ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
SÃO CARLOS

SOBRE REVESTIMENTOS CÍCLICOS E RAMIFICADOS DE ENLAÇAMENTOS

Pedro Luiz Fagundes

Orientador: *Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS
1987

Dedico esta Dissertação aos meus pais, Luiz e Odeth; à minha noiva Simone e aos meus irmãos Paulo e Maira.

- A G R A D E C I M E N T O S -

- A Deus por mais esta realização em minha vida.

- Ao Prof. Oziride Manzoli Neto pela dedicação, incentivo e apoio constantes na orientação deste trabalho, sem os quais, não teria condições de concluí-lo.

- Aos Professores do Departamento de Matemática, do ICMSC, da UFSCar, principalmente aos Professores Janey Antonio Daccach, Pedro Luiz de Queiroz Pergher e Brasil Terra Leme, pela dedicação nos tempos de graduação.

- A todas pessoas que colaboraram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho, particularmente à Profª Marilda Erhardt Domingos.

- Finalmente, à Secretaria de Trabalhos Científicos do ICMSC, pelo excelente trabalho datilográfico.

- Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq e FAPESP em sua fase inicial.

CICLIC AND BRANCHED COVERINGS OF LINKS

Pedro Luiz Fagundes

Adviser: *Oziride Manzoli Neto*

A B S T R A C T

The purpose of this works is to present some relationship between the ciclic and the branched coverings of links.

We focus attention on k-splitable and q-simple links, proving that the homology of those coverings have special properties.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAP. I - PRELIMINARES 1

I.1 - Material Básico de Topologia Algébrica 1
I.2 - Material Básico da Teoria de Nó e Enlaçamentos .. 11
I.3 - Requisitos Algébricos 13

CAP. II - REVESTIMENTOS CÍCLICO E RAMIFICADO 15

II.1 - Revestimento Cíclico de um Nó 15
II.2 - Revestimento Cíclico de um Enlaçamento 25
II.3 - Relacionamento entre $\hat{X}$ e $\hat{X}^k$ 26
II.4 - Relacionamento entre $\tilde{X}^k$ e $\bar{\tilde{X}}^k$ 26

CAP. III - ENLAÇAMENTOS k-ESPLITÁVEIS E q-SIMPLES 31

III.1 - Enlaçamento k-Esplitável 31
III.2 - Enlaçamento q-Simples 42

CAP. IV - UMA GENERALIZAÇÃO DO RESULTADO DE CROWELL 51

BIBLIOGRAFIA 62

INTRODUÇÃO

Em teoria de nós, os espaços de revestimentos são muitos úteis para o cálculo de alguns invariantes do tipo de nó. As homologias desses espaços tornam-se módulos sobre certos anéis e, o relacionamento geométrico entre eles refletem nos módulos correspondentes de forma natural. Isto nos permite, através do conhecimento prévio da álgebra destes módulos, a tirar conclusões úteis no estudo dos nós.

Isto, também pode ser feito, com um pouco mais de dificuldade , para enlaçamentos (links).

Apresentaremos no Capítulo I , definições e resultados básicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

No Capítulo II, apresentaremos as definições dos espaços de revestimentos cíclicos infinito, finito e ramificado com os quais iremos trabalhar, bem como alguns dos relacionamentos entre eles, em especial um resultado análogo ao provado por Crowell [3] que nos fornece uma relação entre os espaços de revestimento cíclico finito e ramificado para o caso de nós.

No Capítulo III, daremos as definições de duas classes particulares de enlaçamentos, (K-esplitável e q-simples), bem como alguns resultados sobre a homologia dos espaços de revestimentos dos seus complementares.

No Capítulo IV , faremos uma generalização do resultado de Crowell para os enlaçamentos definidos no Capítulo III , bem como o relacionamento entre as homologias dos espaços de revestimentos cíclico finito e ramificado em dimensões maiores que 1.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

I.1 - MATERIAL BÁSICO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

A - GRUPOS DE HOMOTOPIA

Seja (X,x_0) um par, onde X é um espaço topológico e $x_0 \in X$.

Denotaremos por $\pi_1(X,x_0)$ o grupo fundamental do espaço X com ponto base x_0. Os elementos deste grupo são as classes de homotopia de aplicações

$$f : (S^1,p_0) \to (X,x_0) ,$$

isto é, aplicações contínuas $f : S^1 \to X$ tais que $f(p_0) = x_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, denotaremos por $\pi_n(X,x_0)$ o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto base x_0, o qual é constituído pelas classes de homotopia de aplicações

$$f : (S^n,p_0) \to (X,x_0) .$$

Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa de X, então temos que

$$\pi_1(X,x_0) \approx \pi_1(X,x_1) ,$$

assim se X é um espaço conexo por caminhos, para quaisquer pontos básicos, x_0 e x_1, em X, temos

$$\pi_1(X,x_0) \approx \pi_1(X,x_1) ,$$

desse modo, para facilitar a notação, sempre que X for um espaço conexo por caminhos, denotaremos seu grupo fundamental por $\pi_1(X)$.

Diremos que um espaço X conexo por caminhos é simplesmente conexo se $\pi_1(X) \approx 0$.

TEOREMA I.1.1

$\pi_1(X \times Y , (x_0,y_0)) \approx \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$ e, além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\pi_n(X,x_0)$ é sempre abeliano.

Consideremos, agora, dois pares de espaços $(X,x_0),(Y,y_0)$ e uma aplicação $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$, isto é, uma aplicação contínua $f : X \to Y$ tal que $f(x_0) = y_0$, definimos $f_{\#}(S^n , p_0) \to (Y,y_0)$ como a composta

$$\begin{tikzcd} (S^n,p_0) \arrow[r] \arrow[dr, dashed, "f_{\#}"'] & (X,x_0) \arrow[d, "f"] \\ & (Y,y_0) \end{tikzcd}$$

desse modo, toda aplicação contínua $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$, para todo $n \geq 1$.

Diremos que dois espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia $(X \sim Y)$ se existirem aplicações contínuas

$$f : X \to Y , \quad g : Y \to X$$

tais que

$$f \circ g \simeq I_Y \quad e \quad g \circ f \simeq I_X$$

onde "$I_M : M \to M$" é a aplicação identidade do espaço "M", f e g são chamadas equivalências de homotopia; decorre desta definição que se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então

$$f_* : \pi_n(X,x_0) \to \pi_n(Y,y_0)$$

é um isomorfismo.

Dada uma aplicação contínua $f : X \to Y$, o "Mapping Cylinder" de f é o espaço $I \times X \cup_h Y$, onde

$$h : 1 \times X \to Y$$
$$(1,x) \to f(x) \quad .$$

Este espaço será denotado por I_f, e decorre desta definição que $I_f \sim X$.

Por um par de espaços (X,A), entendemos um espaço topológico X junto com um subconjunto $A \subseteq X$, e por uma tripla de espaços (X,A,B), entendemos um espaço topológico X junto com dois subconjuntos $B \subseteq A \subseteq X$.

TEOREMA I.1.2

A todo par de espaços (X,A), corresponde uma sequência longa exata em homotopia

$$\ldots \longrightarrow \pi_{n+1}(X,A) \xrightarrow{\delta} \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(X,A) \xrightarrow{\delta} \ldots$$

chamada, sequência de homotopia do par (X,A).

TEOREMA I.1.3

Dado uma tripla de espaços (X,A,B), também associa-se uma sequência longa exata em homotopia

$$\ldots \longrightarrow \pi_n(A,B) \longrightarrow \pi_n(Y,B) \longrightarrow \pi_n(X,A) \xrightarrow{\delta'} \pi_{n-1}(A,B) \longrightarrow \ldots$$

chamada sequência de homotopia da tripla (X,A,B).

B - HOMOLOGIA SINGULAR

Iremos trabalhar somente com os grupos de homologia integrais, ou seja, com coeficientes no anel dos números inteiros.

TEOREMA I.1.4 (Hurewciz Theorem - Whitehead [18], pág. 178)

Seja X um espaço simplesmente conexo. As seguintes afirmações são equivalentes:

$$\cdot \quad \pi_j(X) \approx 0 \ , \quad 1 \leq j \leq n-1$$

$$\cdot\cdot \quad H_j(X) \approx 0 \ , \quad 1 \leq j \leq n-1 \ .$$

No caso de uma das duas condições acima estar verificada, temos:

$$\ldots \quad H_n(X) \approx \pi_n(X) \ .$$

TEOREMA I.1.5

$$H_1(X) \approx \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X),\pi_1(X)]} \ ,$$

onde $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ é o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$.

TEOREMA I.1.6 (Fórmula de Kunneth - Vick [17], pág. 108)

$$H_q(X \times Y) \approx [\bigoplus_{p+n=q} H_p(X) \otimes H_n(Y)] \oplus [\bigoplus_{r+s=q-1} \mathrm{Tor}(H_r(X), H_s(Y)] \ .$$

COROLÁRIO I.1.7

Se todos os módulos de homologia de Y (ou de X) forem livres, para dimensões menores que q, então:

$$H_q(X \times Y) \approx \bigoplus_{p+n=q} H_p(X) \otimes H_n(Y) .$$

Temos que toda aplicação contínua $f : X \to Y$ induz um homomorfismo $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ para todo $q \geq 0$.

Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações contínuas tais que $g \circ f : X \to Z$ esteja definida, então $g \circ f$ induz um homomorfismo em homologia

$$(g \circ f)_* : H_q(X) \to H_q(Z)$$

e, além disso, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Sejam $f,g : X \to Y$ homotopias, então $f_* = g_*$ e, desse modo, se $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia, então $f_* : H_q(X) \to H_q(Y)$ é um isomorfismo, para todo $q \geq 0$.

TEOREMA I.1.8 (Sequência de Mayer Vietoris - Vick [17], pág. 25)

Sejam A e B subconjuntos do espaço topológico X tais que $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$, então podemos definir um homomorfismo natural

$$\partial : H_q(X) \to H_{q-1}(A \cap B) , \quad \forall\ q \geq 1 ,$$

e obtemos uma sequência exata

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_q(A \cap B) \xrightarrow{\phi} H_q(A) \oplus H_q(B) \xrightarrow{\psi} H_q(X) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A \cap B) \xrightarrow{\phi} \ldots$$

onde

$$\phi : H_q(A \cap B) \to H_q(A) \oplus H_q(B)$$

é definida por $\phi(x) = (i_*(x), -j_*(x))$, e

$$\psi : H_q(A) \oplus H_q(B) \to H_q(X)$$

é definida por $\psi(y,z) = k_*(y) + \ell_*(z)$ e as aplicações

$i : A \cap B \to A$, $j : A \cap B \to B$, $k : A \to X$ e $\ell : B \to X$

são inclusões naturais.

C - HOMEOMORFISMO LOCAL E LEVANTAMENTOS

Por um homeomorfismo local, entenderemos uma aplicação aberta $f : X \to Y$, entre espaços topológicos, tal que, para cada $x \in X$ exista um aberto $U \subset X$ com $x \in U$ e $f|_U : U \to f(U) \subset Y$ um homeomorfismo. Podemos mostrar que para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y) \subset X$ é um subconjunto discreto de X e além disso se pedirmos X compacto e Y de Hausdorff, então $f^{-1}(y)$ será finito.

Dadas duas funções contínuas $f : X \to Y$ e $g : Z \to Y$, por um levantamento de g (relativamente a f), entenderemos uma aplicação contínua $\tilde{g} : Z \to X$ que comute o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

ou seja, $f \circ \tilde{g} = g$. Podemos provar que se f é um homeomorfismo local, X é um espaço de Hausdorff e Z é conexo, então dois levantamentos $\tilde{g}$, $\hat{g}$ de g , ou são iguais, ou não coincidem em nenhum ponto.

D - ESPAÇOS DE REVESTIMENTOS

Neste parágrafo, vamos assumir que todos os espaços topológicos são conexos, localmente conexos por caminhos e de Hausdorff, salvo menção em contrário.

Uma aplicação $p : \tilde{X} \to X$ é um revestimento se:

i) Para cada $x \in X$, existe um aberto $V \subset X$, com $x \in V$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha$ é uma reunião de abertos U_α, dois a dois disjuntos.

ii) $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \to V$ é um homeomorfismo sobre a imagem para cada α.

Os abertos U_α's são chamados vizinhanças elementares, o espaço $\tilde{X}$ é o espaço de revestimento de X, X é o espaço base e para cada $x \in X$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é a fibra sobre x.

Vê-se logo da definição que um revestimento é um homeomorfismo local de $\tilde{X}$ sobre X, logo para cada $x \in X$, a fibra $p^{-1}(x)$ é um espaço discreto e, além disso, se $\tilde{X}$ for compacto, então $p^{-1}(x)$ é finito. Podemos mostrar que o número cardinal de qualquer fibra é sempre igual e chamaremos a este número, o número de folhas do revestimento. É fácil ver que se $\tilde{X}$ é compacto ele tem um número de folhas finito e, neste caso, $X = p(\tilde{X})$ é compacto.

Além disso, podemos mostrar que se $\tilde{X}$ tem um número finito de folhas e X é compacto, então $\tilde{X}$ é compacto.

E - REVESTIMENTO E SUBGRUPO DE π_1

Diremos que um revestimento $p : \tilde{X} \to X$ é universal se $\tilde{X}$ for simplesmente conexo.

Podemos mostrar que, se X tem uma cobertura $\{U_\alpha\}$, por

subconjuntos abertos, conexos por caminhos tais que, cada inclusão

$$\pi_1(U_\alpha) \to \pi_1(X)$$

é nula, então X tem um espaço de revestimento universal. Observe que no caso em que X é uma variedade conexa, então X satisfaz, naturalmente, a propriedade anterior.

TEOREMA I.1.9

Se X tem um revestimento Universal e $G \subset \pi_1(X,x_0)$ é um subgrupo, então existe um revestimento $p : \tilde{X} \to X$ e um ponto base $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que:

$$p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)) \approx G .$$

Observe que, neste caso, p_* é injetivo. Dizemos que tal revestimento é determinado pelo subgrupo G .

Seja, agora, $p : \tilde{X} \to X$ um revestimento e A um subespaço de X localmente conexo por caminhos.

Seja $\tilde{A}$ uma componente conexa por caminhos de $p^{-1}(A)$. Desse modo, $(\tilde{A},p|_{\tilde{A}})$ é um revestimento de A . Sejam $\tilde{a} \in \tilde{A}$, $a = p(\tilde{a})$, $p' = p|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to A$ e $i : A \to X$ a aplicação inclusão. Com estas hipóteses temos

TEOREMA I.1.10 (Massey [11], pág. 178)

$p^{-1}(A)$ é conexo (isto é, $p^{-1}(A) = \tilde{A}$), se e somente se, o subgrupo $i_*(\pi_1(A,a))$ encontra todas as classes laterais do subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{a}))$.

F - AUTOMORFISMOS DE REVESTIMENTOS E REVESTIMENTO REGULAR

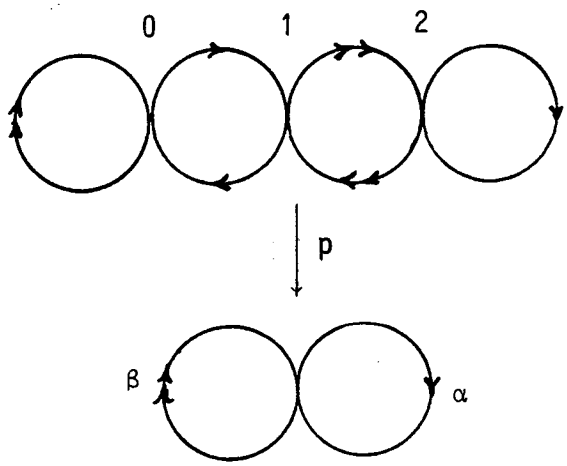
Seja $p : \tilde{X} \to X$ um revestimento, um homeomorfismo $\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$ será chamado um automorfismo de revestimento (ou translação) se comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Podemos provar que τ é determinado por sua ação a qualquer ponto de $\tilde{X}$, em particular, por sua ação sobre uma fibra. A menos que $\tau = I_{\tilde{X}}$, ele não tem pontos fixos.

Exemplo: (Rolfsen [13], pág. 362)

O seguinte espaço de revestimento de $S^1 \vee S^1$ não tem automorfismo de revestimento diferente de $I_{\tilde{X}}$.



Um espaço de revestimento $\tilde{X}$ é dito regular, se para algum $x \in X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, o subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}))$ é normal em $\pi_1(X,x)$, esta definição independe do ponto base.

TEOREMA I.1.11

Um espaço de revestimento X é regular, se e somente se, para quaisquer dois pontos $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ na fibra $p^{-1}(x)$, existir um automorfismo de revestimento τ, tal que

$$\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2 .$$

Consideremos, agora, a seguinte situação geométrica. Seja X um cw-complexo e $\tilde{X}$ um revestimento de X determinado pelo núcleo de algum homomorfismo

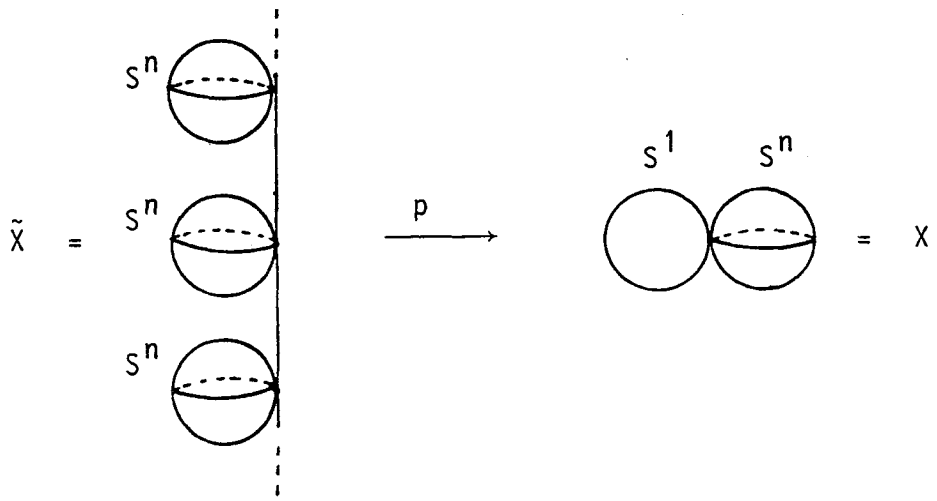
$$\phi : \pi_1(X) \twoheadrightarrow Z ,$$

do grupo fundamental de X sobre Z, o grupo cíclico infinito.

Tal revestimento será chamado, revestimento cíclico infinito de X associado ao epimorfismo ϕ. Assim Z atua livremente como o grupo de transformações de revestimento do complexo infinito $\tilde{X}$, e o complexo quociente $\tilde{X}/Z$ pode ser identificado com X.

Exemplo: (Milnor [12], pág. 117)

Se $X = S^1 \vee S^n$, então $\tilde{X}$ pode ser visualizado como uma reta com infinitas n-esferas acopladas.



A transformação de revestimento $t \in Z$ leva cada esfera sobre a próxima.

TEOREMA I.1.12

Seja $\tilde{X}$ o revestimento de X associado ao epimomorfismo ϕ. Seja $A \subset X$ um subespaço de X, então $p^{-1}(A)$ é conexo se, e somente se, a aplicação $\phi_0 i_* : \pi_1(A) \longrightarrow Z$ for um epimorfismo.

A prova segue de I.1.10.

I.2 - MATERIAL BÁSICO DA TEORIA DE NÓ E ENLAÇAMENTOS

Um link (ou enlaçamento) L^n, é a imagem de uma aplicação C^∞

$$L : \bigsqcup_{i=1}^{\mu} S_i^n \longrightarrow S^k ,$$

de uma reunião disjunta de μ, n-esferas na k-esfera S^k, que é um homeomorfismo sobre L^n. A imagem de cada S_i^n é chamada uma componente de L^n. No caso em que $\mu = 1$, temos um nó, o qual iremos denotar por K^n. É possível mostrar que se $k = n+1$ ou $k \geq n+3$, então o grupo fundamental do complementar $X = S^k - L^n$ é nulo, desse modo nosso estudo se restringirá ao caso em que $k = n+2$.

Diremos que dois links L_1^n, L_2^n são equivalentes se existir um difeomorfismo $h : S^{n+2} \to S^{n+2}$ tal que $h(L_1^n) = L_2^n$ e, além disso, dada uma indexação dos componentes de L_1^n e L_2^n, h deve preservar a ordem fixada. No caso de nós, basta que

$h(K_1^n) = K_2^n$. Chamaremos a classe de equivalência de um link ou nó de tipo de link ou tipo de nó.

O grupo do link L^n é o grupo fundamental do complementar $X = S^{n+2} - L^n$. Podemos mostrar que cada link $L^n \subset S^{n+2}$ possui uma vizinhança tubular $V(L^n)$ a qual é imagem de um mergulho $t : L^n \times D^2 \to S^{n+2}$ tal que $t(x,0) = x$, $\forall\, x \in L^n$.

Assim, como existe uma retração

$$r : S^{n+2} - L^n \longrightarrow S^{n+2} - V(L^n)$$

temos $$\pi_1(X) \approx \pi_1(S^{n+2} - V(L^n))$$ e

neste caso, $S^{n+2} - V(L^n)$ é uma variedade diferenciável. Como S^{n+2} é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+2}$ à menos de um ponto, vemos que

$$\pi_1(S^{n+2} - L^n) \approx \pi_1(\mathbb{R}^{n+2} - L^n) ,$$

se considerarmos $L^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Diremos que um subconjunto $X \subset Y$ possui colarinho duplo (isto é, X tem um bicolar) , se existir um mergulho $b : X \times [-1,1] \to Y$ tal que $b(x,0) = x$, $\forall\, x \in X$. Uma variedade compacta conexa $M^{n+1} \subset S^{n+2}$, possuindo colarinho duplo tal que $\partial M^{n+1} = L^n$, será chamada uma superfície de Seifert do link L^n , a existência de tal variedade está provada em [Levine [8], pág. 11] e, da definição, concluímos que existe um mergulho $J : M^{n+1} \times [-1,1] \longrightarrow S^{n+2}$.

Por último, temos:

Se L^n é um link com μ componentes, então

$$H_j(S^{n+2} - L^n) \approx \begin{cases} Z^{\mu} , & \text{se } j = 1 \\ 0 , & \text{se } j > 1 \text{ e } j \neq n+1 \\ Z^{\mu-1} , & \text{se } j = n+1 \end{cases} .$$

Como está demonstrado em [Saab [15], pág. 16] .

I.3 - REQUISITOS ALGÉBRICOS

Estaremos trabalhando sobre o anel $\Lambda = Z[t,t^{-1}]$, isto é, o anel dos polinômios de Laurent na variável t com coeficientes inteiros.

Sejam K^n um nó e $X = S^{n+2} - K^n$ seu complementar, seja $\tilde{X}$ um revestimento de X associado ao kernel da aplicação abelianização $A : \pi_1(X) \to H_1(X) \approx Z$ então $H_q(\tilde{X})$ é um Λ-módulo finitamente gerado como pode ser visto em Levine [6], pág. 2 .

Definição: Matriz Apresentação de um Módulo:

Consideremos um grupo abeliano A , que é finitamente gerado como um Λ-módulo. Uma matriz $M = (m_{ij}(t))_{m \times n}$, com elementos em Λ , é dita apresentar A como um módulo, se existir uma sequência exata de Λ-módulos

$$F_2 \xrightarrow{d} F_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

onde F_1 e F_2 são livres sobre os elementos $(x_1 , \dots x_n)$ e $(r_1 , \dots r_m)$ respectivamente, e

$$d(r_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}(t)x_j .$$

LEMA I.3.1 (Lema da "cobra" - Bourbaki [1], pág. 19)

Suponhamos que, no diagrama comutativo a seguir, as linhas sejam sequências exatas de Λ-módulos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Consideremos, agora, o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(a) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & \ker(b) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & \ker(c) \arrow[d, "k"'] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "v"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "p"'] & B' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "q"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & 0 \\
 & \operatorname{cok}(a) \arrow[r, "u_2"] & \operatorname{cok}(b) \arrow[r, "v_2"] & \operatorname{cok}(c) &
\end{tikzcd}$$

onde, i, j e k são as inclusões naturais, p, q e r projeções naturais, u_1, v_1 (u_2, v_2) induzidas de u, v (u', v') respectivamente, tais que o diagrama acima se torne comutativo, então existe um homomorfismo

$$d : \ker(c) \longrightarrow \operatorname{cok}(a)$$

satisfazendo a propriedade: se $x \in \ker(c)$, $y \in B$ e $t' \in A'$ tais que $v(y) = k(x)$ e $u'(t') = b(y)$ então $d(x) = p(t')$ e, além disso, a sequência

$$\ker(a) \xrightarrow{u_1} \ker(b) \xrightarrow{v_1} \ker(c) \xrightarrow{d} \operatorname{cok}(a) \xrightarrow{u_2} \operatorname{cok}(b) \xrightarrow{v_2} \operatorname{cok}(c)$$

é exata.

C A P Í T U L O II

REVESTIMENTOS CÍCLICO E RAMIFICADO

Neste capítulo daremos as definições dos espaços de revestimentos que iremos utilizar, bem como suas construções geométricas. As equivalências entre as descrições algébricas e geométricas podem ser vistas em Marar [10] Cap. II . Além disso, mostraremos alguns relacionamentos entre eles.

Por simplicidade denotaremos um link $L^n \subset S^{n+2}$ por L , lembrando que a co-dimensão é sempre dois e quando quisermos ressaltar suas componentes o denotaremos como uma união disjunta de μ nós de dimensão n , ou seja,

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\mu \quad , \quad K_i^n \subset S^{n+2} \quad , \quad i = 1,2, \ldots \mu .$$

II.1 - REVESTIMENTO CÍCLICO DE UM NÓ

A - REVESTIMENTO CÍCLICO INFINITO

Seja $K \subset S^{n+2}$ um nó e $X = S^{n+2} - K$. Como vimos $H_1(X) \approx Z$. Consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{A} \underset{\underset{Z}{\approx}}{H_1(X)} \longrightarrow 0$$

onde A é a abelianização e $N = \ker A$ é o subgrupo comutador

$$[\pi_1(X), \pi_1(X)] .$$

O espaço de revestimento $\tilde{X}$, associado ao subgrupo N, é chamado, espaço de revestimento cíclico infinito do nó K. Observe que $\tilde{X}$ é o espaço de revestimento abeliano universal de X e neste caso o seu grupo de automorfismos de revestimento é isomorfo a $H_1(X) \approx Z$.

A.1 - CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE $\tilde{X}$

Seja $K \subset S^{n+2}$ um nó e $X = S^{n+2} - K$.

Seja M^{n+1} uma superfície de Seifert para K em S^{n+2}, como no Capítulo I. Seja $V(K)$ uma vizinhança tubular de K em S^{n+2}.

Consideremos a parte de M até tocar $V(K)$, conforme ilustrada na figura 1. Cortemos X ao longo de M, obtendo assim um espaço Y que possui no bordo duas cópias de M, as quais denotaremos por M^+ e M^- (Fig. 2).

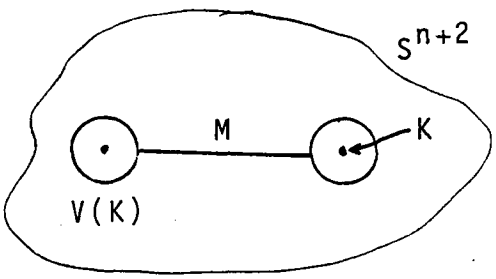


Fig. 1

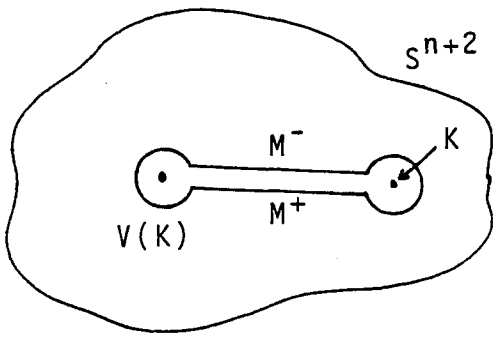


Fig. 2

Consideremos, agora, infinitas cópias da tripla (Y_i, M_i^-, M_i^+) indexadas nos inteiros (Fig. 3).

Desse modo, $\tilde{X}$ é o espaço obtido pela identificação de $M_i^- \subset Y_i$ com $M_{i+1}^+ \subset Y_{i+1}$, $i \in Z$. Veja ilustração abaixo (Fig. 4).

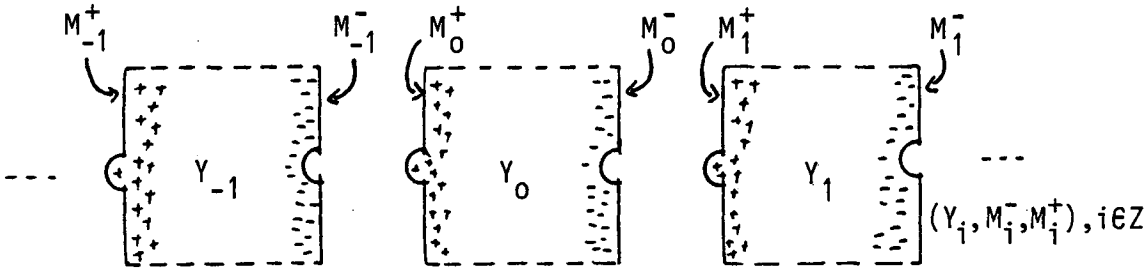


Fig. 3

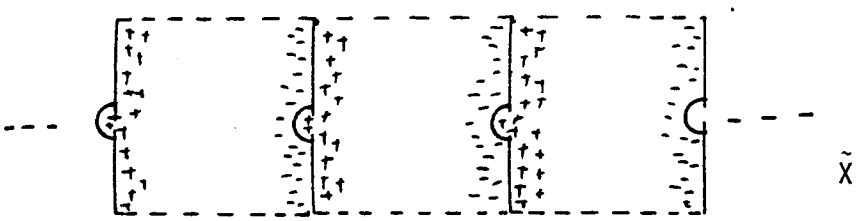


Fig. 4

Denotaremos cada folha de $\tilde{X}$ por $\tilde{X}_i$ (a i-ésima folha de $\tilde{X}$).

Exemplo:

Seja K o nó trivial em S^3. Tomaremos como superfície de Seifert o disco M (Fig. 5).

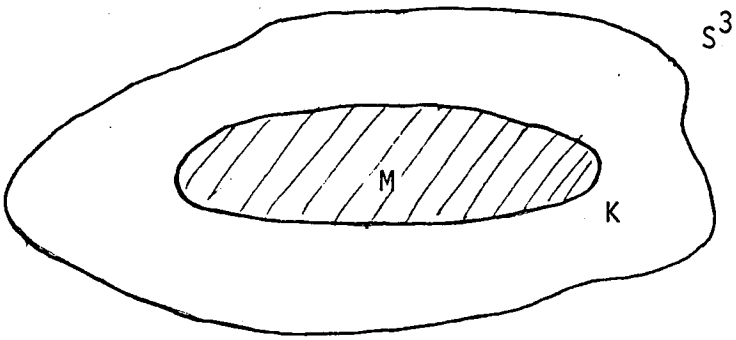


Fig. 5

$V(K)$ é um toro sólido trivialmente mergulhado, donde $X = S^3 - V(K)$ é também um toro sólido (Fig. 6).

Cortemos X ao longo de M, obtendo assim um cilindro finito (Fig. 7).

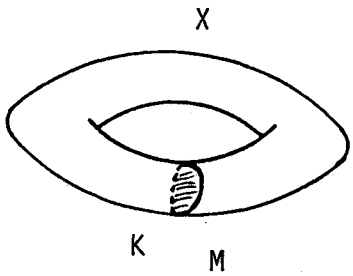


Fig. 6

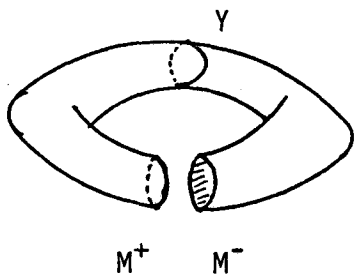
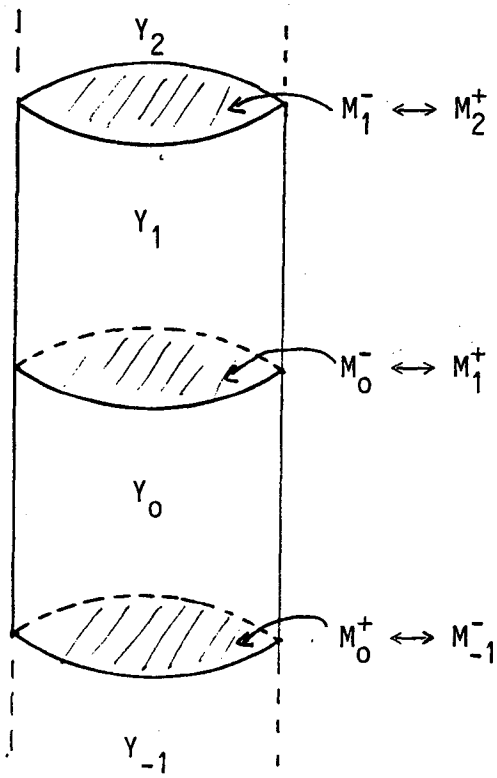


Fig. 7

Assim o espaço $\tilde{X}$ será um cilindro infinito (Fig. 8).

Fig. 8



B - REVESTIMENTO CÍCLICO FINITO

Seja $K \subset S^{n+2}$ um nó e $X = S^{n+2} - K$.

Consideremos a seguinte sequência:

$$\pi_1(X) \xrightarrow{A} \underset{\underset{Z}{\wr\wr}}{H_1(X)} \xrightarrow{p} Z_k$$

onde A é a abelianização e $p: H_1(X) \to Z_k$ é a projeção natural de Z em Z_k.

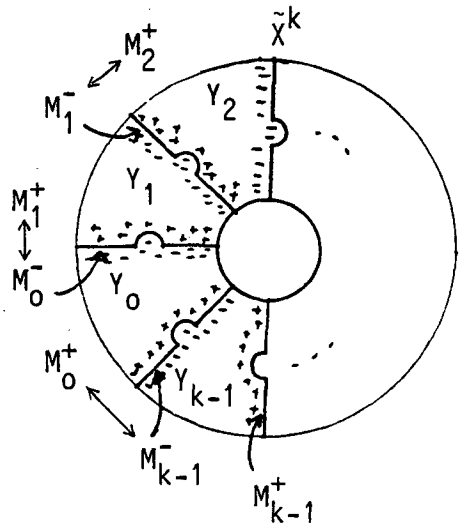
O espaço de revestimento associado ao Kernel da aplicação composta

$$p \circ A: \pi_1(X) \to Z_k$$

é chamado, espaço de revestimento cíclico de k folhas de K e será denotado por $\tilde{X}^k$.

B.1 - CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DE $\tilde{X}^k$

Basicamente a construção é a mesma que a de $\tilde{X}$, a única alteração é que tomamos apenas um número finito de cópias da tripla (Y_i, M_i^-, M_i^+), $i = 0,1,2,\ldots,k-1$. Obtemos, então, $\tilde{X}^k$ identificando $M_i^- \subset Y_i$ com $M_{i+1}^+ \subset Y_{i+1}$ para todo $0 \leq i < k-1$ e identificamos M_{k-1}^- com M_0^+, conforme ilustração abaixo.



Exemplo:

No caso anterior, onde K é o nó trivial em S^3, temos que $\tilde{X}^k$ é um toro sólido, $\forall\, k \geq 2$ (Fig. 9).

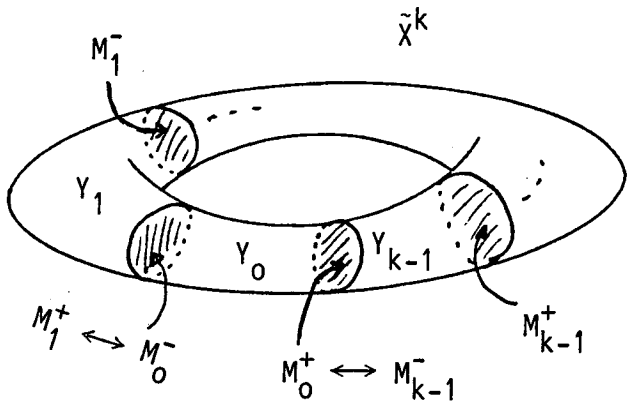


Fig. 9

C - REVESTIMENTO CÍCLICO E RAMIFICADO

C.1 - REVESTIMENTO RAMIFICADO

Sejam M^{n+2} e N^{n+2} variedades compactas com subvariedades próprias $A^n \subset M$ e $B^n \subset N$.

Uma função contínua $f : M \to N$ é um revestimento ramificado, com conjunto de ramificação A em cima e B embaixo se:

i) Componentes das pré-imagens de abertos de N formarem uma base para a topologia de M;

ii) $f(A) = B$, $f(M-A) = N - B$ e, além disso, $f|_{M-A} : M-A \to N-B$ é um revestimento, chamado revestimento associado.

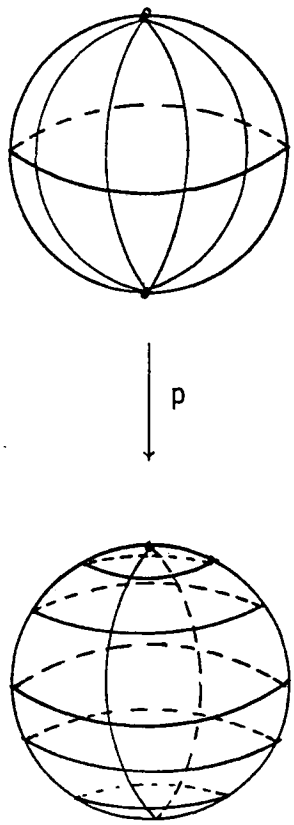
OBS.: Como M é compacto, este revestimento ramificado tem sempre finitas folhas. Cada ponto de ramificação $a \in A$ tem um índice de ramificação k, no sentido em que f é k a 1 pró

ximo de a. Este número é constante sobre as componentes de A.

Exemplo: (Rolfsen [13], pág. 293)

Consideremos a aplicação complexa $z \to z^k$, com a qual o disco unitário complexo recobre a si mesmo k vezes, ramificado com índice k na origem.

Uma aplicação análoga é $z \to \frac{z^k}{|z^{k-1}|}$ a qual, portanto, preserva norma. Esta mesma aplicação se estende a um revestimento ramificado de S^2, $C+\infty \to C+\infty$, ramificado sobre dois pontos, cada um com índice k (Fig. 10).



(Cada "gomo" é "esticado" até dar uma volta toda em S^2)

Fig. 10

Vamos, agora, desenvolver uma construção de um revestimento ramificado, cujo conjunto de ramificação embaixo seja um dado nó K^n e em cima um novo nó ou link.

C.2 - CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA DO REVESTIMENTO CÍCLICO RAMIFICADO DE UM NÓ

Como vimos, dado $X = S^{n+2} - K$, podemos construir o revestimento cíclico de k folhas $\tilde{X}^k$ de X, iremos, a seguir, mostrar que a pré-imagem do bordo ∂X, que é um "toro" $S^n \times S^1$, também é um "toro" $S^n \times S^1$, tal que as longitudes de ∂X são revestidas por k longitudes de $\partial\tilde{X}^k$ enquanto que um meridiano é revestido k vezes por um meridiano de $\partial\tilde{X}^k$.

Mostrado isso, podemos colar um "toro sólido" $S^n \times D^2$ em $\tilde{X}^k$, bordo à bordo, de tal maneira que um meridiano $* \times S^1$ cole com a pré-imagem de um meridiano em ∂X^k.

O espaço assim construido é o revestimento cíclico ramificado de S^{n+2} com k folhas, onde o conjunto de ramificação embaixo é o nó K dado e em cima um novo nó ou link, em alguma variedade de dimensão $(n+2)$.

Denotaremos este revestimento por $\bar{\tilde{X}}^k$.

Sejam $K \subset S^{n+2}$ um nó e $\tilde{X}^k$ o revestimento cíclico de k folhas de $X = S^{n+2} - K$, X é uma variedade compacta com $\partial X \approx S^n \times S^1$. Vamos mostrar que a pré-imagem $p^{-1}(\partial X)$ é também um "toro" $S^n \times S^1$ em $\tilde{X}^k$, onde $p : \tilde{X} \to X$ é a projeção de revestimento.

Seja $p' = p|_{\partial\tilde{X}^k} : \partial\tilde{X}^k \to \partial X$, sabemos que $\partial\tilde{X}^k$ é um revestimento de ∂X, como $\tilde{X}^k$ é finito então $\partial\tilde{X}^k$ é finito e assim, $\partial\tilde{X}^k$ ou é um "toro" $S^n \times S^1$ ou é desconexo.

Consideremos o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & Z \arrow[d, phantom, "\approx"] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r, "A"] & H_1(X) \arrow[r] & 0 \\
 & & \pi_1(\partial X) \arrow[u, "i_*"] \arrow[ur, dashed, "\phi"] \approx Z & &
\end{tikzcd}$$

onde $N = \ker A$ é tal que $p_*(\pi_1(\tilde{X})) \approx N$ e i_* é a induzida da inclusão $i : \partial X \to X$.

Observemos que ϕ é um epimorfismo, uma vez que pela abelianização, $A : \pi_1(X) \to H_1(X) \approx Z$, o gerador α de $\pi_1(\partial X)$ atinge o gerador de $H_1(X)$. Desse modo, pelo teorema I.1.12 , $p^{-1}(\partial X)$ é conexo, o que conclui nossa afirmação.

Vamos, agora, descrever a colagem do "toro" $S^n \times D^2$, bordo à bordo com $\tilde{X}^k$.

Como vimos, $\partial\tilde{X}^k \approx S^n \times S^1 = p^{-1}(\partial X)$.

Geometricamente, o revestimento $p' : \partial\tilde{X}^k \to \partial X$ é dado da maneira esquematizada abaixo:

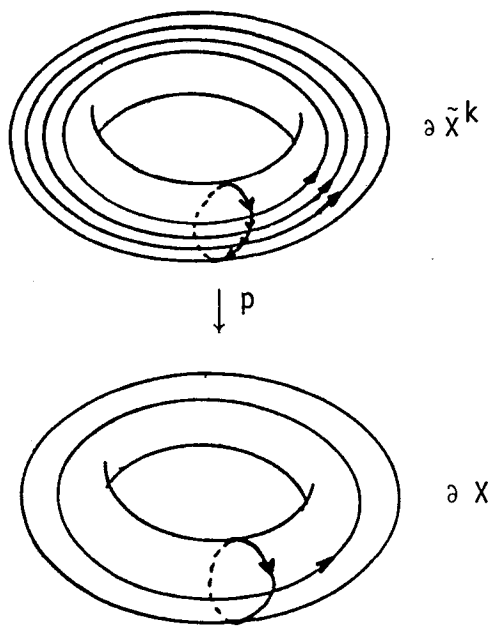


Fig. 11

Cada curva horizontal, na Fig. 11, é recoberta por k curvas horizontais distintas e cada curva vertical é recoberta k vezes por uma curva vertical, ou seja, se α é um meridiano, então $p^{-1}(\alpha)$ é um meridiano que o reveste k vezes, se β é um paralelo, então $p^{-1}(\beta)$ são k paralelos disjuntos. Podemos ver isso geometricamente, pois uma curva horizontal (paralelo) em ∂X é onde a superfície de Seifert M de K toca o bordo ∂X, assim temos em $\tilde{X}^k$, k cópias de M tocando o bordo $\partial\tilde{X}^k$ em, portanto, k curvas horizontais distintas. Agora, uma curva vertical (meridiano) corta M em um ponto, logo seu levantamento deve cortar cada cópia de M em um ponto, por outro lado, ela representa um laço α em $\pi_1(X,a)$ que, quando incluído em $\pi_1(\tilde{X}^k,\tilde{a})$, para algum $\tilde{a} \in p^{-1}(a)$, se inclui de maneira natural e permanece em $H_1(\tilde{X}^k,\tilde{a})$, logo ela é fechada.

Para obtermos o revestimento cíclico ramificado $\bar{\tilde{X}}^k$ de k folhas, com conjunto de ramificação K embaixo, iremos colar um "toro sólido" $S^n \times D^2$ ao longo de seu bordo $S^n \times S^1$ em $\partial\tilde{X}^k$. Para isso, consideremos o toro aberto como um cilindro e vamos dividir seu bordo em k partes (Fig. 12).

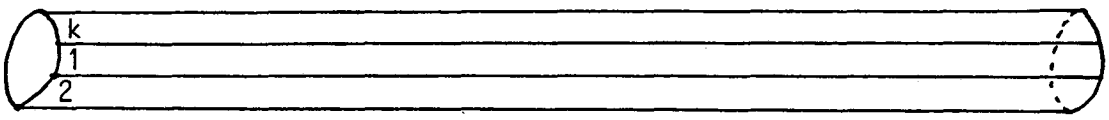


Fig. 12

Cada parte do bordo deve ser identificada em uma das partes de $p^{-1}(\partial X)$, correspondentes a cada secção da construção descrita anteriormente.

É possível mostrar que tal colagem pode ser feita de maneira C^∞, ou seja, o resultado ainda é uma variedade diferen

ciável M^{n+2} que reveste a esfera S^n com conjunto de ramificação embaixo sendo o nó K dado, com um número k de folhas.

II.2 - REVESTIMENTO CÍCLICO DE UM ENLAÇAMENTO

A - REVESTIMENTO CÍCLICO INFINITO

Seja $X = S^{n+2} - L$, onde L é um n-link de multiplicidade μ.

Este revestimento que, também é chamado revestimento do número total de enlaçamentos, é o espaço de revestimento associado ao Kernel M da aplicação composta

$$\Sigma \circ A : \pi_1(X) \longrightarrow Z$$

$$\pi_1(X) \xrightarrow{A} H_1(X) \xrightarrow{\Sigma} Z$$
$$H_1(X) \approx Z^{\mu}$$

onde A é a abelianização e Σ é a somatória das coordenadas.

Este espaço será denotado por $\hat{X}$.

B - REVESTIMENTO CÍCLICO FINITO

Da mesma forma que em $\tilde{X}^k$, definimos o revestimento cíclico de k folhas de X, $\hat{X}^k$, como sendo aquele associado a aplicação composta

$$p_k \circ \Sigma \circ A : \pi_1(X) \longrightarrow Z_k ,$$

onde A e Σ são como acima e $p_k : Z \to Z_k$ é a projeção natural de Z sobre Z_k.

A construção geométrica de $\hat{X}(\hat{X}^k)$ é a mesma que a construção geométrica de $\tilde{X}(\tilde{X}^k)$, construindo os espaços Y_i, $i \in Z$ $(i = 0,1,\ldots,k-1)$, onde cada Y_i é uma cópia de X aberta ao longo de uma superfície de Seifert de L e colados de maneira conveniente.

Note que, $\partial\hat{X}$ é uma união disjunta de μ variedades homeomorfas a $S^n \times \mathbb{R}$, fazendo uma colagem adequada de μ "toros" $S^n \times D^2$, bordo a bordo a $\hat{X}^k$ (como fizemos para obter $\bar{\tilde{X}}^k$ a partir de $\tilde{X}^k$), obtemos o espaço de revestimento cíclico de k folhas de X ramificado ao longo de L que será denotado por $\bar{\hat{X}}^k$.

OBS.: Se $\mu = 1$, então L é um nó e, neste caso, $\Sigma = I_Z$ e assim $\hat{X} \approx \tilde{X}$, $\hat{X}^k \approx \tilde{X}^k$ e $\bar{\hat{X}}^k \approx \bar{\tilde{X}}^k$.

II.3 - RELACIONAMENTO ENTRE $\hat{X}$ E $\hat{X}^k$ (MILNOR [12], pág. 118)

A sequência exata

$$0 \longrightarrow C_*(\hat{X}) \xrightarrow{t^k-1} C_*(\hat{X}) \longrightarrow C_*(\hat{X}^k) \longrightarrow 0 \quad ,$$

entre os complexos simpliciais de $\hat{X}$ e $\hat{X}^k$, induz a sequência longa em homologia

$$\ldots \longrightarrow H_i(\hat{X}) \xrightarrow{t^k-1} H_i(\hat{X}) \longrightarrow H_i(\hat{X}^k) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(\hat{X}) \xrightarrow{t^k-1} \ldots$$

II.4 - RELACIONAMENTO ENTRE $\tilde{X}^k$ e $\bar{\tilde{X}}^k$ (UM RESULTADO DE CROWELL)

Neste parágrafo vamos dar uma prova "geométrica" de que, para um nó $K \subset S^{n+2}$, existe a sequência exata

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow H_1(\tilde{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \longrightarrow 0 \ ,$$

além disso, esta sequência cinde.

Daremos, também, uma interpretação do gerador do $Z \subset H_1(\bar{\tilde{X}}^k)$.

Uma demonstração mais rigorosa pode ser encontrada em Crowell [3].

Como vimos, na construção geométrica de $\bar{\tilde{X}}^k$, colamos, de maneira adequada, um "toro sólido" $S^n \times D^2$ ao longo do bordo do revestimento $\tilde{X}^k$.

Um gerador de $H_1(\tilde{X}^k)$ é um dos meridianos deste bordo que, como vimos é um "toro" $S^n \times S^1$.

Este gerador é obtido, na construção $\tilde{X}^k$ da seguinte maneira.

Temos o gerador α' de $H_1(S^{n+2} - T)$ onde T é uma vizinhança tubular de K em S^{n+2} (Fig. 13).

Quando cortamos, ao longo da superfície de Seifert, abrimos este gerador que passa a ser um segmento. Tomamos, então, k cópias deste espaço (Fig. 14) e identificamos a última com a primeira. Neste ponto temos k segmentos obtidos de α' que, através da última identificação, se torne um laço α em $\tilde{X}^k$, que recobre k vezes α' e, além disso, é um gerador de $H_1(\tilde{X}^k)$ (Fig. 15).

Ao efetuarmos a colagem, α passa a ser bordo de um disco $* \times D^2$ em $\bar{\tilde{X}}^k = \tilde{X}^k \cup (S^n \times D^2)$.

Consideremos a sequência de Mayer Vietoris do par $(\tilde{X}^k, S^n \times D^2)$:

$$H_2(\bar{\tilde{X}}^k) \to H_1(\tilde{X}^k \cap (S^n \times D^2)) \to H_1(\tilde{X}^k) \oplus H_1(S^n \times D^2) \to H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} \wr\wr & & \wr\wr \\ H_1(S^n \times S^1) \approx Z = [\alpha'] & & 0 \end{array}$$

Desse modo, o gerador α' de $H_1(\tilde{X}^k \cap (S^n \times D^2))$, "atinge" um gerador α de $H_1(\tilde{X}^k)$, logo a sequência:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} H_1(\tilde{X}^k) \xrightarrow{j} H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \longrightarrow 0$$

é exata.

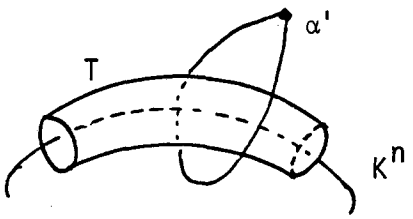


Fig. 13

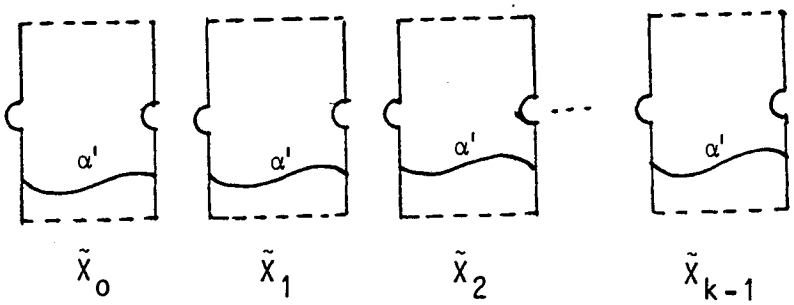


Fig. 14

Fig. 15

Crowell [3], mostra que a seguinte sequência exata,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \arrow[r, "\psi"] & H_1(\tilde{X}^k) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[l, bend left, dashed, "h"] & Z \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "g"] & 0 \end{tikzcd} , \qquad (1)$$

cinde, onde $Z \subset H_0(A_1 \cap B_1)$ (Ver esquema abaixo).

Logo existem

$$g : Z \longrightarrow H_1(\tilde{X}^k) \quad \text{e} \quad h : H_1(\tilde{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\tilde{X}}^k)$$

tais que $\partial_* \circ g = I_Z$ e $h \circ \psi = I_{H_1(\bar{\tilde{X}}^k)}$.

Desse modo, a sequência

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{g} H_1(\tilde{X}^k) \xrightarrow{h} H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \longrightarrow 0$$

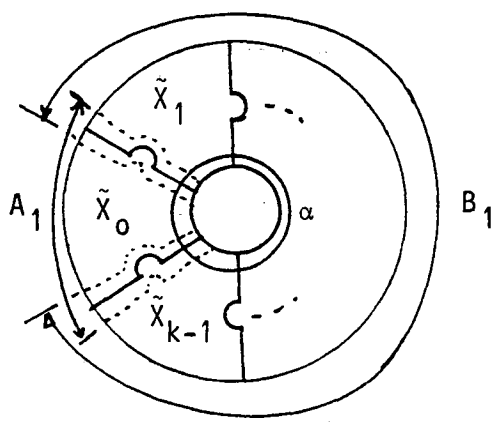
cinde.

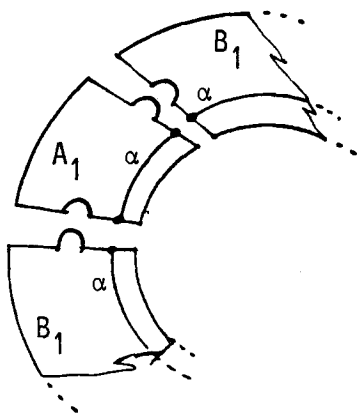
Vamos definir a aplicação $g : Z \to H_1(\tilde{X}^k)$, tal que $\partial_* \circ g = I_Z$ de tal forma que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} i$ e assim $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} j$ e nossa sequência exata, cinde.

Seja $g : Z \to H_1(\tilde{X}^k)$ definida por: $g((1,-1)) = [\alpha]$, onde α foi descrito anteriormente.

Precisamos mostrar que $\partial_* \circ g = I_Z$.

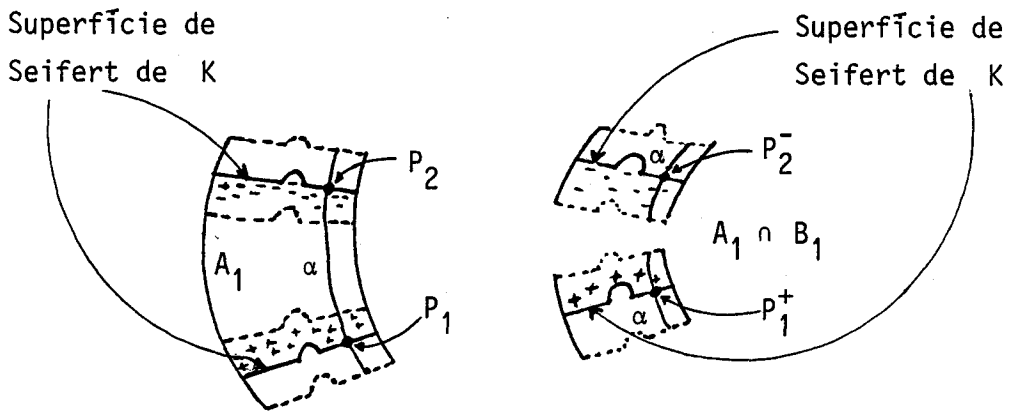
Como em [3] sejam A_1 e B_1 esquematizados abaixo:





Logo A_1 tem o mesmo tipo de homotopia que $\tilde{X}_0$ e B_1 o mesmo tipo de homotopia que $\tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2 \cup \ldots \cup \tilde{X}_{k-1}$.

$\partial_*([\alpha])$ em A_1 são dois pontos, P_1 e P_2 ; um em cada cópia da superfície de Seifert do nó K , que é homeomorfa a $A_1 \cap B_1$, uma com valor + e outra com valor - , conforme esquematizado abaixo:



Além disso, $\partial_*([\alpha])$ em B_1 , também é dois pontos com sinais trocados em relação ao $\partial_*([\alpha])$ em A_1 .

Assim $\partial_*([\alpha]) = (1,-1)$, (ou $\partial_*([\alpha]) = (-1,1)$) , em Z e, desse modo, $\partial_* \circ g = I_Z$.

Temos, então, que esta função $g : Z \to H_1(\bar{\tilde{X}}^k)$ é um dos possíveis homomorfismos que faz cindir a sequência (1) e, neste caso, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} i$.

Logo a sequência exata

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i} H_1(\tilde{X}^k) \xrightarrow{j} H_1(\bar{\tilde{X}}^k) \longrightarrow 0$$

cinde.

CAPÍTULO III

ENLAÇAMENTOS K-ESPLITÁVEIS E Q-SIMPLES

Neste capítulo definiremos duas classes particulares de n-links e veremos alguns resultados, obtidos através do revestimento cíclico infinito.

Estaremos sempre trabalhando sobre o anel $\Lambda = Z[t,t^{-1}]$ e com a homologia integral.

III.1 - LINK k-ESPLITÁVEL

Um n-link $L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_\mu$ de multiplicidade μ é dito ser geometricamente k-esplitável $(0 \leq k \leq \mu-1)$ se existir $B = B_1^{n+2} \cup B_2^{n+2} \cup \ldots \cup B_k^{n+2}$, uma coleção de k sub-bolas de S^{n+2} mutualmente disjuntas satisfazendo:

i) $B_i^{n+2} \cap L \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq k$,

ii) $\partial B \cap L = \emptyset$,

iii) $S^{n+2} - (B \cap L) \neq \emptyset$,

iv) k é maximal com respeito às propriedades acima.

Se $k = \mu - 1$, dizemos que L é completamente esplitável e, se $k = 0$, dizemos que L é não esplitável.

Além disso, dizemos que:

$$L_i = L \cap B_i^{n+2} \ , \quad 1 \leq i \leq k$$

$$L_{k+1} = L \cap (S^{n+2} - B)$$

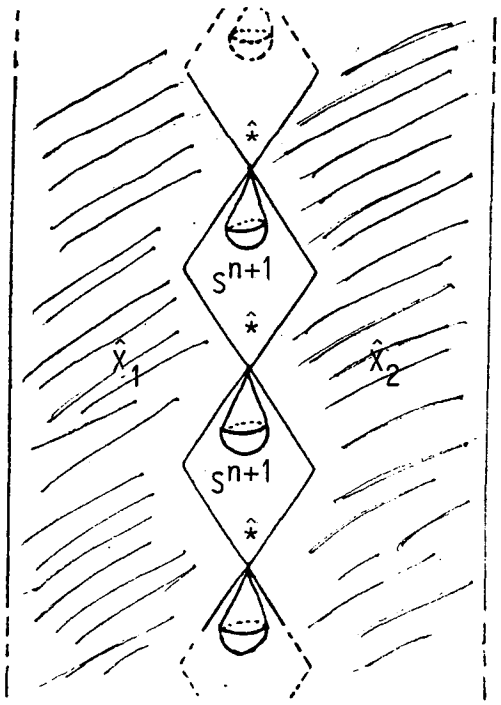
são os componentes não esplitáveis de L .

LEMA III.1.1

Sejam $X = X_1 \vee X_2 \vee S^{n+1}$ com $H_1(X_1) \approx H_1(X_2) \approx Z$, $\hat{X}$ o espaço de revestimento de X associado ao homomorfismo

$$\Sigma \circ A : \pi_1(X) \to Z \ ,$$

então $\hat{X}$ consiste de uma cópia de $\hat{X}_1$ e uma cópia de $\hat{X}_2$ identificadas ao longo do levantamento $\hat{*}$ do ponto $*$ dado no wedge $X_1 \vee X_2 \vee S^{n+1}$, com Z cópias de S^{n+1} cada uma colada em cada um dos pontos $\hat{*}$, conforme esquematizado abaixo:

$\hat{X} =$ 

$\xrightarrow{p} X_1 \vee X_2 \vee S^{n+1} = X$

Prova:

Sejam $i_1 : X_1 \to X$ e $i_2 : X_2 \to X$ as inclusões naturais, é fácil observar que $\Sigma \circ A \circ i_{1*} : \pi_1(X_1) \to Z$ e $\Sigma \circ A \circ i_{2*} : \pi_1(X_2) \to Z$ são epimorfismos, uma vez que, pela abelianização, atingem, respectivamente, a primeira e a segunda componente de $H_1(X) \approx Z \oplus Z$.

Logo, sendo $p : \hat{X} \to X$ a aplicação de revestimento, pelo Teorema I.1.12, temos que $p^{-1}(X_1)$ e $p^{-1}(X_2)$ são conexos e revestem, respectivamente, X_1 e X_2 .

Seja $p' = p|_{p^{-1}(X_1)} : p^{-1}(X_1) \to X_1$ o revestimento de X_1 .

Vamos mostrar que este espaço de revestimento é o correspondente à aplicação:

$$\pi_1(X_1) \xrightarrow{A'} H_1(X_1) \approx Z$$

e portanto $p^{-1}(X_1) = \hat{X}_1$, onde $A' = A|_{\pi_1(X_1)} : \pi_1(X_1) \to H_1(X_1)$.

Observemos o seguinte diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(X_1) \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X_1 \arrow[r, hook, "i_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Seja K_1 o núcleo da aplicação

$$A' : \pi_1(X_1) \longrightarrow H_1(X_1)$$

Vamos mostrar que $p'_*(\pi_1(p^{-1}(X_1))) = K_1$.

Temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(p^{-1}(X_1)) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p'_*"] & \pi_1(\hat{X}) \arrow[d, "p_*"] & & \\
\pi_1(X_1) \arrow[r, "i_{1*}"] \arrow[drr, dashed, "A'"'] & \pi_1(X) \arrow[r, "A"] & H_1(X) \approx Z \oplus Z \arrow[d, "\Sigma"] \\
& & Z \approx H_1(X_1)
\end{tikzcd}$$

Seja $\alpha \in \pi_1(p^{-1}(X_1)) \Rightarrow p'_*(\alpha) \in \pi_1(X_1)$, desse modo, por i_{1*}, $p'_*(\alpha)$ é levado à primeira componente de $\pi_1(X) \approx \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$ e por A é levado à primeira componente de $H_1(X) \approx Z \oplus Z$. Como $\alpha \in \pi_1(p^{-1}(X_1))$ tem que $p'_*(\alpha) \in \ker A' = K_1$ e assim $A'(p'_*(\alpha)) = 0$. Como o diagrama é comutativo temos, $\Sigma \circ A \circ i_{1*}(p'_*(\alpha)) = 0$, logo $A(i_*(p'_*(\alpha))) = 0$ e assim $i_*(p'_*(\alpha)) \in \pi_1(X_1)$ é um elemento em $K = \ker A$, donde $i_*(p'_*(\alpha)) \in K_1 \Rightarrow f'_*(\alpha) \in K_1$.

Logo $p'_*(\pi_1(p^{-1}(X_1))) \subset K_1$.

Seja $\lambda \in K_1 \Rightarrow i_{1*}(\lambda) \in \pi_1(X_1)$, mais precisamente à "primeira componente" de $\pi_1(X) \approx \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$, analogamente ao caso anterior, temos que $\Sigma \circ A(i_*(\lambda)) = 0$, logo $i_*(\lambda) \in K$, assim ele se levanta a um laço α pertencente a $\pi_1(\hat{X})$, levantado sobre X_1, logo existe um laço $\alpha' \in \pi_1(p^{-1}(X_1))$ tal que $j_*(\alpha') = \alpha$ e assim, como $p' = p|_{p^{-1}(X_1)}$ temos que $p'_*(\alpha') = \lambda$ e portanto,

$$K_1 \subset f'_*(\pi_1(p^{-1}(X_1))) .$$

Analogamente mostramos para X_2. Assim, como

$\hat{X} = p^{-1}(X_1) \cup p^{-1}(X_2) \cup p^{-1}(S^{n+1}) \cup p^{-1}(*)$ e $\pi_1(S^{n+1}) = 0$,

donde $p^{-1}(S^{n+1})$ é desconexo, o resultado segue

Seja $L = K_1 \cup K_2$ um n-link de multiplicidade 2.

Seja $X = S^{n+2} - L$ e $\hat{X}$ o revestimento cíclico infinito de X.

Seja $X_i = S^{n+2} - K_i$ e $\hat{X}_i$ o revestimento cíclico infinito de X_i , $i = 1,2$.

TEOREMA III.1.2

Se L de duas componentes, como acima, é completamente esplitável, então:

$$H_i(\hat{X}) \approx_\Lambda H_i(\hat{X}_1) \oplus H_i(\hat{X}_2) \ , \quad 2 \leq i \leq n \ ;$$

$$H_1(\hat{X}) \approx_\Lambda H_1(\hat{X}_1) \oplus H_1(\hat{X}_2) \oplus \Lambda \ ;$$

$$H_{n+1}(\hat{X}) \approx_\Lambda H_{n+1}(\hat{X}_1) \oplus H_{n+1}(\hat{X}_2) \oplus \Lambda \ .$$

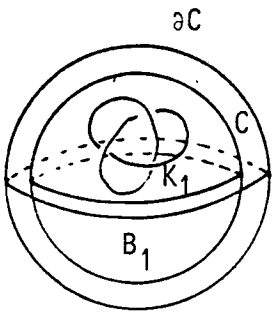
Prova:

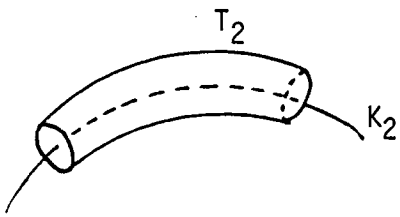
Vamos mostrar que $S^{n+2} - L \sim X_1 \vee X_2 \vee S^{n+1}$.

Seja T_2 uma vizinhança tubular de K_2 em S^{n+2} .

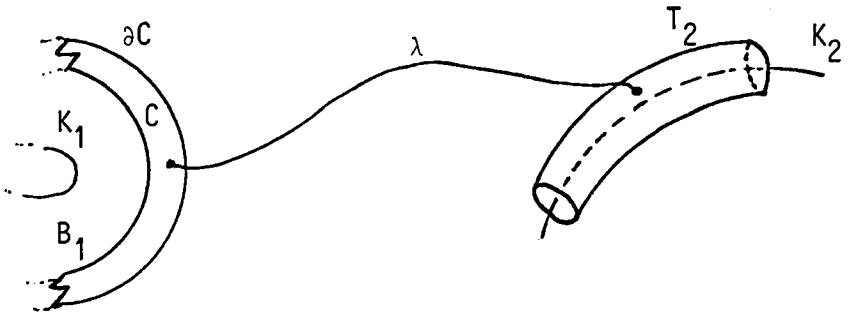
Como L é completamente esplitável, podemos considerar uma bola $B_1^{n+2} \subset S^{n+2} - T_2$, contendo K_1 e C um colar sobre ∂B_1^{n+2} contido em $S^{n+2} - B_1^{n+2}$, tal que $C \cap T_2 = \emptyset$.

Vamos denotar o bordo exterior de C por ∂C e B_1^{n+2} por B_1 .





Podemos conectar ∂T_2 com ∂C por um arco λ de forma que seu interior esteja inteiramente contido em $S^{n+2} - (T_2 \cup C \cup B_1)$.

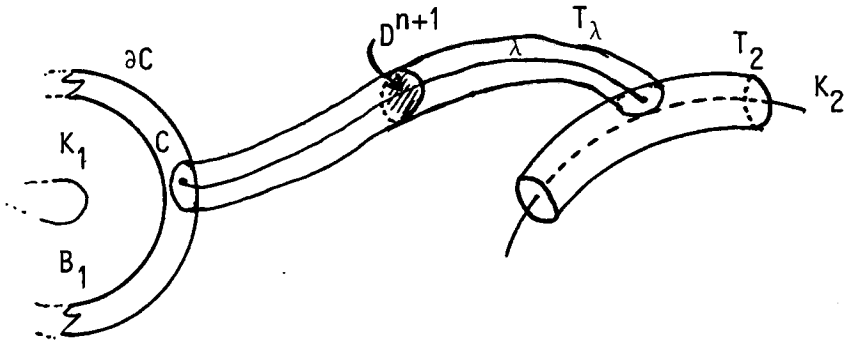


Seja T_λ uma vizinhança tubular de λ, do ∂T_2 até ∂C, de tal forma que:

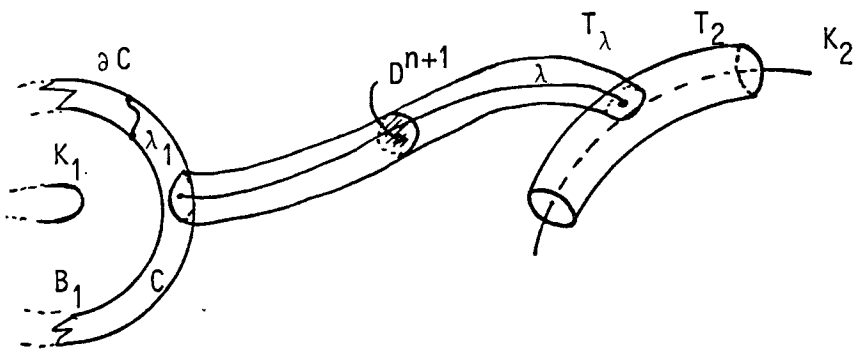
i) $T_\lambda \cap \partial C \approx D^{n+1}$,

ii) $T_\lambda \cap \partial T_2 \approx D^{n+1}$ e

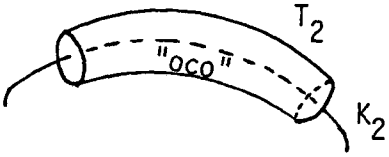
iii) $T_\lambda \subset S^{n+2} - (B_1 \cup C \cup T_2)$ sobre os pontos interiores de λ.



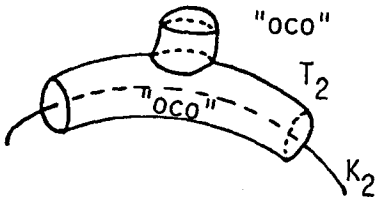
Conectemos, agora, ∂C ao ∂B_1 por um arco $\lambda_1 \subset C$. Vamos mostrar que tal configuração tem o mesmo tipo de homotopia que $S^{n+2} - K_2$.

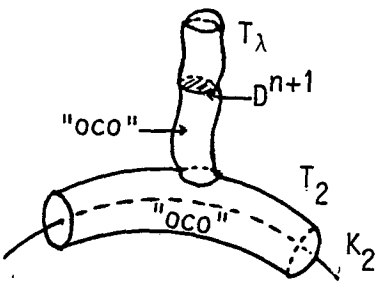


Consideremos as seguintes figuras:

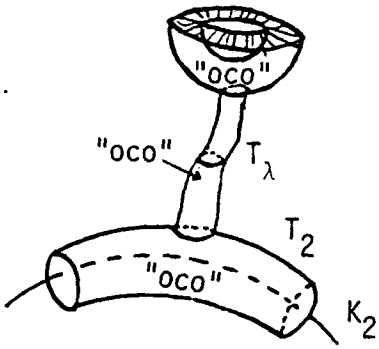


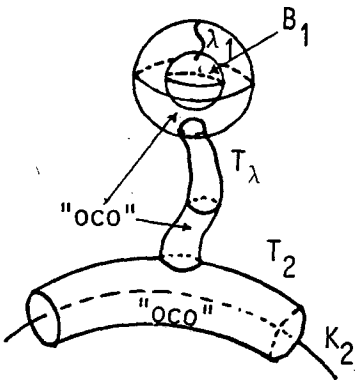
$S^{n+2} - T_2 \sim S^{n+2} - K_2$



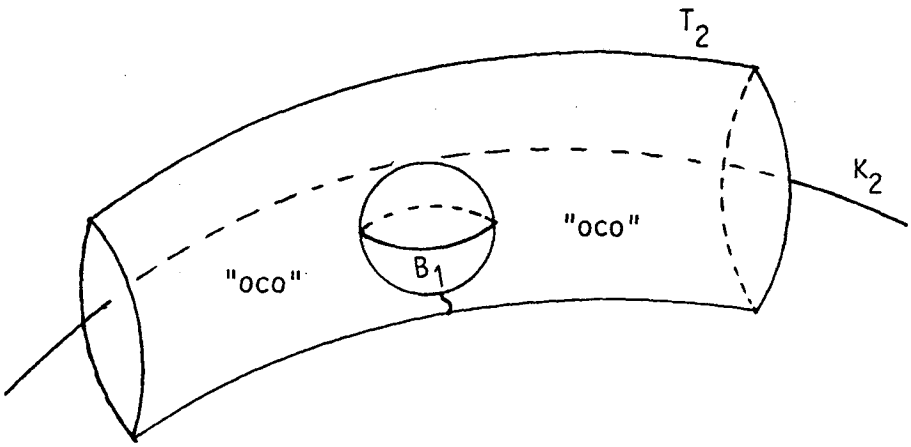


$S^{n+2} - (T_2 \cup T_\lambda)$





$S^{n+2} - (T_2 \cup T_\lambda \cup (C-\lambda_1))$



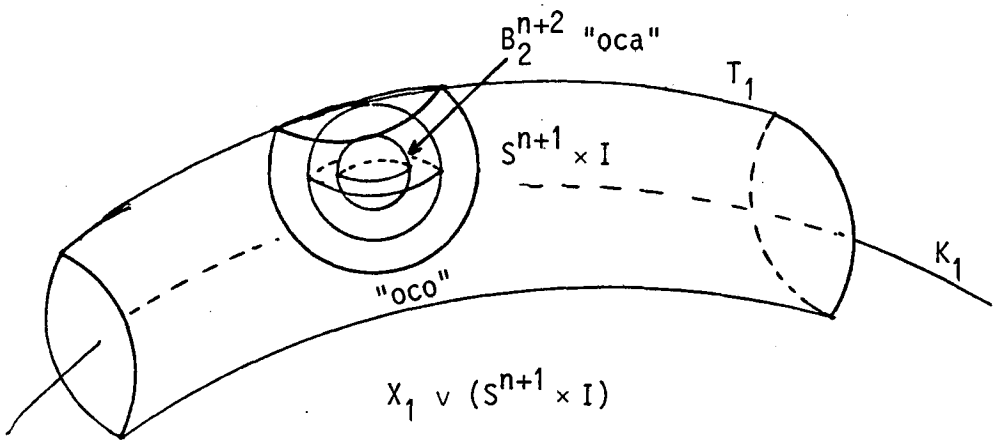
$(S^{n+2} - T_2) \vee B_1^{n+2}$

Desse modo, $X_2 \vee B_1 \sim S^{n+2} - T_2$.

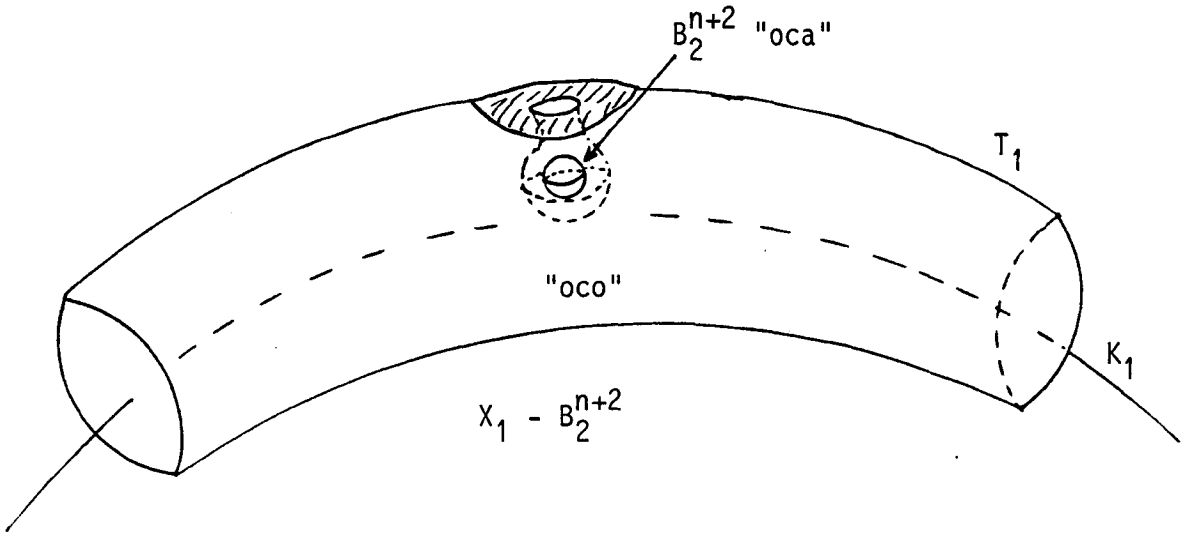
Vamos mostar, agora, que $B_1^{n+2} - K_1 \sim X_1 \vee S^{n+1}$.

Primeiro, lembremos que $X_1 \vee S^{n+1} \sim X_1 \vee (S^{n+1} \times I)$.

Observemos as figuras abaixo:



Ao centro temos uma B_2^{n+2} "oca". Esta configuração tem o mesmo tipo de homotopia que a configuração abaixo, que nada mais é que $X_1 - B_2^{n+2}$.



Mas $X_1 - B_2^{n+2} \sim B_1^{n+2} - T_1$.

Então, se L for esplitável, $X = S^{n+2} - L = (S^{n+2} - T_2) - T_1 =$
$= X_2 - T_1 \sim (X_2 \vee B_1^{n+2}) - T_1 \sim X_2 \vee (B_1^{n+2} - T_1) \sim X_2 \vee X_1 - B_2^{n+2} \sim X_2 \vee X_1 \vee S^{n+1}$.

Denotaremos por $*$ o ponto base neste Wedge. Logo, pelo Lema III.1.1 , $\hat{X}$ consiste de uma cópia de $\hat{X}_1$, uma cópia de $\hat{X}_2$ identificados ao longo do levantamento $\hat{*}$ sobre $*$ junto com Z cópias de S^{n+1} , cada uma colada em um dos pontos $\hat{*}$.

Sejam, $W_1 = \hat{X}_1 \cup_{\hat{*}} \bigcup_{i \in Z} S_i^{n+1}$ e $W_2 = \hat{X}_2$. Desse modo $\hat{X} = W_1 \cup_{\hat{*}} W_2$. Consideremos a sequência de Mayer-Vietoris da triada $(\hat{X}, W_1, W_2)$:

$$\ldots \longrightarrow H_i(\hat{*}) \longrightarrow H_i(W_1) \oplus H_i(W_2) \longrightarrow H_i(\hat{X}) \longrightarrow \ldots$$

Se $2 \leq i \leq n \Longrightarrow H_i(\hat{*}) \approx 0$ logo

$$\ldots \longrightarrow \underset{\substack{\approx \\ H_i(\hat{*})}}{0} \longrightarrow H_i(W_1) \oplus H_i(W_2) \longrightarrow H_i(\hat{X}) \longrightarrow \underset{\substack{\approx \\ H_{i-1}(\hat{*})}}{0} \longrightarrow \ldots$$

donde

$$H_i(\hat{X}) \approx H_i(W_1) \oplus H_i(W_2) \approx H_1(\hat{X}_1 \cup_{\hat{*}} \bigcup_{i \in Z} S^{n+1}) \oplus H_i(\hat{X}_2) \approx H_i(\hat{X}_1) \oplus H_i(\hat{X}_2)$$

e a primeira parte está provada.

Se $i = n+1$ temos:

$H_{n+1}(\hat{*}) = 0$,

$H_{n+1}(W_2) = H_{n+1}(\hat{X}_2)$ e

$H_{n+1}(W_1) = H_{n+1}(\hat{X}_1 \cup_{\hat{*}} \bigcup_{i \in Z} S_i^{n+1}) \approx H_{n+1}(\hat{X}_1) \oplus Z[Z] \approx H_{n+1}(\hat{X}_1) \oplus \Lambda$

Logo, $H_{n+1}(\hat{X}) \approx H_{n+1}(\hat{X}_1) \oplus H_{n+1}(\hat{X}_2) \oplus \Lambda$.

Se $i = 1$.

Consideremos a sequência exata abaixo:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} \Lambda \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \ .$$

Como Z é um domínio, A deve ser um ideal primo em Λ. Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $A = (\lambda)$.

Segundo (Oziride [9]) os únicos ideais primos em Λ são do tipo:

i) (0)

ii) $(p(t))$, onde $p(t)$ é irredutível

iii) $(p, g(t))$ onde $p \in Z$ é um número primo e $g(t) \in \Lambda$ é tal que $g(t) \in Z_p[t,t^{-1}]$ é irredutível em $Z_p[t,t^{-1}]$.

Se $A = 0$ então teríamos, pela sequência, $\Lambda/0 \approx Z$ o que é um absurdo.

Se $A = (p, g(t))$ então Λ/A seria finito mas $\Lambda/A \approx Z$ que é infinito.

Logo $A = (p(t))$ onde $p(t)$ é irredutível em Λ. Mas $(\lambda) \approx_\Lambda \Lambda$, como um Λ-módulo, basta considerar a aplicação

$$f_1 : \Lambda \longrightarrow (\lambda)$$
$$1 \longrightarrow \lambda$$

Assim a imagem de f em Λ é um Λ gerado por $p(t)$.

Voltando ao nosso Teorema, se $i = 1$ temos:

$$H_1(\hat{*}) \longrightarrow H_1(W_1) \oplus H_1(W_2) \longrightarrow H_1(\hat{X}) \longrightarrow \underset{\underset{\Lambda}{\approx}}{H_0(\hat{*})} \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

desse modo, pelo que acabamos de demonstrar, podemos desviar esta

sequência do seguinte modo:

$$\underset{\underset{0}{\wr\wr}}{H_1(\hat{*})} \longrightarrow \underset{\underset{H_1(\hat{X}_1)}{\wr\wr}}{H_1(\hat{X}_1 \cup_{\hat{*}} \bigcup_{i\in Z} S_i^{n+1})} \oplus H_1(X_2) \longrightarrow H_1(\hat{X}) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0,$$

como Λ é um módulo livre sobre Λ temos:

$$H_1(\hat{X}) \approx H_1(\hat{X}_1) \oplus H_1(\hat{X}_2) \oplus \Lambda$$

e nosso teorema está demonstrado.

OBS.: Na verdade o λ acima visto é $(t-1)$.

Vamos, agora, supor L um n-link de multiplicidade μ, geometricamente k-esplitável e sejam L_i, $1 \leq i \leq k+1$ os componentes não esplitáveis de L, $X = S^{n+2} - L$, $X_i = S^{n+2} - L_i$, $\hat{X}_i$ o revestimento cíclico sobre X_i, $1 \leq i \leq k+1$ e suponhamos que o resultado anterior seja válido para

$$\hat{X}' = \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2 \cup \ldots \cup \hat{X}_{k-1},$$

ou seja,

$$H_i(\hat{X}') \approx_\Lambda H_i(\hat{X}_1) \oplus H_i(\hat{X}_2) \oplus \ldots \oplus H_i(\hat{X}_{k-1}), \quad 2 \leq i \leq n;$$

$$H_1(\hat{X}') \approx_\Lambda H_1(\hat{X}_1) \oplus H_1(\hat{X}_2) \oplus \ldots \oplus H_1(\hat{X}_{k-1}) \oplus (k-1)\Lambda;$$

$$H_{n+1}(\hat{X}') \approx_\Lambda H_{n+1}(\hat{X}_1) \oplus H_{n+1}(\hat{X}_2) \oplus \ldots \oplus H_{n+1}(\hat{X}_{k-1}) \oplus (k-1)\Lambda.$$

Sejam B_i^{n+2}, $i = 1,2,\ldots k+1$, dadas pela k-esplitabilidade de L e λ_i, $i = 1,2,\ldots k$ arcos contidos em $S^{n+2} - \bigcup_{i=1}^{k+1} B_i$ tais que λ_i conecte B_i a B_{i+1} e $\lambda_i \cap \lambda_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$.

Conectemos, assim, as $k-1$ primeiras bolas B_i^{n+2}, $i = 1,\ldots k-1$.

Tomemos uma vizinhança tubular T_{λ_i}, $i = 1,2 \ldots k-2$ do ∂B_i até ∂B_{i+1}, como na demonstração do teorema anterior. Este novo espaço é uma bola B^{n+1} e estamos, novamente, no caso do teorema anterior e assim, denotando $\hat{X}^* = \hat{X}_1 \cup \hat{X}_2 \cup \ldots \cup \hat{X}_{k-1} \cup \hat{X}_k$ temos:

$$i) \quad H_j(\hat{X}^*) = [(\bigoplus_{i=1}^{k-1} H_j(\hat{X}_i) \oplus (k-1)\Lambda) \oplus H_j(\hat{X}_k)] \oplus \Lambda \approx$$

$$\approx \bigoplus_{i=1}^{k} H_j(\hat{X}_i) \oplus k\Lambda \ , \quad 2 \leq i \leq n \ .$$

Analogamente:

$$ii) \quad H_1(X^*) \approx \bigoplus_{i=1}^{k} H_1(\hat{X}_i) \oplus k\Lambda \quad \text{e}$$

$$iii) \quad H_{n+1}(\hat{X}^*) \approx \bigoplus_{i=1}^{k} H_{n+1}(\hat{X}_i) \oplus k\Lambda \ .$$

Seja, agora, uma única bola B^{n+1} contendo $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k$ e uma outra bola B'^{n+1} contendo L_{k+1}, segue o seguinte resultado:

COROLÁRIO III.1.3

Se L, como acima, for k-esplitável, então:

$$H_j(\hat{X}) \approx \bigoplus_{i=1}^{k+1} H_j(\hat{X}_i) \ , \quad 2 \leq j \leq n$$

$$H_1(\hat{X}) \approx \bigoplus_{i=1}^{k+1} H_1(\hat{X}_i) \oplus k\Lambda$$

$$H_{n+1}(\hat{X}) \quad \bigoplus_{i=1}^{k+1} H_{n+1}(\hat{X}_i) \oplus k\Lambda$$

III.2 - LINK q-SIMPLES

Seja L um n-link de multiplicidade μ, L é chamado

q-simples $(q \geq 0)$ se $\pi_i(X) \approx \pi_i(C_{\mu,n})$, para $i \leq q$, onde $C_{\mu,n} = (\bigvee_{i=1}^{\mu} S_i^1) \vee (\bigvee_{j=1}^{\mu-1} S_j^{n+1})$.

Observe que todo link é o-simples. O link trivial é q-simples para todo $q \geq 0$.

LEMA III.2.1

Se um n-link L de multiplicidade μ é q-simples, $q \geq 1$, então:

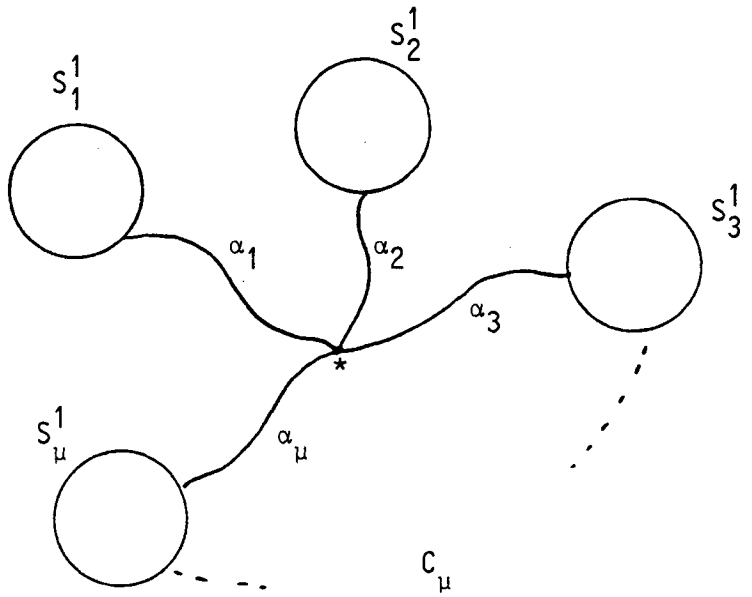
i) $H_1(\hat{X}) \approx (\mu-1)\Lambda$;

ii) Se $2 \leq q \leq n$, então, $H_i(\hat{X}) = 0$, $2 \leq i \leq q$;

iii) Se $q \geq n+1$, então, $H_{n+1}(\hat{X}) \approx (\mu-1)\Lambda$.

Prova:

Seja $C_\mu = \bigvee_{j=1}^{\mu} S_j^1$, como esquematizado abaixo:



Vamos construir $f : C_\mu \to X$, geometricamente, como segue:

Como $q \geq 1 \Rightarrow \pi_1(X) \approx \pi_1(C_\mu)$, assim, a cada círculo S^1_j de C_μ, fazemos associar um meridiano λ_j da vizinhança tubular T_j, correspondente à componente L_j de L, $j = 1,2 \ldots \mu$, o ponto base $*$ do Wedge C_μ, acima esquematizado, é levado em algum ponto interior de X e cada segmento α_j, levado a um caminho em X, ligando a imagem do ponto $*$ ao meridiano λ_j, $j = 1,2, \ldots \mu$.

Assim $f: C_\mu \to X$ induz um isomorfismo

$$f_*: \pi_1(C_\mu) \longrightarrow \pi_1(X)$$

Seja M o "Mapping Cylinder" de f, $M = I_f$. Desse modo $M \sim X$, $\pi_1(M,C_\mu) = 0$ e $\pi_i(M,C_\mu) = \pi_i(X)$, $i \geq 2$.

Seja, agora, $\hat{M}$ o revestimento cíclico infinito de M, temos assim, induzidos os revestimentos $\hat{C}_\mu$ de C_μ e $\hat{X}$ de X.

Sabemos que $H_1(\hat{C}_\mu) \approx (\mu-1)\Lambda$ e $H_i(\hat{C}_\mu) = 0$, $i \geq 2$, além disso, a inclusão $i_*: \pi_1(\hat{C}_\mu) \to \pi_1(\hat{X})$ é um isomorfismo, donde $H_1(\hat{C}_\mu) \xrightarrow{i_\#} H_1(X)$ é um isomorfismo, pois se dois grupos são isomorfos, então seus abelianizados também o são e assim provamos i).

Se $2 \leq q \leq n$, então $\pi_1(\hat{M},\hat{C}_\mu) = 0$, $\forall\, i \leq q$, pois sendo $i \geq 2$ temos, no diagrama abaixo, onde cada linha é exata, que as aplicações p_* são isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & \to & \pi_{i+1}(\hat{C}_\mu) & \to & \pi_{i+1}(\hat{M}) & \to & \pi_{i+1}(\hat{M},\hat{C}_\mu) & \to & \pi_i(\hat{C}_\mu) & \to & \pi_i(\hat{M}) & \to & \ldots \\
 & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p'_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \\
\ldots & \to & \pi_{i+1}(C_\mu) & \to & \pi_{i+1}(M) & \to & \pi_{i+1}(M,C_\mu) & \to & \pi_i(C_\mu) & \to & \pi_i(M) & \to & \ldots
\end{array}$$

$$\wr\wr$$

$$\pi_{i+1}(X)$$

logo, pelo lema dos cinco, (Vick [16], pág. 53)

$$p'_* : \pi_{i+1}(\hat{M},\hat{C}_\mu) \longrightarrow \pi_{i+1}(M,C_\mu) \approx \pi_{i+1}(X)$$

é um isomorfismo, ou seja,

$$\pi_i(\hat{M},\hat{C}_\mu) = 0 \ , \quad 2 \leq i \leq q \ , \quad 2 \leq q \leq n \ , \quad \text{donde}$$

$$H_i(\hat{M},\hat{C}_\mu) = 0 \ , \quad 2 \leq i \leq q \ .$$

Consideremos a sequência do par $(\hat{M},\hat{C}_\mu)$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 0 & & & & 0 & & & & 0 & & \\ & & \| & & & & \| & & & & \| & & \\ \ldots & \to & H_i(\hat{C}\ ) & \to & H_i(\hat{M}) & \to & H_i(\hat{M},\hat{C}_\mu) & \to & H_{i-1}(\hat{C}_\mu) & \to & H_{i-1}(\hat{M}) & \to & \ldots \end{array}$$

Logo, $H_i(\hat{M}) = 0$, $2 \leq i \leq q$ $\Rightarrow$ $H_i(\hat{X}) = 0$, $2 \leq i \leq q$ e ii) está provado.

Se $q \geq n+1$, seja $M = I_f$ onde $f : C_{\mu,n} \to X$ é geometricamente definido da seguinte maneira:

Como, $\pi_i(X) \approx \pi_i(C_{\mu,n})$, $i \leq q$ e $q \geq n+1$, $\pi_{n+1}(X) \approx \approx \pi_{n+1}(C_{\mu,n}) \approx Z^{\mu-1}$ gerado por aplicações de $(\mu-1)$ esferas S_i^{n+1} , $i = 1,2,\ldots,\mu-1$, em X , denotemos estas aplicações por $h_i : S^{n+1} \to X$, $i = 1,2,\ldots,\mu-1$.

No 1-esqueleto, f associa cada círculo do Wedge $\bigvee_{i=1}^{\mu-1} S_i^1$ sobre um dos μ-geradores do grupo livre não abeliano, $\pi_1(X) \approx Z^\mu$, e no $(n+1)$-esqueleto, f aplica cada $(n+1)$-esfera de $C_{\mu,n}$, segundo a aplicação h_i , f assim definida induz um isomorfismo entre $\pi_i(C_{\mu,n})$ e $\pi_i(X)$, $i \leq n+1 \leq q$.

Temos, então, o seguinte diagrama, onde cada linha é uma sequência exata:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+2}(\hat{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{n+2}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h"] & \pi_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "g"] & \pi_{n+1}(\hat{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+2}(\hat{M}) \arrow[r] & H_{n+2}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r, "j_*"] & H_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r, "i_*"] & H_{n+1}(\hat{M}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Segundo Whitehead ([18], pág. 178) h é um epimorfismo. Vamos mostrar que i_* é um isomorfismo.

O par $(M,C_{\mu,n})$ é $n+1$ conexo, assim sendo, no diagrama comutativo abaixo, onde cada linha é uma sequência exata,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"] & \pi_{n+1}(\hat{M}) \arrow[r] \arrow[d, "b_*"] & \pi_{n+1}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & \pi_n(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r] \arrow[d, "a_*"] & \pi_n(\hat{M}) \arrow[r] \arrow[d, "b_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(C_{\mu,n}) \arrow[r] & \pi_{n+1}(M) \arrow[r] & \pi_{n+1}(M,C_{\mu,n}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\approx"] & \pi_n(C_{\mu,n}) \arrow[r] & \pi_n(M) \arrow[r] & \cdots \\
 & & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

as aplicações $a_* = (P|_{\hat{C}_{\mu,n}})_*$ e $b_* = (P|_{\hat{M}})_*$ são isomorfismos (Whitehead, [18] pág. 178), pelo lema dos cinco, p_* é um isomorfismo, logo $\pi_{n+1}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n}) \approx 0$, ou seja, $(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n})$ é $n+1$ conexo, donde $i_* : H_{n+1}(C_{\mu,n}) \to H_{n+1}(M)$ é sobre.

Seja $\alpha \in \ker(i_*)$, então $\exists\ \beta \in H_{n+2}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n})$ tal que $\alpha = j_*(\beta)$, como h é sobre, $\exists\ \gamma \in \pi_{n+2}(\hat{M},\hat{C}_{\mu,n})$ com $h(\gamma) = \beta$, mas δ é a aplicação nula, uma vez que $\pi_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \approx \pi_{n+1}(\hat{M})$, assim $\delta(\gamma) = 0 \Rightarrow g(\delta(\gamma)) = 0$. Como o diagrama comuta, temos

$$0 = g(\delta(\gamma)) = j_*(h(\gamma)) = \alpha \quad .$$

Logo $i_*: H_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \to H_{n+1}(\hat{M})$ é injetora donde é um isomorfismo e, com isso, obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_{n+1}(\hat{X}) \arrow[d, dashed, "\approx"] & \\
0 \arrow[r] & \pi_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[ur, "\hat{f}_*", "\approx"'] \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "g"'] & \pi_{n+1}(\hat{M}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \arrow[r, "i_*", "\approx"'] \arrow[dr, "\hat{f}_\#", "\approx"'] & H_{n+1}(\hat{M}) \arrow[r] & 0 \\
 & & H_{n+1}(\hat{X}) \arrow[u, dashed, "\approx"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $f : C_{\mu,n} \to X$ induz um isomorfismo de $\pi_{n+1}(C_{\mu,n})$ sobre $\pi_{n+1}(X)$ então seu levantamento $\hat{f}_* : \pi_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \longrightarrow \pi_{n+1}(\hat{X})$ é um isomorfismo, segundo Whitehead ([18] , pág. 181) , temos $\hat{f}_\# : H_{n+1}(\hat{C}_{\mu,n}) \longrightarrow H_{n+1}(\hat{X})$ um isomorfismo. Desse modo,

$$\pi_{n+1}(\hat{X}) \approx \pi_{n+1}(\hat{M}) \quad \text{e} \quad H_{n+1}(\hat{X}) \approx H_{n+1}(\hat{M}) \approx (\mu-1)\Lambda$$

e iii) está provado.

TEOREMA III.2.2

Suponha L um n-link de multiplicidade μ , q - simples. Seja $\hat{X}^k$ o revestimento cíclico de k folhas de $X = S^{n+2} - L$. Então:

i) $H_1(\hat{X}^k) \approx_Z \operatorname{cok}(t^k-1) \oplus Z$, onde $(t^k-1) : H_1(\hat{X}) \to H_1(\hat{X})$.

ii) Se $q \geq 1 \Rightarrow H_1(\hat{X}^k) \approx [k(\mu-1)+1]Z$.

iii) Se $2 \leq q \leq n \Rightarrow H_i(\hat{X}^k) = 0$, $2 \leq i \leq q$.

iv) Se $1 \leq q \leq n \Rightarrow H_{q+1}(\hat{X}^k) \approx \operatorname{cok}(t^k-1)$,
onde $(t^k-1) : H_{q+1}(\hat{X}) \to H_{q+1}(\hat{X})$.

v) Se $q \geq n+1 \Rightarrow H_{n+1}(\hat{X}^k) \approx K(\mu-1)Z$.

Prova:

Como vimos no capítulo II, parágrafo 2, temos a sequência longa exata:

$$\cdots \longrightarrow H_i(\hat{X}) \xrightarrow{t^k-1} H_i(\hat{X}) \longrightarrow H_i(\hat{X}^k) \longrightarrow \cdots$$

Se $i = 1$, temos:

$$\cdots \longrightarrow H_1(\hat{X}) \xrightarrow{t^k-1} H_1(\hat{X}) \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \xrightarrow{\partial} \overset{Z}{\overset{\wr\wr}{H_0(\hat{X})}} \xrightarrow{t^{k-1}} \overset{Z}{\overset{\wr\wr}{H_0(\hat{X})}} \longrightarrow \overset{Z}{\overset{\wr\wr}{H_0(\hat{X}^k)}} \longrightarrow 0.$$

Logo $(t^k-1) : H_0(\hat{X}) \to H_0(\hat{X})$ é o homomorfismo nulo donde temos a sequência

$$\cdots \longrightarrow H_1(\hat{X}) \xrightarrow{t^{k-1}} H_1(\hat{X}) \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \xrightarrow{\partial} \underset{\underset{Z}{\wr\wr}}{H_0(\hat{X})} \longrightarrow 0$$

e assim, como $H_0(\hat{X}) \approx Z$ é livre sobre Z , esta sequência cinde, donde

$$H_1(\hat{X}^k) \approx_Z \operatorname{cok}(t^k-1) \oplus Z \quad \text{e assim provamos i) .}$$

Se $q \geq 1$ temos, pelo Lema III.2.1

$$0 \longrightarrow (\mu-1)\Lambda \xrightarrow{t^k-1} (\mu-1)\Lambda \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

ou seja

$$0 \longrightarrow \underset{\underset{k(\mu-1)Z}{\wr\wr}}{\frac{(\mu-1)\Lambda}{t^k-1}} \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

desse modo

$H_1(\hat{X}^k) \approx k(\mu-1)Z \oplus Z = [k(\mu-1) + 1]Z$ e ii) está provado.

Como $H_i(\hat{X}) = 0$, $2 \leq i \leq q$, pelo Lema III.2.1 temos a sequência exata:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \| & & \| \\ \cdots & \longrightarrow & H_i(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_i(\hat{X}) & \longrightarrow & H_i(\hat{X}^k) & \xrightarrow{\partial} & H_{i-1}(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_{i-1}(\hat{X}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

donde $H_i(\hat{X}^k) = 0$, $\forall\ 3 \leq i \leq q$.

Se $i = 2$, temos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & \mathrm{cok}(t^k-1) \oplus Z \\ & & & & & & & & & & \wr\wr \\ H_2(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_2(\hat{X}) & \longrightarrow & H_2(\hat{X}^k) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_1(\hat{X}) & \longrightarrow & H_1(\hat{X}^k) \\ \| & & \| & & & & & & & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & & & & & & & Z \\ & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & 0 \end{array} ,$$

então a sequência se reduz a :

$$0 \longrightarrow H_2(\hat{X}^k) \xrightarrow{\partial} 0 \quad \therefore \quad H_2(\hat{X}^k) = 0$$

e iii) foi provada.

Provemos agora iv) . Basta mostrar para $q = 1$, pois para $q \geq 2$ segue da parte iii) .

Se $q = 1$, então $(t^k-1) : H_1(\hat{X}) \to H_1(\hat{X})$ é injetora e assim temos que na sequência exata:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 0 & & & & & & & & & & \\ & & \| & & & & & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_3(\hat{X}^k) & \xrightarrow{\partial} & H_2(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_2(\hat{X}) & \longrightarrow & H_2(\hat{X}^k) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\hat{X}) & \xrightarrow{t^k-1} & H_1(\hat{X}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

∂ é o homomorfismo nulo, donde

$$H_2(\hat{X}^k) \quad \text{é isomorfo ao} \quad \mathrm{cok}(t^k-1) ,$$

e isto prova iv) .

Se $q \geqq n+1$, pelo Lema III.2.1 , temos:

$$H_{n+1}(\hat{X}) \approx (\mu-1)\Lambda$$

Como $(t^k-1) : H_{n+1}(\hat{X}) \longrightarrow H_{n+1}(\hat{X})$ é injetora, temos a sequência exata:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & (\mu-1)\Lambda & \xrightarrow{t^k-1} & (\mu-1)\Lambda & \longrightarrow & H_{n+1}(\hat{X}^k) & \xrightarrow{\partial} & H_n(\hat{X}) & \longrightarrow \ldots \\ & & & & & & & & & \approx & \\ & & & & & & & & & 0 & \end{array}$$

Logo $H_{n+1}(\hat{X}^k) \approx \dfrac{(\mu-1)\Lambda}{t^k-1} \approx k(\mu-1)Z$, o que prova v) .

C A P Í T U L O IV

UMA GENERALIZAÇÃO DO RESULTADO DE CROWELL

Neste Capítulo faremos uma generalização do resultado de Crowell visto em II.4, para n-links L de multiplicidade μ, em função de L ser completamente esplitável ou q-simples.

LEMA IV.1

Seja L um n-link de multiplicidade μ e sejam $\hat{X}^k$ e $\bar{\hat{X}}^k$ os revestimentos de k folhas cíclico e cíclico ramificado de L, respectivamente. Então:

i) $H_i(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \simeq \mu Z$ para $i = 2$ e $i = n+2$ e $H_i(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \simeq 0$ nas outras dimensões.

ii) Na sequência exata de pares:

$$\ldots \longrightarrow H_2(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow H_2(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \xrightarrow{\partial} H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow 0$$

∂ é um monomorfismo.

Prova:

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{0}{\approx} & & & \overset{0}{\approx} & \\
\cdots \arrow[r] & H_2(S^n \times D^2) \arrow[r] & H_2(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \arrow[r, "\partial'", "\approx"'] \arrow[d, "\approx"', "\text{Exisão}"] & H_1(\partial\hat{X}^k) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"] & H_1(S^n \times D^2) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_2(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r] & H_2(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \arrow[r, "\partial"] & H_1(\hat{X}^k) \arrow[r] & H_1(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Como $i_* : H_1(\partial\hat{X}^k) \to H_1(\hat{X}^k)$ é injetora, temos que ∂ é injetora, e provamos ii) onde a Exisão é feita no aberto $\overset{\circ}{\hat{X}}{}^k$.

Além disso, temos:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{exisão}}}{H_2(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \approx} H_2(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \xrightarrow[\approx]{\partial'} H_1(\partial\hat{X}^k) \approx \mu Z ,$$

analogamente,

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{exisão}}}{H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \approx} H_{n+2}(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \xrightarrow[\approx]{\partial'} H_{n+1}(\partial\hat{X}^k) \approx \mu Z .$$

Vamos verificar nas demais dimensões. Consideremos a sequência do par $(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k)$

$$\cdots \to H_2(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \to H_1(\partial\hat{X}^k) \to \underset{\substack{\approx \\ 0}}{H_1(S^n \times D^2)} \to H_1(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{\substack{\approx \\ Z}}{H_0(\partial\hat{X}^k)} \xrightarrow[\approx]{i_*} \underset{\substack{\approx \\ Z}}{H_0(S^n \times D^2)} \longrightarrow H_0(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \longrightarrow 0 .$$

Como $H_1(S^n \times D^2) \approx 0$ e $i_* : H_0(\partial\hat{X}^k) \to H_0(S^n \times D^2)$ é um isomorfismo, temos que $H_1(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \approx 0$ e $H_0(\coprod_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \approx 0$.

Para $2 < j \leq n+1$ temos $H_j(S^n \times D^2) \approx 0$ e $H_{j-1}(\partial\hat{X}^k) \approx 0$. Logo, da sequência a seguir:

$$\ldots \to H_j(S^n \times D^2) \to H_j(\bigsqcup_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \to H_{j-1}(\partial\hat{X}^k) \to \ldots$$

concluímos que $H_j(\bigsqcup_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \approx 0$.

Para $j > n+2$ temos:

$$H_j(S^n \times D^2) \approx 0 \quad \text{e} \quad H_{j-1}(\partial\hat{X}^k) \approx 0 .$$

Logo, da sequência abaixo:

$$\ldots \to H_j(S^n \times D^2) \to H_j(\bigsqcup_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \to H_{j-1}(\partial\hat{X}^k) \to \ldots$$

concluímos que $H_j(\bigsqcup_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) \approx 0$.

Como por Exisão,

$$H_j(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \approx H_j(\bigsqcup_{i=1}^{\mu} S^n \times D^2, \partial\hat{X}^k) , \quad \forall\, j \geq 0 ,$$

o resultado segue.

□

TEOREMA IV.2

Seja L um n-link de multiplicidade μ e $\hat{X}^k$, $\bar{\hat{X}}^k$ os revestimentos cíclico e cíclico ramificado de k-folhas, de $X = S^{n+2} - L$, respectivamente. Então:

i) $0 \to \mu Z \to H_1(\hat{X}^k) \to H_1(\bar{\hat{X}}^k) \to 0$ é exata, e cinde se L é completamente esplitável ou 1-simples,

ii) $i_* : H_i(\hat{X}^k) \to H_i(\bar{\hat{X}}^k)$ é um isomorfismo para $2 \leq i \leq n$,

iii) $0 \to (\mu-1)Z \to H_{n+1}(\hat{X}^k) \to H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k) \to 0$ é exata, e cinde se L é completamente esplitável ou (n+1)-simples.

Prova:

Seja L um n-link completamente esplitável de multiplicidade μ, observemos o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "t^k-1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1(\hat{X}) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t^k-1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\mu-1)\Lambda \arrow[r] \arrow[d, "t^k-1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1(\hat{X}) \arrow[r, "b"] \arrow[d, "c"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\mu-1)\Lambda \arrow[r] \arrow[d, "c_*"] & 0 \\
 & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \arrow[r, dashed, "a_*"] & H_1(\hat{X}^k) \arrow[r, dashed, "b_*"] & k(\mu-1)Z \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Onde as duas linhas são sequências exatas dadas pelo Corolário III.1.3, a primeira coluna é uma soma de μ sequências exatas vistas em II.3 e a segunda coluna também é uma sequência exata vista em II.3 .

Pelo Lema da "cobra" I.3.1 temos que a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \xrightarrow{a_*} H_1(\hat{X}^k) \xrightarrow{b_*} k(\mu-1)Z \ .$$

Mostremos que $b_* : H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow k(\mu-1)Z$ é sobre.

Seja $\alpha \in k(\mu-1)Z$, como c_* é sobre, $\exists\ \beta \in (\mu-1)\Lambda$ tal que $c_*(\beta) = \alpha$, como b é sobre $\exists\ \gamma \in H_1(\hat{X})$ tal que $b(\gamma) = \beta$ assim como o diagrama é comutativo temos $b_*(c(\gamma)) = \alpha$.

Logo, temos a sequência exata:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \xrightarrow{a_*} H_1(\hat{X}^k) \xrightarrow{b_*} k(\mu-1)Z \longrightarrow 0$$

Como L é completamente esplitável, cada componente é um nó isolado por uma bola B^{n+1} das outras componentes. Para construirmos seu revestimento ramificado procedemos da mesma forma colando um "toro sólido" $S^n \times D^2$, bordo a bordo, em cada variedade $\hat{X}_i^k$ e tal colagem não perturba a geometria dos demais componentes, pois é tudo feito isoladamente (dentro da bola B^{n+1} dada pela esplitabilidade). Desse modo, em cada componente, o meridiano de $\partial\hat{X}_i^k$, que era um dos geradores de $H_1(\hat{X}_i^k)$, se torna bordo de um disco D^2 e vai a zero em $H_1(\bar{\hat{X}}_i^k)$, do mesmo modo que no caso de um único nó. Assim temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mu Z \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow 0 .$$

Vamos, agora, considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \ker b_{\#} \arrow[d] & \\
\ker f_* \arrow[r] & \mu Z \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "b_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mu Z \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \operatorname{cok} f_* \arrow[r] \arrow[d, "b_{\#}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1(\hat{X}^k) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & k(\mu-1)Z \arrow[r] \arrow[d, "a_{\#}"] & 0 \\
\ker f_{\#} \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r, "f_{\#}"] \arrow[d] & H_1(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r, "g_{\#}"] \arrow[d] & \operatorname{cok} f_{\#} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & \operatorname{cok} b_{\#} &
\end{tikzcd}$$

Sendo L completamente esplitável, pela descrição ante

rior, vemos que $f_* : \mu Z \longrightarrow \mu Z$ é um isomorfismo assim, $\ker f_* = 0$ e $\operatorname{cok} f_* = 0$.

Como as duas primeiras colunas (à esquerda) são exatas, pelo Lema da "cobra" I.3.1 , temos que a seguinte sequência é exata:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & & & 0 & & & & \\
\| & & & & \| & & & & \\
\ker f_* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker f_{\#} & \longrightarrow & \operatorname{cok} f_{\#} & \xrightarrow{b_{\#}} & k(\mu-1)Z \xrightarrow{a_{\#}} \operatorname{cok} f_{\#}
\end{array}$$

Assim nosso diagrama se transforma em:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & & \mu Z \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "b_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mu Z \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "b_{\#}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1(\hat{X}^k) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & k(\mu-1)Z \arrow[r] \arrow[d, "a_{\#}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\overline{\hat{X}}_i^k) \arrow[r, "f_{\#}"] \arrow[d] & H_1(\overline{\hat{X}}^k) \arrow[r, "g_{\#}"] \arrow[d] & \operatorname{cok} f_{\#} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 & \operatorname{cok} b_{\#} &
\end{tikzcd}$$

Logo $a_{\#}$ é um monomorfismo. Vamos mostrar que ele é um epimorfismo.

Seja $\alpha \in \operatorname{cok} f_{\#} \Rightarrow \exists\ \beta \in H_1(\overline{\hat{X}}^k)$ com $g_{\#}(\beta) = \alpha$ logo existe $\gamma \in H_1(\hat{X}^k)$ com $a(\gamma) = \beta$ e assim temos $a_{\#}(g(\gamma)) = \alpha$, pela comutatividade do diagrama, assim $a_{\#}$ é um isomorfismo e pelo Lema da "cobra" I.3.1 a sequência abaixo é exata:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\bar{\hat{X}}_i^k) \xrightarrow{f_{\#}} H_1(\bar{\hat{X}}^k) \xrightarrow{g_{\#}} k(\mu-1)Z \longrightarrow 0 .$$

E assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mu Z \arrow[r] \arrow[d] & \mu Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\hat{X}_i^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\hat{X}^k) \arrow[r] \arrow[d] & k(\mu-1)Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_1(\bar{\hat{X}}_i^k) \arrow[r] \arrow[d] & H_1(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r] \arrow[d] & k(\mu-1)Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

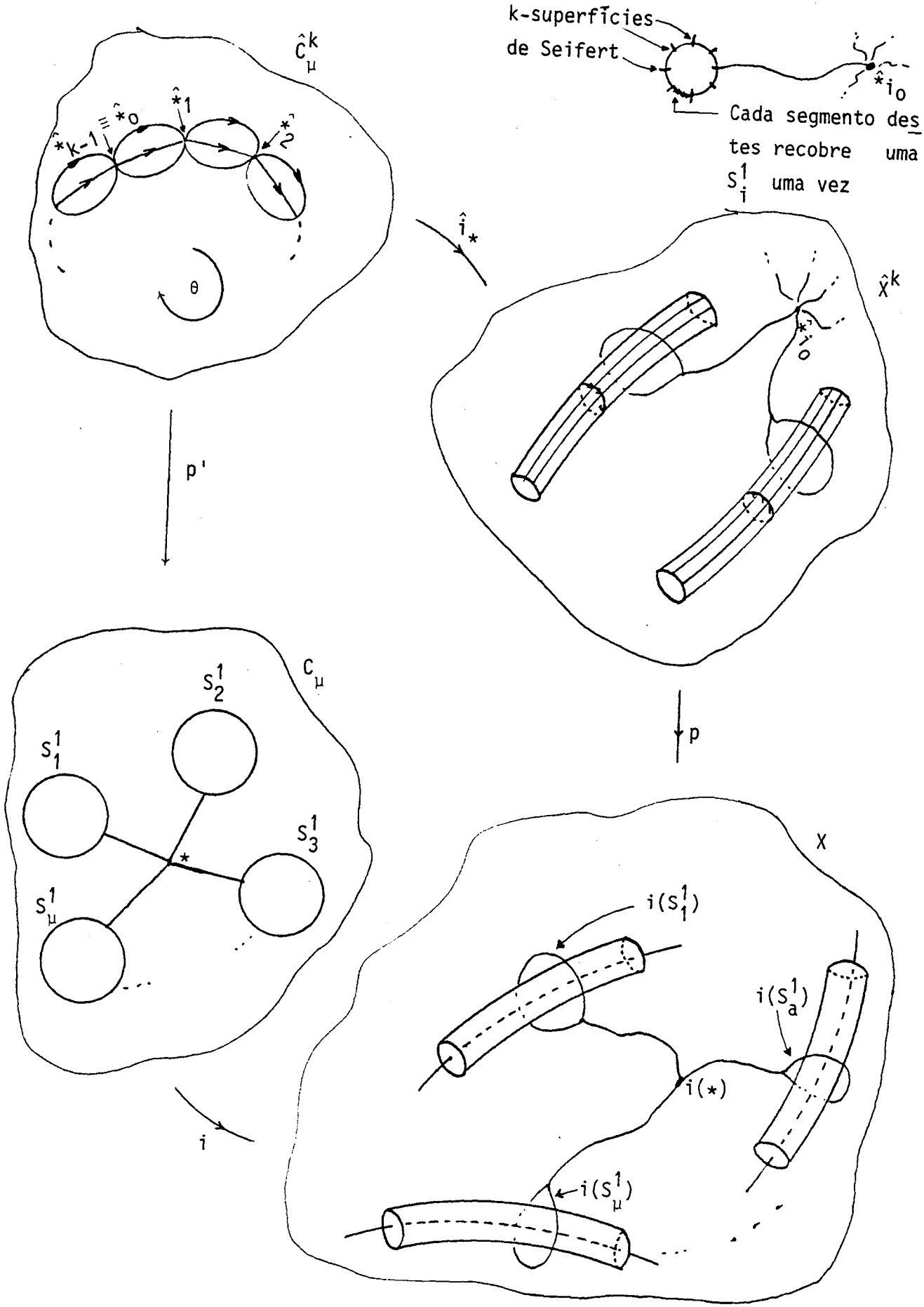
A primeira coluna (à esquerda) é uma soma direta de μ sequências que cindem, conforme II.4, e assim a coluna do meio que é uma sequência exata, conforme o que acabamos de provar, cinde.

Como no Lema III.2.1 , temos a aplicação

$$i : C_\mu \longrightarrow X \quad \text{tal que} \quad i_* : \pi_1(C_\mu) \longrightarrow \pi_1(X)$$

é um isomorfismo, logo $H_1(\hat{C}_\mu^k) \xrightarrow{\hat{i}_*} H_1(\hat{M}^k) \approx H_1(\hat{X}^k)$ é um isomorfismo onde $M = I_i$.

$\pi_1(\hat{C}_\mu^k)$ é um grupo livre com $k.\mu$ geradores , escolhendo um ponto base no levantamento $\hat{*}$ do ponto $*$ do Wedge C_μ e escolhendo μ geradores de $\pi_1(\hat{C}_\mu^k)$ que são exatamente os dados pelas sequências de "segmentos" que recobrem cada gerador de C_μ . No desenho a seguir esquematizado, são caminhos que dão a volta acompanhando θ .


k-superfícies
de Seifert
Cada segmento destes recobre uma S^1_i uma vez
$\hat{C}^k_\mu$
$\hat{*}_{k-1} \equiv \hat{*}_0$
$\hat{*}_1$
$\hat{*}_2$
θ
$\hat{i}_*$
$\hat{X}^k$
$\hat{*}_0$
$\hat{*}_{i_0}$
p'
p
C_μ
S^1_1
S^1_2
S^1_3
S^1_μ
*
i
X
$i(S^1_1)$
$i(S^1_a)$
$i(*)$
$i(S^1_\mu)$

Assim fixado $\hat{*}_0$ como ponto base de $\hat{C}^k_\mu$ temos um outro Wedge de círculos C'_μ em $\hat{C}^k_\mu$ tal que cada círculo S^1_i de C'_μ reveste k-vezes um dos círculos de C_μ. Na construção de $\bar{\hat{X}}^k$, ao colarmos os μ "toros" $S^n \times D^2$, temos que cada S^1_i, assim descrito, torna-se um bordo de um disco D^2, logo anulam-se em $H_1(\bar{\hat{X}}^k)$.

Desse modo, ao abelianizarmos $\pi_1(\hat{C}^k_\mu) \approx \pi_1(\hat{M}^k)$, este subgrupo livre com μ geradores de $\pi_1(\hat{M}^k)$ será um somando direto de $H_1(\hat{X}^k)$ que é abeliano livre com $\mu.k$ geradores, exatamente a imagem da inclusão $\mu Z \longrightarrow H_1(\hat{X}^k)$ obtida na sequência exata

$$0 \longrightarrow \mu Z \longrightarrow H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow 0 .$$

Assim, esta sequência cinde, e i) está provada.

Se $2 \leq i \leq n$, na sequência do par $(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k)$,

$$\underset{\mu Z}{\underset{\wr\wr}{H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k)}} \xrightarrow{\partial} H_{n+1}(\hat{X}^k) \longrightarrow H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow \underset{0}{\underset{\wr\wr}{H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k)}} \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} H_n(\hat{X}^k) \longrightarrow H_n(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow \underset{0}{\underset{\wr\wr}{H_n(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k)}} \rightarrow \dots \rightarrow \underset{0}{\underset{\wr\wr}{H_3(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k)}} \xrightarrow{\partial}$$

$$\xrightarrow{\partial} H_2(\hat{X}^k) \longrightarrow H_2(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow \underset{\mu Z}{\underset{\wr\wr}{H_2(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k)}} \xrightarrow{\partial} H_1(\hat{X}^k) \longrightarrow H_1(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow \dots$$

E do Lema IV.1,

$$H_i(\bar{\hat{X}}^k,\hat{X}^k) = \begin{cases} \mu Z , & i = 2 , \quad n + 2 \\ 0 & \text{nas outras dimensões} \end{cases}$$

temos $H_i(\hat{X}^k) \approx H_i(\hat{X}^k)$, $3 \leq i \leq n$, além disso , pelo Lema IV.1 , a aplicação $\partial : H_2(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \longrightarrow H_1(\hat{X}^k)$ é um monomorfismo, logo $H_2(\bar{\hat{X}}^k) \approx H_2(\hat{X}^k)$ e ii) está provado.

$\bar{\hat{X}}^k$ é uma variedade orientável (n+2)-dimensional, desse modo $H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k) \approx Z$ tem como gerador a classe da soma de todas as células de dimensão $n+2$, pelo lema anterior, $H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \approx \mu Z$, temos assim o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\approx"] & H_{n+2}(\bar{\hat{X}}^k, \hat{X}^k) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\approx"] & H_{n+1}(\hat{X}^k) \arrow[r, "i_*"] & H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k) \arrow[r] & 0 \\
& Z \arrow[r, "(1,1 \ldots 1)"] & \mu Z \approx Z \oplus (\mu-1)Z \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

donde temos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow (\mu-1)Z \xrightarrow{\partial} H_{n+1}(\hat{X}^k) \xrightarrow{i_*} H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Suponhamos que L é completamente esplitável, então

$$H_{n+1}(\hat{X}^k) \approx \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_{n+1}(\hat{X}_i^k) \oplus k(\mu-1)Z$$

onde, ao decompormos nosso espaço num produto Wedge, como no capítulo anterior, o somando direto $k(\mu-1)Z$ de $H_{n+1}(\hat{X}^k)$ é gerado pelo levantamento do Wedge $\bigvee_{r=1}^{\mu-1} S_r^{n+1}$ em $\hat{X}^k$. Além disso, como cada componente do link está no "interior" de uma S_j^{n+1} , pela esplitabilidade de L , temos que o bordo de $\hat{X}_i^k$ é homologo a classe, $[\, S_{i,1}^{n+1} + S_{i,2}^{n+1} + \ldots + S_{i,k}^{n+1} \,]$, onde $S_{i,j}^{n+1}$ são os levantamentos da esfera $S_i^{n+1} \in \bigvee_{r=1}^{\mu-1} S_r^{n+1}$; cada $S_{i,j}^{n+1}$ na j-ésima folha de $\hat{X}^k$, além disso, sendo incluídos em $\bar{\hat{X}}^k$, colamos $S^n \times D^2$ à cada componente do bordo, como na construção de $\bar{\hat{X}}^k$ no caso de Nõ, ou seja, $i_*([S_{i,1}^{n+1} + S_{i,2}^{n+1} + \ldots + S_{i,k}^{n+1}]) = 0$

em $H_{n+1}(\bar{\hat{X}}^k)$, logo estas classes estão na $\operatorname{Im}\partial$ e representam $(\mu-1)Z$ do somando direto $k(\mu-1)Z$ de $H_{n+1}(\hat{X}^k)$, donde a sequência (1) cinde. No caso de L ser $(n+1)$-simples, sabemos que existe uma aplicação $f: C_{\mu,n} \to X$ que induz isomorfismos nos π_i , $1 \leq i \leq n+1$ e temos $H_{n+1}(\hat{C}^k_{\mu,n}) \approx H_{n+1}(\hat{X}^k) \approx k(\mu-1)Z$, segundo o Lema III.2.2 .

Agora, a soma $S^{n+1}_{i,1} + S^{n+1}_{i,2} + \ldots + S^{n+1}_{i,k}$ é de geradores livres em $\hat{C}^k_{\mu,n}$, para cada $1 \leq i \leq \mu-1$, logo $\operatorname{Im}\partial$ é um $(\mu-1)Z$ somando direto de $H_{n+1}(\hat{X}^k)$ que é livre e assim a sequência (1) cinde.

Este teorema generaliza, portanto, para o caso de links o resultado de Crowell feito para o caso de Nós.

B I B L I O G R A F I A

[1] Bourbaki, N. - Algēbre Commutative. Elements de Mathēmatique, fascicule XXVII , Hermann, #1290, Hermann Paris; 1961.

[2] Cowsik, R.C. and Swarup, C.A. - "A Remark on infinite cyclic covers" Journal of pure and applied algebra, Vol.11, pp. 131-138 ; 1977.

[3] Crowell, R.H. - " H_2 of subgroups of knot groups" Illinois J. Math., Vol.14, pp. 665-673 ; 1970.

[4] Fox, R.H. - "The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one" Ann. of Math. (1) , Vol.71, pp. 187-196; 1960.

[5] Greenberg, M. - Lectures on Algebraic Topology. Mathematics lecture not sēries. N.A. Benjamin, I.N.C. ; 1976.

[6] Levine, J. - "Knot Modules $I^{(1)}$". Transactions of the American Mathematical Society, Vol.229 ; 1977.

[7] Levine, J. - "Polynomial invariants of knots of codimension two". Ann. of Math. (2), Vol.84, pp. 537-554 , 1966.

[8] Levine, J. - Unknotting Spheres in codimension two. Topology Vol.4 , pp. 9-16 .

[9] Manzoli Neto, O. - "Total Linking Number Modules" P.h. D. Thesis, Brandeis University, U.S.A. ; 1982.

[10] Marar, W.L. - "Espaços de Revestimentos e Aplicações ā Teoria de Nōs". Tese de Mestrado, ICMSC-USP; 1983.

[11] Massey, W. - Algebraic Topology (An Introduction). G.T.M. #56 , Springer-Verlag ; 1977.

[12] Milnor, J.W. - "Infinite Cyclic Coverings". Conference on the topology of manifolds, Prindle Weber and Schmidt, Boston, Mass., pp. 115-133, MR 39, #3497 , 1968.

[13] Rolfsen, D. - Knots and Links. Mathematics lecture not sēries #7 , Publish or perish, I.N.C. , 1976.

[14] Shinohara, Y. and Summers, D.W. - "Homology Invariants of cyclic covering with application to links". Transactions of the American Mathematical Society, Vol.163 ; 1972.

[15] Saab, M.R. - "Mōdulos de ϕ_r-Links de Bordo de Codimensão 2 " . Tese de Livre-Docēncia, ICMSC-USP, 1984.

[16] Spanaier, E. - Algebraic Topology Mc Graw-Hill. Sēries in Higher Math., Mc Graw-Hill, 1966.

[17] Vick, J.M. - Homology Theory (An introduction to algebraic topology) Pure and Applied Mathematics #53 . Academic Press, 1973.

[18] Whitehead, G.W. - Elements of homotopy theory , G.T.M. , #61 , Springer-Verlag, 1978.