Resultados rigorosos para o espectro de
partículas de modelos de cromodinâmica quântica
na rede, no regime de acoplamento forte

José Carlos Valencia Alvites

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

José Carlos Valencia Alvites

**Resultados rigorosos para o espectro de partículas de
modelos de cromodinâmica quântica na rede, no regime de
acoplamento forte**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como
parte dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE
DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga

**USP – São Carlos
Janeiro de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V152r Valencia Alvites, José Carlos
Resultados rigorosos para o espectro de
partículas de modelos de cromodinâmica quântica na
rede, no regime de acoplamento forte / José Carlos
Valencia Alvites; orientador Paulo Afonso Faria da
Veiga . -- São Carlos, 2016.
64 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Física-Matemática. 2. Análise Aplicada. 3.
Análise Espectral. 4. QCD. 5. Espectro de Energia-
Momento. I. , Paulo Afonso Faria da Veiga, orient.
II. Título.

José Carlos Valencia Alvites

**Rigorous results for the particle spectrum for lattice
quantum chromodynamics models in the strong coupling
regime**

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Doctorate Program in Mathematics.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga

**USP – São Carlos
January 2016**

*Aos meus pais, Luisa e
Rosalio.*

Agradecimentos

Meus mais sinceros agradecimentos, sem dúvida, são dirigidos aos meus pais, Luisa e Rosalio. Eu os amo acima de tudo. Eles sempre acreditaram em mim, apesar dos meus defeitos. Pelo apoio, muito obrigado, mamá e papá.

Ao Professor Paulo da Veiga, meu orientador, que me apoiou na minha estadia em São Carlos, pela orientação, amizade e por sempre estar disposto a me ajudar no trabalho. Este trabalho é, em grande parte, o produto de suas ideias e sugestões. Professor, muito obrigado a você, por seu apoio, e a sua família, que foi muito gentil comigo.

Ao Professor Michael O'Carroll, pelas discussões sobre o tema central desta tese. Em grande medida, estas discussões ajudaram no desenvolvimento final deste trabalho.

Ao Professor Edgar Vera, que foi meu orientador na graduação, pelo incentivo para seguir nos estudos de pós-graduação e continuar na vida acadêmica.

Ao ICMC, por me dar a oportunidade.

Aos professores do ICMC, pela importante formação acadêmica.

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo), pelo apoio financeiro, processo nº 2012/00156-8, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho. Muito obrigado pela bolsa de estudos.

Resumo

Nessa tese, usando métodos rigorosos, determinamos a parte inicial do espectro de energia-momento para o modelo de Cromodinâmica Quântica (QCD) na rede, em dimensão $3 + 1$, com tempo imaginário e no regime de acoplamento forte. Consideramos o modelo de QCD com a ação de Wilson, três sabores de quarks e matrizes de spin de Dirac 4×4 .

Sob estas condições, reconsideramos a questão da demonstração da existência de bárions, no contexto do Eightfold Way de Gell-Mann e Ne'eman. Complementando trabalhos anteriores onde a existência dos octetos de bárions foi demonstrada, aqui demonstramos a existência dos decupletos de bárions. Estas partículas são detectadas através de curvas de dispersão isoladas no espectro de energia-momento do modelo, considerando-se o subespaço $\mathcal{H}_o$, do espaço de Hilbert (quântico) físico $\mathcal{H}$, com vetores com um número ímpar de férmions. Além disso, obtemos propriedades de suavidade destas curvas, assim como propriedade analíticas da medida espectral da correlação de dois bárions. Estes bárions são demonstrados ser os únicos estados espectrais no modelo, no subespaço ímpar, até o limiar de energia próximo do estado méson-bárion. Com os resultados obtidos nesta tese, podemos subir no espectro e validar, para o modelo completo, resultados espectrais envolvendo estados ligados de dois-bárion obtidos anteriormente na chamada aproximação escada (dominante).

Palavras-Chave: 1. Física-Matemática. 2. Análise Aplicada. 3. Análise Espectral. 4. QCD. 5. Espectro de Energia-Momento.

Abstract

In this thesis, using rigorous methods, we determine the low-lying energy-momentum spectrum of a lattice Quantum Chromodynamics model (QCD) in dimension $3 + 1$, imaginary time and in the strong coupling regime. We consider a QCD model with the Wilson action, three quark flavors and 4×4 Dirac spin matrices.

Under these conditions, we reanalyze the question about the existence of baryon particles in the context of the Gell-Mann and Ne'eman Eightfold Way. Completing previous works, where the octet baryons were shown to exist, here we prove the existence of the decuplet baryons detected by showing the existence of isolated dispersion curves in the energy-momentum spectrum restricted to the subspace of the physical quantum-mechanical Hilbert $\mathcal{H}$ of the model, associated with states with an odd number of fermions. Besides, we obtain some smoothness properties verified by these curves, as well as analytical properties of the spectral measure for the two-baryon correlations. Also, the octet and the decuplet baryons are shown to be the only states in the odd subspace up to near the energy threshold of the meson-baryon bound state. Using the results obtained here, we can go up in the spectrum and validate some previously obtained results on the two-baryon bound state spectrum beyond the so called ladder approximation, for the complete model.

Keywords: 1. Mathematical Physics. 2. Applied Analysis. 3. Spectral Analysis. 4. QCD. 5. Energy-Momentum Spectrum.

Índice

1	Introdução	1
2	Cromodinâmica Quântica na Rede	9
2.1	Espaço-Tempo Discreto, o Modelo e Funções de Correlação	9
2.2	Quantização de Osterwalder-Schrader	12
2.3	Simetrias Internas, Espaço-Temporais e de Gauge	15
3	Campos Bariônicos e Funções de Correlação de Dois Bárions	19
3.1	Bases de Spin Individuais	19
3.2	A Função de Dois-Bárions	22
4	Existência de Bárions	29
4.1	Simetrias, Relações de Ortogonalidade e Outras Propriedades da Função de Dois-Pontos	29
4.2	Existência do Decuplete Bariônico	37
4.3	Propriedades de Suavidade	46
4.4	Propriedades da Medida Espectral do Decuplete Bariônico	49
5	Considerações Finais	55
A	Apêndice: Sobre o Teorema de Preparação de Weierstrass	57

Algumas Notações

$\mathbb{N}$	O conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}$	O conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	O conjunto dos números complexos.
$C^\omega(U)$	O conjunto das funções analíticas reais em $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
$H(\Omega)$	O conjunto das funções analíticas (holomorfas) em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
$\mathcal{H}$	Espaço de Hilbert dos estados quânticos físicos.
$B(z; R)$	Disco aberto em $\mathbb{C}$, com centro em z e raio $R > 0$.
$\bar{B}(z; R)$	Correspondente disco fechado em $\mathbb{C}$.
$B(a_1; r_1) \times \cdots \times B(a_n; r_n)$	Poli-disco aberto com centro em
$\bar{B}(a_1; r_1) \times \cdots \times \bar{B}(a_n; r_n)$	$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ e poli-raio $r_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$).
$\mathbb{Z}_0^{d+1}$	Correspondente poli-disco fechado em $\mathbb{C}^n$.
$x = (x^0, \vec{x})$	Rede espaço-temporal de dimensão $d + 1$.
x^0	Ponto da rede espaço-temporal.
$\vec{x}$	Coordenada temporal de x .
$p = (p^0, \vec{p})$	Vetor das coordenadas espaciais de x .
$\psi_{a\alpha f}(x), \bar{\psi}_{a\alpha f}(x)$	Variável dual, por transformação de Fourier na rede, de um ponto
$SU(n)$	$x = (x^0, \vec{x})$ da rede espaço-temporal.
g	Campos fermiônicos básicos em x , com índices
$\mathcal{S}(\psi, \bar{\psi}, g)$	$a = 1, 2, 3$ (cor), $\alpha = 1, 2, 3, 4$ (spin) e $f = 1, 2, 3$ (sabor).
$\langle F \rangle$	Grupo unitário especial de ordem n .
$\mathcal{Z}$	Campo de calibre (gauge), elemento de $SU(3)$, associado aos elos da rede.
$G(x)$	A ação de Wilson, funcional dos campos básicos.
$\Gamma(x)$	A média estatística ou correlação normalizada do funcional
$\tilde{G}(p)$ e $\tilde{\Gamma}(p)$	$F(\psi, \bar{\psi}, g)$.
TFIA	Normalização das correlações ou função de partição.
TPW	A matrix de correlação normalizada de dois bárions.
	A inversa por convolução da matriz $G(x)$.
	Transformadas de Fourier de $G(x)$ e $\Gamma(x)$, respectivamente.
	Abreviação para o Teorema da Função Implícita Analítica.
	Abreviação para o Teorema da Preparação de Weierstrass.

Introdução

A determinação das propriedades espectrais, as partículas e os estados ligados de em modelos de teoria quântica de campos é um dos problemas centrais da Física Teórica. Nessa tese, consideramos a formulação de teoria de campos com tempo imaginário pois esta formulação é matematicamente bem definida. Além disso, nesta formulação, nós podemos associar produtos internos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ subjacente, de estados físicos da mecânica quântica, com integrais funcionais sobre o espaço das variáveis (processos) aleatórios dos campos, as quais são meras médias estatísticas clássicas. Esta relação, é expressa pelo estabelecimento da denominada Fórmula de Feynman-Kac, é de grande importância, como será visto durante o desenvolvimento do trabalho presente.

Usando estes ingredientes, é possível obter rigorosamente ao menos a parte inicial do espectro de energia-momento do modelo. Aqui, nós obtemos de maneira matematicamente rigorosa o espectro de um bárion no modelo de Cromodinâmica Quântica (QCD) na rede, definido usando a ação de Wilson, no regime de acoplamento forte, isto é, considerando o domínio $0 < \beta \ll \kappa \ll 1$, onde β é o parâmetro de plaqueta (acoplamento *gauge* puro) e κ é o parâmetro de hopping (acoplamento entre férmions e gauge no termo covariante de Dirac da ação de Wilson).

No regime de acoplamento forte, tomando inicialmente o modelo numa rede com volume finito, usando métodos de expansão em polímeros, é provado em [1] que o limite de volume infinito (limite Termodinâmico) existe. Neste limite, as funções de correlação são funções analíticas conjuntas dos parâmetros κ e β complexos, num domínio onde $|\kappa|$ e $|\beta|$ são suficientemente pequenos [2], e apresentam decaimento exponencial em árvore.

Neste contexto, depois de demonstrar a existência de bárions e subindo no espectro, em [3], considerando o modelo simplificado de QCD na rede com dimensão $2 + 1$, com a

ação de Wilson, no regime de acoplamento forte, mas com apenas dois sabores de quarks e matrizes spin de Pauli 2×2 , resultados espectrais para o espectro de energia-momento foram derivados para obter a existência de estados ligados de dois-bárions, na aproximação dominante de escada (*ladder*), com $\kappa > 0$ e $\beta = 0$. Em [4], estes resultados espectrais foram rigorosamente validados além da aproximação de escada, sem nenhuma aproximação, para o modelo completo. Além disso, os métodos analíticos lá empregados também conduzem a uma prova da analiticidade das energias de ligação destes estados ligados de dois bárions em um disco, em torno de $\kappa = 0$, para $\kappa \in \mathbb{C}$ e $|\kappa|$ suficientemente pequeno.

Usando a analiticidade, nos parâmetros κ e β , no limite de volume infinito, que emerge das expansões em polímeros [2], assim como o regime de acoplamento forte $0 < \beta \ll \kappa \ll 1$, o último resultado [4] pode ser estendido a partir do caso $\beta = 0$ para um disco suficientemente pequeno para $\beta \in \mathbb{C}$, para obter analiticidade conjunta nos dois parâmetros de acoplamento κ e β num poli-disco de raio pequeno centrado na origem.

Para $\beta = 0$, o método utilizado em [4] depende de um conhecimento detalhado do espectro de um bárion e das propriedades de suavidade (analiticidade, caso possível) da curva de dispersão, correspondente. O conhecimento detalhado do espectro está atrelado, via a Fórmula de Feynman-Kac e o uso de representações espectrais para os operadores de energia e momento em $\mathcal{H}$, a um conhecimento preciso da estrutura analítica das transformadas de Fourier de algumas correlações, para energias p^0 imaginárias.

O espectro associado às partículas bariônicas corresponde a singularidades da transformada de Fourier da correlação de dois bárions para energias da ordem da massa assintótica de um bárion que é da ordem de $i(-3 \ln \kappa)$. Este espectro de um bárion emerge de uma adaptação para a rede do método de desacoplamento em hiperplanos, proposto por Spencer em [5, 6] e, no caso do modelo analisado em [4], do uso do Teorema da Função Implícita Analítica (TFIA) [7]. O TFIA é usado para resolver uma equação implícita que determina a curva de dispersão que define a relação energia e momento da partícula. Um ponto delicado é de mostrar que estas curvas são curvas *isoladas* no espectro de energia-momento, o que é imprescindível para definir uma partícula.

A título de observação, enfatizamos que se considerássemos uma partícula relativística se movendo livremente no espaço-tempo contínuo, seria suficiente determinar o espectro de energia-momento com momento nulo, espectro de repouso ou massa m da partícula, e depois fazer um “boost” de Lorentz para obter sua curva de dispersão $w_c(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ com momento $\vec{p} \in \mathbb{R}^d$, onde d é a dimensão do espaço.

O espectro de dois bárions ligados advém de singularidades em p^0 com valor ligeiramente menor (duas massas menos a energia atrativa de ligação) que o limiar de dois bárions livres $i(-6 \ln \kappa)$ e sua análise é feita usando uma adaptação para a rede das consagradas equações de Bethe-Salpeter, que são no contínuo complicadas equações integro-diferenciais.

Agora, retornando ao nosso contexto, escrevemos $x = (x^0, \vec{x})$ para denotar as coordenadas de um ponto na rede $\mathbb{Z}_0^4 = (\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^3$. Por $G(\kappa, x)$, denotaremos o operador matricial auto-adjunto da correlação de dois-bárions, invariante por translações na rede, e, também,

consideraremos a sua transformada de Fourier $\tilde{G}(\kappa, p)$ na rede, definida em termos das variáveis duais $p = (p^0, \vec{p})$, com energia $p^0 \in [-1, 1]$ e $\vec{p} \in (-\pi, \pi]^3$ representam pontos espectrais dos operadores de energia P^0 e de momento espacial $\vec{P}$.

A existência de partículas bariônicas está associada à existência de curvas de dispersão isoladas no subespaço $\mathcal{H}_o$ do espaço de Hilbert físico $\mathcal{H}$ dos estados com um número ímpar de férmions (e antiférmions). Com isso, usando ferramentas da análise complexa e representações espectrais, é mostrado que as curvas de dispersão são singularidades complexas da extensão meromorfa da transformada de Fourier $\tilde{G}(\kappa, p)$ da função de correlação $G(\kappa, x)$ (Teorema 3.15). Seguindo os resultados já obtidos por P.A. Faria da Veiga e M. O'Carroll nas Refs. [8, 9], para o caso do octeto bariônico, o método que desenvolveremos para a obtenção do espectro, difere do método tradicional utilizado em trabalhos anteriores. Por exemplo, em [8] e [4]), as propriedades de analiticidade necessárias são verificadas e o método está baseado na aplicação do TFIA.

Aqui, as propriedades de analiticidades não estão presentes e agora aplicaremos um teorema mais geral que é o consagrado de Teorema de Preparação de Weierstrass (TPW) [10, 11, 12, 13]. O uso deste Teorema em problemas analíticos de Física-Matemática (e em Análise, em geral), está longe de ser frequente. Ao contrário, ele é uma ferramenta corriqueira em Geometria Algébrica e no campo da Teoria das Singularidades Diferenciáveis, com generalizações, sendo a de Malgrange [14], para funções diferenciáveis, a mais conhecida. Comparado ao TFIA, o TPW nos fornece uma informação mais detalhada em quanto aos zeros de uma função analítica de duas ou mais variáveis (que aqui são as singularidades de $\tilde{G}(p)$ associadas às curvas de dispersão dos bárions). Esta informação é apenas local. Porém, usando o fato de que estamos trabalhando no regime de acoplamento forte, e outras propriedades adicionais, conseguimos provar a unicidade das curvas de dispersão obtidas.

Fazemos agora uma descrição mais detalhada desta tese. Para $\beta = 0$, conforme descrito em [9], consideramos o caso do setor bariônico em dimensão $3 + 1$, com três sabores de quark e matrizes de spin de Dirac 4×4 , onde cada quark e antiquark tem quatro graus de liberdade de spin, dois descrevendo partículas e dois descrevendo anti-partículas. Eliminando a dependência linear a partir da lista original de 216 campos compostos de três quarks, associados às partículas de bárions, construídos com uma combinação antissimétrica de cor de três quarks ($216 = (3 \text{ sabores} \times 2 \text{ spins})^3$), podemos verificar que existem apenas 56 estados independentes de bárions. Usando os subgrupos de simetria global $U(1)$ (hipercarga) e $SU(2)$ (isospin) do grupo de simetria de sabor $SU(3)_f$, os 56 bárions podem ser classificados em um decuplete bariônico de spin total $3/2$, e um octeto bariônico de spin total $1/2$. O subespaço vetorial de um bárion $\mathcal{B}$ do espaço de Hilbert subjacente $\mathcal{H}$ admite uma decomposição em soma direta ortogonal em dez subespaços de dimensão quatro $\mathcal{D}$, cada um correspondendo a um bárion de spin $3/2$ no decuplete, mais oito espaços de dimensão dois $\mathcal{O}$, cada um associado a um bárion de spin $1/2$ do octeto [9]. (Uma situação semelhante vale para os antibárions.)

Especificamente,

$$\mathcal{B} = \left(\bigoplus_{i=1}^{10} \mathcal{D}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^8 \mathcal{O}_i \right). \quad (1.1)$$

Então, se $\Gamma(\kappa, x)$ é a inversa por convolução da função matricial $G(\kappa, x)$, que fornece uma continuação meromorfa para a transformada de Fourier $\tilde{G}(\kappa, p)$ de $G(\kappa, x)$ (a continuação meromorfa é dada por $\tilde{\Gamma}^{-1}(\kappa, p)$), então $\tilde{\Gamma}(\kappa, p)$ é usada para obter as curvas de dispersão que, como foi dito acima e será provado abaixo, fornece as singularidades complexas de $\tilde{G}(p)$. Usando a fórmula da matriz inversa cof é o co-fator e t a transposta)

$$[\tilde{\Gamma}(\kappa, p)]^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{\Gamma}(\kappa, p)} \left[\text{cof} \left(\tilde{\Gamma}(\kappa, p) \right) \right]^t,$$

e usando a regularidade de Γ , concluímos que tais são os zeros de $\det \tilde{\Gamma}(p)$. Observe que a fórmula acima define explicitamente a extensão meromorfa de $\tilde{G}(\kappa, \vec{p})$ para p^0 complexo. Logo, como consequência da representação espectral que usaremos para $\tilde{G}(p^0, \vec{p})$, e do descrito acima, as curvas de dispersão $w(\kappa, \vec{p})$ são as soluções da equação implícita

$$\det \tilde{\Gamma}(\kappa, p^0 = iw(\kappa, \vec{p}), \vec{p}) = 0. \quad (1.2)$$

Assim, com a finalidade de obter as soluções da equação (1.2), mostramos que $\tilde{\Gamma}(p)$ tem uma decomposição compatível com (1.1) em blocos. Usando esta estrutura provamos que todos os blocos 2×2 associados ao octeto bariônico são diagonais, e portanto podemos usar, para os termos associados ao octeto em $\det \tilde{\Gamma}(p)$, o método baseado na aplicação do TFIA para obter as curvas de dispersão associadas.

Porém, para os blocos 4×4 temos uma soma direta de dois blocos idênticos 2×2 associados às partículas do decupletto bariônico com spin $\pm 3/2$ e $\pm 1/2$, respectivamente, observando que a transformação de inversão da terceira componente de spin é uma simetria do modelo. Desse modo, para o decupletto bariônico o método baseado no TFIA para resolver a equação implícita para as curvas de dispersão não pode ser aplicado. Estamos diante de um problema com espectro com multiplicidade. Cada um destes blocos é não diagonal, de fato, devido à estrutura não diagonal das matrizes 2×2 , aparecem raízes quadradas nas expressões dos autovalores correspondentes da matriz $\tilde{\Gamma}(p)$ e não temos a propriedade de analiticidade necessária para aplicar o TFIA.

Um dos problemas tratados nesta tese é o de transpor esta dificuldade e de resolver a questão da determinação das curvas de dispersão para os decupletos de bárions, demonstrando a existência destas partículas.

Algumas propriedades de suavidade destas curvas serão também demonstradas aqui, assim como limitações para a medida espectral associada. Estes resultados foram estabelecidos no artigo [15] e constituem a base para podermos estender resultados para o espectro de dois bárions obtidos na Ref. [16]), no caso de $3 + 1$ dimensões e matrizes de spin de Dirac, além da aproximação de escada.

Este é um objetivo do grupo de pesquisa para o futuro próximo, o qual deverá ser uma continuação natural desta tese.

Com o intuito de deixar mais clara a situação acima descrita e podemos ser um pouco mais precisos, os blocos associados ao octeto bariônico (spin 1/2) da função de dois-pontos são diagonais no índice de spin para todas as ordens em κ , e o método descrito em [8] pode ser usado. Para um bloco 4×4 associado ao decuplo (spin 3/2), rotulando as bases por $3/2, -3/2, 1/2$ e $-1/2$ ou, simplesmente, 1, 2, 3 e 4, respectivamente, tomando $\vec{p} \in (-\pi, \pi]^3$, $0 < \kappa \ll 1$ e usando as propriedades de simetria descritas em [8], a função de correlação matricial $G(\kappa, x)$ tem a estrutura

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & a & \bar{d} & -\bar{c} \\ \bar{c} & d & b & 0 \\ \bar{d} & -c & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

aqui a barra denota a conjugação complexa. Logo, temos

$$\det \mathcal{M} = (\mu_+ \mu_-)^2,$$

onde $\mu_{\pm}$ são os auto-valores de multiplicidade dois

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(b + a) \pm \sqrt{(b - a)^2 + 4(|c|^2 + |d|^2)} \right].$$

Assim, a transformada de Fourier $\tilde{G}(p)$ herda a mesma estrutura de $G(\kappa, x)$. Então, usando a fórmula de inversão para matrizes, segue que $\tilde{\Gamma}(\kappa, p)$ também tem a mesma estrutura. Devido à analiticidade de $\tilde{\Gamma}(\kappa, p)$ numa p^0 -faixa maior em comparação à $\tilde{G}(\kappa, p)$, nós usamos $[\tilde{\Gamma}(\kappa, p)]^{-1}$ para definir uma extensão meromorfa de $\tilde{G}(\kappa, p)$. A partir do argumento dado acima, $\tilde{G}(\kappa, p)$ é dada por

$$\tilde{G}(\kappa, p) \equiv \tilde{\Gamma}^{-1}(\kappa, p) = \frac{1}{\Phi} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, p) I_2 & \begin{pmatrix} -\tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, p) & -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, p) \\ -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, p) & \tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, p) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, p) & -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, p) \\ -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, p) & \tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, p) \end{pmatrix} & \tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, p) I_2 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

onde

$$\Phi^2 = \det \tilde{\Gamma}(\kappa, p).$$

Para $p^0 = i\chi = iw(\kappa, \vec{p})$ e $\vec{p} = 0$, verifica-se que, o $\tilde{G}_{ss'}(p^0 = i\chi, \vec{p} = 0)$ e $\tilde{\Gamma}_{ss'}(p^0 = i\chi, \vec{p} = 0)$ são diagonais. Em [8, 9] todo o espectro de massa do bárion é facilmente determinada, com exatidão, usando o TFIA.

Para $\vec{p} \neq \vec{0}$, utilizando a discussão acima, para determinar as curvas de dispersão, precisamos resolver a equação

$$\det \tilde{\Gamma} = [\lambda_+ \lambda_-]^2 = 0, \quad (1.4)$$

onde os

$$\lambda_{\pm} \equiv \frac{1}{2} [\tilde{\Gamma}_{11} + \tilde{\Gamma}_{33}] \pm \sqrt{\frac{1}{4} [\tilde{\Gamma}_{11} - \tilde{\Gamma}_{33}]^2 + |\tilde{\Gamma}_{13}|^2 + |\tilde{\Gamma}_{14}|^2}, \quad (1.5)$$

são os autovalores do bloco 4×4 correspondente em $\tilde{\Gamma}(p)$, e as soluções correspondem aos zeros de λ_+ e λ_- , que acabam por ter multiplicidade dois.

Dentro do contexto dos resultados obtidos até agora, para $\vec{p} \neq 0$, vemos na Eq.(1.5) que, devido à presença das raízes quadradas na expressão de $\lambda_{\pm}$, não temos necessariamente analiticidade no parâmetro κ , uniformemente em $\vec{p}$. Agora, se

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p}) \equiv & \frac{1}{4} \left[\tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p}) - \tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p}) \right]^2 + |\tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p})|^2 \\ & + |\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p})|^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

e introduzimos a variável r , através da substituição $\chi = -3 \ln \kappa + r$, como será provado, a menor potência em κ que aparece na expansão da função $\mathcal{U}(\kappa, r, \vec{p}) \equiv \mathcal{U}(\kappa, p^0 = i(-3 \ln \kappa + r), \vec{p})$ é $\kappa^{n \geq 6}$. Apesar dos módulos ao quadrado aparecendo na Eq. (1.6), o fato de que $\mathcal{U}(\kappa, r, \vec{p})$ pode ser estendida a uma função analítica em conjunto em κ , r e $\vec{p}$ pode ser mostrado usando o seguinte argumento. Desde que os $\tilde{G}_{ss'}$ são funções analíticas na variável κ , concluímos que os $\tilde{\Gamma}_{ss'}$ também são funções analíticas na variável κ e depois de introduzir a variável r , esta é uma função analítica conjunta nas variáveis κ , r e as componentes de $\vec{p}$. Assim, eles admitem uma expansão de série de potência restrita a κ , r and $\vec{p}$ reais, com eventuais coeficientes complexos. Estas séries de potência são usadas para escrever uma série de potência para $\mathcal{U}$ com κ , r e $\vec{p}$ reais. Esta expansão em séries de potências fornece uma extensão analítica para κ e r complexos. Este argumento é usado nesta tese e é enunciado no apêndice, na Proposição **A.53**.

Ter analiticidade em (1.5) vai depender do primeiro coeficiente não nulo da expansão em série de potências em κ de $\mathcal{U}(\kappa, p^0 = iw(\kappa, \vec{p}), \vec{p})$, mas estes coeficientes vão depender do parâmetro $\vec{p}$ e poderia se anular para um conjunto dado de valores de $\vec{p}$. Dado que, com os cálculos realizados até agora, não podemos ter certeza de que a raiz quadrada é não nula, de modo que não necessariamente podemos aplicar o TFIA. Em vez disso, podemos usar o TPW e aplicá-lo à função $(\lambda_+(\kappa, r)\lambda_-(\kappa, r))$ na Eq. (1.4), pois esta função satisfaz as condições suficientes de analiticidade conjunta nos parâmetros κ e r , uniformemente em $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, para resolver a equação implícita

$$\lambda_+(\kappa, r(\kappa, \vec{p}), \vec{p})\lambda_-(\kappa, r(\kappa, \vec{p}), \vec{p}) = 0$$

e como consequência obter as soluções $w(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r(\kappa, \vec{p})$. Como veremos no decorrer deste trabalho, o TPW nos permite determinar duas soluções, as quais além satisfazem algum tipo de Hölder continuidade em κ e $\vec{p}$.

Tal como descrito em linhas anteriores, o passo fundamental para a obtenção dos resultados mais importantes deste trabalho vai ser a obtenção das condições para que o TPW possa ser aplicado de modo uniforme em relação ao parâmetro $\vec{p}$. Finalizamos esta introdução

dando a organização desta tese. No Capítulo 2, apresentamos o nosso modelo de QCD na rede, como o afirmado anteriormente, consideramos a formulação integral funcional, também descrevemos o processo matemático para a construção do espaço de Hilbert de estados físicos $\mathcal{H}$ e acabamos descrevendo as simetrias do modelo. No Capítulo 3, detalhamos na obtenção da função de correlação $G(x)$ e descrevemos o método utilizado para a obtenção das curvas de dispersão, aqui usamos representações espectrais de operadores convenientes. No Capítulo 4, damos os principais resultados desta tese, em princípio, utilizamos as ferramentas dadas nos capítulos anteriores para obter a estrutura em blocos descrito acima, continuamos com a determinação das curvas de dispersão do decuplo bariônico e finalizamos dando as consequências deste resultado.

Finalmente, para facilitar a leitura deste texto, é incluído um apêndice. Este apêndice descreve o TPW na suas versões para funções analíticas reais e holomorfas. Da versão real obtemos as fórmulas de recorrência que são aplicados para ter uma melhor informação das soluções que logo podem ser estendidas para variável complexa, e a versão complexa ajuda a ter informação com repeito aos domínios onde estão nossas soluções.

Como observação final, enfatizamos que, no texto que segue, usamos o termo função analítica (ou simplesmente analítica) indistintamente para função analítica real ou complexa a menos que seja necessário fazer a distinção.

Cromodinâmica Quântica na Rede

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados básicos e algumas definições a serem utilizados no decorrer do trabalho. Começamos introduzindo o nosso modelo de QCD na rede de dimensão $d + 1$, onde d é a dimensão espacial. Consideramos a formulação integral funcional da Teoria Quântica de Campos com tempo imaginário (Formulação Euclideana). Para nós $d = 3$. Contudo, afora o detalhe da dimensionalidade e dimensão das matrizes de spin, nesta seção, $d = 1, 2, 3, \dots$ pode ser tomado genérico.

2.1 Espaço-Tempo Discreto, o Modelo e Funções de Correlação

Para iniciar, vamos dar uma construção geral de uma álgebra de Grassmann que nos permitirá definir os campos fermiônicos ψ e $\bar{\psi}$. Consideremos uma rede cúbica finita Λ de dimensão $d + 1$, simétrica em relação ao eixo da coordenada 0, e com espaçamento de rede unitário:

$$\Lambda \subset \mathbb{Z}_0^{d+1} \equiv \left(\frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right) \times \mathbb{Z}^d.$$

Denotaremos por e^μ , $\mu = 0, 1, \dots, d$ o vetor unitário na μ -ésima direção. Agora, para cada $x = (x^0, \vec{x} \equiv (x^1, \dots, x^d)) \in \Lambda$ associamos um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial V_x , com

$$V_x = V_x^1 \oplus V_x^2 \quad \text{e} \quad \dim V_x^1 = \dim V_x^2 = s.$$

Para V_x^1 , tomamos uma base $\bar{\psi}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$, e para V_x^2 a base $\psi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$. Em geral, para modelos com graus de liberdade internos (como o sabor e a cor aqui presentes), temos que usar somas diretas de espaços

$$V_x^k = (V_x^k)_{\text{spin}} \otimes (V_x^k)_{\text{int}},$$

onde $(V_x^k)_{\text{int}}$ é o espaço vetorial associado a cada grau de liberdade interno. Assim, neste caso, tomamos como base para V_x^1 os vetores $\bar{\psi}_{a\alpha}(x)$, $\alpha = 1, \dots, s$ e $a = 1, \dots, N$ e procedemos de maneira análoga para V_x^2 . Finalmente, consideramos $\mathcal{A}_\Lambda$ a Álgebra de Grassmann (anti-comutativa) sobre $V_\Lambda = \bigoplus_{x \in \Lambda} V_x$. Ou seja, a álgebra gerada ao considerar o produto anti-comutativo a seguir sobre V_Λ . Primeiro, consideramos o produto definido nos campos básicos de modo que $\psi_{a\alpha}^2(x) = \bar{\psi}_{a\alpha}^2(x) = 0$ e $\bar{\psi}_{a_1\alpha_1}(x)\psi_{a_2\alpha_2}(y) = -\psi_{a_2\alpha_2}(y)\bar{\psi}_{a_1\alpha_1}(x)$ para quaisquer $x, y \in \Lambda$ e logo considerando associatividade estendemos o produto para monômios, e assim obtemos a álgebra de Grassmann $\mathcal{A}_\Lambda$.

Agora, prosseguimos dando a definição do modelo que será tratado nesta tese. A ação do nosso modelo de QCD é ação de Wilson:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\psi, \bar{\psi}, g)_\Lambda &:= \frac{\kappa}{2} \sum \bar{\psi}_{a\alpha_1 f}(x) \Gamma_{\alpha_1\alpha_2}^{\sigma e^\mu}(g_{x, x+\sigma e^\mu})_{ab} \psi_{b\alpha_2 f}(x + \sigma e^\mu) \\ &+ \sum \bar{\psi}_{a\alpha_1 f}(x) M_{\alpha_1\alpha_2} \psi_{a\alpha_2 f}(x) - \frac{1}{g_0^2} \sum_p \chi(g_p), \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde a soma é feita sobre os índices repetidos $\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, 3, 4$ (spin), $a = 1, 2, 3$ (cor), e $f = 1, 2, 3 \equiv u, d, s$ (isospin ou sabor), a primeira soma percorre sobre $x \in \Lambda \subset \mathbb{Z}_0^{d+1}$, $\sigma = \pm 1$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$. Aqui, estamos considerando $\mu = 0$ como a direção temporal.

Para cada elo orientado na rede $(x, x \pm e^\mu)$ existe uma matriz $U(g_{x, x \pm e^\mu}) \in \text{SU}(3)$ parametrizada pelo elemento do grupo de calibre (gauge) $g_{x, x \pm e^\mu}$ e que satisfaz a relação $U(g_{x, x+e^\mu})^{-1} = U(g_{x+e^\mu, x})$.

Para cada plaqueta orientada p (quadrados orientados constituídos de elos da rede e com perímetro 4) consideramos a variável $\chi(U(g_p))$ onde $U(g_p)$ é o produto orientado de matrizes de $\text{SU}(3)$ para cada elo orientado da plaqueta e χ é a parte real do traço. Por simplicidade, algumas vezes omitimos U de $U(g)$.

Referente aos parâmetros do modelo, tomamos a massa $m > 0$ dos férmions sem interação e $M \equiv M(m, \kappa) = (m + 2\kappa)I_4$ (I_n é a matriz identidade da ordem n). O acoplamento quark-gauge ou parâmetro de hopping é denotado por $\kappa > 0$ e descreve o acoplamento dos campos fermiônicos $\bar{\psi}$ e ψ com os campos de gauge g . Também, $g_0 > 0$ é o acoplamento de plaqueta ou de gauge puro (interação gauge-gauge). Além disso, temos as matrizes de spin $\Gamma^{\pm e^\nu} := -I_4 \pm \gamma^\nu$. Para $d = 3$, os γ^ν são as matrizes de Dirac 4×4 hermitianas, de traço nulo, quadrado unitário e que verificam a anti-comutação

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} \equiv \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2\delta_{ij},$$

com o delta de Kronecker, e são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^j \\ -i\sigma^j & 0 \end{pmatrix},$$

onde σ^j , $j = 1, 2, 3$, denota as matrizes 2×2 de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para $d = 2$, podemos tomar $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = \sigma^1$ e $\gamma^2 = \sigma^2$.

A função de partição do modelo é dada formalmente por

$$\mathcal{Z}_\Lambda = \int e^{-S_\Lambda(\psi, \bar{\psi}, g)} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g), \quad (2.2)$$

e para uma função $F(\bar{\psi}, \psi, g)$ as correlações normalizadas são denotadas por

$$\langle F \rangle_\Lambda = \frac{1}{\mathcal{Z}_\Lambda} \int F(\psi, \bar{\psi}, g) e^{-S_\Lambda(\psi, \bar{\psi}, g)} d\psi d\bar{\psi} d\mu(g). \quad (2.3)$$

Observação 2.1 . *O uso da rede deslocada (nos semi-inteiros) para a coordenada temporal tem origem técnica, evitando tempo zero. Com isso, no limite do contínuo cuja existência ainda não foi demonstrada (apenas no caso modelos com gauge puro, sem férmions), formalmente, os limites laterais das correlações de campos fermiônicos podem ser acomodados. Para mais detalhes, sugerimos consultar a Ref. [2].*

Nesta tese, trabalhamos no regime de acoplamento forte, i.e., consideramos o domínio de parâmetros satisfazendo $0 \leq \beta \equiv g_0^{-2} \ll \kappa \ll 1$, o qual favorece o termo de fermiônico de Dirac na ação de Wilson, com relação ao termo de plaqueta (puro gauge). Sem perda de generalidade, também, dado $\kappa > 0$, escolhemos m tal que $M = 1$ em (2.1).

Sob estas condições, a existência do limite termodinâmico (volume infinito) das correlações pode ser demonstrado e temos o seguinte resultado importante:

Teorema 2.2 (Limite Termodinâmico). *Para o regime de acoplamento forte com κ e $\beta \equiv g_0^{-2}$ suficientemente pequenos, as funções de correlação $\langle F \rangle_\Lambda$ existem no Limite Termodinâmico $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_0^{d+1}$, e são denotadas por $\langle F \rangle$. As funções de correlação truncadas apresentam decaimento em árvore. Além disso, as funções de correlação podem ser estendidas a funções analíticas nos parâmetros de acoplamento κ e β (ou em qualquer número finito destes, considerando-se somente um subconjunto do conjunto de elos da rede), nos discos $B(0; \kappa_{polym})$ e $B(0; \beta_{polym})$ respectivamente, com $0 < \kappa_{polym} \ll \beta_{polym} \ll 1$.*

Demonstração: A prova é feita usando o método de expansão em polímeros. Para maiores detalhes remetemos, por exemplo, às Refs. [2] e [1]. $\square$

Observação 2.3 . *Neste limite, no que segue nesta tese, nas equações (2.1), (2.2) e (2.3) vamos omitir o subscrito Λ .*

Continuamos explicando as medidas envolvidas em (2.2) e (2.3). A medida $d\mu(g)$ é o produto de medidas de Haar de $SU(3)$ normalizadas sobre elos não orientados (Ver [17]) e as integrais sobre os campos de Grassmann são integrais de Berezin (ver [18]). Para um polinômio nas variáveis de Grassmann com coeficientes dependendo das variáveis de calibre, a integral fermiônica é definida como o coeficiente do monômio de máximo grau, i.e. de $\prod_{u,\ell} \bar{\psi}_\ell(u) \psi_\ell(u)$, $\ell \equiv (a, \alpha, f)$. Nas equações (2.2) e (2.3), $d\psi d\bar{\psi}$ significa $\prod_{u,\ell} d\psi_\ell(u) d\bar{\psi}_\ell(u)$

tal que, com a normalização $\mathcal{N}_1 = \langle 1 \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\ell_1}(x) \bar{\psi}_{\ell_2}(y) \rangle &= (1/\mathcal{N}) \int \psi_{\ell_1}(x) \bar{\psi}_{\ell_2}(y) e^{-\sum_{u, \ell_3, \ell_4} \psi_{\ell_3}(u) O_{\ell_3 \ell_4} \bar{\psi}_{\ell_4}(u)} d\psi d\bar{\psi} \\ &= O_{\alpha_1 \alpha_2}^{-1} \delta_{a_1 a_2} \delta_{f_1 f_2} \delta(x - y), \end{aligned}$$

com um delta de Kronecker para as coordenadas espaço-temporais, e onde O é diagonal nos índices de cor e isospin.

Em nosso modelo, para $\kappa = 0$, temos $\langle \psi_{\ell_1}(x) \bar{\psi}_{\ell_2}(y) \rangle = \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_{a_1, a_2} \delta_{f_1, f_2} \delta(x - y)$, e a integral de monômios é dada pelo caso fermiônico do Teorema de Wick, a saber,

$$\langle \bar{\psi}_{\ell_1}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\ell_k}(x_k) \psi_{\ell'_1}(y_1) \dots \psi_{\ell'_k}(y_k) \rangle = \sum_{\{(x_i, \ell_i; y_j, \ell'_j) : i, j = 1, \dots, k\}} \prod_{\text{par } (x_k, \ell_i; y_l, \ell'_l)} \text{sign} \langle \bar{\psi}_{\ell_k}(x_k) \psi_{\ell'_l}(y_l) \rangle,$$

onde “sign” é o sinal determinado pelo número de anticomutações necessárias para realizar a permutação, por exemplo, de campo $\psi_{\ell'_2}(y_2)$ no monômio para trazê-lo à vizinhança imediata à direita de campo $\bar{\psi}_{\ell_1}(x_1)$ a quem ele contrair-se-á para resultar em $\langle \bar{\psi}_{\ell_1}(x_1) \psi_{\ell'_2}(y_2) \rangle$. Além disso, a integral é nula se o número de $\bar{\psi}$ e ψ são diferentes no integrando.

Finalmente, enfatizamos que os resultados são obtidos considerando $\beta \rightarrow 0$. Analiticidade em β nos permite preservar os resultados obtidos para $\beta = 0$ a $\beta > 0$ suficientemente pequeno.

2.2 Quantização de Osterwalder-Schrader

Nesta seção, daremos a construção do espaço de Hilbert físico $\mathcal{H}$ subjacente do modelo. Este espaço é constituído pelos vetores descrevendo os estados quânticos do sistema físico em consideração.

A construção de Osterwalder-Schrader que apresentaremos, juntamente com o estabelecimento das fórmulas do tipo Feynman-Kac neste capítulo, justificam o uso das integrais funcionais no espaço dos campos, como as descritas anteriormente, e validam o nosso interesse em ter iniciado a discussão por elas.

Para isso, consideremos a seguinte decomposição disjunta de $\mathbb{Z}_0^{d+1}$, como $\mathbb{Z}_0^{d+1} = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$, onde

$$\Lambda_+ = \{x \in \mathbb{Z}_0^{d+1} : x^0 > 0\}, \quad \Lambda_- = \{x \in \mathbb{Z}_0^{d+1} : x^0 < 0\}.$$

Como na seção anterior, definimos as álgebras de Grassmann $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ respectivamente e consideremos o operador anti-linear $\Theta : \mathcal{A}_{\pm} \rightarrow \mathcal{A}_{\mp}$, onde a ação de Θ em campos básicos é dada por

$$\begin{aligned} \Theta(\bar{\psi}_{a\alpha}(x^0, \vec{x})) &= (\gamma^0)_{\alpha\beta} \psi_{a\beta}(-x^0, \vec{x}), \\ \Theta(\psi_{a\alpha}(x^0, \vec{x})) &= \bar{\psi}_{a\beta}(-x^0, \vec{x}) (\gamma^0)_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

onde aqui estamos usando a convenção usual de soma sobre os índices repetidos, para A e B monômios, $\Theta(AB) = \Theta(B)\Theta(A)$; e para uma função dos campos de gauge $\Theta f(\{g_{xy}\}) = f^*(\{g_{(-x^0, \vec{x})(-y^0, \vec{y})}\})$, $x, y \in \mathbb{Z}_0^{d+1}$, onde $*$ significa conjugação complexa. Θ se estende por anti-linearidade para a álgebra dos campos de gauge e variáveis de Grassmann. Com as definições feitas até aqui, podemos enunciar o resultado mais importante desta seção.

Proposição 2.4 (Positividade de Osterwalder-Schrader). *Para $\kappa \geq 0$ e $\varphi \in \mathcal{A}_+$, temos*

$$\langle \varphi \Theta(\varphi) \rangle \geq 0.$$

Demonstração: Ver, por exemplo, a Ref. [19]. □

Como consequência desta proposição, podemos definir o seguinte conjunto 'nulo'

$$\mathcal{N} := \{\varphi \in \mathcal{A}_+ : \langle \varphi \Theta(\varphi) \rangle = 0\}.$$

Este é um subespaço linear de $\mathcal{A}_+$.

Consideremos

$$\frac{\mathcal{A}_+}{\mathcal{N}} = \{\hat{\varphi} \equiv \varphi + \mathcal{N} : \varphi \in \mathcal{A}_+\},$$

e definimos a forma bilinear b sobre $\mathcal{A}_+ \times \mathcal{A}_+$ como

$$b(\varphi_1, \varphi_2) := \langle \varphi_2 \Theta(\varphi_1) \rangle.$$

Então, pelo Proposição 2.4, a forma bilinear b define um produto interno sobre o espaço quociente $\frac{\mathcal{A}_+}{\mathcal{N}}$:

$$(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2) := b(\varphi_1, \varphi_2)$$

e nós temos o espaço pré-Hilbert $\left(\frac{\mathcal{A}_+}{\mathcal{N}}, (\cdot, \cdot)\right)$.

Como usual, partindo deste pré-espaço de Hilbert, podemos definir o nosso espaço de Hilbert quântico $\mathcal{H}$ como o completamento do conjunto $\frac{\mathcal{A}_+}{\mathcal{N}}$ pela métrica induzida por $(\cdot, \cdot)$, cuja extensão para $\mathcal{H}$ denotaremos por $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$.

A fim de distinguir vetores $\varphi \in \mathcal{A}_+$, da classe de equivalência associada $\hat{\varphi} \in \mathcal{H}$, usando o super-índice $\hat{\cdot} : \mathcal{A}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, a inclusão canônica $\hat{\varphi} = \varphi + \mathcal{N}$, podemos estender alguns operadores T agindo sobre $\mathcal{A}_+$ a operadores $\hat{T}$ agindo sobre $\mathcal{H}$. A definição de $\hat{T}$ é dada por

$$\hat{T}\hat{\varphi} := \widehat{T\varphi}, \tag{2.4}$$

como se expressa no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_+ & \xrightarrow{T} & \mathcal{A}_+ \\ \downarrow \hat{\cdot} & & \downarrow \hat{\cdot} \\ \mathcal{H} & \xrightarrow{\hat{T}} & \mathcal{H} \end{array} \tag{2.5}$$

Para que (2.4) e (2.5) estejam bem definidas, $\hat{T}$ deve estar definido sobre as classes de equivalência. Assim, exigimos que ($\mathcal{D}$ indica o domínio)

$$T(\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}.$$

Denotando por $T_0^{x^0}$ e $T_j^{x^j}$, $j = 1, \dots, d$, respectivamente, as translações das funções das variáveis de Grassmann e gauge por $x^0 \geq 0$ e pela j -ésima componente de $\vec{x} = (x^1, \dots, x^d) \in$

$\mathbb{Z}^d$, juntamente com a fórmula de produto de Lie-Trotter e integrais de Wiener, podemos estabelecer fórmulas de Feynman-Kac (F-K), a qual relaciona produtos internos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com integrais funcionais no espaço dos campos, que definem correlações estatísticas clássicas.

Teorema 2.5 (Fórmula de Feynman-Kac para $d = 3$). *Para A_1 e A_2 dependendo somente das coordenadas com $u^0 = 1/2$, temos*

$$\left(\hat{A}_1, \hat{T}_0^{x^0} \hat{T}_1^{x^1} \hat{T}_2^{x^2} \hat{T}_3^{x^3} \hat{A}_2 \right)_{\mathcal{H}} = \langle (T_0^{x^0} T_1^{x^1} T_2^{x^2} T_3^{x^3} A_2) \Theta(A_1) \rangle.$$

Demonstração: Ver, por exemplo, a referência clássica de [20]. □

Observação 2.6 . *Na sequência desta tese, não vamos distinguir entre variáveis aleatórias e suas classes de equivalência associadas, ou seja, não vamos levar em conta o sobrescrito $\hat{\cdot}$.*

Continuamos enunciando resultados que são de importância fundamental para o desenvolvimento desta tese.

Proposição 2.7 . *Os operadores translação T_μ , $\mu = 0, 1, \dots, d$, satisfazem as seguintes propriedades e definições:*

1. *Como operadores lineares em $\mathcal{H}$, $\hat{T}_\mu$, $\mu = 0, 1, \dots, d$, comutam mutuamente;*
2. *$\hat{T}_0$ é auto-adjunto, com $-1 \leq \hat{T}_0 \leq 1$;*
3. *$\hat{T}_{j=1, \dots, d}$ são unitários e escrevemos $\hat{T}_j = e^{iP^j}$;*
4. *$\vec{P} = (P^1, \dots, P^d)$ é o operador de momento espacial auto-adjunto, com pontos espectrais $\vec{p} \in \mathbb{T}^d \equiv (-\pi, \pi]^d$;*
5. *como $\hat{T}_0^2 \geq 0$, definimos o operador de energia (Hamiltoniano) $H \geq 0$ através da expressão $\hat{T}_0^2 = e^{-2H}$, onde $H = H^*$;*
6. *existe $v \in \mathcal{H}$, com $Hv = 0$, ou seja, H é um operador auto-adjunto positivo com estado fundamental (o vácuo) v ;*
7. *o espectro conjunto dos operadores auto-adjuntos H e $\vec{P}$ é denominado espectro de energia-momento do modelo.*

Demonstração: Ver [2] e, para o último item, ver também [20]. □

Observação 2.8 . *A condição $H > 0$ pode ser diretamente verificada em alguns modelos e temos a relação $\hat{T}_0 = e^{-H}$.*

Observação 2.9 . *Na proposição acima, no espaço-tempo contínuo $\mathbb{R}^{d+1}$, a família $\{\hat{T}_0^t\}_{t \geq 0}$ é um semi-grupo fortemente contínuo e as famílias $\{\hat{T}_j^x\}_{x \in \mathbb{R}}$, $j = 1, \dots, d$, são grupos fortemente contínuos. Neste caso, podemos definir os seus respectivos geradores infinitesimais.*

Observação 2.10 . *Do Teorema Espectral, temos que os operadores acima admitem as seguintes representações espectrais $\hat{T}_0 = \int_{-1}^1 \lambda^0 dE_0(\lambda^0)$ e $\hat{T}_{j=1,\dots,d} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda^j} dF_j(\lambda^j)$, onde $E_0(\lambda^0)$ e $F_j(\lambda^j)$, com $j = 1, \dots, d$, são as famílias espectrais dos operadores $\hat{T}_0$ e $P^{j=1,\dots,d}$ respectivamente.*

2.3 Simetrias Internas, Espaço-Temporais e de Gauge

Concluimos este capítulo apresentando as simetrias do modelo completo, e as correspondentes transformações de invariância locais e globais. Nossa base é são as Refs. [8, 9] As definições aqui descritas são de grande importância na seção 4.1 do Capítulo 4, pois elas permitem reduzir a dimensionalidade e encontrar uma estrutura de blocos da função de dois-pontos e implementar a classificação descrita no Eightfold Way de Gell-Mann e Ne'eman [21].

Operações de simetria são definidas na álgebra dos campos (gauge e Grassmann). Uma operação de simetria $\mathbb{Y}$ leva campos Grassmannianos simples para

$$\begin{aligned}\mathbb{Y}\psi_{\alpha a}(x) &= A_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\beta a}(\mathcal{Y}x), \\ \mathbb{Y}\bar{\psi}_{\alpha a}(x) &= \tilde{\bar{\psi}}_{\beta a}(\mathcal{Y}x)B_{\beta\alpha},\end{aligned}\tag{2.6}$$

e age em funções $f(g_{xz})$ do grupo de gauge local $SU(3)$ conforme a expressões abaixo:

$$\mathbb{Y}f(g_{xz}) = (\mathbb{Y}f)(g_{\mathcal{Y}x\mathcal{Y}z}),\tag{2.7}$$

onde $\mathcal{Y}$ é uma transformação agindo sobre as coordenadas, $\sim$ significa barra ou sem barra, se algum já está presente. Sobre monômios Grassmannianos M_1, M_2 , $\mathbb{Y}$ preserva a ordem (homomorfismo) se

$$\mathbb{Y}(M_1M_2) = \mathbb{Y}(M_1)\mathbb{Y}(M_2),$$

e reverte a ordem (anti-homomorfismo) se

$$\mathbb{Y}(M_1M_2) = \mathbb{Y}(M_2)\mathbb{Y}(M_1).$$

As operações de simetria são estendidas para toda a álgebra dos campos por linearidade ou anti-linearidade.

Uma simetria de modelo é definida como uma operação de simetria que deixa a ação $\mathcal{S}$ da Eq. (2.1) invariante e que tem a seguinte propriedade envolvendo as médias normalizadas de funções F invariantes de gauge dos campos:

$$\langle \mathbb{Y}F \rangle = \langle F \rangle^\sharp,\tag{2.8}$$

onde $\langle F \rangle^\sharp$ significa ou $\langle F \rangle$ ou $\langle F \rangle^*$.

Além disso, uma simetria pode ser implementada no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ através de um operador linear ou anti-linear estabilizando o espaço nulo $\mathcal{N}$, i.e. tal que se $F \in \mathcal{N}$, então $\mathbb{Y}F \in \mathcal{N}$.

Resultados sobre as transformações de rotação, reflexão de coordenadas, paridade e conjugação de carga são descritos no seguinte teorema, para o caso $d = 3$.

Teorema 2.11. *Cada um das operações de simetria especificadas abaixo é uma simetria do modelo.*

No caso $d = 3$, temos as seguintes transformações:

1. : Rotações espaciais r por $\pi/2$ e π em relação a:

(a) A direção e^1 : $r_1(e^1, e^2, e^3) = (e^1, e^3, -e^2)$, com $B = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^2\gamma^3) = A^{-1}$, e $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{r_1 x r_1 y})$. Para rotações de π , $B = -i\gamma^2\gamma^3$.

(b) A direção e^2 : $r_2(e^1, e^2, e^3) = (-e^3, e^2, e^1)$, com $B = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^3\gamma^1) = A^{-1}$, e $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{r_2 x r_2 y})$. Para rotações de π , $B = -i\gamma^3\gamma^1$.

(c) A direção e^3 : $r_3(e^1, e^2, e^3) = (e^2, -e^1, -e^3)$, com $B = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}(1 - \gamma^1\gamma^2) = A^{-1}$, e $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{r_3 x r_3 y})$. Para rotações de π , $B = -i\gamma^1\gamma^2$.

2. Reflexões nas coordenadas espaciais $\mathcal{R}$ em:

(a) A coordenada e^1 : $\mathcal{R}_1(e^1, e^2, e^3) = (-e^1, e^2, e^3)$, com $B = i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 = A^{-1}$, e tal que $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{\mathcal{R}_1 x \mathcal{R}_1 y})$.

(b) A coordenada e^2 : $\mathcal{R}_2(e^1, e^2, e^3) = (e^1, -e^2, e^3)$, com $B = i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 = A^{-1}$, e tal que $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{\mathcal{R}_2 x \mathcal{R}_2 y})$.

(c) A coordenada e^3 : $\mathcal{R}_3(e^1, e^2, e^3) = (e^1, e^2, -e^3)$, com $B = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = A^{-1}$, e tal que $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{\mathcal{R}_3 x \mathcal{R}_3 y})$.

3. Paridade $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}(e^1, e^2, e^3) = (-e^1, -e^2, -e^3)$, com $B = \gamma^0 = A^{-1}$, e tal que $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{\mathcal{P}x \mathcal{P}y})$.

4. Conjugação de Carga $\mathcal{C}$ que neste caso, ao contrário dos acima, age como segue: $\psi_\alpha(x) \mapsto \bar{\psi}_\beta(x)A_{\beta\alpha}$, $\bar{\psi}_\alpha(x) \mapsto B_{\alpha\beta}\psi_\beta(x)$, $\sim$ significa barra e com $-A = -B^{-1} = B = \gamma^2\gamma^0$, $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{xy}^*)$

5. Reversão no tempo $\mathcal{T}$ que neste caso, ao contrário das transformações acima, age como segue: $\psi_\alpha(x) \mapsto \bar{\psi}_\beta(-x^0, \vec{x})A_{\beta\alpha}$, $\bar{\psi}_\alpha(x) \mapsto B_{\alpha\beta}\psi_\beta(-x^0, \vec{x})$, com $A = B = B^{-1} = \gamma^0$, $\sim$ significa barra, $\sharp$ significa complexo conjugado, $f(g_{xy}) \mapsto f(g_{(-x^0, \vec{x})(-y^0, \vec{y})})^*$.

6. Reflexão no tempo $\mathcal{T}$: $\psi_\alpha(x) \mapsto A_{\alpha\beta}\psi_\beta(-x^0, \vec{x})$ e $\bar{\psi}_\alpha(x) \mapsto \bar{\psi}_\beta(-x^0, \vec{x})B_{\beta\alpha}$, onde

$$B = A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iI_2 \\ iI_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(g_{xy}) \mapsto f(g_{(-x^0, \vec{x})(-y^0, \vec{y})}).$$

Observação 2.12. A composição de simetrias $\mathcal{F}_s := -i\mathcal{TCT}$ é a transformação spin flip. Esta também é uma simetria do modelo que deixa invariante cada termo individual da ação de Wilson (2.1). Esta simetria foi introduzida pelo grupo de pesquisa que integro.

Outra importante característica da ação (2.1) é sua invariância sob transformações locais de gauge $h : \mathbb{Z}_0^4 \rightarrow \text{SU}(3)_c$, que agem nos campos básicos como segue

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longmapsto h(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longmapsto \bar{\psi}(x)h(x)^{-1} \\ U(g_{x+e^\mu,x}) &\longmapsto h(x+e^\mu)U(g_{x+e^\mu,x})h(x)^{-1}.\end{aligned}$$

Finalmente, a ação e as funções de correlação são invariantes pela transformação global de sabor, ou seja pela ação global do grupo de sabor $\text{SU}(3)_f$ (para o caso de N sabores de quarks, considera-se o grupo $\text{SU}(N)$) nos campos básicos, i.e. por

$$\begin{aligned}\psi(x) &\longmapsto U\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longmapsto \bar{\psi}(x)U^\dagger.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Os sub-grupos $\text{U}(1)$ e $\text{SU}(2)$ do grupo de sabor $\text{SU}(3)_f$ correspondem aos grupos de hipercarga e isospin, respectivamente, usados na classificação do Eightfold Way. Aqui, I denota o operador de isospin com componentes I_1 , I_2 e I_3 (também denotadas por I_x , I_y e I_z respectivamente) os quais verificam as mesmas relações de comutação que as componentes J_x , J_y e J_z do spin total J . Estas notações serão usadas na Proposição 4.22.

Campos Bariônicos e Funções de Correlação de Dois Bárions

As curvas de dispersão isoladas são interpretadas como partículas no espectro em conjunto dos operadores H e $\vec{P}$, descritos na Proposição 2.7. O método que vamos utilizar não é o que se usa com frequência em matemática. Nosso método estabelece uma conexão entre funções de correlação apropriadas e o espectro em conjunto de H e $\vec{P}$. Para dar uma ideia de como obter esta conexão, e com o intuito de obter o espectro de um bárion, definimos a função de dois-bárions (a função de correlação aqui conveniente!), usamos a fórmula de F-K e obtemos representações espectrais para esta correlação. Este será o tema deste capítulo. Os resultados aqui obtidos serão de grande utilidade no desenvolvimento da parte principal desta tese descrita no capítulo 4. Tal como anteriormente descrito, neste capítulo consideramos o espectro de uma partícula no setor bariônico que está contido no subespaço ímpar $\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}$. Os estados dos mésons pertencem a o subespaço par $\mathcal{H}_e$.

3.1 Bases de Spin Individuais

Para determinar a forma dos campos bariônicos e suas correlações usando o método de desacoplamento por hiperplanos [5, 8], começamos considerando as funções $L, M \in \mathcal{H}_o$. Com $\hat{T}^{\vec{x}} = \hat{T}_1^{x^1} \hat{T}_2^{x^2} \hat{T}_3^{x^3}$ temos, pela fórmula de F-K, para $|x^0 - y^0| \geq 1$,

$$\left(L(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{|x^0 - y^0|} \hat{T}^{\vec{y} - \vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} = \left\langle T_0^{|x^0 - y^0| - 1} T^{\vec{y} - \vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \Theta(L(1/2, \vec{0})) \right\rangle. \quad (3.1)$$

Para $x^0 < y^0$, temos

$$\begin{aligned}
\left(L(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{y^0-x^0-1} \hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} &= \left\langle T_0^{y^0-x^0-1} T^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) (\Theta L)(-1/2, \vec{0}) \right\rangle \\
&= \left\langle T_0^{y^0-1/2} T_0^{-x^0-1/2} T^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) (\Theta L)(-1/2, \vec{0}) \right\rangle \\
&= \left\langle T_0^{y^0-1/2} T^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) T_0^{x^0+1/2} (\Theta L)(-1/2, \vec{0}) \right\rangle \\
&= \left\langle T_0^{y^0-1/2} T^{\vec{y}} M(1/2, \vec{0}) T_0^{x^0+1/2} T^{\vec{x}} (\Theta L)(-1/2, \vec{0}) \right\rangle \\
&= \langle M(y) (\Theta L)(x) \rangle \\
\Rightarrow \left(L(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{y^0-x^0-1} \hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} &= - \langle (\Theta L)(x) M(y) \rangle. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Similarmente, para $y^0 < x^0$, temos

$$\begin{aligned}
\left(L(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{x^0-y^0-1} \hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} &= \left(\left[\hat{T}_0^{x^0-y^0-1} \right]^\dagger L(1/2, \vec{0}), \hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\hat{T}_0^{x^0-y^0-1} L(1/2, \vec{0}), \hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} \\
&= \left(\hat{T}^{\vec{y}-\vec{x}} M(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{x^0-y^0-1} L(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}}^* \\
&= \left\langle T_0^{x^0-y^0-1} L(1/2, \vec{0}) \Theta (M(1/2, \vec{y} - \vec{x})) \right\rangle^* \\
&= \left\langle T_0^{x^0-y^0-1} L(1/2, \vec{0}) (\Theta M)(-1/2, \vec{y} - \vec{x}) \right\rangle^* \\
&= \left\langle L(x^0 - y^0 - 1/2, \vec{0}) (\Theta M)(-1/2, \vec{y} - \vec{x}) \right\rangle^* \\
&= \langle L(x) (\Theta M)(y) \rangle^* \\
\Rightarrow \left(M(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{x^0-y^0-1} \hat{T}^{\vec{x}-\vec{y}} L(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}}^* &= \langle L(x) (\Theta M)(y) \rangle^*. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Acima, as coordenadas temporais especificam o suporte temporal e as coordenadas espaciais a translação espacial.

Antes de prosseguir, daremos um breve resumo de como é usado o método de desacoplamento por hiperplanos. Este método consiste em introduzir, no lugar dos κ na ação de Wilson (2.1), uma família de variáveis $\kappa_{q^0}, \kappa_{q^1}, \dots, \kappa_{q^3} \in \mathbb{C}$, onde $\kappa_{q^0} \in 1/2 + \mathbb{Z}$ e $\kappa_{q^k} \in \mathbb{Z}$ para $k = 1, 2, 3$. Para $x^j < y^j$, substituímos o parâmetro κ por κ_{q^j} para todos os termos da ação de Wilson na parte não-local que acopla férmions e campos de gauge. Também enfatizamos que, como foi especificado no final da Seção 2.1 do Capítulo 2, os nossos resultados são obtidos considerando $\beta \rightarrow 0$, ou seja, desprezamos este termo na ação de Wilson, por isso não fazemos expansões em β .

Com isso, consideramos as derivadas nestes novos parâmetros κ_p de hiperplanos, da correlação acima dada em $\kappa_p = 0$. Para tal, além das integrações fermiônicas, é importante conhecer as integrais envolvendo os campos de gauge. Para nós é suficiente saber os seguintes resultados:

$$\mathcal{I}_3 = \int U(g)_{a_1 b_1} U(g)_{a_2 b_2} U(g)_{a_3 b_3} d\mu(g) \equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} g_{a_3 b_3} d\mu(g) = \frac{1}{6} \epsilon_{a_1 a_2 a_3} \epsilon_{b_1 b_2 b_3},$$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e tomamos todos os campos no mesmo ponto.

Observação 3.13. *Outras integrais, envolvendo campos de gauge, que são úteis para obter resultados que utilizamos neste trabalho, por exemplo o Teorema 4.27, são as seguintes:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\equiv \int U(g)_{a_1 b_1} U(g)_{a_2 b_2}^{-1} d\mu(g) \equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2}^{-1} d\mu(g) = \frac{1}{3} \delta_{a_1 b_2} \delta_{a_2 b_1}, \\ \mathcal{I}_4 &\equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2}^{-1} g_{a_3 b_3} g_{a_4 b_4}^{-1} d\mu(g) \\ &= \frac{1}{8} [\delta_{a_1 b_2} \delta_{a_3 b_4} \delta_{b_1 a_2} \delta_{b_3 a_4} + (a_2 \rightleftharpoons a_4, b_2 \rightleftharpoons b_4)] - \frac{1}{24} [\delta_{a_1 b_2} \delta_{a_3 b_4} \delta_{b_1 a_4} \delta_{b_3 a_2} + (a_2 \rightleftharpoons a_4, b_2 \rightleftharpoons b_4)], \\ \mathcal{I}_6 &\equiv \int g_{a_1 b_1} g_{a_2 b_2} g_{a_3 b_3} g_{a_4 b_4} g_{a_5 b_5} g_{a_6 b_6} d\mu(g) \\ &= \frac{2}{3!4!} [\epsilon_{a_1 a_2 a_3} \epsilon_{b_1 b_2 b_3} \epsilon_{a_4 a_5 a_6} \epsilon_{b_4 b_5 b_6} + \epsilon_{a_1 a_2 a_4} \epsilon_{b_1 b_2 b_4} \epsilon_{a_3 a_5 a_6} \epsilon_{b_3 b_5 b_6} + \\ &\quad \epsilon_{a_1 a_2 a_5} \epsilon_{b_1 b_2 b_5} \epsilon_{a_3 a_4 a_6} \epsilon_{b_3 b_4 b_6} + \epsilon_{a_1 a_2 a_6} \epsilon_{b_1 b_2 b_6} \epsilon_{a_3 a_4 a_5} \epsilon_{b_3 b_4 b_5} + \\ &\quad \epsilon_{a_1 a_3 a_4} \epsilon_{b_1 b_3 b_4} \epsilon_{a_2 a_5 a_6} \epsilon_{b_2 b_5 b_6} + \epsilon_{a_1 a_3 a_5} \epsilon_{b_1 b_3 b_5} \epsilon_{a_2 a_4 a_6} \epsilon_{b_2 b_4 b_6} + \\ &\quad \epsilon_{a_1 a_3 a_6} \epsilon_{b_1 b_3 b_6} \epsilon_{a_2 a_4 a_5} \epsilon_{b_2 b_4 b_5} + \epsilon_{a_1 a_4 a_5} \epsilon_{b_1 b_4 b_5} \epsilon_{a_2 a_3 a_6} \epsilon_{b_2 b_3 b_6} + \\ &\quad \epsilon_{a_1 a_4 a_6} \epsilon_{b_1 b_4 b_6} \epsilon_{a_2 a_3 a_5} \epsilon_{b_2 b_3 b_5} + \epsilon_{a_1 a_5 a_6} \epsilon_{b_1 b_5 b_6} \epsilon_{a_2 a_3 a_4} \epsilon_{b_2 b_3 b_4}]. \end{aligned}$$

Continuando, temos que por desbalanço (diferença em número) entre os campos de férmions e anti-férmions em cada ponto da rede, a r -ésima derivada em κ_p , para $\kappa_p = 0$, se anula para $r = 0, 2, 4$. A primeira derivada resulta em zero pela integração do campo de gauge. Assim, para $|x^0 - y^0| > 0$,

$$\langle (\Theta L)(x) M(y) \rangle^{(r=0,1,2,4)} = 0. \quad (3.4)$$

Para analisar a terceira derivada, usando a integral I_3 , escrevemos

$$\begin{aligned} b_{\vec{\alpha}\vec{f}} &= \epsilon_{abc} \psi_{a\alpha_1 f_1} \psi_{b\alpha_2 f_2} \psi_{c\alpha_3 f_3} \\ \bar{b}_{\vec{\alpha}\vec{f}} &= \epsilon_{abc} \bar{\psi}_{a\alpha_1 f_1} \bar{\psi}_{b\alpha_2 f_2} \bar{\psi}_{c\alpha_3 f_3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

e usamos o sobrescrito $u(\ell)$ para denotar que apenas componentes de spin upper, $\alpha_i = 1, 2$ (lower $\alpha_i = 3, 4$) aparecem. Além disso, o sobrescrito (r) significa o coeficiente de κ_p^r . Para $y^0 > x^0$, $x^0 + 1/2 \leq p \leq y^0 - 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle (\Theta L)(x) M(y) \rangle^{(3)} &= -\frac{1}{6^2} \sum_{\vec{\gamma}\vec{g}, \vec{w}} \left[\langle (\Theta L)(x) \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p+1, \vec{w}) M(y) \rangle^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - \langle (\Theta L)(x) b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^u(p, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^u(p+1, \vec{w}) M(y) \rangle^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Para $y^0 < x^0$, $y^0 + 1/2 \leq p \leq x^0 - 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle L(x) (\Theta M)(y) \rangle^{(3)} &= \frac{1}{6^2} \sum_{\vec{\gamma}\vec{g}, \vec{w}} \left[\langle L(x) b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p+1, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p, \vec{w}) (\Theta M)(y) \rangle^{(0)} \right. \\ &\quad \left. - \langle L(x) \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^u(p+1, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^u(p, \vec{w}) (\Theta M)(y) \rangle^{(0)} \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou com o conjugado complexo $*$ em todo lugar.

Concluindo, obtemos que as correlações no lado esquerdo e no lado direito da equação (3.6) são as mesmos, tomando $M = \bar{b}_{\beta\bar{h}}^\ell$, $\Theta L = b_{\alpha\bar{f}}^\ell$, então obtemos, para $x^0 < y^0$, $x^0 \leq p-1/2 < y^0$,

$$\left\langle b_{\alpha\bar{f}}^\ell(x) \bar{b}_{\beta\bar{h}}^\ell(y) \right\rangle^{(3)} = -\frac{1}{6^2} \sum_{\vec{\gamma}\vec{g}, \vec{w}} \langle b_{\alpha\bar{f}}^\ell(x) \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p+1, \vec{w}) \bar{b}_{\beta\bar{h}}^\ell(y) \rangle^{(0)}. \quad (3.7)$$

Para $x^0 > y^0$, $x^0 \geq p-1/2 > y^0$, tomando $L = \bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell$, $\Theta M = b_{\beta\bar{h}}^\ell$, então

$$\left\langle \bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell(x) b_{\beta\bar{h}}^\ell(y) \right\rangle^{(3)} = \frac{1}{6^2} \sum_{\vec{\gamma}\vec{g}, \vec{w}} \langle \bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell(x) b_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p+1, \vec{w}) \rangle^{(0)} \langle \bar{b}_{\vec{\gamma}\vec{g}}^\ell(p, \vec{w}) b_{\beta\bar{h}}^\ell(y) \rangle^{(0)}. \quad (3.8)$$

Existem redundâncias no conjunto dos campos bariônicos $b_{\alpha\bar{f}}^\ell$ e $\bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell$, e nós queremos eliminar dependências lineares, de modo que possamos associar campos bariônicos de partículas a elementos de uma base. Ao fazer isso, seremos capazes de definir uma função de dois pontos invertível. Os $b_{\alpha\bar{f}}^\ell, \bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell$ compreendem um conjunto de 216 campos, mas pela propriedade de simetria total (pst)¹ há igualdade entre eles. Nós decompomos o conjunto em três classes, como segue:

- **Classe 1:** Todos os pares $\alpha_i f_i$ o mesmo em $\vec{\alpha}\vec{f}$ com seis elementos distintos.
- **Classe 2:** Tem apenas dois $\alpha_i f_i$ idênticos, com 30 elementos distintos.
- **Classe 3:** Tem todos os $\alpha_i f_i$ distintos com 20 elementos distintos.

Assim, existem 56 elementos distintos. Levando em conta as multiplicidades nas somas intermediárias e restringindo $\vec{\alpha}\vec{f}$ apenas para um representante de cada classe, usando pst, e suprimindo os sobrescritos de componente de spin inferior, definimos os campos normalizados

$$\begin{aligned} B_{\alpha\bar{f}} &:= \frac{1}{n_{\alpha\bar{f}}} b_{\alpha\bar{f}}^\ell, \\ \bar{B}_{\alpha\bar{f}} &:= \frac{1}{n_{\alpha\bar{f}}} \bar{b}_{\alpha\bar{f}}^\ell, \end{aligned} \quad (3.9)$$

com $n_{\alpha\bar{f}} = 6, 2\sqrt{3}$ e $\sqrt{6}$ para as classes 1, 2 e 3, respectivamente.

3.2 A Função de Dois-Bárions

Conforme explorado na seção anterior, para detetarmos o espectro de um bárion no espectro de energia-momento do modelo, definimos a função de dois-bárions ou também chamada de função de dois-pontos. A função de dois-bárions é definida como:

$$G_{\ell\ell'}(x, y) := \langle B_\ell(x) \bar{B}_{\ell'}(y) \rangle \chi_{\{(x,y); x^0 \leq y^0\}} - \langle \bar{B}_\ell(x) B_{\ell'}(y) \rangle^* \chi_{\{(x,y); x^0 > y^0\}}, \quad (3.10)$$

¹Os campos da Eq. (3.5) são simétricos sob o intercâmbio $\alpha_k f_k \leftrightarrow \alpha_j f_j$ de quaisquer dois pares de índices coletivos, esta propriedade é chamada de propriedade de simetria total.

onde os sobrescritos ℓ e ℓ' agora são índices coletivos, e os sobrescritos de spin inferior foram retirados. Aqui χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω . Além disso, por invariância translacional na rede, é fácil verificar que esta função depende da diferença entre x e y . Assim, com abuso de notação, escrevemos $G(x, y) \equiv G(x - y)$.

A seguir, notamos que, pela simetria reversão no tempo $\mathcal{T}$, temos $\langle B_\ell(x) \bar{B}_{\ell'}(y) \rangle = -\langle B_\ell(-x^0, \vec{x}) \bar{B}_{\ell'}(-y^0, \vec{y}) \rangle^*$, de modo que

$$G_{\ell\ell'}(x, y) = G_{\ell\ell'}((-x^0, \vec{x}), (-y^0, \vec{y})). \quad (3.11)$$

A primeira propriedade importante de G é enunciada na seguinte proposição.

Proposição 3.14. *Tomando $\bar{B}_\ell \equiv \bar{B}_\ell(1/2, \vec{0})$ e lembrando que $G(u, v) \equiv G(u - v)$. Para $x \in \mathbb{Z}^4$, com $x^0 \neq 0$, obtemos*

$$G_{\ell_1\ell_2}(x) = - \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^3} (\lambda^0)^{|x^0|-1} e^{i\vec{\lambda} \cdot \vec{x}} d\lambda \left(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}, \quad (3.12)$$

onde $\mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) = E_0(\lambda^0) \prod_{j=1}^3 F_j(\lambda^j)$, $E_0(\lambda^0)$ é a família espectral para o operador $\hat{T}_0$, e $\prod_{j=1}^3 F_j(\lambda^j)$ é o produto das famílias espectrais para os operadores de momento P^j . Além disso, pela simetria de paridade, esta é uma função par de $\vec{x}$.

Demonstração: Escrevemos $x = u - v$ e consideramos os seguintes casos:

(i) Se $u^0 < v^0$:

$$\begin{aligned} G_{\ell_1\ell_2}(u, v) &= \langle B_{\ell_1}(u) \bar{B}_{\ell_2}(v) \rangle \\ &= \left\langle T_0^{u^0+1/2} T^{\vec{u}}(B_{\ell_1}(-1/2, \vec{0})) T_0^{v^0-1/2} T^{\vec{v}}(\bar{B}_{\ell_2}) \right\rangle \\ &= - \left\langle T_0^{v^0-1/2} T^{\vec{v}}(\bar{B}_{\ell_2}) T_0^{u^0+1/2} T^{\vec{u}}(B_{\ell_1}(-1/2, \vec{0})) \right\rangle \\ &= - \left\langle T_0^{v^0-u^0-1} T^{\vec{v}-\vec{u}}(\bar{B}_{\ell_2}) B_{\ell_1}(-1/2, \vec{0}) \right\rangle \end{aligned}$$

A última igualdade é consequência da invariância translacional na rede. Contudo, como $\Theta(\bar{B}_{\ell_1} \equiv \bar{B}_{\ell_1}(1/2, \vec{0})) = B_{\ell_1}(-1/2, \vec{0})$, então na igualdade acima

$$G_{\ell_1\ell_2}(u, v) = - \left\langle T_0^{v^0-u^0-1} T^{\vec{v}-\vec{u}}(\bar{B}_{\ell_2}) \Theta(\bar{B}_{\ell_1}) \right\rangle,$$

agora aplicando a simetria de paridade $\mathcal{P}$ podemos substituir $\vec{v} - \vec{u}$ por $\vec{u} - \vec{v}$ e usando a fórmula de F-K, obtemos:

$$G_{\ell_1\ell_2}(u, v) = - \left\langle T_0^{v^0-u^0-1} T^{\vec{u}-\vec{v}}(\bar{B}_{\ell_2}) \Theta(\bar{B}_{\ell_1}) \right\rangle = - \left(\bar{B}_{\ell_1}, \hat{T}_0^{v^0-u^0-1} \hat{T}^{\vec{u}-\vec{v}} \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Assim, usando as representações espectrais para os operadores que implementam as translações temporais e espaciais $\hat{T}_0 = \int_{-1}^1 \lambda^0 dE_0(\lambda^0)$ e $\hat{T}_{j=1,2,3} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda^j} dF_j(\lambda^j)$, na igualdade acima, obtemos

$$G_{\ell_1\ell_2}(u, v) = - \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^3} (\lambda^0)^{v^0-u^0-1} e^{i\vec{\lambda} \cdot (\vec{u}-\vec{v})} d\lambda \left(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}.$$

(ii) Se $u^0 > v^0$:

$$\begin{aligned}
G_{\ell_1 \ell_2}(u, v) &= -\langle \bar{B}_{\ell_1}(u) B_{\ell_2}(v) \rangle^* \\
&= -\left\langle T_0^{u^0-1/2} T^{\vec{u}}(\bar{B}_{\ell_1}(1/2, \vec{0})) T_0^{v^0+1/2} T^{\vec{v}}(B_{\ell_2}(-1/2, \vec{0})) \right\rangle^* \\
&= -\left\langle T_0^{u^0-v^0-1} T^{\vec{u}-\vec{v}}(\bar{B}_{\ell_1}) B_{\ell_2}(-1/2, \vec{0}) \right\rangle^* \\
&= -\left\langle T_0^{u^0-v^0-1} T^{\vec{v}-\vec{u}}(\bar{B}_{\ell_1}) \Theta(\bar{B}_{\ell_2}) \right\rangle^* \\
&= -\left(\bar{B}_{\ell_2}, \hat{T}_0^{u^0-v^0-1} \hat{T}^{\vec{v}-\vec{u}} \bar{B}_{\ell_1} \right)_{\mathcal{H}}^* \\
&= -\left(\hat{T}_0^{u^0-v^0-1} \hat{T}^{\vec{v}-\vec{u}} \bar{B}_{\ell_1}, \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}} \\
&= -\left(\bar{B}_{\ell_1}, \hat{T}_0^{u^0-v^0-1} \hat{T}^{\vec{u}-\vec{v}} \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

onde usamos a simetria de paridade $\mathcal{P}$ e $\Theta(\bar{B}_{\ell_2}) = B_{\ell_2}(-1/2, \vec{0})$ na quarta igualdade, a fórmula de F-K na quinta igualdade e os fatos de que $\hat{T}_0$ é auto-adjunto e que $\hat{T}_{j=1,2,3}$ são unitários na última igualdade. Finalmente, usando as representações espectrais de $\hat{T}_0$ e $\hat{T}_{j=1,2,3}$, obtemos

$$G_{\ell_1 \ell_2}(u, v) = - \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{T}^3} (\lambda^0)^{u^0-v^0-1} e^{i\vec{\lambda} \cdot (\vec{u}-\vec{v})} d\lambda \left(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Com isso, dos casos mencionados anteriormente temos a igualdade desejada. $\square$

Agora, vamos obter uma representação espectral da transformada de Fourier $\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(p) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^4} G_{\ell_1 \ell_2}(x) e^{-ip \cdot x}$ da função de dois-pontos $G_{\ell_1 \ell_2}(x)$.

Proposição 3.15 . *Depois de separar a contribuição com tempos iguais, $\tilde{G}(p)$ admite a representação espectral*

$$\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(p) = \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(\vec{p}) - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 f(p^0, \lambda^0) d\lambda^0 \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0), \quad (3.13)$$

onde

$$d\lambda^0 \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) = \int_{\mathbb{T}^3} \delta(\vec{p} - \vec{\lambda}) d\lambda^0 d\vec{\lambda} \left(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}, \quad (3.14)$$

com $f(x, y) = (e^{ix} - y)^{-1} + (e^{-ix} - y)^{-1}$, e $\tilde{G}(\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G(x^0 = 0, \vec{x})$.

Demonstração: Da definição de transformada de Fourier na rede, da Eq.(3.11) e do Teorema 3.14, temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(p) &= \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3} G_{\ell_1 \ell_2}(0, \vec{x}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \sum_{x^0 > 0, \vec{x} \in \mathbb{Z}^3} \left[G_{\ell_1 \ell_2}(x^0, \vec{x}) e^{-ip^0 x^0} + G_{\ell_1 \ell_2}(-x^0, \vec{x}) e^{ip^0 x^0} \right] e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \\
&= \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(\vec{p}) - \sum_{x^0 > 0, \vec{x} \in \mathbb{Z}^3} \int_{-1}^1 (\lambda^0)^{-1} \left[\left(\lambda^0 e^{-ip^0} \right)^{x^0} + \left(\lambda^0 e^{ip^0} \right)^{x^0} \right] \int_{\mathbb{T}^3} e^{i(\vec{\lambda} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} d\lambda \left(\bar{B}_{\ell_1}, \mathcal{E}(\lambda^0, \vec{\lambda}) \bar{B}_{\ell_2} \right)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Com isso, usando a representação $\delta(\vec{\lambda} - \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3} e^{i(\vec{\lambda} - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$, o resultado segue. $\square$

Prosseguindo, enunciaremos um teorema de vital importância no que segue.

Teorema 3.16 . *Seja $F(z_1, \dots, z_l)$ uma função analítica na região $|z_j| \leq r_0$, $j = 1, \dots, l$. Suponha que, para cada $j = 1, \dots, l$, exista $k_j \in \mathbb{Z}$, não-negativo, tal que*

$$F(z_1, \dots, z_j = 0, \dots, z_l) = \frac{\partial F}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_j = 0, \dots, z_l) = \dots = \frac{\partial^{k_j-1} F}{\partial z_j^{k_j-1}}(z_1, \dots, z_j = 0, \dots, z_l) = 0.$$

Seja $C = \sup_{|z_j| \leq r_0} |F(z_1, \dots, z_l)|$. Então, na região $|z_j| \leq r_0$, temos

$$|F(z_1, \dots, z_l)| \leq C \prod_{j=1}^l \left(\frac{|z_j|}{r_0} \right)^{k_j}.$$

Demonstração: Para cada $j = 1, \dots, l$ consideremos $g_j(z_1, \dots, z_j) = \frac{F(z_1, \dots, z_j)}{z_j}$, então para $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_l$ fixos esta função tem uma singularidade removível em $z_j = 0$. Assim, temos que

$$S(z_1, \dots, z_l) := \prod_{j=1}^l \left(\frac{r_0}{z_j} \right)^{k_j} F(z_1, \dots, z_l),$$

é analítica na região considerada. Pelo princípio do módulo máximo, $|S(z_1, \dots, z_l)|$ toma o seu máximo valor em $|z_j| = r_0$ e é $\sup_{|z_j|=r_0} |S(z_1, \dots, z_l)| = C$ dando a desigualdade desejada. $\square$

Seguindo com nossa análise, usamos $\tilde{G}(p)$ para detectar partículas. Do fato que $e^{\sigma_p(H)} \subset \sigma_p(\hat{T}_0) \subset e^{\sigma_p(H)} \cup \{0\}$ (aqui $\sigma_p(A)$ denota a espectro pontual do operador A) e da Proposição 3.15, temos que singularidades de $\tilde{G}(p)$ são pontos no espectro de E-M, e definimos como partículas as singularidades que formam curvas isoladas, com $p^0 = iw(\vec{p})$.

Um resultado sobre o decaimento de G é obtido utilizando o método de desacoplamento por hiperplanos e é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.17. *A função de dois-pontos G é analítica em κ e satisfaz a seguinte desigualdade global, com $\|x\|_1 = |x^0| + \sum_{j=1}^3 |x^j|$:*

$$|G_{\ell_1 \ell_2}(x)| \leq \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3\|x\|_1},$$

para alguma constante positiva $\mathcal{O}(1)$ uniforme em κ e nos multi índices ℓ_1 e ℓ_2 .

Demonstração: Das equações (3.4), (3.7) e (3.8) e suas versões para parâmetros dos desacoplamentos na direção espacial, do Teorema 3.16 e tomando $\kappa_p = \kappa$, para todo $x^0 + 1/2 \leq p \leq y^0 - 1/2$ e o mesmo para parâmetros de desacoplamento de hiperplanos na direção espacial temos a desigualdade desejada. Finalmente, usando o fato que existe $C_0 > 0$ tal que

$$|G(x, y, \kappa, \{\kappa_p\})| \leq C_0,$$

onde $\kappa, \kappa_p \in B(0; \delta) \subseteq \mathbb{C}$, para algum $0 < \delta \ll 1$ (ver [2]). Obtemos a constante $\mathcal{O}(1)$. $\square$

Corolário 3.18 . *$\tilde{G}(p)$ admite uma extensão analítica na região $|\Im m p^\mu| < -(3 - \epsilon) \ln |\kappa|$, com $0 < \epsilon \ll 1$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$.*

Demonstração: Seja $b < -(3 - \epsilon) \ln |\kappa|$, com $0 < \epsilon \ll 1$, então do teorema anterior

$$\left| e^{b\|x\|_1} G_{\ell_1 \ell_2}(x) \right| \leq \mathcal{O}(1) e^{3\|x\|_1 \ln |\kappa|} e^{-(3-\epsilon)\|x\|_1 \ln |\kappa|} = \mathcal{O}(1) e^{\|x\|_1 \epsilon \ln |\kappa|}.$$

Assim, $e^{b\|x\|_1} G_{\ell_1 \ell_2}(x) \in \ell^2(\mathbb{Z}_0^4)$ e a conclusão segue do Teorema de Paley-Wiener [22]. $\square$

Observação 3.19. *Do Corolário 3.18, temos uma lacuna de massa (spectral gap) de pelo menos $-(3 - \epsilon) \ln \kappa$, $0 < \epsilon \ll 1$ e $0 < \kappa \ll 1$.*

Para ir mais longe no espectro, usamos uma extensão meromorfa de $\tilde{G}(p)$ em p^0 , para $\vec{p}$ e κ fixos, e dada por

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(p) = \frac{[\text{cof } \tilde{\Gamma}(p)]^t}{\det \tilde{\Gamma}(p)}, \quad (3.15)$$

onde $\tilde{\Gamma}(p)\tilde{G}(p) = 1$, tal que Γ é a inversa por convolução de G . Dessa forma, como demonstramos abaixo que $\tilde{\Gamma}(p)$ é analítica, as singularidades de $\tilde{G}(p)$ são os zeros de $\det \tilde{\Gamma}(p)$.

O fato de que $\tilde{\Gamma}^{-1}(p)$ proporciona uma extensão de $\tilde{G}(p)$ é consequência do decaimento mais rápido de Γ comparado ao de G . Definimos Γ pela seguinte série de Neumann

$$\Gamma = (1 + G_d^{-1} G_n)^{-1} G_d^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [G_d^{-1} G_n]^n G_d^{-1}, \quad (3.16)$$

com $G = G_d + G_n$, onde G_d é a contribuição diagonal de G dada por

$$G_{d,kl}(u, v) = G_{kk}(u, u) \delta_{kl} \delta(u, v), \quad (3.17)$$

e G_n é o resto

$$G_{n,kl}(u, v) = G_{kl}(u, v) - G_{d,kl}(u, v). \quad (3.18)$$

G_d e G_d^{-1} são operadores matriciais limitados uma vez que temos $G_d^{(0)} = -1$. A série de Neumann acima converge, já que $|G_n|$ é da ordem κ^3 e é pequeno para κ pequeno. Com esta definição, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.20. *A inversa por convolução da função de dois-pontos $\Gamma_{\ell_1 \ell_2}(u, v, \kappa) \equiv \Gamma_{\ell_1 \ell_2}(u, v) \equiv \Gamma_{\ell_1 \ell_2}(u - v)$ é analítica em κ , é limitada e satisfaz*

$$|\Gamma_{\ell_1 \ell_2}(x)| \leq \begin{cases} \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3\|\vec{x}\|_1 + 5|x^0| - 2}, & \text{se } |x^0| \neq 0, \\ \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3\|\vec{x}\|_1}, & \text{se } x^0 = 0, \end{cases}$$

para alguma constante positiva $\mathcal{O}(1)$, uniforme em κ e nos multi-índices ℓ_1 e ℓ_2 .

Demonstração: A prova é similar à prova do Teorema 3.17, mas para isto precisamos calcular as derivadas de Γ com respeito a κ_p , para este propósito usamos a relação $\Gamma G = G \Gamma = 1$ para obter

$$\partial^r \Gamma = - \sum_{s=0}^{r-1} \Gamma \partial^{r-s} G \partial^s \Gamma.$$

Assim, $\Gamma^{(r=0,1,2)}(u, v) = 0$, para $|u^0 - v^0| \geq 1$, $\Gamma^{(3)}(u, v) = -[\Gamma^{(0)}G^{(3)}\Gamma^{(0)}](u, v) = 0$, se $|u^0 - v^0| > 1$ e, pelo desbalanço de férmions, $\Gamma^{(4)}(u, v) = 0$, $|u^0 - v^0| > 1$. Logo, seguindo os passos da prova do Teorema 3.17, obtemos o resultado desejado. $\square$

Novamente, análogo ao Corolário 3.18, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Corolário 3.21 . $\tilde{\Gamma}(p)$ admite uma extensão analítica na região $|\Im m p^0| < -(5 - \epsilon) \ln |\kappa|$, $|\Im m p^j| < -(3 - \epsilon) \ln |\kappa|$ com $0 < \epsilon \ll 1$ e $j = 1, 2, 3$. Assim, para $0 < \kappa \ll 1$ temos uma lacuna espectral de massa de pelo menos $-(5 - \epsilon) \ln \kappa$, $0 < \epsilon \ll 1$.

No próximo capítulo, usamos os ingredientes estabelecidos até aqui para demonstrar a existência do decuplete de bárions.

Existência de Bárions

Nesse capítulo, usando os resultados obtidos e as ferramentas descritas nos capítulos anteriores, apresentamos os resultados espectrais para uma partícula no setor bariônico, com atenção especial ao caso do decuplo bariônico. Observamos também que os resultados aqui obtidos podem ser facilmente condicionados ao caso da mesma dimensão, matrizes de Dirac 4×4 e dois sabores, o modelo considerado na Ref. [16]. Para este propósito, do Teorema 3.21, é claro que $\tilde{\Gamma}^{-1}(p)$ proporciona uma extensão meromorfa de $\tilde{G}(p)$ na variável p^0 . Logo, lembrando que as curvas de dispersão $w(\vec{p}) \equiv w(\kappa, \vec{p})$ são soluções da equação implícita

$$\det \tilde{\Gamma}(p^0 = iw(\vec{p}), \vec{p}) = 0, \quad (4.1)$$

segue que, com $\vec{p}$ fixo, as curvas são isoladas. Assim, o objetivo deste capítulo será resolver a equação (4.1) e obter consequências da existência das curvas de dispersão.

4.1 Simetrias, Relações de Ortogonalidade e Outras Propriedades da Função de Dois-Pontos

Nessa seção, obtemos relações de ortogonalidade das funções de correlação de dois-bárions e identidades usando as simetrias do modelo e a transformação global de isospin descritas na Seção 2.3. As relações que obtemos aqui vão ser de grande utilidade para reduzir a função matricial de dois-pontos para uma forma bloco diagonal, com os menores blocos possíveis. Novamente, seguimos inicialmente as Refs. [8, 9].

Retomando a discussão que fizemos anteriormente (vide o final do Capítulo 2) sobre o grau de liberdade de isospin, iniciamos com uma proposição.

Proposição 4.22 . $G_{\ell_1 \ell_2}(x)$ é diagonal em I , I_z e, para I fixo, independente de I_z .

Demonstração: Sabemos que para cada $U \in \text{SU}(3)_f$, existem $\theta_1, \dots, \theta_8 \in \mathbb{R}$ tal que $U = \exp \left[i \sum_{k=1}^8 \theta_k (\lambda_k/2) \right]$, onde os λ_k são as matrizes de Gell-Mann e os $T_k = \lambda_k/2$ geram $\mathfrak{su}(3)$. Agora, usando a simetria de isospin nosso caso de três sabores (2.9), para qualquer $U \in \text{SU}(3)$ temos

$$\langle \psi_{f_1} \psi_{f_2} \psi_{f_3} (\bar{\psi}U)_{f_4} (\bar{\psi}U)_{f_5} (\bar{\psi}U)_{f_6} \rangle = \langle (U\psi)_{f_1} (U\psi)_{f_2} (U\psi)_{f_3} \bar{\psi}_{f_4} \bar{\psi}_{f_5} \bar{\psi}_{f_6} \rangle.$$

Denotamos esta relação como

$$(C(U \otimes U \otimes U))_{123;456} = ((U \otimes U \otimes U)C)_{123;456}, \quad (4.2)$$

onde $C_{123;456} \equiv \langle \psi_{f_1} \psi_{f_2} \psi_{f_3} \bar{\psi}_{f_4} \bar{\psi}_{f_5} \bar{\psi}_{f_6} \rangle$. Escrevemos $U = e^{i\theta\lambda/2}$, $T = \lambda/2$, onde $\theta\lambda = \theta_1\lambda_1, \theta_2\lambda_2, \theta_3\lambda_3$, com $\theta_{1,2,3} \in \mathbb{R}$. Logo, expandindo na variável θ , temos $U = 1 + i\theta T - \frac{\theta^2}{2}T^2 + \dots$, de modo que

$$\begin{aligned} U \otimes U \otimes U = & 1 \otimes 1 \otimes 1 + i\theta(T \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T) \\ & - \frac{\theta^2}{2}(T^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T^2 \\ & + 2T \otimes T \otimes 1 + 2T \otimes 1 \otimes T + 21 \otimes T \otimes T) \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Denotando por $w_{f_1 f_2 f_3}$, $v_{f_1 f_2 f_3}$ as componentes de um vetor no espaço produto $\otimes^3 \mathbb{C}$, multiplicando a Eq. (4.2) por $\bar{w}_{f_1 f_2 f_3}$ à esquerda e por $v_{f_1 f_2 f_3}$ à direita, e igualando os coeficientes de $i\theta_3$, obtemos a identidade

$$\bar{w}_{123}(CI_3)_{123;456}v_{456} = \bar{w}_{123}(I_3C)_{123;456}v_{456}, \quad (4.4)$$

onde $I_j = T_j \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes T_j \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes T_j$ ($T_j = \lambda_j/2$) é a j -componente do isospin individual ($I_x \equiv I_1$, $I_y \equiv I_2$ e $I_z \equiv I_3$) e temos

$$[T_+, T_-] = 2T_3, \quad [T_3, T_{\pm}] = \pm T_{\pm}, \quad (4.5)$$

para

$$T_{\pm} = T_1 \pm iT_2. \quad (4.6)$$

Similarmente, depois de somar as séries, em (4.3), para θ_1 , θ_2 e θ_3 , e logo igualando os coeficientes de $-(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)/2$ obtemos a identidade

$$\bar{w}_{123}(C\vec{I}^2)_{123;456}v_{456} = \bar{w}_{123}(\vec{I}^2C)_{123;456}v_{456},$$

onde

$$\vec{I}^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = (I_+ I_- + I_- I_+)/2 + I_3^2,$$

e $I_{\pm} = I_1 \pm iI_2$. I_3 ($\vec{I}^2$) é interpretado como a terceira componente (módulo quadrado) do isospin total bariônico. Também, temos

$$[I_+, I_-] = 2I_3, \quad [I_3, I_{\pm}] = \pm I_{\pm}. \quad (4.7)$$

Como os $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são auto-adjuntos, podemos escrever as relações acima como

$$(w, CI_3v)_{\otimes^3 \mathbb{C}} = (I_3w, Cv)_{\otimes^3 \mathbb{C}}; \quad (w, C\vec{I}^2v)_{\otimes^3 \mathbb{C}} = (\vec{I}^2w, Cv)_{\otimes^3 \mathbb{C}}. \quad (4.8)$$

Assim, se v e w correspondem a auto-funções, com auto-valores distintos, obtemos as relações de ortogonalidade.

Similarmente à identidade para I_3 , dada na Eq. (4.4), obtemos

$$(w, CI_{\pm}v)_{\otimes^3\mathbb{C}} = (I_{\mp}w, Cv)_{\otimes^3\mathbb{C}}. \quad (4.9)$$

Logo, tomamos $v = \chi_{II_z}$ and $w = \chi_{I(I_z-1)}$, onde $\chi_{I\ell}$ é a auto-função normalizada usual do isospin total I e ℓ denota a componente z do isospin. Daqui, χ_{II_z} satisfaz $I_{\pm}\chi_{II_z} = c_{\ell}^{\pm} \chi_{I(I_z\pm 1)}$, onde

$$c_{\ell}^{\pm} = [I(I+1) - I_z(I_z \pm 1)]^{1/2},$$

e usamos $[I_+, I_-] = 2I_z$ e $I^2 \equiv \bar{I}^2 = I_z^2 + (I_+I_- + I_-I_+)/2$. Substituindo na Eq. (4.9), com o índice *lower* no lado esquerdo. Também, notando que $c_{I_z}^- = c_{I_z-1}^+$,

$$(\chi_{I(I_z-1)}, C\chi_{I(I_z-1)})_{\otimes^3\mathbb{C}} = (\chi_{II_z}, C\chi_{II_z})_{\otimes^3\mathbb{C}},$$

o que implica na identidade

$$\langle B_{I(I_z-1)}(x) \bar{B}_{I(I_z-1)}(y) \rangle = \langle B_{II_z}(x) \bar{B}_{II_z}(y) \rangle. \quad (4.10)$$

É claro que, a Eq. (4.10) implica que todas as propriedades espectrais associadas a um bárion são as mesmas para I fixo, e todo I_z . $\square$

Da proposição 4.22, usando a simetria $SU(3)_f$, decorre que a função de dois-pontos $G(x)$ é bloco-diagonal e resulta decomposta em oito blocos 2×2 idênticos associado ao octeto com spin total $1/2$ e dez blocos 4×4 idênticos associado ao decuplete com spin total $3/2$. A inversa por convolução Γ tem a mesma estrutura em blocos. Contudo, o uso da simetria $SU(3)_f$ não permite concluir a diagonalidade dos blocos 2×2 e 4×4 . Mas, usando as simetrias do Teorema 2.11, podemos obter uma estrutura mais conveniente para cada bloco.

Antes disso, damos os campos compostos locais invariantes de gauge, que criam estados de bárions (com todos os campos com suporte no mesmo ponto). Para os antibárions, todos os campos devem estar sem barra, e só as componentes de spin *upper* aparecem. Com relação ao octeto, definimos os seguintes campos de partículas bariônicas:

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-d} - \bar{\psi}_{a+d} \bar{\psi}_{b-u}) \bar{\psi}_{c\pm u}, \\ n_{\pm} &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-d} - \bar{\psi}_{a+d} \bar{\psi}_{b-u}) \bar{\psi}_{c\pm d}, \\ \Xi_{\pm}^0 &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-s} - \bar{\psi}_{a+s} \bar{\psi}_{b-u}) \bar{\psi}_{c\pm s}, \\ \Xi_{\pm}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+d} \bar{\psi}_{b-s} - \bar{\psi}_{a+s} \bar{\psi}_{b-d}) \bar{\psi}_{c\pm s}, \\ \Sigma_{\pm}^+ &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-s} - \bar{\psi}_{a+s} \bar{\psi}_{b-u}) \bar{\psi}_{c\pm u}, \\ \Sigma_{\pm}^0 &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (2\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\mp s} - \bar{\psi}_{a-u} \bar{\psi}_{b+d} \bar{\psi}_{c\pm s} - \bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-d} \bar{\psi}_{c\pm s}), \\ \Sigma_{\pm}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a+d} \bar{\psi}_{b-s} - \bar{\psi}_{a+s} \bar{\psi}_{b-d}) \bar{\psi}_{c\pm d}, \\ \Lambda_{\pm} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} (\bar{\psi}_{a+u} \bar{\psi}_{b-d} - \bar{\psi}_{a+d} \bar{\psi}_{b-u}) \bar{\psi}_{c\pm s}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aqui, os subíndices $\pm$ denotam a z -componente $J_z = \pm \frac{1}{2}$ do spin total. n , p , Ξ^- e Ξ^0 tem isospin total $I = 1/2$; Σ^+ , Σ^0 e Σ^- tem $I = 1$ e Λ com $I = 0$. O espaço de Hilbert de estados físicos correspondentes são mostrados para ter a terceira componente de isospin indicada na Figura 1. Na Eq. (4.11), o símbolo da partícula está no lado esquerdo e o campo com barra que ele cria no lado direito.

Para o decuplete, nós definimos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^+ &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\mp d} + 2\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\mp u} \bar{\psi}_{c\pm d}), \\
\Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^+ &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\pm d}, \\
\Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^0 &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (2\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\mp d} + \bar{\psi}_{a\mp u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm d}), \\
\Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^0 &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm d}, \\
\Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\mp d}, \\
\Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm d}, \\
\Delta_{\frac{\pm 1}{2}}^{++} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\mp u}, \\
\Delta_{\frac{\pm 3}{2}}^{++} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\pm u}, \\
\Sigma_{\frac{\pm 3}{2}}^{*+} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Sigma_{\frac{\pm 1}{2}}^{*+} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm u} \bar{\psi}_{c\mp s} + 2\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\mp u} \bar{\psi}_{c\pm s}), \\
\Sigma_{\frac{\pm 3}{2}}^{*0} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Sigma_{\frac{\pm 1}{2}}^{*0} &= \frac{\epsilon_{abc}}{3\sqrt{2}} (\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\mp s} + \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\mp d} \bar{\psi}_{c\pm s} + \bar{\psi}_{a\mp u} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm s}), \\
\Sigma_{\frac{\pm 3}{2}}^{*-} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Sigma_{\frac{\pm 1}{2}}^{*-} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\pm d} \bar{\psi}_{c\mp s} + 2\bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\mp d} \bar{\psi}_{c\pm s}), \\
\Xi_{\frac{\pm 3}{2}}^{*0} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\pm s} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Xi_{\frac{\pm 1}{2}}^{*0} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\mp u} \bar{\psi}_{b\pm s} + 2\bar{\psi}_{a\pm u} \bar{\psi}_{b\mp s}) \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Xi_{\frac{\pm 3}{2}}^{*-} &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\pm s} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Xi_{\frac{\pm 1}{2}}^{*-} &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} (\bar{\psi}_{a\mp d} \bar{\psi}_{b\pm s} + 2\bar{\psi}_{a\pm d} \bar{\psi}_{b\mp s}) \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Omega_{\frac{\pm 3}{2}}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{6} \bar{\psi}_{a\pm s} \bar{\psi}_{b\pm s} \bar{\psi}_{c\pm s}, \\
\Omega_{\frac{\pm 1}{2}}^- &= \frac{\epsilon_{abc}}{2\sqrt{3}} \bar{\psi}_{a\pm s} \bar{\psi}_{b\pm s} \bar{\psi}_{c\mp s},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Figura 1: O Octeto Bariônico.

Os campos dados na Eq. (4.12) estão associados a partículas do decuplete bariônico e estão representados na Fig. 2. O valor do isospin total I é igual a $3/2$ para Δ^- , Δ^0 , Δ^+ e Δ^{++} ; $I = 1$ para Σ^{*-} , Σ^{*+} e Σ^{*0} ; $I = 1/2$ para Ξ^{*-} e Ξ^{*0} ; e $I = 0$ para Ω^- .

Figura 2: O Decuplete Bariônico.

Usando as relações obtidas até agora reduz a matriz de correlação bárion-bárion $G_{r_1 r_2}$ para uma forma diagonal em blocos com oito blocos 2×2 idênticos, associados ao octeto de bárions, com spin total $1/2$, e dez blocos 4×4 , associados decuplete de bárions, com spin total $3/2$. Agora, usando as simetrias do Teorema 2.11 obtemos os seguintes resultados.

Proposição 4.23 . $\langle p_{\pm}(x)\bar{p}_{\mp}(y) \rangle = 0$, $\langle p_{+}(x)\bar{p}_{+}(y) \rangle = \langle p_{-}(x)\bar{p}_{-}(y) \rangle$. *O mesmo para os n 's.*

Demonstração: Considere a composição $\mathcal{PCT}$ que age nos campos básicos como segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{PCT}(\psi_4(x)) &= -i\bar{\psi}_3(-x), & \mathcal{PCT}(\psi_3(x)) &= i\bar{\psi}_4(-x), \\ \mathcal{PCT}(\bar{\psi}_3(x)) &= -i\psi_4(-x), & \mathcal{PCT}(\bar{\psi}_4(x)) &= i\psi_3(-x).\end{aligned}$$

Então, temos $\langle p_{+}(x)\bar{p}_{-}(y) \rangle = -\langle p_{+}(-y)\bar{p}_{-}(-x) \rangle$ e usando a invariância sob translação obtemos o resultado desejado. Analogamente, provamos que $\langle p_{-}(x)\bar{p}_{+}(y) \rangle = 0$. Finalmente, $\langle p_{+}(x)\bar{p}_{+}(y) \rangle = \langle \mathcal{PCT}(p_{+}(x)\bar{p}_{+}(y)) \rangle = \langle \mathcal{PCT}(\bar{p}_{+}(y))\mathcal{PCT}(p_{+}(x)) \rangle = \langle p_{-}(-y)\bar{p}_{-}(-x) \rangle = \langle p_{-}(x)\bar{p}_{-}(y) \rangle$. $\square$

Também podemos estabelecer a proposição seguinte.

Proposição 4.24 . $\langle p_{\pm}(x)\bar{n}_{\mp}(y) \rangle = \langle p_{\pm}(x)n_{\pm}(y) \rangle = \langle n_{\pm}(x)\bar{p}_{\mp}(y) \rangle = \langle n_{\pm}(x)\bar{p}_{\pm}(y) \rangle = 0$

Demonstração: É consequência direta do Teorema 4.22 . $\square$

Proposição 4.25 . *Seja $\phi_s \equiv B_{(3/2)(3/2)s}(x)$ ($\bar{\phi}_s \equiv \bar{B}_{(3/2)(3/2)s}(x)$). Então*

- a) $\langle \phi_{3/2}(x)\bar{\phi}_{-3/2}(y) \rangle = \langle \phi_{1/2}(x)\bar{\phi}_{-1/2}(y) \rangle = 0$;
- b) $\langle \phi_{\mp 3/2}(x)\bar{\phi}_{\mp 1/2}(y) \rangle = \langle \phi_{\pm 1/2}(x)\bar{\phi}_{\pm 3/2}(y) \rangle$;
- c) $\langle \phi_{-3/2}(x)\bar{\phi}_{1/2}(y) \rangle = -\langle \phi_{-1/2}(x)\bar{\phi}_{3/2}(y) \rangle$;
- d) $\langle \phi_{3/2}(x)\bar{\phi}_{3/2}(y) \rangle = \langle \phi_{-3/2}(x)\bar{\phi}_{-3/2}(y) \rangle$;
- e) $\langle \phi_{1/2}(x)\bar{\phi}_{1/2}(y) \rangle = \langle \phi_{-1/2}(x)\bar{\phi}_{-1/2}(y) \rangle$.

Demonstração: Segue de uma aplicação direta da composição $\mathcal{PCT}$. $\square$

Dessa forma, temos:

Lema 4.26 . G e Γ verificam as seguintes propriedades:

1. $G_{kl}(x) = [G_{lk}(x)]^*$ e $\Gamma_{kl}(x) = [\Gamma_{lk}(x)]^*$.
2. Para $\chi \in \mathbb{R}$, seja $p^0 = i\chi$. Nós temos $\tilde{G}_{lk}(i\chi, \vec{p}) = [\tilde{G}_{kl}(i\chi, \vec{p})]^*$ e $\tilde{\Gamma}_{lk}(i\chi, \vec{p}) = [\tilde{\Gamma}_{kl}(i\chi, \vec{p})]^*$.

Demonstração:

1. Escrevendo $x = u - v$. Se $u^0 < v^0$, i.e. $x^0 < 0$, temos

$$\begin{aligned}G_{\ell_1\ell_2}(u, v) &= \langle B_{\ell_1}(u)\bar{B}_{\ell_2}(v) \rangle \\ &= -\langle B_{\ell_1}(-u^0, \vec{u})\bar{B}_{\ell_2}(-v^0, \vec{v}) \rangle^* \\ &= \langle \bar{B}_{\ell_2}(-v^0, \vec{v})B_{\ell_1}(-u^0, \vec{u}) \rangle^* \\ &= [G_{\ell_2\ell_1}((-v^0, \vec{v}), (-u^0, \vec{u}))]^* \\ &= [G_{\ell_2\ell_1}((-v^0, -\vec{v}), (-u^0, -\vec{u}))]^* \\ &= [G_{\ell_2\ell_1}(u, v)]^*,\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é consequência da simetria reversão no tempo $\mathcal{T}$, a terceira é consequência do produto na álgebra de Grassmann, a quarta é da definição da função de dois-pontos, a quinta é pela paridade de G na componente espacial e a última é pela invariância translacional. Se $v^0 < u^0$, i.e. $x^0 > 0$, usamos a representação espectral de G (Teorema 3.14) que diz que $G(x^0, \vec{x}) = G(-x^0, \vec{x})$ e estamos no caso anterior. Se $x^0 = 0$, i.e. $u^0 = v^0$, então

$$\begin{aligned}
 G_{\ell_1 \ell_2}(u, v) &= \langle B_{\ell_1}(-1/2, \vec{u} - \vec{v}) \bar{B}_{\ell_2}(-1/2, \vec{0}) \rangle \\
 &= \langle T_0^{-1} T^{\vec{u} - \vec{v}} B_{\ell_1}(1/2, \vec{0}) \Theta(B_{\ell_2}(1/2, \vec{0})) \rangle \\
 &= \left(B_{\ell_2}(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{-1} \hat{T}^{\vec{u} - \vec{v}} B_{\ell_1}(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} \\
 &= \left(\hat{T}_0^{-1} \hat{T}^{\vec{v} - \vec{u}} B_{\ell_2}(1/2, \vec{0}), B_{\ell_1}(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}} \\
 &= \left(B_{\ell_1}(1/2, \vec{0}), \hat{T}_0^{-1} \hat{T}^{\vec{v} - \vec{u}} B_{\ell_2}(1/2, \vec{0}) \right)_{\mathcal{H}}^* \\
 &= \langle T_0^{-1} T^{\vec{v} - \vec{u}} B_{\ell_2}(1/2, \vec{0}) \Theta(B_{\ell_1}(1/2, \vec{0})) \rangle^* \\
 &= \langle B_{\ell_2}(-1/2, \vec{v} - \vec{u}) \bar{B}_{\ell_1}(-1/2, \vec{0}) \rangle^* \\
 &= [G_{\ell_2 \ell_1}((-1/2, \vec{u} - \vec{v}), (-1/2, \vec{0}))]^* \\
 &= [G_{\ell_2 \ell_1}(u, v)]^*,
 \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é consequência da invariância translacional, a terceira é pela fórmula de F-K e a definição de Θ , a quarta é pelo fato que $\hat{T}_0$ é auto-adjunto e os $\hat{T}_j$ são unitários, a sexta decorre da fórmula de F-K, a oitava segue da simetria de paridade e, depois, da invariância translacional. Para Γ , usamos as propriedades de G e o fato de Γ ser a inversa por convolução de G .

2. Da definição de transformada de Fourier e do item anterior, segue que

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{kl}(i\chi, \vec{p}) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{\chi x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{kl}(x^0, \vec{x}) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{\chi x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} [G_{lk}(x^0, \vec{x})]^* \\
 &= \left[\sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{\chi x^0} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{lk}(x^0, \vec{x}) \right]^* \\
 &= [\tilde{G}_{lk}(i\chi, -\vec{p})]^*.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Mas a simetria de paridade nos diz que $G_{kl}(x^0, \vec{x}) = G_{kl}(x^0, -\vec{x})$, então

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{kl}(p) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ip^0 x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{kl}(x^0, \vec{x}) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ip^0 x^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{kl}(x^0, -\vec{x}) \\
 &= \sum_{x \in \mathbb{Z}} e^{-ip^0 x^0} e^{-i(-\vec{p}) \cdot (-\vec{x})} G_{kl}(x^0, -\vec{x}) \\
 &= \tilde{G}_{kl}(p^0, -\vec{p}).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Usando (4.13) e (4.14), obtemos

$$\tilde{G}_{kl}(i\chi, \vec{p}) = [\tilde{G}_{lk}(i\chi, -\vec{p})]^* = [\tilde{G}_{lk}(i\chi, \vec{p})]^*.$$

□

Finalmente, usaremos o seguinte teorema que é importante na obtenção do espectro de um bárion.

Teorema 4.27. *Seja $0 < \kappa \ll 1$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d = 3$, e^0 o vetor unitário na direção temporal, e^i, e^j , com $i, j = 1, \dots, d = 3$, os vetores unitários nas direções espaciais, e $\epsilon, \epsilon', \epsilon'' = \pm 1$. Os seguintes comportamentos a curtas distâncias valem para G e Γ . Começamos com a função de dois-pontos do decuplo. Neste caso, temos:*

$$G_{r_1 r_2}(x) = \begin{cases} [-1 + c_8 \kappa^8 + \mathcal{O}(\kappa^9)] \delta_{r_1 r_2} & , \quad x = 0; \\ (-\kappa^3 + c_9 \kappa^9) \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{11}) & , \quad x = \epsilon e^0; \\ -\frac{1}{8} \kappa^3 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^9) & , \quad x = \epsilon e^j; \\ [(-\kappa^6 + c_{12} \kappa^{12}) \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{13})] \delta_{\mu 0} + [-\frac{1}{8} \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10})] \delta_{\mu j} & , \quad x = 2\epsilon e^\mu; \\ (\frac{1}{16} \delta_{r_1 \frac{3}{2}} - \frac{1}{16} \delta_{r_1 \frac{1}{2}}) \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^1 + \epsilon' e^2; \\ (-\frac{1}{32} \delta_{r_1 \frac{3}{2}} + \frac{1}{32} \delta_{r_1 \frac{1}{2}}) \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^1 + \epsilon' e^3, \\ & \quad \epsilon e^2 + \epsilon' e^3; \\ -\frac{1}{4} \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \\ \frac{17}{64} \kappa^9 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + 2\epsilon' e^j; \\ -\frac{3}{8} \kappa^9 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{13}) & , \quad x = 2\epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \\ (\frac{3}{32} \delta_{s \frac{3}{2}} - \frac{5}{32} \delta_{s \frac{1}{2}}) \kappa^9 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^1 + \epsilon'' e^2; \\ (-\frac{3}{32} \delta_{s \frac{3}{2}} + \frac{1}{32} \delta_{s \frac{1}{2}}) \kappa^9 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^i + \epsilon'' e^3, \\ & \quad i = 1, 2; \\ (-\kappa^9 + c_{15} \kappa^{15}) \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{16}) & , \quad x = 3\epsilon e^0; \\ d_{12} \kappa^{12} \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{13}) & , \quad x = 3\epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \\ (-\kappa^{12} + c_{18} \kappa^{18}) \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{19}) & , \quad x = 4\epsilon e^0; \\ d_{15} \kappa^{15} \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{16}) & , \quad x = 4\epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \end{cases} \quad (4.15)$$

e

$$\Gamma_{r_1 r_2}(x) = \begin{cases} [-1 - \frac{67}{32} \kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^8)] \delta_{r_1 r_2} & , \quad x = 0; \\ (\kappa^3 + c'_9 \kappa^9) \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0; \\ \frac{1}{8} \kappa^3 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^9) & , \quad x = \epsilon e^j; \\ [c'_{12} \kappa^{12} \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{13})] \delta_{\mu 0} + [\frac{7}{64} \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10})] \delta_{\mu j} & , \quad x = 2\epsilon e^\mu; \\ (-\frac{3}{32} \delta_{r_1 \frac{3}{2}} + \frac{1}{32} \delta_{r_1 \frac{1}{2}}) \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^1 + \epsilon' e^2; \\ (0 \delta_{r_1 \frac{3}{2}} - \frac{1}{16} \delta_{r_1 \frac{1}{2}}) \kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^1 + \epsilon' e^3, \epsilon e^2 + \epsilon' e^3; \\ \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \\ \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + 2\epsilon' e^j; \\ \mathcal{O}(\kappa^{13}) & , \quad x = 2\epsilon e^0 + \epsilon' e^j; \\ \mathcal{O}(\kappa^{10}) & , \quad x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^i + \epsilon'' e^{j>i}; \\ c'_{15} \kappa^{15} \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{16}) & , \quad x = 3\epsilon e^0; \\ c'_{18} \kappa^{18} \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{19}) & , \quad x = 4\epsilon e^0; \end{cases} \quad (4.16)$$

Para a função de dois-pontos do octeto, os comportamentos a curtas distâncias para $x = r\epsilon e^\mu$, $r = 1, 2, 3, 4$, $\epsilon e^0 + \epsilon' e^j$, $\epsilon e^0 + 2\epsilon' e^j$, $2\epsilon e^0 + \epsilon' e^j$, $3\epsilon e^0 + \epsilon' e^j$, $4\epsilon e^0 + \epsilon' e^j$ são os mesmos do decuplete, até a ordem considerada em cada caso. Entretanto, para $x = \epsilon e^i + \epsilon' e^j$, $x = \epsilon e^0 + \epsilon' e^i + \epsilon'' e^j$, com $ij = 12, 13, 23$, os resultados são diferentes e dados respectivamente por

$$G_{r_1 r_2} = -\frac{1}{16}\kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^7) \quad , \quad \Gamma_{r_1 r_2} = \frac{1}{32}\kappa^6 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^7), \quad (4.17)$$

e

$$G_{r_1 r_2} = -\frac{5}{32}\kappa^9 \delta_{r_1 r_2} + \mathcal{O}(\kappa^{10}) \quad , \quad \Gamma_{r_1 r_2} = \mathcal{O}(\kappa^{10}). \quad (4.18)$$

Aqui, c 's, c' 's, d 's e d' 's são constantes, independentes de κ e do spin, que podem ser calculadas.

Demonstração: Não vamos entrar em detalhes nesta prova, para mais detalhes veja [9]. $\square$

4.2 Existência do Decuplete Bariônico

A partir de agora, apresentamos os resultados principais que estabelecemos nesta tese (os resultados das seções anteriores já foram obtidos em trabalhos anteriores) demonstrando a existência do decuplete bariônico. Lembramos que, em [23], o espectro do octeto foi obtido aplicando o TFIA, o qual não pode ser usado neste caso.

Na impossibilidade de usar o TFIA, aplicaremos os resultados estabelecidos no teorema mais geral, denominado Teorema de Preparação de Weierstrass (TPW) para obter os nossos resultados. No que segue, $0 < \kappa_{\text{polym}} \ll 1$ é o mesmo do Teorema 2.2.

Lema 4.28. $\tilde{\Gamma}_{s_1 s_2}(\kappa, r, \vec{p}) \equiv \tilde{\Gamma}_{s_1 s_2}(p^0 = i(-3 \ln \kappa + r), \vec{p})$ é real analítica no domínio $(-\kappa_{\text{polym}}, \kappa_{\text{polym}}) \times ((8 - \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}}, (-2 + \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}}) \times \mathbb{T}^3$, onde $0 < \kappa_{\text{polym}} \ll 1$ e $0 < \epsilon \ll 1$.

Demonstração: Primeiro, notamos que, como temos analiticidade de $\tilde{\Gamma}$ na região $|\kappa| < \kappa_{\text{polym}}$ e pela forma de suas contribuições em κ , ao introduzir o termo $-3 \ln \kappa$ não perdemos a analiticidade de $\tilde{\Gamma}$ no parâmetro κ . Agora, vamos ver a analiticidade no parâmetro r , usando a definição de transformada de Fourier:

$$\tilde{\Gamma}_{s_1 s_2}(\kappa, r, \vec{p}) = \sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Gamma_{s_1 s_2}(0, \vec{x}) + \sum_{n \geq 1, \vec{x} \in \mathbb{Z}^3} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Gamma_{s_1 s_2}(n, \vec{x}) [\kappa^{-3n} e^{nr} + \kappa^{3n} e^{-nr}]. \quad (4.19)$$

Então, pelo Teorema 4.27, para $\kappa = 0$, $\tilde{\Gamma}(0, r, \vec{p}) = e^r - 1$ é uma função analítica no parâmetro r em todo $\mathbb{R}$. Para $\kappa \neq 0$, pelo Teorema 3.20, temos

$$\begin{aligned} |e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Gamma_{s_1 s_2}(0, \vec{x})| &\leq \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3|\vec{x}|}, \\ |e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Gamma_{s_1 s_2}(n, \vec{x}) \kappa^{-3n} e^{nr}| &\leq \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3|\vec{x}|} |\kappa|^{2n-2} e^{nr} = |\kappa|^{3|\vec{x}|} e^{(2n-2) \ln |\kappa| + nr}, \\ |e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Gamma_{s_1 s_2}(n, \vec{x}) \kappa^{3n} e^{-nr}| &\leq \mathcal{O}(1) |\kappa|^{3|\vec{x}|} |\kappa|^{8n-2} e^{-nr} = |\kappa|^{3|\vec{x}|} e^{(8n-2) \ln |\kappa| - nr} \end{aligned}$$

Assim, pelo teste M de Weierstrass, a série da Eq. (4.19) converge uniformemente para r no intervalo $((\frac{8n-2}{n}) \ln |\kappa|, (\frac{2-2n}{n}) \ln |\kappa|)$, para $n \gg 1$. Então, $r \in ((8 - \epsilon) \ln |\kappa|, (-2 + \epsilon) \ln |\kappa|)$,

para $0 < \epsilon \ll 1$. Observamos que, até agora, obtivemos um intervalo onde temos analiticidade em r , mas que este intervalo depende de κ . Portanto, com o objetivo de obter independência em κ , e usando o fato que $(8 - \epsilon) \ln |\kappa| < (8 - \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}} < (-2 + \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}} < (-2 + \epsilon) \ln |\kappa|$, podemos considerar $r \in ((8 - \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}}, (-2 + \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}})$ obtendo-se assim o resultado desejado. $\square$

Observação 4.29. *Da prova do lema anterior, temos as seguintes observações:*

1. $\tilde{\Gamma}$ é analítica em conjunto nos parâmetros κ and r , uniformemente em $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$.
2. Se $r \in \mathbb{C}$, da mesma forma, obtemos analiticidade para r na faixa

$$\{z \in \mathbb{C} : (8 - \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}} < \Re z < (-2 + \epsilon) \ln \kappa_{\text{polym}}\}$$

para $0 < \epsilon \ll 1$. Então, depois estendendo para κ complexo, temos $\tilde{\Gamma}$ estendido para um domínio de $\mathbb{C}^2$.

Agora, usando a Proposição 4.23, temos que a função de dois-prótons e de dois-nêutrons (respectivamente, p e n na lista de partículas do octeto dada acima) é diagonal no spin em todas as ordem em κ . Para os bárions com spin $3/2$ do decupeto, consideramos as correspondências $3/2 \leftrightarrow 1, -3/2 \leftrightarrow 2, 1/2 \leftrightarrow 3$ e $-1/2 \leftrightarrow 4$, na base de spin. Assim, usando a Proposição 4.25 e o Lema 4.26 temos que este bloco tem a forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c & d \\ 0 & a & \bar{d} & -\bar{c} \\ \bar{c} & d & b & 0 \\ \bar{d} & -c & 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

onde a barra aqui denota a conjugação complexa.

Consequentemente, esta mesma estrutura matricial também é válida para as transformadas de Fourier $\tilde{G}_{ss'}(p^0 = i\chi, \vec{p})$ e $\tilde{\Gamma}_{ss'}(p^0 = i\chi, \vec{p})$, $\chi \in \mathbb{R}$. Logo, deste fato e lembrando que, da Eq. (4.1), as curvas de dispersão de um bárion $w(\kappa, \vec{p})$ são as soluções de $\det \tilde{\Gamma}(p^0 = iw(\vec{p}), \vec{p}) = 0$ e o fato decorrente da estrutura descrita acima o determinante é

$$\det \tilde{\Gamma}(\kappa, r, \vec{p}) = \left[\tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, r, \vec{p}) \tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, r, \vec{p}) - \left| \tilde{\Gamma}_{31}(\kappa, r, \vec{p}) \right|^2 - \left| \tilde{\Gamma}_{41}(\kappa, r, \vec{p}) \right|^2 \right]^2 = 0. \quad (4.20)$$

Então, se

$$\Phi(\kappa, r, \vec{p}) := \tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, r, \vec{p}) \tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, r, \vec{p}) - \left| \tilde{\Gamma}_{31}(\kappa, r, \vec{p}) \right|^2 - \left| \tilde{\Gamma}_{41}(\kappa, r, \vec{p}) \right|^2, \quad (4.21)$$

o problema de encontrar as curvas de dispersão dos bárions é equivalente a encontrar as soluções da equação implícita

$$\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = 0. \quad (4.22)$$

Diferentes ferramentas podem ser usadas para resolver esta equação, mas para usá-las, precisamos de mais informações acerca da função Φ . Para esse fim, vemos que, pelo Lema 4.28,

$\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ é uma função analítica real nos parâmetros κ e r , uniforme em $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, mas pelos módulos ao quadrado de $\tilde{\Gamma}_{31}(\kappa, r, \vec{p})$ e $\tilde{\Gamma}_{41}(\kappa, r, \vec{p})$. Esta, em princípio, não é uma função analítica complexa. Para obter analiticidade complexa, usamos o fato que $|\tilde{\Gamma}_{31}(\kappa, r, \vec{p})|^2$ e $|\tilde{\Gamma}_{41}(\kappa, r, \vec{p})|^2$ são funções analíticas reais e consideramos sua complexificação (ver Proposição **A.53** no Apêndice).

Assim, mantendo a notação para a nova função $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ que resulta depois de substituir as complexificações indicadas na sua definição, obtemos analiticidade complexa.

Agora, para ter uma melhor informação sobre Φ precisamos de uma forma, explícita quanto possível, dos termos envolvidos na sua definição e isso é possível usando as informações do Teorema 4.27 que dá o seguinte lema.

Lema 4.30 . *Seja $\Sigma(\vec{p}) \equiv \sum_{i=1,2,3} \cos p^i$, temos os seguintes comportamentos para os elementos da matriz $\tilde{\Gamma}_{ij}(\kappa, r, \vec{p})$*

$$\tilde{\Gamma}_{jj}(\kappa, r, \vec{p}) = (e^r - 1) + \frac{1}{4} \Sigma(\vec{p}) \kappa^3 + \kappa^6 [\ell(r) + H_{jj}(\vec{p})] + A_{jj}(\kappa, r, \vec{p}), \quad j = 1, 3, \quad (4.23)$$

e

$$\tilde{\Gamma}_{31,41}(\kappa, r, \vec{p}) = \kappa^7 A_{31,41}(\kappa, r, \vec{p}), \quad (4.24)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa, r, \vec{p}) &= (e^r - 1)^2 + \frac{1}{2} \Sigma(\vec{p}) (e^r - 1) \kappa^3 \\ &+ (e^r - 1) [2\ell(r) + H_{11}(\vec{p}) + H_{33}(\vec{p})] \kappa^6 + \frac{1}{16} \Sigma(\vec{p})^2 \kappa^6 + \kappa^7 A(\kappa, r, \vec{p}), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde os $A_{ij}(\kappa, r, \vec{p})$ são analíticas em conjunto em (κ, r) , uniformemente em $\vec{p}$, e os elementos diagonais $A_{jj}(\kappa, r, \vec{p})$ são da ordem $\kappa^7 r^{k \geq 0}$, $A(\kappa, r, \vec{p})$ é analítica em $(\kappa, r, \vec{p})$, com $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$. Além disso,

$$\begin{aligned} H_{11}(\vec{p}) &= \frac{1}{32} [7(\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3) - 12 \cos p_1 \cos p_2], \\ H_{33}(\vec{p}) &= \frac{1}{32} [7(\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3) + 4 \cos p_1 \cos p_2 - 8(\cos p_1 \cos p_3 + \cos p_2 \cos p_3)], \\ \ell(r) &= -\frac{67}{32} + c'_9 e^r + c'_{12} e^{2r} + c'_{15} e^{3r} + c'_{18} e^{4r}, \end{aligned}$$

onde os coeficientes c' são os dados no Teorema 4.27. Por último, para qualquer $\vec{p}$ fixo, obtemos

$$\Phi(0, 0, \vec{p}) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r}(0, 0, \vec{p}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(0, 0, \vec{p}) = 2. \quad (4.26)$$

Para κ, r reais $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$ and $\kappa > 0$, $\tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, \vec{p})$, $\tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, \vec{p})$ e $\Phi(\kappa, \vec{p})$ são reais.

Demonstração: Advém de cálculos diretos, usando a definição de transformada de Fourier e as informações sobre Γ do Teorema 4.27. $\square$

Antes de dar o nosso resultado principal sobre a existência e as propriedades das curvas de dispersão de um baryon no decuplete, damos uma ideia intuitiva para achar a solução da Eq. (4.22). Considerando $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ dado na Eq. (4.25), obtemos a equação implícita aproximada, para r e κ pequenos,

$$\Phi(\kappa, r, \vec{p}) \approx (r + \frac{1}{4} \Sigma(\vec{p}) \kappa^3)^2 = 0,$$

Com as duas soluções explícitas $r(\kappa, \vec{p}) = -\frac{1}{4}\Sigma(\vec{p})\kappa^3$. Para a equação implícita $\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = 0$, obtemos $\Phi(0, 0) = 0$, mas a primeira derivada parcial da hipótese do Teorema da Função Implícita Analítica (TFIA) não verifica a hipótese exigida, já que temos $\frac{\partial \Phi}{\partial r}(0, 0) = 0$, pela Eq. (4.26), no nosso caso com multiplicidade (dupla).

Contudo, nós empregamos o Teorema de Preparação de Weierstrass (TPW) para determinar as soluções da Eq. (4.22). Este teorema reduz a equação para os zeros de complicada função Φ para uma equação para os zeros de um polinômio em r , o qual é quadrático aqui. Explicitamente, temos a equação polinomial

$$r^2 + b(\kappa, \vec{p})r + c(\kappa, \vec{p}) = 0,$$

onde os coeficientes $b(\kappa, \vec{p})$ e $c(\kappa, \vec{p})$ são funções analíticas conjuntas de $\kappa, \vec{p}$ e são dadas recursivamente em termos das derivadas parciais de $\tilde{\Gamma}_{ij}$, com respeito a κ, r . Assim, obtém-se as soluções explícitas

$$r_{\pm}(\kappa, \vec{p}) = \frac{1}{2} \left[-b(\kappa, \vec{p}) \pm \sqrt{\Delta(\kappa, \vec{p})} \right], \quad (4.27)$$

onde $\Delta(\kappa, \vec{p})$ é a discriminante

$$\Delta(\kappa, \vec{p}) = b(\kappa, \vec{p})^2 - 4c(\kappa, \vec{p}), \quad (4.28)$$

e as soluções $r_{\pm}$ podem então ser analisadas para suas propriedades de suavidade.

A seguir, para qualquer função $f(\kappa, r, \vec{p})$, analítica conjunta em κ e r , em algum domínio, denotamos a sua representação por série de potências como

$$f(\kappa, r, \vec{p}) = \sum_{n,m \geq 0} f_{n,m}(\vec{p}) \kappa^n r^m.$$

Dado isso, estamos prontos para continuar estabelecendo um de nossos principais teoremas, baseado na aplicação do TPW, sobre a existência das curvas de dispersão para os bárions do decuplete, como segue.

Teorema 4.31 . *Consideremos a função $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ dada na Eq. (4.21). Existe uma função $Q(\kappa, r, \vec{p})$ e um polinômio mônico de Weierstrass $W(\kappa, r, \vec{p})$, ambos analíticos conjuntamente em κ, r numa vizinhança $\mathcal{N}$ de $(\kappa, r) = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$, independente de $\vec{p}$, de tal modo que temos $Q(\kappa, r, \vec{p}) \neq 0$ em $\mathcal{N}$ e também*

$$Q(\kappa, r, \vec{p})\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = W(\kappa, r, \vec{p}), \quad (4.29)$$

em $\mathcal{N}$. Além disso, o polinômio de Weierstrass é quadrático em r e é dado por

$$W(\kappa, r, \vec{p}) = r^2 + b(\kappa, \vec{p})r + c(\kappa, \vec{p}), \quad (4.30)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} b(\kappa, \vec{p}) &= \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})\kappa^3 + \left[2c'_9 + 2c'_{12} + 2c'_{15} + 2c'_{18} - \frac{67}{16} + H_{11}(\vec{p}) + H_{33}(\vec{p}) + \frac{1}{16}(\Sigma(\vec{p}))^2 \right] \kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7), \\ c(\kappa, \vec{p}) &= \frac{1}{16} \left(\sum_{j=1}^3 \cos p_j \right)^2 \kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7), \end{aligned} \quad (4.31)$$

e $Q(\kappa, r, \vec{p})$ satisfaz, para $\alpha + j \geq 4$; $\alpha \geq 6$ para $j = 0$.

$$Q(\kappa, r, \vec{p}) = 1 - r + \frac{5}{12}r^2 - \frac{1}{12}r^3 + \frac{1}{4}\Sigma(\vec{p})\kappa^3 + \mathcal{O}(\kappa^\alpha r^j). \quad (4.32)$$

Ademais, $b(\kappa, \vec{p})$ e $c(\kappa, \vec{p})$ são funções limitadas.

Observação 4.32. Antes de dar a prova deste teorema, podemos constatar que, usando a Eq. (4.31), conforme ao calculado no Apêndice (ver Eq. (A.10)), temos que $\Delta(\kappa, \vec{p}) = \mathcal{O}(\kappa^7)$. Para encontrar o seu valor, precisamos de mais informações sobre os valores de correlação nas potências mais altas em κ e r . Isso implica fazer cálculos algébricos mais complicadas do que os feitos até agora.

Demonstração: É claro que $\Phi_{n,m} \in C^\omega(\mathbb{T}^3)$. Agora, para qualquer $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, o TPW nos garante que existe um polinômio de Weierstrass $W(\kappa, r, \vec{p}) = r^2 + b(\kappa, \vec{p})r + c(\kappa, \vec{p})$, onde $b(\kappa, \vec{p}) = \sum_{n \geq 0} b_n(\vec{p})\kappa^n$ e $c(\kappa, \vec{p}) = \sum_{n \geq 0} c_n(\vec{p})\kappa^n$; e uma função $Q(\kappa, r, \vec{p}) = \sum_{n,m \geq 0} Q_{n,m}(\vec{p})\kappa^n r^m$ real analítica e sem zeros em uma vizinhança $\mathcal{N}$ de $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que a igualdade

$$Q(\kappa, r, \vec{p})\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = W(\kappa, r, \vec{p})$$

é verificada em $\mathcal{N}$. Também, pelas relações de recorrência obtidas do TPW (ver apêndice), temos que $Q_{n,m}, b_n, c_n \in C^\omega(\mathbb{T}^3)$. Agora, veremos que $\mathcal{N}$ não depende de $\vec{p}$. Para isso, usamos a uniformidade em $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$ obtida a partir da prova do Lema 4.28. Seja $\Psi(\kappa, r, \vec{p}) = r^2$, então

$$|\Psi_{n,m}(\vec{p})| = \begin{cases} 1, & \text{if } n = 0, m = 2; \\ 0, & \text{other cases.} \end{cases}$$

Além disso, pela analiticidade uniforme, precisamos da existência de um $R > 0$ (independente de $\vec{p}$), tal que

$$|\Phi_{n,m}(\vec{p})|R^{n+m} \leq \sup_{k,l \geq 0} |\Phi_{k,l}(\vec{p})|R^{k+l} \leq \sup_{k,l \geq 0; \vec{p} \in \mathbb{T}^3} |\Phi_{k,l}(\vec{p})|R^{k+l}.$$

e, então, que existem constantes positivas M e N , de modo que

$$\max\{|\Phi_{n,m}(\vec{p})|, |\Psi_{n,m}(\vec{p})|\} \leq MN^{n+m}$$

vale para todos os $n, m \geq 0$. Assim, pela prova do TPW [10], podemos escolher constantes $A > 0$, $B > N$ e $C > N$ (independentes de $\vec{p}$), tais que

$$|Q_{n,m}(\vec{p})| \leq AC^n B^m,$$

para todos os $n, m \geq 0$, e isso define uma vizinhança $\mathcal{N}$ of $(0,0)$ (independente de $\vec{p}$) onde (4.29) vale. Também, das fórmulas de recorrência dadas no Apêndice, obtemos $b(\kappa, \vec{p}) = \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})\kappa^3 + \left[2c'_9 + 2c'_{12} + 2c'_{15} + 2c'_{18} - \frac{67}{16} + H_{11}(\vec{p}) + H_{33}(\vec{p}) + \frac{1}{16}(\Sigma(\vec{p}))^2\right]\kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7)$, $c(\kappa, \vec{p}) =$

$$\frac{1}{16} \left(\sum_{j=1}^3 \cos p_j \right)^2 \kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7), \quad Q_{1,0}(\vec{p}) = Q_{2,0}(\vec{p}) = 0, \quad Q_{3,0}(\vec{p}) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^3 \cos p_j \quad \text{e} \quad Q_{0,n}(\vec{p}) = \frac{d^n}{dr^n} \left[\left(\frac{r}{e^r - 1} \right)^2 \right]_{r=0}, \quad \forall n \geq 0.$$

Finalmente, $b(\kappa, \vec{p})$ é menos a soma das soluções (raízes) e $c(\kappa, \vec{p})$ é o produto de soluções do polinômio de Weierstrass W . Desde que as soluções estejam contidas em qualquer disco aberto $B(0, \varepsilon)$ (isto, pela demonstração da versão complexa do TPW **A.55**), com $0 < \varepsilon < 2\pi$, concluímos que $b(\kappa, \vec{p})$ e $c(\kappa, \vec{p})$ são funções limitadas. $\square$

A partir do teorema acima, para encontrar as curvas de dispersão de um bárion no decuplo, temos que resolver a equação

$$W(\kappa, r(\kappa, \vec{p}), \vec{p}) = r(\kappa, \vec{p})^2 + b(\kappa, \vec{p})r(\kappa, \vec{p}) + c(\kappa, \vec{p}) = 0,$$

em $\mathcal{N}$. Assim, tomando a raiz quadrada positiva, para $|\kappa| \ll 1$ e $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, obtemos as soluções

$$r_{\pm}(\kappa, \vec{p}) = \frac{1}{2} \left[-b(\kappa, \vec{p}) \pm \sqrt{\Delta(\kappa, \vec{p})} \right]. \quad (4.33)$$

Agora, para provar que a raiz quadrada envolvida nos $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ é real, para $\kappa > 0$, usamos o fato de que $w_{\pm}(\kappa, \vec{p}) := -3 \ln \kappa + r(\kappa, \vec{p})$, para $\kappa > 0$, corresponde a uma singularidade de $\tilde{G}(p)$ (Proposição 3.15), de modo que esta raiz é necessariamente real. Como um primeiro resultado sobre as curvas de dispersão $w(\kappa, \vec{p})$, temos:

Corolário 4.33. *O TPW assegura a existência de duas curvas de dispersão, com multiplicidade dois, $w_{\pm}(\kappa, \vec{p})$, que são funções contínuas e reais para $0 < \kappa \ll 1$ e $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$. Estas curvas de dispersão são definidas por*

$$w_{\pm}(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r_{\pm}(\kappa, \vec{p}).$$

e são as mesmas para a terceira componente de spin $\pm \frac{3}{2}$ e, respectivamente, para a terceira componente de spin $\pm \frac{1}{2}$, para os bárions com spin total $\frac{3}{2}$ do decuplo.

Observação 4.34. *Observamos que com os cálculos efetuados até o momento, não sabemos se as soluções $w_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ são ou não distintas. Isto é, elas são iguais em todas as potências de κ consideradas.*

Lembrando que a analiticidade de $\tilde{G}(p^0, \vec{p})$ e de $\tilde{\Gamma}(p^0, \vec{p})$ já asseguram uma lacuna espectral inferior (*lower gap*) para os estados de bárion no espectro, a seguir, estabelecemos o seguinte teorema validando uma lacuna espectral superior (*upper gap*) para os estados de um bárion, na parte superior do espectro de um bárion até próximo do limiar do méson-bárion, aproximadamente $-5 \ln \kappa$. Isto é feito no teorema abaixo:

Teorema 4.35. *Tomando κ positivo e r real. As curvas de dispersão $w_{\pm}(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ são determinadas através das únicas soluções $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ da equação $\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = 0$, para $r \in [3 \ln \kappa, -(2 - \epsilon) \ln \kappa]$, $\epsilon \equiv \epsilon(\kappa, \beta) > 0$.*

Observação 4.36. *Se existe um estado ligado de méson-bárion no espectro, abaixo da banda espectral finita associada ao estado de um méson e um bárion livres, não interagentes, então ϵ deve ser tomado maior do que a correspondente energia de ligação $\varepsilon(\kappa, \beta)$ do estado ligado, $\varepsilon(\kappa, \beta) \searrow 0$ quando $\kappa \searrow 0$. Caso contrário, ϵ pode ser tomado arbitrariamente pequeno.*

Demonstração: Escrevemos a função Φ da Eq. (4.25) como

$$\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = (e^r - 1)^2 + \kappa^3 \xi(\kappa, r, \vec{p}). \quad (4.34)$$

Lembrando que os $\tilde{\Gamma}_{ij}$ são funções analíticas e que o quadrado de seu módulo pode ser estendida a uma função analítica, consideramos uma extensão analítica de Φ para κ e r complexos. Na Eq. (4.34), temos

$$\xi(\kappa, r, \vec{p}) \equiv \sum_{n \geq 0} \xi_n(r, \vec{p}) \kappa^n,$$

e cada coeficiente $\xi_n(r, \vec{p})$ é uma função analítica de r , no mesmo domínio (não vazio) de analiticidade de Φ .

Agora, como os zeros de uma função analítica de duas o mais variáveis não são isolados (dando assim uma curva de dispersão) e que sempre podemos realizar uma adequada mudança linear complexa de coordenadas para obter as hipóteses do TPW (para estes resultados, ver por exemplo [13]), cada zero de Φ é necessariamente um zero de um polinômio de Weierstrass $W_1(\kappa, r, \vec{p})$, como no Teorema 4.31. Em consequência, se existe uma nova solução $r_n(\kappa, \vec{p})$ não coincide com $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$, temos que $W_1(\kappa, r_n, \vec{p}) = 0$ e, como $\vec{p}$ varia, a curva $r_n(\kappa, \vec{p})$ deve estar contido em um polidisco fechado K no interior do domínio de analiticidade de $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$. Assim, por continuidade, a função $\xi(\kappa, r, \vec{p})$ é limitada e satisfaz

$$|\xi(\kappa, r, \vec{p})| \leq M,$$

para algum $M > 0$ independente de $\vec{p}$. A independência de M do parâmetro $\vec{p}$ segue da definição de transformada de Fourier e usando o fato que $|e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}| = 1$. Mas, como $r_n(\kappa, \vec{p}) \neq r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ também é solução de $\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = 0$, devemos ter que

$$0 = (e^{r_n(\kappa, \vec{p})} - 1)^2 + \mathcal{O}(\kappa^3).$$

Assim,

$$r_n(\kappa, \vec{p}) = \ln(1 + \mathcal{O}(\kappa^{3/2})) \simeq \mathcal{O}(\kappa^{3/2}). \quad (4.35)$$

Por outro lado, a partir da demonstração da versão complexa do TPW (Teorema A.55), sabemos que $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ são as únicas soluções da equação $\Phi(\kappa, r, \vec{p}) = 0$, para $|\kappa|$ suficientemente pequeno, e $r \in \bar{B}(0; \varepsilon_0) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon_0\}$, com $0 < \varepsilon < 2\pi$. O valor 2π decorre do fato que os discos no domínio da analiticidade $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ contendo $r = 0$ como a única solução para a equação $\Phi(\kappa = 0, r, \vec{p}) = (e^r - 1)^2 = 0$ tem centro na origem e raio menor que 2π (ver a demonstração do Teorema A.55).

Logo, da Eq. (4.35), como $r_n(\kappa, \vec{p}) \simeq \mathcal{O}(\kappa^{3/2})$, para $\kappa > 0$ suficientemente pequeno, podemos tomar r_n tal que $|r_n(\kappa, \vec{p})| < \varepsilon_0$, para algum ε_0 em $(0, 2\pi)$. Finalmente, já que as únicas soluções em $\bar{B}(0; \varepsilon_0)$ são $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$, temos de ter que $r_n(\kappa, \vec{p}) = r_+(\kappa, \vec{p})$ ou $r_n(\kappa, \vec{p}) = r_-(\kappa, \vec{p})$, o que é uma contradição. $\square$

Observação 4.37 . *Como o TFIA, o TPW também pode ser aplicado para tratar o caso do octeto. Desde que os blocos de $\tilde{\Gamma}$ correspondentes ao octeto são diagonais, e não há multiplicidade de soluções neste caso, em vez do termo $(e^{r(\kappa, \vec{p})} - 1)^2$, na equação similar à equação (4.34) correspondente ao octeto, vamos ter o fator $(e^{r(\kappa, \vec{p})} - 1)$, onde aqui o $r(\kappa, \vec{p})$ corresponde ao octeto e portanto é analítico. Assim, todos os argumentos apresentados aqui também se aplicam ao caso do octeto, e concluímos uma propriedade de upper gap para todo o setor bariônico.*

Finalmente, seja $\mathcal{H}_b$ o espaço gerado pelos campos bariônicos da equação (3.9). Daqui, $\dim \mathcal{H}_b = 112$. Juntando todos os nossos resultados sobre o espectro de um bárion e um antibárion no octeto e o decuplete, demonstramos que estes 112 estados dão o único espectro no subespaço $\mathcal{H}_b$ do subespaço ímpar $\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}$.

O teorema a seguir dá uma extensão deste resultado espectral, de $\mathcal{H}_b$ para todo o subespaço ímpar $\mathcal{H}_o$:

Teorema 4.38 . *Considerando o espectro de energia-momento para o modelo de QCD na rede, para κ real ($0 < \kappa \ll 1$) e na faixa de energia entre zero e até perto do limiar de energia de um (potencial) estado ligado méson-bárion, de valor aproximado $-5 \ln \kappa$, e restringindo ao subespaço do espaço de Hilbert quântico subjacente $\mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}$ de estados do modelo, com um número ímpar de campos de férmions, o espectro de energia-momento do modelo de QCD na rede em consideração consiste apenas dos estados invariantes de gauge do octeto e do decuplete bariônico. Não existe nenhum outro ponto espectral, de tal forma que a propriedade de confinamento é verificada neste intervalo de energia.*

Demonstração: A prova é uma adaptação de uma prova semelhante dada na Ref. [8], para o caso de um sabor. Em particular, recomendamos consultar os detalhes nos Lemas 1 e 2, e a discussão na página 402 desta referência. Algebricamente falando, a situação aqui é mais complexa, pois aqui lidamos com três sabores de quark, além dos dois graus de liberdade de spin de cada campo de férmion elementar (quarks e antiquark), na parte inferior (partículas) e superior (subespaços de antipartícula) dos graus de liberdade de spin. Devido à analogia já mencionado acima, não vamos dar todos os pormenores da prova, mas resumimos aqui as principais etapas. Em lugar de apenas 4 estados de multiplicidade dois no espectro de um bárion, aqui lidamos com um espaço bariônico $\mathcal{H}_b$ gerado pelos 112 estados bariônicos em tela e descritos na equação (3.9), com os análogos para os anti-bárions. Para estender os resultados espectrais de $\mathcal{H}_b$ para todo o espaço ímpar $\mathcal{H}_o$, aplicamos o método de subtração Euclidiana da Ref. [24] para definir uma função de dois-pontos generalizada e subtraída $\mathcal{F}(u, v)$, considerando produtos internos de dois vetores quaisquer em $\mathcal{H}_o$. Para isso, expressamos um estado normalizado de uma partícula usando um vetor de quatro componentes $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$. Se ϕ representa um decuplete de bárion ou de antibárion, então ϕ tem spin total $J = 3/2$ e $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ são, respectivamente, a terceira componente de spin normalizada $J_z = 3/2, 1/2, -1/2$ e $-3/2$. Sempre que ϕ representar um octeto de bárion ou

antibárion normalizado $J = 1/2$, então definimos $\phi_1 = \phi_4 \equiv 0$, e tomamos ϕ_2, ϕ_3 para descrever os estados normalizados correspondentes a $J_z = 1/2, -1/2$, respectivamente, como antes. Além disso, $\Phi \equiv \{\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(36)}\}$ denota o conjunto dos 112 bárions e antibárions. Com isso, definimos a função de dois pontos subtraída $\mathcal{F}(u, v)$. Esta função estende a função similar de [8]. Para L genérico em $\mathcal{H}_o$, $\mathcal{F}(u, v)$ é dado por

$$\mathcal{F}(u_1, u_2) = (\mathcal{G}_{LL})(u_1, u_2) - \sum_{\phi \in \Phi} \sum_{(\varphi, \xi) \in \mathcal{P}(\phi)} \sum_{v_1, v_2 \in \mathbb{Z}_0^4} \mathcal{G}_{L, \varphi}(u_1, v_1) \Gamma(v_1, v_2) \mathcal{G}_{\xi, L}(v_2, u_2), \quad (4.36)$$

onde, para cada $\phi = \phi^{(j)}$, $j = 1, \dots, 36$ fixo, os pares (φ, ξ) estão no conjunto

$$\mathcal{P}(\phi) = \{(\phi_1, \bar{\phi}_1), (\phi_1, -\phi_2), (\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_1), (\bar{\phi}_2, -\phi_2), (\phi_3, \bar{\phi}_3), (\phi_3, -\phi_4), (\bar{\phi}_4, \bar{\phi}_3), (\bar{\phi}_4, -\phi_3)\}, \quad \phi \equiv \phi^{(j)}.$$

Γ é a inversa por convolução da função de dois-pontos G da Eq. (3.10) definida com os campos φ e ξ . Ou seja,

$$G(u, v) = \langle \varphi(u) \xi(v) \rangle \chi_{u^0 \leq v^0} - \langle \xi(u) \varphi(v) \rangle^* \chi_{u^0 > v^0}.$$

Por definição, Γ é tomada identicamente zero sempre que G for identicamente zero. Além disso, para $F, H \in \mathcal{H}_o$,

$$\mathcal{G}_{FH}(u, v) = \begin{cases} S_{F, H}(u, v), & u^0 \leq v^0; \\ S_{\Theta(T^0)^{-t_F - 1/2} F, -\Theta(T^0)^{-t_H - 1/2} H}^*, & u^0 > v^0; \end{cases}$$

com $S_{F, H}(u, v) = \langle F(u) H(v) \rangle$, para F com suporte em $1/2 \leq u^0 \leq t_F$ e H em $1/2 \leq v^0 \leq t_H$.

Observação 4.39. *Como um processo de truncamento comum, observamos que a ideia por trás da escolha do termo subtraído em Eq. (4.36) é remover os 56 estados de bárions e 56 de antibárion detectados do espectro de energia-momento.*

Com tudo isto, o Teorema 4.38 é uma consequência do seguinte lema.

Lema 4.40. *Para cada $p \in \mathbb{Z}$, considerando qualquer das seguintes condições para os pontos $u, v \in \mathbb{Z}_0^4$ com separação temporal não nula:*

- $u^0 < v^0$, com $u^0 + 1/2 \leq p \leq v^0 - 1/2$;
- $u^0 > v^0$, com $v^0 + 1/2 \leq p \leq u^0 - 1/2$.

Sob estas condições, $\mathcal{F}(u, v)$ decai exponencialmente com uma taxa maior ou igual a $-5 \ln \kappa$.

Observação 4.41. *Lembrando que, pela invariância por translação, $\mathcal{F}(u, v) = \mathcal{F}(u - v)$, no contexto do método de desacoplamento de hiperplanos [5], adaptado para a rede em [8, 9], para analisar o comportamento de decaimento temporal de $\mathcal{F}(u - v)$, nós expandimos a ação considerando as contribuições que conectam os pontos que cruzam os hiperplanos $u^0 - v^0 = p$, $p \in \mathbb{Z}$. Para fazer isso, trocamos os parâmetros de hopping nos termos de hopping na ação que conectam os pontos abaixo e acima do p -hiperplano pelo parâmetro κ_p . Em seguida,*

realizamos uma expansão finita controlada em κ_p , em torno do caso que não conecta associado com $\kappa_p = 0$. (Note que os termos de hopping que conecta os pontos u^0 e v^0 , separados pelo hiperplano, desaparecerem na ação quando fazemos $\kappa_p = 0$.) A fim de obter os limites de decaimento sobre $\mathcal{F}(u-v)$, estendemos para κ_p complexo e voltamos para o caso real no final.

Demonstração do Lema 4.40 : A prova é uma consequência do método da expansão em hiperplanos, para mostrar que as derivadas de ordem 0, 1, 2, 3 e 4 de $\mathcal{F}(u, v)$ com respeito a κ_p são zero em $\kappa_p = 0$. O fato que as derivadas de ordem 0, 1, 2, 4 sejam nulas é uma propriedade geral de uma função de dois-pontos como a definida na Eq. (3.10), e essa propriedade emerge do desbalanço dos campos de férmions ou devido à integração no grupo de gauge. O desaparecimento da terceira derivada segue por cálculo direto da construção de $\mathcal{F}(u, v)$ e surge de cancelamentos entre os dois termos no lado direito da Eq. (4.36). $\square$

Do Lema 4.40, $\mathcal{F}(u-v)$ é absolutamente limitada e o limite global pode ser escolhido proporcional a $\kappa^{5|u^0-v^0|}$. Usando o teorema de Payley-Wiener, uma vez mais, a sua transformada de Fourier $\tilde{\mathcal{F}}(p)$ é analítica em uma poli-faixa que inclui o domínio $p^0 \in [0, -(5-\epsilon) \ln \kappa)$. Uma vez que, como para G e Γ , $\tilde{\mathcal{F}}$ admite uma representação espectral para κ real, estabelecendo uma relação entre pontos espectrais de energia-momento em $\mathcal{H}_o$ e as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}(p)$, a ausência de singularidades neste domínio assegura uma lacuna espectral. Assim, não há nenhum outro espectro além do bariônico, com 56 bárions e 56 antibárions, e o Teorema 4.38 está provado. $\square$

Com este resultado, completamos a análise da existência dos bárions, do octeto e do decuplete. Passamos agora a estabelecer resultados de suavidade para as curvas de dispersão determinadas anteriormente para o decuplete, lembrando que o TFIA garante analiticidade destas curvas no caso do octeto.

4.3 Propriedades de Suavidade

Em relação às propriedades de suavidade adicionais das soluções $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$, em κ e $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, mais que simplesmente a continuidade que emerge do TPW, podemos afirmar um resultado do tipo de continuidade de Hölder. Esta propriedade resulta de uma propriedade semelhante verificada pela raiz quadrada do discriminante $\Delta(\kappa, \vec{p})$ da equação quadrática que define $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ na Eq. (4.33). Temos:

Teorema 4.42. Para $\kappa > 0$ e $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$, a raiz quadrada do discriminante $\Delta(\kappa, \vec{p}) = b^2(\kappa, \vec{p}) - 4c(\kappa, \vec{p})$, em κ e as componentes de $\vec{p}$, a seguinte desigualdade vale

$$\left| \sqrt{\Delta(\kappa_2, \vec{p}_2)} - \sqrt{\Delta(\kappa_1, \vec{p}_1)} \right| \leq c(\epsilon) \left[|\kappa_2 - \kappa_1| + \sum_{j=1,2,3} |p_2^j - p_1^j| \right]^{(1-\epsilon)/(2-\epsilon)},$$

para uma constante positiva $c(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{4c^{\epsilon/2}}{\epsilon} \right)^{1/(2-\epsilon)} (c'')^{(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}$, para c e c'' constantes positivas independentes de κ , $\vec{p}$ e ϵ , de tal modo que temos $c(\epsilon) \nearrow \infty$, quando $\epsilon \searrow 0$.

Demonstração: Para x_2 e x_1 positivos, com $x_2 > x_1$, escrevemos

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(s)h(s)ds,$$

onde $h(s) = 1/\sqrt{s}$ e $g(s) = 1$. Logo, tomando $q = 2 - \epsilon$ e $p = (2 - \epsilon)/(1 - \epsilon)$, e usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} g(s)h(s)ds \right| &\leq \frac{1}{2} \|h\|_q \|g\|_p \\ \Rightarrow |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{\epsilon} \right)^{1/(2-\epsilon)} \left| x_2^{\epsilon/2} - x_1^{\epsilon/2} \right|^{1/(2-\epsilon)} \right] |x_2 - x_1|^{(1-\epsilon)/(2-\epsilon)}. \end{aligned}$$

Agora, tomando $x_i \equiv \Delta(\kappa_i, \vec{p}_i)$ e aplicando o Teorema do valor médio em termos da variável $\vec{u} \equiv (\kappa, \vec{p})$, acima, para escrever a diferença $\left[\sqrt{\Delta(\kappa_2, \vec{p}_2)} - \sqrt{\Delta(\kappa_1, \vec{p}_1)} \right]$ e usando o fato que $\Delta(\vec{u}) = \Delta(\kappa, \vec{p})$ é uma função limitada, limitamos as suas derivadas parciais. Assim, obtemos a limitação $|\Delta(\vec{u}_2) - \Delta(\vec{u}_1)| \leq c'' |\vec{u}_2 - \vec{u}_1|$. Fazendo isso, junto com a limitação $|\Delta| \leq c$, o fator $\left| x_2^{\epsilon/2} - x_1^{\epsilon/2} \right|$ é limitado por $2c^{\epsilon/2}$, e obtemos o resultado desejado. $\square$

Antes de continuar, para cada $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$ fixo, estabelecemos mais propriedades de suavidade das soluções $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ em um domínio complexo que exclui a origem. Isto é realizado no próximo teorema.

Teorema 4.43. *Fixando qualquer $\vec{p}$ em $\mathbb{T}^3$ e considerando κ complexo, seja $\kappa_1 > 0$ que o maior valor de $|\kappa|$ que assegura a convergência da expansão em polímeros, permitindo a tomar o limite de volume infinito do modelo, e validando todas as principais estimativas anteriores. Para qualquer par de reais κ_2, κ_3 com $0 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_1$, existe um $\rho > 0$ tal que a expansão em séries de potências em κ de $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ converge e $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ é analítica no retângulo aberto $\Re \kappa \in (\kappa_2, \kappa_3)$, $|\Im \kappa| < \rho$.*

Observação 4.44. *Podemos tomar $\kappa_3 = \kappa_1$. Nossa análise não é o suficientemente refinado para escolher.*

Demonstração: Tomemos qualquer $\vec{p} \in \mathbb{T}^d$ fixo. Suprimindo $\vec{p}$ da notação, escrevemos a expansão de $\Delta(\kappa) \equiv \Delta(\kappa, \vec{p})$ em torno de $\kappa_0 > 0$, como $\sum_{n \geq s} f_n(\kappa - \kappa_0)^n$ onde f_s é o primeiro coeficiente não nulo. Então,

$$\sqrt{\Delta(\kappa)} = \sqrt{f_s}(\kappa - \kappa_0)^{s/2} [1 + R_0(\kappa)]^{1/2},$$

onde $R_0 = f_s^{-1/2} \sum_{n \geq 1} f_n(\kappa - \kappa_0)^n$. Tomando $\rho(\kappa_0) > 0$, tal que $|R_0| < 1$, para $|\kappa - \kappa_0| < \rho(\kappa_0)$, então a série de potências de $[1 + R_0(\kappa)]^{1/2}$ converge. Assim, $\Delta(\kappa)$ é estritamente positivo para $|\kappa - \kappa_0|$ pequeno e κ real. Tomando $(\kappa - \kappa_0) > 0$ e pequeno implica que o coeficiente f_s é positivo. Logo, tomando $\kappa - \kappa_0 < 0$ e $|\kappa - \kappa_0|$ pequeno, o que implica que s é par. Portanto, $\sqrt{\Delta(\kappa)}$ é analítica e tem uma série de potência com raio de convergência $\rho(\kappa_0) > 0$. Finalmente, pelo teorema de Heine-Borel, podemos encontrar um único $\rho > 0$

que verifica as propriedades descritas para qualquer $\kappa \in [\kappa_2, \kappa_3]$. Logo, usando a Proposição **A.53**, estendemos para a variável complexa e obtemos o resultado desejado. $\square$

Agora, passamos a analisar os valores de $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$ para os quais podemos provar que $r(\kappa, \vec{p})$ é uma função analítica na variável κ . Para isso, como na equação (4.20) não podemos usar o TFIA. Analisamos os zeros dos auto-valores dos blocos do decuplete, ou seja os zeros da equação

$$\frac{1}{2}[\tilde{\Gamma}_{11} + \tilde{\Gamma}_{33}](\kappa, r(\kappa, \vec{p}), \vec{p}) \pm f_2(\kappa, r, \vec{p}) = 0, \quad (4.37)$$

onde $f_2(\kappa, r, \vec{p}) \equiv \sqrt{\frac{1}{4}[\tilde{\Gamma}_{11} - \tilde{\Gamma}_{33}]^2(\kappa, r, \vec{p}) + |\tilde{\Gamma}_{31}(\kappa, r, \vec{p})|^2 + |\tilde{\Gamma}_{41}(\kappa, r, \vec{p})|^2}$. Prosseguindo, consideramos os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \{ \vec{p} \in \mathbb{T}^3 : f_2(\kappa, r, \vec{p}) = 0 \}, \\ \Omega_1 &:= \{ \vec{p} \in \mathbb{T}^3 : \text{existe uma extensão analítica real, não nula, em } (\kappa, r) \text{ de } f_2(\kappa, r, \vec{p}) \}. \end{aligned}$$

Assim, usando essas definições, nós temos a seguinte proposição.

Proposição 4.45 . *Para cada $\vec{p} \in \Omega_1 \cup \Omega_0$, existe uma função κ -analítica $r(\kappa, \vec{p})$, num domínio que depende de $\vec{p}$, tal que, para $\kappa > 0$, $w(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r(\kappa, \vec{p})$ é uma curva de dispersão.*

Demonstração: Claramente $\Omega_1 \cap \Omega_0 = \emptyset$, então se $\vec{p} \in \Omega_0$ o resultado é uma aplicação direta do TFIA para a parte analítica da equação (4.37). Agora, se $\vec{p} \in \Omega_1$, então f_2 pode ser escrita como segue

$$f_2(\kappa, r, \vec{p}) = \kappa^{n_0} r^{m_0} \sqrt{A(\vec{p})^2 + B(\kappa, r, \vec{p})}, \quad (4.38)$$

onde $n_0 \geq 6$, $m_0 \geq 0$ e $A \in C^\omega(\mathbb{T}^3)$, com $A(\vec{p}) \neq 0$ e $B(\kappa, r) \equiv B(\kappa, r, \vec{p})$ é uma função real analítica. Assim, na nova equação, podemos aplicar o TFIA e obter o resultado desejado. $\square$

Corolário 4.46 . *Com a topologia induzida de $\mathbb{R}^3$, Ω_1 é um subconjunto aberto do toro $\mathbb{T}^3$.*

Demonstração: É um resultado que segue direto do fato que A é contínua e $A(\vec{p}) \neq 0$. $\square$

Continuando com a nossa análise, usando a equação (4.38) consideramos a seguinte decomposição disjunta $\Omega_1 = \Omega_{1,1} \cup \Omega_{1,2}$, onde

$$\begin{aligned} \Omega_{1,1} &:= \left\{ \vec{p} \in \Omega_1 : f_2(\kappa, r, \vec{p}) = \kappa^{n_0} r^{m_0} \sqrt{A(\vec{p})^2} \right\}, \\ \Omega_{1,2} &:= \left\{ \vec{p} \in \Omega_1 : f_2(\kappa, r, \vec{p}) = \kappa^{n_0} r^{m_0} \sqrt{A(\vec{p})^2 + B(\kappa, r)}, B(\kappa, r) \equiv B(\kappa, r, \vec{p}) \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Como vimos, para cada $\vec{p} \in \Omega_1$ existe $r(\kappa) \equiv r(\kappa, \vec{p})$, κ -analítica. Logo, se

$$\Omega_{1,2} \ni \vec{p} \longrightarrow \mathbb{T}^3 \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1)$$

temos que o domínio de analiticidade de $r(\kappa)$ tende a ser o conjunto vazio.

Finalizando esta seção, com as informações obtidas até agora, podemos enunciar o seguinte Corolário

Corolário 4.47 . *Para cada $\vec{p} \in \mathbb{T}^3 \setminus \{\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3 : 2 \cos p_1 \cos p_2 - \cos p_1 \cos p_3 - \cos p_2 \cos p_3 = 0\}$ existe uma função analítica $r(\kappa, \vec{p})$ em κ , num domínio que depende continuamente de $\vec{p}$, de modo que, para $\kappa > 0$*

$$w(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r(\kappa, \vec{p}),$$

é uma curva de dispersão de um bárion.

Demonstração: Do Lema 4.30 na equação (4.37), temos que $\mathbb{T}^3 \setminus \{\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3 : 2 \cos p_1 \cos p_2 - \cos p_1 \cos p_3 - \cos p_2 \cos p_3 = 0\} \subseteq \Omega_{1,2}$, segue imediatamente o resultado. $\square$

4.4 Propriedades da Medida Espectral do Decupletto Bariônico

Nesta seção, analisamos a medida espectral do decupletto bariônico e estabelecemos algumas propriedades para ela. As propriedades aqui estabelecidas são necessárias para subir no espectro e analisar rigorosamente a existência de estados ligados de dois bárions.

Nós retomamos as contribuições de um bárion na representação espectral de $\tilde{G}(\kappa, \vec{p})$, e fornecemos uma limitação para as contribuições do tipo não-bárion.

Primeiramente, lembramos que, com os cálculos que fizemos, envolvendo potências de κ até κ^{17} , não sabemos se as soluções para as curvas de dispersão w_+ e w_- são ou não distintas. Por isso, na análise que segue, distinguiremos dois casos: o caso $w_+ \neq w_-$ e o caso $w_+ = w_-$. Aqui, tratamos somente o caso $w_+ \neq w_-$. O caso $w_+ = w_-$ é tratado da mesma forma para o octeto bariônico.

Nós usamos a extensão definida da extensão meromorfa de $\tilde{G}$ dada na Eq. (3.15), em termos das variáveis $\kappa, r, \vec{p}$. Por cálculo direto da matriz inversa de Γ , como na Eq. (1.3), temos

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\kappa, r, \vec{p}) &\equiv \tilde{\Gamma}^{-1}(\kappa, r, \vec{p}) \\ &= \frac{1}{\Phi(\kappa, r, \vec{p})} \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{33}(\kappa, r, \vec{p}) I_2 & \begin{pmatrix} -\tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, r, \vec{p}) & -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, r, \vec{p}) \\ -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, r, \vec{p}) & \tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, r, \vec{p}) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, r, \vec{p}) & -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, r, \vec{p}) \\ -\tilde{\Gamma}_{14}(\kappa, r, \vec{p}) & \tilde{\Gamma}_{13}(\kappa, r, \vec{p}) \end{pmatrix} & \tilde{\Gamma}_{11}(\kappa, r, \vec{p}) I_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

e também a decomposição em frações parciais, que segue de TPW, utilizando a decomposição do polinômio mônico de Weierstrass $W(\kappa, r, \vec{p}) = (r - r_+(\kappa, \vec{p}))(r - r_-(\kappa, \vec{p}))$,

$$[\Phi(\kappa, r, \vec{p})]^{-1} = \frac{Q(\kappa, r, \vec{p})}{2r - r_+(\kappa, \vec{p}) - r_-(\kappa, \vec{p})} \left[\frac{1}{r - r_+(\kappa, \vec{p})} + \frac{1}{r - r_-(\kappa, \vec{p})} \right]. \quad (4.40)$$

A existência das curvas de dispersão do bárion envolve a decomposição da medida $d_{\lambda^0} \alpha_{\vec{p}}(\lambda^0)$, envolvida na representação espectral de $\tilde{G}(p)$ no Teorema 3.15. Então temos:

Teorema 4.48. *Para κ real, com $0 < \kappa \ll 1$, considerando apenas um bloco 4×4 genérico do decuplete, a medida $d_{\lambda^0} \alpha_{\vec{p}}(\lambda^0)$ tem a decomposição*

$$d_{\lambda^0} \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) = \left[[Z_+]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) \delta(\lambda^0 - e^{-w_+(\kappa, \vec{p})}) + [Z_-]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) \delta(\lambda^0 - e^{-w_-(\kappa, \vec{p})}) \right] d\lambda^0 + d_{\lambda^0} \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0), \quad (4.41)$$

onde, para os elementos diagonais, nós temos (tomando $\ell\ell = 11$, $kk = 33$ para o primeiro termo, ou $\ell\ell = 33$, $kk = 11$ para o segundo termo)

$$[Z_{\pm}]_{\ell\ell}(\kappa, \vec{p}) \equiv \pm \frac{e^{-w_{\pm}(\kappa, \vec{p})} \tilde{\Gamma}_{kk}(\kappa, r_{\pm}(\kappa, \vec{p})) Q(\kappa, r_{\pm}(\kappa, \vec{p}))}{(2\pi)^3 (r_+(\kappa, \vec{p}) - r_-(\kappa, \vec{p}))}, \quad (4.42)$$

e, para os elementos não-diagonais $\ell \neq k$

$$[Z_{\pm}]_{\ell k}(\kappa, \vec{p}) \equiv \mp \frac{e^{-w_{\pm}(\kappa, \vec{p})} \tilde{\Gamma}_{\ell k}(\kappa, r_{\pm}(\kappa, \vec{p})) Q(\kappa, r_{\pm}(\kappa, \vec{p}))}{(2\pi)^3 (r_+(\kappa, \vec{p}) - r_-(\kappa, \vec{p}))}, \quad (4.43)$$

tal que, considerando o mesmo f dado na Proposição 3.15,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, p) &= \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) - (2\pi)^3 [Z_+]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) f(p^0, e^{-w_+(\kappa, \vec{p})}) - (2\pi)^3 [Z_-]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) \times \\ &\quad f(p^0, e^{-w_-(\kappa, \vec{p})}) - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 f(p^0, \lambda^0) d_{\lambda^0} \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

é uma função contínua no parâmetro κ (para $0 < \kappa \ll 1$), uniformemente em $\vec{p} \in \mathbb{T}^3$. Além disso, o λ^0 suporte da medida $d_{\lambda^0} \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0)$ está contido na região $|\lambda^0| \leq |\kappa|^{5-\epsilon}$.

Observação 4.49. *Embora a representação espectral só exista para κ real, $0 < \kappa \ll 1$, nós podemos usar as expressões nas equações (4.42) e (4.43) para estender as contribuições de um bárion para κ complexo, como na referência [4].*

Demonstração: Levando em conta as equações (4.39) e (4.40), consideramos a representação espectral para $\tilde{G}(p^0, \vec{p})$ dada no Teorema 3.15. Assim, usando o fato que $r_{\pm}$ são os únicos pontos isolados no espectro de energia até perto de $(-5 \ln \kappa)$, obtemos a decomposição da Eq. (4.41). Logo, considerando a equação (4.41) obtemos (4.44) e finalmente calculando os limites

$$\lim_{\chi \rightarrow w_{\pm}} (\chi - w_{\pm}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p})) \tilde{\Gamma}_{\ell_1 \ell_2}^{-1}(\kappa, p^0 = i\chi, \vec{p}) = \lim_{r \rightarrow r_{\pm}(\kappa, \vec{p})} (r - r_{\pm}(\kappa, \vec{p})) \tilde{\Gamma}_{\ell_1 \ell_2}^{-1}(\kappa, r, \vec{p}),$$

seguem as equações (4.42) e (4.43). $\square$

Agora, damos uma cota sobre as contribuições de um não-bárion para a medida espectral. Em relação à massa da medida correspondente, temos

Teorema 4.50. *Para κ real, com $0 < \kappa \ll 1$, temos a estimativa*

$$\left| \int_{-1}^1 d_{\lambda^0} \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) \right| \leq \mathcal{O}(\kappa^6).$$

Demonstração: Nós daremos duas provas deste teorema.

Primeira prova: Tomando $x^0 = 1$ em $G(\kappa, x)$ e calculando a transformada de Fourier espacial, usando a Eq. (4.41), obtemos

$$\begin{aligned} G_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, 1, 0) + \sum_{|\vec{x}| \neq 0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, 1, \vec{x}) &= -(2\pi)^3 \int_{-1}^1 d\lambda^0 \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) \\ &= -(2\pi)^3 \left[[Z_+]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) + [Z_-]_{\ell_1 \ell_2}(\kappa, \vec{p}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 d\lambda^0 \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para a versão matricial de lado esquerdo (lhs) da equação (4.45), do Teorema 4.27, temos

$$\text{lhs} = -\kappa^3 I_4 - \frac{1}{2} \Sigma(\vec{p}) \kappa^6 I_4 + \mathcal{O}(\kappa^9).$$

Usando o Teorema 4.48, as equações (4.39) e (4.40), para o lado direito (rhs), obtemos, para o bloco diagonal 2×2 superior (suprimindo os argumentos)

$$\text{rhs para o bloco superior esquerdo} = -\frac{1}{r_+ - r_-} [R(r_+) - R(r_-)],$$

onde $R(r) = \kappa^3 e^{-r} \tilde{\Gamma}_{33}(r) Q(r)$.

Pela expansão de Taylor da função analítica $R(r_+)$ em torno de $r = r_-$, e usando o Lema 4.30 e o Teorema 4.31, o rhs torna-se $\left[-\kappa^3 (1 + \mathcal{O}(\kappa^3)) - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 d\lambda^0 \nu_{\vec{p}, 3, 3}(\lambda^0) \right]$. Uma expressão similar vale para o bloco diagonal inferior, com $3, 3 \rightarrow 1, 1$. Os blocos fora da diagonal são da ordem $\mathcal{O}(\kappa^{10})$. As contribuições $[-\kappa^3 I_4]$ de cada lado são canceladas, e o resultado segue.

Segunda prova: Esta prova é mais geral e pode ser aplicada a qualquer número de sabores e para a matriz total, ou seja para os blocos de octeto e decuplo juntos. Assim, podemos considerar as 56 curvas de dispersão $w_{j=1, \dots, 56}(\kappa, \vec{p})$ obtidas (do octeto e decuplo), então é claro, do Teorema 3.15, que as singularidades de $\tilde{G}(p^0, \vec{p})$ são simples. Logo, se

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(p^0, \vec{p}) &= \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}(\vec{p}) - \sum_{j=1}^{56} Z_{j, \ell_1 \ell_2}(\vec{p}) \left[\frac{1}{e^{ip^0} - e^{-w_j(\vec{p})}} + \frac{1}{e^{-ip^0} - e^{-w_j(\vec{p})}} \right] \\ &\quad - (2\pi)^3 \int_{-1}^1 f(p^0, \lambda^0) d\lambda^0 \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0). \end{aligned}$$

Obtemos,

$$\begin{aligned} Z_{j, \ell_1 \ell_2}(\vec{p}) &= \lim_{e^{ip^0} \rightarrow e^{-w_j(\vec{p})}} \tilde{G}_{\ell_1 \ell_2}^{\text{ext}}(p^0, \vec{p}) \\ &= \lim_{\chi \rightarrow w_j(\vec{p})} \left(\frac{e^{-\chi} - e^{-w_j(\vec{p})}}{\chi - w_j(\vec{p})} \right) (\chi - w_j(\vec{p})) \tilde{\Gamma}^{-1}(i\chi, \vec{p}) \\ &= -e^{-w_j(\vec{p})} \lim_{\chi \rightarrow w_j(\vec{p})} (\chi - w_j(\vec{p})) \tilde{\Gamma}^{-1}(i\chi, \vec{p}) \\ &= -e^{-w_j(\vec{p})} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{\Gamma}^{-1}(i\xi, \vec{p}) d\xi \right), \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde o sobrescrito ^{ext} significa extensão meromorfa e $\gamma(t) = w_j(\vec{p}) + \rho \exp(2\pi it)$, $t \in [0, 1]$ e $\rho > 0$ é suficientemente pequeno de modo que $w_j(\vec{p})$ é a única curva de dispersão no disco $B(w_j(\vec{p}); \rho)$. Logo, usando o Teorema 4.27 temos que

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}(i\xi, \vec{p}) = (-1 + \exp(\rho \exp(2\pi it))) I_{56}$$

é invertível. Assim, pela série:

$$A^{-1} = B^{-1} \sum_{n \geq 0} [B^{-1}(B - A)]^n, \text{ se } \|B^{-1}(B - A)\| < 1,$$

onde A e B são matrizes invertíveis, segue que

$$\tilde{\Gamma}^{-1}(i\xi, \vec{p}) = [-1 + \exp(r_j(\kappa, \vec{p}) + \rho \exp(2\pi it))]^{-1} I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3), \quad |\kappa| \ll 1,$$

aqui $r_j(\kappa, \vec{p}) = w_j(\kappa, \vec{p}) + 3 \ln \kappa$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{\Gamma}^{-1}(i\xi, \vec{p}) d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 [-1 + \exp(r_j(\kappa, \vec{p}) + \rho e^{2\pi it})]^{-1} 2\pi i \rho e^{2\pi it} dt I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{e^z - 1} dz I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3), \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde $\tilde{\gamma}(t) = r_j(\kappa, \vec{p}) + \rho \exp(2\pi it)$, $t \in [0, 1]$. Agora, como estamos no regime de acoplamento forte, podemos supor $0 < \kappa$ suficientemente pequeno de modo que $0 \in B(r_j(\kappa, \vec{p}); \rho)$, logo em (4.47)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \tilde{\Gamma}^{-1}(i\xi, \vec{p}) d\xi &= \text{Res} \left(\frac{1}{e^z - 1}; 0 \right) I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3) \\ &= I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Assim, de (4.48) em (4.46), para $0 < \kappa \ll 1$

$$\begin{aligned} Z_j(\kappa, \vec{p}) &= -e^{-w_j(\kappa, \vec{p})} [I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3)] \\ &= -e^{3 \ln \kappa - r_j(\kappa, \vec{p})} [I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3)] \\ &= -\kappa^3 e^{-r_j(\kappa, \vec{p})} [I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3)] \\ &= -\kappa^3 \left(1 - r_j(\kappa, \vec{p}) + \frac{r_j(\kappa, \vec{p})^2}{2!} - \dots \right) [I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3)] \\ &= -(\kappa^3 + \mathcal{O}(\kappa^6)) [I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^3)] \\ &= -\kappa^3 I_{56} + \mathcal{O}(\kappa^6). \end{aligned}$$

Finalmente, do Teorema 4.27 e da igualdade acima

$$\begin{aligned} -\kappa^3 \delta_{\ell_1 \ell_2} + \mathcal{O}(\kappa^6) &= G_{\ell_1 \ell_2}(1, \vec{0}) + \sum_{\vec{x} \neq \vec{0}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} G_{\ell_1 \ell_2}(1, \vec{x}) \\ &= -(2\pi)^3 \int_{-1}^1 d\lambda^0 \alpha_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) \\ &= \sum_{j=1}^{56} Z_{j, \ell_1 \ell_2}(\vec{p}) + \int_{-1}^1 d\lambda^0 \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0) \\ &= -\kappa^3 \delta_{\ell_1 \ell_2} + \mathcal{O}(\kappa^6) + \int_{-1}^1 d\lambda^0 \nu_{\vec{p}, \ell_1 \ell_2}(\lambda^0). \end{aligned}$$

□

Com este resultado, encerramos o conteúdo central desta tese. Passamos agora a tecer algumas conclusões.

Considerações Finais

Nessa tese, consideramos a formulação integral funcional do modelo de QCD na rede, com a ação de Wilson, em dimensão $3 + 1$, três sabores de quark e no regime de acoplamento forte. Considerando a parte baixa do espectro de energia-momento do modelo, mostramos a existência e propriedades analíticas das curvas de dispersão para o decuplete bariônico, com spin total $J = 3/2$ e terceira componente de spin $J_z = \pm 3/2, \pm 1/2$. Um resultado central para a aplicação do nosso método é o Teorema de Preparação de Weierstrass (TPW).

Para o octeto bariônico, o Teorema da Função Implícita Analítica pode ser usado para mostrar que as curvas de dispersão têm a forma [9] $w_{\pm}(\kappa, \vec{p}) = -3 \ln \kappa + r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$, onde $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ estende-se a uma função analítica em conjunto de κ e $\vec{p}$.

Um resultado similar vale para o decuplete, com a diferença que não temos propriedades de analiticidades da função $w(\kappa, \vec{p}) + 3 \ln \kappa$. As curvas de dispersão isoladas obtidas para o decuplete são duas a duas idênticas, podendo ser todas idênticas, mas os cálculos realizados até o momento não nos permitem uma conclusão fechada sobre esta questão. Para $\vec{p} = 0$, $w_{\pm}(\kappa, \vec{p} = 0)$ são iguais até e incluindo a ordem κ^6 , de modo que não há abertura (*splitting*) de massa entre os estados de spin do decuplete até esta ordem.

O uso do TPW assegura continuidade dos $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ para o decuplete. Contudo, também demonstramos que os $r_{\pm}(\kappa, \vec{p})$ satisfazem uma propriedade do tipo Hölder continuidade nos parâmetros κ e $\vec{p}$ e podemos provar unicidade das curvas de dispersão isoladas correspondentes.

Para cada momento $\vec{p}$ fixo no toro $\mathbb{T}^3$, fizemos um estudo qualitativo da analiticidade, no parâmetro κ . Além disso, derivamos uma representação espectral para a função de dois-bárions e obtivemos um comportamento assintótico para as contribuições de um não-bárion.

Nossos resultados espectrais foram estendidos do subespaço dos bárions, do espaço de Hilbert físico dos estados quânticos do modelo, para todo o espaço ímpar, associado aos estados com um número ímpar de férmions. Pudemos demonstrar uma propriedade espectral de confinamento, mostrando que os bárions do octeto e decuplete são os únicos estados espectrais no espectro de energia-momento, considerando-se um intervalo de energia até próximo do limiar do eventual estado ligado de méson-bárion.

Nós podemos usar os resultados obtidos para analisar de maneira rigorosa e validar a existência de estados ligados bárion-bárion, obtidos usando uma versão na rede da equação de Bethe-Salpeter e na aproximação de escada (*ladder*), além desta aproximação, considerando o modelo completo.

Os métodos desenvolvidos nesta tese podem também ser aplicados para completar e ampliar os resultados conhecidos, envolvendo o setor mesônico [23].

Nossos resultados estão todos incorporados num artigo recém submetido para publicação [15].

Apêndice: Sobre o Teorema de Preparação de Weierstrass

Aqui, nós discutimos o TPW na sua forma simples não-trivial, tanto no caso de funções analíticas reais, como no caso de funções holomorfas. Ambas versões são usadas nessa tese. Para o caso real, seguimos de perto o tratamento da Ref. [10], que também nos fornece importantes relações de recorrência relacionadas às funções que aparecem no enunciado do teorema. (Observamos que uma correção deve ser feita logo após a Eq. (6.10), e que o índice k deve ser trocado por $k + \ell$.) Para o caso complexo, seguimos as abordagens de [12] e [13]. Em uma exposição geral do TPW abaixo, usamos as variáveis x, y , para obter os nossos resultados no texto nós voltamos para as variáveis κ e r respectivamente.

Para a prova de limitações e convergência de séries, no caso complexo, remetemos à clássica Ref. [11]. O problema central é o de obter a função implícita $y(x)$ definida pelos zeros da função $\Phi(x, y)$, analítica conjunta num domínio $\mathcal{N}$ correspondente a uma vizinhança de $(0, 0)$, com $\Phi(0, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}(0, 0) = 1$, indicando aqui a existência de uma multiplicidade de ordem dois para as soluções. O resultado se estende diretamente para tratar o caso com um número arbitrário de primeiras derivas que se anulam e uma maior multiplicidade de soluções.

Para uma função analítica $F(x, y)$, num domínio genérico, nós escrevemos sua representação em série de potências, em torno da origem, como $F(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} F_{\alpha,n} x^{\alpha} y^n$. Da mesma forma, para uma função $f(x)$, analítica numa vizinhança de $x = 0$, escrevemos $f(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha} x^{\alpha}$. A versão formulada em termos de analiticidade real do Teorema de Preparação de Weierstrass é dada na sequência.

Teorema A.51 (Teorema de Preparação de Weierstrass, caso real). *Seja $\Phi(x, y)$ analítica conjunta em $\mathcal{N}$ e satisfazendo $\Phi_{0,0} = \Phi_{0,1} = 0$ e $\Phi_{0,2} = 1$. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{N}_1$*

de $(0, 0)$ e uma função analítica em conjunto $Q(x, y)$ em $\mathcal{N}_1$, com $Q(x, y) \neq 0$ em $\mathcal{N}_1$, tal que

$$Q(x, y) \Phi(x, y) = W(x, y), \quad (\text{A.1})$$

onde $W(x, y)$ é um polinômio (mônico) de Weierstrass

$$W(x, y) = y^2 + b(x)y + c(x), \quad (\text{A.2})$$

com coeficientes $b(x)$ e $c(x)$ analíticos em uma vizinhança de $x = 0$. Além disso, $Q_{\alpha,n}$ e b_β , c_j são expressos em termos das derivadas $\{\Phi_{\alpha,n}\}$.

Agora, nós derivamos a relação de recorrência para os $Q_{\alpha,n}$, e damos as fórmulas para b_β e c_j . Fazemos referência a [10, 11] para limitações que implicam a convergência e a analiticidade. Com esse fim em mente, é conveniente introduzir a função $R(x, y)$, provada ser analítica conjunta em [10], e que é tomada para satisfazer, $R_{\alpha,j} = 0$, $j = 2, 3, \dots$, para todo α , e

$$y^2 = Q(x, y)\Phi(x, y) + R(x, y). \quad (\text{A.3})$$

Em termos dos coeficientes da expansão em série, podemos escrever

$$(y^2)_{\alpha,j} = R_{\alpha,j} + \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\nu=0}^j Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,j-\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Assim, $y^2 - R = Q\Phi = y^2 + by + c$, e

$$b(x) = -\sum_{\alpha=0}^{\infty} R_{\alpha,1}x^\alpha, \quad c(x) = -\sum_{\alpha=0}^{\infty} R_{\alpha,0}x^\alpha. \quad (\text{A.5})$$

Em seguida, damos relações de recorrência para os $Q_{\alpha,n}$.

Lema A.52. *As seguintes relações são satisfeitas:*

$$(a) \quad Q_{0,0} = 1, \quad Q_{\alpha,0} = -\sum_{\beta < \alpha} \sum_{\nu=0}^2 Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,2-\nu}, \quad \alpha \geq 1; \quad (\text{A.6})$$

$$(b) \quad \text{Para } l \geq 1, \quad Q_{\alpha,l} = -\sum_{\beta < \alpha} \sum_{\nu=0}^{2+l} Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,2+l-\nu} - \sum_{\nu=0}^{l-1} Q_{\alpha,\nu} \Phi_{0,2+l-\nu}; \quad (\text{A.7})$$

$$(c) \quad c_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} Q_{\beta,0} \Phi_{\alpha-\beta,0}; \quad (\text{A.8})$$

$$(d) \quad b_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \sum_{\nu=0}^1 Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,1-\nu}. \quad (\text{A.9})$$

Demonstração:

(a) Tomando $\alpha = 0$, $j = 2$ na Eq. (A.4) da $1 = \sum_{\nu=0}^2 Q_{0,\nu} \Phi_{0,2-\nu} = Q_{0,0} \Phi_{0,2} = Q_{0,0}$. Para $\alpha \geq 1$, tomamos $j = 2$ e separamos o termo $\beta = \alpha$ na Eq. (A.4) que é

$$\sum_{\nu=0}^2 Q_{\alpha,\nu} \Phi_{0,2-\nu} = Q_{\alpha,0} \Phi_{0,2} + Q_{\alpha,1} \Phi_{0,1} + Q_{\alpha,2} \Phi_{0,0} = Q_{\alpha,0}.$$

Notando que $R_{\alpha,2} = 0$, o resultado segue.

(b) Colocamos $j = 2 + l$, $l = 1, 2, \dots$ em Eq. (A.4) e separamos o termo $\beta = \alpha$ que é

$$\sum_{\nu=0}^{2+l} Q_{\alpha,\nu} \Phi_{0,2+l-\nu} = \left(\sum_{\nu=0}^{l-1} + \sum_{\nu=l}^{l+2} \right) Q_{\alpha,\nu} \Phi_{0,2+l-\nu}.$$

A última soma é $Q_{\alpha,l} \Phi_{0,2} + Q_{\alpha,l+1} \Phi_{0,1} + Q_{\alpha,l+2} \Phi_{0,0} = Q_{\alpha,l}$ e, como $R_{\alpha,2+l} = 0$, o resultado segue.

(c) De Eqs.(A.4) e (A.5), temos $c_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} Q_{\beta,0} \Phi_{\alpha-\beta,0}$ e o termo $\beta = \alpha$ é igual a zero desde que $\Phi_{0,0} = 0$.

(d) $b_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\nu=0}^1 Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,1-\nu}$ e o termo $\beta = \alpha$ é zero desde que $\Phi_{0,1-\nu} = 0$ para $\nu = 0, 1$.

□

Nós agora determinamos as ordens mais baixas da expansão dos coeficientes $Q_{\alpha,j}$ da expansão do Q de nosso caso, ou seja, o $Q(\kappa, r, \vec{p})$ do Teorema 4.31. Para este fim, como foi enfatizado acima, voltamos para as variáveis κ e r em vez das variáveis x e y respectivamente. Do Lema A.52, obtemos os seguintes expansões para as coeficientes $Q(\kappa, r, \vec{p})$

$$\begin{aligned} Q_{1,0} &= -\sum_{\nu=0}^2 Q_{0,\nu} \Phi_{1,2-\nu} = 0, \\ Q_{0,1} &= -Q_{0,0} \Phi_{0,3} = -\Phi_{0,3} = -1, \\ Q_{1,1} &= -\sum_{\nu=0}^3 Q_{0,\nu} \Phi_{1,3-\nu} - Q_{1,0} \Phi_{0,3} = 0, \\ Q_{0,2} &= -\sum_{\nu=0}^1 Q_{0,\nu} \Phi_{0,4-\nu} = -Q_{0,0} \Phi_{0,4} - Q_{0,1} \Phi_{0,3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Aqui, usamos $\Phi_{0,n} = \frac{d^n}{dr^n} [(e^r - 1)^2]_{r=0} = \frac{d^n}{dr^n} \left(\sum_{k \geq 1} \frac{r^k}{k!} \right)^2 \Big|_{r=0}$. Assim, $\Phi_{0,1} = 0$, $\Phi_{0,2} = 1$, $\Phi_{0,3} = 1$, $\Phi_{0,4} = \frac{2}{3!} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ e $\Phi_{0,5} = \frac{2}{4!} + \frac{2}{3!2} = \frac{1}{4}$. Como, $Q_{2,0} = -\sum_{\beta=0}^1 \sum_{\nu=0}^2 Q_{\beta,\nu} \Phi_{2-\beta,2-\nu} = 0$ e, desde que $\Phi_{j,2-\nu} = 0$, $\nu = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} Q_{3,0} &= -\sum_{\beta=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 Q_{\beta,\nu} \Phi_{3-\beta,2-\nu} = -\sum_{\nu=0}^2 [Q_{0,\nu} \Phi_{3,2-\nu} + Q_{1,\nu} \Phi_{2,2-\nu} + Q_{2,\nu} \Phi_{1,2-\nu}] \\ &= -Q_{0,0} \Phi_{3,2} - Q_{0,1} \Phi_{3,1} - Q_{0,2} \Phi_{3,0} = \frac{1}{4} \Sigma(\vec{p}). \end{aligned}$$

Considerando a expansão para $Q_{2,1}$, obtemos,

$$\begin{aligned} Q_{2,1} &= -\sum_{\beta=0}^1 \sum_{\nu=0}^3 Q_{\beta,\nu} \Phi_{2-\beta,3-\nu} - Q_{2,0} \Phi_{0,3} = 0, \\ Q_{0,3} &= -\sum_{\nu=0}^2 Q_{0,\nu} \Phi_{0,5-\nu} = -\frac{1}{4} + \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = -\frac{1}{12}, \\ Q_{1,2} &= -\sum_{\nu=0}^4 Q_{0,\nu} \Phi_{1,4-\nu} - \sum_{\nu=0}^1 Q_{1,\nu} \Phi_{0,4-\nu} = 0. \end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$\begin{aligned} Q_{0,0} &= 1, & Q_{0,1} &= -1, & Q_{0,2} &= \frac{5}{12}, & Q_{1,0} &= 0, & Q_{1,1} &= 0, \\ Q_{2,0} &= 0, & Q_{3,0} &= \frac{1}{4} \Sigma(\vec{p}), & Q_{1,2} &= 0, & Q_{2,1} &= 0, & Q_{0,3} &= -\frac{1}{12}, \end{aligned}$$

onde usamos $\Phi_{0,1} = 0$, $\Phi_{0,2} = 1$, $\Phi_{0,3} = 1$, $\Phi_{0,4} = \frac{7}{12}$ e $\Phi_{0,5} = \frac{1}{4}$. Consequentemente,

$$Q(\kappa, r, \vec{p}) = \left(1 - r + \frac{5}{12} r^2 - \frac{1}{12} r^3 \right) + \frac{1}{4} \Sigma(\vec{p}) \kappa^3 + \mathcal{O}(\kappa^\alpha r^j), \quad \alpha + j \geq 4.$$

Além disso, para $Q_{4,0}$ e $Q_{5,0}$, apenas $\beta = 1$ e $\beta = 2$, respectivamente, contribuem em Eq. (A.6). Então,

$$Q_{4,0} = -0 \cdot \Phi_{3,2} - 0 \cdot \Phi_{3,1} - Q_{1,2} \cdot 0 = 0,$$

$$Q_{5,0} = -0 \cdot \Phi_{3,2} - 0 \cdot \Phi_{3,1} - Q_{2,2} \cdot 0 = 0,$$

de modo que a condição acima melhora, para $\alpha \geq 6$ e $j = 0$.

Por último, usando os resultados obtidos, a Eq. (4.32) segue.

Nós agora aplicamos estes resultados para obter os coeficientes b e c no Teorema 4.31.

Da representação de $\Phi(\kappa, r, \vec{p})$ no Lema 4.30, vemos que $\Phi_{\alpha,0} = 0$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Também, $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} = \Phi_{2,2} = \Phi_{4,1} = \Phi_{5,1} = 0$. Além disso, $\Phi_{3,1} = 2\Phi_{3,2} = \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})$, $\Phi_{6,0} = \frac{1}{16}\Sigma(\vec{p})^2$, $\Phi_{0,3} = [(e^r - 1)^2]_{0,3} = 1$.

Assim, das Eqs. (A.4) e (A.5), temos

$$c_\alpha = -R_{\alpha,0} = \sum_{\beta \leq \alpha} Q_{\beta,0} \Phi_{\alpha-\beta,0} = \sum_{\beta < \alpha} Q_{\beta,0} \Phi_{\alpha-\beta,0},$$

de modo que $c_\alpha = 0$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e $c_6 = Q_{0,0}\Phi_{6,0} = \frac{1}{16}\Sigma(\vec{p})^2$. Das Eqs. (A.4) e (A.5), para os b_α 's, temos $b_\alpha = -R_{\alpha,1} = \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{\nu=0}^1 Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,1-\nu} = \sum_{\beta < \alpha} \sum_{\nu=0}^1 Q_{\beta,\nu} \Phi_{\alpha-\beta,1-\nu}$. Assim, obtemos $b_0 = b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = Q_{0,0}\Phi_{3,1} = \Phi_{3,1} = \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})$, $b_4 = Q_{1,0}\Phi_{3,1}$, $b_5 = Q_{2,0}\Phi_{3,1}$ e $b_6 = \Phi_{6,1} + Q_{0,1}\Phi_{6,0} + Q_{3,0}\Phi_{3,1} = \Phi_{6,1} + \frac{1}{16}Q_{0,1}\Sigma(\vec{p})^2 + Q_{3,0}(\frac{1}{2}\Sigma(\vec{p}))$.

Precisamos calcular $Q_{0,1}$, $Q_{3,0}$, $Q_{1,0}$ e $Q_{2,0}$. Temos $Q_{1,0} = -Q_{0,0}\Phi_{1,2} - Q_{0,1}\Phi_{1,1} - Q_{0,2}\Phi_{1,0} = 0$ e, similarmente, $Q_{2,0} = 0 = -Q_{0,0}\Phi_{2,2} - Q_{0,1}\Phi_{2,1} - Q_{0,2}\Phi_{2,0} - Q_{1,0}\Phi_{1,2} - Q_{1,1}\Phi_{1,1} - Q_{1,2}\Phi_{1,0}$. Encontramos $Q_{0,1} = -Q_{0,0}\Phi_{0,3} = -\Phi_{0,3} = -1$ e $Q_{3,0} = -Q_{0,0}\Phi_{3,2} - Q_{0,1}\Phi_{3,1} = -\Phi_{3,2} + \Phi_{3,1} = \frac{1}{4}\Sigma(\vec{p})$, que dá $b_6 = \Phi_{6,1} + \frac{1}{16}\Sigma(\vec{p})^2$.

Resumindo, temos $b(\kappa, \vec{p}) = \frac{1}{2}\Sigma(\vec{p})\kappa^3 + (\Phi_{6,1}(\vec{p}) + \frac{1}{16}\Sigma(\vec{p})^2)\kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7)$ e $c(\kappa, \vec{p}) = \frac{1}{16}\Sigma(\vec{p})^2\kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7)$. de modo que, como anunciado na Observação 4.32, temos

$$\Delta(\kappa, \vec{p}) = b^2 - 4c = \Sigma(\vec{p})^2\kappa^6 - \Sigma(\vec{p})^2\kappa^6 + \mathcal{O}(\kappa^7) = \mathcal{O}(\kappa^7). \quad (\text{A.10})$$

Lembrando que os resultados obtidos aqui são válidos para funções analíticas reais, enunciaremos a seguinte proposição que nos ajuda a estender as relações de recorrência para funções holomorfas, num processo é denominado de complexificação.

Proposição A.53. *Seja $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica (real) no aberto $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Então, existe um conjunto aberto $W^{com} \subset \mathbb{C}^n$, com $W \subset W^{com}$ e uma função analítica complexa (holomorfa) $f^{com} : W^{com} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{com}|_W = f$. Além disso, se $g : \Omega \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa no aberto Ω com $W \subset \Omega$, tal que $g|_W = f$, então existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, com $W \subset U$ e tal que $g|_U \equiv f^{com}|_U$. A função f^{com} é a complexificação da função f anterior.*

O TPW para o caso de funções holomorfas (caso complexo) também é de grande utilidade, pois ele fornece uma ideia do comportamento das raízes do polinômio de Weierstrass. De fato, esta versão do TPW fixa o raio de um disco onde estas raízes existem. Antes de enunciar o TPW, para o caso complexo, precisamos da seguinte definição.

Definição A.54. Uma função analítica f em $a = (a', a_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \equiv \mathbb{C}^n$, com $f(a) = 0$, é denominada ser z_n -regular de ordem $k \in \mathbb{N}$ em a , se $g(z_n) = f(a', z_n)$, tem um zero de ordem k em $z_n = a_n$, i.e., se

$$g(a_n) = g'(a_n) = \cdots = g^{(k-1)}(a_n) = 0, \quad g^{(k)}(a_n) \neq 0.$$

Com isso, enunciamos a versão do TPW para o caso de funções holomorfas como segue.

Teorema A.55 (Teorema de Preparação de Weierstrass, caso complexo [13, 12]). *Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^2$ uma vizinhança aberta de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica ($f \in H(\mathcal{U})$) k -regular em $(0, 0)$. Então, existem $\varepsilon, \delta > 0$ e um polinômio (mônico) de Weierstrass W no poli-disco $B(0; \delta) \times B(0; \varepsilon)$ tal que*

$$f(z_1, z_2) = \varphi(z_1, z_2)W(z_1, z_2),$$

para $(z_1, z_2) \in B(0; \delta) \times B(0; \varepsilon)$. Além disso,

- (1) W e φ são únicos;
- (2) Se f é real então W e φ são também reais.

A prova deste teorema fornece informações precisas sobre disco onde os zeros do polinômio Weierstrass estão contidos. Esta informação é de grande importância na prova do Teorema 4.35. Para isso, na continuação nós nos concentramos apenas na parte da demonstração deste teorema que é útil para nós.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, tal que $g(z_2) := f(0, z_2)$ não tem zeros no disco fechado furado $\bar{B}(0; \varepsilon) \setminus \{0\}$. Por hipótese, k é a multiplicidade do zero desta função em $z_2 = 0 \in \mathbb{C}$. Agora, como $g(z_2) \neq 0$ para $|z_2| = \varepsilon$, então, por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que se $z_1 \in \bar{B}(0; \varepsilon)$ e $|z_2| = \varepsilon$. Assim, $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ não tem zeros no círculo $|z_2| = \varepsilon$. Também, observamos que ε e δ são tomados de modo que $\bar{B}(0; \delta) \times \bar{B}(0; \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Agora, para cada $z_1 \in B(0; \delta)$ fixo, consideremos $f(z_1, z_2)$ como uma função de z_2 . Então, o número de raízes de $f(z_1, \cdot) = 0$, contando multiplicidades em $B(0; \varepsilon)$, $\nu(z_1)$, é dado por

$$\nu(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=\varepsilon} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1, \xi)}{f(z_1, \xi)} d\xi.$$

Claramente, $\nu(z_1)$ é uma função contínua. Como $\nu(z_1)$ só assume valores inteiros, $\nu(z_1) = k$ (pela k -regularidade da hipótese), para todo $z_1 \in B(0; \delta)$.

A continuação da prova envolve basicamente a existência de W e φ no conjunto $B(0; \delta) \times B(0; \varepsilon)$. Como estamos interessados apenas no poli-disco, interrompemos a prova aqui, lembrando que os detalhes da continuação podem ser encontrados na Ref. [13] ou também em [12]. $\square$

Observação A.56. Da prova acima, podemos extrair as seguintes conclusões:

1. *Esta prova pode ser generalizada para o caso em que f é k -regular num ponto $(a_1, a_2) \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$;*
2. *A igualdade $f = \varphi W$ é verdadeira no conjunto $B(0; \delta) \times B(0; \varepsilon) \subset \bar{B}(0; \delta) \times \bar{B}(0; \varepsilon) \subset \mathcal{U}$;*
3. *$\varepsilon > 0$ é tomado de modo que $f(0, z_2)$ não tem zeros no disco fechado furado $\bar{B}(0; \varepsilon) \setminus \{0\}$.*

Com estas observações, que usaremos no corpo da tese, concluímos nossa análise sobre o TPW.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Simon, *Statistical Mechanics of Lattice Models* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [2] E. Seiler, Lect. Notes in Phys. 159, *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics* (Springer, New York, 1982).
- [3] P.A. Faria da Veiga e M. O'Carroll, Phys. Rev. D 71, 017503 (2005).
- [4] M. O'Carroll, P.A. Faria da Veiga, e A. Francisco Neto, Commun. Math. Phys. 321, 249-282 (2013).
- [5] T. Spencer, Commun. Math. Phys. 44, 143-164 (1975).
- [6] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, E. Pereira e R. Schor, Commun. Math. Phys. 220, 377-402 (2001).
- [7] E. Hille, *Analytic Function Theory*, vol. 1 (Blaisdell Publishing Co., New York, 1959).
- [8] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, e R. Schor, Commun. Math. Phys. 245, 383-405 (2004).
- [9] P.A. Faria da Veiga e M. O'Carroll, J. Math. Phys. 49, 042303, 1-45 (2008); Int. J. Mod. Phys. A24, 3053-3072 (2009).
- [10] S. G. Krantz e H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions* (Birkhauser, Basel, Switzerland, 2002).
- [11] A.I. Markusevich, *Theory of Functions*, 2 vols. (Chelsea, New York, 1985).
- [12] T. Nishino, *Function Theory in Several Complex Variables*, volume 193, Translations of Mathematical Monographs, AMS, Providence RI, 1996.
- [13] R. Michael Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, GTM 108, Springer, New York, 1986.

-
- [14] B. Malgrange, *The preparation theorem for differentiable functions*, Differential Analysis, Bombay Colloquium, Oxford University Press London, London, pp. 203-208.
- [15] P.A. Faria da Veiga, M. O'Carroll, e J.C. Valencia, *One-Baryon Spectrum and Analytical Properties of One-Baryon Dispersion Curves in $3+1$ Dimensional Strongly Coupled Lattice QCD With Three Flavors*, outubro de 2015. Submetido ao *Journal of Mathematical Physics*.
- [16] P.A. Faria da Veiga e M. O'Carroll, Phys. Rev. D75, 074503 (2007). Erratum em Phys. Rev. D82, 079904 (2010).
- [17] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups* (American Mathematical Society, Providence, 1996).
- [18] F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization* (Academic Press, NY, 1966).
- [19] P. Menotti e A. Pelissetto, Commun. Math. Phys. 113, 369-373 (1987).
- [20] J. Glimm e A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View* (Springer Verlag, New York, 1986).
- [21] M. Gell-Mann e Y. Ne'eman, *The Eightfold Way* (Benjamin, New York, 1964).
- [22] M. Reed e B. Simon, *Modern Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, *Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic Press, New York, 1975).
- [23] A. Francisco Neto, P.A. Faria da Veiga, e M. O'Carroll, J. Math. Phys. 49, 072301 (2008).
- [24] R. Schor, Nucl. Phys. **B 222**, 71-82 (1983); **B 231**, 321 (1984).