**"UM PROBLEMA DE CAUCHY CARACTERÍSTICO:
EXISTÊNCIA E UNICIDADE"**

LUIZ ANTONIO FERNANDES DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

São Carlos

1986

*Aos meus Pais,
Angelo e Deolinda,
e ao
Fábio,
meu "baixinho invocado"*

A G R A D E C I M E N T O S

- . Ao *Prof. Dr. Adalberto P. Bergamasco* pela orientação, apoio e incentivo em todos os momentos.
- . Aos colegas do Departamento de Ciências da FEIS-UNESP, em especial à *Prof. Neusa Augusto da Silva*, pela amizade e incentivo.
- . À minha sogra, *Sr.^a Rosa Dahbar de Arbach*, pelo apoio.
- . À Capes e PICD, pelo auxílio financeiro.
- . À *Srtà. Sandra Lúcia de Oliveira*, responsável pela datilografia.
- . À *Roseli*, esposa e companheira, que sempre me incentivou e compreendeu minha ausência.

ABSTRACT

F. Trèves, in [T2], applied the Concatenation Method and Carleman's Method to show that uniqueness in the Cauchy problem, for certain degenerate hyperbolic equations, depends on the lower order terms.

Lu, A. , Mai, M. and Wang, G. in [LMW], used an Energy Estimate to study the existence of solutions of the Cauchy problem for the same operator class as [T2].

In this work, we study in detail the paper [T2] and Theorem 1 of [LMW].

Í N D I C E

Introdução	1
Notações	3
Capítulo 0	
Preliminares	5
Capítulo 1	
Unicidade de Soluções na classe C^m	20
Capítulo 2	
Existência de Soluções na classe C^∞	39
Bibliografia	66

INTRODUÇÃO

O objetivo dessa dissertação é relacionar, de maneira detalhada, os artigos [T2] e [LMW] que tratam de fenômenos discretos em, respectivamente, unicidade e existência de soluções de certos problemas de Cauchy característicos; são apresentadas demonstrações detalhadas de alguns dos resultados destes trabalhos.

Nos artigos referidos acima, fica mostrado que as questões de existência e unicidade de soluções, com dados iniciais em $t = 0$, para a classe de operadores diferenciais parciais lineares de 2.^a ordem

$$L_p = \partial_x^2 - x^2 \partial_t^2 - p \partial_t, \quad p \in \mathbb{R},$$

dependem do termo de 1.^a ordem, isto é, dos valores do parâmetro p .

Os problemas considerados são problemas de Cauchy característicos com características duplas na origem.

A dissertação está dividida em três capítulos.

No capítulo 0 enunciamos alguns resultados básicos, definições e notações que serão utilizados ao longo do trabalho.

O capítulo 1 trata da questão de unicidade de soluções no problema de Cauchy para os operadores L_p , com dados iniciais sobre a reta $t = 0$. A principal conclusão desse capítulo é que vale a unicidade (no sentido clássico) se, e somente se, $p \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

Os teoremas 1.1 e 1.2 garantem que vale unicidade, num sentido mais fraco (unilateral) se, e somente se, $p \neq 1, 3, 5, \dots$

Finalmente, no capítulo 2, é tratada a questão da existência de soluções no semiplano superior $t \geq 0$. O Teorema 2.1 garante que, para dados iniciais $f_1(x)$ e $f_2(x)$, ambos flat em $x = 0$, existe uma única solução de classe C^∞ , quando $p \neq 1, 3, 5, \dots$, do problema de Cauchy para o operador

$$M_p = \partial_x^2 - x^2 \partial_t^2 + p \partial_t, \quad p \in \mathbb{R}$$

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}^n$ = Espaço Euclidiano n -dimensional.

$\mathbb{Z}_+$ = Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z}$ = Conjunto dos números inteiros.

$\Omega \setminus F$ = Complemento de um subconjunto F em Ω .

$\partial \Omega$ = Fronteira de Ω .

$\mathbb{Z}_+^n$ = Conjunto das n -uplas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$,
 $j = 1, \dots, n$.

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$C^k(\Omega)$ = Espaço das funções k -vezes continuamente diferenciáveis.

$C^\infty(\Omega)$ = Espaço das funções infinitamente diferenciáveis.

$S(u)$ = Suporte da função u .

$C_c^\infty(\Omega)$ = Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

$\partial_x^k u$ = Derivada parcial de ordem k da função u em relação à variável x .

Para $k = 1, 2$, usaremos também a notação u_x e u_{xx} .

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$$

CAPÍTULO 0: PRELIMINARES

O Problema de Cauchy em $\mathbb{R}^2$

Seja P um operador diferencial parcial de 2^{a} ordem definido num subconjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Seja S uma curva de classe C^1 em Ω , isto é, para cada $(x_0, t_0) \in S$ existe uma vizinhança aberta W de (x_0, t_0) , onde está definida uma função $g \in C^1(W)$ tal que

$$(\text{grad } g)(x, t) \neq (0, 0) \text{ , } \forall (x, t) \in W$$

$$S \cap W = \{(x, t) \in W : g(x, t) = 0\}$$

Denotamos por W_+ e W_- os subconjuntos fechados de W ,

$$W_+ = \{(x,t) \in W : g(x,t) \geq 0\}$$

$$W_- = \{(x,t) \in W : g(x,t) \leq 0\}$$

Vamos supor que Ω contém a origem $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e que S é a reta $t = 0$.

Sejam f uma função definida em Ω e u_1, u_2 funções de uma variável.

O Problema de Cauchy (local) para o operador P , com dados iniciais em $t = 0$, consiste em encontrar uma função $u(x,t)$, de classe C^2 , definida numa vizinhança aberta da origem $V \subset \Omega$ tal que

$$(0.1) \quad \begin{cases} P u = f \text{ em } V, \\ u(x,0) = u_1(x), \\ u_t(x,0) = u_2(x), \quad (x,0) \in V. \end{cases}$$

Características:

Consideremos a equação

$$(0.2) \quad L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} - p u_t = 0, \quad p \in \mathbb{R}:$$

Tal equação é hiperbólica para $x \neq 0$ e suas curvas características são dadas por

$$t \pm \frac{x^2}{2} = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Figura 0.1

Portanto (0.2) tem características duplas em $x = 0$, isto é, para $x = 0$, as curvas características de (0.1) se tangenciam.

(0.2) perturbada:

A equação

$$(0.3) \quad u_{xx} - (x^2 + \varepsilon^2) u_{tt} - p u_t = 0, \quad \varepsilon > 0, p \in \mathbb{R}$$

é estritamente hiperbólica e suas curvas características

são as soluções de

$$\frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{x^2 + \epsilon^2},$$

e são dadas por

$$t \pm \frac{1}{2} \left[x \sqrt{x^2 + \epsilon^2} + \epsilon^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + \epsilon^2}) \right] = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Figura 0.2

Observação:

Vamos tratar do problema de Cauchy para a equação (0.2) com dados iniciais ao longo da reta $t = 0$, que tangencia as duas curvas características de (0.2) que passam pela origem. Portanto o problema considerado é caracte

rístico.

Unicidade no Problema de Cauchy (UPC)

Definição 0.1:

Dizemos que há unicidade no problema de Cauchy quando existir uma vizinhança da origem $U \subset V$ onde o problema (0.1) tem no máximo uma solução $u \in C^2(V)$, isto é, se $u, v \in C^2(V)$ são soluções então $u = v$ em U .

A definição 0.1 é equivalente à

Definição 0.2:

Dizemos que há UPC se existir uma vizinhança aberta da origem $U \subset V$ tal que, para toda $u \in C^2(V)$,

$$(0.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} P u = 0 \quad \text{em } V \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{array} \right. , \quad (x, 0) \in V \quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \text{em } U$$

Dizemos que a definição 0.2 é a definição clássica de UPC (UPC clássica). Vamos enunciar agora algumas formas mais fracas de UPC (no final do capítulo 1, ficará claro que as definições a seguir são realmente mais fracas que a definição 0.2).

Definição 0.3:

Dizemos que há unicidade no problema de Cauchy através da reta $t = 0$, para funções suportadas no semiplano inferior (UPCI) se existir uma vizinhança $U \subset V$ da origem tal que, para toda $u \in C^2(V)$,

$$(0.5) \quad \begin{cases} P u = 0 & \text{em } V \\ S(u) \subset V_- \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ em } U$$

Podemos dizer também que se trata de propagação de zeros de cima para baixo.

Definição 0.4:

Dizemos que há unicidade no problema de Cauchy através da reta $t = 0$, para funções suportadas no semiplano superior (UPCS) se existir uma vizinhança aberta $U \subset V$ da origem tal que, para toda $u \in C^2(V)$,

$$(0.6) \quad \begin{cases} P u = 0 & \text{em } V \\ S(u) \subset V_+ \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ em } U$$

Teorema 0.1:

$$\text{UPC clássica} \Rightarrow \begin{cases} \text{UPCI} \\ \text{UPCS} \end{cases} \text{ e}$$

Demonstração:

Vamos mostrar que UPC clássica $\Rightarrow$ UPCI. A outra implicação é análoga.

Sabemos que existe uma vizinhança aberta da origem $U \subset V$ nas condições de definição 0.2.

Suponhamos que

$$P u = 0 \text{ em } V \quad \text{e} \quad S(u) \subset V_-$$

Vamos exibir uma vizinhança U_0 da origem tal que $u = 0$ em U_0 . Temos que

$$u(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

Consequentemente, $u_t(x, t) = 0, \quad t > 0$

Pela continuidade de u e u_t temos

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = 0$$

Portanto, $u = 0$ em U

Basta então tomar $U_0 = U$

Critério de Convergência em $C^\infty(V)$

Definição 0.5:

Uma sequência $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ converge para zero em $C^\infty(V)$ se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, a sequência $(D^\alpha f_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ converge uniformemente para zero sobre cada sub

conjunto compacto de V .

Espaços de Sobolev

Definição 0.6:

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e m um número natural. Denotamos por $H^m(\Omega)$ o espaço vetorial

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ com } |\alpha| \leq m\},$$

onde $D^\alpha f$ indica a derivada de f no sentido de distribuições.

Norma:

$$\|f\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 \right]^{1/2}$$

Produto Interno:

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f \overline{D^\alpha g}$$

Definição 0.7:

Denotamos por $H^m_0(\Omega)$ a aderência de $C^m_c(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$.

Proposição 0.1:

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} H^m_0(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$$

Definição 0.8:

Sejam E, F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação linear. Dizemos que T é compacta se subconjuntos limitados de E são levados por T em subconjuntos relativamente compactos de F .

Proposição 0.2:

Nas condições da definição anterior são equivalentes

- (a) T leva a bola unitária de E num conjunto relativamente compacto de F ;
- (b) T é compacta;
- (c) Toda sequência limitada (x_n) de pontos de E contém uma subsequência (x_{n_r}) tal que (Tx_{n_r}) é convergente em F .

Teorema 0.2 (Rellich):

Se Ω é um conjunto aberto limitado e $0 \leq j < m$, então a injeção canônica $i: H_0^m(\Omega) \rightarrow H_0^j(\Omega)$ é compacta.

Observação 0.2:

Se Ω for um conjunto aberto limitado com fronteira suficientemente regular, então a injeção $i: H^m(\Omega) \rightarrow H^j(\Omega)$, $0 \leq j < m$, é compacta.

Método de Carleman para UPC

Sejam P um operador diferencial parcial de ordem m , com coeficientes C^∞ , e f uma função real contínua, definidos num subconjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$.

Teorema 0.3 (Carleman):

Suponhamos que sejam satisfeitas as condições

- (a) Existe uma função $C(s)$ de $s > 0$ tal que para todo s suficientemente grande e toda função $v \in C_c^\infty(V)$,

$$(0.7) \quad \int e^{sf(x,t)} |v(x,t)|^2 dx dt \leq C(s) \int e^{sf(x,t)} |P v(x,t)|^2 dx dt$$

(b) A função $C(s)$ em (a) é tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} C(s) e^{-ks} = 0,$$

para todo $k > 0$.

Seja F um subconjunto relativamente fechado de V tal que $F \cap V_+$ é compacto.

Então existe uma vizinhança aberta $U \subset V$ de $F \cap V_+$ tal que se $u \in H^m(V)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} Pu = 0 \text{ em } V \\ S(u) \subset F \end{array} \right. \Rightarrow u = 0 \text{ em } U$$

Observação 0.3:

A demonstração do Teorema 0.3 está feita em [T3], e; com mais detalhes, em [S].

Observação 0.4:

A vizinhança U depende apenas da função p_f so f e do subconjunto F .

Observação 0.5:

O Teorema 0.3 implica UPCI.

Método das Aproximações Sucessivas

Consideremos a equação

$$(0.8) \quad u_{xt} = F(x, t, u, u_x, u_t)$$

O problema de Cauchy para (0.8) é bem-posto quando os dados iniciais são tomados sobre uma curva estritamente monótona S .

Suponhamos que S seja a reta $x + t = 0$ e que os dados iniciais se anulem ao longo de S .

Então o problema de Cauchy para (0.8) é equivalente à equação integrodiferencial.

$$(0.9) \quad u(x, t) = \iint_D F(r, s, u, p, q) \, dr \, ds, \quad$$

onde $p = u_r$, $q = u_s$ e D é a região do plano rs limitada por S e pelas retas $r = x$ e $s = t$.

Sejam G uma região do plano rs contendo S e

$$H_\epsilon = \{(u, p, q) : |u|, |p|, |q| < \epsilon\}$$

Teorema 0.4:

Suponhamos que

$F : G \times H_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tal que,

(a) F satisfaz a condição de Lipchitz

$$\begin{aligned} & | F(r,s,u'',p'',q'') - F(r,s,u',p',q') | \\ & \leq M (|u''-u'| + |p''-p'| + |q''-q'|) \end{aligned}$$

onde M é uma constante que independe de r e s .

(b) $|F| \leq K, \quad K \in \mathbb{R}$

Então existe uma única solução da equação (0.9).

Observação 0.6:

A demonstração do Teorema 0.4 é conseguida definindo-se uma sequência de aproximações sucessivas.

$$u_{n+1}(x,t) = \iint_D F(r,s,u_n,p_n,q_n) \, dr \, ds ,$$

$$u_0(x,t) = 0 ,$$

onde $p_n = (u_n)_r$ e $q_n = (u_n)_s$, e mostrando-se que o limite

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1} - u_n] ,$$

existe e satisfaz (0.9).

Observação 0.7:

As equações diferenciais parciais lineares de 2ª ordem estritamente hipérbólicas podem ser reduzidas à forma normal (0.8) e o Teorema 0.4 garante existência global de soluções pois a condição (a) é sempre satisfeita.

Além disso, pode-se mostrar que a solução u é de classe C^2 .

Teorema da Divergência**Teorema 0.5:**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado tal que sua fronteira $\partial \Omega$ é uma hipersuperfície de classe C^1 .

Se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $F \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ e $\text{div } F \in C(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} \text{div } F \, dx = \int_{\partial \Omega} F \cdot N \, ds ,$$

onde N é a normal exterior unitária a Ω .

Desigualdade de Poincaré:

O Teorema do Valor Médio e a Desigualdade de Schwarz fornecem a

Proposição 0.3:

Se $g \in C_c^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, então

$$\iint_{\Omega} |g|^2 \leq c \iint_{\Omega} |g_t|^2$$

CAPÍTULO 1: UNICIDADE DE SOLUÇÕES NA CLASSE C^m .

Baseado no artigo [T2] é usado, além do Método de Carleman, o Método das Concatenações, para mostrar que para certos valores do parâmetro real p , vale UPC, no sentido da definição 0.3, através da reta $t = 0$, para o operador diferencial parcial

$$(1.1) \quad L_p = \partial_x^2 - x^2 \partial_t^2 - p \partial_t$$

O Método das Concatenações já havia sido utilizado por Treves para obter resultados em resolubilidade local e hipocoerência (Ver por exemplo o Teorema II.5.1. de [T1]).

Começaremos demonstrando as relações de concatenação que serão utilizadas a seguir.

Sejam

$$(1.2) \quad X = \partial_x + x \partial_t, \quad Y = \partial_x - x \partial_t$$

Então

$$(1.3) \quad L_p = XY - q \partial_t, \quad q = p-1$$

Definimos a sequência de operadores L_{p-2j} ,

$j = 0, 1, 2, \dots$, por

$$(1.4) \quad L_{p-2j} = L_p - j[X, Y] = XY - (q-2j) \partial_t,$$

onde $[X, Y] = XY - YX$

Lema 1.1:

Valem as relações de concatenação

$$(1.5) \quad X L_{p-2(j+1)} = L_{p-2j} X, \quad Y L_{p-2j} = L_{p-2(j+1)} Y$$

Demonstração:

É fácil mostrar que

$$X L_{p-2} = L_p X$$

Como $[X, Y] = -2 \partial_t$, temos que

$$X [X, Y] = [X, Y] X$$

Assim

$$\begin{aligned}
 X L_{p-2(j+1)} &= X(L_p - (j+1) [X, Y]) = X(L_{p-2} - j [X, Y]) \\
 &= X L_{p-2} - j X [X, Y] = L_p X - j [X, Y] X \\
 &= L_{p-2j} X
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, como $Y[X, Y] = [X, Y] Y$ e $Y L_p = L_{p-2} Y$, mostra-se a segunda relação.

Vamos agora enunciar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 1.1:

Suponhamos que $p \neq 1, 3, 5, \dots$. Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^2$ e F um subconjunto fechado de Ω cuja intersecção com o semiplano fechado $t \geq 0$ é um conjunto compacto K .

Existem um número inteiro $m \geq 2$, dependendo somente de p , e uma vizinhança aberta U de K tal que se $u \in C^m(\Omega)$,

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_p u = 0 \text{ em } \Omega \\ S(u) \subset F \end{array} \right. \implies u = 0 \text{ em } U$$

Figura 1.1

Começaremos demonstrando um resultado que será utilizado na demonstração do Teorema 1.1.

Lema 1.2:

Para uma função arbitrária $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ vale

$$(1.7) \quad \operatorname{Re} \left[\iint g(x, t) \bar{g}_t(x, t) \, dx \, dt \right] = 0$$

Demonstração:

Como $S(g)$ é compacto podemos considerar um retângulo $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ tal que $S(g) \subset D$.

Usando integração por partes e observando que $g(x, c) = g(x, d) = 0$, $\forall (x, c), (x, d) \in D$, obtemos que

$$\int_c^d [g \bar{g}_t + \bar{g} g_t] \, dt = 0$$

Fazendo $f = g \bar{g}_t$, como $f + \bar{f} = 2 \operatorname{Re} f$, temos

$$\operatorname{Re} \int_c^d g \bar{g}_t dt = 0$$

Logo

$$\operatorname{Re} \iint g \bar{g}_t dx dt = 0$$

Demonstração do Teorema 1.1:

($p < 0$)

Consideremos o operador diferencial

$$(1.8) \quad L_p^* = e^{st} L_p e^{-st}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad s > 0$$

Então

$$(1.9) \quad L_p^* = \partial_x^2 - x^2(\partial_t - s)^2 - p(\partial_t - s)$$

Vamos denotar a norma e o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^2)$ por $\| \cdot \|$ e $(\cdot, \cdot)$, respectivamente.

Seja $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função arbitrária. Então

$$(1.10) \quad \operatorname{Re} (L_p^* v, v_t) = 2s \| x v_t \|^2 - p \| v_t \|^2$$

De fato

$$\begin{aligned}
(1.11) \quad \operatorname{Re} (L_p^* v, v_t) &= 2s \|x v_t\|^2 - p \|v_t\|^2 \\
&+ \operatorname{Re} \left| \iint v_{xx} \bar{v}_t \, dx \, dt - \iint x^2 v_{tt} \bar{v}_t \, dx \, dt \right. \\
&\left. - s^2 \iint x^2 v \bar{v}_t \, dx \, dt + sp \iint v \bar{v}_t \, dx \, dt \right|
\end{aligned}$$

Observando que as derivadas de v são funções pertencentes a $C_c(\mathbb{R}^2)$, e usando o Lema 1.2, concluímos que a última parcela da igualdade (1.11) se anula identicamente, o que mostra (1.10).

Suponhamos que o suporte de v esteja contido num subconjunto limitado fixo do $\mathbb{R}^2$ (grande o suficiente para conter K em seu interior).

Segue de (1.10) que

$$(1.12) \quad \|v\| \leq C |p|^{-1} \|L_p^* v\|$$

Realmente, como $p < 0$ e $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}
|p| \|v_t\|^2 &= -p \|v_t\|^2 = \operatorname{Re} (L_p^* v, v_t) - 2s \|x v_t\|^2 \\
&\leq \operatorname{Re} (L_p^* v, v_t) \leq |(L_p^* v, v_t)| \\
&\leq \iint |L_p^* v| |v_t| \, dx \, dt
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$|p| \|v_t\|^2 \leq \|L_p^* v\| \|v_t\|$$

Logo, $|p| \|v_t\| \leq \|L_p^* v\|$,

Mas pela desigualdade de Poincaré (Proposição 0.3),

$$\|v\| \leq C \|v_t\|,$$

o que completa a demonstração de (1.12).

Consideremos agora $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e tomemos $v = e^{st} w$, $s > 0$. Então, como $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, por (1.12) temos

$$\begin{aligned} \iint e^{2st} |w|^2 dx dt &= \|e^{st} w\|^2 \leq C^2 |p|^{-2} \|L_p^* (e^{st} w)\|^2 \\ &= C^2 |p|^{-2} \iint |(e^{st} L_p e^{-st})(e^{st} w)|^2 dx dt \\ &= C^2 |p|^{-2} \iint e^{2st} |L_p w|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Mostramos assim que, para funções $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ arbitrárias, vale a estimativa

$$(1.13) \quad \iint e^{2st} |w|^2 dx dt \leq E(s) \iint e^{2st} |L_p w|^2 dx dt,$$

onde $E(s) = C^2 |p|^{-2}$ é tal que, para todo $k > 0$,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{E(s)}{e^{ks}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{C^2 |p|^{-2}}{e^{ks}} = 0$$

Estamos portanto nas hipóteses do Teorema de Carleman e concluimos que existe uma vizinhança aberta U de K tal

que

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(\Omega) \\ L_p u = 0 \text{ em } \Omega \\ S(u) \subset F \end{array} \right. \Rightarrow u = 0 \text{ em } U$$

Observação 1.1:

Notemos que a vizinhança U , fornecida pelo Teorema de Carleman, depende somente da função peso $f(x,t) = 2t$ e do subconjunto F , que por sua vez não dependem do parâmetro p .

Observação 1.2:

Pode ocorrer que U tenha componentes conexas

a. contidas em $\Omega \setminus F$

b. contidas em F .

No caso (a) é claro que a solução u já é identicamente nula em tais componentes ($S(u) \subset F$).

No caso (b), se u for não nula em tais componentes, isto não contraria a tese do Teorema 1.1, pois elas têm uma distância positiva de Ω_+ .

Figura 1.2

Podemos assumir então que U é tal que cada uma das suas componentes conexas intercepta $\Omega \setminus F$.

($p \geq 0$)

Começaremos mostrando o seguinte

Lema 1.3:

Suponhamos que para algum $m \geq 2$ vale a propriedade

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in C^m(\Omega) \\ L_{p-2(j+1)} u = 0 \text{ em } \Omega \\ S(u) \subset F \end{array} \right. \Rightarrow \bar{u} \neq 0 \text{ em } U$$

Logo

$$(1.19) \quad \partial_t u = 0 \quad \text{em } U$$

De (1.17) concluimos então que

$$(1.20) \quad \partial_x u = 0 \quad \text{em } U$$

Portanto, (1.19) e (1.20) garantem que u é localmente constante em U , isto é, u é constante em cada componente conexa de U . Como cada uma das componentes de U intercepta $\Omega \setminus F$ e $S(u) \subset F$, obtemos que $u = 0$ em U , como queríamos.

Nossa estratégia agora é dado $p \geq 0$, $p \neq 1, 3, 5, \dots$, encontrar j_0 , dependendo de p , tal que (1.15) é válida para $m_0 = 2$.

Seja j_0 o menor inteiro positivo tal que $2(j_0+1) > p$. Então

$$L_{p-2(j_0+1)} = XY - [q - (2j_0+1)] \partial_t = L_{p_0},$$

onde $p_0 = p - 2(j_0+1) < 0$

Da primeira parte da demonstração ($p < 0$) concluimos que

$$(1.21) \quad \begin{cases} u \in C^2(\Omega) \\ L_{p-2(j_0+1)} u = 0 \text{ em } \Omega \Rightarrow u = 0 \text{ em } U \\ S(u) \subset F \end{cases}$$

Usando o Lema 1.3 j_0+1 vezes obtemos que

$$(1.22) \quad \begin{cases} u \in C^{j_0+3}(\Omega) \\ L_p u = 0 \text{ em } \Omega \Rightarrow u = 0 \text{ em } U \\ S(u) \subset F \end{cases},$$

o que completa a demonstração do Teorema 1.1.

Observação 1.3: Relação entre m e p

Como $m_0 = j_0+3$ e j_0 é o menor inteiro tal que $2(j_0+1) > p$, temos que m_0 é o menor inteiro tal que $2(m_0-2) > p$, isto é,

$$m_0 = \left[p/2 + 3 \right],$$

onde $[r]$, $r \in \mathbb{R}$, denota a função maior inteiro.

Vamos agora construir um exemplo mostrando que não há UPC através de reta $t = 0$, para funções suportadas no semiplano inferior $t \leq 0$, quando $p = 1, 3, 5 \dots$

Teorema 1.2:

Suponhamos que $p = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Então exis

te uma função $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ com

$$(1.23) \quad S(u) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + t \leq 0 \right\}$$

e tal que $L_p u = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração:

Se $p = 2n+1$ então $q = 2n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Assim, quando $j = n-1$ teremos

$$(1.24) \quad L_{p-2}(j+1) = L_{p-2n} = XY - (q-2n) \partial_t = XY$$

Logo, pelo Lema 1.1 ,

$$(1.25) \quad x^{n+1} Y = L_p x^n$$

Realmente, por (1.24),

$$\begin{aligned} x^{n+1} Y &= x^n L_{p-2n} = x^{n-1} X L_{p-2n} = x^{n-1} L_{p-2(n-1)} X \\ &= \dots = L_p x^n \end{aligned}$$

Sabemos que a solução geral da equação $Yv = 0$ é dada por

$$(1.26) \quad v(x,t) = h\left(t + \frac{x^2}{2}\right),$$

onde h é uma função arbitrária de uma variável (pelo menos de classe C^1)

Consideremos

$$(1.27) \quad u(x, t) = X^n \left[h \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \right]$$

Para garantir que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, escolhemos $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Afirmamos que $L_p u = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

De fato

$$\begin{aligned} L_p \left\{ X^n \left[h \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \right] \right\} &= (L_p X^n) \left[h \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \right] \\ &= (X^{n+1} Y) \left[h \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \right] = X^{n+1} \left\{ Y \left[h \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Para que

$$S(u) \subset \left\{ (x, t) : t + \frac{x^2}{2} \leq 0 \right\}$$

basta escolher h de modo que $h(s) = 0$, $s > 0$.

Se fizermos agora a mudança de variáveis

$$x' = x, \quad t' = t - \frac{x^2}{2},$$

os operadores X e Y se transformam respectivamente em

$$(1.28) \quad X' = \partial_{x'}, \quad Y' = \partial_{x'} - 2x' \partial_{t'},$$

Logo

$$u(x', t') = \partial_{x'}^n [h(t' + x'^2)]$$

Podemos então escolher h de modo que

$$S(u) = \{(x, t) : t + \frac{x^2}{2} \leq 0\}$$

Tomamos por exemplo

$$h(s) = \begin{cases} e^{1/s}, & s \leq 0 \\ 0, & s > 0 \end{cases}$$

Observação 1.5:

Construimos assim uma função $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ que satisfaz $L_p u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ e cujo suporte intercepta o semiplano superior exatamente na origem. Portanto existem pontos arbitrariamente próximos do compacto $\{(0,0)\}$ onde u é diferente de zero, contrariando a tese do Teorema 1.1.

Observação 1.6:

Quando $p = 1, 3, 5, \dots$, existe UPCS.

Realmente, suponhamos que u é tal que $L_p u = 0$ em Ω e $S(u) \subset F$, onde F é um subconjunto fechado de Ω tal que $F \cap \Omega_-$ é compacto.

Consideremos a mudança de variáveis

É claro que tal mudança leva o subconjunto F às hipóteses do Teorema 1.1.

Além disso, o operador L_p é levado ao operador $L_{\frac{p}{p-1}}$. Logo, temos que u se anula numa vizinhança de $F \cap \Omega_-$.

Conclusões sobre UPC:

Os teoremas 1.1 e 1.2 permitem a seguinte

Conclusão 1:

Existe UPCI para o operador L_p se, e somente se, $p \neq 1, 3, 5, \dots$

Realmente, tomando no Teorema 1.1, o fechado $F \subset \Omega$ de modo que

$$F \cap \Omega_+ \subset \{(x, t) \in \Omega : t = 0\},$$

seja compacto, temos que, existe $U \supset F \cap \Omega_+$ vizinhança aberta tal que para toda $u \in C^m(\Omega)$

$$\begin{cases} L_p u = 0 & \text{em } \Omega \\ S(u) \subset F \subset \Omega_- \end{cases} \Rightarrow u = 0 \text{ em } U$$

Por outro lado, o Teorema 1.2 fornece um contra-exemplo para $p = 1, 3, 5, \dots$

A observação 1.6 garante que

Conclusão 2:

Existe UPCS para o operador L_p se, e somen
te se, $p \neq -1, -3, -5, \dots$

Observamos agora que para o operador L_p vale tamb
bém a implicação no sentido inverso do Teorema 0.1, isto é,
vale a equivalência

Teorema 1.3:

Para o operador L_p

$$\text{UPC clássica} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{UPCI} \\ \text{UPCS} \end{cases} \text{ e}$$

Demonstração:

Seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} L_p u = 0 & \text{em } \Omega \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ da
origem tal que $u = 0$ em U

Consideremos a função

$$v(x,t) = \begin{cases} 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,t) & , \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Então

$$v \in C^2(\Omega)$$

$$L_p v = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$S(v) \subset \Omega_-$$

Portanto existe uma vizinhança da origem $U_1 \subset \Omega$ tal que $v = 0$ em U_1 . Logo $u = 0$ em $U_1 \cap \Omega_-$

Analogamente, se

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

temos

$$w \in C^2(\Omega)$$

$$L_p w = 0 \quad \text{em } \Omega$$

$$S(w) \subset \Omega_+$$

Portanto existe uma vizinhança aberta da origem $U_2 \subset \Omega$ tal que $w = 0$ em U_2 . Logo $u = 0$ em $U_2 \cap \Omega_+$.

Consideremos então $U = U_1 \cap U_2$.

Assim U é uma vizinhança aberta da origem e $u = 0$ em U .

De fato,

$$U \cap \Omega_- \subset U_1 \cap \Omega_- \Rightarrow u = 0 \text{ em } U \cap \Omega_-$$

$$U \cap \Omega_+ \subset U_2 \cap \Omega \Rightarrow u = 0 \text{ em } U \cap \Omega_+$$

Portanto

$$u = 0 \text{ em } (U \cap \Omega_-) \cup (U \cap \Omega_+) = U$$

Finalmente, o Teorema 1.3 e as conclusões 1 e 2 fornecem o

Corolário:

Para operador L_p , existe UPC clássica se, e so mente se, $p \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$

CAPÍTULO 2: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES NA CLASSE C^∞ .

Do Capítulo anterior podemos concluir que o problema de Cauchy

$$(2.1) \quad \begin{cases} L_p u = u_{xx} - x^2 u_{tt} - p u_t = 0, & t \leq 0, \\ u(x, 0) = f_1(x), \\ u_t(x, 0) = -f_2(x), \end{cases}$$

onde $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, possui no máximo uma solução se, e somente se, $p \neq 1, 3, 5, \dots$

Vamos mostrar agora que para p nas mesmas condições e para dados iniciais f_1 e f_2 satisfazendo certas con

dições de regularidade e de anulamento na origem, existe solução na classe C^∞ , para o problema de Cauchy (2.1)

Como utilizaremos o Método da Energia, que em geral é considerado para $t \geq 0$, vamos mostrar que com f_1 e f_2 nas mesmas condições anteriores, existe solução para o problema de Cauchy, equivalente a (2.1),

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = f_1(x), \\ u_t(x, 0) = -f_2(x), \end{cases}$$

quando $p \neq 1, 3, 5, \dots$

(2.2) é equivalente a (2.1)

Demonstração:

A observação 1.6 mostra que a mudança de variáveis

$$x' = x, \quad t' = -t,$$

leva o operador L_p no operador L_{-p} , a reta $t = 0$ na reta $t' = 0$ e o semiplano $t \leq 0$ no semiplano $t' \geq 0$

Logo

$$L_p u = 0, \quad t \leq 0 \iff L_{-p} u = 0, \quad t' \geq 0$$

Além disso,

$$u(x', 0) = u(x, 0) = f_1(x')$$

$$u_t(x', 0) = u_t(x, 0) = f_2(x')$$

No que segue consideraremos o problema (2.2) e denotaremos por M_p o operador

$$(2.3) \quad M_p = L_{-p} \partial_x^2 - x^2 \partial_t^2 + p \partial_t, \quad p \in \mathbb{R}$$

Desse modo, com a notação (1.2), temos

$$(2.4) \quad M_p = YX + (p-1) \partial_t,$$

e as relações de concatenação (1.5) ficam escritas na forma

$$(2.5) \quad X M_{p-2j} = M_{p-2(j+1)} X, \quad Y M_{p-2(j+1)} = M_{p-2j} Y,$$

para $j = 0, 1, 2, \dots$

Em particular

$$(2.6) \quad X M_p = M_{p-2} X, \quad Y M_{p-2} = M_p Y$$

Suponhamos que f_1 e f_2 são tais que

$$(2.7) \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ têm um zero de ordem infinita em } x = 0, \text{ isto é, são flat na origem.}$$

Observação 2.1:

Usando as relações (2.6) observamos que se u é solução do problema (2.2) então $v = Xu$ é solução do problema

$$(2.8) \quad \begin{cases} M_{p-2} v = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = f_1'(x) + x f_2(x), \\ v_t(x, 0) = f_2'(x) + \frac{1}{x} [f_1''(x) + p f_2(x)] \end{cases}$$

Daremos agora uma relação recursiva sobre a solução do problema (2.2).

Definimos, para $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$,

$$(2.9) \quad (Q_p f)(x) = (f_1'(x) + x f_2(x), f_2'(x) + \frac{1}{x} [f_1''(x) + p f_2(x)])$$

Lema 2.1:

Suponhamos que $u \in C^2(\Omega)$ seja solução do problema (2.2) com dados iniciais $g_1(x)$ e $g_2(x)$ e que $K(x)$ seja solução do problema não homogêneo

$$(2.10) \quad \begin{cases} M_p K = K'' = a(x^2 g_2(x) - p g_1(x)), \\ K(0) = C_1, \\ K'(0) = C_2, \quad a \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Então

$$(2.11) \quad v(x,t) = K(x) + a \int_0^t u(x,s) ds$$

é solução do problema

$$(2.12) \quad \begin{cases} M_p v = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = K(x) \\ v_t(x,0) = a g_1(x) \end{cases}$$

Lema 2.2:

Se $p \neq 1$ e a função $u(x,t)$ é uma solução do problema

$$(2.13) \quad \begin{cases} M_{p-2} u = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = (Q_p f)_1(x) \\ u_t(x,0) = (Q_p f)_2(x) \end{cases}$$

então

$$(2.14) \quad (T_p u)(x,t) = f_1(x) + \frac{1}{1-p} \int_0^t (Y u)(x,s) ds,$$

é uma solução do problema (2.2)

Demonstração:

Se u é solução de (2.13), é fácil mostrar

que $v = Y u$ é solução de

$$(2.15) \quad \begin{cases} M_p v = 0, & t \geq 0 \\ v(x, 0) = (1-p) f_2(x) \\ v_t(x, 0) = \frac{1-p}{x^2} \left[f_1''(x) + p f_2(x) \right] \end{cases}$$

Usamos então o Lema 2.1 com

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (1-p) f_2(x) \\ g_2(x) &= \frac{(1-p)}{x^2} \left[f_1''(x) + p f_2(x) \right] \end{aligned}$$

Sejam $a = \frac{1}{1-p}$ e $K(x)$ solução de

$$(2.16) \quad \begin{cases} M_p K = K'' = a \left[x^2 g_2(x) - p g_1(x) \right] \\ K(0) = f_1(0) = 0 \\ K'(0) = f_1'(0) = 0 \end{cases}$$

O Lema 2.1 garante então que

$$w(x, t) = K(x) + a \int_0^t (Y u)(x, s) ds$$

é solução do problema

$$\begin{cases} M_p w = 0, & t \geq 0 \\ w(x, 0) = K(x) \\ w_t(x, 0) = a g_1(x) = f_2(x) \end{cases}$$

Como

$$K(x) = f_1(0) + f_1'(0)x + a \int_0^x \int_0^y [s^2 g_2(s) - p g_1(s)] ds dy$$

podemos mostrar facilmente que $K(x) = f_1(x)$

Portanto

$$w(x, t) = f_1(x) + \frac{1}{1-p} \int_0^t (Y u)(x, s) ds$$

é solução do problema (2.2)

Teorema 2.1:

Suponhamos que $p \neq 1, 3, 5, \dots$ e que f_1 e f_2 satisfazem a condição (2.7). Então existe uma única solução $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ do problema (2.2)

Demonstração:

($p < 0$)

Para $\varepsilon > 0$ arbitrário, consideraremos o problema perturbado

$$(2.17) \quad \begin{cases} u_{xx} - (x^2 + \varepsilon^2) u_{tt} + p u_t = 0 & , \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u_t(x, 0) = f_2(x) \end{cases}$$

Assim a equação, que em (2.2) é hiperbólica apenas para $x \neq 0$, passa a ser estritamente hiperbólica.

O Método das Aproximações Sucessivas garante então que, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma única solução $u_\varepsilon \in C^\infty \mathbb{R}_+^2$ de (2.17)

Seja $\mathcal{F}$ a família

$$(2.18) \quad \mathcal{F} = \{u_\varepsilon \in C^\infty \mathbb{R}_+^2 : u_\varepsilon \text{ é solução de (2.17) , } \varepsilon = \frac{1}{j} , \quad j = 1, 2, \dots \}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ possui uma subsequência $(u_{\varepsilon_k})_{k=1, 2, \dots}$, cujo limite $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^2)$ é solução de (2.2).

Seja $x_0 > 0$ um número real arbitrário e seja Ω_ε o domínio fechado do $\mathbb{R}^2$ limitado pela reta $t = 0$ e pelas curvas características da equação (2.17) que passam, respectivamente, por $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$.

Seja $t_0 > 0$. Consideremos $x_1 > 0$ a abscissa do ponto de intersecção entre a reta $t = t_0$ e a fronteira de Ω_ε .

Figura 2.1

Vamos aplicar o Método da Energia para obter o

Lema 2.3:

Se v é uma solução da equação (2.17), com $p < 0$, então vale a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad & \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2 + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2 \right] dx - p \iint_{\Omega_\epsilon} v_t^2 dx dt \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \left[v_x^2(x, 0) + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2(x, 0) \right] dx
 \end{aligned}$$

Demonstração:

Temos que

$$v_{xx} - (x^2 + \varepsilon^2) v_{tt} + p v_t = 0$$

Multiplicando a equação por v_t obtemos

$$(2.20) \quad v_{xx} v_t - (x^2 + \varepsilon^2) v_{tt} v_t + p v_t^2 = 0$$

Mas

$$\begin{aligned} v_{xx} v_t &= \partial_x (v_x v_t) - v_x v_{xt} \\ &= \partial_x (v_x v_t) - \frac{1}{2} \partial_t (v_x^2) \\ v_{tt} v_t &= \frac{1}{2} \partial_t (v_t^2) \end{aligned}$$

Portanto a equação (2.20) fica

$$(2.21) \quad \partial_x (v_x v_t) - \frac{1}{2} \partial_t \left[v_x^2 + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2 \right] +$$

Fazendo

$$E = v_x v_t,$$

$$F = - \frac{1}{2} \left[v_x^2 + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2 \right],$$

a igualdade (2.21) assume a forma

$$(2.22) \quad \operatorname{div} (E, F) + p v_t^2 = 0$$

Consideremos a região

$$D_{\varepsilon, t_0} = \{(x, t) \in \Omega : t \leq t_0\}$$

Temos que

- $(E, F) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 em D_{ε, t_0}
- $\partial D_{\varepsilon, t_0}$ é uma curva regular por partes
- $\operatorname{div} (E, F)$ é uma função contínua

Por (2.22) e pelo Teorema da Divergência temos que

$$\begin{aligned} (2.23) \quad \int_{\partial D_{\varepsilon, t_0}} (E n_x + F n_t) &= \iint_{D_{\varepsilon, t_0}} \operatorname{div} (E, F) \, dx \, dt \\ &= -p \iint_{D_{\varepsilon, t_0}} v_t^2 \, dx \, dt ; \end{aligned}$$

onde (n_x, n_t) é a normal exterior unitária a $\partial D_{\varepsilon, t_0}$

Denotaremos por $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 as partes regulares de $\partial D_{\varepsilon, t_0}$, indicadas na figura 2.2 .

Figura 2.2

Vamos calcular a integral da lado a esquerdo de
(2.23)

Em Γ_1 , $(n_x, n_t) = (0, -1)$. Logo

$$\begin{aligned}
 (2.24) \quad \int_{\Gamma_1} (E n_x + F n_t) &= \int_{\Gamma_1} (-F) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_0} \left[v_x^2(x, 0) + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2(x, 0) \right] dx
 \end{aligned}$$

Em Γ_3 , $(n_x, n_t) = (0, 1)$. Logo

$$(2.25) \quad \int_{\Gamma_3} (E n_x + F n_t) = \int_{\Gamma_3} F$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2(x, t_0) + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2(x, t_0) \right] dx$$

Além disso, em Γ_2 e Γ_4 ,

$$E n_x + F n_t \leq 0$$

Portanto

$$(2.26) \quad - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} (E n_x + F n_t) \geq 0$$

Substituindo (2.24), (2.25) e (2.26) na equação (2.23) obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \left[v_x^2(x, 0) + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2(x, 0) \right] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2(x, t_0) + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2(x, t_0) \right] dx \\ & = - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} (E n_x + F n_t) - p \iint_{D_{\varepsilon, t_0}} v_t^2 dx dt \\ & \geq - p \iint_{D_{\varepsilon, t_0}} v_t^2 dx dt \end{aligned}$$

Portanto, como $D_{\varepsilon, t_0} \subset \Omega_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2(x, t_0) + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2(x, t_0) \right] dx \\
& - p \iint_{\Omega_\epsilon} v_t^2 dx dt \\
\leq & \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2(x, t_0) + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2(x, t_0) \right] dx - \\
& - p \iint_{D_{\epsilon, t_0}} v_t^2 dx dt \\
\leq & \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \left[v_x^2(x, 0) + (x^2 + \epsilon^2) v_t^2(x, 0) \right] dx
\end{aligned}$$

Observação 2.2:

Pelo Lema 2.3 , como u_ϵ é solução do problema (2.17), vale

$$\begin{aligned}
(2.27) \quad & \frac{1}{2} \int_{-x_1}^{x_1} \left[(u_\epsilon)_x^2 + (x^2 + \epsilon^2) (u_\epsilon)_t^2 \right] dx - p \iint_{\Omega_\epsilon} v_t^2 dx dt \\
& < \frac{1}{2} \int_{-x_0}^{x_0} \left[f_1'^2(x) + (x^2 + \epsilon^2) f_2^2(x) \right] dx
\end{aligned}$$

Consideremos agora o conjunto

$$\Omega = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \frac{x_0^2 - x^2}{2} \}$$

Então $\Omega \subset \Omega_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

O Lema 2.3 fornece o seguinte resultado.

Lema 2.4:

Consideremos o problema (2.17) com dados iniciais flat em $x = 0$ e que têm limitantes superiores que independem de ε . Então, se v é uma solução,

$$(2.28) \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1,$$

onde C_1 é uma constante que independe de ε .

Demonstração:

Pela estimativa (2.19), tomando $0 < \varepsilon \leq 1$, e observando que $|x| \leq x_0$, mostramos que

$$(2.29) \quad \iint_{\Omega} v_t^2 \, dx \, dt \leq k_1$$

$$(2.30) \quad \iint_{\Omega} v_x^2 \, dx \, dt \leq k_2$$

onde k_1, k_2 são constantes que independem de ε .

Realmente, de (2.19), como $p < 0$ e

$$\int_{-x_1}^{x_1} \left[v_x^2 + (x^2 + \varepsilon^2) v_t^2 \right] dx \geq 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\varepsilon} v_t^2 dx dt &\leq \frac{-1}{2p} \left[\int_{-x_0}^{x_0} v^2(x, 0) dx + (x_0^2 + 1) \int_{-x_0}^{x_0} v_t^2(x, 0) dx \right] \\ &\leq \frac{-1}{2p} \left[R_1 + (x_0^2 + 1) R_2 \right] = k_1 \end{aligned}$$

Como, por hipótese, os limitantes superiores de $v(x, 0)$ e $v_t(x, 0)$ independem de ε , o mesmo ocorre com as constantes R_1 e R_2 . Além disso, $\Omega \subset \Omega_\varepsilon$ acarreta (2.29).

A demonstração de (2.30) é semelhante.

Usando agora a Desigualdade de Poincaré, obtemos de (2.29) que

$$(2.31) \quad \iint_{\Omega} v^2 dx dt \leq k_3,$$

onde k_3 também é uma constante que independe de ε .

Desse modo, (2.29), (2.30) e (2.31) garantem a tese do Lema 2.4.

Vamos enunciar agora o resultado chave da demonstração do Teorema 2.1.

Lema 2.5:

Todas as derivadas de u_ϵ com respeito a t $\partial_t^k u_\epsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots$, satisfazem o problema de Cauchy (2.17) com dados iniciais que

- (a) são combinações lineares de f_1, f_2 e suas derivadas;
- (b) são flat em $x = 0$;
- (c) têm um limitante superior que independe de ϵ .

Demonstração:

É simples mostrar que as derivadas $\partial_t^k u_\epsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots$, satisfazem a equação (2.17). Essa mesma equação fornece, para $k \geq 1$, a fórmula

$$(2.32) \quad \partial_t (\partial_t^k u_\epsilon) = \frac{(\partial_t^{k-1} u_\epsilon)_{xx} - p (\partial_t^k u_\epsilon)}{x^2 + \epsilon^2}$$

Assim, uma indução sobre k demonstra a afirmação (a).

Para demonstrar (b) e (c) precisamos dos seguintes resultados:

(R.1) Se $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ são funções flat em $x = 0$ então as funções $c f + g$, $c \in \mathbb{R}$, e $f^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, também são flat em $x = 0$

(R.2) As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) f é flat em $x = 0$;

(ii) para $\forall j = 0, 1, 2, \dots$, a função

$$g_j(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^j} , & x \neq 0 , \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

é de classe C^∞ .

Utilizando a fórmula (2.32) e (R.1), uma indução sobre k demonstra (b).

(c) Para $k = 0, 1$ a afirmação é válida por hipótese. Vamos mostrar para $k \geq 2$. Por (b) temos que

$$(\partial_t^k u_\epsilon)(0,0) = 0 , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso sabemos por (b) que a função

$$f(x) = (\partial_t^{k-2} u_\epsilon)_{xx}(x,0) - p (\partial_t^{k-1} u_\epsilon)(x,0)$$

é flat em $x = 0$

Portanto, se $x \neq 0$, como $\epsilon > 0$, temos por (2.32),

$$|(\partial_t^k u_\epsilon)(x,0)| \leq \left| \frac{f(x)}{x^2} \right|$$

Consideremos então a função

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

O resultado R.2 garante que $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Logo h é limitada no compacto $[-x_0, x_0]$, isto é,

$$|h(x)| \leq D_k, \quad x \in [-x_0, x_0]$$

onde D_k é uma constante positiva que depende eventualmente de x_0 , mas não de ε .

Temos assim a afirmação (c).

Observação 2.3:

Os lemas 2.4 e 2.5 permitem concluir que, para $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$(2.33) \quad \|\partial_t^k u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1^k,$$

onde C_1^k é uma constante que independe de ε .

Estamos agora em condições de demonstrar que a família $\mathcal{F}$ é limitada nos espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$, isto é,

Lema 2.6:

Para $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(2.38) \quad \| u_\epsilon \|_{H^m(\Omega)} \leq C_m ,$$

onde C_m é uma constante que independe de ϵ .

Demonstração:

Vamos mostrar na verdade que o Lema 2.6 vale para $\partial_t^k u_\epsilon$, $k = 0, 1, 2, \dots$, usando indução sobre m .

Já mostramos que vale a afirmação para $m = 1$.

(Observação 2.3).

Para $m \geq 2$, como $\partial_t^k u_\epsilon$ satisfaz a equação (2.17), vale a fórmula

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \partial_x^m \partial_t^k u_\epsilon &= (m-2)(m-3) \partial_x^{m-4} \partial_t^{k+2} u_\epsilon \\ &+ 2(m-2)x \partial_x^{m-3} \partial_t^{k+2} u_\epsilon + (x^2 + \epsilon^2) \partial_x^{m-2} \partial_t^k u_\epsilon \\ &- p \partial_x^{m-2} \partial_t^{k+1} u_\epsilon \end{aligned}$$

Suponhamos então a asserção é verdadeira até a ordem $m-1$, isto é,

$$\| \partial_t^k u_\epsilon \|_{H^j(\Omega)} \leq C_j^k, \quad j = 0, 1, \dots, m-1$$

onde C_j^k é uma constante que independe de ϵ .

Por (2.39) e pela hipótese de indução concluímos que

$$\iint_{\Omega} (\partial_x^m \partial_t^k u_\epsilon)^2 dx dt \leq D_m^k,$$

onde D_m^k é uma constante que independe de ϵ .

Assim temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_t^k u_\epsilon\|_{H^m(\Omega)} &= \|\partial_t^k u_\epsilon\|_{H^{m-1}(\Omega)} + \\ &\iint_{\Omega} \left[(\partial_x^{m-1} \partial_t^{k+1} u_\epsilon)^2 + (\partial_x^{m-2} \partial_t^{k+2} u_\epsilon)^2 + \dots + (\partial_t^{k+m} u_\epsilon)^2 \right] dx dt \\ &\leq C_{m+1}^k + D_m^k + C_{m+1}^{k+1} = C_m^k \end{aligned}$$

onde C_m^k independe de ϵ .

Em particular para $k = 0$ temos (2.34)

Vamos mostrar agora que existem subsequências da família $\{u_{m,k}\}_{k=1,2,\dots}$, $m = 1, 2, \dots$, tais que

(i) $(u_{m+1,k})_{k=1,2,\dots}$ é subsequência de $(u_{m,k})_{k=1,2,\dots}$.

(ii) $u_{m,k} \longrightarrow v_m$ em $H^m(\Omega)$ quando $k \longrightarrow \infty$

Construiremos tais subsequências com o auxílio do Teorema de Rellich.

1º Passo:

Como $\mathcal{F}$ é limitada em $H^2(\Omega)$, temos que $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $H^1(\Omega)$. Portanto existe uma subsequência $(u_{1,k})_{k=1,2,\dots}$ de $\mathcal{F}$ tal que

$$u_{1,k} \longrightarrow v_1 \text{ em } H^1(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

2º Passo:

Analogamente, como $(u_{1,k})_{k=1,2,\dots}$ é limitada em $H^3(\Omega)$, podemos extrair de $(u_{1,k})$ uma subsequência $(u_{2,k})_{k=1,2,\dots}$ tal que

$$u_{2,k} \longrightarrow v_2 \text{ em } H^2(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Além disso, $v_2 = v_1$.

Sucessivamente, para cada m podemos extrair da sequência $(u_{m,k})_{k=1,2,\dots}$ uma subsequência $(u_{m+1,k})_{k=1,2,\dots}$ convergente em $H^{m+1}(\Omega)$ para $v_{m+1} = v_m$.

Definimos agora a subsequência de $\mathcal{F}$,

$$(w_k) = (u_{k,k})_{k=1,2,\dots}$$

Afirmção:

Existe $u \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\Omega)$ tal que

$$w_k \longrightarrow u \text{ em } \bigcap_{m=1} H^m(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Demonstração:

Seja

$$u = v_1 = v_2 = \dots = v_m = \dots$$

Para cada m , consideremos a subsequência $(w_k)_{k=m, m+1, m+2, \dots}$ de $(w_k)_{k=1, 2, \dots}$ e portanto, subsequência de $(u_{m,k})_{k=1, 2, \dots}$, que por sua vez converge em $H^m(\Omega)$ para u .

Logo, para cada m ,

$$w_k \longrightarrow u \text{ em } H^m(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Assim

$$w_k \longrightarrow u \text{ em } \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\Omega) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Como $\bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\Omega) \subset C^{\infty}(\Omega)$, conseguimos extrair da família $\mathcal{F}$ uma subsequência $(u_{\epsilon_k}) = (w_k)$, $k = 1, 2, \dots$, que converge para $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Afirmção:

u é solução do problema (2.2)

Demonstração:

Equação:

Como $u \in C^\infty(\Omega)$, temos que

$$u_{xx} = (\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\epsilon_k})_{xx} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{\epsilon_k})_{xx}$$

$$u_{tt} = (\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\epsilon_k})_{tt} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{\epsilon_k})_{tt}$$

$$u_t = (\lim_{k \rightarrow \infty} u_{\epsilon_k})_t = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_{\epsilon_k})_t$$

Além disso, $\epsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, já que $u_{\epsilon_k} \in \mathcal{F}$.

Portanto

$$\begin{aligned} & u_{xx} - x^2 u_{tt} + p u_t = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[(u_{\epsilon_k})_{xx} - (x^2 + \epsilon_k^2) (u_{\epsilon_k})_{tt} + p (u_{\epsilon_k})_t \right] \end{aligned}$$

Além disso, as condições iniciais são claramente satisfeitas.

Para concluir a demonstração do teorema 2.1 falta mostrar o caso $p \geq 0$.

$(p \geq 0)$

Suponhamos que $p \neq 1, 3, 5, \dots$ seja

$$k = \left[\frac{p}{2} \right] + 1$$

onde $[s]$ = maior inteiro contido em $s \in \mathbb{R}$

Então

$$p - 2k < 0$$

De fato, como $s - [s] < 1, \forall s \in \mathbb{R}_+$, temos

$$\frac{p}{2} - \left[\frac{p}{2} \right] < 1 = \left[\frac{p}{2} \right] - \frac{p}{2} > -1 = \left[\frac{p}{2} \right] + 1 > \frac{p}{2} =$$

$$= 2 \left(\left[\frac{p}{2} \right] + 1 \right) > p = p - 2k < 0$$

Observação 2.4:

Se f_1 e f_2 satisfazem a condição (2.7) então, para $j = 0, 1, 2, \dots$, $(Q_{p-2j} \dots Q_{p-2} Q_p f)_i(x)$, $i = 1, 2$, também satisfaz (2.7).

Concluimos então, pelo caso $p < 0$ que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} M_{p-2k} v = 0, & t \geq 0 \\ v(x,0) = (Q_{p-2(k-1)} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_1(x), \\ (\partial_t v)(x,0) = (Q_{p-2(k-1)} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_2(x) \end{cases}$$

possui uma solução $v(x,t)$

Como $p-2j \neq 1$ para $j = 0, 1, 2, \dots, k-1$. o Lema 2.2 pode ser aplicado, e garante que

$$T_{p-2(k-1)} v(x,t)$$

é uma solução do problema

$$\begin{cases} M_{p-2(k-1)} v = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = (Q_{p-2(k-2)} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_1(x) \\ (\partial_t v)(x,0) = (Q_{p-2(k-2)} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_2(x) \end{cases}$$

Genericamente, o Lema 2.2 fornece que

$$T_{p-2(j+1)} T_{p-2j} \cdots T_{p-2(k-1)} v(x,t), \quad k = 0, 1, \dots, k-1$$

é solução do problema

$$\begin{cases} M_{p-2(j+1)} u = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = (Q_{p-2j} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_1(x) \\ (\partial_t u)(x,0) = (Q_{p-2j} \cdots Q_{p-2} Q_p f)_2(x) \end{cases}$$

Em particular, para $j = 0$,

$$T_{p-2} T_{p-4} \cdots T_{p-2(k-1)} u(x, t)$$

é uma solução do problema

$$\begin{cases} M_{p-2} v = 0, t \geq 0 \\ v(x, 0) = (Q_p f)_1(x) \\ (\partial_t v)(x, 0) = (Q_p f)_2(x) \end{cases}$$

Portanto,

$$u(x, t) = T_p T_{p-2} T_{p-4} \cdots T_{p-2(k-1)} v(x, t)$$

é uma solução do problema (2.2).

Pela arbitrariedade de x_0 , fica mostrada então a existência de solução C^∞ em $\mathbb{R}_+^2$, pois para cada $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$ podemos escolher x_0 de modo que $(x, t) \in \Omega$.

BIBLIOGRAFIA:

- [B] BARROS NETO, J., An Introduction to the Theory of Distributions, Marcel Dekker, Inc., New York (1973).
- [C] COSTA, D.G., Equações Diferenciais Hiperbólicas, 119 CBM-IMPA, Poços de Caldas (1977).
- [CH] COURANT, R. and HILBERT D., Methods of Mathematical Physics, John Wiley and Sons, New York (1962).
- [Ga] GARABEDIAN, P. R., Partial Differential Equations, John Wiley and Sons, New York (1964).
- [Gi] GILIOLI, A., Equações Diferenciais Parciais Elípticas, 109 CBM-IMPA, Poços de Caldas (1975).

- [M] MEDEIROS, L. A., Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações, Textos de Métodos Matemáticos 16-UFRJ, Rio de Janeiro (1983).
- [S] SILVA, N. A., Unicidade no Problema de Cauchy para Operadores de Primeira Ordem, Dissertação de Mestrado ICMSC-USP (1982).
- [T1] TRÊVES, F., Concatenations of Second Order Evolution Equations Applied to Local Solvability and Hypoellipticity, Comm. Pure Appl. Math 26 (1973), 201-250.
- [T2] TRÊVES, F., Discrete Phenomena in Uniqueness in the Cauchy problem, Proc. Amer. Math. Soc., 46 (1974), 229-232.
- [T3] TRÊVES, F., Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients: existence: approximation and regularity of solutions, Math. and its Applications, vol. 6, Gordon and Breach, New York (1966).
- [LMW] Lu, Z., Mai, M. and Wang, G., Discrete Phenomena in Existence in the Initial Value Problems, Scientia Sinica vol. 23 number 11 (1979), 1229-1237.