton e com o germe g satisfazendo propriedades sobre o espaço tangente à órbita.

Além disto, foi feito um estudo sobre a trivialidade topológica de germes do plano no plano. Para isto, foram estudados os invariantes que garantem a trivialidade. Foram obtidos resultados parciais sobre a $\mathcal{A}$ -trivialidade topológica de germes pré quase homogêneos contidos na $\mathcal{K}$ -órbita de um germe quase homogêneo de *coposto* 2 finitamente determinado. Estes resultados são descritos graças à obtenção de fórmulas para o cálculo do número de cúspides para germes cujo ideal jacobiano satisfaz uma condição de Newton não degeneração e com a determinação do número de pontos duplos de dobras através do uso do software Singular.

Abstract

In this work we apply the method of constructing controlled vector fields to obtain estimates, in terms of an appropriate Newton polyhedron, for the $\mathcal{A}$ -topological triviality of families of analytic map germs $g_\lambda : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $g_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$, with the germ g satisfying properties on the tangent space of the $\mathcal{A}$ -orbit.

We also study the $\mathcal{A}$ -topological triviality of map germs from the plane to the plane using the method of determination of the invariants that guarantee this triviality. We give partial results for the $\mathcal{A}$ -topological triviality of pre weighted homogeneous map germs which are in the $\mathcal{K}$ -orbit of a finitely determined weighted homogeneous map germ with *corank* 2. We obtain these results thanks to the determination of formulae to compute the number of cusps of germs, whose jacobian ideal satisfies a newton non-degeneracy condition, and with the computation of the number of double points by using the software Singular.

Conteúdo

1	Preliminares	11
1.1	A Álgebra $\mathcal{O}_n$	11
1.2	Os grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$	12
1.3	Espaços Tangentes	12
1.4	Desdobramentos	14
1.5	Determinação finita	17
1.6	Germes pré quase homogêneos	17
1.7	Filtração de Newton	18
1.8	Newton não degeneração	19
1.9	Número de Milnor e a codimensão de ideais.	21
2	Campos de vetores controlados	23
2.1	Caso $n \geq p$	25
2.2	Caso $p \geq 2n$	27
2.3	Resultado geral.	28
2.4	Germes Newton não degenerados com $p \geq 2n$	36
2.4.1	Aplicação ao caso $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$	38
2.4.2	Aplicação ao caso $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$	40
3	Germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$: Número de cúspides	43
3.1	Invariantes topológicos para germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$	43
3.2	Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$	46
3.3	Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	49
3.4	Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	56
3.5	Caso geral.	64
3.6	Conclusão.	66

4	Número de dobras e órbitas	68
4.1	Órbitas da classe $f(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1})$	71
4.2	Órbitas da classe $f(x, y) = (xy, x^3 + y^b)$	72
4.3	Número de dobras e órbitas para $a = 4, 5$	72
4.3.1	$\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^5)$	72
4.3.2	$\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^7)$	75
4.3.3	$\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^9)$	76
4.3.4	$\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^5 + y^6)$	79

Introdução

Uma questão central em Teoria de Singularidades é a classificação analítica de aplicações, e dentre estas, a classificação de aplicações estáveis do plano no plano, publicada por Whitney [23] em 1955 é um trabalho pioneiro deste tema.

Desde então, a classificação de germes do plano no plano tem sido estendida por vários autores, em especial por Rieger em [13] com a classificação dos germes finitamente determinados de *coposto* 1. Rieger e Ruas obtiveram em [14] a classificação de todos os germes simples do plano no plano.

Gaffney e Mond em [6] estudam a questão de trivialidade topológica, para os germes do plano no plano, a partir do ponto de vista da determinação dos invariantes que garantem o **tipo topológico** destes germes, e como consequência são analisados os germes de *coposto* 1.

Em [7] Gaffney e Mond aplicam os resultados obtidos em [6] para o caso dos germes semi quase homogêneos, com a determinação de fórmulas para o cálculo destes invariantes em termos dos pesos e graus destes germes. A análise destas fórmulas lhes permitiu obter formas normais para todos os germes semi quase homogêneos finitamente determinados.

Ainda em [7] é proposta a questão de se calcular os tipos topológicos que aparecem em uma $\mathcal{K}$ -órbita de um germe quase homogêneo de *coposto* 2 finitamente determinado.

Os exemplos básicos dados em [7] mostram que as possíveis formas normais destas órbitas são germes de tipo pré quase homogêneo, conceito introduzido recentemente por Saia em [17]. Estes germes $g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, são de tipo $g = f + h$, onde f é quase homogêneo finitamente determinado e $h = (h_1, \dots, h_p)$ é um germe de aplicação polinomial tal que todo monômio h_{ij} de h_i tem grau pesado menor que o grau pesado de f_i com relação aos pesos e graus de f .

O principal objetivo deste trabalho é estudar a questão da trivialidade topológica para famílias de germes $f_t : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$, cujo germe inicial f_0 seja um germe pré quase homogêneo. Esta questão é estudada a partir de informações geométricas obtidas de um poliedro de Newton associado ao germe.

Para a determinação de um resultado geral sobre trivialidade topológica de famílias definidas por germes pré quase homogêneos é aplicado o método da construção de campos de vetores controlados, cuja principal referência são os trabalhos de Damon. Ruas estudou esta questão em sua tese de doutorado [15] para o caso de famílias de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, com $n \geq p$, obtendo estimativas para a trivialidade topológica através de propriedades dos espaços tangentes às órbitas e de condições sobre a ordem dos elementos da família. Os resultados de Ruas são obtidos com a fixação da filtração usual, definida pelo grau dos monômios, em $\mathcal{O}_n$ e em $\mathcal{O}_p$. Estes resultados são precisos para o caso de deformações de germes homogêneos.

Nesta tese foi feita uma generalização dos resultados de Ruas, com a determinação de estimativas para o caso de germes pré quase homogêneos. Estas foram obtidas com a fixação de filtrações em $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_p$ definidas a partir de poliedros de Newton convenientes. Esta generalização é descrita no capítulo 2. Inicialmente é obtido um resultado geral para germes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, com $n \geq p$, utilizando a mesma técnica desenvolvida por Ruas. Além disto, é obtido um resultado para germes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, com $p \geq 2n$. Como aplicação destes resultados, são determinadas condições para a trivialidade topológica de germes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e para germes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^4, 0)$ que satisfazem uma condição de Newton não degeneração com relação a poliedros de Newton convenientes. Observamos que o caso $p \geq 2n$ foi obtido tendo por base os resultados sobre $\mathcal{L}^0$ -equivalência descritos por Gaffney em [8].

Nos capítulos 3 e 4 nos dedicamos ao estudo dos germes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Aplicamos o método do cálculo dos invariantes para a trivialidade topológica de famílias destes germes. Estes invariantes, que foram descritos por Gaffney e Mond em [6], são o número de cúspides e de dobras que aparecem na curva discriminante de uma deformação estável de um germe finitamente determinado. No capítulo 3 são determinadas fórmulas para o cálculo do número de cúspides para germes cujo ideal Jacobiano é Newton não degenerado.

No capítulo 4 é feito um estudo sobre o número de dobras de várias famílias de germes com a utilização do software Singular. São descritas as C^0 - $\mathcal{A}$ -órbitas que surgem nas $\mathcal{K}$ -órbitas dos germes $(xy, x^a + y^b)$, com $a = 2$ e $b = 2\ell + 1$, $a = 3$ com $(3, b) = 1$, $a = 4$ e $b = 5, 7, 9$ e $a = 5$ com $b = 6$.

Capítulo 1

Preliminares

A notação e os resultados gerais sobre Teoria de Singularidades que apresentamos nas seções 1.1 a 1.5 deste capítulo são descritos por F. Tari em [19] e por C.T.C. Wall em [22]

1.1 A Álgebra $\mathcal{O}_n$

Para aplicações holomorfas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ definidas em vizinhanças U e V de um ponto $q \in \mathbb{C}^n$ definimos a seguinte relação de equivalência

$$f \sim g \iff \text{existe vizinhança } W \text{ de } q, W \subseteq U \cap V \text{ tal que } f|_W = g|_W.$$

Estas classes de equivalência são chamadas germes de aplicações no ponto q . Sem perda de generalidade podemos supor que $q = 0 \in \mathbb{C}^n$. O germe de f em 0 é denotado por

$$f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p.$$

O conjunto dos germes $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ é denotado por $\mathcal{O}(n, p)$. Denotamos $\mathcal{O}(n, 1)$ por $\mathcal{O}_n$, que é um anel comutativo, com identidade $\bar{1}$, e é um anel local com único ideal maximal $m_n = \{f \in \mathcal{O}_n | f(0) = 0\}$. Temos que $\mathcal{O}(n, p)$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo.

1.2 Os grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$

$\mathcal{R}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, $\mathcal{L}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos $(\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, e $\mathcal{A}$ é o produto direto $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Definimos ações destes grupos sobre o submódulo $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ por

$$\begin{aligned} h.f &= f \circ h^{-1}, \quad h \in \mathcal{R}; \\ k.f &= k \circ f, \quad k \in \mathcal{L}; \\ (h, k).f &= k \circ f \circ h^{-1}, \quad (h, k) \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

onde $f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. O grupo $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{L}$) é chamado também o grupo de mudanças de coordenadas na fonte (resp. meta).

O grupo $\mathcal{C}$ é o grupo de germes de difeomorfismos $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0)$, escritos da forma $H(x, y) = (x, H'(x, y))$ com $H'(x, 0) = 0$ para $x \in \mathbb{C}^n$ próximo da origem. A ação de $\mathcal{C}$ sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(x, f(x)), \quad H \in \mathcal{C}, \quad f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

O grupo $\mathcal{K}$ é o grupo dos difeomorfismos $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0)$, escritos da forma $H(x, y) = (h(x), H'(x, y))$ onde $h \in \mathcal{R}$ e $H'(x, 0) = 0$ para $x \in \mathbb{C}^n$ próximo da origem. A ação de $\mathcal{K}$ sobre $m_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$ é definida como

$$H.f(x) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x))), \quad H \in \mathcal{K}, \quad f \in m_n \cdot \mathcal{O}(n, p).$$

O grupo $\mathcal{K}$ é chamado o grupo de contato. O grupo $\mathcal{C}$ é um subgrupo normal de $\mathcal{K}$ e os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ podem ser identificados como subgrupos de $\mathcal{K}$.

A órbita de f sob a ação de $\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ é um dos grupos de Mather, será indicada por $\mathcal{G}(f)$.

1.3 Espaços Tangentes

Definimos o espaço tangente a $\mathcal{O}(n, p)$ em f , denotado por θ_f , como o $\mathcal{O}_n$ -módulo de campos de vetores ao longo de f . Então, $\xi \in \theta_f$ se $\xi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow T(\mathbb{C}^p)$ e $\pi_p \circ \xi = f$, onde $\pi_p : T(\mathbb{C}^p) \rightarrow \mathbb{C}^p$ é a projeção do fibrado tangente $T(\mathbb{C}^p)$ de $\mathbb{C}^p$ a $\mathbb{C}^p$.

Denotamos $\theta_n = \theta_{1_{\mathbb{C}^n}}$ e $\theta_p = \theta_{1_{\mathbb{C}^p}}$, onde $1_{\mathbb{C}^n}$ e $1_{\mathbb{C}^p}$ são as aplicações identidades em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$.

Definimos o $\mathcal{O}_n$ -homomorfismo

$$\begin{aligned} tf : \theta_n &\rightarrow \theta_f \\ \phi &\rightarrow df \circ \phi, \end{aligned}$$

e o $\mathcal{O}_p$ -homomorfismo (via $f^* : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_n$, $\alpha \rightarrow \alpha \circ f$, para $\alpha \in \mathcal{O}_p$)

$$\begin{aligned} \omega f : \theta_p &\rightarrow \theta_f \\ \Phi &\rightarrow \Phi \circ f. \end{aligned}$$

Então os espaços tangentes às órbitas dos grupos de Mather são

$$L\mathcal{R}.f = tf(m_n\theta_n);$$

$$L\mathcal{L}.f = \omega f(m_p\theta_p);$$

$$L\mathcal{C}.f = f^*(m_p).\theta_f;$$

$$L\mathcal{A}.f = L\mathcal{R}.f + L\mathcal{L}.f;$$

$$L\mathcal{K}.f = L\mathcal{R}.f + L\mathcal{C}.f.$$

Observamos que o conjunto θ_f é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de *rank* p , pois se $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ é um sistema local de coordenadas em $(\mathbb{C}^p, 0)$, então os campos de vetores

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) \circ f, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_p}\right) \circ f$$

ao longo de f constituem uma base livre de θ_f . Identificamos então θ_f com $\mathcal{O}(n, p)$ e para um sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ obtemos os espaços tangentes acima:

$$L\mathcal{R}.f = m_n.\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\};$$

$$L\mathcal{L}.f = f^*(m_p).\{e_1, \dots, e_p\};$$

$$L\mathcal{C}.f = f^*(m_p).\mathcal{O}_n.\{e_1, \dots, e_p\};$$

$$L\mathcal{A}.f = m_n.\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\} + f^*(m_p).\{e_1, \dots, e_p\},$$

onde $e_1, \dots, e_p$ são elementos da base canônica em $\mathbb{C}^p$ (considerados como elementos de $\mathcal{O}(n, p)$).

Observamos que a estrutura de $L\mathcal{A}.f$ é, em geral, apenas de $f^*(\mathcal{O}_p)$ -módulo. Neste caso, para mostrar que os módulos envolvidos são finitamente gerados, é necessário usar o Teorema de Preparação de Malgrange

Teorema 1.3.1 ([19] p. 30) *Sejam $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ um germe de aplicação holomorfa e A um $\mathcal{O}_n$ -módulo finitamente gerado. Então A é um $\mathcal{O}_p$ -módulo (via f^*) finitamente gerado se, e somente se, $\frac{A}{f^*(m_p)A}$ é um espaço vetorial de dimensão finita.*

Outro resultado importante é o Lema de Nakayama, que enunciamos a seguir.

Lema 1.3.2 ([19] p. 23) *Seja R um anel local comutativo, m um ideal maximal de R . Seja C um R -módulo, A e B R -submódulos de C , com A finitamente gerado.*

$$\text{Se } A \subset B + mA, \text{ então } A \subset B.$$

Corolário 1.3.3 *Seja C um R -módulo finitamente gerado e m um ideal maximal de R . Se $mC = C$ então $C = 0$.*

1.4 Desdobramentos

Seja f um germe finitamente determinado. Podemos considerar as deformações de f e estudar os tipos de singularidades que aparecem em tais deformações. Em particular, podemos perguntar se os tipos de singularidades que aparecem são em número finito e se existe uma família que contem estes tipos. Na verdade queremos que qualquer outra deformação de f seja obtida a partir desta família. Tais famílias chamam-se deformações versais.

Definição 1.4.1 *Um desdobramento a s -parâmetros de um germe f_0 em $m_n.\mathcal{O}(n, p)$ é um germe*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0) \\ (x, u) &\rightarrow (f(x, u), u), \end{aligned}$$

tal que $f(x, 0) = f_0(x)$. O germe $f(x, u)$ é chamado uma *deformação* de f_0 .

Consideremos o caso $\mathcal{G} = \mathcal{A}$ (as considerações seguintes são válidas também para qualquer grupo de Mather). Dois desdobramentos $F, G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0)$ de f_0 são isomorfos se existirem dois germes de difeomorfismos

$$\phi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0)$$

e

$$\psi : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0),$$

que são desdobramentos a s -parâmetros dos germes da identidade em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$ respectivamente, e $G = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Como $\phi_0 = 1_{\mathbb{C}^n}$ e $\psi_0 = 1_{\mathbb{C}^p}$, então ϕ_u e ψ_u são germes de difeomorfismos para u pequeno. Então $g_u = \psi_u \circ f_u \circ \phi_u$ é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a f_u via difeomorfismos que são suavemente parametrizados por u . Observamos que os germes g_u, f_u, ψ_u e ϕ_u não podem ser considerados como germes em 0 com meta 0, para $u \neq 0$. Por isso chamamos a equivalência de $\mathcal{A}_e$ -equivalência. Para manter a origem fixa temos que impor $\psi(0, u) = 0$ e $\phi(0, u) = 0$.

Dado um germe $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ definimos o *pull-back* de F por h , denotado por h^*F , o desdobramento a t -parâmetros

$$h^*F(x, v) = (f(x, h(v)), v).$$

Dois desdobramentos F e G são equivalentes se existe um difeomorfismo $h : \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F . Se G é um desdobramento a t -parâmetros de f_0 (t não necessariamente igual a s), dizemos que G é induzido por F se existir um germe $h : (\mathbb{C}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$ tal que G é isomorfo a h^*F .

Definição 1.4.2

1. F é versal se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos por F .
2. F é trivial se é isomorfo ao desdobramento constante $(x, u) \rightarrow (f_0(x), u)$.
3. f_0 é estável se todos os desdobramentos de f_0 são triviais.

Os desdobramentos versais fornecem informações sobre a geometria dos germes singulares.

Definição 1.4.3

1. O conjunto dos pontos críticos de F é

$$\Sigma F = \{(x, u) | DF_x(x, u) \text{ é singular}\},$$

onde DF_x denota a derivada com respeito as variáveis $x = (x_1, \dots, x_n)$.

2. O discriminante de F , denotado por $\Delta(F)$, é a imagem de ΣF , isto é, $\Delta(F) = F(\Sigma F)$.

3. O conjunto de bifurcação é definido por

$$Bif(F) = \{u \in \mathbb{C}^s | \exists x \in \mathbb{C}^n, 0 \text{ com } f_u \text{ instável em } x\}.$$

Uma aplicação importante dos desdobramentos versais é a seguinte

Proposição 1.4.4 ([22]) *Quaisquer dois desdobramentos versais com o mesmo número de parâmetros têm conjuntos de pontos críticos, discriminante e conjuntos de bifurcação difeomorfos.*

1.5 Determinação finita

Duas aplicações $f, g : (\mathbb{C}^n, a) \rightarrow (\mathbb{C}^p, b)$ tem o mesmo **r-jato em a** se com respeito a algum sistema de coordenadas, todas as derivadas de f e g em $x = a$ coincidem até a ordem $\mathbf{r}$.

Observemos que esta noção é independente da escolha do sistema de coordenadas.

A classe de equivalência definida pela relação acima é denominada **r-jato de f** em $x = a$ e a notação usada é: $j^r f(a)$. Quando não há dúvida quanto à fonte do jato, denotaremos simplesmente, $j^r f$.

A definição abaixo é válida para os grupos de Mather $\mathcal{G} = \mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{C}, \mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$.

Definição 1.5.1 *Um germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é $k\text{-}\mathcal{G}$ -determinado se o conjunto dos germes com o mesmo k -jato de g está contido na órbita $\mathcal{G}(g)$.*

Diremos que g é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se g é $k\text{-}\mathcal{G}$ -determinado para algum $k \leq \infty$.

Observamos que a determinação finita para o grupo $\mathcal{L}$ é descrita em termos da determinação finita do grupo $\mathcal{A}$, ou seja

Teorema 1.5.2 ([22], p.494) *Um germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é $\mathcal{L}$ -finitamente determinado se, e somente se, $p \geq 2n$ e g é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado.*

Para a determinação finita do grupo $\mathcal{K}$, temos o critério geométrico:

Teorema 1.5.3 ([22]) *Um germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado se, e somente se, $g^{-1}(0) \cap \Sigma(g) = \{0\}$.*

1.6 Germes pré quase homogêneos

A caracterização dos germes pré quase homogêneos foi feita por Saia em [17]. A principal característica destes germes é o fato de serem $\mathcal{A}$ -finitamente determinados.

Definição 1.6.1 *Um germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe pré quase homogêneo se pode ser decomposto na forma $g = f + h$, onde f é quase homogêneo finitamente determinado e $h = (h_1, \dots, h_p)$ é um germe de aplicação polinomial tal que todo monômio h_{ij} de h_i tem grau pesado menor que o grau pesado de f_i com relação aos pesos e graus de f .*

A $\mathcal{A}$ -determinação finita de germes pré quase homogêneos foi mostrada por Saia.

Proposição 1.6.2 ([17], pag. 3) *Todo germe de aplicação pré quase homogêneo é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado.*

O estudo da trivialidade topológica de famílias cujo germe inicial é pré quase homogêneo passa pela construção de filtrações de Newton convenientes, conceito que descrevemos a seguir.

1.7 Filtração de Newton

A filtração de Newton foi definida por Kouchnirenko em [10]. Nas seções 1.7 e 1.8 estes conceitos são descritos seguindo a notação de [2].

Sejam $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ os conjuntos dos inteiros não negativos, dos reais (complexos) não negativos e dos números reais (complexos) respectivamente.

Definição 1.7.1 *O poliedro de Newton $\Gamma_+(K)$ associado a um conjunto K em $\mathbb{K}^n$ é definido como sendo o fecho convexo em $\mathbb{R}_+^n$ do conjunto $\bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{K}_+^n)$.*

O bordo de Newton (ou diagrama de Newton) $\Gamma(K)$ é a união das faces compactas do poliedro de Newton $\Gamma_+(K)$ de K e denotamos $\Gamma_-(K) = \mathbb{R}_+^n - \Gamma_+(K)$.

Para um germe f em $\mathcal{O}_n$ com série de Taylor $j^\infty f = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{K}$, denotamos $\text{supp}(f) = \{k \in \mathbb{N}^n / a_k \neq 0\}$.

O poliedro de Newton de um ideal I de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$ é definido por $\Gamma_+(I) = \Gamma_+(\text{supp}(g))$ para todo $g \in I$.

Fixado um poliedro de Newton Γ_+ , a parte principal de um germe g com série de Taylor $j^\infty g = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k x^k$ é definida pelo polinômio $P_g = \sum_{k \in \Gamma} a_k x^k$.

A parte principal de um germe de aplicação $f = (f_1, \dots, f_p)$ é definida pelas partes principais de $f_1, \dots, f_p$, ou seja, $P_f = (P_{f_1}, \dots, P_{f_p})$.

Para toda face compacta $\Delta \in \Gamma$ definimos o polinômio $g_\Delta = \sum_{k \in \Delta} a_k x^k$ chamado a restrição de g à face Δ .

Se Δ é uma face de Γ_+ , $C(\Delta)$ denota o cone formado pelas semi-retas saindo da origem e passando por Δ . Como Γ_+ é um poliedro convexo em $\mathbb{R}_+^n$, a coleção de todos os $C(\Delta)$ nos dá uma decomposição poliedral de $\mathbb{R}_+^n$.

A filtração de Newton de $\mathcal{O}^n$ associada a Γ_+ é definida via uma função linear por partes $\phi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo às seguintes condições:

1. Para cada face fechada Δ , ϕ é linear no cone $C(\Delta)$.
2. ϕ assume valores inteiros positivos nos pontos de $\mathbb{Z}_+^n - \{0\}$.
3. Existe um inteiro positivo p tal que $\phi|_{\Gamma(I)} = p$.

Definição 1.7.2 Para cada $q \in \mathbb{N}$ seja

$$A_q = \{g \in \mathcal{O}_n; \text{supp}(g) \subset \phi^{-1}(q + \mathbb{N})\}.$$

Então, a sequência decrescente $\mathcal{O}_n = A_0 \supset A_1 \supset \dots$ é a filtração de Newton de $\mathcal{O}_n$ associada a $\Gamma_+(I)$.

Para um monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ em $\mathcal{O}_n$, denotamos por $\text{fil}(x^\alpha)$ o número $\phi(\alpha)$ e para um germe $g \in \mathcal{O}_n$, denotamos $\text{fil}(g) = \min\{\phi(\alpha); \alpha \in \text{supp}(g)\}$.

Para um germe $g = (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{O}(n, p)$, denotamos por $\text{fil}(g)$ a p -upla $\text{fil}(g) = (\text{fil}(g_1), \dots, \text{fil}(g_p))$.

1.8 Newton não degeneração

Os resultados nesta seção são considerados no anel das séries formais em n -variáveis, mas são igualmente válidos no anel $\mathcal{O}_n$.

Definição 1.8.1 Para cada face compacta $\Delta \subset \Gamma(I)$ definimos o anel $C[[\Delta]]$, consistindo em séries de potências com monômios não nulos $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, tal que $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in C(\Delta)$. A filtração associada a estes anéis é a restrição de $\{A_q\}$ em $C[[\Delta]]$.

A filtração acima tem a propriedade que para todo $k \in C(\Delta)$ existe uma n -upla de inteiros $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tal que $\phi(k) = \sum_{i=1}^n a_i k_i$, ou seja, é uma filtração quase homogênea em cada cone $C(\Delta)$.

Definição 1.8.2 Seja I um ideal de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$ (ou seja, $\dim_{\mathbb{K}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} < +\infty$). O ideal I é Newton não-degenerado se existe um sistema de geradores $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ de I tal que para cada face compacta $\Delta \subseteq \Gamma(I)$, o ideal I_Δ gerado por $g_{1\Delta}, g_{2\Delta}, \dots, g_{s\Delta}$ tem codimensão finita em $C[[\Delta]]$.

Pelo Teorema 6.2 de [10], temos que o ideal I_Δ gerado por $g_{1\Delta}, g_{2\Delta}, \dots, g_{s\Delta}$ tem codimensão finita em $C[[\Delta]]$ se, e somente se, para cada face compacta Δ_1 de Δ as equações $\{g_{1\Delta_1} = g_{2\Delta_1} = \dots = g_{s\Delta_1} = 0\}$ não tem solução comum em $(\mathbb{C} - \{0\})^n$. O ideal I é Newton degenerado quando ele não é Newton não-degenerado.

Observemos que esta definição não depende do sistema de geradores do ideal I .

Dizemos que um germe $g = \sum_k a_k x^k$ em $\mathcal{O}_n$ é Newton não-degenerado se o ideal gerado pelo sistema $\left\{x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, x_n \frac{\partial g}{\partial x_n}\right\}$ é Newton não-degenerado.

Exemplo: Seja $f(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1 xy^2 + k_2 x^2 y)$, com $k_i \neq 0, \forall i = 1, 2$, $(a, b) = 1$, e também $b > a \geq 2$ de tal maneira que $b + 2a < ab$ e $2b + a < ab$. O germe de função jacobiano de f , denotado por Jf , é Newton não-degenerado. De fato,

$$Jf(x, y) = by^b - ax^a + k_1 xy^2 - k_2 x^2 y.$$

O que implica

$$\langle xJ_x, yJ_y \rangle = \langle -a^2 x^a + k_1 xy^2 - 2k_2 x^2 y, b^2 y^b + 2k_1 xy^2 - k_2 x^2 y \rangle.$$

Figura 1.1: Poliedro de Newton $\Gamma_+(Jf)$

Denotemos por $\Delta_i, i = 1, 2, 3$, as faces compactas do poliedro de Newton do germe Jacobiano Jf .

Temos

$$\begin{aligned} xJg_{x|\Delta_1} &= k_1xy^2, & yJg_{y|\Delta_1} &= b^2y^b + 2k_1xy^2; \\ xJg_{x|\Delta_2} &= k_1xy^2 - 2k_2x^2y, & yJg_{y|\Delta_2} &= 2k_1xy^2 - k_2x^2y; \\ xJg_{x|\Delta_3} &= -a^2x^a - 2k_2xy^2, & yJg_{y|\Delta_3} &= -k_2x^2y. \end{aligned}$$

Portanto Jf é Newton não degenerado. ■

1.9 Número de Milnor e a codimensão de ideais.

Os resultados descritos nesta seção foram descritos em [2]. Fixado um ideal I de codimensão finita em $\mathcal{O}_n$, denotamos por $v(I)$ o volume do poliedro $\mathbb{R}_+^n - \Gamma_+(I)$.

Definição 1.9.1 *Dado um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, o número de Milnor $\mu(f)$ é definido algebricamente por*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_2}}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle}.$$

Kouchnirenko em [10] obtém uma fórmula para o cálculo do número de Milnor de germes Newton não degenerados em termos dos vértices do poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$.

Bivia-Ausina, Fukui e Saia em [2] mostraram que é possível calcular $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I}$ para ideais Newton não-degenerados gerados por n elementos.

Proposição 1.9.2 ([2]) *Suponha que $I \subseteq \mathcal{O}_n$ é um ideal Newton não-degenerado, de codimensão finita e definindo uma interseção completa. Então:*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{A}}{I} = n!v(I).$$

Quando o ideal I é quase homogêneo de tipo $(w_1, \dots, w_n; d_1, \dots, d_p)$, obtemos a fórmula de Milnor e Orlik (ver [2] para maiores detalhes):

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbf{A}}{I} = \frac{d_1 \dots d_p}{w_1 \dots w_n}.$$

Capítulo 2

Campos de vetores controlados

Nosso objetivo neste capítulo é dar condições suficientes para que pequenas deformações de germes finitamente determinados $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $p \geq 2$, sejam C^0 - $\mathcal{A}$ -triviais.

Consideramos deformações g_λ de tipo

$$g_\lambda(x, y) = g(x, y) + \lambda h(x, y) = (g_1 + \lambda h_1, \dots, g_p + \lambda h_p)$$

com $fil_{\Gamma_+}(h_i) > fil_{\Gamma_+}(g_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$, onde Γ_+ é um poliedro de Newton fixado.

A motivação para este estudo vem da tese de doutorado de M. A. S. Ruas ([15]), onde são obtidas estimativas para a C^0 - $\mathcal{A}$ -trivialidade topológica de germes $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ a partir de informações do espaço tangente do germe e sobre a ordem do germe h . Observamos que estas estimativas são descritas em termos da filtração usual para $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_p$. Neste capítulo estas estimativas são generalizadas, considerando filtrações de Newton convenientes sobre os espaços $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_p$.

O método utilizado para determinar a C^0 - $\mathcal{A}$ -trivialidade da família g_λ consiste na construção de campos de vetores controlados. As principais referências para este método são os trabalhos de Damon sobre trivialidade topológica, que descrevemos a seguir.

Definição 2.0.3 *Uma função $\rho : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ analítica é chamada um controle se existem constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $\rho(x) \geq c|x|^\alpha$.*

Para obtermos deformações $g + \lambda h$ topologicamente triviais, para pequenos valores de λ , nosso objetivo é determinar uma função controle ρ de tal forma que existam campos de vetores analíticos ξ e η que satisfazem uma equação de tipo Thom-Levine (ver [22] para maiores detalhes)

$$\frac{dg_\lambda}{d\lambda} \cdot \rho = tg(\xi) + wg(\eta)$$

ou seja

$$\frac{dg_\lambda}{d\lambda} = h = tg\left(\frac{\xi}{\rho}\right) + \frac{\eta \circ g}{\rho}.$$

A partir desta equação são determinadas condições de filtração para o germe h , de tal forma que na equação $tg\left(\frac{\xi}{\rho}\right) + \frac{\eta \circ g}{\rho(g)}$ os campos de vetores $\frac{\xi}{\rho}$ e $\frac{\eta \circ g}{\rho(g)}$ sejam integráveis.

A integrabilidade destes campos é garantida se for possível obter uma desigualdade de Lojasiewicz para ξ , ρ e η , ρ , ou seja, se existe uma constante positiva C tal que $|\xi(x)| \leq C \cdot |\rho(x)|$ numa vizinhança da origem, e analogamente para o campo η .

Os resultados descritos por Maria Ruas em [15] se aplicam para o caso em que $n \geq p$, pois é necessário usar os menores $p \times p$ da matriz jacobiana do germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ para a construção do controle. Estes resultados são exatos para a determinação do tipo topológico de deformações de germes homogêneos de $\mathbb{C}^n, 0$ em $\mathbb{C}^p, 0$, porém, fornecem estimativas muito altas para a determinação do tipo topológico de germes que não são homogêneos. Observemos que este problema aparece porque a filtração fixada em [15] para $\mathcal{O}_n$ e $\mathcal{O}_p$ é a filtração usual calculada pelo grau de um monômio.

Neste capítulo é feita uma generalização dos resultados descritos em [15], com a fixação de filtrações A_k para $\mathcal{O}_n$ e $B_{k'}$ para $\mathcal{O}_p$. Esta generalização também se aplica para os casos $n \geq p$.

Além disto, neste capítulo também é obtido um resultado para o caso de germes $\mathbb{C}^n, 0$ em $\mathbb{C}^p, 0$ com $p \geq 2n$. Observemos que estamos tomando $p \geq 2n$, pois em [22] é mostrado para estes casos, que germes são $\mathcal{A}$ -finitamente determinados se, e somente se, são $\mathcal{L}$ -finitamente determinados. Como estamos interessados no estudo de germes $\mathcal{A}$ -finitamente determina-

dos, é conveniente a fixação destas dimensões. Neste caso, a função controle será obtida somente em termos das funções coordenadas $(g_1, \dots, g_p)$.

2.1 Caso $n \geq p$.

Neste caso a função controle ρ será definida em termos de uma função controle na meta ρ_m e de uma função na fonte ρ_f via uma partição da unidade conveniente. Descrevemos a seguir a construção destas funções.

Fixemos em $\mathbb{C}^n$ um poliedro de Newton Γ_+ e sua respectiva filtração $A_k = \{h \in \mathcal{O}_n; \text{fil}_{\Gamma_+}(h) \geq k\}$.

Para $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ vamos supor que

$$D_1 = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_1) \leq D_2 = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_2) \leq \dots \leq D_p = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_p).$$

Denotemos por M_I , $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, o determinante do menor $p \times p$ de dg indexado por I e $L_I = \text{fil}_{\Gamma_+}(M_I)$.

Definimos o controle na meta ρ_m e a função $\rho_f(g)$ por

$$\begin{aligned} \rho_m : \mathbb{C}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow |y_1|^{2r_1} + |y_2|^{2r_2} + \dots + |y_p|^{2r_p} \\ \\ \rho_f(g) : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sum |M_I|^{2\alpha_I} \end{aligned}$$

onde os r_i 's são os menores inteiros positivos tais que existe um valor inteiro D , tal que

$$D_i r_i = \alpha_I L_I := D, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Assim, a filtração da função $\rho_f(g)$ na fonte é:

$$\begin{aligned} \text{fil}_{\Gamma_+}(\rho_f(g)) &= \min_I \{2\alpha_I L_I\} \\ &= 2D. \end{aligned}$$

Denotando por $R = m.m.c\{r_1, \dots, r_p\}$ consideramos a filtração da meta como sendo a filtração relativa ao poliedro de Newton fixado pela p -upla $w =$

$(w_1, \dots, w_p)$, onde $w_i = \frac{R}{r_i}$, $i = 1, \dots, p$. Para um monômio $u^\alpha \in \mathcal{O}_p$, denotamos $fil_w(u^\alpha) = w_1\alpha_1 + \dots + w_p\alpha_p$. Definimos $B_{k'} = \{g \in \mathcal{O}_p; fil_w(g) \geq k'\}$.

Observamos que a função controle $\rho_m(y_1, y_2, \dots, y_p) = |y_1|^{2r_1} + |y_2|^{2r_2} + \dots + |y_p|^{2r_p}$ é quase homogênea com filtração $fil_w(\rho_m) = 2R$.

Observe que a composição $\rho_m \circ g$ tem filtração na fonte

$$\begin{aligned} fil_{\Gamma_+}(\rho_m \circ g) &= fil(|g_1|^{2r_1} + |g_2|^{2r_2} + \dots + |g_p|^{2r_p}) \\ &= 2r_i \cdot D_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ &= 2D \end{aligned}$$

Definição 2.1.1 Denotando por $a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$, $j = 1, 2, \dots, r$, os vértices do poliedro de Newton $\Gamma_+(A_{2D})$, definimos o controle associado a estes vértices por

$$\rho_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^r x_1^{2a_1^j} x_2^{2a_2^j} \dots x_n^{2a_n^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que a função ρ_f nem sempre é um controle, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo: Seja $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $g(x, y) = (xy, x^4 + y^5 + xy^2)$. Fixado o poliedro de Newton $\Gamma_+(g_2)$, para obtermos os valores $D_i = fil_{\Gamma_+}(g_i)$ procedemos como segue.

Os dois vetores primitivos são $v^1 = (3, 1)$ relativo à face Δ_1 com $\ell(v^1) = 5$, e $v^2 = (2, 3)$ relativo à face Δ_2 com $\ell(v^2) = 8$, então $M = 40 = m.m.c(\ell(v^1), \ell(v^2))$.

Como $\varphi(1, 1) = \min_{k=1}^2 \left\{ \frac{40}{\ell(v^k)} \cdot \langle (1, 1), v^k \rangle \right\}$ então $fil_{\Gamma_+}(xy) = \inf\{\varphi(1, 1)\} = \inf\{\min\{32, 25\}\} = 25$.

Por outro lado, $fil_{\Gamma_+}(x^4 + y^5 + xy^2) = M = 40$.

Queremos encontrar r_1, r_2 e α tais que $fil_{\Gamma_+}((xy)^{2r_1}) = fil_{\Gamma_+}(g_2^{2r_2}) = fil_{\Gamma_+}(|Jg|^{2\alpha})$, ou seja, $5r_1 = 8r_2$ e $\alpha = r_2$. Neste caso, como $(5, 8) = 1$ basta tomar $r_1 = 8$ e $r_2 = 5$.

Assim, o controle na meta $\rho_m : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $\rho_m(y) = |y_1|^{16} + |y_2|^{10}$,

Figura 2.1: Poliedro de Newton $\Gamma_+(g_2)$.

A função $\rho_f(g) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida na fonte é: $\rho_f(g) = (5y^5 - 4x^4 + xy^2)^{10}$.

O controle ρ_v associado ao poliedro de Newton $\Gamma_+(g_2^{10})$ é

$$\rho_v(x, y) = (x^{80} + y^{100} + x^{20}y^{40})^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Caso $p \geq 2n$.

Neste caso, a função controle é obtida somente em termos das funções g_i do germe g e o processo de construção é análogo ao anterior, o qual descrevemos a seguir.

Fixemos em $\mathbb{C}^n$ um poliedro de Newton Γ_+ cuja filtração em $\mathcal{O}_n$ é $A_k = \{h \in \mathcal{O}_n; \text{fil}_{\Gamma_+}(h) \geq k\}$.

Para $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ supomos que

$$D_1 = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_1) \leq D_2 = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_2) \leq \dots \leq D_p = \text{fil}_{\Gamma_+}(g_p).$$

Definimos o controle ρ_m por

$$\begin{aligned} \rho_m : \mathbb{C}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\rightarrow |y_1|^{2r_1} + |y_2|^{2r_2} + \dots + |y_p|^{2r_p} \end{aligned}$$

onde os r_i 's são os menores inteiros positivos tais que

$$D_1 r_1 = D_2 r_2 = \dots = D_p r_p = D.$$

A filtração na meta é definida da mesma forma que no caso anterior, ou seja, se $R = m.m.c\{r_1, \dots, r_p\}$ então $fil_w(u^\alpha) = \sum w_i \alpha_i$, onde $w_i = \frac{R}{r_i}$. Conseqüentemente, $B_{k'} = \{g \in \mathcal{O}_p; fil_w(g) \geq k'\}$.

Então, a função controle

$$\rho_m(y_1, y_2, \dots, y_p) = |y_1|^{2r_1} + |y_2|^{2r_2} + \dots + |y_p|^{2r_p}$$

tem filtração relativa a $w = (w_1, \dots, w_p)$ igual à $fil_w(\rho_m) = 2R$ e a composição $\rho_m \circ g$ tem filtração na fonte

$$\begin{aligned} fil_{\Gamma_+}(\rho_m \circ g) &= fil(|g_1|^{2r_1} + |g_2|^{2r_2} + \dots + |g_p|^{2r_p}) \\ &= 2.r_i.D_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ &= 2D. \end{aligned}$$

2.3 Resultado geral.

Temos o seguinte resultado geral baseado na construção acima

Proposição 2.3.1 *Seja $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação, com $p \geq 2$, tal que*

$$A_{2D+D_p}\theta_g \subseteq tg(A_{2D}\theta_n) + wg(B_{2R+1}\theta_p).$$

1. *Se $n \geq p$: suponha que existam uma vizinhança V da origem em $\mathbb{C}^n$ e constantes α e β tais que*

$$\rho_f(g(x)) \geq \beta \rho_v(x), \quad \forall x \in V \cap \{x; \rho_m(g(x)) < \alpha \rho_v(x)\}.$$

2. *Se $p \geq 2n$: suponha que para todo $x \in V$, onde V é uma vizinhança da origem em $\mathbb{C}^n$, ρ_m satisfaz*

$$\rho_m(g(x)) \geq c \rho_v(x),$$

onde ρ_v é o controle associado aos vértices do poliedro de Newton $\Gamma_+(A_{2D})$. Então deformações de g com $fil(h_i) \geq D_p$, $\forall i = 1, \dots, p$, são C^0 - $\mathcal{A}$ -triviais.

Para a demonstração desta proposição destacamos o Lema a seguir, o qual nos permite que, a partir de condições obtidas sobre o espaço tangente do germe $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, obtenhamos condições análogas para os espaços tangentes de desdobramentos de g .

Seja I um ideal finitamente gerado de $\mathcal{O}_p$, m_1 o ideal maximal de $\mathcal{O}_1$ e $\tilde{A}_{2D+D_p}$ o ideal em $\mathcal{O}_{p+1}$ gerado por λ e A_{2D+D_p} . Temos

Lema 2.3.2 *Seja $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, com $p \geq 2$, tal que*

$$tg(A_{2D}\theta_n) + wg(I.\theta_p) \supseteq A_{2D+D_p}\theta_g.$$

Então, para qualquer desdobramento $G(x, \lambda) = (g_\lambda(x), \lambda)$ com $g_0(x) = g(x)$, $g_\lambda - g_0 \in m_1.A_{D_p}\theta_G$ e $|\lambda| < \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeno, temos

$$tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) \supseteq A_{2D+D_p}\theta_G.$$

Demonstração: Temos

$$A_{2D+D_p}\theta_G = A_{2D+D_p}\theta_g + \lambda A_{2D+D_p}\theta_G \subseteq tg(A_{2D}\theta_n) + wg(I.\theta_p) + \lambda A_{2D+D_p}\theta_G.$$

Como $tg(A_{2D}\theta_n) + wg(I.\theta_p) \subseteq tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + \lambda A_{2D+D_p}\theta_G$ segue-se que

$$A_{2D+D_p}\theta_G \subseteq tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + \lambda A_{2D+D_p}\theta_G \quad (2.3.1)$$

Seja E o $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo finitamente gerado, definido por

$$E = \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1})}.$$

Observemos que E é também um $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ -módulo e que $(\lambda).E = E$. De fato,

$$\begin{aligned} (\lambda).E &= \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + (\lambda)[tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G]}{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1})} \\ &= \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1})} = E. \end{aligned}$$

Então, se E for finitamente gerado como $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ -módulo podemos aplicar o Lema de Nakayama [1] para obter $E = 0$, ou seja

$$A_{2D+D_p}\theta_G \subseteq tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}).$$

Nosso objetivo agora é mostrar que E é finitamente gerado, como $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ -módulo .

Observe que

$$\begin{aligned} E &= \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1})} \\ &\subseteq \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})} + \frac{wG(I.\theta_{p+1})}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})}. \end{aligned}$$

Definimos E' o $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo finitamente gerado por

$$E' = \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})}.$$

Observemos que E' é também um $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ -módulo.

Como $\frac{wG(I.\theta_{p+1})}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})}$ é finitamente gerado como $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ - módulo, pois o ideal I é finitamente gerado, basta mostrarmos que E' é finitamente gerado como $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ - módulo.

O Teorema de Preparação de Malgrange [19] diz que o $\mathcal{O}_{n+1}$ -módulo finitamente gerado E' é um $G^*(\mathcal{O}_{p+1})$ - módulo finitamente gerado se, e somente se, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{E'G^*(m_{p+1})E'}{<} + \infty$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{E'}{G^*(m_{p+1})E'} &= \frac{\frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})}}{\frac{G^*(m_{p+1})[tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G] + tG(A_{2D}\theta_{n+1})}{tG(A_{2D}\theta_{n+1})}} \\ &= \frac{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G}{tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})[tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + A_{2D+D_p}\theta_G]}. \end{aligned}$$

Sejam $S = A_{2D+D_p}\theta_G$ e $T = tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})A_{2D+D_p}\theta_G$. Desta forma o quociente anterior é $\frac{T+S}{T}$, e pelo Teorema do isomorfismo temos $\frac{T+S}{T} \cong \frac{S}{T \cap S}$.

Como

$$tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + wG(I.\theta_{p+1}) + \lambda A_{2D+D_p}\theta_G \subseteq tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})\theta_G$$

então por (2.3.1) segue-se que $tG(A_{2D}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})\theta_G \supseteq A_{2D+D_p}\theta_G$.

Logo, multiplicando por A_{2D+D_p} obtemos

$$tG(A_{4D+D_p}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})A_{2D+D_p}\theta_G \supseteq A_{4D+2D_p}\theta_G.$$

Por outro lado,

$$tG(A_{4D+D_p}\theta_{n+1}) + G^*(m_{p+1})A_{2D+D_p}\theta_G \supseteq \lambda A_{2D+D_p}\theta_G.$$

Portanto, o denominador de $\frac{S}{T \cap S}$ contém $\tilde{A}_{2D+D_p}A_{2D+D_p}\theta_G$. Assim,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{S}{T \cap S} \leq \dim_{\mathbb{C}} \frac{A_{2D+D_p}\theta_G}{\tilde{A}_{2D+D_p}A_{2D+D_p}\theta_G} < +\infty.$$

■

Demonstração da Proposição 2.3.1: Seja $G_\lambda(x, y)$ um desdobramento de g de tipo $G_\lambda(x, y) = (g_\lambda(x, y), \lambda)$, aonde $g_\lambda(x, y) = g(x, y) + \lambda h(x, y)$ e $h \in A_{D_p}\theta_g$.

A hipótese geral nos diz que $h.\rho_{\mathbf{m}}(g) \in tg(A_{2D}\theta_n) + wg(B_{2R+1}\theta_p)$, pois, $\text{fil}(h_i) \geq D_p$ e $\text{fil}(\rho_{\mathbf{m}}(g)) \geq 2D$.

Do Lema 2.3.2 segue-se que existem campos de vetores analíticos $\xi \in A_{2D}\theta_{n+1}$ e $\eta \in B_{2R+1}\theta_{p+1}$ tais que a inclusão acima se realiza para deformações, ou seja

$$h.\rho_{\mathbf{m}}(g_\lambda) = tG(\xi) + \eta \circ G. \quad (2.3.2)$$

A equação (2.3.2) possibilita a construção dos campos de vetores relativos ao controle $\rho_{\mathbf{m}}$. Seja ω definido em $(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0 \times 0)$ da seguinte maneira

$$\omega(y, \lambda) = \begin{cases} \frac{\eta(y, \lambda)}{\rho_{\mathbf{m}}(y)}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Temos $fil_w(\eta) \geq 2R + 1 > 2R = fil_w(\rho_m)$, e como esta filtração é quase homogênea os Lemas 1) e 2) de [16] nos garantem que o campo ω é integrável.

Observemos que apesar de $\eta(y, \lambda)$ ser um germe em $\mathcal{O}(p+1, p)$, estamos usando a $fil_w(\eta)$ como um elemento de $\mathcal{O}(p, p)$ considerando somente as variáveis $(y_1, \dots, y_p)$.

Demonstração para o caso $n \geq p$: Iremos construir um campo de vetores relativo à função ρ_f .

Para cada $I = \{i_1, i_2, \dots, i_p\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, seja M_{I_λ} o determinante $p \times p$ da matriz jacobiana de Jg_λ . Podemos escrever $\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda} M_{I_\lambda} = tG(\gamma_I)$, com $\gamma_I = \sum \gamma_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e cada γ_i é definido como

$$\begin{cases} \gamma_i = 0, & \text{se } i \notin I \\ \gamma_{i_m} = \sum N_{ji_m} \left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda} \right)_j, & \text{se } i_m \in I. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

e N_{ji_m} é o $(p-1) \times (p-1)$ cofator de $\frac{\partial g_j}{\partial x_{i_m}}$.

Por definição $\rho_f(g_\lambda) = \sum |M_{I_\lambda}|^{2\alpha_I}$. Portanto

$$h \cdot \rho_f(g_\lambda) = tG \left(\sum \gamma_I M_{I_\lambda}^{\alpha_I-1} \overline{M_{I_\lambda}}^{\alpha_I} \right).$$

E obtemos que

$$h = tG \left(\frac{\sum \gamma_I M_{I_\lambda}^{\alpha_I-1} \overline{M_{I_\lambda}}^{\alpha_I}}{\rho_f(g_\lambda)} \right). \quad (2.3.4)$$

Denotemos por $\gamma_{\mathcal{R}} = \sum \gamma_I M_{I_\lambda}^{\alpha_I-1} \overline{M_{I_\lambda}}^{\alpha_I}$.

Temos

$$\begin{aligned}
fil_{\Gamma_+}(\gamma_{\mathcal{R}}) &= \min\{fil_{\Gamma_+}(M_I^{\alpha_I-1}) + fil_{\Gamma_+}(\overline{M_I}^{\alpha_I}) + fil_{\Gamma_+}(\gamma_I)\} \\
&\geq \min\{(2\alpha_I fil_{\Gamma_+}(M_I) - fil_{\Gamma_+}(\frac{\partial g_j}{\partial x_{i_m}}) + fil_{\Gamma_+}(h_j))\} \\
&\geq \min\{2D - (fil_{\Gamma_+}(g_j) - r) + fil_{\Gamma_+}(h_j)\} \\
&\geq 2D + r, \text{ pois } fil_{\Gamma_+}(h_j) \geq D_p \geq D_j = fil_{\Gamma_+}(g_j), \forall j \\
&= fil_{\Gamma_+}(\rho_f(g_\lambda)) + r,
\end{aligned}$$

onde $r = \min_{i,k} \{\frac{M}{\ell(v^k)} \cdot v_i^k\}$.

Desta forma, a integrabilidade do campo $\frac{\gamma_R}{\rho_f(g_\lambda)}$, definido na equação 2.3.4 é garantida pelas hipóteses da Proposição e pelo seguinte

Lema 2.3.3 *Existem constantes positivas α_1 , β e uma vizinhança V da origem de $\mathbb{C}^n$ tais que*

$$\rho_f(g_\lambda(x)) \geq \alpha_1 \rho_v(x), \forall x \in V \cap \{\rho_m(g_\lambda(x)) < \beta \rho_v(x)\}.$$

Demonstração: Como $g_\lambda = g + \lambda h$, com $fil(h) > fil(g)$, segue-se que

$$\rho_f(g_\lambda) \geq \rho_f(g) - \lambda \theta(x, \lambda), \text{ com } fil(\theta) \geq fil(\rho_f(g)).$$

Como por hipótese $\rho_f(g) \geq \alpha \rho_v(x)$ para $x \in V \cap \{x; \rho_m(g(x)) < \beta \rho_v(x)\}$ então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\lambda \theta(x, \lambda) \leq c \rho_v(x).$$

Por definição $\rho_m(g_\lambda(x)) \leq \rho_m(g(x))$. Assim, para qualquer

$$x \in V \cap \{x; \rho_m(g_\lambda(x)) \leq \rho_m(g(x)) < \alpha \rho_v(x)\}$$

temos

$$\begin{aligned}
\rho_f(g_\lambda(x)) &\geq \rho_f(g(x)) - \lambda \theta(x, \lambda) \\
&\geq (\alpha - c) \rho_v(x) \\
&= \alpha_1 \rho_v(x).
\end{aligned}$$

O argumento final utiliza uma conveniente partição da unidade para a obtenção de um campo integrável em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times 0)$, considerando as equações 2.3.2 e 2.3.4.

Seja $H = (V \times I) - (0 \times I)$, aonde $I = (-\epsilon, \epsilon)$ e consideremos os seguintes conjuntos

$$F_1 = (\{(x, \lambda); g_\lambda(x) = 0\} - (0 \times \mathbb{C})) \cap H;$$

$$F_2 = \{(x, \lambda); \rho_m(g_\lambda(x)) \geq \alpha \rho_v(x)\} \cap H;$$

$$E_1 = \{(x, \lambda); \rho_m(g_\lambda(x)) < \alpha_1 \rho_v(x)\} \cap H;$$

$$E_2 = \{(x, \lambda); \rho_m(g_\lambda(x)) < \alpha_2 \rho_v(x)\} \cap H.$$

com $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Observe que os conjuntos F_1 e F_2 são fechados disjuntos de H .

Consideremos $\zeta(x) = \zeta_1(x) + \zeta_2(x)$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{E_2, (\overline{E_1})^c\}$.

$$\zeta_1(x, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, \lambda) \in F_1 \\ 0, & \text{se } (x, \lambda) \in (E_2)^c \end{cases}$$

$$\zeta_2(x, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x, \lambda) \in F_2 \\ 0, & \text{se } (x, \lambda) \in \overline{E_1}. \end{cases}$$

Da equação 2.3.2, seja

$$\nu_2(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\xi(x, \lambda)}{\rho_{\mathbf{f}}(g_\lambda(x))}, & \text{se } (x, \lambda) \in F_1^c \\ 0, & \text{se } (x, \lambda) \in F_1. \end{cases}$$

De 2.3.4, definimos

$$\nu_1(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\gamma_{\mathcal{R}}}{\rho_{\mathbf{f}}(g_\lambda(x))}, & \text{se } (x, \lambda) \in F_2^c \\ 0, & \text{se } (x, \lambda) \in F_2. \end{cases}$$

Todas as funções definidas podem ser estendidas de modo a se anularem em 0×0 .

Seja ν campo em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times 0)$ definido por

$$\nu(x, \lambda) = \begin{cases} \zeta_1(x, \lambda)\nu_1(x, \lambda) + \zeta_2(x, \lambda)\nu_2(x, \lambda), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Por construção o campo ν é contínuo e integrável. Além disso tem-se

$$h = tG(\nu(x, \lambda)) + w(G(x, \lambda)).$$

Com as integrais de ν e ω , construímos os germes de homeomorfismos

$$H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0 \times 0)$$

$$H(x, \lambda) = (h(x, \lambda), \lambda), \quad h(x, 0) = x$$

$$K : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0 \times 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0 \times 0)$$

$$K(y, \lambda) = (k(y, \lambda), \lambda), \quad k(y, 0) = y$$

tais que $K \circ G \circ H^{-1} = (g, id_{\mathbb{C}})$.

Demonstração para o caso $p \geq 2n$.

Pela equação 2.3.2, obtemos

$$h = tG \left(\frac{\xi}{\rho_m(g_\lambda)} \right) + \frac{\eta \circ G}{\rho_m(g_\lambda)}.$$

Da hipótese geral $\xi \in A_{2D}$ e de 2) temos

$$\rho_m(g_\lambda)(x) \geq c \cdot \rho_v(x).$$

Assim, segue-se que o campo na fonte $\frac{\xi}{\rho_m(g_\lambda)}$ é integrável.

A obtenção dos homeomorfismos H e K tal que $K \circ G \circ H^{-1} = (g, id_{\mathbb{C}})$, segue analogamente ao caso anterior, considerando o campo $\nu = \frac{\xi}{\rho_m}$. ■

2.4 Germes Newton não degenerados com $p \geq 2n$

Para um germe de aplicação $g : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ finitamente determinado com $p \geq 2n$, é possível considerar uma hipótese de Newton não degeneração que nos permite obter a C^0 - $\mathcal{A}$ -trivialidade topológica sem a necessidade de verificar a condição geral da Proposição 2.3.1 sobre o espaço tangente.

De fato temos o seguinte

Proposição 2.4.1 *Suponha que existem inteiros positivos $r_1, r_2, \dots, r_p$ tal que o ideal gerado pelo sistema $\{g_1^{2r_1}, \dots, g_p^{2r_p}\}$ é Newton não degenerado. Então, deformações de g de tipo $g_\lambda = g + \lambda h$, com $fil(h_i) \geq fil(g_i)$ $i = 1, \dots, p$, são C^0 - $\mathcal{L}$ -triviais.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.5.2, como $p \geq 2n$ então g é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, g é $\mathcal{L}$ -finitamente determinado.

Assim

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda} \cdot \rho_{\mathbf{m}}(g) \in T\mathcal{L}g$$

ou seja, existe $\eta \in m_p\theta_p$ tal que

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda} \cdot \rho_{\mathbf{m}}(g) = \eta \circ g.$$

Para mostrar a integrabilidade do campo $\frac{\eta \circ g}{\rho_{\mathbf{m}}(g)}$ Gaffney mostra em [8] pág. 482 que é suficiente mostrarmos que, fixando um sistema de coordenadas $(y_1, \dots, y_p)$ em $\mathbb{C}^p$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}(\lambda, y_1, \dots, y_p) \right| \leq C|y_1, \dots, y_p|$$

ou equivalentemente

$$\left| \frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}(\lambda, y_1, \dots, y_p) \right| \leq C(|y_1|^{2r_1} + \dots + |y_p|^{2r_p}) \quad (2.4.5)$$

Ainda em [8], Gaffney afirma que 2.4.5 é equivalente à desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, \dots, x_n) \right| &\leq C(|(g_1)_\lambda|^{2r_1} + \dots + |(g_p)_\lambda|^{2r_p}) \\ &= C\rho_{\mathbf{m}}(g_\lambda). \end{aligned}$$

para um sistema de coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ fixado na fonte.

Como $g_\lambda = g + \lambda h$, temos $\rho_{\mathbf{m}}(g_\lambda) \leq \rho_{\mathbf{m}}(g) + \lambda\theta(x, \lambda)$, com $fil(\theta) \geq fil(\rho_{\mathbf{m}}(g))$.

Seja ρ_v o controle dado pelos vértices de Γ_+ . Como $\{(g_1)^{2r_1} \dots (g_p)^{2r_p}\}$ é Newton não degenerado, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\rho_v(x) \leq C\rho_{\mathbf{m}}(g)$$

e como $fil(h_i) \geq fil(g_i)$ temos

$$\left| \frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, \dots, x_n) \right| \leq \rho_v(x) \leq C \cdot \rho_m(g)$$

■

2.4.1 Aplicação ao caso $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$

Seja k um número ímpar maior ou igual a 5 tal que k , $k+2$, $k+4$ e $k+6$ são primos entre si, por exemplo (5, 7, 9, 11).

Considere o germe homogêneo $\phi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$:

$$\phi(x, y) = (\alpha_1 x^k + \alpha_2 y^k, \beta_1 x^{k+2} + \beta_2 y^{k+2}, \theta_1 x^{k+4} + \theta_2 y^{k+4}, \gamma_1 x^{k+6} + \gamma_2 y^{k+6}).$$

Segue do exemplo 2.1 de [3] que ϕ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado para valores genéricos de α_i , β_i , θ_i e γ_i .

Conseqüentemente, o germe pré quase homogêneo $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \alpha_1 x^k + \alpha_2 y^k + a_1 xy^{k-2} + a_2 x^{k-2}y; \\ g_2(x, y) &= \beta_1 x^{k+2} + \beta_2 y^{k+2} + b_1 xy^k + b_2 x^k y; \\ g_3(x, y) &= \theta_1 x^{k+4} + \theta_2 y^{k+4} + c_1 xy^{k+2} + c_2 x^{k+2}y; \\ g_4(x, y) &= \gamma_1 x^{k+6} + \gamma_2 y^{k+6} + d_1 xy^{k+4} + d_2 x^{k+4}y \end{aligned}$$

é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado. Vamos supor que a_i , b_i , c_i e d_i são números primos distintos.

Fixando o poliedro de Newton $\Gamma_+(g_1)$ obtemos

$$\begin{aligned} fil(g_1) &= k(k-1); \\ fil(g_2) &= (k+2)(k-1); \\ fil(g_3) &= (k+4)(k-1); \\ fil(g_4) &= (k+6)(k-1). \end{aligned}$$

Devemos encontrar r_1, r_2, r_3, r_4 de tal forma que

$$r_1 k(k-1) = r_2 (k+2)(k-1) = r_3 (k+4)(k-1) = r_4 (k+6)(k-1).$$

Figura 2.2: Poliedro de Newton $\Gamma_+(g_1)$

Basta tomar $r_1 = (k+2)(k+4)(k+6)$, $r_2 = k(k+4)(k+6)$, $r_3 = k(k+2)(k+6)$ e $r_4 = k(k+2)(k+4)$.

Assim, o controle ρ_m é dado por

$$\begin{aligned} \rho_m(y_1, y_2, y_3, y_4) &= |y_1|^{2(k+2)(k+4)(k+6)} + |y_2|^{2k(k+4)(k+6)} \\ &+ |y_3|^{2k(k+2)(k+6)} + |y_4|^{2k(k+2)(k+4)}. \end{aligned}$$

Vamos denotar por Δ_i , $i = 1, 2, 3$, as faces compactas do poliedro de Newton $\Gamma_+(A_{2D})$, com $D = k(k-1)(k+2)(k+4)(k+6)$.

Afirmamos que $\rho_m(g)$ é Newton não degenerado.

Vamos mostrar isto para a face compacta Δ_1 de $\Gamma_+(A_{2D})$, pois para as outras faces a técnica é a mesma. Temos

$$g_1^{2(k+2)(k+4)(k+6)}|_{\Delta_1} = (y^k + a_1xy^{k-2})^{2(k+2)(k+4)(k+6)}|_{\Delta_1}$$

$$g_2^{2k(k+4)(k+6)}|_{\Delta_1} = (y^{k+2} + b_1xy^k)^{2k(k+4)(k+6)}|_{\Delta_1}$$

$$g_3^{2k(k+2)(k+6)}|_{\Delta_1} = (y^{k+4} + c_1xy^{k+2})^{2k(k+2)(k+6)}|_{\Delta_1}$$

$$g_4^{2k(k+2)(k+4)}|_{\Delta_1} = (y^{k+6} + d_1xy^{k+4})^{2k(k+2)(k+4)}|_{\Delta_1}.$$

Conseqüentemente, como a_1 , b_1 , c_1 e d_1 foram tomados primos distintos, segue-se que o sistema acima só tem os eixos coordenados como solução. O que implica

$$\rho_{\mathbf{m}}(g) \geq \alpha \rho_v.$$

Concluimos que deformações de tipo $g_\lambda = g + \lambda.h$, com $h \in A_{(k+6)(k-1)}$, são C^0 - $\mathcal{A}$ -triviais.

2.4.2 Aplicação ao caso $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

Em [7] Gaffney e Mond provaram que todo germe quase homogêneo finitamente determinado do plano no plano, de *coposto* 2 com conjunto singular irredutível, tem (a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência) a forma normal:

$$f(x, y) = (xy, x^a + y^b), \text{ com } (a, b) = 1,$$

Ainda em [7] é proposta a questão de se calcular os tipos topológicos que aparecem em uma $\mathcal{K}$ -órbita de um germe quase homogêneo de *coposto* 2 finitamente determinado. Como exemplo, são citados os germes $(xy, x^2 + y^3)$ com somente uma órbita e $(xy, x^3 + y^4)$ cujas possíveis órbitas são dadas por germes do tipo $(xy, x^3 + y^4 + \alpha x^2y + \beta xy^2)$ e que são em número finito.

Nessa seção iremos determinar condições para a trivialidade topológica de deformações

$$g_\lambda(x, y) = g(x, y) + \lambda(0, h(x, y))$$

onde $g(x, y)$ é um germe pré quase homogêneo de tipo

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + xy \cdot \theta(x, y))$$

onde $\theta(x, y) = \sum_{r,s} k_{r,s} x^{r-1} y^{s-1}$, com $br + as < ab$ e $\text{fil}(\theta) \geq \text{fil}(x^a + y^b + \sum_{r,s} k_{r,s} x^r y^s)$.

Para isto fixamos o poliedro de Newton $\Gamma_+ = \Gamma_+(g_2)$

Observemos que neste caso, o germe do jacobiano Jg tem os mesmos monômios que o germe g_2 e $\Gamma_+ = \Gamma_+(Jg)$.

Portanto, os termos α_I e $\text{fil}(M_I)$ definidos na seção anterior são iguais a r_2 e D_2 , respectivamente.

Definição 2.4.2 Denotando por $a^j = (a_1^j, a_2^j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, os vértices do poliedro de Newton $\Gamma_+(g_2^{2r_2})$, definimos o controle associado $\rho_v(x, y)$ a estes vértices por

$$\rho_v(x, y) = \left(\sum_{j=1}^s x^{2a_1^j} y^{2a_2^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com a mesma notação da seção anterior, consideramos $G_\lambda(x, y)$ um desdobramento de um germe pré quase homogêneo $g(x, y) = (xy, g_2(x, y))$ de tipo $G_\lambda(x, y) = (g_\lambda(x, y), \lambda)$, onde $g_\lambda(x, y) = g(x, y) + \lambda(0, h(x, y))$ e $\Gamma_+(g_2 + \lambda h) = \Gamma_+(g_2)$.

Corolário 2.4.3 *Suponha que*

1. $A_{2D+D_2}\theta_g \subseteq \text{tg}(A_{2D}\theta_2) + \text{wg}(B_{2R+1}\theta_2)$;
2. O ideal gerado pelo sistema $\{g_2^{2r_2}, Jg^{2r_2}\}$ é Newton não degenerado.

Então G_λ é topologicamente trivial para pequenos valores de λ .

A demonstração deste Corolário segue do Lema seguinte e da Proposição 2.3.1.

Lema 2.4.4 *Seja ρ_m o controle dado por $\rho_m(y_1, y_2) = |y_1|^{2r_1} + |y_2|^{2r_2}$. Se o ideal $I = \langle g_2^{2r_2}, Jg^{2r_2} \rangle$ é Newton não degenerado então existem uma vizinhança V da origem de $\mathbb{C}^2$ e constantes α e β tais que*

$$|Jg(x, y)|^{2r_2} \geq \beta \rho_v(x, y), \quad \forall (x, y) \in V \cap \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; \rho_m(g(x, y)) < \alpha \rho_v(x, y)\},$$

onde ρ_v é o controle associado aos vértices de $\Gamma_+(g_2^{2r_2})$.

Demonstração: Suponha que $|Jg(x, y)|^{2r_2} < \beta \rho_v(x, y)$, para toda vizinhança V da origem de $\mathbb{C}^2$ tal que $\rho_m(g(x, y)) < \alpha \rho_v(x, y)$.

Portanto

$$|g_2|^{2r_2} < \rho_m(g(x, y)) < \alpha \rho_v(x, y).$$

Assim, existe uma curva $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ com

$$\text{ordem}_t(|g_2|^{2r_2} \circ \varphi(t)) > \text{ordem}_t(\rho_v(x, y) \circ \varphi(t))$$

e

$$\text{ordem}_t(Jg^{2r_2}(x, y) \circ \varphi(t)) > \text{ordem}_t(\rho_v(x, y) \circ \varphi(t)).$$

As desigualdades acima implicam que o ideal I é degenerado, contradizendo a hipótese. ■

Observação: Acreditamos que basta a hipótese de Newton não degeneração do ideal gerado por $\{g_2^{2r_2}, Jg^{2r_2}\}$ para garantir a trivialidade topológica da família g_λ . Fato que foi confirmado para todas as famílias descritas no Capítulo 4 desta tese. Porém, ainda não foi possível encontrar a demonstração deste fato.

Capítulo 3

Germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$: Número de cúspides

Além da construção de campos de vetores controlados, a outra técnica mais aplicada em Teoria de Singularidades para se determinar a trivialidade topológica de germes de aplicação é a obtenção de invariantes cuja constância na família garante esta condição.

Neste capítulo e no próximo iremos aplicar esta técnica para obter a trivialidade topológica de famílias de germes do plano no plano. Inicialmente iremos mostrar como calcular o número de cúspides para germes cujo ideal Jacobiano satisfaz uma condição de não degeneração com relação a um polígono de Newton, posteriormente iremos calcular o número de pontos duplos de dobras, através do uso do software Singular. Como consequência, é feita uma descrição parcial das C^0 - $\mathcal{A}$ -órbitas na $\mathcal{K}$ -órbita de um germe quase homogêneo de *coposto* 2, finitamente determinado com o conjunto singular irreduzível.

3.1 Invariantes topológicos para germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$

Seja $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de aplicação analítica finitamente determinado. Se considerarmos uma perturbação estável de g , um certo número de cúspides e de pontos duplos de dobras aparecem na sua curva discriminante. Cúspides e pontos duplos de dobras são invariantes analíticos. Além

disso, Gaffney e Mond em [6] provaram que estes são invariantes topológicos, exibindo relações entre eles e invariantes topológicos conhecidos, ou seja, os números de Milnor do discriminante e do conjunto singular e o grau de g .

O conjunto singular de um germe $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é denotado por $\Sigma(g)$ e $\Delta(g) = g(\Sigma(g))$ denota a curva discriminante de g , $c(g)$ é o número de cúspides e $d(g)$ o número de pontos duplos de dobras.

Definimos o grau de $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, denotado por $m(g)$, por

$$m(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(p, q)}$$

onde p e q são as funções coordenadas de g .

Ainda em [6], Gaffney e Mond obtém uma condição necessária e suficiente de determinação finita para um germe de aplicação $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ em termos de $c(g)$ e de $d(g)$.

Proposição 3.1.1 ([6]) *Um germe de aplicação $g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado se, e somente se, $d(g) < +\infty$ e $c(g) < +\infty$.*

Como consequência dos resultados descritos em [12], Gaffney e Mond concluem que

$$c(g) + d(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\mathcal{F}_1}$$

onde $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(g_*\mathcal{O}_{\Sigma(g)})$ é o primeiro ideal de Fitting do $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ -módulo $g_*\mathcal{O}_{\Sigma(g)}$.

Também é determinada uma fórmula algébrica para o número de cúspides.

Proposição 3.1.2 (Gaffney e Mond, [6]) *Suponha que $\Sigma_g^{1,1} = \{0\}$ (por exemplo se g é finitamente determinado). Então*

$$c(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{(J, p_x J_y - p_y J_x, q_x J_y - q_y J_x)}$$

p e q são as funções coordenadas de g , J é o jacobiano de g e os índices denotam as derivadas parciais.

O corolário abaixo nos permite calcular $c(g)$ e $d(g)$ em termos dos números de Milnor do conjunto singular e do discriminante e do grau de g .

- Corolário 3.1.3 (Gaffney e Mond, [6])** 1. $c(g) = \mu(\Sigma(g)) + m(g) - 2$ ($m(g)$ é o grau de g e $\mu(\Sigma(g))$ é o número de Milnor do conjunto singular de g).
2. $d(g) = \frac{1}{2}\{\mu(\Delta(g)) - \mu(\Sigma(g))\} - c(g)$ ($\mu(\Delta(g))$ denota o número de Milnor do discriminante de g).

Também é determinada uma condição necessária e suficiente para que uma família de germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ seja topologicamente trivial, ou seja

Proposição 3.1.4 ([6]) *Seja $F : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^d, 0)$, $F(x, u) = (f_u(x), x)$, um desdobramento de um germe finitamente determinado $f = f_0$. Suponha que f_u é instável em 0 para todo u . Então F é topologicamente trivial se, e somente se, $c(f_u)$ e $d(f_u)$ são constantes.*

Gaffney e Mond em [7] fazem um estudo detalhado sobre os invariantes topológicos dos germes g semi quase homogêneos de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$.

Um germe $g : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^p, 0)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é quase homogêneo, se pode ser decomposto na forma $g = f + h$, onde f é quase homogêneo finitamente determinado e $h = (h_1, \dots, h_p)$ é um germe de aplicação polinomial tal que cada monômio h_{ij} de h_i tem filtração maior que a filtração de f_i , esta filtração é determinada pelos pesos de quase homogeneidade de f

Em especial, são obtidas fórmulas para o cálculo destes invariantes, $c(g)$ e $d(g)$, em termos dos pesos e graus do germe quase homogêneo.

Teorema 3.1.5 ([7]) *Seja $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f = (f_1, f_2)$, um germe semi quase homogêneo finitamente determinado de tipo $(w_1, w_2; d_1, d_2)$. Então*

$$\begin{aligned} c(f) &= \left(\frac{1}{w_1 w_2} \right) \{ (d_1 + d_2 - (w_1 + w_2))(d_1 + d_2 - 2(w_1 + w_2)) \\ &\quad + d_1 d_2 - w_1 w_2 \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(f) &= \left(\frac{1}{2(w_1 w_2)^2} \right) \{ (d_1 d_2 - 4w_1 w_2)(d_1 + d_2 - (w_1 + w_2))^2 \\ &\quad + 2w_1 w_2(w_1 + w_2)(d_1 + d_2 - (w_1 + w_2)) - 2w_1 w_2(d_1 d_2 - w_1 w_2) \}; \end{aligned}$$

$$cod(\mathcal{A}_e, f) = \left(\frac{1}{2(w_1 w_1)^2} \right) \{ (d_1 d_2 - 2w_1 w_2)(d_1 + d_2 - (w_1 + w_2))^2 - 2w_1 w_2 \}.$$

Neste capítulo são descritas fórmulas para o cálculo do número de cúspides $c(g)$ de germes pré quase homogêneos de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$. Estas fórmulas são obtidas em termos do polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$, para germes que satisfazem alguma condição de não degeneração com respeito a $\Gamma_+(Jg)$ e dependem somente da parte principal do germe g com relação ao polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$. Sem perda de generalidade, iremos considerar nos próximos capítulos somente germes cuja parte principal é o próprio germe.

Ressaltamos que estas fórmulas são determinadas em função da quantidade de monômios que é adicionada ao germe quase homogêneo. Começamos esta análise com os germes pré quase homogêneos do tipo $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$.

3.2 Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$.

Consideremos $f(x, y) = (xy, x^a + y^b)$, com $(a, b) = 1$, e $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$ com $br + as < ab$ e $k \neq 0$. Como f é quase homogêneo de tipo $(b, a; ab)$ então g é pré quase homogêneo. Denotamos por Jg o jacobiano de g , ou seja, o determinante da matriz jacobiana de g .

Inicialmente calculamos $\mu(\Sigma(g))$.

Proposição 3.2.1 *O número de Milnor $\mu(\Sigma(g))$ do conjunto singular $\Sigma(g)$ é dado por*

$$\mu(\Sigma(g)) = (b-1)(r-1) + (a-1)(s-1) - 1 + (r+s).$$

Demonstração: Inicialmente consideramos o **caso geral** $r > 1$ e $s > 1$.

O jacobiano $Jg(x, y)$ de g é dado por

$$Jg(x, y) = -ax^a + by^b + k(s-r)x^r y^s.$$

Portanto

$$Jg_x = -a^2 x^{a-1} + k(s-r)rx^{r-1}y^s \quad \text{e} \quad Jg_y = b^2 y^{b-1} + k(s-r)sx^r y^{s-1}.$$

O polígono de Newton do ideal $\langle Jg_x, Jg_y \rangle$ tem vértices $(0, b-1)$, $(r-1, s)$, $(r, s-1)$, $(a-1, 0)$ e é Newton não degenerado. Pelo Corolário 1.9.2 temos

$$\mu(\Sigma(g)) = (b-1)(r-1) + (a-1)(s-1) + r + s - 1.$$

O caso $r = 1$ e $s > 1$.

O jacobiano $Jg(x, y)$ de g é dado por

$$Jg(x, y) = -ax^a + by^b + k(s-1)xy^s.$$

Portanto

$$Jg_x = -a^2x^{a-1} + k(s-1)y^s \quad \text{e} \quad Jg_y = b^2y^{b-1} + k(s-1)sxy^{s-1}.$$

Neste caso o ideal $\langle Jg_x, Jg_y \rangle$ tem polígono de Newton com vértices $(0, s)$, $(1, s-1)$ e $(a-1, 0)$ e é Newton não degenerado.

Pelo Corolário 1.9.2 temos

$$\mu(\Sigma(g)) = (a-1)(s-1) + s.$$

O caso $s = 1$ e $r > 1$ é análogo ao caso anterior, e obtemos

$$\mu(\Sigma(g)) = (b-1)(r-1) + r.$$

■

Tendo obtido o número de Milnor $\mu(\Sigma(g))$ descrevemos abaixo a fórmula para o número $c(g)$.

Corolário 3.2.2 *Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$ um germe de aplicação pré quase homogêneo com $k \neq 0$. Então o número de cúspides $c(g)$ é dado por*

$$c(g) = br + as - 1.$$

Demonstração: Consideremos inicialmente o **caso geral** $r > 1$ e $s > 1$.

Pelo Corolário 3.1.3,

$$c(g) = m(g) + \mu(\Sigma(g)) - 2. \tag{3.2.1}$$

Por definição $m(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_{\mathbb{C}^2,0}}{(p,q)}$, onde p e q são as funções coordenadas de g . Assim

$$\begin{aligned} m(g) &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_{\mathbb{C}^2,0}}{(xy, x^a + y^b + kx^r y^s)} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{O_{\mathbb{C}^2,0}}{(xy, x^a + y^b)}. \end{aligned}$$

Como o ideal $\langle xy, x^a + y^b \rangle$ é quase homogêneo, para pesos $w_1 = b$ e $w_2 = a$ temos graus $d_1 = a + b$ e $d_2 = ab$, segue-se que

$$m(g) = \frac{d_1 d_2}{w_1 w_2} = a + b.$$

Substituindo $m(g)$ e $\mu(\Sigma(g))$ na equação (3.2.1) obtemos

$$c(g) = br + as - 1.$$

Os casos $r = 1$ e $s > 1$ ou $s = 1$ e $r > 1$.

Estes casos são feitos de maneira análoga ao caso geral, substituindo os valores de $\mu(\Sigma(g))$ e $m(g)$ em (3.2.1) obtendo

$$c(g) = as + b - 1 \quad \text{ou} \quad c(g) = br + a - 1.$$

■

Em consequência da fórmula obtida para $c(g)$ e da Proposição 3.1.4, temos um critério para determinar quando dois germes g_1 e g_2 **não** têm o mesmo tipo topológico.

Corolário 3.2.3 *Sejam $g_1(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1})$ e $g_2(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_2 x^{r_2} y^{s_2})$ germes de aplicações pré quase homogêneos com $k_1 \cdot k_2 \neq 0$. Então, $c(g_1) = c(g_2)$ se, e somente se, $r_1 = r_2$ e $s_1 = s_2$. Em outras palavras, g_1 e g_2 não são topologicamente $\mathcal{A}$ -equivalentes se $r_1 \neq r_2$ ou $s_1 \neq s_2$.*

Demonstração: Do Corolário 3.2.2 temos

$$c(g_1) - c(g_2) = b(r_1 - r_2) + a(s_1 - s_2).$$

$$\text{Assim, } c(g_1) = c(g_2) \text{ se, e somente se, } b(r_1 - r_2) = a(s_2 - s_1). \quad (3.2.2)$$

A necessidade é imediata, ou seja, se $r_1 = r_2$ e $s_1 = s_2$ então $c(g_{(r_1, s_1)}) = c(g_{(r_2, s_2)})$.

Passemos então à demonstração da condição suficiente.

Suponha que $r_1 \neq r_2$ ou $s_1 \neq s_2$. Como todos os elementos envolvidos são inteiros positivos, basta demonstramos o caso em que $r_1 \neq r_2$ e $s_1 \neq s_2$.

Da equação 3.2.2 segue-se que a divide $b(r_1 - r_2)$. Por hipótese $(a, b) = 1$ então a divide $(r_1 - r_2)$, o que é uma contradição já que $(r_1 - r_2) < a$. ■

3.3 Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$

Observamos neste caso que o ideal gerado pelo sistema $\{Jg_x, Jg_y\}$ pode ser Newton degenerado, e uma alternativa para calcular o número de Milnor do conjunto singular $\mu(\Sigma(g))$ é estudar o ideal $I = \langle xJg_x, yJg_y \rangle$, o qual possui o mesmo polígono de Newton de Jg .

Kouchnirenko em [10] calcula a codimensão do ideal I para germes Newton não degenerados para obter o número de Milnor do germe g . O cálculo do número $\mu(\Sigma(g))$ é obtido através da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle xJg_x, yJg_y \rangle} &= \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle x, y \rangle} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle x, Jg_y \rangle} + \\ &+ \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle Jg_x, y \rangle} + \mu(\Sigma(g)). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Considerando $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo com $k_i \neq 0$, $r_1 \leq r_2$, $s_2 \leq s_1$ e $r_1 s_2 - r_2 s_1 \neq 0$ obtemos $\mu(\Sigma(g)) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle xJg_x, yJg_y \rangle} - (a + b) + 1$.

Aplicando o Corolário 1.9.2 e o Lema abaixo, calculamos a codimensão do ideal $\langle xJg_x, yJg_y \rangle$ e conseqüentemente calculamos $\mu(\Sigma(g))$.

Lema 3.3.1 *Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1x^{r_1}y^{s_1} + k_2x^{r_2}y^{s_2})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo com $k_1.k_2 \neq 0$. Então o jacobiano Jg de g é Newton não degenerado, ou seja, o ideal $I = \langle xJg_x, yJg_y \rangle$ é Newton não degenerado.*

Demonstração: Iremos analisar este resultado em função do número de faces do polígono de Newton de Jg :

Caso 1. O polígono de Newton de Jg tem 3 faces.

O jacobiano de g é dado por

$$Jg(x, y) = by^b - ax^a + k_1(s_1 - r_1)x^{r_1}y^{s_1} + k_2(s_2 - r_2)x^{r_2}y^{s_2}.$$

Portanto

$$xJg_x = -a^2x^a + \sum_{i=1}^2 k_i r_i (s_i - r_i) x^{r_i} y^{s_i} \quad \text{e} \quad yJg_y = b^2y^b + \sum_{i=1}^2 k_i s_i (s_i - r_i) x^{r_i} y^{s_i}.$$

Figura 3.1: Polígono de Newton do ideal $\langle xJg_x, yJg_y \rangle$

Vamos denotar por Δ_i , $i = 1, 2, 3$, as faces compactas do polígono de Newton do ideal $\langle xJg_x, yJg_y \rangle$.

Se $xy \neq 0$ então, para as faces Δ_1 e Δ_3 temos

$$xJg_{x|\Delta_1} = r_1k_1(s_1 - r_1)x^{r_1}y^{s_1} \neq 0 \quad \text{e} \quad yJg_{y|\Delta_3} = s_2k_2(s_2 - r_2)x^{r_2}y^{s_2} \neq 0.$$

Porém, para a face Δ_2 , temos

$$\begin{cases} xJg_{x|\Delta_2} = r_1k_1(s_1 - r_1)x^{r_1}y^{s_1} + r_2k_2(s_2 - r_2)x^{r_2}y^{s_2} \\ \text{e} \\ yJg_{y|\Delta_2} = s_1k_1(s_1 - r_1)x^{r_1}y^{s_1} + s_2k_2(s_2 - r_2)x^{r_2}y^{s_2}. \end{cases}$$

Seja M a matriz formada pelos coeficientes do sistema $xJg_{x|\Delta_2} = 0$ e $yJg_{y|\Delta_2} = 0$.

$$M = \begin{pmatrix} r_1k_1(s_1 - r_1) & r_2k_2(s_2 - r_2) \\ s_1k_1(s_1 - r_1) & s_2k_2(s_2 - r_2) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\det M = k_1(s_1 - r_1).k_2(s_2 - r_2)\{r_1s_2 - r_2s_1\} \neq 0.$$

Logo, para $xy \neq 0$, o sistema $xJg_{x|\Delta_2}$ e $yJg_{y|\Delta_2}$ só tem os eixos coordenados como solução. Segue-se que Jg é Newton não degenerado.

Caso 2. O polígono de Newton de Jg tem duas faces compactas.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $(0, b)$, (r_1, s_1) e (r_2, s_2) estão na mesma face compacta, a outra situação é análoga. Temos que analisar duas possibilidades

2.1) Suponha que $y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i}$ não é um quadrado perfeito. Portanto

$$Jg(x, y) = by^b - ax^a + \sum_{i=1}^2 k_i(s_i - r_i)x^{r_i}y^{s_i}.$$

Assim as restrições de xJg_x e yJg_y às faces compactas do polígono se anulam se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$, ou seja, o jacobiano de g é Newton não degenerado. Neste caso, a fórmula para o número de cúspides é

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_2x^{r_2}y^{s_2}).$$

No outro caso, ou seja, quando os coeficientes $(0, a)$, (r_1, s_1) e (r_2, s_2) estão na mesma face compacta obtemos

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1}).$$

2.2) Suponhamos agora que $y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i} = y^k (x^m - y^t)^2$, isto é,

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^k (x^m - y^t)^2)$$

com $b = k + 2t$, $k \neq 2m$ e $t + k \neq m$.

O jacobiano de g é dado por

$$Jg(x, y) = (k + 2t)y^{k+2t} - ax^a + (k - 2m)x^{2m}y^k + 2(m - t - k)x^m y^{t+k}.$$

Portanto

$$xJg_x = -a^2 x^a + 2m(k - 2m)y^k x^{2m} + 2m(m - t - k)x^m y^{k+t}$$

e

$$yJg_y = (k + 2t)^2 y^{k+2t} + k(k - 2m)x^{2m} y^k + 2(m - t - k)(t + k)x^m y^{t+k}.$$

Figura 3.2: Polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$.

Sejam Δ_i , $i=1,2$, as faces compactas do polígono de Newton do ideal gerado por $\{xJg_x, yJg_y\}$ e denotemos por $\theta_1 := xJg_x$ e $\theta_2 := yJg_y$.

Para $xy \neq 0$, $\theta_1|_{\Delta_1} = 0$ se, e somente se, $(k-2m)x^m = (k+t-m)y^t$. Por outro lado, substituindo $x^m = \left(\frac{k+t-m}{k-2m}\right)y^t$ em $\theta_2|_{\Delta_1}$ obtemos

$$\theta_2|_{\Delta_1} = \left\{ \frac{(-k-2t)(t+m)^2}{k-2m} \right\} \cdot y^{2t+k} \neq 0.$$

Analogamente, $\theta_2|_{\Delta_2} = k(k-2m)x^{2m}y^k \neq 0$.

Neste caso

$$c(g) = c(xy, x^a + y^{k+2t} + x^{2m}y^k).$$

Analogamente ao caso anterior, se $g(x, y) = (xy, y^b + x^k(x^m - y^t)^2)$ então

$$c(g) = c(xy, y^b + x^{k+2m} + x^k y^{2t}).$$

■

Como conseqüência do Lema anterior, calculamos o número de Milnor do conjunto singular $\Sigma(g)$ e o número de cúspides do germe g .

Corolário 3.3.2 *Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$ um germe de aplicação com as mesmas hipóteses do caso 1) do Lema 3.3.1. Então*

$$\mu(\Sigma(g)) = (a - r_1)s_2 + br_1 + r_2s_1 - (a + b) + 1.$$

Conseqüentemente $c(g) = (a - r_1)s_2 + br_1 + r_2s_1 - 1$.

Demonstração: Pelo Lema 3.3.1 temos que o ideal $\langle xJg_x, yJg_y \rangle$ é Newton não degenerado e assim, segue-se pelo Corolário 1.9.2 de [2] que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle xJg_x, yJg_y \rangle} = (a - r_1)s_2 + br_1 + r_2s_1.$$

Aplicamos a fórmula (3.3.3), obtemos

$$\mu(\Sigma(g)) = (a - r_1)s_2 + br_1 + r_2s_1 - (a + b) + 1.$$

Substituímos o valor encontrado de $\mu(\Sigma(g))$ em (3.2.1) e obtemos

$$c(g) = (a - r_1)s_2 + br_1 + r_2s_1 - 1.$$

■

Observação: Se considerarmos dois germes pré quase homogêneos

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$$

e

$$h(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 w_i x^{p_i} y^{q_i}),$$

nem sempre a igualdade $c(g) = c(h)$ ocorre se, e somente se, $r_i = p_i$ e $s_i = q_i$.

Por exemplo, tomamos $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + xy^6 + x^2y)$ e $h(x, y) = (xy, x^a + y^b + xy^4 + x^3y)$, com $a \geq 4$ e $b \geq 11$.

E aqui temos

$$c(g) - c(h) = r_2s_1 - \bar{r}_2\bar{s}_1 = 0.$$

Estes casos que podem acontecer são os casos em que os polígonos de Newton de g e h estão dispostos como nas figuras abaixo.

É possível mostrar que nos casos descritos acima, não existe uma deformação topologicamente trivial na $\mathcal{K}$ -órbita do germe quase homogêneo $(xy, x^a + y^b)$ que contenha os dois germes. De fato, vejamos o exemplo dado acima, ou seja

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + xy^6 + x^2y) \quad \text{e} \quad h(x, y) = (xy, x^a + y^b + xy^4 + x^3y)$$

com $a \geq 4$ e $b \geq 11$.

Qualquer deformação que contenha g e h é da forma

$$\begin{aligned} g_\lambda(x, y) = & (xy, \theta_1(x, y, \lambda)(x^a + y^b) + \theta_2(x, y, \lambda)(xy^6 + x^2y) \\ & + \theta_3(x, y, \lambda)(xy^4 + x^3y) + \beta(x, y, \lambda) + \alpha(x, y, \lambda)) \end{aligned}$$

com $\theta_1(x, y, 0) = \theta_1(x, y, 1) = 1$, $\theta_2(x, y, 0) = 1$, $\theta_3(x, y, 0) = 0$, $\theta_2(x, y, 1) = 0$, $\theta_3(x, y, 1) = 1$, $\beta(x, y, 0) = \beta(x, y, 1) = 0$ e $\alpha(x, y, 0) = \alpha(x, y, 1) = 0$.

E $\text{grau}(\alpha_{ij}) < \text{grau}(x^a + y^b)$ e $\text{fil}(\beta) \geq \text{fil}(x^a + y^b)$, com relação ao peso de quase homogeneidade (b, a) .

Neste caso, apesar de $c(g)$ ser igual a $c(h)$, temos $c(g_\lambda) \neq c(g) = c(h)$ para um conjunto denso de valores $\lambda \in [0, 1]$, pois o jacobiano Jg_λ é Newton não degenerado e $\Gamma_+(Jg_\lambda) \supset \Gamma_+(Jg)$ e $\Gamma_+(Jg_\lambda) \supset \Gamma_+(Jh)$. Assim, segue do Teorema 3.1.4 que estes germes não são topologicamente triviais.

Observamos que para uma família de germes deste tipo, não foi possível calcular o valor de $d(g_\lambda)$ por métodos computacionais, por problemas de falta de memória do computador.

Uma questão em aberto é determinar se estes germes são topologicamente equivalentes, independente de eles estarem em uma família trivial. Observamos também que com as técnicas desenvolvidas neste trabalho, não é possível resolver esta questão.

3.4 Germes $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$

Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo, com $r_1 < r_2 < r_3$ e $s_3 < s_2 < s_1$.

O procedimento para calcular $c(g)$ é o mesmo da seção anterior, ou seja, de acordo com o número de faces do poliedro de Newton de Jg .

Lema 3.4.1 *Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo. Temos*

1) *Se o polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$ tem 3 ou 4 faces compactas então o jacobiano de g é Newton não degenerado;*

2) *Se o polígono de Newton de Jg tem 2 faces compactas e:*

a) *Se (r_2, s_2) é vértice então Jg é Newton não degenerado;*

b) *Se (r_1, s_1) ou (r_3, s_3) é vértice com*

$$x^a + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} \neq x^r (x^m - y^q)^3$$

ou

$$y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} \neq y^s (x^n - y^\ell)^3,$$

respectivamente, então Jg é Newton não degenerado;

c) *Se (r_1, s_1) ou (r_3, s_3) é vértice com*

$$x^a + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} = x^r (x^m - y^q)^3$$

ou

$$y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} = y^s (x^n - y^\ell)^3,$$

respectivamente, então Jg é Newton degenerado.

Demonstração: 1) A demonstração para o caso em que o polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$ tem 4 faces compactas é análoga ao caso 1) do Lema 3.3.1.

Para estes germes obtemos

$$\mu(\Sigma(g)) = (a - r_2)s_3 + br_1 + s_2r_3 + s_1r_2 - s_2r_1 - (a + b) + 1$$

consequentemente

$$c(g) = (a - r_2)s_3 + br_1 + s_2r_3 + s_1r_2 - s_2r_1 - 1.$$

Suponhamos então que o polígono de Newton $\Gamma_+(g)$ tem 3 faces compactas. Analisamos duas situações.

a. (r_1, s_1) e (r_3, s_3) são vértices com

$$x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} \neq x^a + y^b + x^r y^s (x^m - y^q)^2.$$

Esta demonstração é análoga ao caso 2.1 do Lema 3.3.1, e consequentemente

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_3 x^{r_3} y^{s_3}).$$

Para os casos (r_1, s_1) e (r_2, s_2) ou (r_2, s_2) e (r_3, s_3) vértices com

$$x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} \neq y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + x^r (x^m - y^q)^2$$

ou

$$x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} \neq x^a + k_3 x^{r_3} y^{s_3} + y^s (x^m - y^q)^2$$

temos

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2})$$

ou

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3}).$$

E o Jacobiano de g é Newton não degenerado.

b. Vamos demonstrar o caso $x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} = x^a + y^b + x^r y^s (x^m - y^q)^2$, pois o método para demonstrar os outros é análogo.

Neste caso $Jg(x, y) = by^b - ax^a + (s - r - 2m)x^{r+2m}y^s - 2(s + q - m - r)x^{m+r}y^{s+q} + (s + 2q - r)x^r y^{s+2q}$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned} xJg_x &= -a^2 x^a + (r + 2m)(s - r - 2m)x^{r+2m}y^s + r(s + 2q - r)x^r y^{s+2q} - \\ &\quad - 2(m + r)(s + q - m - r)x^{m+r}y^{s+q} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} yJg_y &= b^2 y^b + s(s - r - 2m)x^{r+2m}y^s - 2(s + q)(s + q - m - r)x^{m+r}y^{s+q} + \\ &\quad + (s + 2q)(s + 2q - r)x^r y^{s+2q}. \end{aligned}$$

Figura 3.3: Polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$

Vamos denotar por $\Delta_i, i = 1, 2, 3$, as faces compactas do polígono de Newton do ideal $\langle xJg_x, yJg_y \rangle$.

Se $xy \neq 0$ então, para as faces Δ_1 e Δ_3 temos

$$xJg_x|_{\Delta_1} = r(s + 2q - r)x^r y^{s+2q} \neq 0 \text{ e } yJg_y|_{\Delta_3} = s(s - r - 2m)x^{r+2m}y^s \neq 0.$$

Para a face Δ_2

$$\begin{aligned} xJg_{x|\Delta_2} &= x^r y^s \{ (r+2m)(s-r-2m)x^{2m} + r(s+2q-r)y^{2q} - \\ &- 2(m+r)(s+q-m-r)x^m y^q \} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} yJg_{y|\Delta_2} &= x^r y^s \{ s(s-r-2m)x^{2m} - 2(s+q)(s+q-m-r)x^m y^q + \\ &+ (s+2q)(s+2q-r)y^{2q} \}. \end{aligned}$$

Para $xy \neq 0$ temos, $xJg_{x|\Delta_2} = 0$ e $yJg_{y|\Delta_2} = 0$ se, e somente se,

$$\begin{cases} (r+2m)Ax^{2m} - 2(m+r)Bx^m y^q + rCy^{2q} = 0 \\ sAx^{2m} - 2(s+q)Bx^m y^q + (s+2q)Cy^{2q} = 0, \end{cases} \quad (3.4.4)$$

onde $A = (s-r-2m)$, $B = (s+q-m-r)$ e $C = (s+2q-r)$.

Como $r+2m \neq s$, $m+r \neq s+q$ e $s+2q \neq r$ então o sistema (3.4.4) só tem os eixos coordenados como solução, ou seja, o jacobiano de g é Newton não degenerado.

Neste caso $c(g) = c(xy, x^a + y^b + x^r y^{s+2q} + x^{r+2m} y^s)$.

Para os casos

$$x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + \sum_{i=2}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} = y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + x^r (x^m - y^q)^2$$

ou

$$x^a + y^b + k_3 x^{r_3} y^{s_3} + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i} = x^a + k_3 x^{r_3} y^{s_3} + y^s (x^m - y^q)^2$$

Temos

$$c(g) = c(xy, y^b + x^{r+2m} + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + x^r y^{2q})$$

e

$$c(g) = c(xy, x^a + y^{s+2q} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} + x^{2m} y^s),$$

respectivamente.

2) (a) Se o polígono de Newton de Jg tem 2 faces compactas, suponha que

$$y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} = y^s (x^n - y^\ell)^2$$

ou

$$x^a + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} = x^r (x^m - y^q)^2.$$

Figura 3.4: Polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$.

Olhando para a igualdade acima é preciso $r = 2n$ e $s = 2q$, o que implica $a = 2(n + m)$ e $b = 2(q + \ell)$, portanto a e b não são primos entre si, ou seja, este germe não é pré quase homogêneo pois $(xy, x^{2(q+p)} + y^{2(n+m)})$ não é finitamente determinado.

Desta forma podemos supor

$$y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + k_2 x^{r_2} y^{s_2} = y^s (x^n - y^\ell)^2$$

e

$$x^a + k_2 x^{r_2} y^{s_2} + k_3 x^{r_3} y^{s_3} \neq x^r (x^m - y^q)^2$$

com $r_2 = 2n$ e $s_2 = s$.

Assim

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^{s+2\ell} + x^{2n} y^s - 2x^n y^{s+\ell} + k_3 x^{r_3} y^{s_3}).$$

Segue-se que

$$Jg(x, y) = (s+2\ell)y^{s+2\ell} - ax^a + (s-2n)x^{2n}y^s - 2(s+\ell-n)x^ny^{s+\ell} + k_3(s_3-r_3)x^{r_3}y^{s_3}$$

o que implica

$$\begin{aligned} xJg_x &= -a^2x^a + 2n(s-2n)x^{2n}y^s - 2n(s+\ell-n)x^ny^{s+\ell} + \\ &+ r_3k_3(s_3-r_3)x^{r_3}y^{s_3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} yJg_y &= (s+2\ell)^2y^{s+\ell} + s(s-2n)x^{2n}y^s - 2(s+\ell-n)x^ny^{s+\ell} + \\ &+ s_3k_3(s_3-r_3)x^{r_3}y^{s_3}. \end{aligned}$$

Figura 3.5: Polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$.

Vamos denotar por Δ_i , $i = 1, 2$, as faces compactas do polígono de Newton de Jg .

Então

$$\begin{aligned} xJg_x|_{\Delta_1} &= x^ny^s\{2n(s-2n)x^n - 2n(s+\ell-n)y^\ell\} \\ yJg_y|_{\Delta_1} &= y^s\{(s+2\ell)^2y^\ell + s(s+\ell-n)x^{2n} - 2(s+\ell-n)x^ny^\ell\}. \end{aligned}$$

Para $xy \neq 0$, $xJg_{x|\Delta_1} = 0$ se, e somente se, $x^n = \frac{2n(s-2n)}{2n(s+\ell-n)}y^\ell$.

Por outro lado, substituindo este valor em $yJg_{y|\Delta_1}$ temos este diferente de zero.

A restrição a Δ_2 nos dá

$$\begin{aligned} xJg_{x|\Delta_2} &= -a^2x^a + 2n(s-2n)x^{2n}y^s + r_3k_3(s_3-r_3)x^{r_3}y^{s_3}; \\ yJg_{y|\Delta_2} &= s(s-n)x^{2n}y^s + s_3k_3(s_3-r_3)x^{r_3}y^{s_3}. \end{aligned}$$

Segue-se que $xJg_x = 0$ e $yJg_y = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $y = 0$. E como consequência

$$c(g) = c(xy, x^a + y^{s+2\ell} + x^{2n}y^s).$$

Observe que no caso em que

$$y^b + k_1x^{r_1}y^{s_1} + k_2x^{r_2}y^{s_2} \neq y^s(x^n - y^\ell)^2$$

e

$$x^a + k_2x^{r_2}y^{s_2} + k_3x^{r_3}y^{s_3} = x^r(x^m - y^q)^2$$

segue-se que

$$c(g) = c(xy, x^{r+2m} + y^b + x^r y^{2q}).$$

2) (b) Esta demonstração é análoga ao caso 2.1 do Lema 3.3.1. Consequentemente

$$\text{Se } (r_1, s_1) \text{ for vértice então } c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_1x^{r_1}y^{s_1});$$

$$\text{Se } (r_3, s_3) \text{ for vértice então } c(g) = c(xy, x^a + y^b + k_3x^{r_3}y^{s_3}).$$

2) (c) Temos por hipótese

$$x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} = \begin{cases} y^b + x^r (x^m - y^q)^3 \\ \text{ou} \\ x^a + y^s (x^m - y^q)^3. \end{cases}$$

Basta que analisemos um deles, pois o outro é análogo.

Supondo que $x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i} = y^b + x^r (x^m - y^q)^3$ temos

$$Jg(x, y) = by^b + Ax^{3m+r} + Bx^{2m+r}y^q + Cx^{m+r}y^{2q} + Dx^r y^{3q},$$

onde $A = -(3m+r)$, $B = -3(q-2m-r)$, $C = 3(2q-r-m)$ e $D = -(3q-r)$.
Portanto

$$\begin{aligned} xJg_x &= (3m+r)Ax^{3m+r} + (2m+r)Bx^{2m+r}y^q + (m+r)Cx^{m+r}y^{2q} + \\ &+ rDx^r y^{3q} \end{aligned}$$

e

$$yJg_y = b^2 y^b + qBx^{2m+r}y^q + 2qCx^{m+r}y^{2q} + 3qDx^r y^{3q}.$$

Figura 3.6: Polígono de Newton $\Gamma_+(Jg)$.

Denotemos por $\Delta_i, i = 1, 2$, as faces compactas do polígono de Newton de Jg . A restrição a Δ_2 nos dá

$$\begin{aligned} xJg_x|_{\Delta_2} &= (3m+r)Ax^{3m+r} + (2m+r)Bx^{2m+r}y^q + (m+r)Cx^{m+r}y^{2q} \\ &+ rDx^r y^{3q} \end{aligned}$$

e

$$yJg_y|_{\Delta_2} = qBx^{2m+r}y^q + 2qCx^{m+r}y^{2q} + 3qDx^r y^{3q}.$$

Para $xy \neq 0$, consideramos a curva $x^m = y^q$ e obtemos $xJg_{x|\Delta_2} = 0$ e $yJg_{y|\Delta_2} = 0$, ou seja, o jacobiano de g é Newton degenerado.

Observamos que neste caso não existe um método conhecido para calcular $c(g)$ em termos de $\Gamma_+(Jg)$. ■

3.5 Caso geral.

Nosso objetivo agora é adicionarmos ao germe quase homogêneo $(xy, x^a + y^b)$ uma quantidade de monômios de tal maneira que o germe ainda pertença a $\mathcal{K}(xy, x^a + y^b)$.

Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo com $k_i \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, t$. Vamos supor que $t \geq 4, r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_t$ e $s_t \leq s_{t-1} \leq \dots \leq s_2 \leq s_1$.

Neste caso, em algumas situações especiais, ainda é possível determinar o número de Milnor $\mu(\Sigma(g))$ e conseqüentemente o número de cúspides $c(g)$. Descrevemos no Lema abaixo condições para a Newton não degeneração de Jg .

Lema 3.5.1 *Seja $g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i})$ um germe de aplicação pré quase homogêneo. Se o polígono de Newton de Jg tem $t + 1$ faces então o jacobiano de g é Newton não degenerado. Conseqüentemente*

$$\mu(\Sigma(g)) = (a - r_t)s_t + (b + s_1)r_1 + \sum_{j=2}^t (s_j + s_{j-1})(r_j - r_{j-1}) - (a + b) + 1$$

e

$$c(g) = (a - r_t)s_t + (b + s_1)r_1 + \sum_{j=2}^t (s_j + s_{j-1})(r_j - r_{j-1}) - 1.$$

Se o polígono de Newton de Jg tem menos que $t + 1$ faces e mesmo assim Jg é Newton não degenerado, ainda é possível calcular $\mu(\Sigma(g))$, conseqüentemente $c(g)$, em termos dos vértices de $\Gamma_+(Jg)$.

De fato, suponhamos sem perda de generalidade que os vértices de $\Gamma_+(Jg)$ sejam $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_{t_0}, s_{t_0})$, com $t_0 < t$. Assim

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^{t_0} k_i x^{r_i} y^{s_i} + \sum_{j=t_0+1}^t k_j x^{r_j} y^{s_j}).$$

Temos o seguinte

Corolário 3.5.2 *Seja*

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^{t_0} k_i x^{r_i} y^{s_i} + \sum_{j=t_0+1}^t k_j x^{r_j} y^{s_j})$$

um germe de aplicação pré quase homogêneo nas condições acima. Se o jacobiano de g é Newton não degenerado então

$$c(g) = c(xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^{t_0} k_i x^{r_i} y^{s_i}).$$

onde a fórmula para $\mu(\Sigma(g))$ é obtida através da fórmula de Kouchnirenko dada em [10].

3.6 Conclusão.

Apresentamos a seguir uma tabela com todas as fórmulas para o cálculo de $\mu(\Sigma(g))$ e $c(g)$ obtidas neste capítulo.

Denotemos por $\#\Gamma$ a quantidade de faces compactas de $\Gamma_+(Jg)$.

Os casos em que aparece o símbolo $*$ são aqueles para os quais o germe $x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i}$ não se escreve como um binômio.

Estamos fixando uma $\mathcal{K}$ -órbita com representante $f(x, y) = (xy, x^a + y^b)$, portanto

$$\mu(\Sigma(f)) = (a - 1)(b - 1) \quad \text{e} \quad c(f) = ab - 1.$$

Germe g	$\#\Gamma$	$\mu(\Sigma(g))$	$c(g)$
$(xy, x^a + y^b + kx^r y^s)$	2	$(b-1)(r-1) + (a-1)(s-1) + (r+s) - 1$	$br + as - 1$
$(xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	3	$(a-r_1)s_2 + br_1 + r_2 s_1 - (a+b) + 1$	$(a-r_1)s_2 + br_1 + r_2 s_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_1, s_1) —vértice $(b-1)(r_1-1) + (a-1)(s_1-1) + (r_1+s_1) - 1$	$br_1 + as_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^2 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_2, s_2) —vértice $(b-1)(r_2-1) + (a-1)(s_2-1) + (r_2+s_2) - 1$	$br_2 + as_2 - 1$
$(xy, x^a + y^b + y^k(x^m - y^t)^2)$	2	$(b-1)(2m-1) + (a-1)(k-1) + (k+2m) - 1$	$2bm + ak - 1$
$(xy, x^a + y^b + x^k(x^m - y^t)^2)$	2	$(b-1)(k-1) + (a-1)(2t-1) + (k+2t) - 1$	$bk + 2at - 1$
$(xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	4	$(a-r_2)s_3 + br_1 + s_2(r_3 - r_1) + s_1 r_2 - (a+b) + 1$	$(a-r_2)s_3 + s_2(r_3 - r_1) + s_1 r_2 + br_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	3	(r_1, s_1) e (r_3, s_3) —vértices $(a-r_1)s_3 + br_1 + r_3 s_1 - (a+b) - 1$	$(a-r_1)s_3 + br_1 + r_3 s_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	3	(r_1, s_1) e (r_2, s_2) —vértices $(a-r_1)s_2 + br_1 + r_2 s_1 - (a+b) - 1$	$(a-r_1)s_2 + br_1 + r_2 s_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	3	(r_2, s_2) e (r_3, s_3) —vértices $(a-r_2)s_3 + br_2 + r_3 s_2 - (a+b) - 1$	$(a-r_2)s_3 + br_2 + r_3 s_2 - 1$
$(xy, x^a + y^b + x^r y^s(x^m - y^q)^2)$	3	$(a-r)s + br + (r+2m)(s+2q) - (a+b) + 1$	$(r+2m)(s+2q) + (a-r)s + br - 1$
$(xy, x^a + y^b + k_1 x^{r_1} y^{s_1} + x^r(x^m - y^q)^2)$	3	$(a-r_1)2q + br_1 + r s_1 - (a+b) + 1$	$(a-r_1)2q + br_1 + r s_1 - 1$
$(xy, x^a + y^b + k_3 x^{r_3} y^{s_3} + y^s(x^m - y^q)^2)$	3	$(a-2m)s_3 + 2bm + r_3 s - (a+b) + 1$	$(a-2m)s_3 + 2bm + r_3 s - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_1, s_1) —vértice $(b-1)(r_1-1) + (a-1)(s_1-1) + (r_1+s_1) - 1$	$br_1 + as_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^3 k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_3, s_3) —vértice $(b-1)(r_3-1) + (a-1)(s_3-1) + (r_3+s_3) - 1$	$br_3 + as_3 - 1$
$(xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i})$	$t+1$	$(a+r_t)s_t + (b+s_1)r_1 - (a+b) + 1 + \sum_{j=2}^t (s_j + s_{j-1})(r_j - r_{j-1})$	$(a+r_t)s_t + (b+s_1)r_1 - 1 + \sum_{j=2}^t (s_j + s_{j-1})(r_j - r_{j-1})$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_1, s_1) —vértice $(b-1)(r_1-1) + (a-1)(s_1-1) + (r_1+s_1) - 1$	$br_1 + as_1 - 1$
$* (xy, x^a + y^b + \sum_{i=1}^t k_i x^{r_i} y^{s_i})$	2	(r_t, s_t) —vértice $(b-1)(r_t-1) + (a-1)(s_t-1) + (r_t+s_t) - 1$	$br_t + as_t - 1$

Capítulo 4

Número de dobras e órbitas

Nosso objetivo neste capítulo é realizar um estudo sobre o número de dobras de um germe pré quase homogêneo g . Como consequência deste estudo e dos resultados descritos no capítulo anterior, são descritas as C^0 - $\mathcal{A}$ -órbitas que surgem na $\mathcal{K}$ -órbita de um germe $(xy, x^a + y^b)$, com $a \leq 5$, $(a, b) = 1$ e conjunto singular irredutível.

Para um germe g , temos pelo Corolário 3.1.3 que é possível obter o número $d(g)$ calculando $c(g)$ e $\mu(\Delta(g))$. Por outro lado, para se calcular $\mu(\Delta(g))$ necessitamos saber uma equação de definição para o ideal $\Delta(g)$, a qual é obtida em geral, por métodos computacionais.

A seguir apresentamos o algoritmo para se obter esta equação para o caso de germes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$, que é descrito por Gaffney e Mond em [7].

Para $g = (g_1, g_2)$ consideramos o germe $\bar{g} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$, $\bar{g} = (g_1, g_2, Jg)$. Denotemos por $X = \bar{g}(\mathbb{C}^2)$ a imagem de $\bar{g}$ em $\mathbb{C}^3$, e por $\bar{G}(u, v, w)$ a equação de definição de X . Então, uma equação de definição $G(u, v)$ para $\Delta(g)$ é a restrição de $\bar{G}$ a $\mathbb{C}^2 \times \{0\}$.

Para determinar explicitamente a função $G(u, v)$ consideramos o ideal I em $\mathcal{O}_5$ gerado por $\{u - g_1, v - g_2, w - Jg\}$. O cálculo da base de Groebner deste ideal nos dá uma única equação $\bar{G}(u, v, w)$, cuja restrição $\bar{G}(u, v, 0)$ é a equação de definição para $\Delta(g)$ em $\mathbb{C}^2$.

Para ilustrar este algoritmo, vamos aplicá-lo para uma família de germes muito especial, ou seja, germes de tipo

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + kx^r y^r), \text{ com } (a + b)r < ab.$$

Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} u - xy = 0 \\ v - x^a - y^b - kx^r y^r = 0 \\ w - by^b + ax^a = 0 \end{cases}$$

Fazendo $u^r = x^r y^r$ obtemos

$$\begin{cases} v = x^a + y^b + ku^r \\ w = by^b - ax^a. \end{cases}$$

Para eliminar as variáveis x e y escrevemos $U = u$ e $V = v - ku^r$, e consideramos o novo sistema

$$\begin{cases} aV + w = (a + b)y^b \\ bV - w = (a + b)x^a. \end{cases}$$

O que implica

$$\begin{cases} (aV + w)^a = (a + b)^a y^{ab} \\ (bV - w)^b = (a + b)^b x^{ab}. \end{cases}$$

O produto entre as duas equações nos dá

$$(aV + w)^a (bV - w)^b = (a + b)^{a+b} U^{ab}.$$

Finalmente, fazendo a restrição $w = 0$ obtemos a seguinte equação de definição para $\Delta(g)$

$$G(U, V) = (a + b)^{a+b} U^{ab} - a^a b^b V^{a+b}.$$

Como G é quase homogêneo obtemos

$$\mu(\Delta(g)) = \mu(\Delta(f)) = (ab - 1)(a + b - 1).$$

Obtemos portanto que $d(g) = d(f)$.

Observamos aqui que na verdade o germe g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f , pois para a mudança de coordenadas na meta $h(u, v) = (u, v - ku^r)$ obtemos $h \circ g = (xy, x^a + y^b)$. O cálculo feito acima teve somente o objetivo de ilustrar a aplicação do algoritmo.

Podemos então enunciar o seguinte

Lema 4.0.1 *Seja*

$$g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_r k_r x^r y^r + \sum_i k_i x^{r_i} y^{s_i})$$

um germe de aplicação na $\mathcal{K}$ -órbita de f . Então g é $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe

$$\bar{g}(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_i k_i x^{r_i} y^{s_i}).$$

Demonstração: Fazendo a mudança de coordenadas na meta

$$h(u, v) = (u, v - \sum_r k_r u^r)$$

temos

$$h \circ g(x, y) = (xy, x^a + y^b + \sum_i k_i x^{r_i} y^{s_i}).$$

■

Observamos que, em geral, este algoritmo é impossível de ser aplicado sem ajuda de métodos computacionais, por causa do cálculo da base de Groebner, que é essencial na determinação da equação de definição de $\Delta(g)$.

No caso quase homogêneo, é possível determinar fórmulas explícitas para $d(g)$, como no Teorema 3.1.5 de [7], onde é mostrado que a base de Groebner também é quase homogênea, porém, no caso pré quase homogêneo este cálculo não é simples.

O cálculo para encontrar a equação de definição de $\Delta(g)$ foi feito usando a seguinte rotina do programa Singular [9]:

```
> ring r = 0, (x, y, u, v, w), dp;
> ideal I = u - g1, v - g2, w - Jg;
> eliminate(I, xy);
```

onde g_1 e g_2 são as funções coordenadas de g e Jg é o jacobiano de g . Observamos que o comando “eliminate” executa o cálculo da base de Groebner e mostra somente a única equação $\overline{G}(u, v, w)$ desta base com as variáveis (u, v, w) .

Fazemos a restrição desta função para $w = 0$ e encontramos a equação em função das variáveis u e v , que é a equação de definição para $\Delta(g)$.

Para o cálculo de $\mu(\Delta(g))$ usamos a rotina

```
> ring r = 0, (u, v), ds;
> poly z = G;
> vdim(std(jacob(z)));
```

O comando “vdim(std(jacob(z)))” calcula a base standard do ideal jacobiano do polinômio $z = G(u, v)$ e também a sua codimensão, ou seja, o número de Milnor $\mu(G) = \mu(\Delta(g))$.

Como consequência, iremos descrever a seguir as C^0 - $\mathcal{A}$ -órbitas de algumas classes de $\mathcal{K}$ -equivalência dos germes $(xy, x^a + y^b)$ com $a \leq 5$. Inicialmente descrevemos as órbitas dos germes $(xy, x^2 + y^{2\ell+1})$ e $(xy, x^3 + y^b)$.

4.1 Órbitas da classe $f(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1})$

Proposição 4.1.1 *Seja $g(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1} + \theta(x, y)) \in \mathcal{K}(f)$ um germe de aplicação pré quase homogêneo, onde $f(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1})$. Então g é C^0 - $\mathcal{A}$ -equivalente a $p(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1} + k_s xy^s)$, com $2 \leq s \leq \ell$, e estes são as órbitas.*

Demonstração: Como $g \in \mathcal{K}(f)$ podemos escrever

$$g(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1} + \sum_{r,s} k_{r,s} x^r y^s).$$

Como g é pré quase homogêneo, $g(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1} + a_1 xy^{s_1} + \dots + a_k xy^{s_k})$ com $2 \leq s_k \leq s_{k-1} \leq \dots \leq s_1 \leq \ell$. Obtemos que g é C^0 - $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe

$$p(x, y) = (xy, x^2 + y^{2\ell+1} + a_k xy^{s_k}),$$

pois neste caso o cálculo dos números $c(g_{a_k})$ e $d(g_{a_k})$ depende somente dos monômios do germe $p(x, y)$. ■

4.2 Órbitas da classe $f(x, y) = (xy, x^3 + y^b)$

Proposição 4.2.1 *Seja $h(x, y) = (xy, x^3 + y^b + \zeta(x, y)) \in \mathcal{K}(f)$ um germe de aplicação pré quase homogêneo, onde $f(x, y) = (xy, x^3 + y^b)$ com $(3, b) = 1$ e $b > 3$. Então h é C^0 - $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes germes*

1. $p_1(x, y) = (xy, x^3 + y^b + k_s xy^s)$, com $1 < s \leq b - i$ para $3 < b < 3i$;
2. $p_2(x, y) = (xy, x^3 + y^b + k_s x^2 y^s)$, com $s \neq 2$ e $1 \leq s \leq b - i$ para $3 < b < \frac{3i}{2}$;
3. $p_3(x, y) = (xy, x^3 + y^b + k_1 xy^{s_1} + k_2 x^2 y^{s_2})$, com $2s_2 < s_1$, $2s_1 < b + s_2$ e $1 \leq s_2 \leq s_1 \leq b - i$ para $3 < b < 3i$.

Demonstração: Tomando $g \in \mathcal{K}(f)$ podemos escrever $g(x, y) = (xy, x^3 + y^b + \sum_{r,s} k_{r,s} x^r y^s)$. Como g é pré quase homogêneo, $g(x, y) = (xy, x^3 + y^b + a_1 xy^{s_1} + \dots + a_\ell xy^{s_\ell} + b_1 x^2 y^{f_1} + \dots + b_k x^2 y^{f_k})$. Usando os mesmos argumentos da proposição anterior obtemos que g é topologicamente equivalente a p_1 , p_2 ou p_3 . ■

4.3 Número de dobras e órbitas para $a = 4, 5$

4.3.1 $\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^5)$

Qualquer germe pré quase homogêneo na $\mathcal{K}$ -órbita de f se escreve como

$$g(x, y) = (xy, x^4 + y^5 + \alpha_1 xy^2 + \alpha_2 x^2 y + \alpha_3 x^3 y + \alpha_4 xy^3),$$

com $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \neq (0, 0, 0, 0)$.

Com o procedimento descrito acima, encontramos a equação de definição $G(u, v)$ que depende de α_i . Descrevemos abaixo a equação para $G(u, v)$ para $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
G(u, v) = & 387420489u^{20} + 172186884u^{18} + 860934420u^{17}v \\
& - 212576400u^{17} + 25509168u^{16} - 89282088u^{15}v \\
& + 632414790u^{14}v^2 + 47554128u^{15} - 204703200u^{14}v \\
& - 239148450u^{12}v^3 + 12923712u^{14} - 32122656u^{13}v \\
& + 92195172u^{12}v^2 + 168442740u^{11}v^3 + 1173248u^{13} \\
& - 7651584u^{12}v - 34117200u^{11}v^2 + 15588936u^{10}v^3 \\
& - 97758900u^9v^4 + 27648u^{12} - 576000u^{11}v \\
& - 1166400u^{10}v^2 + 27882144u^9v^3 + 11076345u^8v^4 \\
& + 29160000u^6v^6 - 6912u^9v^2 + 409600u^8v^3 \\
& + 607500u^7v^4 - 23850450u^6v^5 - 65536u^5v^5 \\
& - 84375u^4v^6 + 7560000u^3v^7 - 800000v^9.
\end{aligned}$$

Figura 4.1: Polígono de Newton $\Gamma_+(G)$.

Neste exemplo o germe $G(u, v)$ é Newton não degenerado e tem por parte principal o germe

$$\overline{G}(u, v) = 27648u^{12} - 65536u^5v^5 - 6912u^9v^2 - 800000v^9.$$

Aplicando a fórmula de Kouchnirenko obtemos $\mu(\Delta(g)) = 84$ e portanto $d(g) = 29$

Observamos que os monômios que formam a parte principal do germe G , obtidos no cálculo da base de Groebner deste ideal, são determinados através de cálculos que envolvem somente os monômios da parte principal do germe $g_2(x, y)$, ou seja, neste exemplo a parte principal do germe $G(u, v)$ depende somente dos monômios x^4 , y^5 , xy^2 e x^2y , e quando esta parte principal de $g(x, y)$ é formada somente por vértices do polígono de Newton, a parte principal de $G(u, v)$ também é formada somente por vértices, sendo portanto Newton não degenerada.

Um resultado interessante seria poder concluir que o germe $G(u, v)$ é Newton não degenerado, se o germe $g(x, y)$ for Newton não degenerado.

Neste exemplo, o cálculo de $d(g)$ para os germes g que não são $\mathcal{A}$ -equivalentes a f e que estão na $\mathcal{K}$ -órbita de f , foi feito usando o Singular. Observamos que com o uso do software Transversal [11], foi possível determinar todos estes germes g .

Observamos que conforme aumentamos o número de monômios em g , em geral, o cálculo de $d(g)$ usando o software Singular fica muito lento, e em algumas situações não é possível completar este cálculo por problemas de memória. Para a família acima este cálculo foi possível.

Mostramos na tabela abaixo os cálculos para os invariantes topológicos dos germes pré quase homogêneos que aparecem em $\mathcal{K}(xy, x^4 + y^5)$:

Germe g	$\mu(\Sigma(g))$	$\mu(\Delta(g))$	$c(g)$	$d(g)$
$(xy, x^4 + y^5)$	12	152	19	89
$(xy, x^4 + y^5 + xy^2)$	5	89	12	30
$(xy, x^4 + y^5 + xy^3)$	9	125	16	42
$(xy, x^4 + y^5 + x^2y)$	6	98	13	28
$(xy, x^4 + y^5 + x^3y)$	11	143	18	48
$(xy, x^4 + y^5 + xy^2 + x^2y)$	4	84	11	29

4.3.2 $\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^7)$

Neste caso, os possíveis germes pré quase homogêneos são obtidos pela soma de até 7 monômios, ou seja,

$$g(x, y) = (xy, x^4 + y^7 + \alpha_1 xy^5 + \alpha_2 xy^4 + \alpha_3 xy^3 + \alpha_4 xy^2 + \alpha_5 x^2 y^3 + \alpha_6 x^2 y + \alpha_7 x^3 y)$$

com $(\alpha_1, \dots, \alpha_7) \neq (0, \dots, 0)$.

Com este número de monômios o cálculo pelo Singular não é possível. Fizemos este cálculo somente para as possíveis partes principais, como por exemplo, $g_\lambda(x, y) = (xy, x^4 + y^7 + \lambda x^3 y)$, com $\lambda \neq 0$. Neste caso

$$\begin{aligned} G_\lambda(u, v) = & 285311670611 * u^{28} + (1549681956\lambda^{11}) * u^{25} \\ & + (20834612964\lambda^9) * u^{23}v + (104687499708\lambda^7) * u^{21}v^2 \\ & + (238483969416\lambda^5) * u^{19}v^3 + (232672956516\lambda^3) * u^{17}v^4 \\ & + (68056287376\lambda) * u^{15}v^5 + (-13176688\lambda^4) * u^4v^9 \\ & + (-105413504\lambda^2) * u^2v^{10} - 210827008 * v^{11} \end{aligned}$$

Figura 4.2: O polígono $\Gamma_+(G_\lambda)$.

O germe $G_\lambda(u, v)$ tem por parte principal

$$\begin{aligned}\overline{G_\lambda}(u, v) &= (1549681956\lambda^{11}) * u^{25} + (13176688\lambda^4) * u^4v^9 \\ &+ (-105413504\lambda^2) * u^2v^{10} - 210827008 * v^{11}.\end{aligned}$$

Usando o software Singular temos que $\mu(\Delta(g_\lambda)) = \mu(\Delta(g_1)) = 237$ e conseqüentemente $d(g) = 87$.

Neste exemplo, e nos próximos, os germes em que aparece o símbolo $(*)$ não foi possível calcular $\mu(\Delta(g))$, e conseqüentemente $d(g)$, por falta de memória do computador.

Mostramos na tabela abaixo os cálculos para os invariantes topológicos dos germes pré quase homogêneos que aparecem em $\mathcal{K}(xy, x^4 + y^7)$:

Germe g	$\mu(\Sigma(g))$	$\mu(\Delta(g))$	$c(g)$	$d(g)$
$(xy, x^4 + y^7)$	18	270	27	99
$(xy, x^4 + y^7 + xy^2)$	5	127	14	47
$(xy, x^4 + y^7 + xy^3)$	9	171	18	63
$(xy, x^4 + y^7 + xy^4)$	13	205	22	74
$(xy, x^4 + y^7 + xy^5)$	17	*	26	*
$(xy, x^4 + y^7 + x^2y)$	8	160	17	59
$(xy, x^4 + y^7 + x^3y)$	15	237	24	87
$(xy, x^4 + y^7 + x^2y^3)$	16	248	25	91
$(xy, x^4 + y^7 + xy^2 + x^2y)$	4	*	13	*
$(xy, x^4 + y^7 + xy^3 + x^2y)$	6	*	15	*
$(xy, x^4 + y^7 + xy^4 + x^3y)$	12	*	21	*

4.3.3 $\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^4 + y^9)$

Os possíveis germes pré quase homogêneos são obtidos pela soma de até 10 monômios.

Analogamente ao exemplo anterior temos que, com este número de monômios o cálculo pelo Singular não é possível. Fizemos este cálculo somente para as possíveis partes principais. Como por exemplo, $g(x, y) = (xy, x^4 + y^9 + \beta x^2y)$, com $\beta \neq 0$.

A equação de definição para $\Delta(g)$ é dada por

$$\begin{aligned}
G_\beta(u, v) = & 302875106592253 * u^{36} + (413575475547000\beta^3) * u^{30}v \\
& + (129599821650000\beta^6) * u^{24}v^2 + (-178674770696058\beta^2) * u^{20}v^5 \\
& + (270000000000\beta^{13}) * u^{22} + (4331470000000\beta^9) * u^{18}v^3 \\
& + (17506430896500\beta^5) * u^{14}v^6 + (8742808166976\beta) * u^{10}v^9 \\
& + (-10460353203\beta^4) * u^4v^{10} - 99179645184 * v^{13}.
\end{aligned}$$

Figura 4.3: O polígono $\Gamma_+(G_\beta)$.

Observemos que o germe $G_\beta(u, v)$ é Newton não degenerado e tem como parte principal

$$\begin{aligned}
\overline{G}_\beta(u, v) = & (270000000000\beta^{13}) * u^{22} + (-10460353203\beta^4) * u^4v^{10} \\
& - 99179645184 * v^{13}.
\end{aligned}$$

Assim, pela fórmula de Kouchnirenko $\mu(\Delta(g)) = 238$ e conseqüentemente $d(g) = 93$.

Na tabela abaixo estão os valores dos invariantes topológicos dos germes pré quase homogêneos que aparecem em $\mathcal{K}(f)$:

Germe g	$\mu(\Sigma(g))$	$\mu(\Delta(g))$	$c(g)$	$d(g)$
$(xy, x^4 + y^9)$	24	420	35	163
$(xy, x^4 + y^9 + xy^2)$	5	173	16	68
$(xy, x^4 + y^9 + xy^3)$	9	225	20	88
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4)$	13	*	24	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^5)$	17	*	28	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^6)$	21	*	32	*
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y)$	10	238	21	93
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^3)$	18	342	29	133
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^4)$	22	*	33	*
$(xy, x^4 + y^9 + x^3y)$	19	*	30	*
$(xy, x^4 + y^9 + x^3y^2)$	23	*	34	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4 + x^3y)$	12	*	23	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^4 + x^2y)$	8	*	19	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^3 + x^2y)$	6	*	17	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^2 + x^2y)$	4	*	15	*
$(xy, x^4 + y^9 + x^2y^3 + x^3y)$	17	*	28	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^6 + x^3y)$	18	*	29	*
$(xy, x^4 + y^9 + xy^5 + x^3y)$	15	*	26	*
$(xy, y^9 + x(x - y^2)^3)$	22	*	33	*

Observações: 1) Nesta classe aparecem alguns germes com o mesmo número de cúspides, tais como $g(x, y) = (xy, x^4 + y^9 + x^2y^3)$ e $h(x, y) = (xy, x^4 + y^9 + xy^6 + x^3y)$, porém é possível mostrar que não existe um desdobramento topologicamente trivial na $\mathcal{K}$ -órbita do germe $(xy, x^4 + y^9)$ que contenha estes germes, vide observação da página 52.

2) Esta é a primeira classe de $\mathcal{K}$ equivalência em que aparece um germe cujo jacobiano é Newton degenerado, ou seja, o germe $h(x, y) = (xy, y^9 + x(x - y^2)^3)$. Para este germe, o cálculo do número de Milnor do conjunto singular foi feito usando o software Singular. Neste caso, $c(h) = c(q)$ com $q(x, y) = (xy, x^4 + y^9 + x^2y^4)$, porém, analogamente ao anterior, é possível mostrar que não existe um desdobramento topologicamente trivial nesta $\mathcal{K}$ -órbita que contenha estes germes. Observamos que para qualquer deformação g_λ , com $g_0 = h$ e $g_1 = q$, o germe g_λ , para $\lambda \neq 1, 0$ está na C^0 - $\mathcal{A}$ -órbita do germe $(xy, x^4 + y^9 + xy^6)$.

4.3.4 $\mathcal{K}$ -órbita de $f(x, y) = (xy, x^5 + y^6)$

Os possíveis germes pré quase homogêneos são obtidos pela soma de até 8 monômios.

Analogamente aos exemplos anteriores, consideramos $g(x, y) = (xy, x^5 + y^6 + \alpha xy^3)$, com $\alpha \neq 0$.

Neste caso, a equação de definição para $\Delta(g)$ é dada por

$$\begin{aligned} G_\alpha(u, v) = & 285311670611 * u^{30} + (-106945594448\alpha^4) * u^{24}v \\ & + (192922992900\alpha) * u^{21}v^3 + (210827008\alpha^{11}) * u^{21} \\ & + (3383988608\alpha^8) * u^{18}v^2 + (16709629552\alpha^5) * u^{15}v^4 \\ & + (22927806000\alpha^2) * u^{12}v^6 + (-32000000\alpha^6) * u^6v^7 \\ & + (-43200000\alpha^3) * u^3v^9 - 145800000 * v^{11} \end{aligned}$$

O germe $G_\alpha(u, v)$ tem como parte principal

$$\begin{aligned} \overline{G}_\alpha(u, v) = & (210827008\alpha^{11}) * u^{21} + (-32000000\alpha^6) * u^6v^7 \\ & + (-43200000\alpha^3) * u^3v^9 - 145800000 * v^{11}. \end{aligned}$$

Figura 4.4: O polígono $\Gamma_+(G_\alpha)$.

Usando o software Singular temos que $\mu(\Delta(g)) = 191$ e conseqüentemente $d(g) = 70$.

Mostramos na tabela abaixo os cálculos para os invariantes topológicos dos germes pré quase homogêneos que aparecem em $\mathcal{K}(f)$:

Germes g	$\mu(\Sigma(g))$	$\mu(\Delta(g))$	$c(g)$	$d(g)$
$(xy, x^5 + y^6)$	20	290	29	106
$(xy, x^5 + y^6 + xy^2)$	6	136	15	50
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3)$	11	191	20	70
$(xy, x^5 + y^6 + xy^4)$	16	*	25	*
$(xy, x^5 + y^6 + x^2y^3)$	17	*	26	*
$(xy, x^5 + y^6 + x^3y^2)$	18	*	27	*
$(xy, x^5 + y^6 + x^2y)$	7	147	16	54
$(xy, x^5 + y^6 + x^3y)$	13	*	22	*
$(xy, x^5 + y^6 + x^4y)$	19	*	28	*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3 + x^3y)$	9	*	18	*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^3 + x^2y)$	6	*	15	*
$(xy, x^5 + y^6 + xy^2 + x^2y)$	4	*	13	*

Observação: Nesta classe aparecem germes com o mesmo número de cúspides, tais como $g(x, y) = (xy, x^5 + y^6 + xy^2)$ e $h(x, y) = (xy, x^5 + y^6 + xy^3 + x^2y)$, utilizamos então os argumentos da página 52 para mostrar que estes germes não são topologicamente triviais.

Bibliografia

- [1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley series in mathematics, (1929).
- [2] C. Bivlia-Ausina, T. Fukui & M. J. Saia, Newton filtrations, graded algebras and codimension of non-degenerated ideals. Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc., **133**, 1, (2002). 55–75.
- [3] J. W. Bruce, M. A. S. Ruas and M. J. Saia, A note on determinacy, Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992), 856–887.
- [4] A. A. duPlessis, Genericity and smooth finite determinacy. Proc. Sympos. Pure Math. Vol 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1983), pp. 295–312.
- [5] T. Fukui, J.J. Nuño Ballesteros and M.J. Saia, On the number of singularities in generic deformations of map germs, J. London Math. Soc. (2) **58**, (1998), 141–152.
- [6] T. Gaffney and D. Mond, Cusps and double folds of germs of analytic maps from the plane to the plane, J. London Math. Soc. (2) **43**, (1991) no.1, 185–192.
- [7] T. Gaffney and D. Mond, Weighted homogeneous maps from the plane to the plane, Mat. Proc. Cambridge Philos. Soc. **109**, (1991) no. 3, 451–470.
- [8] T. Gaffney, $\mathcal{L}^0$ -equivalence of maps, Mat. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128**, (2000), 479–496.

- [9] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. SINGULAR 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2001). <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [10] A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32**, (1976), 1–31.
- [11] N.P. Kirk, Transversal, a maple package for singularity theory, version 3.1, Department of mathematical sciences, University of Liverpool, (1998).
- [12] D. Mond and R. Pellikaan, Fitting ideals and multiple points of analytic mappings, Proceedings of the Patzcuaro workshop on algebraic and analytic geometry, Lectures Notes in Mathematics, 1414, Springer, Berlin, (1991).
- [13] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane, *J. London Math. Soc.* **36**, (1987), 351–369.
- [14] J. H. Rieger and M. A. S. Ruas, Classification of $\mathcal{A}$ -simple germs from K^n to K^2 , *Compositio Mathematica* **79**, (1991), 99–108.
- [15] M. A. S. Ruas, C^ℓ -determinação finita e aplicações, Tese de doutorado, USP, (1983).
- [16] M. A. S. Ruas and M. J. Saia, C^ℓ -determinacy of weighted homogeneous germs, *Hokkaido math journal*, vol. 26, (1998), 89–99.
- [17] M. J. Saia, Pre-weighted homogeneous map germs: finite determinacy and topological triviality, *Nagoya Math. J.* **151**, (1998), 209–220.
- [18] M. J. Saia, The integral closure of ideals and the Newton filtrations, *J. Algebraic Geometry*, 5, (1996), 1–11.
- [19] F. Tari, Singularidades de aplicações diferenciáveis. Notas didáticas do ICMC-USP, no 34, (1999).
- [20] B. Teissier, Introduction to equisingularity problems. *Algebraic Geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., vol 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1975), 593–632.

- [21] A.N. Varchenko, Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals. *Functional Anal. Appl.* vol 10 (1977), 175–196.
- [22] C. T. C. Wall, Finite determinacy of smooth map-germs, *Bull. London Math. Soc.*, 13, 481–539, (1981).
- [23] H. Whitney, On singularities of mappings of euclidean spaces. Mappings of the plane into the plane, *Annals of Mathematics*, vol.62, No.3, November (1955).