**Resolubilidade semiglobal de classes de campos vetoriais
não-singulares**

Vinícius Novelli da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Vinícius Novelli da Silva

Resolubilidade semiglobal de classes de campos vetoriais não-singulares

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
Março de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

N938r Novelli da Silva, Vinícius
 Resolubilidade semiglobal de classes de campos
vetoriais não-singulares / Vinícius Novelli da
Silva; orientador Paulo Leandro Dattori da Silva. --
São Carlos, 2020.
 101 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

 1. Equações diferenciais parciais lineares. 2.
Campos vetoriais. 3. Normalização. 4. Resolubilidade
semiglobal. 5. Condições diofantinas. I. Leandro
Dattori da Silva, Paulo, orient. II. Título.

Vinícius Novelli da Silva

**Semiglobal solvability for classes of non-singular vector
fields**

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics
and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance
with the requirements of the Mathematics Graduate
Program, for the degree of Master in Science. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva

USP – São Carlos
March 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, pelo constante apoio e encorajamento, e por estarem comigo nos momentos mais difíceis.

Em segundo, ao meu orientador e amigo Paulo Leandro Dattori, pelas inúmeras sugestões, confiança, e por seu esforço enorme em me ajudar de todas as maneiras possíveis (acadêmicas ou não). É um grande exemplo de profissional e pessoa, sem o qual este trabalho não seria possível.

Agradeço também a todos os amigos que fizeram parte da minha jornada em São Carlos.

Finalmente, à FAPESP (processo: 2017/20664-1), pelo auxílio financeiro.

RESUMO

SILVA, V. N. DA. **Resolubilidade semiglobal de classes de campos vetoriais não-singulares**. 2020. 98 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Neste trabalho, estudamos uma família de operadores diferenciais parciais de primeira ordem definidos em uma vizinhança de um toro invariante $\mathbb{T}_0^m := \mathbb{T}^m \times \{0\} \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$. Estes operadores possuem órbitas (no sentido de Sussmann) contidas em $\mathbb{T}_0^m$.

Mostramos que, se uma certa condição diofantina (de tipo Siegel) for satisfeita, é possível encontrar uma forma normal para estes operadores numa vizinhança do toro invariante. Neste caso, um resultado de resolubilidade semiglobal é provado. Discutimos o problema nas categorias C^∞ (suave) e C^ω (real-analítica).

Palavras-chave: Resolubilidade semiglobal, Normalização, Condição (P), Órbitas presas, Condições diofantinas.

ABSTRACT

SILVA, V. N. DA. **Semiglobal solvability for classes of non-singular vector fields.** 2020. [98](#) p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

In this work, we study a family of first-order partial differential operators defined in a neighborhood of an invariant torus $\mathbb{T}_0^m := \mathbb{T}^m \times \{0\} \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$. These operators have orbits (in the sense of Sussmann) which are contained in $\mathbb{T}_0^m$.

We prove that, if a certain diophantine condition (of Siegel-type) is satisfied, it is possible to determine a normal form for these operators in a neighborhood of the invariant torus. In this case, we also prove a semiglobal solvability result. We discuss the problem in the C^∞ (smooth) and C^ω (real-analytic) categories.

Keywords: Semiglobal solvability, Normalization, Condition (P), Trapped orbits, Diophantine conditions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	19
2.1	Teoria básica das EDOs	19
2.2	Campos de vetores e fluxos em variedades	26
2.3	Retrato de fase de um campo de vetores	30
2.4	Equivalência topológica e conjugação	32
2.5	Conjuntos α e ω -limite de uma órbita	39
2.6	O teorema das variedades estável e instável	41
2.7	O teorema da linearização de Siegel	44
2.8	O teorema da extensão de Whitney	44
2.8.1	<i>Versão clássica</i>	44
2.8.2	<i>Versão com parâmetros</i>	51
2.9	Distribuições periódicas e séries de Fourier	53
3	A CLASSE DE CAMPOS A SER ESTUDADA	57
3.1	A condição (P)	58
3.2	Uma classe de campos vetoriais não resolúvel	59
3.3	Um estudo das condições diofantinas $(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$ e $(\mathcal{I}_{\mathbb{C}})$	61
4	NORMALIZAÇÃO	63
4.1	Forma normal - O caso real	63
4.2	Normalização formal - caso real	68
4.3	Prova da proposição 4.1.7: A equação homológica	72
4.4	Forma normal - o caso complexo	77
5	RESOLUBILIDADE	81
5.1	Resolubilidade do campo vetorial real $M_{\omega,\lambda}$	81
5.2	Resolubilidade do campo vetorial complexo $L_{\omega,\lambda}$	84
5.2.1	<i>Alguns lemas técnicos</i>	88
5.2.2	<i>Demonstração do teorema 5.2.4</i>	94
	REFERÊNCIAS	97

INTRODUÇÃO

Na área de equações diferenciais, o problema mais clássico possível é o de determinar se uma equação *admite ou não* alguma solução. Esta pergunta permite uma infinidade de possíveis interpretações: é preciso especificar qual o tipo da equação, quais objetos são admissíveis como solução, onde estes estão definidos, qual a regularidade procurada, etc.

Para tornar o problema um pouco mais preciso, considere a seguinte formulação: seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e $P : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ um operador diferencial parcial linear de ordem m em Ω . Isto significa que, dada $u \in C^\infty(\Omega)$, temos

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\Omega). \quad (1.0.1)$$

(aqui, $C^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções suaves $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ a valores complexos). Uma versão da pergunta acima pode ser a seguinte: “ P é localmente resolúvel?” Isto significa que, dados $p \in \Omega$ e $f \in C_c^\infty(\Omega)$, existe um aberto $U \subset \Omega$ contendo p e uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(U)$ tais que $Pu = f$ em U .

Foi uma grande supresa quando, em 1957, Hans Lewy observou que o operador diferencial parcial linear em $\mathbb{R}^3$, dado por

$$P = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} - 2i(x + iy) \frac{\partial}{\partial z},$$

não é localmente resolúvel em *nenhum* ponto de $\mathbb{R}^3$ (LEWY, 1957).

Houve um período de intensa atividade após esta descoberta, com o objetivo de encontrar condições necessárias e suficientes para a resolubilidade local de P . Este período culminou com os trabalhos de Louis Nirenberg e François Trèves (NIRENBERG; TREVES, 1963), (NIRENBERG; TREVES, 1970a), (NIRENBERG; TREVES, 1970b), onde estes encontram uma condição, conhecida como *condição (P)* (enunciada na página 333 de (NIRENBERG; TREVES, 1963)), e provam que em vários casos esta é equivalente à resolubilidade local. Finalmente,

em 1973, Beals e Fefferman (BEALS; FEFFERMAN, 1973) completaram o programa, que resumidamente diz o seguinte: se P é um operador diferencial parcial linear de tipo principal em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, então P é localmente resolúvel se, e somente se, satisfaz a condição (P) (estes termos serão definidos no próximo capítulo).

Um passo natural após tal resultado é o estudo da resolubilidade *semiglobal*, ou seja, procurar soluções definidas em vizinhanças de um compacto $K \subset \Omega$. Mais precisamente, suponha agora que Ω seja uma variedade suave (C^∞) N -dimensional e $P : C^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ seja um operador diferencial parcial linear de ordem m em Ω (ou seja, que localmente é da forma (1.0.1)). Dado um compacto $K \subset \Omega$, dizemos que P é resolúvel em K se, para toda f em um subespaço de codimensão finita de $C^\infty(\Omega)$, existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $Pu = f$ em uma vizinhança de K .

Neste caso, mesmo para campos complexos não-singulares (operadores de primeira ordem), não é conhecida uma caracterização para a resolubilidade semiglobal. Uma condição suficiente foi dada por Hörmander (HÖRMANDER, 1978), em 1978, e diz que se P (de tipo principal) satisfaz a condição (P) e uma certa condição geométrica (CG) (enunciada no teorema 7.1, página 601 de (HÖRMANDER, 1978)), então P é resolúvel em K . Entretanto, esta condição (CG) não é necessária.

Neste trabalho, queremos entender melhor a resolubilidade semiglobal de operadores que não satisfazem a condição (CG) de Hörmander. Para isso, nos restringimos ao caso de campos vetoriais complexos não-singulares, onde podemos enunciar a condição (CG) em termos de suas *órbitas de Sussmann*:

Definição 1.0.1. Seja $L = X + iY$ um campo vetorial suave e complexo definido na variedade Ω . Dizemos que dois pontos $p, q \in \Omega$ pertencem à mesma órbita de Sussmann (ou órbita, por simplicidade) se existir uma curva $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$ contínua, suave por partes, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(T) = q$ e uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ de $[0, T]$ tal que $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ é curva integral de $\pm X$ ou $\pm Y$.

A relação “ p e q estão na mesma órbita” é uma relação de equivalência, e o quociente de Ω por esta relação é o conjunto das órbitas de Sussmann do campo L . É possível mostrar que cada órbita tem uma estrutura de subvariedade imersa a Ω . Para mais informações, citamos o terceiro capítulo de (BERHANU; CORDARO; HOUNIE, 2008) e o artigo original de Sussmann, (SUSSMANN, 1973).

Neste caso, se o operador P é um campo vetorial complexo não-singular definido na variedade Ω , a condição (CG) é implicada pela condição

(CG)’ Não existe órbita relativamente compacta contida em K .

Estamos, portanto, interessados em estudar campos que admitam tais órbitas contidas (ou presas) em um compacto $K \subset \Omega$.

Neste caso, alguns fenômenos diferentes passam a ser relevantes, como condições diofantinas e ordens de anulamento dos coeficientes do campo vetorial. Existem muitos trabalhos nesta direção, e citamos alguns como (BERGAMASCO; MEZIANI, 2005), (BERGAMASCO; SILVA, 2012), (CORDARO; GONG, 2004) e (MEZIANI, 2001).

Nossa referência principal para este trabalho é o artigo (MEZIANI, 2017), onde são estudados exemplos de campos vetoriais com órbitas presas em um toro invariante de dimensão arbitrária. Neste caso, a estratégia para obter um resultado de resolubilidade semiglobal é a de encontrar uma *forma normal* para o operador numa vizinhança de K . Neste caso, a existência de uma forma normal já é um problema interessante por si só.

Nosso objetivo é escrever com detalhes alguns dos resultados de (MEZIANI, 2017) e organizar os pré-requisitos necessários, com o objetivo de facilitar a introdução deste belo conjunto de resultados a pessoas menos familiares com a área.

Descrevemos agora os resultados obtidos. Denotamos por $\mathbb{T}^m$ o toro $\mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$ e por $B(r)$ a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro 0 e raio r . Seja $\mathbb{T}_0^m = \mathbb{T}^m \times \{0\} \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$. Dados $\omega \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$, com $\omega_k \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, m$ e $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, considere os campos vetoriais reais X, Y definidos numa vizinhança aberta de $\mathbb{T}_0^m$ por

$$X = \sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(t, x)) \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad (1.0.2)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j + f_j(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1.0.3)$$

onde $g_k, f_j \in C^a(\mathbb{T}^m \times B(r); \mathbb{R})$ para algum $r > 0$ e $a = \varpi$ (real-analítica) ou $a = \infty$ (suave). Suponha que $g_k(t, x) = O(|x|)$ e $f_j(t, x) = O(|x|^2)$. Observe que a órbita (do campo $X + Y$) passando por qualquer ponto de $\mathbb{T}_0^m$ fica presa em $\mathbb{T}_0^m$, já que $Y = 0$ em $\mathbb{T}_0^m$. Vamos estudar tanto o campo complexo $X + iY$ quanto o campo real $X + Y$.

Para o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, introduzimos a seguinte condição diofantina (de tipo Siegel):

$(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$: Existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$|i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle - \varepsilon \lambda_j| \geq \frac{C}{(|K| + |J|)^\mu}$$

para todo $K \in \mathbb{Z}^m, J \in \mathbb{N}^n, j = 1, \dots, n, \varepsilon \in \{0, 1\}$ e $|K| + |J| > 0$.

A condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ é relacionada com a normalização do campo vetorial real $X + Y$. Um dos principais resultados deste trabalho é o seguinte

Teorema 1.0.2. Sejam X e Y dados por (1.0.2) e (1.0.3), respectivamente. Suponha que (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ e que as componentes g_k e f_j do campo $X + Y$ sejam de classe C^∞ . Então existe um difeomorfismo

$$\Phi(t, x) = (x + \phi(t, x), t + \psi(t, x))$$

de classe C^∞ definido numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$, cuja imagem é outra vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$, com $\phi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$ e tal que

$$\Phi_*(X + Y) = \sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

A partir desta forma normal, deduzimos o seguinte

Teorema 1.0.3. Nas mesmas condições do teorema 1.0.2, seja F uma função de classe C^∞ definida numa vizinhança do toro $\mathbb{T}_0^m$ e que satisfaz $\int_{\mathbb{T}^m} F(t, 0) dt = 0$. Então, a equação

$$(X + Y)u = F$$

admite uma solução C^∞ numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$.

Observação 1.0.4. Na categoria real-analítica, os teoremas 1.0.2 e 1.0.3 também são válidos. O resultado de normalização foi obtido em (CHOW; LU; SHEN, 1992), e mostramos como concluir a resolubilidade na categoria real-analítica a partir dele no capítulo 5.

No caso complexo, a condição diofantina é um pouco diferente:

$(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$: Existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$|\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle| \geq \frac{C}{(|K| + |J|)^\mu}$$

para todo $K \in \mathbb{Z}^m, J \in \mathbb{N}^n$ tais que $|K| + |J| > 0$.

Assumindo que o par (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$ e que $[X, Y] = 0$, tem-se o seguinte resultado de normalização na categoria real-analítica:

Teorema 1.0.5. Sejam X e Y dados por (1.0.2) e (1.0.3), respectivamente. Suponha que $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$. Sejam $g \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^m)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^n)$, $g = O(|x|)$, $f = O(|x|^2)$, tais que os campos $X = (\omega + g)\partial_t$ e $Y = (\lambda x + f)\partial_x$ satisfazem

$$[X, Y] = 0.$$

Então, existe um difeomorfismo Φ real-analítico da forma

$$\Phi(t, x) = (t + \phi(t, x), x + \psi(t, x))$$

definido em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ com $\phi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$ e tal que

$$\Phi_*(X + iY) = \sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + i \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

A partir deste deduzimos o

Teorema 1.0.6. Nas mesmas condições do teorema 1.0.5, dada uma função F real-analítica numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ satisfazendo $\int_{\mathbb{T}^m} F(t, 0)dt$, a equação $(X + iY)u = F$ admite uma solução real-analítica em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$.

Na categoria suave, o campo $X + iY$ nem sempre é normalizável (apresentaremos um exemplo no capítulo 4). Entretanto, se todos os λ_j tiverem o mesmo sinal, tem-se o resultado:

Teorema 1.0.7. Suponha que $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$ e que os coeficientes λ_j tenham o mesmo sinal para todo $j = 1, \dots, n$. Sejam $g \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^m)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^n)$, com $g = O(|x|)$, $f = O(|x|^2)$, e tais que os campos $X = (\omega + g)\partial_t$ e $Y = (\Lambda x + g)\partial_x$ satisfazem

$$[X, Y] = 0.$$

Então, existe um difeomorfismo Φ de classe C^∞ definido em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ tal que

$$\Phi_*(X + iY) = \sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + i \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

A resolubilidade de $X + iY$ no caso suave é mais delicada ainda:

Teorema 1.0.8. Suponha que o campo $X + iY$ seja de classe C^∞ e normalizável. Dada uma função suave F definida numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ que satisfaz $\int_{\mathbb{T}^m} F(t, 0)dt = 0$, vale o seguinte: para cada $q \in \mathbb{N}$, a equação $(X + iY)u = F$ admite uma solução u_q de classe C^q numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$.

Não é verdade que a equação $(X + iY)u = F$ admite soluções C^∞ em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ para toda $F \in C^\infty$ satisfazendo $\int_{\mathbb{T}^m} F(t, 0)dt = 0$. Apresentamos um exemplo no capítulo 5.

A organização deste trabalho é feita da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos alguns dos resultados básicos que serão necessários nas demonstrações dos resultados, como a teoria das distribuições periódicas, existência de variedades estável e instável e o teorema da extensão de Whitney. No capítulo 3, estudaremos em mais detalhes a condição **(P)** para a família de campos que definimos, apresentaremos um exemplo de um campo vetorial no formato que estamos estudando que *não* é resolúvel em $\mathbb{T}_0^m$ (o que mostra a necessidade de alguma condição nos parâmetros (ω, λ)), e faremos um breve estudo das condições diofantinas dadas. No capítulo 4 vamos apresentar as demonstrações dos teoremas 1.0.2, 1.0.5 e 1.0.7, e finalmente, no capítulo 5, vamos apresentar as demonstrações dos teoremas 1.0.3, 1.0.6 e 1.0.8.

PRELIMINARES

Neste capítulo, desenvolvemos alguns dos resultados básicos da teoria das equações diferenciais ordinárias que vamos usar neste trabalho. As referências principais são (HÖRMANDER, 1997) (seção 1 do primeiro capítulo), (HÖRMANDER, 2003) (capítulos 1 e 2), (LEE, 2003) (capítulo 17), (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003) (capítulos 1 e 2), (BANYAGA; HURTUBISE, 2004) (capítulo 4), (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1977) (seção 2), (MALGRANGE, 1966) (capítulo 1) e (PALIS; MELO, 1982) (capítulo 2).

2.1 Teoria básica das EDOs

Sejam $U \subset \mathbb{R}^{1+N}$ uma vizinhança aberta do ponto (t_0, x_0) e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma função contínua. Queremos resolver o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

para t em uma vizinhança de t_0 . Para isto, escolhemos $a, b > 0$ e $M > 0$ tais que f está definida no retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+N}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

e $|f(t, x)| \leq M$ para $(t, x) \in R$. Se x for uma solução de classe C^1 de (2.1.1) e $|x(t) - x_0| \leq b$ para $|t - t_0| \leq T$, obtemos a partir da equação $x' = f(t, x)$ que

$$|x(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t - t_0|, \quad |t - t_0| \leq \min\{a, T\}.$$

Escolhendo $T \leq \min\{a, b/M\}$, obtemos $|x(t) - x_0| \leq b$. Entretanto, nós já havíamos assumido que $|x(t) - x_0| \leq b$ para escrever esta estimativa, e não podemos usá-la para concluir que $|x(t) - x_0| \leq b$. Podemos remover esta circularidade com a seguinte

Proposição 2.1.1. Se $T \leq \min\{a, b/M\}$ e $x(t)$ é qualquer solução de (2.1.1) (de classe C^1) para $|t - t_0| \leq T$, segue que $|x(t) - x_0| \leq b$.

Observação 2.1.2. Esta é a proposição 1.2.1, página 1 de (HÖRMANDER, 1997).

Demonstração. Defina o seguinte conjunto fechado:

$$F = \{s \in [0, T]; |x(t) - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq s\}.$$

Escreva $T_1 = \sup F$. Afirmamos que $T_1 = T$. De fato, se $T_1 < T$, como $T_1 \in F$, vale que para todo $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1]$

$$|x(t) - x_0| \leq MT_1 < MT \leq b.$$

Mas, da continuidade de x , se $|x(t) - x_0| < b$ para $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1]$, então essa desigualdade continua valendo em um intervalo aberto contendo propriamente $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$, o que contradiz a maximalidade de T_1 . Assim, concluímos que $T_1 = T$. $\square$

Teorema 2.1.3 (Existência). Suponha dados o retângulo R e os valores a, b, M como na discussão acima. Se, além disso, a função f satisfizer a condição de Lipschitz na variável espacial

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq C|x - y|, \quad (t, x) \text{ e } (t, y) \text{ pertencem ao retângulo } R, \quad (2.1.2)$$

então, o problema de Cauchy (2.1.1) admite uma solução de classe C^1 , definida para todo $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, sendo $T \leq \min\{a, b/M\}$.

Observação 2.1.4. Este é o teorema 1.2.2, página 1 de (HÖRMANDER, 1997).

Demonstração. Aplicamos o argumento usual de aproximação para resolver (2.1.1), começando da função constante $x_0(t) \equiv x_0$. Defina $x_k(t)$, para $k \in \mathbb{N}$, por

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = f(t, x_{k-1}(t)), \quad x_k(t_0) = x_0,$$

ou seja, por

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) ds, \quad |t - t_0| \leq T. \quad (2.1.3)$$

Para que esta fórmula faça sentido, precisamos saber se $|x_k(t) - x_0| \leq b$ para todo k . Isto é verdade para $k = 0$. Se for válido para $k - 1$, com $k \geq 1$, então

$$|x_k(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_{k-1}(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq b.$$

Assim, por indução, $x_k : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ fica bem definida para todo k . Ainda, se $k \geq 2$, temos que

$$\begin{aligned} |x_k(t) - x_{k-1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, x_{k-1}(s)) - f(s, x_{k-2}(s)) ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t |x_{k-1}(s) - x_{k-2}(s)| ds \right|. \end{aligned}$$

Como $|x_1(t) - x_0(t)| \leq M|t - t_0|$, obtemos por indução que, para todo $k \geq 1$,

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq MC^{k-1} \frac{|t - t_0|^k}{k!} \leq MC^{-1} \frac{(CT)^k}{k!}.$$

Como $\sum_1^\infty (CT)^k/k! < \infty$, segue pelo teste M de Weierstrass que a sequência de funções

$$y_n(t) = \sum_{k=1}^n (x_k(t) - x_{k-1}(t)) = x_n(t) - x_0.$$

converge absoluta e uniformemente em $[t_0 - T, t_0 + T]$. Em particular, $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge absoluta e uniformemente para uma função contínua $x : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^N$, que satisfaz $|x(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq b$. Ainda, $x(t)$ satisfaz

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad |t - t_0| \leq T.$$

Portanto, x é de classe C^1 e resolve o problema de Cauchy (2.1.1). $\square$

Observação 2.1.5. É consequência imediata da demonstração que se f for de classe C^r em U , então a solução x será de classe C^{r+1} . Ainda, estamos usando as notações $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Para provar a unicidade, ao invés de fazer a demonstração clássica, apresentaremos um resultado que lida também com a dependência de parâmetros. Esta formulação será útil no futuro.

Teorema 2.1.6. Nas mesmas condições do teorema 2.1.3, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = y \end{cases} \quad (2.1.4)$$

admite uma única solução $x = x(t, y)$, definida no conjunto

$$\text{dom } x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^{1+N}; M|t - t_0| + |y - x_0| \leq b, |t - t_0| \leq a\}. \quad (2.1.5)$$

Ainda, esta solução satisfaz a estimativa

$$|x(t, y) - x(t, z)| \leq e^{C|t - t_0|} |y - z|, \quad (2.1.6)$$

nos pontos em que $|t - t_0| \leq a$ e $|t - t_0|M + \max\{|y - x_0|, |z - x_0|\} \leq b$.

Observação 2.1.7. Este é o teorema 1.2.3, página 2 de (HÖRMANDER, 1997).

Demonstração. Fixe um ponto $(t_0, y_0) \in \text{dom } x$. Observe que, pela desigualdade triangular, vale que $R_{y_0} := [t_0 - a, t_0 + a] \times B[y_0, b_{y_0}] \subset R$, onde $b_{y_0} := b - |y_0 - x_0|$ e $B[p, r]$ é a bola fechada de centro p e raio r em $\mathbb{R}^N$. Aplicamos o teorema 2.1.3 com este retângulo R_{y_0} e obtemos uma solução $x(t, y_0)$ de (2.1.4), para $|t - t_0| \leq \min\{a, b_{y_0}/M\}$. Em particular, $x(t, y_0)$ está definida

para todo ponto $(t, y_0) \in \text{dom} x$. Fazendo isso para todos os pontos $(t_0, y) \in \text{dom} x$, obtemos uma função $x(t, y)$ definida em todos os pontos de $\text{dom} x$ que satisfazem (2.1.4). Dado um ponto y (tal que $(t_0, y) \in R$), escreva $I_y = \{t \in \mathbb{R}; (t, y) \in R\}$. Observe que, para $(t_0, y) \in \text{dom} x$ fixado, a função $x(t, y)$ é de classe C^1 em $t \in I_y$. Note que

$$\frac{d}{dt}(x(t, y) - x(t, z)) = f(t, x(t, y)) - f(t, x(t, z)).$$

Se definirmos $R(t) = |x(t, y) - x(t, z)|$, então, nos pontos em que $R(t) > 0$, esta função também é de classe C^1 . Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}(R(t))^2 \right| &= |2\langle x(t, y) - x(t, z), f(t, x(t, y)) - f(t, x(t, z)) \rangle| \\ &\leq 2|R(t)| |f(t, x(t, y)) - f(t, x(t, z))| \\ &\leq 2R(t)^2. \end{aligned}$$

Assim, se t é tal que $R(t) > 0$,

$$\left| \frac{dR(t)}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} \sqrt{R^2(t)} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{R^2(t)}} \frac{d(R(t))^2}{dt} \right| \leq C|R(t)| = CR(t).$$

Vamos mostrar que isso implica que

$$R(t) \leq e^{C|t-t_0|} R(t_0), \quad t \in I_y \cap I_z.$$

Escreva $I_z \cap I_y = [t_0 - a_1, t_0 + b_1]$. Vamos provar inicialmente este fato para $t \in (t_0, t_0 + b_1]$. Para t neste intervalo, coloque $u(t) = e^{-C(t-t_0)} R(t) \geq 0$, e escreva $U = \{t \in (t_0, t_0 + b_1]; R(t) > 0\}$. Este conjunto é aberto, e portanto, pode ser escrito como reunião enumerável $U = \bigcup_{n \geq 1} (x_n, y_n)$ de intervalos abertos disjuntos. Se $t \in U$, então u é C^1 e

$$u'(t) = -CR(t)e^{-C(t-t_0)} + R'(t)e^{-C(t-t_0)} \leq 0.$$

Se $t \notin U$, então $u(t) = 0$. Ainda, se houver um $t > t_0$ tal que $u(t) = 0$, então $u(s) = 0$ para todo $s \geq t$ (pois se $u(t) = 0$ para $t > t_0$, devemos ter que $u(x_n)$ ou $u(y_n)$ são nulos para algum $n \geq 1$, e isto é um absurdo pelo teorema do valor médio (implicaria que existe um ponto em (x_n, y_n) em que $u' > 0$). Assim, U é um intervalo aberto, e em $(t_0, t_0 + b_1] \setminus U$, a função u é nula. Assim, segue que, se $t > t_0$, $u(t) \leq u(t_0)$, o que implica a desigualdade que queríamos provar para estes t . Na outra direção o argumento é análogo, considerando $u(t) = e^{C(t-t_0)} R(t)$. A demonstração está completa (o resultado de unicidade segue da estimativa usando $y = z$). $\square$

Aplicamos este resultado para uma equação linear:

Proposição 2.1.8. Seja $A : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ uma função contínua, onde $M_n(\mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Então, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1.7)$$

tem uma única solução com valores em $\mathbb{R}^n$ para $|t - t_0| \leq a$, e podemos escrever a solução como $x(t) := F(t)x_0$, onde F é a única função a valores matriciais que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{dt} = A(t)F(t) \\ F(t_0) = \text{id}_{n \times n} \end{cases}. \quad (2.1.8)$$

Chamamos F de matriz fundamental associada ao problema de Cauchy (2.1.7). Se $\|A(t)\| \leq M$ para $|t - t_0| \leq a$, então valem as seguintes propriedades:

1.

$$\|F(t)\| \leq e^{|t-t_0|M}, \quad |t - t_0| \leq a.$$

2.

$$\|F(t)^{-1}\| \leq e^{|t-t_0|M}, \quad |t - t_0| \leq a.$$

3. Vale a fórmula de Liouville:

$$\det F(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds \right), \quad |t - t_0| \leq a.$$

Observação 2.1.9. Esta é a proposição 1.2.4, página 3 de (HÖRMANDER, 1997).

Demonstração. Estenda a função A continuamente para que esteja definida em $\mathbb{R}$ (aplicando, por exemplo, o teorema da extensão de Tietze). Defina agora $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $f(t, x) = A(t) \cdot x$. Vamos aplicar o teorema 2.1.6 em que o retângulo R é

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid |t - t_0| \leq a, |x| \leq C\},$$

onde $C > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente grande. Tome $C > Ma + |x_0|$. Então, obtemos uma solução $x(t, x_0)$ definida para

$$|t - t_0| \leq \min \left\{ a, \frac{C - |x_0|}{M} \right\} = a,$$

e portanto, $x(t, x_0)$ está definida para todo o intervalo $[t_0 - a, t_0 + a]$. Ainda, se tomarmos $z = 0$, esta função satisfaz $|x(t, y)| \leq e^{M|t-t_0|}|y|$ para $|t - t_0| \leq a$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Escolhendo agora $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ dada por $\tilde{f}(t, X) = A(t)X$ e fazendo o mesmo argumento, obtemos uma única solução $F(t, X)$ de classe C^1 (em $|t - t_0| \leq a$ para X fixado). Definindo $F(t) := F(t, \text{id})$, obtemos uma única solução para (2.1.8). Se escrevermos $y(t) = F(t) \cdot x_0$, vale que $y'(t) = F'(t) \cdot x_0 = A(t)F(t) \cdot x_0 = A(t)y(t)$, e $y(t_0) = \text{id} \cdot x_0 = x_0$. Assim, por unicidade, devemos ter $x(t, x_0) = F(t) \cdot x_0$ (mais geralmente, vale que $x(t, v) = F(t) \cdot v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$, pelo mesmo argumento). Aplicando a estimativa de $x(t, y)$, vemos que

$$|F(t) \cdot y| \leq e^{M|t-t_0|}|y| \implies \|F(t)\| \leq e^{M|t-t_0|}.$$

Provemos agora que $F(t)$ é invertível. Defina $\phi_i(t) = F(t) \cdot e_i$, para $1 \leq i \leq n$ e $|t - t_0| \leq a$. Afir-
mamos que o conjunto de funções $\{\phi_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ é linearmente independente. De fato, suponha
que não. Então, haveriam números reais α_i , $1 \leq i \leq n$ não todos nulos tais que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \equiv 0$ em
 $|t - t_0| \leq a$. Ora, mas avaliando esta soma em $t = t_0$, seguiria que $\sum \alpha_i e_i = 0$, o que é um absurdo.
Observe agora que para todo $|t - t_0| \leq a$, o conjunto $\{\phi_i(t); 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. De
fato, se não fosse o caso, existiriam escalares α_i não todos nulos tais que $\sum \alpha_i \phi_i(t) = 0$. Assim,
a função $x(s) = \sum \alpha_i \phi_i(s)$ é solução da equação $x' = Ax$ com condição inicial $x(t) = 0$. Mas a
função nula também satisfaz isso, e por unicidade, segue-se que $x \equiv 0$, o que contradiz o fato das
funções ϕ_i serem linearmente independentes.

Portanto, $F(t)$ é uma matriz invertível para todo $|t - t_0| \leq a$. Defina agora a função
 $s \mapsto F(s, \omega)$ como a solução do problema

$$\begin{cases} F'(s) = A(s)F(s) \\ F(\omega) = \text{id} \end{cases}.$$

Uma verificação simples mostra que $F(s, \omega) = F(s)F^{-1}(\omega)$, e portanto, $F(s, \omega) = F(\omega, s)^{-1}$.
Daí, $F(t) = F(t_0, t)^{-1}$, e a mesma estimativa que provamos pra $F(t)$ vale pra $F^{-1}(t)$. Para a
fórmula de Liouville, observe que pela fórmula de Taylor,

$$F(t) = \text{id} + A(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|).$$

Calculamos o determinante (por exemplo, expandindo $\det(I + \varepsilon X)$ em potências de ε quando
 $\varepsilon \rightarrow 0$) e obtemos

$$\det F(t) = 1 + (t - t_0) \text{Tr} A(t_0) + o(|t - t_0|).$$

Derivando e calculando em $t = 0$, obtemos

$$\left. \frac{d \det F(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \text{Tr} A(t_0).$$

Pela propriedade de grupo que provamos, segue que $F(t+s)F(t)^{-1} = F(t+s, t)$, ou seja,

$$\frac{\det F(t+s)}{\det F(t)} = \det F(t+s, t).$$

Dado um $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ qualquer agora, derivamos a expressão acima (em s) e calculamos
em $s = 0$:

$$\frac{1}{\det F(t)} \frac{d \det F(t)}{dt} = \text{Tr} A(t).$$

Resolvendo esta EDO (i.e., integrando), obtemos o resultado. □

Se suposermos um pouco mais de regularidade em f , podemos provar um resultado mais
forte:

Teorema 2.1.10. Suponha que estamos nas mesmas condições do teorema 2.1.3, e que $\partial f / \partial x$ existe e é contínua em R . Então, a função $x(t, y)$ que obtemos no teorema 2.1.6 é de classe C^1 em $\text{dom} x$, e a matriz jacobiana $J(t, y) := \partial x(t, y) / \partial y$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{dJ(t, y)}{dt} = f'_x(t, x(t, y)) \cdot J(t, y) \\ J(t_0, y) = \text{id} \end{cases} . \quad (2.1.9)$$

Em particular,

$$\det J(t, y) = \exp \left(\int_{t_0}^t \text{Tr} f'_x(s, x(s, y)) ds \right). \quad (2.1.10)$$

Observação 2.1.11. Este é o teorema 1.2.5, página 4 de (HÖRMANDER, 1997). f'_x é a matriz jacobiana de f na variável x apenas. Este resultado relaciona uma equação geral não-linear com a sua *linearização* ao redor de uma solução.

Demonstração. Fixe um ponto z , e suponha que o par $(t, z) \in \text{dom} x$. Defina então

$$\psi(t) = x(t, y) - x(t, z), t \in I_z.$$

Em particular, $\psi(t_0) = y - z$. Então, pela fórmula de Taylor

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = f(t, x(t, y)) - f(t, x(t, z)) = f'_x(t, x(t, z)) \psi(t) + o(|x(t, y) - x(t, z)|)$$

quando $y \rightarrow z$. Pela estimativa (2.1.6) que já tínhamos provado, podemos escrever o termo $o(|x(t, y) - x(t, z)|)$ como $\rho_y(t)|y - z|$, com $\rho_y(t) = o(1)$ quando $y \rightarrow z$. Seja $F(t)$ a função matricial C^1 satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{dF(t)}{dt} = f'_x(t, x(t, z)) F(t) \\ F(t_0) = \text{id} \end{cases} .$$

Defina agora $\phi(t) = F^{-1}(t)\psi(t)$, ou $\psi(t) = F(t)\phi(t)$. Para F e F^{-1} , temos as estimativas do teorema 2.1.8. Calculamos agora

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = F(t) \frac{d\phi(t)}{dt} + \frac{dF(t)}{dt} \phi(t) \implies F(t) \frac{d\phi(t)}{dt} = \rho_y(t)|y - z|.$$

Assim,

$$\sup \left| \frac{d\phi(t)}{dt} \right| \leq C \rho_y(t) |y - z|.$$

Assim, pra $|y - z|$ pequeno o suficiente, $|\phi(t) - \phi(t_0)| \leq C\varepsilon |y - z|$. Assim,

$$|\psi(t) - F(t)(y - z)| = \left| F(t) \left(\phi(t) - \underbrace{(y - z)}_{\phi(t_0)} \right) \right| \leq C\varepsilon |y - z|.$$

Isto implica que $x(t, y)$ é diferenciável em y , e $\partial x(t, y) / \partial y = F(t)$, e o teorema está provado. $\square$

2.2 Campos de vetores e fluxos em variedades

Nestas notas, a não ser que explicitamente digamos o contrário, M será uma variedade¹ m -dimensional real de classe C^k , onde $k = \infty$ (suave) ou $k = \varpi$ (real-analítica), e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ denotará um campo de vetores *real* de classe C^r ($r \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty, \varpi\}$, $r \leq k$), ou seja, uma seção C^r do fibrado tangente $TM \rightarrow M$. Uma curva integral de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação

$$\alpha : I \rightarrow M,$$

de classe C^r , onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto contendo a origem, $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para $t \in I$. Chamamos $\alpha(I) \subset M$ de *órbita* ou *trajetória* de X . Dizemos ainda que um ponto $p \in M$ é *regular* para X se $X(p) \neq 0$.

Vejamos o significado de curvas integrais em coordenadas. Sejam $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva C^{r+1} . Se $x : U \subset M \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ é uma carta local em M que contém a imagem da curva, então podemos escrever

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)) \iff (dx)_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (dx)_{\alpha(t)}(X(\alpha(t))),$$

ou seja, α é curva integral de X se, e somente se, escrevendo $x \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$, e $\frac{\partial}{\partial x_i} : \tilde{U} \rightarrow T\mathbb{R}^m$, temos

$$(dx)_{\alpha(t)}(X(\alpha(t))) = \sum_{i=1}^m X_i(\alpha(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(\alpha(t))} = \sum_{i=1}^m \alpha_i'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(\alpha(t))},$$

ou seja, se e somente se o sistema de EDO's de primeira ordem

$$\alpha_i'(t) = X^i(\alpha_1(t), \dots, \alpha_m(t))$$

admitir solução. É consequência imediata do teorema 2.1.3 o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ um campo C^r na variedade M . Para cada ponto $p \in M$ existe $\varepsilon > 0$ e uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de classe C^{r+1} integral a X , com $\gamma(0) = p$.

Definição 2.2.2. Um **domínio de fluxo** na variedade M é um subconjunto aberto $D \subset \mathbb{R} \times M$ com a propriedade que para cada $p \in M$, o conjunto

$$I_p := \{t \in \mathbb{R}; (t, p) \in D\}$$

é um intervalo aberto contendo a origem. Um **fluxo** (ou **fluxo local**) em M é uma aplicação contínua $\phi : D \rightarrow M$, onde D é um domínio de fluxo, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada $p \in M$, $\phi(0, p) = p$.

¹ Variedades neste texto sempre serão conexas, Hausdorff e com base enumerável.

2. Para cada $p \in M$, $s \in I_p$ e $t \in I_{\phi(s,p)}$ tais que $s+t \in I_p$, vale

$$\phi(t, \phi(s, p)) = \phi(s+t, p).$$

Se ϕ é um fluxo na variedade M , definimos $\phi^t(p) = \phi_p(t) = \phi(t, p)$, sempre que $(t, p) \in D$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$M_t = \{p \in M; (t, p) \in D\}.$$

Note então que

$$p \in M_t \iff t \in I_p \iff (t, p) \in D.$$

Se a aplicação $\phi : D \rightarrow M$ for de classe C^r , então para cada $p \in M$, a aplicação

$$\phi_p : I_p \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

é de classe C^r , e definimos o **gerador infinitesimal** de ϕ como a aplicação

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM \\ p &\mapsto \left(p, \frac{d\phi_p}{dt}(0) \right). \end{aligned}$$

Proposição 2.2.3. Se $\phi : D \rightarrow M$ é um fluxo de classe C^r , então o gerador infinitesimal X de ϕ é um campo de vetores C^r . Ainda, cada curva ϕ_p é curva integral de X .

Observação 2.2.4. Esta é a proposição 9.11, página 212 de (LEE, 2003).

Demonstração. Para verificar que X é de classe C^r , basta verificarmos que para qualquer f de classe C^r definida num aberto $U \subset M$, a função Xf é de classe C^{r-1} em U . Dada uma função f desta forma e $p \in U$, temos

$$Xf(p) = X_p f = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(\phi_p(t)) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(0,p)} f(\phi(t, p)),$$

que é de classe C^{r-1} , pois $\phi(t, p)$ está definida (e é de classe C^r) para pontos numa vizinhança de $(0, p)$. Para provar a outra afirmação, fixe um ponto $p \in M$ e $t_0 \in I_p$. Queremos provar que

$$(\phi_p)'(t_0) = X(\phi(t_0, p)) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \phi_{\phi(t_0, p)}(t).$$

Como $t_0 \in I_p$ que é intervalo aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $t+t_0 \in I_p$ para $|t| < \varepsilon$. Assim, se $|t| < \varepsilon$, pela condição de grupo do fluxo,

$$\phi_{\phi(t_0, p)}(t) = \phi(t+t_0, p).$$

Assim,

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \phi_{\phi(t_0, p)}(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \phi(t+t_0, p) = (\phi_p)'(t_0),$$

pois $\phi(t+t_0, p) = \phi_p \circ T(t)$, onde $T(t) = t+t_0$. □

Apresentaremos agora um importante teorema sobre fluxos. Dizemos que uma curva integral é **maximal** se não pode ser estendida para nenhum intervalo aberto maior, e que um fluxo é **maximal** se não pode ser estendido para um domínio de fluxo maior.

Teorema 2.2.5 (Existência e unicidade do fluxo). Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de classe C^r em M . Então, existe um único fluxo de classe C^r maximal $\phi : D \rightarrow M$, cujo gerador infinitesimal é X . Este fluxo tem as seguintes propriedades:

- 1 Para cada $p \in M$, a curva $\phi_p : I_p \rightarrow M$ é a única curva integral maximal de X que vale p em zero.
- 2 Se $s \in I_p$, então $I_{\phi(s,p)} = \{t - s; t \in I_p\} = I_p - s$.
- 3 Para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto M_t é aberto em M e $\phi^t : M_t \rightarrow M_{-t}$ é difeomorfismo de classe C^r , cuja inversa é ϕ^{-t} .

Observação 2.2.6. Este é o teorema 9.12, página 212 de (LEE, 2003).

Demonstração. Observe que, do teorema 1.1, para cada $p \in M$ existe uma curva integral $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de X com $\gamma(0) = p$. Fazemos a seguinte afirmação: se duas curvas $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow M$ são integrais a X e tais que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ para algum $t_0 \in I$, então $\gamma_1 = \gamma_2$. De fato, defina o conjunto

$$A = \{t \in I; \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}.$$

Observe que A é fechado pois as aplicações são contínuas. Ainda, A é aberto pela unicidade do teorema das EDO's. Como A não é vazio por hipótese, segue que $A = I$.

Para cada $p \in M$, defina I_p como a reunião de todos os intervalos abertos $J \subset \mathbb{R}$ contendo 0 nos quais alguma curva integral de X (que manda zero em p) está definida. Defina

$$\phi_p : I_p \rightarrow M$$

por $\phi_p(t) = \gamma(t)$, onde $\gamma : J \rightarrow M$ é alguma curva integral de X que satisfaz $\gamma(0) = p$ e $t \in J$. Note que esta aplicação está bem definida pelo comentário anterior. Por definição, ϕ_p não pode ser estendida a nenhum intervalo maior, e portanto, é a curva integral maximal de X satisfazendo $\phi_p(0) = p$. Defina

$$D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M; t \in I_p\}$$

e $\phi : D \rightarrow M$ por $\phi(t, p) = \phi_p(t)$. A propriedade 1 é imediatamente satisfeita. Verifiquemos as condições de grupo. A primeira é imediata pela definição de ϕ_p . Para a segunda, fixe $p \in M$ e $s \in I_p$. Observe que a curva $\gamma : I_p - s \rightarrow M$, definida por $\gamma(t) = \phi_p(t + s)$, é integral a X (apenas trasladamos o parâmetro) e satisfaz $\gamma(0) = \phi_p(s)$. Pela unicidade do teorema das EDO's, γ coincide com $\phi_{\phi_p(s)}$ em seus domínios comuns. Isto significa que se $t \in I_{\phi_p(s)}$ for tal que $t + s \in I_p$, então $t \in (I_p - s) \cap I_{\phi_p(s)}$, e portanto,

$$\gamma(t) = \phi_p(t + s) = \phi_{\phi_p(s)}(t),$$

que é a segunda lei de grupo. Ainda, pela maximalidade de $I_{\phi_p(s)}$, temos $I_p - s \subset I_{\phi_p(s)}$. Como $0 \in I_p$, $-s \in I_{\phi_p(s)}$ e pela segunda lei de grupo, $\phi_{\phi_p(s)}(-s) = p$. Assim, definido a curva $\rho : I_{\phi_p(s)} + s \rightarrow M$ por $\rho(t) = \phi_{\phi_p(s)}(t - s)$, vemos que ρ é integral a X e satisfaz $\rho(0) = p$, e pela maximalidade de I_p , obtemos $I_{\phi_p(s)} + s \subset I_p$, o que implica que $I_{\phi_p(s)} - s \subset I_p$. Isto prova o item 2.

Vamos provar agora que $D \subset \mathbb{R} \times M$ é aberto e aplicação $\phi : D \rightarrow M$ é de classe C^r . Defina $W \subset D$ como o conjunto dos pontos $(t, p) \in D$ tais que ϕ está definida e é C^r numa vizinhança $J \times U \subset D$ de (t, p) , onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto que contém a origem (e o ponto t), e $U \subset M$ é aberto ao redor de p . É claro então que W é aberto e ϕ é de classe C^r quando restrita a W . Provemos que $D = W$. Suponha que exista um ponto $(\tau, p_0) \in D \setminus W$. Suponha que $\tau > 0$ (o argumento com $\tau < 0$ é idêntico).

Defina $t_0 = \sup\{t \in \mathbb{R}; (t, p_0) \in W\}$. Note que ϕ está definida e é de classe C^r numa vizinhança produto de $(0, p_0)$ pelo teorema das EDO's, e portanto $t_0 > 0$. Como $t_0 \leq \tau$ e I_{p_0} é um intervalo aberto contendo 0 e τ , $t_0 \in I_{p_0}$. Seja $q_0 = \phi_{p_0}(t_0)$. Pelo teorema das EDO's, existe $\varepsilon > 0$ e vizinhança U_0 de q_0 tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \subset W$.

Escolha $t_1 < t_0$ tal que $t_1 + \varepsilon > t_0$, $\phi_{p_0}(t_1) \in U_0$ e $(t_1, p_0) \in W$ (a existência é clara). Existe vizinhança produto $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$ pois W é aberto. Pela definição de W , ϕ é definido e C^{r+1} em $[0, t_1 + \delta) \times U_1$, em particular. Como $\phi(t_1, p_0) \in U_0$, podemos escolher U_1 de modo a $\phi(\{t_1\} \times U_1) \subset U_0$. Defina $\tilde{\phi} : [0, t_1 + \varepsilon) \times U_1 \rightarrow M$ da seguinte forma: se $0 \leq t < t_1$, $\tilde{\phi}(t, p) = \phi(t, p)$. Se $t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon$, coloque $\tilde{\phi}(t, p) = \phi(t - t_1, p) \circ \phi_{t_1}(p)$. Segue que $\tilde{\phi}$ é extensão de classe C^r de ϕ para uma vizinhança de (t_0, p_0) , absurdo. Logo, $W = D$. Sabendo que D é aberto e que a aplicação ϕ é C^{r+1} , o item 3 é óbvio. $\square$

Teorema 2.2.7. Seja X um campo de classe C^r em M . Dado um ponto $p \in M$, escreva $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$, e suponha que $\omega_+(p) < \infty$ (respectivamente, $\omega_-(p) > -\infty$). Então, $\phi_p(t)$ tende a infinito em M quando $t \rightarrow \omega_+(p)$ (respectivamente, $t \rightarrow \omega_-(p)$), no seguinte sentido: dado qualquer compacto $K \subset M$, existe um $\varepsilon = \varepsilon(K)$ tal que se $t \in [\omega_+(p) - \varepsilon, \omega_+(p))$ (respectivamente, $t \in (\omega_-(p), \omega_-(p) + \varepsilon]$), então $\phi_p(t) \notin K$.

Observação 2.2.8. Este é o teorema 1.2, página 3 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Suponha que o resultado é falso, ou seja, que existe um compacto $K \subset M$ e uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em I_p com $t_n \rightarrow \omega_+(p) < \infty$ e tal que $\phi_p(t_n) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subsequência, podemos supor que $\phi_p(t_n) \rightarrow x_0 \in K$ quando $n \rightarrow \infty$. Denote por $\phi : D \rightarrow M$ o fluxo de X . Note que o ponto $(0, x_0)$ pertence a D , e como D é aberto, vale que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B_{x_0} \subset D$, onde B_{x_0} é uma vizinhança aberta de x_0 . Existe n grande tal que $\phi_{t_n}(p) \in B_{x_0}$, e portanto, para qualquer $0 < s < \varepsilon$, $(s, \phi_p(t_n)) \in D$, o que implica que $s \in I_{\phi_p(t_n)} = I_p - t_n$, ou seja, $t_n + s \in I_p$, e para n grande, isto implicaria que existe $\delta > \omega_+(p)$ que está em I_p , o que é uma contradição. O resultado para $\omega_-(p)$ é análogo. $\square$

A contrapositiva deste resultado diz o seguinte: se a órbita $\phi_p(t)$ fica presa em um compacto $K \subset M$ para todo $t \in I_p$, então $\omega_+(p) = \infty$ e $\omega_-(p) = -\infty$.

Seja $\phi_x(t)$ uma curva integral de X . Dizemos que ϕ_x é *periódica* se existe um número real $c > 0$ tal que $\phi_x(t + c) = \phi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.9. Seja $\phi_x(t)$ uma curva integral maximal de X . Se $\phi_x(t_1) = \phi_x(t_2)$ com $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in I_x$, então $I_x = \mathbb{R}$ e $\phi_x(t + c) = \phi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $c = t_1 - t_2$, ou seja, ϕ_x é periódica.

Observação 2.2.10. Esta é a proposição 1.3, página 4 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Seja $q = \phi_x(t_1) = \phi_x(t_2)$. Suponha, sem perda de generalidade, que $t_2 > t_1$. Então, se $\phi_q : I_q \rightarrow M$ é a curva integral maximal de X com $\phi_q(0) = q$, segue pelo item (2) do teorema 2.2.5 que

$$I_q = I_{\phi(t_1, x)} = I_x - t_1 = I_{\phi(t_2, x)} = I_x - t_2.$$

Assim, $t_2 - t_1 \in I_x$, e portanto, $N(t_2 - t_1) \in I_x$ para todo $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, o que implica que $[0, \infty) \subset I_x$. Analogamente, $t_1 - t_2 < 0$ pertence a I_x , donde concluímos que $I_x = \mathbb{R}$. Daí segue que $I_q = I_x$, e portanto, $\phi_q(t) = \phi_x(t + t_1) = \phi_x(t + t_2)$, e portanto, dado $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_x(t + c) = \phi_x((t - t_1) + t_2) = \phi_x((t - t_1) + t_1) = \phi_x(t),$$

como queríamos. □

2.3 Retrato de fase de um campo de vetores

Como vimos na seção anterior, a órbita γ_p de um campo X é a imagem da curva integral maximal $\phi_p : I_p \rightarrow M$, com a orientação induzida de I_p (se $X(q) \neq 0$ para $q \in \gamma_p$). Note que, se $q \in \gamma_p$, então $\gamma_q = \gamma_p$, pois $\phi_p(s) = \phi_q(s - t)$ para todo $s \in I_p$ e algum $t \in I_p$ (este t é tal que $I_p - t = I_q$), i.e., as imagens são iguais. Daí, concluímos que duas órbitas de X são iguais ou disjuntas.

Teorema 2.3.1. Seja ϕ_p uma curva integral maximal do campo X de classe C^r . Então, uma (e apenas uma) das alternativas seguintes é válida:

1. ϕ_p é uma bijeção sobre sua imagem.
2. $I_p = \mathbb{R}$ e ϕ_p é a curva constante, e $\gamma_p = \{p\}$.
3. $I_p = \mathbb{R}$ e ϕ_p é uma função periódica de período mínimo τ . Isto significa que existe um número real $\tau > 0$ tal que $\phi_p(t + \tau) = \phi_p(t)$ para todo $t \in I_p$ e que, se $|t - s| < \tau$, então $\phi_p(t) \neq \phi_p(s)$.

Observação 2.3.2. Este é o teorema 1.4, página 4 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Suponha que a alternativa 1 não seja válida, ou seja, que existam $t_1 \neq t_2$ tais que $\phi_x(t_1) = \phi_x(t_2)$. Pelo teorema 2.2.9, temos que $I_p = \mathbb{R}$ e $\phi_p(t+c) = \phi_p(t)$, onde $c = t_2 - t_1$ (podemos supor $c > 0$ sem perda de generalidade). Defina o conjunto

$$C = \{c \in \mathbb{R}; \phi_x(t+c) = \phi_x(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmção. C é um subgrupo fechado de $(\mathbb{R}, +)$.

Prova da afirmação: É claro que $0 \in C$. Se $c, c' \in C$, então dado $t \in \mathbb{R}$, $\phi_x(t + (c + c')) = \phi_x((t + c) + c') = \phi_x(t + c) = \phi_x(t)$. Ainda, se $c \in C$, $\phi_x(t + c) = \phi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e fazendo $t = s - c$, segue que $-c \in C$. Para provar que C é fechado, seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em C que converge para $c \in \mathbb{R}$. Então, dado $t \in \mathbb{R}$, como ϕ_x é contínua em particular,

$$\phi_x(t + c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_x(t + c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_x(t) = \phi_x(t),$$

o que mostra que $t \in C$. Isto prova a afirmação. $\square$

Afirmção. Seja $G \neq \{0\}$ um subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Então, ou G é denso em $\mathbb{R}$, ou G é da forma $\tau\mathbb{Z}$ para algum $\tau > 0$.

Demonstração. Defina $\tau = \inf\{g \in G; g > 0\}$. Se $\tau > 0$, então observe que $\tau \in G$. De fato, se não fosse o caso, haveria $g_1 \in G$ tal que $\tau < g_1 < 2\tau$ e $g_2 \in G$ tal que $\tau < g_2 < g_1$. Assim, $0 < g_1 - g_2 < \tau$ e $g_1 - g_2 \in G$, absurdo. Agora que sabemos que $\tau \in G$, seja $x \in G$, e suponha $x > 0$. Tomando $k = \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}; n\tau \leq x\}$, vale que $x = k\tau$ (do contrário, teríamos $k\tau < x < (k+1)\tau$, o que implicaria $0 < \underbrace{x - k\tau}_{\in G} < \tau$, absurdo). No caso $x < 0$, basta repetir o argumento acima com $y = -x$. Segue que, neste caso, $G = \tau\mathbb{Z}$. Suponha agora que $\tau = 0$. Então, dado $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, escolha $g \in G$ com $0 < g < \varepsilon$. Então, $g\mathbb{Z} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$, de onde segue que $G \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$, e G é denso em $\mathbb{R}$. $\square$

Usando estas afirmações, concluímos que, ou $C = \mathbb{R}$, ou $C = \tau\mathbb{Z}$ para algum $\tau > 0$ (observe que subgrupos desta forma são sempre fechados). Se $C = \mathbb{R}$, então ϕ_x é constante. Se $C \neq \mathbb{R}$, então $C = \tau\mathbb{Z}$ e ϕ_x é periódica com período τ . $\square$

Corolário 2.3.3. Seja ϕ_p uma curva integral maximal do campo X , de classe C^r . Então, a órbita $\gamma_p = \{\phi(t, p); t \in I_p\}$ é uma subvariedade imersa de M , difeomorfa a uma (e apenas uma) das variedades a seguir:

1. um ponto.
2. ao círculo S^1 .
3. a $\mathbb{R}$.

Observação 2.3.4. Este é o corolário 1.14, página 10 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Do teorema 2.3.1, suponha que ϕ_p seja uma bijeção sobre sua imagem. Então, $\phi_p : (\omega_-(p), \omega_+(p)) \rightarrow M$ é uma imersão de classe C^{r+1} (o campo não pode se anular na imagem da curva). Daí, a imagem é uma subvariedade imersa de M , e ϕ_p , restrito a imagem, é um difeomorfismo de classe C^{r+1} . Em particular, $\gamma_p \simeq (\omega_-(p), \omega_+(p)) \simeq \mathbb{R}$.

Se ϕ_p for constante, é claro que sua imagem é difeomorfa a um ponto. No caso em que ϕ_p é periódica, temos que ϕ_p induz uma imersão injetiva

$$\phi_p : \frac{\mathbb{R}}{\tau\mathbb{Z}} \rightarrow M,$$

onde $\tau > 0$ é seu período mínimo. Daí, como $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \simeq S^1$, segue que $\gamma_p \simeq S^1$. □

Observação 2.3.5. Nos casos em que $\gamma_p \simeq \{p\}$ ou S^1 , γ_p será mergulhada (pois é compacta). No caso em que $\gamma_p \simeq \mathbb{R}$, pode ocorrer de γ_p não ser uma subvariedade mergulhada. De fato, seja $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ o toro de dimensão 2, e considere o campo

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_2}$$

em $\mathbb{T}^2$, onde (θ_1, θ_2) são as coordenadas usuais do toro, e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Note que $\gamma(t) = (e^{2\pi i t}, \alpha e^{2\pi i t})$ é curva integral a X , e a órbita $\gamma_{(1,1)}$ é um subconjunto denso em $\mathbb{T}^2$, ou seja, não é uma subvariedade mergulhada.

Definição 2.3.6. Dado um campo X de classe C^r em M , definimos seu *retrato de fase* como o conjunto das órbitas orientadas de X . Este consiste de singularidades e órbitas regulares, orientadas no sentido das soluções maximais que as descrevem (ou seja, para t crescente em $\mathbb{R}$).

2.4 Equivalência topológica e conjugação

Introduzimos agora a noção de equivalência topológica entre dois campos X_1 e X_2 que nos permitirá comparar seus retratos de fase.

Definição 2.4.1 (Equivalência). Sejam X_1 e X_2 campos de classe C^r definidos nas variedades C^k M_1 e M_2 , respectivamente (onde $k \in \{\infty, \omega\}$ e $r \leq k$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty, \omega\}$). Dizemos que X_1 e X_2 são *topologicamente equivalentes* (respectivamente, *C^r -equivalentes*) se existir um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo C^r) $h : M_1 \rightarrow M_2$ que leva órbitas de X_1 em órbitas de X_2 . Mais precisamente, dado um ponto $p \in M_1$ e denotando por γ_p^1 a órbita (orientada) de X_1 passando por p , então $h(\gamma_p^1)$ é a órbita orientada de X_2 passando por $h(p)$ em M_2 .

Neste caso, chamamos h de *equivalência topológica* (respectivamente, *equivalência C^r*) entre X_1 e X_2 .

Definição 2.4.2 (Conjugação). Sejam X_1 e X_2 campos de classe C^r definidos nas variedades C^k M_1 e M_2 , respectivamente (onde $k \in \{\infty, \omega\}$ e $r \leq k$, $r \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty, \omega\}$). Denote por $\phi_1 : D_1 \rightarrow M_1$ e $\phi_2 : D_2 \rightarrow M_2$ os fluxos de X_1 e X_2 , respectivamente. Dizemos que X_1 é *topologicamente conjugado* (respectivamente, *C^r -conjugado*) a X_2 se existe um homeomorfismo $h : M_1 \rightarrow M_2$ (respectivamente, um difeomorfismo C^r) tal que $I_p = I_{h(p)}$ para todo $p \in M_1$ e

$$h(\phi_1(t, p)) = \phi_2(t, h(p)), \quad (t, p) \in D_1,$$

ou, visualmente, se h comuta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{\phi_1} & M_1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ D_2 & \xrightarrow{\phi_2} & M_2 \end{array},$$

onde $D_1 \xrightarrow{h} D_2$ é definida por $h(t, p) = (t, h(p))$ (ou seja, h preserva o parâmetro t).

Neste caso, chamamos h de *conjugação topológica* (respectivamente, *conjugação C^r*) entre X_1 e X_2 . É claro, por esta definição, que toda conjugação é uma equivalência. Uma equivalência entre os campos X_1 e X_2 leva pontos singulares em pontos singulares e órbitas periódicas em órbitas periódicas. Uma conjugação, além disso, preserva os períodos das órbitas periódicas. Provamos agora uma caracterização para conjugações C^r (estamos assumindo que $r \geq 1$).

Proposição 2.4.3. Sejam X_1 e X_2 campos de classe C^r definidos em M_1 e M_2 , respectivamente, e seja $h : M_1 \rightarrow M_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então, h é uma conjugação C^r entre X_1 e X_2 se, e somente se,

$$(Dh)_p X_1(p) = X_2(h(p)), \quad p \in M_1. \quad (2.4.1)$$

Observação 2.4.4. Este é o lema 1.11, página 8 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Sejam $\phi_1 : D_1 \rightarrow M_1$ e $\phi_2 : D_2 \rightarrow M_2$ os fluxos de X_1 e X_2 , respectivamente. Suponha que h satisfaça (2.4.1). Dado $p \in M_1$, defina a aplicação $\psi : I_p \rightarrow M_2$ dada por $\psi(t) = h(\phi_1(t, p))$. Então, $\psi(0) = h(p)$ e

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} (h \circ \phi_1(t, p)) = (Dh)_{\phi_1(t, p)} \cdot \frac{d\phi_1(t, p)}{dt} = (Dh)_{\phi_1(t, p)} X_1(\phi_1(t, p)) = X_2(\psi(t)),$$

para cada $t \in I_p$. Então, segue que $I_p \subset I_{h(p)}$ e $(\phi_2)_{h(p)}|_{I_p} = \psi$. Note que, considerando $h^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$, segue (da equação (2.4.1)) que

$$(Dh^{-1})_q X_2(q) = X_1(h^{-1}(q)), \quad q \in M_2.$$

Assim, definindo $\tilde{\psi} : I_{h(p)} \rightarrow M_1$ por $\tilde{\psi}(t) = h^{-1}(\phi_2(t, h(p)))$, obtemos $\tilde{\psi}(0) = p$ e, por um cálculo análogo ao que fizemos, $\tilde{\psi}'(t) = X_1(\tilde{\psi}(t))$. Assim, concluímos que $I_{h(p)} \subset I_p$ e $(\phi_1)_p|_{I_{h(p)}} = \tilde{\psi}$. Assim, $I_{h(p)} = I_p$, e

$$h(\phi_1(t, p)) = \phi_2(t, h(p)), \quad (t, p) \in D_1,$$

e h é uma conjugação C^r . Reciprocamente, se h é uma conjugação C^r , então vale que $I_p = I_{h(p)}$ para todo $p \in M_1$ e

$$h(\phi_1(t, p)) = \phi_2(t, h(p)), \quad (t, p) \in D_1.$$

Derivando em t e calculando em $t = 0$, obtemos

$$(Dh)_{\phi_1(0, p)} \cdot \frac{d\phi_1(t, p)}{dt} \Big|_{t=0} = X_2(\phi_2(0, h(p))) \implies (Dh)_p X_1(p) = X_2(h(p)),$$

o que prova a equação (2.4.1). $\square$

Uma ferramenta técnica muito útil que usaremos é o teorema do flowout para subvariedades de M .

Definição 2.4.5. Seja $F : M \rightarrow N$ de classe C^r , e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $Y \in \mathfrak{X}^r(N)$. Dizemos que X e Y são F -relacionados se $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ para cada $p \in M$.

Teorema 2.4.6 (Flowout). Seja M uma variedade (suave ou real analítica, de dimensão m), $S \subset M$ uma subvariedade mergulhada de dimensão k e $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ um campo de vetores real que nunca é tangente a S , ou seja, tal que $X_p \notin T_p S$ para todo $p \in S$. Seja $\phi : D \rightarrow M$ o fluxo de X , onde D é o domínio de fluxo de X . Defina $\mathcal{O} = (\mathbb{R} \times S) \cap D$ e seja $\Phi = \phi|_{\mathcal{O}}$. Então,

1. $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow M$ é uma imersão.
2. $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$ é Φ -relacionado a X .
3. Existe uma função suave positiva $\delta : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a restrição de Φ a $\mathcal{O}_\delta$ é injetiva, onde $\mathcal{O}_\delta \subset \mathcal{O}$ é o domínio de fluxo

$$\mathcal{O}_\delta = \{(t, p) \in \mathcal{O}; |t| < \delta(p)\}.$$

Portanto, $\Phi(\mathcal{O}_\delta)$ é subvariedade imersa de M contendo S , e X é tangente a esta subvariedade.

4. Se S tem codimensão 1, $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ é difeomorfismo C^r sobre uma subvariedade aberta de M . Em particular, $\Phi|_{\mathcal{O}_\delta}$ é uma conjugação C^r entre $X|_{\Phi(\mathcal{O}_\delta)}$ e $\partial/\partial t$ em $\mathcal{O}_\delta$.

Observação 2.4.7. Este é o teorema 9.20, página 217 de (LEE, 2003). Chamamos a subvariedade $\Phi(\mathcal{O}_\delta)$ de **flowout** de S ao longo de X .

Demonstração. Note que $\mathbb{R} \times S$ é subvariedade mergulhada de $\mathbb{R} \times M$, e portanto, $\mathcal{O}$ é subvariedade mergulhada de D , e a função Φ é uma aplicação suave definida em $\mathcal{O}$. Por $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathcal{O})$, queremos dizer a seguinte derivação: se $f \in C^\infty(\mathcal{O})$, então $f = f(t, p)$, e então se $(t, p) \in \mathcal{O}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t, p)} f := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, p) - f(t, p)}{h}.$$

Começemos provando o item 2. Queremos provar que para todo $(t_0, p_0) \in \mathcal{O}$,

$$d\Phi_{(t_0, p_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t_0, p_0)} = X_{\Phi(t_0, p_0)}.$$

Note que se $(t_0, p_0) \in \mathcal{O}$, então $p_0 \in S$ e $t_0 \in I_{p_0}$. Vamos escolher uma curva em $\mathcal{O}$ que tenha o vetor $(\partial/\partial t)_{(t_0, p_0)}$ como tangente em (t_0, p_0) . Defina $\sigma : I_{p_0} \rightarrow \mathcal{O}$ por $\sigma(t) = (t, p_0)$. É claro que $\sigma'(t_0) = \frac{\partial}{\partial t}_{(t_0, p_0)}$. Assim, obtemos

$$d\Phi_{(t_0, p_0)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t_0, p_0)} = (\Phi \circ \sigma)'(t_0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_0, p_0) = X_{\phi(t_0, p_0)},$$

pela definição de fluxo. Provemos agora o item 1. Suponha inicialmente que o ponto seja da forma $(0, p) \in \mathcal{O}$. Note que

$$\begin{aligned} \Phi|_{\{0\} \times S} : \{0\} \times S \subset \mathcal{O} &\rightarrow M \\ (0, q) &\mapsto q, \end{aligned}$$

ou seja, $\Phi|_{\{0\} \times S}$ é um mergulho. Como $T\mathcal{O} = T_0\mathbb{R} \oplus T_pS$, tomando $\{\frac{\partial}{\partial t}_{(0, p)}, e_1, \dots, e_k\}$ uma base de $T_{(0, p)}\mathcal{O}$ (com $\{e_1, \dots, e_k\}$ sendo base de T_pS), obtemos

$$d\Phi_{(0, p)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}_{(0, p)}, e_1, \dots, e_k \right\} = \{X_p, e_1, \dots, e_k\},$$

que é linearmente independente em T_pM pois $X_p \notin T_pS$. Assim, $d\Phi_{(0, p)}$ é injetiva. Dado agora um ponto arbitrário $(t_0, p_0) \in \mathcal{O}$, defina a aplicação $\tau_{t_0} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \times S$ por $\tau_{t_0}(t, p) = (t + t_0, p)$. Seja $U_{p_0} \subset \mathcal{O}$ um aberto ao redor $(0, p_0)$ pequeno o suficiente para que duas coisas aconteçam:

1. $\tau_{t_0}(U_{p_0}) \subset \mathcal{O}$.
2. $\Phi(U_{p_0}) \subset \{q \in M; t_0 \in I_q\} = M_{t_0}$.

O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_{p_0} & \xrightarrow{\tau_{t_0}} & \tau_{t_0}(U_{p_0}) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ \Phi(U_{p_0}) & \xrightarrow{\phi(t_0, \cdot)} & \phi(t_0, M_{t_0}) \end{array}.$$

As aplicações horizontais são difeomorfismos locais de classe C^r e, tomando diferenciais, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_{(0, p_0)}\mathcal{O} & \xrightarrow{d((\tau_{t_0}))_{(0, p_0)}} & T_{(t_0, p_0)}\mathcal{O} \\ \downarrow d\Phi_{(0, t_0)} & & \downarrow d(\Phi)_{(t_0, p_0)} \\ T_{p_0}M & \xrightarrow{d(\phi(t_0, \cdot))_{p_0}} & T_{\Phi(t_0, p_0)}M \end{array}.$$

Como as setas horizontais são isomorfismos, as setas verticais devem ter o mesmo posto, donde segue que Φ é uma imersão. Façamos o item 3. Dado $p_0 \in S$, escolha uma carta de subvariedade $(U, (x_i)_{i=1}^m)$ tal que $S \cap U$ seja dado por $x_{k+1} = \dots = x_m = 0$. Como X_{p_0} não é tangente a S em p_0 , existe algum $j \in \{k+1, \dots, m\}$ em que $X_{p_0}^j \neq 0$, onde $(X_{p_0}^j)$ são as coordenadas do vetor X_{p_0} . Suponha, sem perda de generalidade, que $X_{p_0}^j > 0$. Reduzindo U se necessário, existe uma constante $c > 0$ tal que $X^j(p) \geq c$ para todo $p \in U$. Escolha agora um número $\varepsilon_{p_0} > 0$ e uma vizinhança aberta $W_{p_0} \subset S$ de p_0 de modo que $(-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0} \subset \mathcal{O}$ e

$$\Phi((-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0}) \subset U.$$

Escrevendo $\Phi(t, p) = (\Phi^1(t, p), \dots, \Phi^m(t, p))$ em coordenadas, o item 2 deste teorema implica que

$$\frac{\partial \Phi^j}{\partial t}(t, p) = X^j(\Phi(t, p)).$$

Integrando, observando que a carta é centrada em p e que $\Phi(0, p) = p$, temos

$$|\Phi^j(t, p)| = \left| \int_0^t X^j(\Phi(s, p)) ds \right| \geq c|t|,$$

donde concluímos que se $(t, p) \in (-\varepsilon_{p_0}, \varepsilon_{p_0}) \times W_{p_0}$, $\Phi(t, p) \in S$ se, e somente se, $t = 0$. Escolha agora uma partição da unidade $\{\psi_p; p \in S\}$ subordinada à cobertura $\{W_p; p \in S\}$ de S e defina $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(q) = \sum_{p \in S} \varepsilon_p \psi_p(q).$$

f é suave, positiva, e se $q \in S$, existe apenas uma quantidade finita de pontos p de S em que $\psi_p(q) > 0$. Suponha que p_0 é um ponto em que $\psi_{p_0}(q) > 0$ e ε_{p_0} é o maior dos números entre os ε_p tais que $\psi_p(q) > 0$. Então,

$$f(q) \leq \varepsilon_{p_0}.$$

Assim, se $(t, p) \in \mathcal{O}$ for tal que $|t| < f(p)$, $\Phi(t, p) \in S$ se, e somente se, $t = 0$. Definimos agora $\delta = \frac{1}{2}f$. As afirmações restantes do teorema podem ser agora facilmente verificadas. $\square$

Definição 2.4.8. Seja X um campo de classe C^r em M . Seja $\Sigma \subset M$ uma subvariedade mergulhada, de dimensão $m - 1$, onde $m = \dim M$. Dizemos que Σ é uma *seção transversal* para X se, para todo $p \in \Sigma$, $X(p) \neq T_p \Sigma$.

Observação 2.4.9. Seja p um ponto regular para X . É simples construir uma seção transversal para X numa vizinhança de p . Se $x : U \subset M \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ é uma carta local de M ao redor de p (com $x(p) = 0$), podemos escrever para todo $q \in U$,

$$X(q) = (dx^{-1})_{x(q)} \cdot \sum_{i=1}^m X_i(x(q)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{x(q)},$$

onde $X_i : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ são aplicações de classe C^r . Considere o campo C^r definido em $\tilde{U}$ $\tilde{X}(y) = (X_1(y), \dots, X_m(y)) \in \mathbb{R}^m$. Como $\tilde{X}(0) \neq 0$, podemos o completar a uma base de $\mathbb{R}^m$, ou seja,

escolher vetores $\{v_2, v_3, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^m$ tais que $\{\tilde{X}(0), v_2, \dots, v_m\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente em $\mathbb{R}^m$. Isto implica, em particular, que

$$M(y) = \begin{pmatrix} X_1(y) & (v_2)_1 & \dots & (v_m)_1 \\ X_2(y) & (v_2)_2 & \dots & (v_m)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_m(y) & (v_2)_m & \dots & (v_m)_m \end{pmatrix}$$

satisfaz $\det M(0) \neq 0$. Como a função $\det M(y)$ é C^r e não-nula em 0, podemos supor que é não-nula em $\tilde{U}$ (o reduzindo se necessário). Defina então $\tilde{\Sigma} = \text{span}_{\mathbb{R}} \{v_2, \dots, v_m\} \cap \tilde{U}$. Colocando $\Sigma = x^{-1}\tilde{\Sigma}$, obtemos uma seção transversal para X contida em U .

Teorema 2.4.10 (Fluxo tubular). Seja $p \in M$ um ponto regular para o campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, e seja Σ uma seção transversal de X com $p \in \Sigma$. Então, existe uma vizinhança aberta $V \subset M$ de p e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^r , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta centrada na origem em $\mathbb{R}^{m-1}$ com as seguintes propriedades:

1. $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$.
2. h é uma conjugação de classe C^r entre o campo $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^m$ dado por $Y(s, y) = (1, 0, \dots, 0)$.

Observação 2.4.11. Este é o teorema 1.12, página 9 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003).

Demonstração. Seja $\phi : D \rightarrow M$ o fluxo de X . Seja $x : U \subset M \rightarrow \tilde{B} \subset \mathbb{R}^m$ (onde $\tilde{B}$ é a bola aberta de centro 0 e raio 1, e U é relativamente compacto em M) uma carta ao redor de p de tipo “slice” para Σ , ou seja, tal que $x(U \cap \Sigma) = B = \{y \in \tilde{B}; y_m = 0\}$ (note que isto é apenas a bola aberta unitária centrada na origem em $\mathbb{R}^{m-1}$). Pelo teorema 2.4.6, o fluxo ϕ induz um difeomorfismo C^r $\phi|_{\mathcal{O}_\delta} : \mathcal{O}_\delta \rightarrow \tilde{\Sigma}$ sobre uma subvariedade aberta $\tilde{\Sigma}$ de M contendo Σ . Defina $\mathcal{O}_U = \left(\phi|_{\mathcal{O}_\delta}\right)^{-1}(\tilde{\Sigma} \cap U)$, e chamamos de $\Phi : \mathcal{O}_U \rightarrow U \cap \tilde{\Sigma}$ a restrição de ϕ a este conjunto (que também é um difeomorfismo de classe C^r). Observe que

$$\mathcal{O}_U = \{(t, q) \in \mathbb{R} \times (\Sigma \cap U); |t| < \delta(q)\}.$$

Como $U \cap \Sigma$ é relativamente compacto em Σ (lembre que Σ é mergulhada), então existe $0 < \varepsilon < \delta(q)$ para todo $q \in \Sigma \cap U$. Restringindo $\mathcal{O}_U$, podemos supor que $\mathcal{O}_U = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (\Sigma \cap U)$. Escrevemos $V = U \cap \tilde{\Sigma}$ e definimos a aplicação $\tilde{x} : \mathcal{O}_U \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ dada por $\tilde{x}(t, q) = (t, x(q))$. Basta definir agora

$$h : V \mapsto (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$$

por $h = \tilde{x} \circ \Phi^{-1}$. É claro que h é um difeomorfismo de classe C^r . Ainda, $h(\Sigma \cap V) = \tilde{x}(\{0\} \times (\Sigma \cap U)) = \{0\} \times B$. Para verificar que h é conjugação C^r entre $X|_V$ e o campo constante, usamos a proposição 2.4.3. Dado $q \in V$, lembre que Φ é conjugação C^r entre $\partial/\partial t$ em $\mathcal{O}_U$ e $X(\Phi(\cdot))$:

$$(Dh)_q X(q) = (d\tilde{x})_{\Phi^{-1}(q)} \cdot (d\Phi^{-1})_q X(q) = (d\tilde{x})_{\Phi^{-1}(q)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\Phi^{-1}(q)} = (1, 0, \dots, 0),$$

que denota o campo constante em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ dado por $(1, 0, \dots, 0)$. Isto termina a demonstração. $\square$

Podemos estender este resultado e normalizar o campo em uma vizinhança compacta de uma curva integral, desde que esta seja regular e não-fechada.

Teorema 2.4.12 (Fluxo tubular longo). Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ uma curva integral do campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Suponha que $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, T]$, e que γ seja injetiva. Então, denotando por $B \subset \mathbb{R}^{m-1}$ a bola aberta de centro zero e raio 1 em $\mathbb{R}^{m-1}$, existem uma vizinhança aberta $V \subset M$ de $\gamma[0, T]$, $\varepsilon > 0$ e um difeomorfismo $\psi : V \rightarrow (-\varepsilon, T + \varepsilon) \times B$ de classe C^r que é uma conjugação C^r entre $X|_V$ e $\partial/\partial t$, ou seja:

$$\psi_*(X|_V) = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Observação 2.4.13. Este é o teorema 1.1, página 40 de (PALIS; MELO, 1982).

Demonstração. Escolha $\chi \in C_c^\infty(M)$ uma função tal que $\chi \equiv 1$ numa vizinhança de $\gamma[0, T]$. Substituindo o campo X pelo campo $\chi \cdot X$ (que ainda tem γ como curva integral satisfazendo todas as propriedades listadas no enunciado), podemos supor que X é completo, ou seja, se $\phi : D \rightarrow M$ denota o fluxo de X , então $D = \mathbb{R} \times M$ (as curvas integrais estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$). Seja $p = \gamma(0)$. Então, se $\phi_p(t)$ é a curva integral maximal de X passando por p , segue que $\phi_p|_{[0, T]} = \gamma$.

Tome $\Sigma_0 \subset M$ uma seção transversal para X com $p \in \Sigma_0$. Lembre que o mapa $\phi^t : M \rightarrow M$ dado por $\phi^t(q) = \phi(t, q)$ é um difeomorfismo C^r (item (3) do teorema 2.2.5, pois da completude do campo, segue que $M_t = M$ para todo $t \in \mathbb{R}$). Defina $\Sigma_t = \phi^t(\Sigma_0)$. Então, Σ_t é uma hipersuperfície mergulhada em M , com $\phi(t) \in \Sigma_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Ainda, se $0 \leq t \leq T$, Σ_t é transversal a X , pois $(d\phi^t)_p \cdot X_p = X_{\gamma(t)}$.

Pelo item (4) do teorema 2.4.6, dado $0 \leq t \leq T$, existe um intervalo $(-\varepsilon_t, \varepsilon_t)$ e uma vizinhança $W(t) \subset \Sigma_t$ de $\gamma(t)$ tal que, escrevendo $\tilde{W}(t) = (-\varepsilon_t, \varepsilon_t) \times W(t)$, a restrição do fluxo $\Phi_t := \phi|_{\tilde{W}(t)} : \tilde{W}(t) \rightarrow \tilde{W}(t)$ é um difeomorfismo C^r , onde $\tilde{W}(t)$ é uma vizinhança de $\gamma(t)$ em M . Como $\gamma[0, T]$ é compacto, podemos escolher um número finito destas vizinhanças $\tilde{W}(t)$ cobrindo a imagem da curva (digamos, indexados por $t_1, \dots, t_N$). Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \min_{1 \leq i \leq N} \varepsilon_{t_i}$ e $W \subset \Sigma_0$ vizinhança de p tal que $\phi^{t_i}(W) \subset W(t_i)$ para $1 \leq i \leq N$. Defina agora a aplicação

$$\Psi : (-\varepsilon, T + \varepsilon) \times W \rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq N} \tilde{W}(t_i) \subset M,$$

como, novamente, apenas a restrição do fluxo ϕ ao conjunto $(-\varepsilon, T + \varepsilon) \times W$. Afirmamos que Ψ é um difeomorfismo local C^r sobre sua imagem, que é uma vizinhança aberta (em M) de $\gamma[0, T]$. De fato, dado $(t, y) \in (-\varepsilon, T + \varepsilon) \times W$, vai existir um $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $|t - t_i| < \varepsilon_i$, e portanto, $\Psi(t, y) = \Phi_{t_i}(t - t_i, \phi^{t_i}(y))$, que é um difeomorfismo C^r .

Tome agora $(t, x), (s, y) \in (-\varepsilon, T + \varepsilon) \times W$, e suponha que $\Psi(t, x) = \Psi(s, y)$, com $t \geq s$. Se $|t - s| < \delta$ para um $\delta > 0$ suficientemente pequeno, então teremos $\Phi_{t_i}(t - t_i, \phi^{t_i}(x)) = \Phi_{t_i}(s - t_i, \phi^{t_i}(y))$, donde $x = y$ e $t = s$. Provemos agora que, reduzindo W , Ψ é injetiva. De fato, se não fosse o caso, teríamos duas sequências (t_n, x_n) e (s_n, y_n) com x_n e y_n em Σ_0 convergindo para p , $\Psi(t_n, x_n) = \Psi(s_n, y_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(t_n, x_n) \neq (s_n, y_n)$. Já vimos que isto implica que $|t_n - s_n| \geq \delta$ para todo n . Passando a uma subsequência, podemos supor que $t_n \rightarrow t$ e $s_n \rightarrow s$, com $|s - t| \geq \delta$. Assim, $\Phi(t, p) = \Psi(s, p)$, mas isto contradiz o fato da curva γ ser injetiva. Concluimos portanto que Ψ é injetiva, e assim, um difeomorfismo C^r . Escolhendo um difeomorfismo de W com B , concluimos o resultado. $\square$

2.5 Conjuntos α e ω -limite de uma órbita

Seja X um campo de vetores real de classe C^r na variedade M . Seja $\phi(t) = \phi(t, p)$ a curva integral maximal de X com $\phi(0) = p$, e escreva I_p para o intervalo maximal de ϕ .

$$\omega(p) = \{q \in M; \text{ existe uma sequência } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ em } I_p \text{ tal que } \phi(t_n) \rightarrow q\}.$$

Da mesma forma definimos

$$\alpha(p) = \{q \in M; \text{ existe uma sequência } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ em } I_p \text{ tal que } \phi(t_n) \rightarrow q\}.$$

Os conjuntos $\omega(p)$ (respectivamente, $\alpha(p)$) são os conjuntos ω -limite (respectivamente α -limite) de p .

Seja γ_p é uma órbita de X pelo ponto $p \in M$, e tome $q \in \gamma_p$. Então $\omega(p) = \omega(q)$ (pela condição de translação do fluxo de X). Da mesma forma, $\alpha(p) = \alpha(q)$. Faz sentido então definir o conjunto ω -limite da órbita γ_p como $\omega(p)$ (analogamente, o conjunto α -limite de γ_p).

Observação 2.5.1. Observe que o conjunto α -limite de X é igual ao conjunto ω -limite de $-X$. Assim, é suficiente estudar o conjunto ω -limite.

Teorema 2.5.2. Seja $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ um campo na variedade M e $p \in M$. Denote por $\phi : D \rightarrow M$ o fluxo de X . Defina $\gamma_p^+ = \{\phi(t, p); t \geq 0\}$ como a semi-órbita positiva de X pelo ponto p . Suponha que γ_p^+ esteja contida em um subconjunto compacto $K \subset M$. Então,

1. $\omega(p) \neq \emptyset$.
2. $\omega(p)$ é compacto.

3. $\omega(p)$ é invariante por X (ou seja, se $q \in \omega(p)$, então $\gamma_q \subset \omega(p)$, onde γ_q é a órbita de X passando por q).
4. $\omega(p)$ é conexo.
5. Se $\omega(\gamma) \subset \gamma$, então $\omega(\gamma) = \gamma$, e γ é um ponto singular ou uma órbita periódica.

Observação 2.5.3. Este é o teorema 1.19, na página 12 de (DUMORTIER; LLIBRE; JAUME, 2003). Observe que podemos definir $\gamma_p^- = \{\phi(t, p); t \leq 0\}$ como a semi-órbita negativa de X por p . Substituindo no enunciado acima γ_p^+ por γ_p^- e $\omega(p)$ por $\alpha(p)$, o resultado é válido.

Demonstração. Para o item (1), observe que, como $\gamma_p^+ \subset K$, segue do teorema 2.2.7 que $\omega_+(p) = \infty$. Assim, por exemplo, a sequência $(\phi_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ está inteiramente contida em K , e portanto, admite subsequência convergente para um ponto $q \in K$. Obtemos então uma sequência de parâmetros $0 < t_n \rightarrow \infty$ tais que $\phi_p(t_n) \rightarrow q$, ou seja, $q \in \omega(p)$.

Para o item (2), note que $\omega(p) \subset K$, e basta provar que $\omega(p)$ é fechado. Escolha uma métrica d que induza a topologia de M . Seja $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\omega(p)$ tal que $q_m \rightarrow q \in M$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma sequência $(t_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ com $t_{mn} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $\phi_p(t_{mn}) \rightarrow q_m$ quando $n \rightarrow \infty$. Construa uma sequência $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma: dado $N \in \mathbb{N}$, existe um índice $m(N)$ tal que, se $m \geq m(N)$, então $q_m \in B(q, 1/N)$ (pois $q_m \rightarrow q$). Fixado $m = m(N)$, existe um índice $n(N)$ tal que, se $n \geq n(N)$, então $t_{mn} > N$ e $\phi_p(t_{mn}) \in B(q, 1/N)$ (pois $\phi_p(t_{mn}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q_m$). Podemos construir as sequências $m(N)$ e $n(N)$ de modo que sejam crescentes em N . Defina $s_N = t_{m(N)n(N)}$. É claro então que $s_N \rightarrow \infty$ e que $\phi_p(s_N) \rightarrow q$ quando $N \rightarrow \infty$, e portanto $q \in \omega(p)$. Assim, $\omega(p)$ é fechado, e portanto, compacto.

Para o item (3), seja $q \in \omega(p)$ e tome $x \in \gamma_q$. Isto implica que $x = \phi(t, q)$ para algum $t \in \mathbb{R}$. Como $q \in \omega(p)$, existe uma sequência $t_n \rightarrow \infty$ tal que $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p)$. Assim, pela continuidade e propriedade de grupo do fluxo,

$$x = \phi(t, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t, \phi(t_n, p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t + t_n, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_p(t + t_n).$$

Como $t + t_n \rightarrow \infty$ se $n \rightarrow \infty$, segue que $x \in \omega(p)$, donde $\gamma_q \subset \omega(p)$.

Para o item (4), suponha que $\omega(p)$ não é conexo, ou seja, que existam dois subconjuntos $A, B \subset \omega(p)$ fechados, disjuntos e não-vazios tais que $\omega(p) = A \cup B$. Como $\omega(p)$ é compacto, escreva $\delta = d(A, B) > 0$. Como A e B são não-vazios, existem sequências $t_n \rightarrow \infty$ e $s_n \rightarrow \infty$ tais que $\phi_p(t_n) \rightarrow q_A \in A$ e $\phi_p(s_n) \rightarrow q_B \in B$. Definimos indutivamente a seguinte sequência $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parâmetros: defina $r_1 = s_1$. Supondo já definidos r_k para $1 \leq k \leq n$, defina $r_{k+1} > r_k$ da seguinte forma: se $n+1$ for par, coloque $r_{n+1} = t_l$, onde $l \geq n$ e $t_l > r_k$ para $k \leq n$. Se $n+1$ for ímpar, coloque $r_{n+1} = s_l$, onde $l \geq n$ e $s_l > r_k$ para $k \leq n$. Segue então que $r_n \rightarrow \infty$ e (r_{2n}) é uma subsequência de (t_n) , assim como (r_{2n+1}) é uma subsequência de (s_n) . Ainda, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$ for par, então $d(\phi_p(r_n), A) < \delta/2$ e $d(\phi_p(r_{n+1}), A) > \delta/2$. Fixe $n \geq n_0$ par.

Note que a função $d(\phi_p(t), A)$, definida para $r_n \leq t \leq r_{n+1}$, é contínua. Pelo teorema do valor intermediário, existe um $r_n < \tilde{r}_n < r_{n+1}$ tal que

$$d(\phi_p(\tilde{r}_n), A) = \frac{\delta}{2}.$$

Note que a sequência $\tilde{r}_n \rightarrow \infty$, e como o conjunto $\{x \in M; d(x, A) = \delta/2\}$ é compacto (lembre que A é compacto), então passando a uma subsequência destes $\tilde{r}_n$, existe um ponto $q \in \omega(p)$, com $d(q, A) = \delta/2$. Isto é um absurdo, pois ou $q \in A$ (e teríamos $d(q, A) = 0$) ou $q \in B$ (e teríamos $d(q, A) \geq \delta$).

Finalmente, para o quinto item, suponha que $\omega(\gamma) \subset \gamma$, onde $\gamma = \gamma_p$ para algum $p \in M$. Então, como $\omega(p) \neq \emptyset$, existe $q \in \gamma_p$ tal que $q \in \omega(\gamma)$. Pela invariância por X (item 3 deste teorema), segue que $\gamma_q = \gamma_p \subset \omega(p)$, donde segue que $\omega(\gamma) = \gamma$. Observe que isto só pode ocorrer quando γ é constante ou periódica, pois do corolário 2.3.3, no caso restante γ seria difeomorfa a $\mathbb{R}$, que não é compacta (enquanto $\omega(\gamma)$ é). $\square$

2.6 O teorema das variedades estável e instável

Seja X um campo de vetores C^∞ numa variedade M , ou seja, uma aplicação suave $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = \text{id}_M$, onde $\pi : TM \rightarrow M$ é a projeção usual. Dado um ponto $p \in M$, temos a aplicação

$$dX_p : T_p M \rightarrow T_{X(p)}(TM).$$

Escolha uma carta (U, x) , $x : U \subset M \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ ao redor de p . Então, ela induz uma trivialização de $TU \subset TM$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi : U \times \mathbb{R}^n &\rightarrow TU \\ (q, v) &\mapsto \phi(p, v) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_q. \end{aligned}$$

Derivando esta aplicação no ponto $(p, v) := \phi^{-1}(p, X(p))$, obtemos o isomorfismo

$$d\phi_{(p,v)} : T_p U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{T_{X(p)}} T_{X(p)}(TM).$$

Definimos a aplicação $DX_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo a seguinte composição:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi(p, \cdot)} T_p M \xrightarrow{dX_p} T_{X(p)}(TM) \xrightarrow{d\phi_{(p,v)}} T_p U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^n.$$

Esta aplicação é linear (pois todas as aplicações acima são lineares), e está definida a menos de conjugação por $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (quando escolhermos outra carta). No caso de um campo definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, podemos identificar o campo com uma aplicação suave $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e neste caso, dX_p é apenas a derivada usual de X (como aplicação).

Definição 2.6.1. Seja X um campo suave numa variedade suave M de dimensão n . Seja $p \in M$ um ponto crítico para X (ou seja, tal que $X(p) = 0$). Dizemos que p é *hiperbólico* se $DX_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não tiver nenhum autovalor puramente imaginário.

Observação 2.6.2. Apesar de DX_p não estar bem definida (pois depende da carta escolhida ao redor de p), seus autovalores estão, e a definição acima faz sentido.

Dada uma aplicação suave $f : M \rightarrow M$ entre duas variedades suaves, dizemos que um ponto $p \in M$ fixo por f (ou seja, tal que $f(p) = p$) é *hiperbólico* se $df_p : T_p M \rightarrow T_p M$ não tiver autovalores com valor absoluto igual a 1. Neste caso, temos uma decomposição de $T_p M = T_p^{\text{st}} M \oplus T_p^{\text{un}} M$ em subespaços estável e instável, ambos invariantes pela aplicação df_p . Podemos relacionar esta definição com a definição para campos usando o seguinte lema:

Lema 2.6.3. Seja X um campo suave e completo definido na variedade M , e denote por $\phi : D \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ o fluxo de M . Um ponto $p \in M$ é um ponto crítico hiperbólico para X se, e somente se, p é um ponto fixo hiperbólico para $\phi^t : M \rightarrow M$ para algum (e consequentemente, para todo) $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Demonstração. Lema 4.19 de (BANYAGA; HURTUBISE, 2004). □

Dado um ponto crítico $p \in M$ para o campo completo X , definimos as *variedades estável* e *instável* de X em p como os seguintes conjuntos:

$$W_p^{\text{st}}(X) = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = p\},$$

$$W_p^{\text{un}}(X) = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = p\},$$

O teorema principal sobre estes conjuntos é o seguinte:

Teorema 2.6.4 (Teorema global das variedades estável e instável). Seja X um campo suave e completo definido na variedade M , e seja $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico para X . Então,

$$W_p^{\text{st}}(X) = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) = p\} \text{ e } W_p^{\text{un}}(X) = \{x \in M; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = p\}.$$

são subvariedades imersas de M , com $T_p W_p^{\text{st}}(X) = T_p^{\text{st}} M$ e $T_p W_p^{\text{un}}(X) = T_p^{\text{un}} M$ (com relação a algum dos difeomorfismos ϕ^t). Mais ainda, estas variedades são dadas como imagem de imersões injetivas:

$$\begin{aligned} E^{\text{st}} : T_p^{\text{st}} M &\rightarrow W_p^{\text{st}}(X), \\ E^{\text{un}} : T_p^{\text{un}} M &\rightarrow W_p^{\text{un}}(X), \end{aligned}$$

onde colocamos em $T_p^{\text{st}} M$ e $T_p^{\text{un}} M$ a estrutura de variedade suave linear.

Demonstração. Teoremas 4.15 e 4.17 de (BANYAGA; HURTUBISE, 2004). □

No caso em que estamos interessados, é necessário substituir o ponto fixo por um toro invariante. Discutiremos este resultado agora:

Nos restringimos a uma variedade suave compacta M . Seja $V \subset M$ uma subvariedade e X um campo suave completo em M que tenha V como subvariedade invariante, ou seja, $\phi_X(t, p) \in V$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $p \in V$, onde ϕ_X é o fluxo de X . A noção que substituirá a de ponto fixo hiperbólico será a de subvariedade *normalmente* (ou transversalmente) *hiperbólica*.

Definição 2.6.5. Dizemos que o campo X é normalmente hiperbólico ao longo da subvariedade V se o fibrado tangente de M , quando restrito a V , admite uma decomposição (contínua) em três subfibrados:

$$(TM)|_V = N^{un} \oplus TV \oplus N^{st},$$

todos invariantes por X (especificamente, invariantes por $D\phi_X$, onde ϕ_X é o fluxo de X), de modo que exista uma métrica Riemanniana em TM tal que, para todo $k \geq 0$,

- $m(D\phi_X(p, u)|_{N^{un}}) > \|D(\phi_X(p, u))|_{T_p V}\|^k$ para todo $p \in V$ e algum $u < 0$.
- $\|D(\phi_X(p, u))|_{N^{st}}\| < m(D(\phi_X(p, u))|_{T_p V})^k$ para todo $p \in V$ e algum $u > 0$.

Observação 2.6.6. Dada uma transformação linear $A : V \rightarrow W$ entre espaços normados de dimensão finita, definimos

$$m(A) = \inf\{|Av|; |v| = 1\}$$

como a sua *conorma*.

Podemos agora enunciar o teorema das variedades estável e instável neste caso.

Teorema 2.6.7. Sejam M uma variedade C^∞ compacta, X um campo suave em M e $V \subset M$ a qual X é normalmente hiperbólico com respeito a decomposição $(TM)|_V = N^{st} \oplus TV \oplus N^{un}$. Então, temos

1. Existência: Existem subvariedades instável e estável X -invariantes W^{un} e W^{st} tangentes a $N^{un} \oplus TV$ e $TV \oplus N^{st}$, respectivamente, em V .
2. Caracterização: W^{st} consiste dos pontos que voltam a V pelo fluxo de X quando $t \rightarrow \infty$, e W^{un} consiste dos pontos que voltam a V pelo fluxo de X quando $t \rightarrow -\infty$.
3. Suavidade: W^{un} e W^{st} são de classe C^∞ .
4. Permanência: Se X' é um campo suave em M C^∞ -próximo a X , então X' admite uma única subvariedade V' a qual X' é normalmente hiperbólico, e que é C^∞ -próxima de V . As variedades estável e instável associadas W'^{un} e W'^{st} também são C^∞ -próximas a W^{st} e W^{un} , respectivamente.

Demonstração. Teorema 4.1 de (HIRSCH; PUGH; SHUB, 1977). □

2.7 O teorema da linearização de Siegel

Discutimos agora um resultado clássico de normalização de campos de vetores com coeficientes real-analíticos numa vizinhança de uma singularidade, desde que uma certa condição diofantina seja satisfeita.

Definição 2.7.1. Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que λ é de tipo (C, ν) se existirem constantes $C, \nu > 0$ tais que

$$|\lambda_i - \langle J, \lambda \rangle| \geq \frac{C}{|J|^\nu}$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $J \in \mathbb{Z}_+^n, |J| \geq 2$.

Teorema 2.7.2 (Siegel). Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores real-analítico, onde Ω é um aberto contendo a origem. Suponha que $X(0) = 0$, e escreva $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ como os autovalores de $dX(0)$ (contados com multiplicidade). Se λ for um vetor de tipo (C, ν) , então existe um difeomorfismo real-analítico $\Phi : U \rightarrow \tilde{U}$ entre vizinhanças da origem contidas em Ω tal que

$$\Phi \circ X \circ \Phi^{-1}(x) = dX(0) \cdot x, \quad x \in U.$$

Demonstração. Página 190 de (ARNOLD, 1988). □

2.8 O teorema da extensão de Whitney

2.8.1 Versão clássica

Vamos provar o clássico teorema da extensão de Whitney. Seguimos as apresentações em (HÖRMANDER, 2003) e (MALGRANGE, 1966).

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Dado $k \in \mathbb{Z}_+$, definimos o seguinte conjunto:

$$J^k(K) = \{(u_\alpha)_{|\alpha| \leq k}; u_\alpha : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leq k\} = \prod_{|\alpha| \leq k} C(K; \mathbb{R}).$$

Dizemos que $U \in J^k(K)$ é um *jato de ordem k*; Colocamos em $J^k(K)$ a estrutura natural de espaço $\mathbb{R}$ -vetorial, e definimos neste a norma

$$\|U\|_{J^k(K)} = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq k} |u_\alpha(x)|,$$

o que faz de $J^k(K)$ um espaço de Banach. Se $U \in J^k(K)$, escrevemos $U(x) = u_{(0, \dots, 0)}(x)$ para $x \in K$. Ainda, se $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ é um multi-índice satisfazendo $|\gamma| \leq k$, temos a seguinte aplicação linear

contínua:

$$\begin{aligned}\partial^\gamma : J^k(K) &\longrightarrow J^{k-|\gamma|}(K) \\ (u_\alpha)_{|\alpha|\leq k} &\longmapsto (u_{\gamma+\alpha})_{|\alpha|\leq k-|\gamma|}.\end{aligned}$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $r \geq k$, temos a aplicação linear contínua (de restrição)

$$\begin{aligned}J^{r,k} : C^r(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow J^k(K) \\ f &\longmapsto \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \Big|_K \right)_{|\alpha|\leq k}.\end{aligned}$$

Dado $a \in K$, definimos a aplicação $T_a^k : J^k(K) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por

$$T_a^k U(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} u_\alpha(a) \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}.$$

Definimos também as aplicações $\tilde{T}_a^k, R_a^k : J^k(K) \rightarrow J^k(K)$ por

$$\tilde{T}_a^k = J^{\infty,k} \circ T_a^k \quad \text{e} \quad R_a^k = \text{id}_{J^k(K)} - \tilde{T}_a^k.$$

Lema 2.8.1. Dados $x, y \in K$ e $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|\gamma| \leq k$, temos as seguintes identidades:

1. $T_x^k \circ \tilde{T}_y^k = T_y^k.$
2. $\tilde{T}_x^k \circ \tilde{T}_y^k = \tilde{T}_y^k.$
3. $R_x^k \circ R_y^k = R_x^k.$
4. $R_x^k \circ \tilde{T}_y^k = 0.$
5. $\tilde{T}_x^k \circ R_y^k = -\tilde{T}_y^k \circ R_x^k = \tilde{T}_x^k - \tilde{T}_y^k = R_y^k - R_x^k.$
6. $\partial_x^\gamma \circ \tilde{T}_x^k = \tilde{T}_x^{k-|\gamma|} \circ \partial_x^\gamma$

Demonstração. Verificação imediata. □

Observamos que se $U \in J^k(K)$ e $|\alpha| \leq k$, então

$$\left(R_x^k U \right)_\alpha = u_\alpha - T_x^{k-|\alpha|} \circ \partial_x^\alpha U.$$

Definição 2.8.2. Seja $U \in J^k(K)$ um k -jato. Dizemos que U é um *jato de Whitney* se tivermos

$$\left(R_x^k U \right)_\alpha(y) = o(|x-y|^{k-|\alpha|})$$

quando $|x-y| \rightarrow 0$, $x, y \in K$ e $|\alpha| \leq k$. Denotamos o conjunto dos jatos de Whitney por $\mathcal{E}^k(K)$.

Podemos colocar uma norma em $\mathcal{E}^k(K)$ da seguinte forma:

$$\|U\|_k^K = \|U\|_{J^k(K)} + \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y \\ |\alpha| \leq k}} \frac{(R_x^k F)_\alpha(y)}{|x - y|^{k - |\alpha|}}.$$

Com esta norma, $\mathcal{E}^k(K)$ é Banach. Podemos agora enunciar e prova o teorema da extensão de Whitney na versão C^k , $k < \infty$.

Teorema 2.8.3 (Extensão de Whitney C^k). Sejam $k \in \mathbb{Z}_+$, $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $U = (u_\alpha)_{|\alpha| \leq k} \in \mathcal{E}^k(K)$ um k -jato de Whitney. Então, existe uma função $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial^\alpha v(x) = u_\alpha(x)$ para $x \in K$, $|\alpha| \leq k$. Em outras palavras, a aplicação de restrição

$$J^{k,k} : C^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}^k(K)$$

é sobrejetiva. Mais ainda, podemos tomar v suave em K^c .

Para provar este resultado, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.8.4. Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, existe uma partição da unidade $\sum \phi_j = 1$ em K^c tal que:

- Nenhum ponto está no suporte de mais de N funções ϕ_j .
- O diâmetro do suporte de ϕ_j é no máximo duas vezes a sua distância até K (ou seja, $\text{diam supp } \phi_j \leq 2d(\text{supp } \phi_j, K)$).
- Se $x \notin K$,

$$|\partial^\alpha \phi_j(x)| \leq C_\alpha d(x)^{-|\alpha|},$$

onde $d(x) = d(x, K)$.

Demonstração. Colocando $X = K^c$, definimos a métrica que varia lentamente em X , i.e., $\|v\|_x = 2|v|/d(x)$, onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ e $d(x) = d(x, K)$ para $x \in X$. Aplicamos então o teorema 1.4.10 de (HÖRMANDER, 2003) com $d_j = 2^{-j}$, e obtemos uma partição da unidade $\sum \phi_j = 1$ em X que satisfaz o primeiro item do teorema. Ainda,

$$\begin{aligned} \text{diam supp } \phi_j &\leq \text{diam } B_j = \text{diam} \left\{ x \in \mathbb{R}^n; 2 \frac{|x - x_j|}{d(x_j)} < 1 \right\} = d(x_j) \\ &\leq \frac{3}{2} d(\text{supp } \phi_j, K) \leq 2d(\text{supp } \phi_j, K). \end{aligned}$$

Para o terceiro item, dado um multi-índice α com $|\alpha| = k$ e $x \notin K$, temos da estimativa fornecida pelo teorema 1.4.10 de (HÖRMANDER, 2003),

$$|\partial_j^\alpha \phi(x)| \leq C_\alpha d(x)^{-|\alpha|}.$$

□

Agora vamos à prova do teorema 2.8.3.

Prova de 2.8.3: Para cada $j \geq 1$, podemos escolher um $y_j \in K$ que realiza a distância até $\text{supp } \phi_j$, i.e., y_j satisfaz

$$d(\text{supp } \phi_j, K) = d(\text{supp } \phi_j, y_j).$$

Definimos então a extensão por

$$v(x) = \begin{cases} \sum_j \phi_j(x) \left(T_{y_j}^k U \right) (x), & x \notin K \\ u_0(t, x), & x \in K \end{cases}.$$

Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, chamamos de $x^* \in K$ o ponto tal que $d(x) = |x - x^*|$. Se x está no suporte de ϕ_j , então $d(\text{supp } \phi_j, K) \leq d(x)$, o que implica que (pelo lema) $\text{diam supp } \phi_j \leq 2d(x)$. Assim,

$$|x - y_j| \leq \text{diam supp } \phi_j + d(\text{supp } \phi_j, y_j) \leq 3d(x),$$

e também

$$|x^* - y_j| \leq d(x) + 3d(x) = 4d(x).$$

Agora fazemos a seguinte afirmação:

Afirmação. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in K$ e $x \in \mathbb{R}^n$ forem quaisquer pontos tais que $|x - y| < \delta$, então

$$\left| v(x) - \left(T_y^k U \right) (x) \right| \leq \varepsilon |x - y|^k. \quad (2.8.1)$$

Prova da afirmação. Suponha que $x \in K$, e tome $y \in K$, com $y \neq x$. Então,

$$\left| v(x) - \left(T_y^k U \right) (x) \right| |x - y|^{-k} = \left| u_0(x) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{u_\alpha(y)(x - y)^\alpha}{\alpha} \right| |x - y|^{-k} = \left| \left(R_y^k U \right)_0 (x) \right| |x - y|^{-k}$$

que é contínua em $K \times K$ (logo uniformemente contínua), e vale zero na diagonal, logo fica menor que ε sempre que $|x - y| < \delta$ para algum δ (que depende apenas de ε). Suponha agora que $x \in K^c$. Então, lembrando que $\sum \phi_j = 1$,

$$\left| v(x) - \left(T_y^k U \right) (x) \right| \leq \sum_j \phi_j(x) \left| \left(T_y^k U \right) (x) - \left(T_{y_j}^k U \right) (x) \right|.$$

Se $\phi_j(x) \neq 0$, usando o comentário acima desta afirmação, $|x - y_j| \leq 3d(x) \leq 3|x - y|$ para todo $y \in K$. Se γ é tal que $|\gamma| \leq k$, então dados $y_1, y_2 \in K$ quaisquer

$$\left| \partial_x^\gamma \left(\left(T_{y_1}^k U \right) (x) - \left(T_{y_2}^k U \right) (x) \right) \right| = o \left((|x - y_1| + |y_1 - y_2|)^{k - |\gamma|} \right). \quad (2.8.2)$$

De fato, para ver esta estimativa, basta observar que

$$\begin{aligned}
& \left| \partial^\beta \left(\partial^\gamma \left((T_{y_1}^k U)(x) - (T_{y_2}^k U)(x) \right) \right) \right|_{x=y_1} = \\
& = \left| \sum_{|\alpha| \leq k-|\gamma|-|\beta|} \frac{1}{\alpha!} (u_{\alpha+\beta+\gamma}(y_1)(x-y_1)^\alpha - u_{\alpha+\beta+\gamma}(y_2)(x-y_2)^\alpha) \right|_{x=y_1} \\
& = \left| u_{\gamma+\beta}(y_1) - \sum_{|\alpha| \leq k-|\gamma|-|\beta|} u_{\alpha+\beta+\gamma}(y_2) \frac{(y_1-y_2)^\alpha}{\alpha!} \right| \\
& = (R_{y_2}^k)_{\beta+\gamma}(y_1) \\
& = o(|y_1-y_2|^{k-|\beta|-|\gamma|})
\end{aligned}$$

Assim, como $\partial^\gamma((T_{y_1}^k U)(x) - (T_{y_2}^k U)(x))$ é um polinômio de grau $k-|\gamma|$ segue da fórmula de Taylor que

$$\begin{aligned}
\left| \partial_x^\gamma \left((T_{y_1}^k U)(x) - (T_{y_2}^k U)(x) \right) \right| & \leq \sum_{|\beta| \leq k-|\gamma|} \frac{1}{\beta!} (R_{y_2}^k)_{\beta+\gamma}(y_1) |x-y_1|^{|\beta|} \\
& = o \left(\sum_{|\beta| \leq k-|\gamma|} |y_1-y_2|^{k-|\gamma|-|\beta|} |x-y_1|^{|\beta|} \right) \\
& = o((|x-y_1| + |y_1-y_2|)^{k-|\gamma|}).
\end{aligned}$$

Se fizermos $\gamma = 0$ e $y_1 = y$ e $y_2 = y_j$ para cada j (tal que $x \in \text{supp } \phi_j$), segue a afirmação. $\square$

Observe que a estimativa (2.8.1) implica que v é contínua (já sabíamos a continuidade no interior de K e no interior do complementar, e a desigualdade dá a continuidade na fronteira). Se $k \geq 1$, temos também que v é diferenciável em K . De fato, dado $h \in \mathbb{R}^n$ pequeno e $y \in K$,

$$\begin{aligned}
\left| v(y+h) - v(y) - d(T_y^k U)(x)|_{x=y} h \right| & = \left| v(y+h) - (T_y^k U)(y) - d(T_y^k U)(x)|_{x=y} h \right| \\
& \leq \left| v(y+h) - (T_y^k U)(y+h) \right| + \\
& + \left| (T_y^k U)(y+h) - (T_y^k U)(y) - d(T_y^k U)(x)|_{x=y} \cdot h \right| \\
& = o(|h|^k) + o(|h|) = o(|h|)
\end{aligned}$$

quando $h \rightarrow 0$, já que $k \geq 1$. Isto prova que $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\partial^\alpha v(x) = u_\alpha(x)$ em K sempre que $|\alpha| = 1$ (i.e., prova o resultado para $k = 1$). Procedemos agora por indução em k . Suponha que o teorema já esteja provado para $k-1$. Sabemos que v é C^∞ em K^c . Seja $v \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|v| = 1$ e $x \in K^c$. Calculemos $\partial^v v(x)$:

$$\partial^v v(x) = \sum_j \partial^v \phi_j(x) (T_{y_j}^k U)(x) + \sum_j \phi_j(x) \partial^v (T_{y_j}^k U)(x).$$

Definimos agora

$$v_v(x) := \begin{cases} \sum \phi_j(x) \partial^v (T_{y_j}^k U)(x), & x \notin K \\ u_v(x), & x \in K \end{cases}.$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $v_v \in C^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, e que $\partial^\alpha v_v(x) = u_{\alpha+v}(x)$ em K para todo $|\alpha| \leq k-1$. É suficiente então provar que se $x \rightarrow K$, a primeira soma (e suas derivadas em x de ordem $\leq k-1$) na expressão de $\partial^v v$ tende a zero, e teremos $\partial^v v$ contínua (de fato, C^{k-1}), e $\partial^\alpha u(x) = u_\alpha(x)$ para $|\alpha| \leq k$. De fato, se considerarmos a diferença $v_v - \partial^v v$, esta função é de classe $C^{k-2}(\mathbb{R}^n)$, vale zero em K e é suave em K^c . Aplicando a versão em n variáveis do corolário 1.1.2 de (HÖRMANDER, 2003) (que tem a mesma prova), a redução fica justificada. Seja então $x \notin K$ e tome $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, com $\beta \neq 0$ e $|\beta| + |\gamma| \leq k$. Temos

$$\sum_j \partial^\beta \phi_j(x) \partial^\gamma \left(T_{y_j}^k U \right)(x) = \sum_j \partial^\beta \phi_j(x) \partial^\gamma \left(\left(T_{y_j}^k U \right)(x) - \left(T_{x^*}^k U \right)(x) \right),$$

já que $\sum_j \partial^\beta \phi_j = 0$. Lembrando que $|x - y_j| \leq 3d(x)$ e que $|\partial^\beta \phi_j(x)| \leq Cd(x)^{-|\beta|}$, aplicamos a estimativa (2.8.2), temos

$$\sum_j \partial^\beta \phi_j(x) \partial^\gamma \left(T_{y_j}^k U \right)(x) = o(d(x)^{k-|\beta|-|\gamma|}),$$

o que prova que a primeira soma em $\partial^v v$ (e suas derivadas de ordem $\leq k-1$) tende a zero quando $x \rightarrow K$, o que termina a prova por indução. $\square$

Vamos tratar agora do caso C^∞ . Seja $L \subset \mathbb{R}^n$ um compacto em $\mathbb{R}^n$ com $K \subset \text{int } L$. Defina

$$\mathcal{J}^k(K; L) = \left\{ f \in C^k(L); \partial^\alpha f|_K \equiv 0, |\alpha| \leq k \right\}.$$

(aqui, $C^k(L)$ é o espaço das funções que admitem extensão para $C^k(\tilde{L})$, onde $\tilde{L}$ é alguma vizinhança aberta de L). Denote por $i_k : \mathcal{J}^k(K; L) \rightarrow C^k(L)$ a inclusão. O teorema de Whitney diz que a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{J}^k(K; L) \rightarrow C^k(L) \rightarrow \mathcal{E}^k(K) \rightarrow 0$$

é exata. Defina a aplicação

$$\eta_k : J^{k+1}(K) \rightarrow J^k(K)$$

por $\eta_k \left((u_\alpha)_{|\alpha| \leq k+1} \right) = (u_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$. É claro que esta aplicação se restringe a um mapa

$$\eta_k : \mathcal{E}^{k+1}(K) \rightarrow \mathcal{E}^k(K),$$

já que se $|\alpha| \leq k$ e $U = (u_\alpha)_{|\alpha| \leq k+1}$,

$$\left(R_x^k \eta_k U \right)(y) = \left(R_x^{k+1} U \right)_\alpha(y) - \sum_{|\beta|=k+1-|\alpha|} u_{\alpha+\beta}(y) \frac{(x-y)^\beta}{\beta!} = o(|x-y|^{k-|\alpha|}).$$

Analogamente a η_k , podemos definir $\phi_k : C^{k+1}(L) \rightarrow C^k(L)$ como a inclusão, que se restringe a uma aplicação (injetiva)

$$\phi_k : \mathcal{J}^{k+1}(K; L) \rightarrow \mathcal{J}^k(K; L).$$

Definição 2.8.5. O espaço dos C^∞ -jatos em K é o limite projetivo

$$J(K) = \varprojlim J^k(K).$$

O espaço dos C^∞ -jatos de Whitney em K é o limite projetivo

$$\mathcal{E}(K) = \varprojlim \mathcal{E}^k(K).$$

Explicitamente, podemos escrever estes conjuntos da seguinte forma:

$$J(K) = \left\{ (u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}; u_\alpha : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \right\} = \prod_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} C(K)$$

Analogamente, $U = (u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \in J(K)$ pertence a $\mathcal{E}(K)$ se, e somente se,

$$\left(R_x^k U \right)_\alpha (y) = o(|x - y|^{k - |\alpha|})$$

for válido para todo k e $|\alpha| \leq k$, quando $|x - y| \rightarrow 0$. Estes limites são tomados na categoria dos espaços de Banach.

Podemos fazer também $C^\infty(L) = \varprojlim C^k(L)$ e $\mathcal{J}(K; L) = \varprojlim \mathcal{J}^k(K; L)$. Denote por $J : C^\infty(L) \rightarrow \mathcal{E}(K)$ a aplicação de restrição. Podemos agora enunciar o teorema de Whitney na versão C^∞ :

Teorema 2.8.6 (Extensão de Whitney C^∞). Dados $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $L \subset \mathbb{R}^n$ aberto relativamente compacto com $K \subset L$, a aplicação

$$J : C^\infty(L) \rightarrow \mathcal{E}(K)$$

é sobrejetiva.

Para provar este resultado, precisamos do seguinte

Lema 2.8.7. Existem constantes C_α , dependendo apenas de $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, com a seguinte propriedade: dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ e um número $\delta > 0$, existe uma função C^∞ $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- $\phi = 0$ numa vizinhança de K e $\phi(x) = 1$ se $d(x, K) \geq \delta$.
- $\phi \geq 0$ em $\mathbb{R}^n$.
- Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C_\alpha \delta^{-|\alpha|}.$$

Demonstração. De acordo com o teorema 1.4.1 de (HÖRMANDER, 2003), podemos tomar $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\psi = 1$ em uma vizinhança de K , $\psi = 0$ se $d(x, K) \geq \delta$ e tal que $|\partial^\alpha \psi| \leq C_\alpha \delta^{-|\alpha|}$. Basta definir $\phi := 1 - \psi$. $\square$

Lema 2.8.8. $\mathcal{J}(K; L)$ é denso em $\mathcal{J}^k(K, L)$ (onde colocamos em $\mathcal{J}^k(K, L)$ a topologia induzida de $C^k(L)$).

Demonstração. Como L é compacto, podemos induzir a topologia de $C^k(L)$ via a única norma

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in L} |\partial_x^\alpha u(x)|, \quad u \in C^k(L).$$

Dada uma função $u \in \mathcal{J}^k(K; L)$, escolha $\tilde{u} \in C^k(\tilde{L})$ extensão de u , onde $\tilde{L}$ é uma vizinhança aberta de L . Multiplicando por uma função de corte, podemos supor que $\tilde{u}$ tem suporte compacto. Para cada $\delta > 0$, defina $K_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) \leq \delta\}$. Seja ϕ a função dada pelo lema 2.8.7 associada a este δ . Escreva $v_\delta := \phi \cdot \tilde{u}$. Note que v se anula numa vizinhança de K . Afirmamos que $v_\delta \rightarrow u$ em $C^k(L)$. De fato, como $u \in \mathcal{J}^k(K; L)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $|\partial^\alpha u(x)| < \varepsilon \delta^{k-|\alpha|}$ para todo $x \in K_\delta$ e $|\alpha| \leq k$ (isto segue da fórmula de Taylor em conjunto com o fato de K ser compacto). Agora,

$$\begin{aligned} \|v_\delta - u\|_k &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in L} |\partial^\alpha (v_\delta - u)| \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_\delta} \left| \sum_{\gamma \leq \alpha} \partial_x^\gamma (\phi(x) - 1) \partial^{\alpha-\gamma} u(x) \right| \\ &\leq C_\alpha \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, o conjunto das funções $C^k(L)$ que se anulam numa vizinhança de K é denso em $\mathcal{J}^k(K; L)$. Agora, fazendo a regularização usual, obtemos o resultado. $\square$

Podemos agora concluir a demonstração do teorema 2.8.6.

Prova do teorema 2.8.6: Seja $U \in \mathcal{E}(K)$ um jato de Whitney, e escrevemos U^k como sua imagem em $\mathcal{E}^k(K)$. Seja $\tilde{U}^k \in C^k(L)$ a extensão de U^k de classe C^k dada pelo teorema 2.8.3. Note que $\tilde{U}^k - \tilde{U}^{k-1} \in \mathcal{J}^{k-1}(K; L)$, e pelo lema, existe $H^{k-1} \in \mathcal{J}(K; L)$ tal que

$$\|\tilde{U}^k - \tilde{U}^{k-1} - H_{k-1}\|_{k-1} \leq 2^{-k},$$

sendo $\|\cdot\|_k$ a norma em $C^k(L)$. Definimos então

$$\tilde{U}(x) = \tilde{U}_0(x) + \sum_{k \geq 1} \left(\tilde{U}^k(x) - \tilde{U}^{k-1}(x) - H^{k-1}(x) \right).$$

Verifica-se facilmente que $\tilde{U} \in C^\infty$ e é a extensão de U que estávamos procurando. $\square$

2.8.2 Versão com parâmetros

Precisamos de uma versão do teorema da extensão de Whitney em que os dados dependam suavemente de parâmetros $t \in \mathbb{T}^m$. Podemos deduzir este resultado do enunciado clássico

de (WHITNEY, 1936). Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto, $f : \mathbb{T}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, e $k \geq 0$ um inteiro. Dizemos que $f = f_0$ é de classe $C_{\mathbb{T}^m}^k$ em K em termos das funções $f_\alpha : \mathbb{T}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}$, $|\alpha| \leq k$, se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- As funções f_α são contínuas em $\mathbb{T}^m \times K$ e suaves em $t \in \mathbb{T}^m$ para cada $x \in K$ fixado.
- Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ com $|\alpha| \leq k$, definimos

$$R_{\alpha,\beta}(t,x,y) := \partial_t^\beta f_\alpha(t,x) - \sum_{|\gamma| \leq k-|\alpha|} \frac{\partial_t^\beta f_{\alpha+\gamma}(t,y)}{\gamma!} (x-y)^\gamma,$$

onde $(t,x,y) \in \mathbb{T}^m \times K \times K$. A função $R_{\alpha,\beta}$ tem a seguinte propriedade: dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in \mathbb{T}^m \times K$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in K \cap B(x_0, \delta)$, então

$$|R_{\alpha,\beta}(t_0, x, y)| \leq \varepsilon |x - y|^{k-|\alpha|}.$$

Se $k = \infty$, dizemos que $f \in C_{\mathbb{T}^m}^\infty(K)$ se $f \in C_{\mathbb{T}^m}^k(K)$ para todo $k \geq 0$. O teorema principal é o seguinte:

Teorema 2.8.9 (Whitney com parâmetros). Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $f : \mathbb{T}^m \times K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $C_{\mathbb{T}^m}^k$ com respeito às funções f_α , $|\alpha| \leq k$ (k finito ou infinito). Então, existe uma função $F : \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pertence à $C^k(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$, suave em $t \in \mathbb{T}^m$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo e tal que

1. $F(t, x) = f(t, x)$ para $(t, x) \in \mathbb{T}^m \times K$.
2. $\partial_x^\alpha F(t, x) = f_\alpha(t, x)$ para todo $(t, x) \in \mathbb{T}^m \times K$ e $|\alpha| \leq k$.
3. F é suave em $\mathbb{T}^m \times (\mathbb{R}^n \setminus K)$.

Demonstração. Escrevemos $\mathbb{T}^m = S^1 \times \dots \times S^1 \subset \mathbb{R}^{2m}$. Defina o compacto $\tilde{K} = \mathbb{T}^m \times K \subset \mathbb{R}^{2m+n}$. Escrevemos as variáveis de $\mathbb{R}^{2m}$ como $(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ e coordenadas polares (r_j, θ_j) em cada plano $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$. Temos as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} = \cos \theta_j \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{1}{r_j} \sin \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial}{\partial y_j} = \sin \theta_j \frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{1}{r_j} \cos \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \end{cases}.$$

Seja $i \in \mathbb{N}$ um inteiro positivo. Então, para todo par (k_1, k_2) de inteiros não-negativos com $k_1 + k_2 \leq i$, existem funções suaves $g_{i,k_1,k_2}, h_{i,k_1,k_2}$ das variáveis (r_j, θ_j) tais que

$$\frac{\partial^i}{\partial x_j^i} = \sum_{0 \leq k_1 + k_2 \leq i} g_{(i,k_1,k_2)}(\theta_j, r_j) \frac{\partial^{k_1}}{\partial r_j^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial \theta_j^{k_2}},$$

e

$$\frac{\partial^i}{\partial y_j^i} = \sum_{0 \leq k_1 + k_2 \leq i} h_{(i, k_1, k_2)}(\theta_j, r_j) \frac{\partial^{k_1}}{\partial r_j^{k_1}} \frac{\partial^{k_2}}{\partial \theta_j^{k_2}}.$$

Definimos então os operadores diferenciais lineares P_i, Q_i que agem em funções definidas em $\theta_j \in \mathbb{T}$ por

$$\begin{cases} P_i(\theta_j) = \sum_{0 \leq k_2 \leq i} g_{i,0,k_2}(\theta_j, 1) \frac{\partial^{k_2}}{\partial \theta_j^{k_2}} \\ Q_i(\theta_j) = \sum_{0 \leq k_2 \leq i} h_{i,0,k_2}(\theta_j, 1) \frac{\partial^{k_2}}{\partial \theta_j^{k_2}} \end{cases}.$$

(ou seja, eliminamos os termos em que havia alguma derivada em r_j e depois fizemos $r_j = 1$).

Dado um multi-índice $(\gamma, \alpha) \in \mathbb{Z}_+^{2m} \times \mathbb{Z}_+^n$ em $\mathbb{R}^{2m+n}$, definimos para $x \in K$ e $(x_j, y_j) \in S^1$

$$f_{(\gamma, \alpha)}(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m, x) = (P_{\gamma_1}(t_1) Q_{\gamma_2}(t_1) \dots P_{\gamma_{2m-1}}(t_m) Q_{\gamma_{2m}}(t_m) f_\alpha)(\theta_1(x_1, y_1), \dots, \theta_m(x_m, y_m), x).$$

É simples verificar que esta função satisfaz as hipóteses do teorema 2.8.6, e podemos obter uma função $v \in C^\infty(\mathbb{R}^{2m+n})$ que estende $f_{(0,0)}$. Definindo $F = v|_{\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n}$, segue o resultado. $\square$

Um corolário deste resultado é o teorema de Borel.

Teorema 2.8.10 (Borel). Seja $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ uma sequência de funções $u_\alpha : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Então, existe uma função $u : \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que

$$\partial_x^\alpha u(t, 0) = u_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{T}^m, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema 2.8.9 com $K = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. $\square$

2.9 Distribuições periódicas e séries de Fourier

Começamos esta seção tentando determinar a transformada de Fourier de uma soma de medidas de Dirac em pontos de um subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.9.1. Considere a distribuição

$$u_a = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \delta_{a\gamma} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então, $\hat{u}_a = (2\pi/a)^n u_{2\pi/a}$.

Observação 2.9.2. Note que, dada uma função $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se escrevermos

$$\rho_{\alpha, \beta}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)|$$

para as seminormas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$|u_a(\phi)| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} |\phi(a\gamma)| \leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} C \frac{\rho_{0,(2,2,\dots,2)}(\phi)}{|a\gamma_1 \dots \gamma_n|^2} \leq C \rho_{0,(2,\dots,2)}(\phi),$$

ou seja, u_a é temperada.

Demonstração. Se $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, temos $u_a(\phi(\cdot - a\gamma)) = u_a(\phi)$ para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donde $\delta_{a\gamma} * u_a = u_a$. Assim, aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$\widehat{\delta_{a\gamma} * u_a} = \widehat{u_a} \implies e^{-i\langle a\gamma, \cdot \rangle} \widehat{u_a} = \widehat{u_a} \implies (e^{i\langle a\gamma, \cdot \rangle} - 1) \widehat{u_a} = 0 \text{ para todo } \gamma \in \mathbb{Z}^n$$

Daqui, concluímos que $\text{supp } \widehat{u_a} \subset (2\pi/a)\mathbb{Z}^n$. Observe que para cada $1 \leq j \leq n$, temos

$$(e^{iax_j} - 1) \widehat{u_a} - (e^{-iax_j} - 1) \widehat{u_a} = 0 \implies \sin(ax_j) \widehat{u_a} = 0.$$

Se introduzirmos a mudança de coordenadas (numa vizinhança da origem) $y_j = \sin(ax_j)$, vamos concluir que $\widehat{u_a}$ deve ser um múltiplo de δ_0 numa vizinhança do zero (pois lá, satisfaz $y_j \widehat{u_a} = 0$). Transladando para cada ponto de $(2\pi/a)\mathbb{Z}^n$, vemos que $\widehat{u_a}$ deverá ser uma delta de dirac com mesmo peso em cada um destes pontos (o peso será o valor da restrição de $\widehat{u_a}$ a uma vizinhança do ponto, calculada na função 1), o que implica que

$$\widehat{u_a} = c_a u_{2\pi/a}.$$

Para determinar c_a , observe que esta identidade significa explicitamente que, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$c_a \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \phi(2\gamma\pi/a) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\phi}(a\gamma)$$

Se aplicarmos a identidade para $\psi(\cdot) = \phi(\cdot + x)$, obtemos

$$c_a \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \phi\left(\frac{2\pi\gamma}{a} + x\right) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle x, a\gamma \rangle} \widehat{\phi}(a\gamma)$$

Integramos os dois lados no cubo $[0, 2\pi/a]^n$. Note que

$$\int_{[0, 2\pi/a]^n} e^{i\langle x, a\gamma \rangle} dx = \prod_{j=1}^n \int_0^{2\pi/a} e^{ia\gamma_j x_j} dx_j = 0$$

se algum $\gamma_j \neq 0$. Assim, resta apenas o termo $\gamma = 0$ do lado direito. No lado esquerdo obtemos $c_a \int \phi$. Assim,

$$c_a \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \widehat{\phi}(0) (2\pi/a)^n \implies c_a = (2\pi/a)^n.$$

□

Observação 2.9.3. Registramos que nesta demonstração obtemos, para $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a identidade (para $a \neq 0$)

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\phi}(a\gamma) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^n \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \phi\left(\frac{2\pi\gamma}{a}\right), \quad (2.9.1)$$

conhecida como *fórmula da soma de Poisson*.

Vamos considerar agora distribuições u que são periódicas com período 2π em cada variável. Isto significa que

$$u(x - 2\pi\gamma) = u(x), \quad \gamma \in \mathbb{Z}^n.$$

Distribuições com esta propriedade (que chamamos de 2π -periódicas) são automaticamente temperadas. De fato, escolha $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \phi(x - 2\pi\gamma) = 1.$$

Dada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle u, \psi \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \psi \cdot \phi(\cdot - 2\pi\gamma) \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \psi(\cdot + 2\pi\gamma) \cdot \phi \rangle. \quad (2.9.2)$$

Considere a seguinte aplicação, definida para $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ fixado:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \psi &\longmapsto \phi \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \psi(\cdot + 2\pi\gamma). \end{aligned}$$

Usando as semi-normas de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dadas por

$$\|f\|_\theta = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\theta_\alpha(x) \partial^\alpha f(x)|,$$

onde $(\theta_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ é uma família localmente finita de funções contínuas em $\mathbb{R}^n$, concluímos que esta aplicação é contínua. Composto com u , segue que a distribuição u é temperada.

Vamos calcular a transformada de Fourier de u . Dada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, aplicamos a fórmula da soma de Poisson (com $a = 2\pi$) à função $\psi(\cdot) e^{-i\langle x, \cdot \rangle} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (para $x \in \mathbb{R}^n$ fixo). Note que $(\psi(\cdot) e^{-i\langle x, \cdot \rangle})^\wedge(\xi) = \widehat{\psi}(\xi + x)$. Obtemos então

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\psi}(x + 2\pi\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \psi(\gamma) e^{-i\langle x, \gamma \rangle}.$$

Multiplicamos ambos os lados por ϕ (como definida acima) e aplicamos a expressão (2.9.2), obtendo

$$\langle \widehat{u}, \psi \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \phi(x) \psi(\gamma) e^{-i\langle x, \gamma \rangle} \rangle = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} c_\gamma \psi(\gamma), \quad (2.9.3)$$

sendo $c_\gamma = \langle u, \phi \cdot e^{-i\langle \cdot, \gamma \rangle} \rangle$. Note que se u for uma função contínua, vale que

$$\begin{aligned} c_\gamma &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \phi(x) e^{-i\langle x, \gamma \rangle} dx = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0, 2\pi)^n} u(x - 2\pi\gamma) \phi(x - 2\pi\gamma) e^{-i\langle x, \gamma \rangle} dx \\ &= \int_{[0, 2\pi)^n} u(x) e^{-i\langle x, \gamma \rangle} dx, \end{aligned}$$

onde usamos a periodicidade da u e o fato de $\sum \phi(x - 2\pi\gamma) = 1$. Aplicando a fórmula de inversão de Fourier, obtemos:

$$u = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} c_\gamma e^{i\langle \cdot, \gamma \rangle}, \quad (2.9.4)$$

com convergência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Segue então que uma distribuição 2π -periódica pode ser vista como definida no toro $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$. Reunimos os resultados obtidos nesta discussão na seguinte proposição:

Proposição 2.9.4. Seja $u \in \mathcal{D}'_{\text{per}}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); u \text{ } 2\pi\text{-periódica}\}$. Valem as seguintes propriedades:

1. $\hat{u} = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} c_g \delta_g$.
2. $c_\gamma = \langle u, e^{-i\langle \cdot, \gamma \rangle} \rangle_{\mathbb{T}^n}$.
3. $c_\gamma = (u \cdot \phi)^\wedge(\gamma) = O_k(|\gamma|^k)$ se $u \in \mathcal{D}'^k(\mathbb{R}^n)$.
4. $c_\gamma = O_k(|\gamma|^{-k})$ se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ (neste caso, a série (2.9.4) é uniformemente convergente, desde que $k > n$). Vale a recíproca deste resultado.

Observação 2.9.5. Definimos $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ como o dual (com a topologia fraca*) de $C^\infty(\mathbb{T}^n) \simeq C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ (onde colocamos a topologia natural que faz deste espaço um espaço de Fréchet). Este espaço é topologicamente isomorfo ao dual de $C^\infty_{\text{per}}(\mathbb{R}^n)$ com a topologia induzida de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A CLASSE DE CAMPOS A SER ESTUDADA

Denotamos por $\mathbb{T}^m$ o toro $\mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m$ e por $B(r)$ a bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro 0 e raio r . Seja $\mathbb{T}_0^m = \mathbb{T}^m \times \{0\} \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$. Dados $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, com $\omega_k \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, m$ e $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, considere os campos X, Y definidos numa vizinhança aberta de $\mathbb{T}_0^m$ por

$$X = \sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(t, x)) \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (3.0.1)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j + f_j(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (3.0.2)$$

onde $g_k, f_j \in C^a(\mathbb{T}^m \times B(r); \mathbb{R})$ para algum $r > 0$ e $a = \infty$ (real-analítica) ou $a = \infty$ (suave). Suponha que $g_k(t, x) = O(|x|)$ e $f_j(t, x) = O(|x|^2)$. O objetivo é estudar as equações

$$(X + Y)u = F \quad (\text{caso real}) \quad (3.0.3)$$

$$(X + iY)u = F \quad (\text{caso complexo}), \quad (3.0.4)$$

onde F é uma função C^a numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$. Vejamos condições necessárias para que cada uma destas equações admita solução.

Lema 3.0.1. Seja $F \in C^a(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{C})$ e suponha que exista $u \in C^a(\mathbb{T} \times B(r), \mathbb{C})$ tal que $(X + Y)u = F$ ou $(X + iY)u = F$. Então,

$$\int_{\mathbb{T}_0^m} F(t, 0) dt = 0.$$

Demonstração. Basta observar que como $(Yu)(t, 0) = 0$, temos

$$\int_{\mathbb{T}_0^m} F(t, 0) dt = \int_{\mathbb{T}_0^m} (Xu)(t, 0) dt = \sum_{k=1}^m \omega_k \int_{\mathbb{T}_0^m} \frac{\partial u}{\partial t_k}(t, 0) dt = 0$$

pelo teorema fundamental do cálculo. □

Nosso objetivo é estudar a resolubilidade semiglobal das equações (3.0.3) e (3.0.4), ou seja, a resolubilidade em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ (conforme descrito na introdução). Primeiro, no entanto, fazemos alguns comentários sobre a resolubilidade *local*. Para a equação $(X + Y)u = F$, como $X + Y$ é um campo vetorial real e não-singular (se a vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ for pequena), a equação sempre tem solução em alguma vizinhança de qualquer $(t, 0) \in \mathbb{T}_0^m$ pelo teorema do fluxo tubular (teorema 2.4.10). Já o caso complexo é mais complicado, e a resolubilidade local é caracterizada pela condição **(P)** de Nirenberg-Treves, que descrevemos agora.

3.1 A condição (P)

Seja P um operador diferencial linear de ordem m definido numa vizinhança $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

onde $D_j = -i\partial_j$. O seu *símbolo principal* é

$$p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Assumimos que P é de *tipo principal*, ou seja, que as raízes reais não-nulas de $p_m(x, \cdot)$ são simples (isto é equivalente a dizer que o gradiente $\nabla_\xi p_m(x, \xi)$ nunca se anula em $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). As *curvas bicaracterísticas* da função $\operatorname{Re} p_m$ são as soluções $s \mapsto (x, \xi)$ em $\Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ das equações de Hamilton-Jacobi

$$\frac{dx}{ds} = \nabla_\xi (\operatorname{Re} p_m), \quad \frac{d\xi}{ds} = -\nabla_x (\operatorname{Re} p_m).$$

Ao longo de qualquer curva bicaracterística de $\operatorname{Re} p_m$, $\operatorname{Re} p_m$ é constante. As bicaracterísticas nas quais $\operatorname{Re} p_m$ é zero são as bicaracterísticas *nulas*. Enunciamos então a condição **(P)**¹:

(P): A função $\operatorname{Im} p_m$ não muda de sinal ao longo de qualquer bicaracterística nula de $\operatorname{Re} p_m$.

No caso de um operador diferencial parcial linear $P : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$, onde M é uma variedade C^∞ , o símbolo principal se define invariantemente como uma função no fibrado cotangente T^*M , e a condição **(P)** pode ser formulada analogamente.

Vamos apresentar agora uma versão de **(P)** que será mais simples para nossos propósitos.

¹ Na formulação original da condição **(P)**, o que enunciamos deveria ser válido não apenas para p_m , mas para qp_m , onde $q \in C^\infty(T^*\Omega \setminus 0)$ é uma função a valores complexos não-nula e positivamente homogênea (ou seja, existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $q(x, t\xi) = t^\alpha q(x, \xi)$ para $t > 0$ e $(x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0$). Entretanto, no lema 26.4.10 de (HÖRMANDER, 1994), é provado que esta condição é equivalente à que enunciamos.

Lema 3.1.1. Seja L um campo de vetores numa vizinhança $\mathbb{T}^m \times B(r) \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{T}_0^m$ dado por

$$L = \sum_{k=1}^m a_k(t) \frac{\partial}{\partial t_k} + i \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Suponha que as funções a_k e b_j tomem valores reais e que $\sum_{k=1}^m |a_k| > 0$ em $\mathbb{T}^m$. Então L satisfaz a condição **(P)**.

Demonstração. O símbolo principal de $-iL$ é dado por

$$p(t, x, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \tau_k + i \sum_{j=1}^n b_j(x) \xi_j, \quad (t, x, \tau, \xi) \in \mathbb{T}^m \times B(r) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n.$$

As bicaracterísticas de $\text{Re } p$ são as curvas $\mathbb{R} \supset I \ni s \mapsto (x_1(s), x_2(s), \xi_1(s), \xi_2(s)) \in (\mathbb{T}^m \times B(r)) \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ que satisfazem

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds}(s) = (a_1(x_1(s)), \dots, a_m(x_1(s))) \\ \frac{dx_2}{ds}(s) = 0 \\ \frac{d\xi_1}{ds}(s) = - \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial a_k(x_1(s))}{\partial t_1} \xi_k(s), \dots, \sum_{k=1}^m \frac{\partial a_k(x_1(s))}{\partial t_m} \xi_k(s) \right) \\ \frac{d\xi_2}{ds}(s) = 0 \end{cases}.$$

As soluções, então, são da forma $s \mapsto (x_1(s), c, \xi_1(s), d)$, onde $c, d \in \mathbb{R}^n$ são constantes. Se calcularmos a parte imaginária de p ao longo desta curva, obtemos

$$\text{Im } p(x_1(s), c, \xi_1(s), d) = \sum_{j=1}^n b_j(c) d_j.$$

Concluimos então que $\text{Im } p$ é constante ao longo de todas as bicaracterísticas de $\text{Re } p$, e em particular, não muda de sinal nas bicaracterísticas nulas de $\text{Re } p$. Segue então que $-iL$ satisfaz a condição **(P)**, e portanto, L também a satisfaz. $\square$

3.2 Uma classe de campos vetoriais não resolúvel

Seja $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$ com $\omega_k \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, m$, e seja $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$. Considere o campo de vetores $N_{\omega, a}$ definido em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por

$$N_{\omega, a} = \sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + i \sum_{j=1}^n a_j \left(y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Teorema 3.2.1. O campo de vetores $N_{\omega,a}$ tem as seguintes propriedades:

- 1) $N_{\omega,a}$ é localmente resolúvel em cada ponto $(t, 0) \in \mathbb{T}_0^m$.
- 2) Existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n})$ que se anula em $\mathbb{T}_0^m$ e tal que a equação $N_{\omega,a}u = f$ não tem solução $u \in C^\infty(V)$ em nenhuma vizinhança $V \subset \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{2n}$ de $\mathbb{T}_0^m$.
- 3) Existe $r > 0$ tal que a imagem do operador

$$N_{\omega,a} : C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r) \times B(r)) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r) \times B(r))$$

tem codimensão infinita.

Demonstração. Para o primeiro item, observe que o campo está no formato da discussão anterior, e portanto satisfaz a condição **(P)** (já que a parte real é constante e nunca se anula, e a parte imaginária independe das variáveis do toro). Assim, $N_{\omega,a}$ é localmente resolúvel.

Para o segundo item, apliquemos coordenadas polares à parte imaginária do campo. Se colocarmos (ρ_j, θ_j) coordenadas polares no plano (x_j, y_j) (sem a origem), o campo se torna

$$\text{Im} N_{\omega,a} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial \theta_j},$$

em $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^{2n})$ uma função *real* que não dependa das variáveis $t_1, \dots, t_m$, e que dependa apenas dos raios $\rho_1, \dots, \rho_n$, i.e., $f = f(\rho_1, \dots, \rho_n)$, com $f(0) = 0$. Se existisse solução $C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r) \times B(r))$ para a equação $N_{\omega,a}u = f$, poderíamos escrever u em série parcial de Fourier, da forma

$$u = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} u_\gamma(x, y) e^{i\langle t, \gamma \rangle},$$

onde $u_\gamma \in C^\infty(B(r) \times B(r))$, com $u_\gamma(x, y) = \langle u(\cdot, x, y), e^{-i\langle t, \gamma \rangle} \rangle_{\mathbb{T}^m}$. Aplicando o operador a u , obtemos

$$\begin{aligned} N_{\omega,a}u &= \sum_{k=1}^m i \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} u_\gamma \gamma_k e^{i\langle t, \gamma \rangle} + i \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} e^{i\langle t, \gamma \rangle} \text{Im} N_{\omega,a} u_\gamma \\ &= i \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^m} \left(\text{Im} N_{\omega,a} u_\gamma + \sum_{k=1}^m \gamma_k u_\gamma \right) e^{i\langle t, \gamma \rangle} = f. \end{aligned}$$

Observe que os coeficientes desta soma não dependem de t . Se, para algum $\gamma \neq 0$, este coeficiente fosse não nulo, a função resultante dependeria de t . Assim, o único coeficiente não nulo desta soma deve ser $\gamma = 0$, o que implica que existe solução $u \in C^\infty(B(r) \times B(r))$ para a equação

$$\text{Im} N_{\omega,a}u = f.$$

Em particular, existiria $u \in C^\infty(B(r) \times B(r) \setminus \{0, 0\})$ tal que

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u}{\partial \theta_j} = f$$

em $(x, y) \in B(r) \times B(r) \setminus \{0, 0\}$. Podemos pensar em u como definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ (usando as coordenadas (ρ_j, θ_j)) e expandir u em série de Fourier parcial). Obtemos então

$$u = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} u_{\gamma}(\rho_1, \dots, \rho_n) e^{i\langle \gamma, \theta \rangle}.$$

Aplicando o operador, obtemos

$$i \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \left(\sum_{j=1}^n a_j \gamma_j u_{\gamma} \right) e^{i\langle \gamma, \theta \rangle} = f$$

Novamente, como o lado direito independe de θ , os coeficientes para $\gamma \neq 0$ são nulos, e o coeficiente $\gamma = 0$ é claramente nulo também. Assim, esta equação não admite solução a não ser que $f \equiv 0$. Isto prova o segundo item. Como f é uma função C^∞ qualquer das coordenadas $(\rho_1, \dots, \rho_n)$, podemos escolher uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ não-nulas e com suportes disjuntos. Estas funções são linearmente independentes e não estão na imagem do operador $N_{\omega, a}$, e portanto, este não pode ter codimensão finita. O item 3 está provado. $\square$

3.3 Um estudo das condições diofantinas $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ e $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$

Dado um par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, com $\omega_k, \lambda_j \neq 0$, introduzimos as seguintes condições diofantinas:

$(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$: Existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$|i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle - \varepsilon \lambda_j| \geq \frac{C}{(|K| + |J|)^\mu}$$

para todo $K \in \mathbb{Z}^m, J \in \mathbb{N}^n, j = 1, \dots, n, \varepsilon \in \{0, 1\}$ e $|K| + |J| > 0$.

$(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$: Existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$|\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle| \geq \frac{C}{(|K| + |J|)^\mu}$$

para todo $K \in \mathbb{Z}^m, J \in \mathbb{N}^n$ tais que $|K| + |J| > 0$.

Vamos apresentar exemplos de pares (ω, λ) que satisfazem estas condições. Relembremos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é *algébrico* sobre $\mathbb{Q}$ se existe um polinômio $p \in \mathbb{Z}[x]$ não-nulo de coeficientes inteiros tal que $p(\alpha) = 0$. Denotamos o conjunto dos números algébricos sobre $\mathbb{Q}$ por $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. A *altura* de um número algébrico $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ é o máximo dos valores absolutos dos coeficientes

relativamente primos do polinômio minimal de α (o polinômio p mônico com menor grau que tal que $p(\alpha) = 0$). Denotamos por

$$L = \{\lambda \in \mathbb{R}; e^\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}\}$$

o conjunto dos números que são logaritmos de números algébricos. Temos o seguinte teorema de Baker (BAKER, 1990):

Teorema 3.3.1 (Baker). Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L$ elementos que sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então, para quaisquer números algébricos $\beta_1, \dots, \beta_n$ não todos nulos, temos

$$|\beta_1 \lambda_1 + \dots + \beta_n \lambda_n| > H^{-C},$$

onde H é o máximo das alturas dos β_i , $1 \leq i \leq n$, e C é uma constante que depende de n , dos λ_j e do máximo dos graus de β_i .

Suponha, então, que $\omega \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$ sejam tais que $\omega_i, \lambda_j \in L$, com $\omega_1, \dots, \omega_m$ $\mathbb{Q}$ -linearmente independentes. Então, dados $K \in \mathbb{Z}^m$ e $J \in \mathbb{N}^n$, com $\varepsilon \in \{0, 1\}$, temos pelo teorema de Baker,

$$\begin{aligned} |i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle - \varepsilon \lambda_j| &= \left((\omega_1 K_1 + \dots + \omega_m K_m)^2 + (\lambda_1 J_1 + \dots + \lambda_j (J_j - \varepsilon) + \dots + \lambda_n J_n)^2 \right)^{1/2} \\ &\geq |\omega_1 K_1 + \dots + \omega_n K_n| \\ &> \frac{1}{\max |K_i|^C} \\ &\geq \frac{1}{|K|^C} \geq \frac{1}{(|K| + |J|)^C}. \end{aligned}$$

Observe que se os λ_i fossem $\mathbb{Q}$ -linearmente independentes, poderíamos provar uma estimativa análoga. Concluimos então a seguinte proposição.

Proposição 3.3.2. Sejam $\omega \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$ tais que uma das alternativas é válida:

1. $(\omega_1, \dots, \omega_m) \in L^m$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.
2. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in L^n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Então, o par (ω, λ) satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$.

No caso da condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, segue imediatamente do teorema 3.3.1 o seguinte resultado:

Proposição 3.3.3. Seja $(\omega, \lambda) \in L^{m+n}$ em que as coordenadas são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$.

NORMALIZAÇÃO

4.1 Forma normal - O caso real

Dados $\omega \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$, com $\omega_k \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, m$ e $\lambda_j \neq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$, considere os campos vetoriais reais X, Y definidos numa vizinhança aberta de $\mathbb{T}_0^m$ por

$$X = \sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(t, x)) \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad (4.1.1)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j + f_j(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (4.1.2)$$

onde $g_k, f_j \in C^a(\mathbb{T}^m \times B(r); \mathbb{R})$ para algum $r > 0$ e $a = \infty$ (real-analítica) ou $a = \infty$ (suave). Suponha que $g_k(t, x) = O(|x|)$ e $f_j(t, x) = O(|x|^2)$.

Mostraremos que, se o par (ω, λ) satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$, então o campo real $X + Y$ pode ser transformado num campo modelo $M_{\omega, \lambda}$ por um difeomorfismo C^∞ .

Teorema 4.1.1. Suponha que o par (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ e que as funções g_k, f_j sejam de classe C^∞ . Então, existe um difeomorfismo

$$\Phi(t, x) = (x + \phi(t, x), t + \psi(t, x))$$

de classe C^∞ definido numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ e cuja imagem é outra vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$, com $\phi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$ e tal que

$$\Phi_*(X + Y) = M_{\omega, \lambda},$$

onde

$$M_{\omega, \lambda} = \omega \partial_t + \Lambda x \partial_x = \sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Observação 4.1.2. Escrevemos $\partial_t = (\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_m})$, $\partial_x = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ e $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz que possui o vetor λ em sua diagonal e zero nas outras entradas. Além disso, dado um campo de

vetores $X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ e um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$, denotamos por $f_*(X_1)$ o *pushforward* do campo X_1 por f , definido por $f_*(X)(q) := (df)_{f^{-1}(q)}X_{f^{-1}(q)}$.

O primeiro passo para a construção de Φ é a determinação de um difeomorfismo *formal*. Para isto, introduzimos algumas notações:

Dada uma função $\alpha(\theta, y) \in C^\infty(\mathbb{T} \times B(r), \mathbb{R}^p)$, associamos a sua série de Taylor (formal) em $x = 0$:

$$\hat{\alpha}(\theta, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n, |J|=k} \frac{1}{J!} \frac{\partial^k \alpha}{\partial y^J}(\theta, 0) y^J.$$

(observe que $\hat{\alpha}(\theta, y)$ possui p coordenadas). Denotamos as expansões formais dos campos X e Y da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= (\omega + \hat{g}(\theta, y)) \partial_\theta = \left(\omega + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n, |J|=k} \frac{1}{J!} \frac{\partial^k g}{\partial y^J}(\theta, 0) y^J \right) \partial_\theta \\ \hat{Y} &= (\Lambda y + \hat{f}(\theta, y)) \partial_y = \left(\Lambda y + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n, |J|=k} \frac{1}{J!} \frac{\partial^k f}{\partial y^J}(\theta, 0) y^J \right) \partial_y \end{aligned}$$

(note que as séries iniciam em $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente, pois $g(t, x) = O(|x|)$ e $f(t, x) = O(|x|^2)$). Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, denotamos por $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^s)$ o espaço dos polinômios homogêneos em x de grau k com coeficientes em $C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^s)$:

$$\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^s) = \left\{ p(\theta, y) = \sum_{J \in \mathbb{Z}_+^n, |J|=k} p_J(\theta) y^J; p_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^s) \right\}$$

A seguinte proposição (que provaremos na próxima seção) estabelece a normalização formal de $\hat{X} + \hat{Y}$:

Proposição 4.1.3. Suponha que (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, existem funções $\phi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m)$, $\psi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$, com $\psi_1 = 0$, tais que a série formal em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por

$$\hat{\Phi}(\theta, y) = \left(\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\theta, y), y + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(\theta, y) \right)$$

é um difeomorfismo formal ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ que transforma $M_{\omega, \lambda}$ em $\hat{X} + \hat{Y}$.

Observação 4.1.4. Por difeomorfismo formal, queremos dizer que, para todo ponto $(\theta, 0) \in \mathbb{T}_0^m$, vale que $(d\hat{\Phi})_{(\theta, 0)}$ é invertível. Isto segue simplesmente calculando $d\Phi$ neste ponto, e observando que a matriz obtida é da forma

$$(d\hat{\Phi})_{(\theta, 0)} = \left(\begin{array}{c|c} I_{m \times m} & * \\ \hline 0_{n \times m} & I_{n \times n} \end{array} \right),$$

que é claramente invertível.

Definição 4.1.5. Uma função suave $\alpha(t, x) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^s)$ definida numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ é dita *flat* ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ se

$$\frac{\partial^{|J|+|L|}}{\partial x^J \partial t^L} \alpha(t, 0) = 0,$$

para todo $J \in \mathbb{Z}_+^n$, $L \in \mathbb{Z}_+^m$. Similarmente, dizemos que um campo $W = A(t, x)\partial_t + B(t, x)\partial_x$ é flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ se suas componentes forem flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$.

O seguinte lema permite passar da normalização formal para normalização a menos de campos flat.

Lema 4.1.6. Existe um difeomorfismo $C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$

$$\Psi(t, x) = (t + \alpha(t, x), x + \beta(t, x))$$

definido numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$, com $\alpha = O(|x|)$ e $\beta = O(|x|^2)$ tal que

$$\Psi_*(X + Y) = M_{\omega, \lambda} + W, \quad (4.1.3)$$

onde W é um campo flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$.

Demonstração. Pela proposição 4.1.3, temos um difeomorfismo formal $\widehat{\Phi}(\theta, y)$ que é dado por

$$\widehat{\Phi}(\theta, y) = \left(\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\theta, y), y + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(\theta, y) \right),$$

com

$$\phi_k(\theta, y) = \sum_{|J|=k} \phi_J(\theta) y^J, \quad \psi_k(\theta, y) = \sum_{|J|=k} \psi_J(\theta) y^J,$$

sendo $\psi_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^m)$ e $\psi_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^n)$. Pelo teorema de Borel (teorema 2.8.10), podemos encontrar funções $\phi(\theta, y) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $\psi(\theta, y) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tais que

$$\frac{1}{J!} \frac{\partial^{|J|}}{\partial y^J} \phi(\theta, 0) = \phi_J(\theta) \text{ e } \frac{1}{J!} \frac{\partial^{|J|}}{\partial y^J} \psi(\theta, 0) = \psi_J(\theta),$$

para cada $J \in \mathbb{Z}_+^n$. Definimos então

$$\Phi(\theta, y) = (\theta + \phi(\theta, y), y + \psi(\theta, y)).$$

Como a aplicação $\Phi(\theta, y)$ é um difeomorfismo local em todo ponto de $\mathbb{T}_0^m$ e é injetiva em $\mathbb{T}_0^m$, então é um difeomorfismo numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$. Aplicando Φ_* ao campo $M_{\omega, \lambda}$, obtemos

$$\Phi_* M_{\omega, \lambda} = X + Y + \widetilde{W},$$

sendo $\widetilde{W}$ flat em $\mathbb{T}_0^m$ (pois $\Phi_* M_{\omega, \lambda}$ e $X + Y$, como funções, têm séries de Taylor idênticas em $\mathbb{T}_0^m$). Considerando o difeomorfismo $\Psi = \Phi^{-1}$, obtemos o resultado. $\square$

Assim, a demonstração do teorema 4.1.1 fica reduzida a remover o campo flat W que aparece na equação (4.1.3). Isto é, precisamos encontrar um difeomorfismo Φ que satisfaça

$$\Phi_*(M_{\omega,\lambda} + W) = M_{\omega,\lambda}. \quad (4.1.4)$$

Vamos encontrar um difeomorfismo Φ que coincida (com ordem infinita) com a identidade em $\mathbb{T}_0^m$, da forma

$$\Phi(t, x) = (t + \phi(t, x), x + \psi(t, x)),$$

onde ϕ, ψ se anulam de ordem infinita quando $x = 0$. Para isto, usaremos uma versão periódica do "método da homotopia".

Proposição 4.1.7. Para $\sigma \in [0, 1]$, considere a seguinte família de campos vetoriais:

$$M_{\omega,\lambda}^\sigma = M_{\omega,\lambda} + \sigma W,$$

sendo W um campo flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$. Então, a equação (homológica)

$$[M_{\omega,\lambda}^\sigma, Z^\sigma] = W \quad (4.1.5)$$

tem solução Z^σ para cada $\sigma \in [0, 1]$, sendo o campo suave Z^σ flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$. Mas ainda, a aplicação

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \times [0, 1] &\rightarrow T(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) \\ ((t, x), \sigma) &\mapsto Z^\sigma(t, x) \end{aligned}$$

é suave.

Demonstraremos esta proposição na seção 4.3 deste capítulo. Mostremos agora como demonstrar o teorema 4.1.1 usando este resultado. Seja $Z^\sigma(t, x)$ o campo, solução da equação (4.1.5). Observe que podemos encontrar uma aplicação suave

$$\Psi : \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$$

que satisfaça a seguinte equação para todo ponto (t, x, σ) (consideramos o campo Z^σ como uma aplicação):

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{d\sigma}(t, x, \sigma) = Z^\sigma(\Psi(t, x, \sigma)), \\ \Psi(t, x, 0) = (t, x). \end{cases} \quad (4.1.6)$$

De fato, escrevendo o campo Z^σ em coordenadas, temos

$$Z^\sigma(t, x) = \sum_{i=1}^m a_i(t, x, \sigma) \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^n b_j(t, x, \sigma) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_i, b_j \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1])$. Considere a aplicação quociente $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$. Analisemos o seguinte sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_i(\xi, x, \sigma) = a_i((\pi \circ \Phi_1), \dots, (\pi \circ \Phi_m), \Phi_{m+1}, \dots, \Phi_{m+n}, \sigma), & 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi_{(m+j)}(\xi, x, \sigma) = b_j((\pi \circ \Phi_1), \dots, (\pi \circ \Phi_m), \Phi_{m+1}, \dots, \Phi_{m+n}, \sigma), & 1 \leq j \leq n \\ \Phi(\xi, x, 0) = (\xi, x), \end{cases} \quad (4.1.7)$$

sendo $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Aplicando as proposições 2.1.6 e 2.1.10 do capítulo 2, obtemos uma solução $\Phi(\xi, x, \sigma)$ (aqui o tempo t é σ , e o parâmetro y é o par (ξ, x)) de classe C^∞ para o sistema (4.1.7), definida para todo $\sigma \in [0, 1]$. Observe que, usando a unicidade para soluções do sistema (4.1.7), se tomarmos $r \in 2\pi\mathbb{Z}^m$, obtemos

$$\Phi(\xi + r, x, \sigma) = \Phi(\xi, x, \sigma) + (r, 0).$$

Assim, a aplicação $(\pi(\Phi_1(\xi, x, \sigma)), \dots, \pi(\Phi_m(\xi, x, \sigma)), \Phi_{m+1}(\xi, x, \sigma), \dots, \Phi_{m+n}(\xi, x, \sigma))$ define uma aplicação C^∞ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$ com valores em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, que é a aplicação Ψ que estamos procurando.

Observe que se considerarmos o sistema (4.1.7) com $x = 0$, então como as funções a_i e b_j são flat em $\mathbb{T}_0^m$, a função $(\xi, 0)$ também satisfaz (4.1.7) para todo σ . Novamente, usando a unicidade, podemos concluir que $\Psi(t, 0, \sigma) = (t, 0)$ para todo $\sigma \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{T}^m$. Mais ainda, temos o seguinte

Lema 4.1.8. A função $\Psi(t, x, \sigma)$, solução de (4.1.6), é da forma

$$\Phi(t, x, \sigma) = (t + \phi(t, x, \sigma), x + \psi(t, x, \sigma)) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \quad (4.1.8)$$

para todo $(t, x, \sigma) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$, sendo ϕ e ψ funções flat em $\mathbb{T}_0^m$.

Demonstração. Seja $\tilde{\Psi}(t, x, \sigma) = \Psi(t, x, \sigma) - (t, x)$. Então, a função $\tilde{\Psi}$ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\Psi}}{d\sigma}(t, x, \sigma) = Z^\sigma(\tilde{\Psi}(t, x, \sigma) + (t, x)) \\ \tilde{\Psi}(t, x, 0) = 0. \end{cases} \quad (4.1.9)$$

Dada uma derivada $\partial^{\alpha, \beta} = \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial t^\alpha \partial x^\beta}$, se a aplicarmos na equação (4.1.9) e calcularmos em $x = 0$, segue da regra da cadeia, do fato de $\Psi(t, 0, \sigma) = (t, 0)$ e de Z^σ ser flat em $\mathbb{T}_0^m$ que $\partial^{\alpha, \beta} \tilde{\Psi}(t, 0, \sigma) = 0$ para todo α, β . A demonstração do lema está completa. $\square$

Voltamos agora à prova do teorema 4.1.1. Vamos mostrar a identidade (4.1.4). Explicitamente, queremos provar que

$$(D_{(t,x)} \Psi) M_{w,\lambda} = M_{w,\lambda}^\sigma(\Psi). \quad (4.1.10)$$

Provar (4.1.10) é equivalente a provar a equação em que derivamos ambos os lados em σ :

$$D_{(t,x)} \left(\frac{d\Psi}{d\sigma} \right) M_{w,\lambda}(t,x) = W(\Psi) + D_{(t,x)} (M_{w,\lambda} + \sigma W) \frac{d\Psi}{d\sigma}. \quad (4.1.11)$$

Da equação (4.1.6), temos

$$D_{(t,x)} \left(\frac{d\Psi}{d\sigma} \right) = D_{(t,x)} Z^\sigma(\Psi) = (D_{(t,x)} Z^\sigma)(\Psi) D_{(t,x)} \Psi. \quad (4.1.12)$$

Já a expressão (4.1.5) diz que (no ponto $\Psi(t,x,\sigma)$)

$$(D_{(t,x)} Z^\sigma)(\Psi) D_{(t,x)} \Psi M_{w,\lambda}^\sigma(\Psi) - (D_{(t,x)} M_{w,\lambda}^\sigma)(\Psi) Z^\sigma(\Psi) = W(\Psi).$$

Aplicando $M_{w,\lambda}$ à direita na equação (4.1.12) e substituindo na expressão acima, obtemos (4.1.11), o que conclui a demonstração do teorema 4.1.1.

4.2 Normalização formal - caso real

Apresentamos nesta seção a demonstração da proposição 4.1.3. Considere o espaço das séries formais

$$\hat{\alpha}(\theta, y) = \sum_{k \geq 0} \phi_k(\theta, y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{|J|=k} \phi_J(\theta) y^J,$$

sendo $\phi_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^n)$. Se $N \in \mathbb{Z}_+$, definimos os operadores de truncamento e projeção:

$$\mathcal{T}_N \hat{\alpha}(\theta, y) = \sum_{0 \leq k \leq N} \phi_k(\theta, y)$$

$$\mathcal{P}_N \hat{\alpha}(\theta, y) = \phi_N(\theta, y).$$

Começamos com o seguinte lema.

Lema 4.2.1. Seja $A(\theta, y) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^p)$ com $A(\theta, 0) = 0$ e $\partial_{y_i} A(\theta, 0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ (ou seja, A se anula de ordem ≥ 2 em $y = 0$). Defina a série formal

$$\hat{A}(\theta, y) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k(\theta, y),$$

onde $A_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^p)$ o coeficiente de Taylor de ordem k na variável y (ao redor da origem) de A . Então, se $\hat{\Phi}$ é a série formal

$$\hat{\Phi}(\theta, y) = \left(\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\theta, y), y + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(\theta, y) \right),$$

onde $\phi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m)$ e $\psi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$, vale que

$$\hat{A}(\hat{\Phi}(\theta, y)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\theta, y),$$

onde F_N depende apenas dos coeficientes $A_1, \dots, A_N$ de $\hat{A}$ e dos coeficientes $\phi_1, \dots, \phi_{N-1}$ e $\psi_2, \dots, \psi_{N-1}$ de $\hat{\Phi}$.

Demonstração. Por simplicidade, escrevemos $\widehat{\Phi}(\theta, y) = (\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi})$. Fixado $\theta \in \mathbb{T}^m$, o polinômio de Taylor de ordem N da função $A(\theta + u, v)$ ao redor de $(\theta, 0)$ é dado por

$$P_N(u, v) = \sum_{k=1}^N \sum_{|H|+|L|=k} \frac{\partial^k A(\theta, 0)}{\partial \theta^H \partial y^L} \frac{u^H v^L}{H! L!},$$

onde $H \in \mathbb{Z}_+^m$ e $L \in \mathbb{Z}_+^n$. Vamos calcular $\mathcal{T}_N$ para a série $\widehat{A}(\widehat{\Phi}(\theta, y))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N \left(\widehat{A} \left(\widehat{\Phi}(\theta, y) \right) \right) &= \sum_{k=1}^N \sum_{|H|+|L|=k} \frac{1}{H! L!} \frac{\partial^k A(\theta, 0)}{\partial \theta^H \partial y^L} \mathcal{T}_N \left(\widehat{\phi}^H (y + \widehat{\psi})^L \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{|H|+|L|=k} \frac{1}{H! L!} \frac{\partial^k A(\theta, 0)}{\partial \theta^H \partial y^L} \mathcal{T}_N \left(\mathcal{T}_N \left(\widehat{\phi}^H \right) \mathcal{T}_N \left((y + \widehat{\psi})^L \right) \right) \end{aligned}$$

Analisando esta fórmula, vemos que ela só depende dos coeficientes $A_1, \dots, A_N$ de $\widehat{A}$. Ainda, como $A(\theta, 0) = 0$, não temos termos com $L = 0$, ou seja, podemos supor $|L| \geq 1$. Observe que, dado $H \in \mathbb{Z}_+^m$ e $L \in \mathbb{Z}_+^n$ com $|H| + |L| = k$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_N(\widehat{\phi})^H &= \prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{J \in \mathbb{Z}_+^n \\ |J|=j}} \pi_i(\phi_J(\theta)) y^J \right)^{H_i}, \\ \mathcal{T}_N(y + \widehat{\psi})^L &= \prod_{i=1}^n \left(y_i + \sum_{k=2}^N \sum_{\substack{J \in \mathbb{Z}_+^m \\ |J|=k}} \pi_i(\psi_J(\theta)) y^J \right)^{L_i}. \end{aligned}$$

Como o grau de $\mathcal{T}_N(y + \widehat{\psi})^L$ é pelo menos 1, não teremos o coeficiente ϕ_N na expressão

$$\mathcal{T}_N \left(\mathcal{T}_N(\widehat{\phi})^H (\mathcal{T}_N(y + \widehat{\psi}))^L \right),$$

já que no produto ele corresponderia a um termo de grau $N + 1$. Também não temos o coeficiente ψ_N , pois este só ocorreria após o truncamento de ordem N se $H = 0$ e $|L| = 1$, mas os coeficientes de A se anulam neste caso por hipótese. Assim, F_N depende apenas de $\phi_1, \dots, \phi_{N-1}$ e de $\psi_2, \dots, \psi_{N-1}$. $\square$

Provemos então a proposição a respeito da normalização formal. Gostaríamos de encontrar uma série formal da forma

$$\widehat{\Phi}(\theta, y) = \left(\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\theta, y), y + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_k(\theta, y) \right),$$

com $\phi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m)$ e $\psi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$, e de modo que

$$\Phi_*(M_{w,\lambda}) = \widehat{X} + \widehat{Y}. \quad (4.2.1)$$

Escreva

$$\begin{aligned} X + Y &= \omega \partial_t + \Lambda x \partial_x + g(t, x) \partial_t + f(t, x) \partial_x \\ &= M_{\omega, \lambda} + g(t, x) \partial_t + f(t, x) \partial_x. \end{aligned}$$

Lembremos que a equação (4.2.1) significa que

$$\left(d\widehat{\Phi}_{(\theta, y)} \right) M_{\omega, \lambda} = \left(\widehat{X} + \widehat{Y} \right) (\widehat{\Phi}(\theta, y)),$$

onde estamos interpretando $M_{\omega, \lambda}$ como uma função de (θ, y) (com $n + m$ componentes). Aplicar $d\widehat{\Phi}$ às coordenadas do campo $M_{\omega, \lambda}$ é o mesmo que aplicar o *campo vetorial* $M_{\omega, \lambda}$ à *função* $\widehat{\Phi}$ (isto pode ser verificado diretamente). Obtemos então que a equação (4.2.1) é equivalente a

$$M_{\omega, \lambda}(\theta, y) \left(\widehat{\Phi}(\theta, y) \right) = \left(\widehat{X} + \widehat{Y} \right) (\theta + \widehat{\phi}(\theta, y), y + \widehat{\psi}(\theta, y)).$$

Desenvolvendo, temos

$$\begin{aligned} \left(\widehat{X} + \widehat{Y} \right) (\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) &= (\omega \partial_\theta + \Lambda y \partial_y) (\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \\ &= M_{\omega, \lambda}(\theta, y) + \left(M_{w, \lambda}(\widehat{\phi}), M_{w, \lambda}(\widehat{\psi}) \right). \end{aligned}$$

Lembre que, como funções,

$$\begin{aligned} \left(\widehat{X} + \widehat{Y} \right) (\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) &= M_{\omega, \lambda}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) + \left(\widehat{g}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}), \widehat{f}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right) \\ &= M_{\omega, \lambda}(\theta, y) + \left(\widehat{g}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}), \Lambda \widehat{\psi} + \widehat{f}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right). \end{aligned}$$

Substituindo na expressão anterior, segue que (4.2.1) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} M_{\omega, \lambda} \widehat{\phi} = \widehat{g}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \\ M_{\omega, \lambda} \widehat{\psi} = \Lambda \widehat{\psi} + \widehat{f}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \end{cases}.$$

Observe que $M_{\omega, \lambda} y^J = \langle \lambda, J \rangle y^J$, ou seja, aplicar o campo vetorial $M_{\omega, \lambda}$ nas séries formais $\widehat{\phi}$ e $\widehat{\psi}$ comuta com os operadores de projeção $\mathcal{P}_k$ que definimos anteriormente. Aplicando estes operadores, precisamos encontrar, para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, funções $\phi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m)$ e $\psi_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\begin{cases} M_{\omega, \lambda} \phi_k(\theta, y) = \mathcal{P}_k \left(\widehat{g}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right) \\ M_{\omega, \lambda} \psi_k(\theta, y) = \Lambda \psi_k(\theta, y) + \mathcal{P}_k \left(\widehat{f}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right) \end{cases}. \quad (4.2.2)$$

Pelo lema 4.2.1, segue que as expressões

$$\mathcal{P}_k \left(\widehat{g}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right) \text{ e } \mathcal{P}_k \left(\widehat{f}(\theta + \widehat{\phi}, y + \widehat{\psi}) \right)$$

dependem apenas dos coeficientes $\phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ e $\psi_2, \dots, \psi_{k-1}$, para $k \geq 2$. Começemos com $k = 1$. A segunda equação de (4.2.2) é sempre satisfeita com $k = 1$ (já que $\psi_1 = 0$ e f não tem o termo de grau 1). A primeira se reduz ao seguinte:

$$M_{\omega, \lambda} \phi_1(\theta, y) = \sum_{|J|=1} \frac{\partial g}{\partial y^J}(\theta, 0) y^J.$$

Escrevemos $\phi_1(\theta, y) = \sum_{|J|=1} \phi_J(\theta) y^J$. Substituindo na equação acima, aplicando $M_{\omega, k}$ e comparando coeficientes, obtemos

$$\omega \partial_\theta \Phi_J(\theta) + \langle \lambda, J \rangle \phi_J(\theta) = \frac{\partial^J g}{\partial y^J}(\theta, 0).$$

Podemos resolver esta equação usando séries de Fourier. Se escrevermos

$$\frac{\partial g}{\partial y^J}(\theta, 0) = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} g_{JK} e^{i\langle K, \theta \rangle}, \quad \phi_J(\theta) = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} \phi_{JK} e^{i\langle K, \theta \rangle},$$

obtemos a seguinte expressão para os coeficientes:

$$\phi_{JK} = \frac{g_{JK}}{i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle}.$$

Como $\partial^J g / \partial y^J(\theta, 0) \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^n)$, a sua sequência de coeficientes de Fourier $\{g_{JK}\}_{K \in \mathbb{Z}^m}$ tem decaimento rápido, e pela condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ segue que ϕ_{JK} também decai rápido; ou seja, a série de Fourier define uma função $\phi_1 \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^m)$. Segue, portanto, que o caso $k = 1$ do sistema (4.2.2) está resolvido.

Procedemos agora por indução em k . Suponha que já tenhamos determinado

$$\phi_l(\theta, y) = \sum_{\substack{|J|=l \\ J \in \mathbb{Z}_+^m}} \phi_J(\theta) y^J, \quad \psi_l(\theta, y) = \sum_{\substack{|J|=l \\ J \in \mathbb{Z}_+^n}} \psi_J(\theta) y^J,$$

onde $\phi_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^m)$ e $\psi_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m, \mathbb{R}^n)$ já foram determinadas satisfazendo (4.2.2) para $l = 1, \dots, N-1$. O sistema para $k = N$ é o seguinte:

$$\begin{cases} M_{\omega, \lambda} \phi_N(\theta, y) = A_N(\theta, y) = \sum_{|J|=N} A_J(\theta) y^J \\ M_{\omega, \lambda} \psi_N(\theta, y) - \Lambda \psi_N(\theta, y) = B_N(\theta, y) = \sum_{|J|=N} B_J(\theta) y^J \end{cases},$$

onde $A_J(\theta), B_J(\theta)$ são funções C^∞ que dependem de ϕ_J, ψ_L para $|J|, |L| \leq N-1$, e de derivadas até ordem N das funções g e f . Novamente, defina

$$\phi_N(\theta, y) = \sum_{|J|=N} \phi_J(\theta) y^J, \quad \psi_N(\theta, y) = \sum_{|J|=N} \psi_J(\theta) y^J.$$

Substituindo e aplicando o operador $M_{\omega, \lambda}$, isto se reduz ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \omega \partial_\theta \phi_J(\theta) + \langle \lambda, J \rangle \phi_J(\theta) = A_J(\theta) \\ \omega \partial_\theta \psi_J(\theta) + (\langle \lambda, J \rangle I_n - \Lambda) \psi_J(\theta) = B_J(\theta) \end{cases}.$$

Novamente, expandindo as funções de θ em série de Fourier, obtemos

$$\begin{cases} \phi_{JK} = \frac{A_{JK}}{i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle} \\ \psi_{JK} = ((i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle) I_n - \Lambda)^{-1} B_{JK} \end{cases},$$

e novamente a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$ implica que estes coeficientes são rapidamente decrescentes, e as funções ϕ_J, ψ_J obtidas são de classe C^∞ . A prova do resultado de normalização formal real está completa.

4.3 Prova da proposição 4.1.7: A equação homológica

Vamos fazer inicialmente o caso em que o campo $M_{\omega,\lambda}$ “contrai” no toro $\mathbb{T}_0^m$, ou seja, onde

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 0. \quad (4.3.1)$$

Como nosso problema é local na variável $x \in \mathbb{R}^n$, podemos multiplicar o campo W por uma função de corte e supor que este tem suporte compacto, contido em $\mathbb{T}^m \times B(r/2)$. Denote por $\rho^2 = |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Como o campo W é flat em $\mathbb{T}_0^m$, podemos reduzir o raio r de modo que existam constantes $C, C' > 0$ tais que

$$C' \lambda_1 \rho^2 \leq M_{w,\lambda} \rho^2 + \sigma W \rho^2 \leq C \lambda_n \rho^2.$$

Escreva as componentes do campo W da seguinte forma:

$$W = U(t, x) \partial_x + V(t, x) \partial_t,$$

onde as funções $U \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $V \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ são de suporte compacto (contido em $\mathbb{T}^m \times B(r)$) e flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$. Considere a variedade $M = \mathbb{T}^m \times B(r) \times (-1/2, 3/2)$. Em M , definimos o campo $\tilde{L}$ por

$$\tilde{L}(t, x, \sigma) = \chi(\sigma) \left(\sum_{k=1}^m (\omega_k + \sigma U_k(t, x)) \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{j=1}^n (\lambda_j x_j + \sigma V_j(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

sendo $\chi \in C_c^\infty((-1/2, 3/2))$ identicamente 1 numa vizinhança de $[0, 1]$. Como o campo $\tilde{L}$ tem suporte compacto, este é completo em M . Seja $\tilde{\gamma} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ o fluxo de $\tilde{L}$. Defina agora

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{T}^m \times B(r) \times [0, 1] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^m \times B(r) \\ (t, x, \sigma, u) &\mapsto \text{pr} \circ \tilde{\gamma}|_{\mathbb{T}^m \times B(r) \times [0, 1] \times \mathbb{R}}, \end{aligned}$$

sendo $\text{pr} : M \rightarrow \mathbb{T}^m \times B(r)$ a projeção em $\mathbb{T}^m \times B(r)$. Para simplificar a notação, vamos escrever $\gamma = \gamma_\sigma(p, u)$, onde $p = (t, x) \in \mathbb{T}^m \times B(r)$. Temos então uma função suave, cujas componentes denotamos por $\gamma_\sigma(p, u) = (\underbrace{\alpha_\sigma(p, u)}_{\in \mathbb{T}^m}, \underbrace{\beta_\sigma(p, u)}_{\in B(r)})$, e que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_\sigma}{du} = \omega + \sigma U(\alpha_\sigma, \beta_\sigma), & \alpha_\sigma(p, 0) = t \\ \frac{d\beta_\sigma}{du} = \Lambda \beta_\sigma + \sigma V(\alpha_\sigma, \beta_\sigma), & \beta_\sigma(p, 0) = x \end{cases}, \quad (4.3.2)$$

para todos os pontos $(t, x, \sigma, u) \in \mathbb{T}^m \times B(r) \times [0, 1] \times \mathbb{R}$. Note que, reduzindo r se necessário, podemos encontrar um vetor $\tilde{\Lambda}$ com todas as entradas estritamente negativas de modo que

$$\frac{d\beta_\sigma}{du} \leq \tilde{\Lambda} \beta_\sigma.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall, existem constantes $C, a > 0$ tais que

$$|\beta_\sigma(p, \sigma, u)| \leq Ce^{-au}|x|. \quad (4.3.3)$$

Considere agora a seguinte EDO com parâmetros:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dH}{du} &= (D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u)))H + W(\gamma_\sigma(p, u)). \end{aligned} \right. \quad (4.3.4)$$

Podemos resolver esta equação explicitamente. Considere a matriz fundamental associada à equação homogênea, ou seja, a solução da equação

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{du} &= (D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u)))F \\ F(t, x, \sigma, 0) &= I \end{aligned} \right. \quad (4.3.5)$$

Observe que

$$D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u)) = \sigma(D_{(t,x)}W(\gamma_\sigma(p, u))) + \left(\begin{array}{c|c} 0_{m \times m} & 0_{m \times n} \\ \hline 0_{n \times m} & \lambda \end{array} \right),$$

sendo λ a matriz diagonal com entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Portanto, calculando o traço, temos

$$\text{Tr} D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u)) = \sigma \text{Tr} W(\gamma_\sigma(p, u)) + \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Como o campo W é flat em $\mathbb{T}_0^m$, diminuindo o r se necessário podemos supor que

$$-\eta \leq \text{Tr} D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u)) \leq -\mu < 0,$$

para todos os pontos $(t, x, \sigma, u) \in \mathbb{T}^m \times B(r) \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ e parâmetros $\mu, \eta > 0$ fixos. Portanto, usando a fórmula de Liouville (proposição 2.1.8), concluímos que

$$\det F(p, \sigma, u) = \exp \left(\int_0^u \text{Tr} D_{(t,x)}(M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, s)) ds \right) \in [e^{-\eta u}, e^{-\mu u}],$$

para todo $u \in \mathbb{R}$. Além disso, reduzindo $\eta > 0$ se necessário, segue da condição (2) da proposição 2.1.8 que

$$\|F(p, \sigma, u)^{-1}\| \leq e^{\eta u}. \quad (4.3.6)$$

Então, definimos

$$H(t, x, \sigma, u) = -F(t, x, \sigma, u) \int_u^\infty F(t, x, \sigma, s)^{-1} W(\gamma_\sigma(p, s)) ds.$$

Observe que a integral está bem definida: escolha $N > 0$ tal que $Na > \eta$, onde a é o expoente de (4.3.3). Como W é flat em $x = 0$, reduzindo o r mais uma vez se necessário, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|W(t, x)| \leq C|x|^N.$$

Compondo com a estimativa para β_σ , obtemos

$$|W(\gamma_\sigma(p, u))| \leq Ce^{-Nau}|x|^N,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Usando a estimativa para F^{-1} e o fato de $Na > \mu$, a integral é convergente, e verifica-se imediatamente que H satisfaz a equação (4.3.4). Definimos agora o campo Z^σ ao longo da curva γ_σ por

$$Z^\sigma(\gamma_\sigma(t, x, u)) = H(t, x, \sigma, u);$$

em particular, obtemos

$$Z^\sigma(t, x) = - \int_0^\infty F(t, x, \sigma, s)^{-1} W(\gamma_\sigma(t, x, s)) ds.$$

Note que Z varia suavemente com σ . Para provarmos a proposição 4.1.7, basta verificar que Z^σ é flat em $\mathbb{T}_0^m$ e que satisfaz (4.1.5). Para verificar esta última, compomos a equação acima com γ_σ e derivamos com respeito a u (usando (4.3.4))

$$D_{(t,x)} Z^\sigma(\gamma_\sigma) \frac{d\gamma_\sigma}{du} = (D_{(t,x)} (M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u))) H + W(\gamma_\sigma(p, u)).$$

Lembrando que $\gamma_\sigma = (\alpha_\sigma, \beta_\sigma)$ e usando a equação que estas satisfazem, obtemos

$$D_{(t,x)} Z^\sigma(\gamma_\sigma) (M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma) = (D_{(t,x)} (M_{\omega,\lambda} + \sigma W)(\gamma_\sigma(p, u))) Z^\sigma(\gamma_\sigma) + W(\gamma_\sigma(p, u)),$$

que é exatamente a equação (4.1.5) no ponto $\gamma_\sigma(p, u)$. Para provarmos que Z^σ é flat em $x = 0$, vamos estimar a sua expressão integral:

$$|Z^\sigma(t, x)| \leq C \int_0^\infty e^{\eta s} e^{-Nas} |x|^N ds \leq C_N |x|^N,$$

qualquer que seja o $N > 0$. Segue portanto o resultado quando todos os λ_j são negativos.

O caso em que todos os λ_j são positivos é completamente análogo.

Façamos agora o caso geral em que os λ_j têm sinais diferentes. Suponha que temos

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p < 0 < \lambda_{p+1} \leq \dots \leq \lambda_n. \quad (4.3.7)$$

Escrevemos $n = p + q$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Vamos precisar do seguinte lema sobre decomposição de funções flat:

Lema 4.3.1. Seja $f(t, x', x'')$ uma função C^∞ definida numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m = \mathbb{T}^m \times \{0\} \times \{0\}$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tal que f é flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$. Então, existem funções g, h C^∞ definidas em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, onde g é flat em $x' = 0$, h é flat em $x'' = 0$, e

$$f(t, x', x'') = g(t, x', x'') + h(t, x', x'')$$

para todos os pontos (t, x', x'') numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$.

Demonstração. Usando o teorema 2.8.9 (extensão de Whitney), podemos encontrar uma função $h(t, x', x'')$ suave de modo que

$$\frac{\partial^{|J_1|+|J_2|} h}{\partial x'^{J_1} \partial x''^{J_2}}(t, x', 0) = 0, \quad J_1 \in \mathbb{Z}_+^p, J_2 \in \mathbb{Z}_+^q,$$

e

$$\frac{\partial^{|J_1|+|J_2|} h}{\partial x'^{J_1} \partial x''^{J_2}}(t, 0, x'') = \frac{\partial^{|J_1|+|J_2|} f}{\partial x'^{J_1} \partial x''^{J_2}}(t, 0, x''), \quad J_1 \in \mathbb{Z}_+^p, J_2 \in \mathbb{Z}_+^q.$$

Definindo $g = f - h$, o par (h, g) satisfaz as propriedades do enunciado. $\square$

Dado agora um ponto $p = (t, x', x'')$, defina $\gamma_\sigma(p, u) = (\alpha_\sigma(p, u), \beta'_\sigma(p, u), \beta''_\sigma(p, u))$ como a curva integral de $M_{\omega, \lambda} + \sigma W$ pelo ponto p , ou seja, a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_\sigma}{du} = \omega + \sigma U(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma), & \alpha_\sigma(p, 0) = t, \\ \frac{d\beta'_\sigma}{du} = \Lambda' \beta'_\sigma + \sigma V'(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma), & \beta'_\sigma(p, 0) = x', \\ \frac{d\beta''_\sigma}{du} = \Lambda'' \beta''_\sigma + \sigma V''(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma), & \beta''_\sigma(p, 0) = x'', \end{cases} \quad (4.3.8)$$

sendo $W = (U, V', V'')$, $\Lambda' = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ e $\Lambda'' = \text{diag}(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n)$.

Lema 4.3.2. O campo $M_{\omega, \lambda} + \sigma W$ é normalmente hiperbólico ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ (ver definição 2.6.5 no capítulo 2).

Demonstração. Escrevemos $\phi_{M_{\omega, \lambda} + \sigma W}(t, x', x'', u) = (\gamma_\sigma(t, x', x'', u))$ para o fluxo de $M_{\omega, \lambda}$. Definimos a decomposição de $T(\mathbb{T}^m \times B(r))|_{\mathbb{T}_0^m}$ da seguinte forma: dado um ponto $(t, 0, 0) \in \mathbb{T}_0^m$, considere os subespaços

$$T_{(t, 0, 0)}(\mathbb{T}_0^m) = \mathbb{R}^m \times \{0\} \times \{0\}, \quad N_{(t, 0, 0)}^{st} = \{0\} \times \mathbb{R}^p \times \{0\}, \quad N_{(t, 0, 0)}^{un} = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}^q.$$

Obtemos então uma decomposição contínua do fibrado $T(\mathbb{T}^m \times B(r))|_{\mathbb{T}_0^m}$ em $N^{st} \oplus T(\mathbb{T}_0^m) \oplus N^{un}$. Para calcularmos $D\phi_{M_{\omega, \lambda} + \sigma W}$, usamos o sistema (4.3.8):

$$\begin{cases} \frac{d\partial_{t_k}(\alpha_\sigma)_k}{du} = \sigma \partial_{t_k}(U(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma)_k), & \partial_{t_k}(\alpha_\sigma)_k(p, 0) = 1 \\ \frac{d\partial_{x'_{j_1}}(\beta'_\sigma)_{j_1}}{du} = \Lambda' \partial_{x'_{j_1}}(\beta'_\sigma)_{j_1} + \sigma \partial_{x'_{j_1}}(V'(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma)_{j_1}), & \partial_{x'_{j_1}}(\beta'_\sigma)_{j_1}(p, 0) = 1 \\ \frac{d\partial_{x''_{j_2}}(\beta''_\sigma)_{j_2}}{du} = \Lambda'' \partial_{x''_{j_2}}(\beta''_\sigma)_{j_2} + \sigma \partial_{x''_{j_2}}(V''(\alpha_\sigma, \beta'_\sigma, \beta''_\sigma)_{j_2}), & \partial_{x''_{j_2}}(\beta''_\sigma)_{j_2}(p, 0) = 1 \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Aqui, os subíndices $(k, j_1, j_2) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}$ correspondem a cada uma das componentes das funções $\alpha_\sigma, \beta'_\sigma$ e β''_σ . Pela unicidade, as derivadas nas direções restantes destas

componentes são todas identicamente nulas (já que se anulam em $u = 0$). Assim, a derivada $D\phi_{M_{\omega,\lambda}+\sigma W}$ calculada em um ponto $p = (t, 0, 0) \in \mathbb{T}_0^m$ tem o seguinte formato:

$$D_{(t,0,0)}\phi_{M_{\omega,\lambda}+\sigma W} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\nabla_t \alpha_\sigma(p, u)) & 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(\nabla_{x'} \beta'_\sigma(p, u)) & 0 \\ 0 & 0 & \text{diag}(\nabla_{x''} \beta''_\sigma(p, u)) \end{pmatrix}.$$

Fica claro então que $T(\mathbb{T}_0^m)$, N^{st} e N^{un} são todos invariantes por $D\phi_{M_{\omega,\lambda}+\sigma W}$. Usando o fato de U, V', V'' serem flat, as estimativas seguem imediatamente da desigualdade de Gronwall. $\square$

Usando este lema e o teorema 2.6.7, temos as variedades estável e instável ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ definidas por

$$\begin{cases} M_\sigma^{st} = \left\{ (t, x', x'') \in \mathbb{T}^m \times B(r_1) \times B(r_2) \mid \lim_{u \rightarrow \infty} \beta'_\sigma(p, u) = 0 \text{ e } \lim_{u \rightarrow \infty} \beta''_\sigma(p, u) = 0 \right\} \\ M_\sigma^{un} = \left\{ (t, x', x'') \in \mathbb{T}^m \times B(r_1) \times B(r_2) \mid \lim_{u \rightarrow -\infty} \beta_\sigma(p, u) = 0 \text{ e } \lim_{u \rightarrow -\infty} \beta''_\sigma(p, u) = 0 \right\} \end{cases}.$$

Se $\sigma = 0$, temos $\beta'_0(p, u) = e^{\Lambda' u, x'}$ e $\beta''_0(p, u) = e^{\Lambda'' u, x''}$, o que implica que

$$M_0^{st} = E^{st} = \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^p \times \{0\} \text{ e } M_0^{un} = E^{un} = \mathbb{T}^m \times \{0\} \times \mathbb{R}^q.$$

Como o campo W é flat em $x = 0$, as variedades estável e instável M_σ^{st} e M_σ^{un} são tangentes de ordem infinita com E^{st} e E^{un} em cada ponto de $\mathbb{T}_0^m$. Em particular, podemos encontrar um difeomorfismo

$$\chi(t, x', x'') = (t + \phi_\sigma(t, x', x''), x' + \psi'_\sigma(t, x', x''), x'' + \psi''_\sigma(t, x', x'')),$$

com $\phi_\sigma, \phi'_\sigma, \phi''_\sigma$ flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ e tais que

$$\chi_*(M_{\omega,\lambda} + \sigma W) = M_{\omega,\lambda} + \mu \tilde{W},$$

sendo $\tilde{W}$ um campo flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$ com variedades estável e instável dadas por E^{st} e E^{un} respectivamente. Usando o lema 4.3.1, podemos escrever

$$\tilde{W} = \tilde{W}_{st} + \tilde{W}_{un},$$

onde $\tilde{W}_{st}$ é flat ao longo de E^{st} e $\tilde{W}_{un}$ é flat ao longo de E^{un} . Usando estes campos $\tilde{W}_{st}$ e $\tilde{W}_{un}$, podemos repetir o argumento que fizemos para produzir um campo Z_{st}^σ flat ao longo de E^{st} tal que

$$[M_{\omega,\lambda} + \sigma \tilde{W}_{st}, Z_{st}^\sigma] = \tilde{W}_{st}.$$

O fluxo Ψ_σ^{st} coincide com a identidade de ordem infinita ao longo de E^{st} , e satisfaz

$$(\Psi_\sigma^{st})_* M_{\omega,\lambda} = M_{\omega,\lambda} + \sigma \tilde{W}_{st}.$$

Repetindo a construção para $\tilde{W}_{un}$ obtemos um campo Z_{un}^σ flat ao longo de E^{un} que satisfaz

$$\left[M_{\omega, \lambda} + \sigma \tilde{W}_{st} + \sigma \tilde{W}_{un}, Z_{un}^\sigma \right] = \tilde{W}_{un}.$$

O fluxo Ψ_σ^{un} coincide com a identidade de ordem infinita em E^{un} e satisfaz

$$(\Psi_\sigma^{un})_* \left(M_{\omega, \lambda} + \sigma \tilde{W}_{st} \right) = M_{\omega, \lambda} + \sigma \tilde{W}_{st} \sigma \tilde{W}_{un}.$$

Basta agora fazermos a composição $\Psi_\sigma^{un} \circ \Phi_\sigma^{st}$, que é um difeomorfismo que coincide com a identidade de ordem infinita em $\mathbb{T}_0^m$ e que satisfaz

$$(\Psi_\sigma^{un} \circ \Psi_\sigma^{st})_* M_{\omega, \lambda} = M_{\omega, \lambda} + \sigma \tilde{W}.$$

A demonstração da proposição 4.1.7 está completa.

4.4 Forma normal - o caso complexo

Consideramos o campo complexo

$$X + iY = (\omega + g(t, x))\partial_t + i(\Lambda x + f(t, x))\partial_x.$$

Vamos mostrar que existe um difeomorfismo que o transforma no campo vetorial

$$L_{\omega, \lambda} = \omega \partial_t + i\Lambda x \partial_x.$$

Observe que, como os campos $\omega \partial_t$ e $\Lambda x \partial_x$ comutam, uma condição necessária para tal transformação existir é que os campos X e Y comutem também. Vamos mostrar que, na categoria real-analítica, esta condição também é suficiente (desde que os campos satisfaçam uma condição de tipo Siegel). Na categoria suave, ambas estas condições não são suficientes, a não ser que os λ_j tenham todos o mesmo sinal.

Para o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, introduzimos a seguinte condição diofantina:

$(\mathcal{S}_\mathbb{C})$: Existem constantes $C, \mu > 0$ tais que

$$|\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle| \geq \frac{C}{(|K| + |J|)^\mu}$$

para todos os $K \in \mathbb{Z}^m$ e $J \in \mathbb{Z}_+^n$, com $|K| + |J| > 0$.

Temos o seguinte resultado de normalização:

Teorema 4.4.1. Suponha que o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_\mathbb{C})$. Sejam $g \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^m)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^n)$ com $g = O(|x|)$, $f = O(|x|^2)$ e tais que os campos $X = (\omega + g)\partial_t$ e $Y = (\Lambda x + f)\partial_x$ satisfazem

$$[X, Y] = 0.$$

Então, existe um difeomorfismo Φ real-analítico da forma

$$\Phi(t, x) = (t + \phi(t, x), x + \psi(t, x))$$

definido em uma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ com $\phi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$ e tal que

$$\Phi_*(X + iY) = L_{\omega, \lambda}.$$

A demonstração usa o seguinte lema:

Lema 4.4.2. Seja Y como no teorema 4.4.1. Se $u(t, x)$ for uma função real-analítica definida numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ que satisfaz $Yu = 0$, então u não depende da variável x .

Demonstração. Dado um multi-índice $J \in \mathbb{Z}_+^n$, temos

$$Yx^J = \langle \lambda, J \rangle x^J + O(x^{|J|+1}),$$

já que $f = O(|x|^2)$. Dada uma função $u(t, x) \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$, podemos escrevê-la como

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|J|=k} u_J(t) x^J = u_0(t) + \sum_{|J|=1} u_J(t) x^J + O(|x|^2).$$

Se $Yu = 0$, obtemos então

$$0 = Yu = \sum_{|J|=1} \langle \lambda, J \rangle u_J(t) x^J + O(|x|^2).$$

Como $\langle \lambda, J \rangle \neq 0$ (já que estamos supondo satisfeita a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$), vale que $u_J(t) = 0$ para $|J| = 1$. Iterando este argumento, concluimos que $u_J(t) = 0$ para $|J| \geq 1$ e, portanto, $u(t, x) = u_0(t)$. $\square$

Prova do teorema 4.4.1. Como estamos supondo que $[X, Y] = 0$, temos

$$0 = [X, Y] = - \sum_{k=1}^m Y(\omega_k + g_k(t, x)) \frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{j=1}^n X(\lambda_j x_j + f_j(t, x)) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.4.1)$$

Daí, concluimos que $Xf(t, x) = 0$ e $Yg(t, x) = 0$. Pelo lema 4.4.2, vale que g não depende da variável x , mas como $g = O(|x|)$, temos $g \equiv 0$. Assim,

$$X = \omega \partial_t. \quad (4.4.2)$$

Uma vez que X é da forma 4.4.2, podemos resolver a equação $Xf = 0$ usando séries de Fourier: escreva

$$f(t, x) = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} f_K(x) e^{i\langle K, t \rangle}.$$

Aplicando X , obtemos

$$0 = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} i\langle \omega, K \rangle f_K(x) e^{i\langle K, t \rangle}.$$

Da condição diofantina $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, temos $\langle \omega, K \rangle \neq 0$ se $K \neq 0$, donde $f_K \equiv 0$ se $|K| \geq 1$. Concluimos que f não depende da variável t , e a expressão para o campo se simplifica:

$$Y = (\Lambda x + f(x)) \partial_x.$$

Obtemos então um campo que tem um ponto fixo hiperbólico em $x = 0$, e que satisfaz a condição de Siegel. Pelo teorema da linearização de Siegel (teorema 2.7.2), podemos encontrar um difeomorfismo real-analítico $\Psi(x) = x + \beta(x)$ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$, onde $\beta(0) = 0$ e $D\beta(0) = 0$ e tal que $\Psi_* Y = \Lambda x \partial_x$. Definindo o difeomorfismo $\Phi(t, x) = (t, \Psi(x))$, concluimos o resultado. $\square$

Na categoria suave, a normalização de $X + iY$ nem sempre é possível, a não ser que Y ou $-Y$ se contraíam no toro $\mathbb{T}_0^m$. Mais precisamente,

Teorema 4.4.3. Suponha que o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaça $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$ e que os números $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tenham o mesmo sinal. Sejam $g \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^m)$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r), \mathbb{R}^n)$, sendo $g = O(|x|)$ e $f = O(|x|^2)$. Suponha que os campos $X = (\omega + g) \partial_t$ e $Y = (\Lambda x + f) \partial_x$ comutem. Então, existe um difeomorfismo C^∞ da forma

$$\Phi(t, x) = (t + \phi(t, x), x + \psi(t, x))$$

definido numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$, com $\phi(t, 0) = \psi(t, 0) = 0$ tais que

$$\Phi_*(X + iY) = L_{\omega, \lambda}.$$

Demonstração. Suponha que os λ_j sejam negativos (do contrário, basta considerar $-Y$). Se $u(t, x)$ é uma função C^∞ tal que $Yu = 0$, então escrevendo u em série de Fourier,

$$0 = \sum_{J \in \mathbb{Z}^m} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \frac{\partial u_J(x)}{\partial x_j} \right) e^{i \langle J, t \rangle},$$

ou seja, $\langle \Lambda x, \text{grad } u_J(x) \rangle = 0$ para todo $J \in \mathbb{Z}^m$. Fixe $x_0 \neq 0$ em $B(r)$. Definindo a curva $\gamma(s) = e^{\Lambda s} x_0$, note que

$$\frac{d}{ds} u_J(\gamma(s)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_J(\gamma(s))}{\partial x_j} \lambda_j (\gamma(s))_j = 0,$$

ou seja, $u_J(x_0) = u_J(\gamma(s))$ para todo s . Como os λ_j são todos negativos, temos $\gamma(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$, e concluimos que $u_J(x_0) = u_J(0)$, ou seja, u_J não depende de x (e, portanto, u não depende de x). Munidos deste fato, a demonstração segue como a do teorema 4.4.1. $\square$

Vamos agora apresentar um exemplo de um campo C^∞ que não pode ser normalizado ao campo $L_{\omega, \lambda}$.

Seja $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$ tais que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$. Defina $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a seguinte função contínua:

$$\beta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1^{\lambda_2} x_2^{-\lambda_1}, & x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que, no sentido das distribuições, vale que $\Lambda x \partial_x \beta = 0$. Escolha agora uma função C^∞ real $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\alpha(s) = 0$ se $s \leq 0$ e $\alpha(s) > 0$ se $s > 0$. Defina $g \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, flat ao longo de $\mathbb{T}_0^m$, da seguinte forma:

$$g(t, x) = (\alpha(\beta(x)), 0, \dots, 0).$$

(note que a composição $\alpha(\beta(x))$ é suave pois a função α é flat na origem). Considere agora o seguinte campo vetorial suave definido em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$:

$$T = (\omega + g(t, x)) \partial_t + i \Lambda x \partial_x = L_{\omega, \lambda} + g_1(x) \frac{\partial}{\partial t_1},$$

onde $g_1(x) = \alpha(\beta(x))$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 4.4.4. O campo vetorial T tem as seguintes propriedades:

1. $[\operatorname{Re} T, \operatorname{Im} T] = 0$.
2. Não existe difeomorfismo Φ suave numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ tal que $\Phi_* T = L_{\omega, \lambda}$.

Demonstração. Para o item (1), basta notar que $\operatorname{Re} T = \operatorname{Re} L_{\omega, \lambda} + g_1(x) \partial / \partial t_1$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} L_{\omega, \lambda}$ e, portanto,

$$[\operatorname{Re} T, \operatorname{Im} T] = \left[g_1(x) \frac{\partial}{\partial t_1}, i \Lambda x \partial_x \right] = 0$$

usando $\Lambda x \partial_x \beta = 0$. Para provar o item 2, suponha que exista um difeomorfismo C^∞ Φ transformando T em $L_{\omega, \lambda}$ numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$. Escreva $\Phi(t, x) = (t + \phi(t, x), \psi(t, x))$ (somando e subtraindo t na variáveis do toro), onde ϕ, ψ são (2π) -periódicas nas variáveis t . A equação $\Phi_* T = L_{\omega, \lambda}$ implica em particular que, para todo $j = 1, \dots, k$,

$$\sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(x)) \frac{\partial(t_j + \phi_j(t, x))}{\partial t_k} + i \sum_{l=1}^n \lambda_l x_l \frac{\partial(\phi_j(x, t))}{\partial x_l} = \omega_j.$$

Fazendo $j = 1$ comparando as partes reais, temos

$$\omega_1 + g_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m + \sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(x)) \frac{\partial \phi_1(t, x)}{\partial t_k} = \omega_1$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^m (\omega_k + g_k(x)) \frac{\partial \phi_1(t, x)}{\partial t_k} = -g_1(x) - \omega_2 - \dots - \omega_m.$$

Mas o lado direito não depende de t ; portanto, esta equação só pode ter uma solução ϕ_1 periódica em t se g_1 for constante, o que é uma contradição. $\square$

RESOLUBILIDADE

5.1 Resolubilidade do campo vetorial real $M_{\omega,\lambda}$

Começaremos agora a estudar a resolubilidade da equação modelo

$$M_{\omega,\lambda}u(t,x) = f(t,x) \quad (5.1.1)$$

numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m = \mathbb{T}^m \times \{0\}$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, sendo $M_{\omega,\lambda} = \omega \partial_t + \Lambda x \partial_x$. Como vimos anteriormente, uma condição necessária para que (5.1.1) tenha solução é que

$$\int_{\mathbb{T}_0^m} f(t,0) dt = 0, \quad (5.1.2)$$

o que sempre vamos assumir a partir de agora. O primeiro resultado é na categoria real-analítica:

Teorema 5.1.1. Seja $M_{\omega,\lambda} = \omega \partial_t + \Lambda x \partial_x$, e suponha que $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$. Seja $f \in C^\omega(\mathbb{T}^m \times B(r))$ uma função real-analítica que satisfaz (5.1.2). Então, a equação (5.1.1) admite uma solução $u \in C^\omega(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ para algum $0 < r_1 < r$.

Demonstração. Escrevemos a expansão de Fourier-Taylor para f :

$$f(t,x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} f_{JK} e^{i\langle K,t \rangle} x^J. \quad (5.1.3)$$

Note que a condição (5.1.2) implica que $f_{00} = 0$. Resolvemos formalmente a equação (5.1.1): note que

$$M_{\omega,\lambda} \left(e^{i\langle K,t \rangle} x^J \right) = (i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle) e^{i\langle K,t \rangle} x^J.$$

Concluimos que se u_{JK} são os coeficientes de Taylor-Fourier de uma solução real-analítica

$$u(t,x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} u_{JK} e^{i\langle K,t \rangle} x^J,$$

estes devem satisfazer

$$u_{JK} = \frac{f_{JK}}{i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle}. \quad (5.1.4)$$

Precisamos apenas verificar que a série

$$\sum_{J \in \mathbb{N}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} \left(\frac{f_{JK}}{i\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle} \right) e^{i\langle K, t \rangle} x^J \quad (5.1.5)$$

converge para uma função real-analítica u numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$. Podemos obter u como uma função real-analítica definida em $\mathbb{R}^m \times B(r)$ e que é 2π -periódica nas primeiras m -variáveis. Esta função, portanto, admite uma extensão holomorfa e limitada $\tilde{f}$ para um subconjunto de $\mathbb{C}^{m+n}$ da seguinte forma:

$$D_{r_1} = \{(t + it', x + ix') \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \mid \max\{|t'|, |x|, |x'|\} < r_1, \},$$

onde $0 < r_1 < r$. Observe que, pelo teorema de rigidez para funções analíticas, a extensão $\tilde{f}$ também é 2π -periódica nas primeiras m variáveis. De fato, definindo $\tilde{g}(z_1, z_2) := \tilde{f}(z_1 - 2\pi K, z_2)$, onde $K \in \mathbb{Z}^m$ e $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{m+n}$, vale que $\tilde{g}$ e $\tilde{f}$ são holomorfas em D_{r_1} e coincidem quando $z_1 \in \mathbb{R}^m$, e portanto, coincidem em todos os pontos. Defina agora o espaço vetorial

$$X = \{h \in \mathcal{O}(D_{r_1}) \mid h \text{ é limitada e } 2\pi\text{-periódica nas primeiras } m \text{ variáveis}\},$$

e nele, a norma

$$\|h\|_{r_1} = \sup_{(\tilde{t}, \tilde{x}) \in D_{r_1}} |h(\tilde{t}, \tilde{x})|, \quad h \in X.$$

Pelo lema 2.1 de (CHOW; LU; SHEN, 1992), segue que para todos os multi-índices $J \in \mathbb{N}^n$ e $K \in \mathbb{Z}^m$,

$$|f_{JK}| \leq \|\tilde{f}\|_{r_1} r_1^{-|J|} e^{-r_1|K|}.$$

Usando o lema 2.2 de (CHOW; LU; SHEN, 1992) e a condição diofantina $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$, concluímos que $\tilde{u}$ é uma função holomorfa em D_{r_1} , e sua restrição a $\mathbb{T}^m \times B(r)$ define uma única solução para (5.1.1). $\square$

Tratemos agora do caso C^∞ .

Teorema 5.1.2. Seja $M_{\omega, \lambda} = \omega \partial_t + \Lambda x \partial_x$, e suponha que o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$. Seja $f \in C^\infty(T^m \times B(r))$ uma função que satisfaz (5.1.2). Então, a equação (5.1.1) tem uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$, para algum $0 < r_1 < r$.

Para provar este resultado, precisamos de dois lemas:

Lema 5.1.3. Seja

$$\hat{v}(t, x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} v_J(t) x^J$$

uma série formal, onde as funções v_J são de classe C^∞ em $\mathbb{T}^m$ e v_0 satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}^m} v_0(t) dt = 0.$$

Então, a equação $M_{\omega,\lambda}\widehat{u} = \widehat{v}$ admite uma solução em série formal

$$\widehat{u}(t, x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} u_J(t) x^J,$$

onde $u_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m)$.

Demonstração. Basta expandir as funções u_J e v_J em série de Fourier. Encontramos os coeficientes de Fourier de u_J como sendo

$$u_{JK} = \frac{v_{JK}}{i\langle \omega, K \rangle + \langle \Lambda, J \rangle}.$$

Como $v_J \in C^\infty$, os coeficientes v_{JK} são rapidamente decrescentes em K , e da condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{R}})$, segue que u_{JK} define uma função suave u_J . $\square$

Lema 5.1.4. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ uma função flat em $\mathbb{T}_0^m$. Então, a equação (5.1.1) admite solução $u \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ flat em $\mathbb{T}_0^m$ para algum $0 < r_1 < r$.

Demonstração. Considere o fluxo do campo $M_{\omega,\lambda}$, que pode ser calculado explicitamente:

$$\Phi(s, t, x) = (\omega s + t, e^{\Lambda s} x),$$

onde s está definido em um intervalo aberto $I_{(t,x)}$ contendo a origem. Suponha inicialmente que todos os λ_j são negativos. Então, podemos definir

$$u(t, x) = - \int_0^\infty f(\Phi(s, t, x)) ds$$

Como os λ_j são todos negativos e f é flat em $x = 0$, a integral fica bem definida e define uma função $C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ onde, pelo teorema fundamental do cálculo, vale que $M_{\omega,\lambda} u = f$. Segue ainda do fato de f ser flat que u é flat em $x = 0$. O caso em que $\lambda_j > 0$ segue analogamente considerando a integral de $-\infty$ a 0. No caso em que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p < 0 < \lambda_{p+1} \leq \lambda_n$, escrevemos como antes $n = p + q$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, com $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Dada f flat em $\mathbb{T}_0^m$, usamos o lema 4.3.1. Escrevemos

$$f(t, x', x'') = g(t, x', x'') + h(t, x', x''),$$

onde g é flat em $x' = 0$ e h é flat em $x'' = 0$. Basta agora definir

$$u = \int_{-\infty}^0 h(\Phi(s, t, x)) ds - \int_0^\infty g(\Phi(s, t, x)) ds$$

e verificar que u satisfaz $M_{\omega,\lambda} u = f$ e tem as propriedades desejadas. $\square$

Vamos agora à prova do teorema 5.1.2.

Prova do teorema 5.1.2: Dada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$, escreva sua expansão de Taylor em $x = 0$:

$$\widehat{f}(t, x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{J!} \frac{\partial^{|J|} f(t, 0)}{\partial x^J} x^J.$$

Pelo lema 5.1.3, a equação $M_{\omega, \lambda} \widehat{u} = \widehat{f}$ admite uma solução formal dada por

$$\widehat{u}(t, x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} u_J(t) x^J, \quad u_J \in C^\infty(\mathbb{T}^m).$$

Usando o teorema de Borel, podemos encontrar uma função $v \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tal que

$$\frac{1}{J!} \frac{\partial^{|J|} v(t, 0)}{\partial x^J} = u_J(t)$$

para cada $J \in \mathbb{N}^n$. Segue então que a função $g(t, x) = f(t, x) - M_{\omega, \lambda} v$ é flat em $x = 0$, e usando o lema 5.1.4, podemos encontrar $w \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ flat em $x = 0$ tal que $M_{\omega, \lambda} w = g$. Colocando $u = w + v$, obtemos uma solução de $M_{\omega, \lambda} u = f$. $\square$

5.2 Resolubilidade do campo vetorial complexo $L_{\omega, \lambda}$

Estudamos agora a resolubilidade numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ da equação

$$L_{\omega, \lambda} u = f, \tag{5.2.1}$$

onde $L_{\omega, \lambda} = \omega \partial_t + i \lambda x \partial_x$. Assim como no caso real, vamos supor que a função f satisfaz a condição de compatibilidade

$$\int_{\mathbb{T}^m} f(t, 0) dt = 0. \tag{5.2.2}$$

Na categoria real-analítica, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.2.1. Suponha que o par $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, e que $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ seja uma função real-analítica satisfazendo (5.1.2). Então, existem $0 < r_1 < r$ e $u \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tais que $L_{\omega, \lambda} u = f$ em $\mathbb{T}^m \times B(r_1)$.

Demonstração. A demonstração é muito similar à do teorema 5.1.1. Considere a expansão de Taylor-Fourier de f :

$$f(t, x) = \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} f_{JK} e^{i \langle K, t \rangle} x^J.$$

Segue da condição de compatibilidade que $f_{00} = 0$. Defina então

$$u(t, x) := \sum_{J \in \mathbb{N}^n} \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} \frac{f_{JK}}{i(\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle)} e^{i \langle K, t \rangle} x^J.$$

Provemos que esta série define uma função real-analítica numa vizinhança $\mathbb{T}^m \times B(r_1)$. Observe que os coeficientes de Fourier f_{JK} têm a seguinte propriedade (teorema 3.3.1 de (PETRONILHO, 2003)): existem constantes $C, h, \varepsilon > 0$ tais que

$$|f_{JK}| \leq C h^{|J|} e^{-\varepsilon |K|}, \quad J \in \mathbb{N}^n, K \in \mathbb{Z}^m.$$

Obtemos então, da condição diofantina $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$ que, para todo J, K com $|J| + |K| > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_{JK}}{i(\langle \omega, K \rangle + \langle \lambda, J \rangle)} \right| &\leq Ch^{|J|}(|K| + |J|)^{\mu} e^{-\varepsilon|K|} \\ &\leq C'h'^{|J|}e^{-\varepsilon'|K|} \end{aligned}$$

para algumas constantes $C', h', \varepsilon' > 0$. Assim, a recíproca do teorema 3.3.1 de (PETRONILHO, 2003) implica que estes coeficientes de Taylor-Fourier convergem para uma função real-analítica em alguma vizinhança $\mathbb{T}^m \times B(r_1)$ de $\mathbb{T}_0^m$. Um cálculo simples mostra que $L_{\omega,\lambda}u = f$, o que termina a prova. $\square$

A resolubilidade da equação (5.2.1) é mais complicada na categoria suave. Em particular, vamos mostrar que existe $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ satisfazendo (5.1.2) tal que a equação (5.2.1) não admite solução C^∞ em nenhuma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$. Entretanto, podemos obter soluções de classe C^q para todo $q \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.2.2. Suponha que $(\omega, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$ e seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ uma função satisfazendo (5.1.2). Então, dado $l \in \mathbb{N}$, existe uma solução $u \in C^l(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ de (5.2.1) em $\mathbb{T}^m \times B(r_1)$ para algum $0 < r_1 < r$.

Este teorema será consequência do próximo teorema que provaremos, mas precisamos introduzir algumas notações para enunciá-lo. Sejam $a = (a_1, \dots, a_k)$ e $b = (b_1, \dots, b_{k'})$, com $a_j, b_l \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, onde $j = 1, \dots, k$ e $l = 1, \dots, k'$. Para $J \in \mathbb{N}^{k'}$ e $K \in \mathbb{Z}^m$, definimos as quantidades

$$\tau_b(J, K) = \langle b, J \rangle + \langle \omega, K \rangle. \quad (5.2.3)$$

e

$$\Lambda(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Definimos agora o operador diferencial de primeira ordem $P_{k,a,\tau_b(J,K)}$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^k$ da seguinte forma:

$$P_{k,a,\tau_b(J,K)} := \omega \partial_t + i\Lambda(a)x\partial_x + i\tau_b(J, K).$$

Definição 5.2.3 (v -resolubilidade). Seja P um operador diferencial linear em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ com coeficientes suaves. Dizemos que P é v -resolúvel se, para todo $v \in \mathbb{N}$, existir um $q \in \mathbb{N}$ com a seguinte propriedade:

- Para toda $f \in C^q(\mathbb{T}^m \times B(r))$ satisfazendo (5.1.2), existem $0 < r_1 < r$ e $u \in C^v(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tais que $Pu = f$.

O teorema principal que vamos provar na próxima subseção é o seguinte:

Teorema 5.2.4. Dados $k \in \mathbb{N}$ e parâmetros a, b, J, K (definidos acima), o operador $P_{k,a,\tau_b(J,K)}$ é v -resolúvel.

Observe que, claramente, este resultado implica o teorema 5.2.2, pois $P_{n,\lambda,\tau_b(0,0)} = L_{\omega,\lambda}$;

Finalizamos esta seção provando que a equação (5.2.1) em geral não admite soluções suaves.

Teorema 5.2.5. Existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^m \times B(r))$ satisfazendo (5.1.2) tal que a equação (5.2.1) não admite solução C^∞ em nenhuma vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$.

Demonstração. Seja $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números complexos tal que a série

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$$

tenha raio de convergência igual a zero (por exemplo, isto vale quando $|c_j| = j^j$). Pelo teorema de Borel, podemos encontrar uma função $M \in C^\infty(\mathbb{C})$ tal que sua série de Taylor em $z = 0$ coincida com $\sum c_j z^j$. Isto é o mesmo que dizer que

$$\frac{\partial^j M}{\partial z^j}(0) = j! c_j.$$

Tome $j, k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 1$. Então, escolhendo N grande, pela fórmula de Taylor, vale que para $|z| < \varepsilon$,

$$M(z) = \sum_{i=0}^N c_i z^i + z^{N+1} R(z),$$

sendo $R \in C^\infty(\mathbb{C})$ e limitada para $|z| < \varepsilon$. Aplicando o operador $\partial^j / \partial z^j$, obtemos

$$\frac{\partial^j M}{\partial z^j}(z) = \sum_{i=j}^N c_i \frac{i!}{(i-j)!} z^{i-j} + \sum_{l=0}^j \binom{j}{l} \frac{(N+1)!}{(N+1-l)!} z^{N+1-l} \frac{\partial^{j-l} R}{\partial z^{j-l}}(z),$$

para $|z| < \varepsilon$. Aplicando $\partial^k / \partial \bar{z}^k$ ($k \geq 1$) e calculando em $z = \bar{z} = 0$, obtemos (se N for escolhido apropriadamente grande)

$$\frac{\partial^{j+k} M}{\partial z^j \partial \bar{z}^k}(0) = 0, \quad j, k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Em particular, a função $\partial M / \partial \bar{z}$ é flat em $z = 0$. Defina agora o campo L_1 em $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ pela fórmula

$$L_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + i \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Suponha que $\omega_1 \lambda_1 > 0$. Então, a função

$$\begin{aligned} z : \mathbb{T} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (t_1, x_1) &\mapsto |x_1|^{\omega_1/\lambda_1} e^{-it_1} \end{aligned}$$

é uma integral primeira de L_1 em $\mathbb{T} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, ou seja, uma solução da equação homogênea $L_1 z = 0$ em $\mathbb{T} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ que satisfaz $dz \neq 0$ em todos os pontos do domínio (no caso em que $\omega_1 \lambda_1 < 0$, definimos $\tilde{z}(t_1, x_1) = 1/z(t_1, x_1)$, e $\tilde{z}$ passa a ser uma integral primeira de L_1). Defina agora a função $f(t, x)$ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ por

$$f(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) = i\omega_1 \tilde{z}(t_1, x_1) \frac{\partial M}{\partial \bar{z}}(z(t_1, x_1)).$$

Observe que f não depende das variáveis $t' = (t_2, \dots, t_m)$ e $x' = (x_2, \dots, x_n)$ (portanto, vamos escrever $f = f(t_1, x_1)$ apenas) e que f é de classe C^∞ em $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$, pois a função $\partial M / \partial \bar{z}$ é flat em $z = 0$. Por esta mesma razão, f também é flat em $x = 0$ (e portanto satisfaz a condição (5.1.2)). Afirmamos que não existe $u \in C^\infty$ numa vizinhança de $\mathbb{T}_0^m$ satisfazendo $L_{\omega,\lambda} u = f$.

Suponha, por absurdo, que exista $u(t, x) = u(t_1, t', x_1, x')$ uma função C^∞ em $\mathbb{T}^m \times B(r_1)$ satisfazendo a equação (5.2.1). Fazendo $x' = 0$, note que vale que

$$\left(\sum_{k=1}^m \omega_k \frac{\partial}{\partial t_k} + i\lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u(t_1, t', x_1, 0) = f(t_1, x_1).$$

Definindo a média

$$v(t_1, x_1) = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{\mathbb{T}^{m-1}} u(t_1, t', x_1, 0) dt' \in C^\infty(\mathbb{T} \times (-\tilde{r}, \tilde{r})),$$

a função v satisfaz

$$\begin{aligned} L_1 v(t_1, x_1) &= \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{\mathbb{T}^{m-1}} \left(f(t_1, x_1) - \sum_{k=2}^m \omega_k \frac{\partial u}{\partial t_k}(t_1, t', x_1, 0) \right) dt' \\ &= f(t_1, x_1), \end{aligned}$$

pelo teorema fundamental do cálculo (e pelo fato de f não depender de t'). Considere agora o aberto $U = \mathbb{T} \times (0, \tilde{r})$. Podemos encontrar uma função $\tilde{v} \in C^\infty(z(U))$ tal que

$$v(t, x) = \tilde{v}(z(t, x)), \quad (t, x) \in U.$$

(isto segue do fato de z ser um difeomorfismo local). Calculamos $\partial / \partial \bar{z}$ nas coordenadas t_1, x_1 , e obtemos pela regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial t_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{i\bar{z}} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\lambda_1 x_1}{\omega_1 \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Portanto, obtemos a seguinte equação CR, definida em $z(U)$:

$$i\omega_1 \bar{z} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{z}} = i\omega_1 \bar{z} \frac{\partial M}{\partial \bar{z}} \implies \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial M}{\partial \bar{z}}.$$

É claro que solução geral para esta equação é dada por

$$\tilde{v}(z) = M(z) + H(z),$$

sendo H é uma função holomorfa numa vizinhança de $z = 0$. Subtraindo o valor de $\tilde{v}$ na origem, podemos supor que $\tilde{v}(0) = 0$. Como H é holomorfa numa vizinhança de $z = 0$, o raio de convergência de sua série de Taylor é positivo, o que implica que deve existir um $j \geq 1$ tal que $d_j := c_j + H^{(j)}(0)/j! \neq 0$. Defina $j_0 \geq 1$ como o menor número com esta propriedade. Então, da fórmula de Taylor, temos

$$\tilde{v}(z) = d_{j_0} z^{j_0} + O(|z|^{j_0+1}).$$

Voltando às coordenadas (t_1, x_1) , concluímos que se $0 < x_1 < \tilde{r}$,

$$v(t_1, x_1) = d_{j_0} x_1^{\omega_1 j_0 / \lambda_1} e^{-i j_0 t_1} + O(x_1^{\omega_1 (j_0+1) / \lambda_1}).$$

Como o par (ω, λ) satisfaz a condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, em particular vale que $\omega_1 j_0 / \lambda_1 \notin \mathbb{N}$, e a estimativa acima implica que v não pode ser de classe C^∞ em $x_1 = 0$ (alguma derivada iria pra infinito). A demonstração está completa. $\square$

5.2.1 Alguns lemas técnicos

Nesta subseção, provaremos alguns lemas que serão usados na demonstração do teorema 5.2.4. Para simplificar a notação, escrevemos τ ao invés de $\tau_b(J, K)$ (definidos na subseção anterior). Vamos sempre assumir que o par (ω, λ) satisfaz $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$. Ainda, dada uma função $f \in C^l(B(r))$ e parâmetros $k \leq l$, $r_1 < r$, escrevemos

$$\|f\|_{k, r_1} = \sup_{|J| \leq k} \sup_{|x| \leq r_1} \left| \frac{\partial^J f}{\partial x^J}(x) \right|$$

Lema 5.2.6. Escreva $a = \lambda_j$ para algum $j = 1, \dots, n$. Então, para cada $l, N \in \mathbb{N}$ e $f \in C^l(B(r))$, sendo $B(r) = (-r, r)$, a equação

$$\left(ax \frac{d}{dx} + \tau \right) u(x) = x^N f(x) \quad (5.2.5)$$

admite uma solução $u \in C^l(B(r_1))$ para algum $0 < r_1 < r$. Mais ainda, esta solução tem a seguinte propriedade: dado $1 \leq k \leq l$, existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$\left| \frac{d^k u}{dx^k}(x) \right| \leq C_k \|f\|_{k-1, r_1} |x|^{N-k} (|N| + |K| + |J|)^{\mu+k}, \quad (5.2.6)$$

sendo $\mu > 0$ o expoente dado pela condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$. Se $k = 0$, a mesma estimativa vale, substituindo $\|f\|_{k-1, r_1}$ por $\|f\|_{0, r_1}$.

Demonstração. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a > 0$ (caso $a < 0$, basta multiplicar os coeficientes λ_j por -1 e aplicar o resultado de $a > 0$ com o parâmetro $-K$ e $-f$). Seja $0 < r_1 < r$, com $r_1 < 1$. No intervalo $(0, r_1)$ podemos definir explicitamente uma solução para (5.2.5):

$$u(x) = \frac{1}{a} x^{-\tau/a} v(x),$$

sendo

$$v(x) = \begin{cases} \int_0^x s^{N+(\tau/a)-1} f(s) ds, & \text{se } aN + \tau > 0 \\ - \int_x^{r_1} s^{N+(\tau/a)-1} f(s) ds, & \text{se } aN + \tau < 0 \end{cases}.$$

No caso em que $aN + \tau > 0$, temos

$$|v(x)| \leq \|f\|_{0,r_1} \int_0^x s^{N+(\tau/a)-1} ds = \|f\|_{0,r_1} \frac{x^{N+(\tau/a)}}{N+(\tau/a)}.$$

Se $aN + \tau < 0$, temos então

$$|v(x)| \leq \|f\|_{0,r_1} \int_x^{r_1} s^{N+(\tau/a)-1} ds = \|f\|_{0,r_1} \frac{r_1^{N+(\tau/a)} - x^{N+(\tau/a)}}{N+(\tau/a)}.$$

Como $r_1 > 0$ e $N + (\tau/a) < 0$, temos $0 < \frac{r_1^{N+(\tau/a)} - x^{N+(\tau/a)}}{N+(\tau/a)} < x^{N+(\tau/a)} |N + (\tau/a)|^{-1}$, e em ambos os casos vale a estimativa

$$|v(x)| \leq \frac{a}{|aN + \tau|} \|f\|_{0,r_1} x^{N+(\tau/a)}.$$

Isto implica que

$$|u(x)| \leq \|f\|_{0,r_1} \frac{x^N}{|aN + \tau|}, \quad 0 < x < r_1.$$

Observe que

$$|aN + \tau| = \left| \langle \lambda, Ne_j \rangle + \langle \lambda, \tilde{J} \rangle + \langle \omega, K \rangle \right|,$$

com $\tilde{J} \in \mathbb{N}^n$ sendo descrito da seguinte forma: coloque $b = (\lambda_{g(1)}, \dots, \lambda_{g(k')})$, para uma função $g : \{1, \dots, k'\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ injetiva. Então, definimos $\tilde{j}_r$ como 0 se r não pertencer à imagem da função g , e igual a j_i se $r = g(i)$ para $i \in \{1, \dots, k'\}$. Observe que $|J| = |\tilde{J}|$ e que $\langle \lambda, \tilde{J} \rangle = \langle b, J \rangle$. Assim, da condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, temos

$$|aN + \tau| \geq \frac{C}{(|N| + |J| + |K|)^\mu},$$

e isto prova a estimativa (5.2.6) para $k = 0$. Procedemos agora por indução em k . Suponha que (5.2.6) seja válida para $k = 0, \dots, m-1$, com $m-1 < l$. Da equação satisfeita por u , temos para $0 < x < r_1$,

$$au'(x) = x^{N-1} f(x) - \tau x^{-1} u(x).$$

Derivando esta expressão $m-1$ vezes, segue da fórmula de Leibniz que

$$\begin{aligned} |au^{(m)}(x)| &= \left| \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} \left(f^{(s)}(x) \frac{(N-1)! x^{N-(m-s)}}{(N-m+s)!} - \tau u^{(s)}(x) \frac{(-1)^{m-1-s}}{(m-1-s)! x^{m-s}} \right) \right| \\ &\leq C_m \sum_{s=0}^{m-1} \left(\|f\|_{s,r_1} x^{N-(m-s)} + |\tau| |u^{(s)}(x)| x^{s-m} \right). \end{aligned}$$

Estimamos τ trivialmente via

$$|\tau| = |\tau_b(J, K)| \leq \max\{|\omega|, |\lambda|\}(|J| + |K|),$$

e, pela hipótese de indução, concluímos que

$$\begin{aligned} \left| au^{(m)}(x) \right| &\leq C_m \sum_{s=0}^{m-1} \left(\|f\|_{s,r_1} x^{N-(m-s)} + C'_s \|f\|_{s-1,r_1} |x|^{N-m} (|N| + |J| + |K|)^{\mu+s+1} \right) \\ &\leq C'_m \|f\|_{m,r_1} (|N| + |J| + |K|)^{\mu+m} x^{N-m}, \end{aligned}$$

o que prova o resultado para $k = m$. O caso em que $x < 0$ é análogo. $\square$

Faremos uso de coordenadas esféricas nos próximos argumentos, e precisamos de algumas estimativas iniciais. Lembrando da definição, dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, suas coordenadas esféricas são da forma $(\rho, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, sendo

$$\begin{cases} x_1 &= \rho \cos \theta_1 \\ x_2 &= \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \vdots & \\ x_{n-1} &= \rho \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= \rho \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \end{cases}.$$

Valem as identidades

$$\rho^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad \cot \theta_j = \frac{x_j}{\sqrt{x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2}}, \quad j = 1, \dots, n-2, \quad \theta_{n-1} = 2 \operatorname{arccot} \frac{x_{n-1} + \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}}{x_n}.$$

Lema 5.2.7. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existem constantes $C > 0$ e $l \in \mathbb{N}$ tais que, se $J \in \mathbb{N}^n$ é tal que $|J| \leq m$, então

$$\left| \frac{\partial^{|J|} \rho}{\partial x^J} \right| \leq \frac{C}{\rho^{|J|-1}} \text{ e } \left| \frac{\partial^{|J|} \theta_j}{\partial x^J} \right| \leq \frac{C}{|x_1 + \dots + x_n|^l}, \quad (5.2.7)$$

para todo $j = 1, \dots, n-1$, onde estamos nos restringindo ao subconjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_k \neq 0 \text{ para todo } k\}$.

Demonstração. Para as derivadas de ρ , fazemos a seguinte afirmação:

Afirmação. Para cada multi-índice $J \in \mathbb{N}^n$, existe um polinômio $P_J \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ homogêneo de grau J tal que

$$\frac{\partial^J \rho}{\partial x^J}(x) = \frac{P_J(x)}{\rho^{2|J|-1}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Prova da afirmação: Se $J = 0$ o resultado vale. Suponha que é válido para $|J| \leq k, k \geq 1$. Então, se $\tilde{J} \in \mathbb{N}^n$ é um multi-índice de comprimento $k+1$ e sua j -ésima componente é maior ou igual a 1, temos (escrevendo $J = \tilde{J} - e_j$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\tilde{J}} \rho}{\partial x^{\tilde{J}}} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{P_J}{\rho^{2|J|-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^{4|J|-2}} \left(\rho^{2|J|-1} \frac{\partial P_J}{\partial x_j} - (2|J|-1) \rho^{2|J|-2} \frac{x_j}{\rho} P_J \right) \\ &= \frac{1}{\rho^{2|J|+1}} \underbrace{\left(\rho^2 \frac{\partial P_J}{\partial x_j} - (2|J|-1) x_j P_J \right)}_{=: Q_J(x)}. \end{aligned}$$

Como $\partial_j P_J$ é homogêneo de grau $k-1$, o polinômio Q_J é homogêneo de grau $k+1 = |\tilde{J}|$, como queríamos. $\square$

Assim, dado $m \in \mathbb{N}$, existe uma constante $C = C(m) > 0$ tal que $|P_J(x)| \leq C\rho^{|J|}$ para $|J| \leq m$, e a primeira estimativa em (5.2.7) segue. Para as derivadas de θ_j ($j = 1, \dots, n-2$), podemos calcular explicitamente (lembrando que $\arccot'(x) = -(1+x^2)^{-1}$)

$$\frac{\partial \theta_j}{\partial x_k} = \begin{cases} 0, & k < j \\ -\frac{\sqrt{x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2}}{x_j^2 + \dots + x_n^2}, & k = j \\ \frac{x_j x_k}{(x_j^2 + \dots + x_n^2) \sqrt{x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2}}, & k > j \end{cases}.$$

Para $j = n-1$, temos

$$\frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial \theta_k} = \begin{cases} 0, & k < n-1 \\ -\frac{2x_n \left(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \right)}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \left(x_n^2 + \left(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \right)^2 \right)}, & k = n-1 \\ -\frac{2 \left(x_n^2 - \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \left(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \right) \right)}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \left(x_n^2 + \left(x_{n-1} + \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2} \right)^2 \right)}, & k = n \end{cases}.$$

Como os denominadores destas expressões têm grau maior do que os numeradores, as estimativas em (5.2.7) seguem por um argumento indutivo. $\square$

Lema 5.2.8. Seja $a = (a_1, \dots, a_k)$, com $a_j \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de modo que todos os a_j tenham o mesmo sinal. Sejam $\Lambda(a)$ e $\tau = \tau_b(J, K)$ como em (5.2.3) e (5.2.4). Dado $v \in \mathbb{N}$, existem $N, q \in \mathbb{N}$ tais que, para cada $f \in C^q(B(r))$, a equação

$$(\Lambda(a)x\partial_x + \tau)u = (x_1 \dots x_k)^{2N} f(x) \quad (5.2.8)$$

admite uma solução $u \in C^v(B(r_1))$ para algum $0 < r_1 < r$. Mais ainda, temos $u = O(|x_1 \dots x_k|^N)$ e existe $C_v > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{|L|} u}{\partial x^L} \right| \leq C_v \|f\|_{|L|-1, r} |x_1 \dots x_k|^N (N + |K| + |J|)^{2N+\mu} \quad (5.2.9)$$

para todo $L \in \mathbb{N}^k$ tal que $|L| \leq v$. O expoente $\mu > 0$ é o fornecido pela condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$.

Demonstração. Assim como no lema 5.2.6, podemos assumir que os a_j são todos positivos. O aberto $\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \dots x_k = 0\}$ tem 2^k componentes conexas, que chamaremos de $\mathbb{R}_{\varepsilon}^k$, onde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ é tal que $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^k$. Vamos construir a solução em cada uma destas componentes e mostrar que, juntas, estas definem uma solução em uma vizinhança $B(r_1)$. Denote por $B_{\varepsilon}(r_1)$ a intersecção $B(r_1) \cap \mathbb{R}_{\varepsilon}^k$. Considere o difeomorfismo

$$\phi_{\varepsilon} : \mathbb{R}_{\varepsilon}^k \rightarrow \mathbb{R}_{(1, \dots, 1)}^k$$

dado por $\phi_{\varepsilon}(x) = (y_1, \dots, y_k)$, onde $y_j = (\varepsilon_j x_j)^{1/a_j}$ (observe que $\varepsilon_j x_j > 0$ para $x \in \mathbb{R}_{\varepsilon}^k$). Considerando a equação (5.2.9) restrita ao aberto $\mathbb{R}_{\varepsilon}^k$, fazemos uma mudança de coordenadas nesta equação usando o difeomorfismo ϕ_{ε} , e obtemos:

$$\left(\sum_{j=1}^k y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \tau \right) v(y) = \left(\prod_{j=1}^k y_j^{Na_j} \right) g(y), \quad (5.2.10)$$

onde $g(y) = \prod_{j=1}^k y_j^{Na_j} f(\varepsilon_1 y_1^{a_1}, \dots, \varepsilon_k y_k^{a_k})$. Vamos agora resolver (5.2.10) usando coordenadas esféricas. Escrevendo $y = \rho \Phi(\theta)$, onde $S^{k-1} \ni \Phi(\theta) = (\phi_1(\theta), \dots, \phi_k(\theta))$ e $0 < \rho < \infty$, obtemos a seguinte equação:

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \tau \right) w(\rho, \theta) = \rho^{N(a_1 + \dots + a_k)} \left(\prod_{j=1}^k \phi_j^{Na_j}(\theta) \right) \tilde{g}(\rho, \theta), \quad (5.2.11)$$

que é uma equação no formato do lema 5.2.5, em que θ é um parâmetro (observe que, da demonstração do lema 5.2.5, podemos construir a solução w dependendo de θ com a mesma regularidade em que a função do lado direito da equação depende de θ). Observe que $\tilde{g} \in C^q$. Usando o lema 5.2.5, podemos obter uma solução para (5.2.11) da forma

$$w(\rho, \theta) = \rho^{N(a_1 + \dots + a_k)} \left(\prod_{j=1}^k \phi_j^{Na_j}(\theta) \right) \tilde{w}(\rho, \theta).$$

Retornando às coordenadas iniciais, obtemos uma solução u_{ε} para a equação (5.2.8) de classe C^q , e que se anula em $\{x \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \dots x_k = 0\}$ com ordem arbitrariamente grande (aumentando N). Assim, definindo u como nula neste conjunto, obtemos uma solução de classe C^q para a equação (5.2.8). A estimativa (5.2.9) é uma consequência das estimativas (5.2.6) para as funções w . $\square$

Vamos agora para o último lema antes da prova do teorema 5.2.4, onde removemos a hipótese dos a_j terem o mesmo sinal.

Lema 5.2.9. Seja $a = (a_1, \dots, a_k)$, com $a_j \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Sejam $\Lambda(a)$ e $\tau = \tau_b(J, K)$ como em (5.2.3) e (5.2.4). Dado $v \in \mathbb{N}$, existem $N, q \in \mathbb{N}$ tais que, para cada $f \in C^q(B(r))$, a equação

$$(\Lambda(a)x\partial_x + \tau)u = (x_1 \dots x_n)^{2N} f(x) \quad (5.2.12)$$

admite uma solução $u \in C^v(B(r_1))$ para algum $0 < r_1 < r$. Mais ainda, temos $u = O(|x_1 \dots x_k|^N)$ e existe $C_v > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{|L|} u}{\partial x^L} \right| \leq C_v \|f\|_{|L|-1, r} |x_1 \dots x_k|^N (N + |K| + |J|)^{2N+\mu} \quad (5.2.13)$$

para todo $L \in \mathbb{N}^k$ tal que $|L| \leq v$. O expoente $\mu > 0$ é o fornecido pela condição $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$.

Demonstração. Pelo lema 5.2.8, basta considerarmos o caso em que os a_j não têm o mesmo sinal. Escrevemos, sem perda de generalidade, $a_j > 0$ para $j = 1, \dots, k_1$ e $a_j < 0$ para $j = k_1 + 1, \dots, k$, onde $k_1 < k$ e $k_2 = k - k_1 \leq k_1$ (em palavras, supomos que o número de variáveis positivas é maior ou igual ao número de variáveis negativas). Decompomos $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$ e $x \in \mathbb{R}^k$ como $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$. Defina $b_j = -a_{j+k_1}$, para $j = 1, \dots, k_2$. Com esta notação, a equação (5.2.12) se torna

$$\left(\sum_{j=1}^{k_1} a_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} - \sum_{j=1}^{k_2} b_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \tau \right) u = (y_1 \dots y_{k_1} z_1 \dots z_{k_2})^{2N} f.$$

Usamos a mesma estratégia da prova do lema anterior, onde construímos a solução da equação em cada um dos quadrantes de $\mathbb{R}^k \setminus \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \dots x_k = 0\}$. Escrevemos $B_{\varepsilon^i}(r) = B(r) \cap \mathbb{R}_{\varepsilon^i}^{k_i}$, para $i = 1, 2$, onde $\mathbb{R}_{\varepsilon^i}^{k_i}$ é a componente conexa de $\mathbb{R}^{k_i} \setminus \{x \in \mathbb{R}^{k_i} \mid x_1 \dots x_{k_i} = 0\}$ que contém o ponto $\varepsilon^i \in \underbrace{\{(\pm 1, \dots, \pm 1)\}}_{k_i}$. Aplicamos a mudança de variáveis em $\mathbb{R}_{\varepsilon^1}^{k_1} \times \mathbb{R}_{\varepsilon^2}^{k_2}$ dada por $(y, z) \mapsto (\tilde{y}, \tilde{z})$

sendo

$$\begin{cases} \tilde{y}_j = (\varepsilon_j^1 y_j)^{1/a_j}, & j = 1, \dots, k_1 \\ \tilde{z}_j = (\varepsilon_j^2 z_j)^{1/b_j}, & j = 1, \dots, k_2 \end{cases}.$$

Nestas coordenadas, a equação se torna

$$\left(\sum_{j=1}^{k_1} \tilde{y}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_j} - \sum_{j=1}^{k_2} \tilde{z}_j \frac{\partial}{\partial \tilde{z}_j} + \tau \right) v(\tilde{y}, \tilde{z}) = \left(\tilde{y}_1^{a_1} \dots \tilde{y}_{k_1}^{a_{k_1}} \tilde{z}_1^{b_1} \dots \tilde{z}_{k_2}^{b_{k_2}} \right)^{2N} g(\tilde{y}, \tilde{z}).$$

Aplicamos agora as coordenadas esféricas $\tilde{y} = \rho_1 \Phi(\theta_1)$ e $\tilde{z} = \rho_2 \Psi(\theta_2)$ em $\mathbb{R}^{k_1}$ e $\mathbb{R}^{k_2}$, respectivamente, e a equação se torna

$$\left(\rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} - \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} + \tau \right) w = \rho_1^{AN} \rho_2^{BN} (\Phi(\theta_1)^a \Psi(\theta_2))^N h(\rho_1, \rho_2, \theta_1, \theta_2),$$

onde usamos a notação $A = a_1 + \dots + a_{k_1}$, $B = b_1 + \dots + b_{k_2}$, e

$$\Phi(\theta_1)^a = \Phi_1(\theta_1)^{a_1} \dots \Phi_{k_1}(\theta_1)^{a_{k_1}}, \quad \Psi(\theta_2)^b = \Psi_1(\theta_2)^{b_1} \dots \Psi_{k_2}(\theta_2)^{b_{k_2}}.$$

A função h pode ser obtida de classe C^q para qualquer q fixo, desde que escolhamos N grande o suficiente. Esta equação pode ser resolvida explicitamente, e escolhendo N grande, as soluções colam nos hiperplanos $x_j = 0$ de $\mathbb{R}^k$, produzindo a solução desejada. $\square$

5.2.2 Demonstração do teorema 5.2.4

Sejam a e $\tau = \tau_b(J, K)$ como em (5.2.3). Vamos começar provando que $P_{1,a,\tau}$ é v -resolúvel. Seja $v \in \mathbb{N}$ e $f \in C^q(\mathbb{T}^m \times B(r))$ (note que $B(r)$ é apenas $(-r, r)$ já que $k = 1$) satisfazendo (5.1.2). Seja N um natural com $N < q$, e façamos a expansão de Taylor de f até ordem N :

$$f(t, x) = \sum_{j=0}^N f_j(t) x^j + x^N g(t, x),$$

sendo $f_j \in C^{q-j}(\mathbb{T}^m)$ e $g \in C^{q-N}(\mathbb{T}^m \times B(r))$. Para $j \in \{0, \dots, N\}$, consideremos a seguinte equação:

$$\omega \partial_t v_j(t) + i(ja + \tau) v_j(t) = f_j(t).$$

Podemos resolver esta equação usando séries de Fourier. De fato, a solução é dada por

$$v_j(t) = -i \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} \frac{f_{jK}}{\langle \omega, K \rangle + ja + \tau} e^{i\langle K, t \rangle},$$

sendo f_{jK} os coeficientes de Fourier de f_j . Observe que, da condição diofantina $(\mathcal{S}_{\mathbb{C}})$, a função obtida é de classe $C^v(\mathbb{T}^m)$, desde que $v > q + N + \mu$. Um cálculo direto mostra que

$$P_{1,a,\tau}(v_j(t)x^j) = f_j(t)x^j,$$

e voltando à serie de Taylor, concluímos que

$$f(t, x) = x^N g(t, x) + P_{1,a,\tau} \left(\sum_{j=0}^N v_j(t) x^j \right).$$

Resta então resolver a equação $P_{1,a,\tau} u = x^N g$. Novamente, usamos séries de Fourier: escrevemos

$$x^N g(t, x) = \sum_{L \in \mathbb{Z}^m} x^N g_L(x) e^{i\langle L, t \rangle}, \quad v(t, x) = \sum_{L \in \mathbb{Z}^m} v_L(x) e^{i\langle L, t \rangle},$$

donde obtemos as seguintes equações para os coeficientes:

$$i \left(ax \frac{\partial}{\partial x} + \tau + \langle \omega, K \rangle \right) v_L(x) = x^N g_L(x).$$

Pelo lema 5.2.5, estas equações admitem soluções v_L satisfazendo

$$\left| v_L^{(l)}(x) \right| \leq C_l \|g_L\|_{l-1, r_1} |x|^{N-1} (|L| + |K| + |J|)^{l+\mu}.$$

Como $g \in C^{q-N}$, seu coeficiente de Fourier satisfaz $\|g_L\|_{l-1,r_1}$ decai mais rápido que $|L|^{-(q-N-l)}$ quando $|L| \rightarrow \infty$, e a série $\sum v_L(x)e^{i\langle L,t \rangle}$ converge para uma função $C^v(\mathbb{T}^m \times (-r_1, r_1))$. Obtemos então o resultado quando $k = 1$.

Continuamos a demonstração por indução em k . Suponha que para todo $k \leq l-1$ (onde $k \leq n$), o operador $P_{k,a,\tau}$ seja v -resolúvel para todos os parâmetros a, τ . Seja $f \in C^q(\mathbb{T}^m \times B(r))$ satisfazendo $\int_{\mathbb{T}^m} f(t, 0) dt = 0$, onde $B(r) \subset \mathbb{R}^l$. Escrevemos agora $\mathbb{R}^l \ni x = (x', x_l) \in \mathbb{R}^{l-1} \times \mathbb{R}$. Se $N < q$, segue da fórmula de Taylor que

$$f(t, x', x_l) = \sum_{j=0}^M f_j(t, x') x_l^j + x_l^N g(t, x', x_l).$$

Note que resolver $P_{l,a,\tau} u_j = f_j(t, x') x_l^j$ se reduz a resolver

$$P_{l-1,a',\tau'} v_j(t, x') = f_j(t, x'),$$

sendo $a' = (a_1, \dots, a_{l-1})$ e $\tau' = \tau + ja_l$. De fato, basta definir $u_j(t, x', x_l) = v_j(t, x') x_l^j$ e verificar que $P_{l,a,\tau} u_j = f_j(t, x') x_l^j$. Assim, pela hipótese de indução, existem funções $u_j \in C^v(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tais que

$$f(t, x', x_l) = x_l^N g(t, x', x_l) + P_{l,a,\tau} \left(\sum_{j=0}^N u_j(t, x', x_l) \right)$$

e, portanto, nos reduzimos à equação

$$P_{l,a,\tau} u(t, x', x_l) = x_l^N g(t, x', x_l).$$

Escrevendo $u(t, x', x_l) = v(t, x', x_l) x_l^N$, obtemos

$$(P_{l,a,\tau} + iNa_l) v(t, x', x_l) = g(t, x', x_l).$$

Da definição do operador P , escrevemos $P_{l,a,\tau} + iNa_l = P_{l,a,\tau'}$, sendo $\tau' = \tau + Na_l$. Expandimos agora a função g em Taylor até ordem N , mas na variável x_{l-1} . Novamente, pela hipótese de indução, podemos encontrar uma função $w \in C^v(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tal que

$$g(t, x'', x_{l-1}, x_l) = P_{l,a,\tau'} w + x_{l-1}^N h(t, x'', x_{l-1}, x_l).$$

Observando que $x_l^N P_{l,a,\tau'} w = P_{l,a,\tau} (x_l^N w)$, obtemos

$$x_l^N g(t, x'', x_{l-1}, x_l) = P_{l,a,\tau} (x_l^N w) + (x_l x_{l-1})^N h(t, x'', x_{l-1}, x_l).$$

Repetindo este processo para as l variáveis concluímos que existem uma função $v \in C^v(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ e uma função $m \in C^{q-N}(\mathbb{T}^m \times B(r_1))$ tais que

$$f(t, x) = (x_1 \dots x_l)^N m(t, x) + P_{l,a,\tau} v(t, x).$$

Assim, precisamos resolver

$$P_{l,a,\tau} \phi(t, x) = (x_1 \dots x_l)^N m(t, x),$$

que fazemos via série de Fourier. Escrevendo

$$m(t, x) = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} m_K(x) e^{i\langle K, t \rangle}, \quad \phi(t, x) = \sum_{K \in \mathbb{Z}^m} \phi_K(x) e^{i\langle K, t \rangle},$$

obtemos a seguinte equação para o coeficiente ϕ_K :

$$(\Lambda(a)x\partial_x + \tau') \phi_K = -i(x_1 \dots x_l)^N m_K(x),$$

sendo $\tau' = \tau + \langle \omega, K \rangle$. Do lema 5.2.12, obtemos uma solução ϕ_K satisfazendo as estimativas (5.2.13). Portanto, se N é grande o suficiente, a série para ϕ é de classe C^v e segue que $f = P_{l,a,\tau}(\phi + v)$. A demonstração do teorema 5.2.4 está completa.

REFERÊNCIAS

ARNOLD, V. I. **Geometric methods in the theory of ordinary differential equations**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1988. Citado na página [44](#).

BAKER, A. **Transcendental number theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. Citado na página [62](#).

BANYAGA, A.; HURTUBISE, D. **Lectures on Morse homology**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 2004. Citado nas páginas [19](#) e [42](#).

BEALS, R.; FEFFERMAN, C. On local solvability of linear partial differential equations. **Annals of Mathematics**, v. 97, p. 482–498, 1973. Citado na página [14](#).

BERGAMASCO, A. P.; MEZIANI, A. Solvability near the characteristic set for a class of planar vector fields of infinite type. **Ann. Inst. Fourier**, v. 55, n. 1, p. 77–112, 2005. Citado na página [15](#).

BERGAMASCO, A. P.; SILVA, P. L. D. da. Solvability in the large for a class of complex vector fields on the cylinder. **Bull. Sci. Math**, v. 136, p. 162–171, 2012. Citado na página [15](#).

BERHANU, S.; CORDARO, P.; HOUNIE, J. **An introduction to involutive structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Citado na página [14](#).

CHOW, S.-N.; LU, K.; SHEN, Y.-Q. Normal form and linearization for quasiperiodic systems. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 331, n. 1, p. 361–376, 1992. Citado nas páginas [16](#) e [82](#).

CORDARO, P. D.; GONG, X. Normalization of complex-valued planar vector fields which degenerate along a real curve. **Advances in Mathematics**, v. 184, p. 89–118, 2004. Citado na página [15](#).

DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; JAUME, J. C. **Qualitative theory of planar differential systems**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. Citado nas páginas [19](#), [29](#), [30](#), [32](#), [33](#), [37](#) e [40](#).

HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. **Invariant manifolds**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, 1977. Citado nas páginas [19](#) e [44](#).

HÖRMANDER, L. Propagation of singularities and semi-global existence theorems for (pseudo)-differential operators of principal type. **Annals of Mathematics**, v. 108, p. 569–609, 1978. Citado na página [14](#).

_____. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV: Fourier integral operators**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994. Citado na página [58](#).

_____. **Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations**. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. Citado nas páginas [19](#), [20](#), [21](#), [23](#) e [25](#).

- _____. **The Analysis of Linear Partial Differential Operators I**: Distribution theory and fourier analysis. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. Citado nas páginas 19, 44, 46, 49 e 50.
- LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2003. Citado nas páginas 19, 27, 28 e 34.
- LEWY, H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. **Annals of Mathematics**, v. 66, n. 1, p. 155–158, 1957. Citado na página 13.
- MALGRANGE, B. **Ideals of differentiable functions**. [S.l.]: Oxford University Press, 1966. Citado nas páginas 19 e 44.
- MEZIANI, A. On planar elliptic structures with infinite type degeneracy. **Journal of Functional Analysis**, v. 179, p. 333–373, 2001. Citado na página 15.
- _____. Normalization and solvability of vector fields near trapped orbits. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 369, n. 5, p. 3325–3354, 2017. Citado na página 15.
- NIRENBERG, L.; TREVES, F. Solvability of a linear first order partial differential equation. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 16, p. 331–351, 1963. Citado na página 13.
- _____. On local solvability of linear partial differential equations. Part I: Necessary conditions. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 23, p. 1–38, 1970. Citado na página 13.
- _____. On local solvability of linear partial differential equations. Part II: Sufficient conditions. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 23, p. 459–509, 1970. Citado na página 13.
- PALIS, J.; MELO, W. de. **Geometric theory of dynamical systems**: An introduction. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1982. Citado nas páginas 19 e 38.
- PETRONILHO, G. **Ultradistribuições Gevrey periódicas em $\mathbb{R}^n$** . 2003. Citado nas páginas 84 e 85.
- SUSSMANN, H. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 180, p. 171–188, 1973. Citado na página 14.
- WHITNEY, H. Analytic extensions of differentiable functions defined on closed sets. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 36, n. 1, p. 63–89, 1936. Citado na página 52.