O anel de cohomologia do espaço de
órbitas de Z_p -ações livres sobre produtos
de esferas

Henry Jose Gullo Mercado

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:_____

O anel de cohomologia do espaço de órbitas de Z_p -ações livres sobre produtos de esferas

Henry Jose Gullo Mercado

Orientador: *Profa. Dra. Denise de Mattos*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática .
EXEMPLAR DE DEFESA

USP – São Carlos
Abril/2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G973 Gullo Mercado, Henry Jose
 / Henry Jose Gullo Mercado; orientadora Denise
de Mattos -- São Carlos, 2011.
 120 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Anel de cohomologia. 2. seqüências espectrais.
3. cohomologia de Čech. 4. Espaços de Borel. 5. G-
fibrados principais. I. , Denise de Mattos, orient.
II. Título.

*A Deus por sua misericórdia e
amor sobre mi e sobre os que
amo.*

Agradecimentos

É com muita alegria que quero agradecer a todas as pessoas que me ajudaram a realizar meu sonho de estudar Mestrado em Matemática.

Primeiramente, à toda minha família pelo amor e apoio que me deram, principalmente à minha mãe Stella e à minha tia Martha.

Quero agradecer também aos meus amigos, colegas e professores que me ajudaram em tudo o que precisei, especialmente à minha turma de graduação: Alfredo Roa, Ivan Vega, Harold Gamero, Jonathan Gonzales, Martha Arteta e professores como Oswaldo Dede, Boris Lora e Miguel Caro.

À minha turma de mestrado internacional e amigos brasileiros, os quais me acolheram não só como um colega, mas também como um amigo e irmão: Ingrid Meza, Norton Penteado, Thais Dalbelo, Alex Carlucci, Nelson Antonio Silva, Apõena Passamani, Vinicius Laass, Andreza Beezão, Luis Florial, Nancy Chachapoyas, Manuel Zuloeta, Juliana Theodoro de Lima, Renato Laguna, Rafael Gonzalez e demais alunos de mestrado e doutorado.

A todos os meus professores do mestrado, especialmente à professora Márcia Cristina Federson.

À minha orientadora Denise de Mattos, por ter me acolhido e por ter me dado o seu apoio nos momentos difíceis, assim como ao professor Edivaldo Lopes dos Santos, por sua colaboração.

Agradeço muito à Universidade de São Paulo pela oportunidade e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Enfim, quero agradecer a todas aquelas pessoas que me ajudaram e me ajudam ainda a crescer como pessoa nestas lutas da vida e que, embora seus nomes não estejam escritos aqui, estão escritos em meu coração.

*Então ele, sentou, chamou os
Doze e disse: "Se alguém quiser
ser o primeiro, seja o último de
todos e o servo de todos".*
Mc 9, 35.

Resumo

Denotemos por $X \sim_p S^m \times S^n$ um espaço finitístico com anel de cohomologia módulo p isomorfo ao anel de cohomologia de um produto de esferas $S^m \times S^n$, o qual admite ação livre do grupo cíclico $G = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar. Nosso objetivo neste trabalho é determinar o anel de cohomologia do espaço de órbitas X/G , usando como ferramenta principal a seqüência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel $X \xrightarrow{i} X_G \xrightarrow{\pi} BG$, onde BG é o espaço classificante do G -fibrado universal $\omega_G = (EG, BG, p_G, G, G)$ e $X_G = EG \times_G X$ é o espaço de Borel. Este resultado foi provado por R. M. Dotzel, T. B. Singh and S. P. Tripathi em [14].

Abstract

Let denote by $X \sim_p S^m \times S^n$ a finitistic space with mod p cohomology ring isomorphic to the cohomology ring of a product of spheres $S^m \times S^n$, which admits a free action of the cyclic group $G = \mathbb{Z}_p$, with p an odd prime. Our goal in this work is to determine the cohomology ring of the orbit space X/G , using as main tool the Leray-Serre spectral sequence associated to the Borel fibration $X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} BG$, where BG is the classifying space of the G -universal bundle $\omega_G = (EG, BG, p_G, G, G)$ and $X_G = EG \times_G X$ is the Borel space. This result was proved by R. M. Dotzel, T. B. Singh and S. P. Tripathi in [14].

Sumário

Introdução	1
1 G-Fibrados Principais	5
1.1 Grupos topológicos	5
1.2 G -espaços e aplicações G -equivariantes	7
1.3 G-fibrados Universais	12
1.3.1 G-fibrados Principais	12
1.3.2 Espaços Classificantes	14
1.3.3 A construção de Milnor	17
1.3.4 Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1	19
1.3.5 A Construção de Borel	20
2 Seqüências Espectrais	23
2.1 Sistemas de Coeficientes Locais	24
2.2 Seqüências Espectrais	29
2.2.1 Álgebras Graduadas e Bigraduadas sobre um corpo	32
2.2.2 Seqüência espectral de álgebras sobre R	34
2.3 Álgebra Exterior e Álgebra de Hopf	38
3 Cálculo do anel de cohomologia do espaço de órbitas de $\mathbb{Z}_p$-ações livres	41
3.1 Preliminares	41
3.2 O anel de cohomologia do espaço X/G	46
3.3 Versões do Teorema 3.20 para os casos $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$	76
A Fatos Algébricos e Topológicos	77
A.1 Categorias e Funtores	77
A.2 Rank de Grupos Abelianos Livres e Módulos Graduados do Tipo Finito	79

A.3	Característica de Euler	79
A.4	Espaços de Eilenberg-Mac Lane	80
A.5	O homomorfismo de Bockstein	80
A.6	Produto Tensorial	81
A.7	Espaços Paracompactos	82
A.8	Join de Espaços Topológicos	85
B	Cohomologia de Čech	91
B.1	Limite Direto	91
B.1.1	Limite Direto de R -módulos	92
B.1.2	Limite Direto de Espaços Topológicos	96
B.2	Cohomologia Simplicial	97
B.2.1	A categoria dos pares simpliciais	97
B.2.2	Os R -módulos de Cohomologia Simplicial Relativos	99
B.3	Os R -módulos de Cohomologia de Čech Relativos	102
B.3.1	O nervo de uma cobertura	102
B.3.2	O Homomorfismo induzido em Cohomologia de Čech	106
B.3.3	Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod	109
B.3.4	Produto $\cup \sim$	112
	Referências Bibliográficas	115
	Índice Remissivo	117

Introdução

Suponhamos que G seja um grupo de Lie compacto atuando livremente sobre um espaço paracompacto Hausdorff X . Um importante problema em Topologia Algébrica consiste em determinar o anel de cohomologia do espaço de órbitas X/G . Por exemplo, no caso em que $X = S^n$ e $G = \mathbb{Z}_2$, o anel de cohomologia $H^*(S^n/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$, onde $\deg(x) = 1$ e uma interessante aplicação deste resultado é o Teorema clássico de Borsuk-Ulam que afirma que toda função contínua f da n -esfera S^n no n -espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, colapsa pelo menos um par de pontos antípodas, ou seja, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(A(x))$, onde $A : S^n \rightarrow S^n$ denota a aplicação antipodal $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$.

Consideremos o caso em que $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é primo (respectivamente, $G = S^1$), atuando livremente sobre um espaço finitístico, paracompacto Hausdorff, com anel de cohomologia mod p (respectivamente, com coeficientes racionais) isomorfo ao anel de cohomologia de um produto de esferas $S^m \times S^n$. Tal espaço será denotado por $X \sim_p S^m \times S^n$ (respectivamente, $X \sim_{\mathbb{Q}} S^m \times S^n$). Existem dois espaços associados ao grupo de transformações (X, G) : o conjunto X^G dos pontos fixos pela ação de G sobre X e o espaço de órbitas X/G . A natureza homológica de X^G foi estudada em detalhes por Adem [1], Bredon [8], [23], Su[43] e [45]. No artigo *The cohomology Rings of the Orbit Spaces of Free Transformation Groups of the Product of Two Spheres*[14], R. M. Dotzel, T. B. Singh e S. P. Tripathi determinaram todas as possibilidades para o anel de cohomologia $H^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$, nos casos em que a ação de G sobre X é livre, onde $G = \mathbb{Z}_p$, com primo e $G = S^1$.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo detalhado da estrutura do anel de cohomologia do espaço de órbitas de grupos de transformações livres do produto de duas esferas $S^m \times S^n$, desenvolvido em [14], no caso específico em que o grupo $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um primo ímpar. O cálculo do anel de cohomologia de tais espaços utiliza como ferramenta principal a seqüência espectral de Leray-Serre associada à fibração de Borel $X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$, onde BG é o espaço classificante do G -fibrado universal $\omega_G = (EG, BG, p_G, G, G)$ e $X_G = EG \times_G X$ é o espaço de Borel. Neste caso especial, o E_2 -termo da seqüência espectral de Leray-Serre é dado por $E_2^{*,*} \cong \check{H}^*(B_G; \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$, o qual converge para o anel de cohomologia $\check{H}^*(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \check{H}^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$, como uma álgebra graduada. Especificamente, provamos o seguinte

Teorema 3.20 Sejam $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um primo ímpar, agindo livremente sobre um espaço finitístico $X \sim_p S^m \times S^n$, $0 < m \leq n$. Suponhamos que $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ seja do tipo finito. Então, $\check{H}^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p[x, y, z]/\phi(x, y, z)$, como uma álgebra graduada comutativa, onde $\phi(x, y, z)$ é um dos seguintes ideais graduados:

- (i) $(x^2, y^{(m+1)/2}, z^2)$, m ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = n$;
- (ii) $(x^2, y^{(m+n+1)/2}, y^{(n-m+1)/2}z - ay^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, m par, n ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = m$, $a, b \in \mathbb{Z}_p$, com $a = 0$, necessariamente quando $n < 2m$;
- (iii) $(x^2, y^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, n ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = m$, $b \in \mathbb{Z}_p$, com $b \neq 0$, somente quando m for par e $2m < n$,

onde $\check{H}^*$ denota a cohomologia de Čech com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ e β é o homomorfismo de Bockstein em cohomologia associado à seqüência

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0.$$

Como uma interessante aplicação deste resultado, em [7] foi provada uma versão parametrizada do Teorema de Borsuk-Ulam para fibrados cuja fibra tem a mesma cohomologia módulo p que um produto de esferas $S^m \times S^n$.

Observamos que as hipóteses do Teorema 3.20 garantem que a seqüência espectral associada à fibração de Borel $X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$ não colapsa no E_2 -termo. Desta forma, utilizando as propriedades multiplicativas da seqüência espectral, são analisados os diferenciais d_r , onde $r \geq 2$ é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$. As três possibilidades para tal inteiro r estão relacionadas a cada um dos itens enunciados no teorema acima. Tal estratégia garante que a seqüência espectral $E_r^{*,*}$ colapsa a partir de um certo s , satisfazendo a condição $E_\infty^{k,l} = E_s^{k,l} = E_2^{k,l} \neq 0$, apenas para um número finito de termos. Dessa forma, $\check{H}^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = (\text{Tot } E_\infty^{*,*})^k$, o que viabiliza o cálculo do anel de cohomologia do espaço de órbitas X/G .

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo 1, introduzimos a teoria dos grupos de transformações compactos e G -fibrados principais. Na Seção 1.1, apresentamos resultados básicos sobre grupos topológicos. Na Seção 1.2 introduzimos a teoria de ações de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , definindo os conceitos de G -espaços e de aplicações G -equivariantes. Na Seção 1.3, apresentamos uma classe especial de fibrados, os chamados G -fibrados principais, onde G é um grupo topológico. Tais fibrados são caracterizados pela propriedade de que a fibra do fibrado é o próprio grupo G , o qual age sobre si mesmo por translações. G -fibrados universais, espaços classificantes e aplicações classificantes são introduzidos, juntamente com a construção de Milnor, segundo a qual o espaço classificante BG do G -fibrado universal é descrito como sendo o limite direto do quociente de joins do grupo G . Na Subseção 1.3.4 apresentamos a cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1 . Finalmente, na Subseção 1.3.5 descrevemos a construção de Borel sobre os espaços classificantes de um grupo de Lie compacto. Tal construção é um procedimento para criar novos espaços e

aplicações, através do G -fibrado universal. Ressaltamos que tal construção será fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos uma das principais ferramentas utilizadas no cálculo do anel de cohomologia dos espaços considerados neste trabalho. Na Seção 2.1, introduzimos o conceito de *Sistema de Coeficientes Locais* sobre um espaço topológico B e na Seção 2.2, são apresentadas as definições e resultados básicos sobre *Sequências Espectrais*.

O Capítulo 3 destina-se ao estudo detalhado da estrutura do anel de cohomologia do espaço de órbitas de grupos de transformações livres do produto de duas esferas $S^m \times S^n$, no caso específico em que o grupo $G = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar, objetivo principal desta dissertação. Na Seção 3.1, são introduzidos os pré-requisitos necessários para a demonstração do teorema principal, baseados principalmente em resultados provados por Bredon em [8], para os quais são utilizados os R -módulos de cohomologia de Čech, tornando-se fundamental a utilização de tal cohomologia no contexto deste trabalho. Na Seção 3.2, são descritos os cálculos detalhados dos resultados provados em [14]. Na Seção 3.3, são enunciadas as versões do Teorema principal nos casos em que $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$. Finalmente, os Apêndices A-Fatos Algébricos e Topológicos e B-Cohomologia de Čech, contêm conceitos e resultados necessários para uma complementação da leitura dos capítulos anteriores.

G-Fibrados Principais

A categoria na qual iremos desenvolver os conceitos e resultados deste capítulo é a categoria **G-Top**, que contém como objetos os G -espaços X , onde G é um grupo de Lie compacto, e cujos morfismos $f : X \rightarrow Y$ são as aplicações G -equivariantes, ou seja, espaços X com uma determinada G -ação e aplicações $f : X \rightarrow Y$ que possuem a propriedade de comutar com a G -ação dada. Neste capítulo, as seções estão organizadas como segue: na Seção 1.1, apresentamos resultados básicos sobre grupos topológicos. Na Seção 1.2 introduzimos a teoria de ações de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , definindo os conceitos de G -espaços e de aplicações G -equivariantes. Na Seção 1.3, apresentamos uma classe especial de fibrados, os chamados G -fibrados principais, onde G é um grupo topológico. Tais fibrados são caracterizados pela propriedade de que a fibra do fibrado é o próprio grupo G , o qual age sobre si mesmo por translações. G -fibrados universais, espaços classificantes e aplicações classificantes são introduzidos, juntamente com a construção de Milnor, segundo a qual o espaço classificante BG do G -fibrado universal é descrito como sendo o limite direto do quociente de joins do grupo G . Na Subseção 1.3.4 apresentamos a cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1 . Finalmente, na Subseção 1.3.5 descrevemos a construção de Borel sobre os espaços classificantes de um grupo de Lie compacto. Tal construção é um procedimento para criar novos espaços e aplicações, através do G -fibrado universal.

1.1 Grupos topológicos

Nesta seção, introduzimos um breve resumo do conceito de grupo topológico e apresentamos algumas de suas principais propriedades. Detalhes desses resultados podem ser encontrados em [8], [10], [11] e [31].

Definição 1.1. Um **grupo topológico** é uma tripla $(G, *, \tau)$ onde $(G, *)$ é um grupo algébrico e (G, τ) é um espaço topológico de Hausdorff, cuja topologia τ é compatível com a operação $*$ do grupo, ou seja,

as aplicações:

$$\begin{aligned}\mu : (G \times G, \tau_{\text{prod}}) &\rightarrow (G, \tau) \\ (g, h) &\mapsto \mu(g, h) = g * h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iota : (G, \tau) &\rightarrow (G, \tau) \\ g &\mapsto \iota(g) = g^{-1},\end{aligned}$$

chamadas **multiplicação e inversão**, respectivamente, são contínuas, onde τ_{prod} denota a topologia produto sobre $G \times G$. O elemento neutro do grupo $(G, *)$ será denotado por e .

Definição 1.2. Um grupo topológico $(G, *, \tau)$ é chamado **compacto**, se (G, τ) for um espaço topológico compacto.

Observação 1.3. Se $(G, *, \tau)$ for um grupo topológico, dado um subgrupo $H \subset G$, então $(H, *, \tau_H)$ é um grupo topológico, com relação à topologia induzida de subespaço τ_H . Se H for um subespaço compacto, então $(H, *, \tau_H)$ é um grupo topológico compacto.

Observação 1.4. A continuidade das aplicações μ e ι , exigidas na Definição 1.1, são equivalentes às seguintes condições:

1. Dados $(g, h) \in G \times G$ e $W \in \tau$, com $\mu(g, h) = g * h \in W$, existem $U, V \in \tau$ tais que $(g, h) \in U \times V$ e $\mu(U \times V) = U * V \subset W$, onde $U * V = \{g * h, g \in U \text{ e } h \in V\}$.
2. Dados $g \in G$ e $V \in \tau$, com $\iota(g) = g^{-1} \in V$, existe $U \in \tau$ tal que $g \in U$ e $\mu(U) = U^{-1} \subset V$, onde $U^{-1} = \{g^{-1}, g \in U\}$.

Observação 1.5. Dados um grupo $(G, *)$ e um subgrupo $H \subset G$, a coleção

$$G/H = \{g * H; g \in G\},$$

das classes laterais à esquerda de H em G , munida da operação

$$(g * H) \cdot (h * H) = (a * b) * H,$$

é um grupo se, e somente se, H é um subgrupo normal de G , ou seja, $g * H * g^{-1} = H, \forall g \in G$. Neste caso, $G/H = \{g * H; g \in G\} = \{H * g, g \in G\}$. Denotaremos a projeção natural $g \mapsto g * H$ por $\varphi : G \rightarrow G/H$.

Proposição 1.6. Seja $(G, *, \tau)$ um grupo topológico. Então, são válidos os seguintes resultados:

(1) Se H for um subgrupo fechado de $(G, *, \tau)$, então o espaço quociente G/H , munido da topologia quociente induzida pela projeção canônica $\varphi : G \rightarrow G/H$, é um espaço de Hausdorff e φ é continua e aberta (Vide [8, Proposição 1.4, pg. 2]).

(2) Se H for um subgrupo fechado e normal de $(G, *, \tau)$, então $(G/H, \cdot, \tau_\varphi)$ é um grupo topológico (Vide [8, Proposição 1.5, pg. 2]).

(3) Se G_0 for a componente conexa de G , contendo o elemento identidade $e \in G$, então G_0 é um subgrupo fechado e normal de G (Vide [8, Proposição 1.6, pg. 3]).

(3) As componentes conexas de G estão em correspondência um-a-um com as classes laterais de G/G_0 (Vide [31, Teorema 1.12, pg.13]).

Definição 1.7. Um grupo topológico $(G, *, \tau)$ é chamado um **Grupo de Lie**, se G for uma C^∞ -variedade diferenciável tal que as operações **multiplicação e inversão** do grupo $(G, *)$, dadas na Definição 1.1 são aplicações de classe C^∞ .

Proposição 1.8. Seja G um grupo de Lie. Se $H \subset G$ for um subgrupo fechado, então H é um grupo de Lie, com a estrutura diferenciável de uma subvariedade de G (Vide [31, Teorema 5.13, pg.43]).

Exemplo 1.9. Qualquer grupo arbitrário $(G, *)$ é um grupo topológico munido da topologia discreta, na qual todo subconjunto de G é aberto. Em particular, se G for finito, então G é um grupo compacto.

Exemplo 1.10. Seja $\{(G_\alpha, *_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ uma família de grupos topológicos e consideremos o espaço produto $(\prod_{\alpha \in J} G_\alpha, \prod \tau_\alpha)$, onde $\prod \tau_\alpha$ denota a topologia produto. Então, as operações

$$\begin{aligned} \mu : \left(\prod_{\alpha \in J} G_\alpha \right) \times \left(\prod_{\alpha \in J} G_\alpha \right) &\rightarrow \prod_{\alpha \in J} G_\alpha \\ ((x_\alpha)_\alpha, (y_\alpha)_\alpha) &\mapsto (x_\alpha *_\alpha y_\alpha)_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota : \prod_{\alpha \in J} G_\alpha &\rightarrow \prod_{\alpha \in J} G_\alpha \\ (x_\alpha)_\alpha &\mapsto (x_\alpha^{-1})_\alpha, \end{aligned}$$

são contínuas e, portanto, $(\prod_{\alpha \in J} G_\alpha, \prod \tau_\alpha)$ é um grupo topológico.

Exemplo 1.11. A esfera $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é um subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}$ e o isomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ é induzido pela aplicação $t \mapsto e^{2\pi it}$. Desde que a multiplicação em $\mathbb{C}$ é associativa e os inversos existem, pois se $\|z\| = 1$, então $z\bar{z} = \|z\|^2 = 1$, segue que S^1 , munida da topologia induzida de $\mathbb{C}$, é um grupo de Lie compacto.

1.2 G -espaços e aplicações G -equivariantes

Os conceitos básicos sobre categorias, paracompacidade e join de espaços, citados aqui, podem ser encontrados nas seções A.1, A.7 e A.8 do Apêndice A. Para um grupo topológico fixado G , existe uma categoria ¹ $G\text{-Top}$, cujos objetos são os espaços topológicos que admi-

¹Vide Definição A.1 e Exemplo A.3

tem uma ação do grupo G , os chamados G -espaços, e cujos morfismos são as aplicações contínuas chamadas G -**equivariantes**, as quais comutam com a G -ação. A partir de agora, grupos topológicos $(G, *, \tau)$ e espaços topológicos (X, τ') , serão denotados simplesmente por G e X , respectivamente.

Definição 1.12. Uma **ação à esquerda** de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , também chamada uma G -**ação à esquerda** de G sobre X , é uma função contínua

$$\begin{aligned} \rho : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \rho(g, x) \stackrel{\text{notação}}{=} gx, \end{aligned}$$

onde $G \times X$ é munido da topologia produto, satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $g(hx) = (g * h)x, \forall x \in X$ e $\forall g, h \in G$.
- (2) $ex = x, \forall x \in X$.

Definição 1.13. Um G -**espaço à esquerda**, também chamado **Grupo de Transformação**, é um par (X, ρ) , consistindo de um espaço topológico X e uma G -ação à esquerda ρ de um grupo topológico G sobre X . Se (X, ρ) for um G -espaço à esquerda, dizemos que o grupo G age (ou atua) à esquerda sobre o espaço topológico X .

Observação 1.14. Também é possível definir uma G -ação à direita de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X da seguinte forma: uma **ação à direita** de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , chamada uma G -**ação à direita** de G sobre X , é uma função contínua

$$\begin{aligned} \rho : X \times G &\rightarrow X \\ (x, g) &\mapsto xg, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (1) $(xh)g = x(h * g), \forall x \in X$ e $\forall g, h \in G$.
- (2) $xe = x, \forall x \in X$.

No contexto deste trabalho, de maneira geral, chamaremos uma G -ação à esquerda simplesmente de G -ação e um G -espaço à esquerda (X, ρ) , será chamado simplesmente um G -espaço. Quando estivermos nos referindo a ações à direita, usaremos então os termos G -ação à direita e G -espaço à direita.

Exemplo 1.15. Dados grupos topológicos G_1 e G_2 , sejam (X_1, ρ_1) um G_1 -espaço e (X_2, ρ_2) um G_2 -espaço. Então, o produto $X_1 \times X_2$ e o join ² $X_1 * X_2$ possuem estrutura de $(G_1 \times G_2)$ ³-espaço,

²Vide Definição A.46

³O Exemplo 1.10, garante $G_1 \times G_2$ que é um grupo topológico.

onde

$$\begin{aligned} \rho : (G_1 \times G_2) \times (X_1 \times X_2) &\rightarrow X_1 \times X_2 \\ ((g_1, g_2), (x_1, x_2)) &\mapsto (g_1 x_1, g_2 x_2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

é a G_1 -ação sobre o espaço produto $X_1 \times X_2$ e

$$\begin{aligned} \rho' : (G_1 \times G_2) \times (X_1 * X_2) &\rightarrow X_1 * X_2 \\ ((g_1, g_2), t_1 x_1 + t_2 x_2) &\mapsto t_1 (g_1 x_1) + t_2 (g_2 x_2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

é a G_2 -ação sobre o join $X_1 * X_2$. Esta ação é chamada **ação produto**.

Definição 1.16. Dados um grupo topológico G e um G -espaço (X, ρ) , para cada $g \in G$ fixado, podemos definir uma aplicação,

$$\begin{aligned} L_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto L_g(x) = gx \end{aligned}$$

chamada **translação à esquerda** por g .

Observação 1.17. Observemos que, para cada $g \in G$, L_g é a restrição $\rho|_{\{g\} \times X} : \{g\} \times X \rightarrow X$, da ação contínua ρ . Assim, L_g é contínua, para todo $g \in G$. Além disso, para cada $g \in G$ e $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} (L_g \circ L_{g^{-1}})(x) &= L_g(L_{g^{-1}}(x)) = L_g(g^{-1}x) \\ &= g(g^{-1}x) = (g * g^{-1})x = ex = x, \end{aligned}$$

ou seja, $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e, portanto, L_g é um homeomorfismo, $\forall g \in G$.

Observação 1.18. Dado um espaço topológico X , seja $\text{Homeo}(X)$ o grupo (com a operação de composição) de todos os homeomorfismos de X em X . Então, a aplicação $g \mapsto L_g$ define um homomorfismo

$$\begin{aligned} L : G &\rightarrow \text{Homeo}(X) \\ g &\mapsto L_g \end{aligned}$$

O kernel desse homomorfismo L é chamado o “kernel da ação ρ ”, ou seja,

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G; gx = x, \forall x \in X\}.$$

Definição 1.19. Seja (X, ρ) um G -espaço. O conjunto

$$R = \{(x, gx); x \in X, g \in G\}$$

é uma relação de equivalência sobre X . O conjunto das classes de equivalência determinado pela relação R será denotado por X/G . A **projeção natural** $\pi : X \rightarrow X/G$, $x \mapsto [x]$, também chamada **aplicação de órbitas**, induz a topologia quociente sobre X/G , ou seja, $U \subset X/G$ é aberto se, e somente se, $\pi^{-1}(U)$ é aberto em X . O espaço quociente X/G é chamado **espaço de órbitas** do G -espaço (X, ρ) . A classe de equivalência de um ponto $x \in X$ é chamada a **órbita** de x pela ação de G e será denotada por Gx , isto é,

$$Gx = [x] = \{gx \in X; g \in G\}.$$

Observação 1.20. Seja (X, ρ) um G -espaço, então a projeção natural $\pi : X \rightarrow X/G$, $x \mapsto Gx$ é uma aplicação aberta. De fato, dado um aberto $U \subset X$, temos que

$$\pi^{-1}\pi(U) = \bigcup_{g \in G} L_g(U)$$

é aberto, desde que pela Observação 1.17, L_g é um homeomorfismo. Segue da definição de topologia quociente que $\pi(U)$ é aberto.

Observação 1.21. Observemos que as órbitas Gx e Gy de quaisquer dois pontos $x, y \in X$ ou são iguais ou são disjuntas.

Definição 1.22. Dados um G -espaço (X, ρ) e um ponto $x \in X$, o conjunto

$$G_x = \{g \in G; gx = x\}$$

é um subgrupo topológico de G , chamado o **subgrupo de isotropia** do G -espaço (X, ρ) em x .

As ações de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , podem ser classificadas de acordo a seguinte

Definição 1.23. Seja $\rho : G \times X \rightarrow X$ uma G -ação de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X . Dizemos que

(1) ρ é **trivial**, se $gx = x, \forall g \in G$ e $\forall x \in X$.

(2) ρ é **efetiva**, se $gx = x, \forall x \in X \Rightarrow g = e$ ou, equivalentemente,

$$\text{Ker}(\rho) = \{g \in G; gx = x, \forall x \in X\} = \{e\}.$$

Em outras palavras, uma ação é efetiva, se cada elemento $g \neq e$ em G , move pelo menos um ponto de X .

(3) ρ é **livre**, se $gx \neq x, \forall x \in X$ e $\forall g \neq e$, ou equivalentemente, se todos os subgrupos de isotropia são triviais, isto é,

$$G_x = \{g \in G; gx = x\} = \{e\}, \text{ para todo } x \in X.$$

Em outras palavras, uma ação é livre se cada elemento não trivial de G , move todo ponto de X .

(4) ρ é **transitiva**, se X/G consiste de um único ponto, ou seja, X contém uma única órbita $Gx = X$, para algum (e, portanto, para todo) $x \in X$.

Observação 1.24. Dada uma G -ação livre de um grupo topológico G sobre um espaço topológico X , dizemos que (X, ρ) é um G -espaço livre e que G age livremente sobre X . A mesma terminologia é usada para os outros tipos de G -ações.

As aplicações contínuas entre G -espaços que comutam com a G -ação são chamadas G -equivariantes. Formalmente, temos a seguinte

Definição 1.25. Sejam (X, ρ_X) e (Y, ρ_Y) G -espaços. Uma função contínua entre G -espaços $f : X \rightarrow Y$ é chamada uma **aplicação G -equivariante** ou uma **G -aplicação** se para todo $g \in G$ e para todo $x \in X$

$$f(gx) = gf(x).$$

Observação 1.26. Para um grupo topológico fixado G , os G -espaços à esquerda e as aplicações G -equivariantes formam a categoria $G\text{-Top}$. Essa categoria possui produtos: dada uma família de G -espaços $\{(X_j, \rho_j); j \in J\}$, então o produto topológico $\prod_{j \in J} X_j$, pode ser munido de uma G -ação à esquerda

$$\begin{aligned} \rho : G \times \prod_{j \in J} X_j &\rightarrow \prod_{j \in J} X_j \\ (g, (x_j)) &\mapsto (gx_j), \end{aligned} \quad (1.3)$$

ou seja, $(\prod_{j \in J} X_j, \rho)$ é um produto na categoria $G\text{-Top}$.

Podemos ainda definir uma G -ação à esquerda sobre o join ⁴ $X = *_{j \in J} X_j$ da família de G -espaços $\{(X_j, \rho_j); j \in J\}$ como segue,

$$\begin{aligned} \rho : G \times *_{j \in J} X_j &\rightarrow *_{j \in J} X_j \\ (g, \sum t_j x_j) &\mapsto \sum t_j g x_j. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Se os espaços X_j forem G -espaços à direita, então

$$\begin{aligned} \rho : *_{j \in J} X_j \times G &\rightarrow *_{j \in J} X_j \\ (\sum t_j x_j, g) &\mapsto \sum t_j x_j g. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ambas definem ações contínuas de G sobre $X = *_{j \in J} X_j$. A continuidade é verificada usando-se a propriedade universal da topologia do join. Portanto, $(*_{j \in J} X_j, \rho)$ é um G -espaço à esquerda e à direita, respectivamente.

Definição 1.27. Uma ação ρ definida pelas expressões dadas em (1.3), (1.4) ou (1.5), é chamada uma **G -ação diagonal**.

⁴Vide Definição A.51

Definição 1.28. Dados G -espaços (X, ρ_X) e (Y, ρ_Y) , uma aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$ induz, por passagem ao espaço de órbitas, uma aplicação

$$\begin{aligned} \bar{f} : X/G &\rightarrow Y/G \\ Gx = [x] &\mapsto Gf(x) = [f(x)], \end{aligned} \quad (1.6)$$

chamada **aplicação induzida** nos espaços de órbitas, onde $Gf(x)$ é a órbita do ponto $f(x) \in Y$.

No caso particular em que a G -ação sobre o espaço X é determinada por um grupo compacto, o espaço de órbitas X/G possui importantes propriedades, dadas na seguinte

Proposição 1.29. [8, Teorema 3.1, Pg. 38] *Seja (X, ρ) um G -espaço, onde G é um grupo compacto. Então,*

- (1) X/G é Hausdorff.
- (2) A projeção natural $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação fechada.
- (3) $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação própria⁵.
- (4) X é compacto se, e somente se, X/G for compacto.

Corolário 1.30. *Se (X, ρ) for um G -espaço paracompacto⁶, então o espaço de órbitas X/G é paracompacto.*

Demonstração: Desde que a projeção $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação contínua, fechada e sobrejetora, segue da Proposição A.42, que X/G é paracompacto.

1.3 G-fibrados Universais

Uma construção direta do G -fibrado universal, para um grupo topológico G arbitrário, foi dada primeiramente por **Milnor**[33]. Tal construção utiliza a noção de join de espaços topológicos⁷. A construção de Milnor do espaço classificante BG do G -fibrado universal $\omega_G = (EG, BG, p_G, G, G)$, é descrita como sendo o limite direto do quociente de joins do grupo G .

1.3.1 G-fibrados Principais

Nosso objetivo nesta seção é apresentar os conceitos e as principais propriedades de uma classe especial de fibrados, os chamados G -fibrados principais, onde $(G, \cdot, \tau)$ é um grupo topológico. Tais fibrados são caracterizados pela propriedade de que a fibra do fibrado é o próprio grupo

⁵Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é chamada uma aplicação própria se para todo compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K) \subset X$ é compacto.

⁶Vide Definição A.35

⁷Vide Definição A.51

G , o qual age sobre si mesmo por translações. Estaremos adotando aqui a notação multiplicativa para a operação do grupo G . Os resultados apresentados aqui são baseados nas referências [10], [12], [28] e [42].

Definição 1.31. Dado um grupo topológico G , um **G -fibrado principal à direita** consiste de uma G -ação livre à direita

$$\begin{aligned} \rho : E \times G &\rightarrow E \\ (x, g) &\mapsto xg \end{aligned}$$

e uma função contínua e sobrejetora $p : E \rightarrow B$, satisfazendo as seguintes condições:

(1) Para cada $x \in E$ e $g \in G$, $p(xg) = p(x)$.

(2) Para cada $b \in B$, existe um aberto V contendo b em B e um G -homeomorfismo $\varphi : p^{-1}(V) \rightarrow V \times G$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V) & \xrightarrow{\varphi} & V \times G \\ & \searrow p \quad \swarrow \pi_1 & \\ & V & \end{array} \quad (1.7)$$

é comutativo, onde $\pi_1 : V \times G \rightarrow V$ é a projeção na primeira coordenada. E é chamado espaço total, B é chamado espaço base, $p : E \rightarrow B$ é chamada projeção, G é a fibra do fibrado e φ é chamado uma trivialização de p sobre V , com fibra típica G . Aqui, G age à direita sobre $U \times G$ via a ação

$$\begin{aligned} \rho : (U \times G) \times G &\rightarrow U \times G \\ ((u, h), g) &\mapsto (u, hg). \end{aligned}$$

Um fibrado é chamado trivial se existe uma trivialização sobre B .

Observação 1.32. Usaremos a notação $\xi = (E, p, B, G, G)$ para representar um G -fibrado principal com espaço total E , espaço base B , projeção $p : E \rightarrow B$ e grupo G .

Exemplo 1.33. Dados um espaço topológico B e um grupo G , consideremos a G -ação trivial sobre B e a G -ação diagonal à direita sobre $B \times G$ dada por

$$\begin{aligned} (B \times G) \times G &\rightarrow B \times G \\ ((b, h), g) &\mapsto (b, hg). \end{aligned}$$

Então, $\xi = (B \times G, p_1, B, G, G)$ é um G -fibrado principal, chamado **G -fibrado produto** (Vide [28, Capítulo 3, Exemplo 2.3]).

Exemplo 1.34. Seja $\xi = (E, p, B, G, G)$ um G -fibrado principal. Para cada espaço topológico B^* e para cada função contínua $f : B^* \rightarrow B$, o **fibrado induzido de ξ por f** , denotado por $f^*(\xi)$,

tem como espaço base B^* e seu espaço total é definido como sendo o subespaço

$$f^*(E) = \{(b^*, x) \in B^* \times E; f(b^*) = p(x)\},$$

chamado o **pull-back** de ξ por f . A projeção é dada pela aplicação

$$p^* : f^*(E) \rightarrow B^*, \quad p^*(b^*, x) = b^*.$$

Temos que $f^*(\xi) = (f^*(E), p^*, B^*, G, G)$ é um G -fibrado principal, chamado **G -fibrado induzido de ξ por f** (Vide [28, Capítulo 4, Proposição 4.1]).

No contexto deste trabalho, o exemplo mais importante de G -fibrado principal é dado pela aplicação de órbitas $p : X \rightarrow X/G$, no caso em que X é um espaço paracompacto e G é um grupo de Lie compacto que age livremente sobre X . Nesse caso, temos o seguinte teorema fundamental

Teorema 1.35. *Seja X um G -espaço paracompacto, onde G é um grupo compacto de Lie agindo livremente sobre X . Então, $(X, p, X/G, G, G)$ é um G -fibrado principal, onde $p : X \rightarrow X/G$ é a aplicação de órbitas.*

Observação 1.36. O teorema 1.35 foi provado por Bredon [8, Capítulo II, Teorema 5.8] no caso em que X é um espaço completamente regular⁸. Desde que todo espaço paracompacto é normal⁹ e, pelo Lema de Urysohn, todo espaço normal é um espaço completamente regular, segue o resultado. Observemos ainda que, nas hipóteses do Teorema 1.35, segue do Corolário 1.30, que o espaço de órbitas X/G é paracompacto.

Definição 1.37. *Sejam $\xi = (E, p, B, G)$ e $\eta = (E', p', B, G)$ dois G -fibrados principais sobre o mesmo espaço base B . Um **B -morfismo principal** $u : \xi \rightarrow \eta$ é uma aplicação G -equivariante $u : E \rightarrow E'$ tal que $p = p' \circ u$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array}$$

Um morfismo $u : \xi \rightarrow \eta$ entre dois G -fibrados principais sobre B é chamado um **B -isomorfismo**, se $u : E \rightarrow E'$ for um homeomorfismo.

1.3.2 Espaços Classificantes

O objetivo desta seção é apresentar a construção do espaço classificante segundo Milnor[33]. Dado um grupo de Lie compacto, existe um espaço BG , chamado espaço classificante, e um G -fibrado universal $EG \rightarrow BG$ tal que para qualquer espaço paracompacto B ,

⁸Um espaço de Hausdorff X é completamente regular se dados $x \in X$ e um fechado $A \subset X$ que não contém x , existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(a) = 0, \forall a \in A$.

⁹Vide Proposição A.40

a construção “pulback” induz uma bijeção entre o conjunto $[B, BG]$ das classes de homotopia de aplicações de B em BG e a classe dos isomorfismos de G -fibrados principais sobre B . As referências clássicas para este tópico são [12] e [28].

Apresentamos inicialmente o seguinte resultado fundamental para a construção de um G -fibrado universal.

Lema 1.38. [28, Capítulo IV, Teorema 9.9] *Seja $\xi = (E, p, B, G, G)$ um G -fibrado principal sobre um espaço paracompacto B e suponhamos que as aplicações $u, v : B^* \rightarrow B$ sejam homotópicas. Então, os G -fibrados induzidos $u^*(\xi)$ e $v^*(\xi)$ são B^* -isomorfos.* ■

Seja B um espaço **paracompacto**. Definimos uma relação de equivalência como segue: dados dois G -fibrados principais ξ e η sobre B ,

$$\xi \sim \eta \quad \text{se, e somente se,} \quad \xi \text{ é } B\text{-isomorfo a } \eta.$$

A classe de equivalência de isomorfismos do G -fibrado principal ξ sobre B será denotada por $\{\xi\}$. O conjunto de todas as classes de equivalência de isomorfismos de G -fibrados principais sobre B será denotado por $K_G(B)$.

Seja $\omega = (E_0, p_0, B_0, G, G)$ um G -fibrado principal sobre um espaço paracompacto B_0 . Para cada espaço paracompacto B , definimos uma função:

$$\phi_\omega(B) : [B, B_0] \rightarrow K_G(B), \quad \phi_\omega(B)([u]) = \{u^*(\omega), \}$$

onde $u^*(\omega)$ é o G -fibrado induzido de ω por u e $[B, B_0]$ denota o conjunto de todas as classes de homotopia $B \rightarrow B_0$. Esta função está bem definida, desde que se $[u] = [v]$, então $u, v : B \rightarrow B_0$ são homotópicas e segue do Lema 1.38 que $u^*(\omega)$ e $v^*(\omega)$ são B -isomorfos. Portanto, $\{u^*(\omega)\} = \{v^*(\omega)\}$.

Definição 1.39. Um G -fibrado principal $\omega = (E_0, p_0, B_0, G, G)$ sobre o espaço paracompacto B_0 é chamado um **G -fibrado universal** se, para cada espaço paracompacto X , a função $\phi_\omega(X) : [X, B_0] \rightarrow K_G(B)$ for uma bijeção. O espaço topológico B_0 é chamado um **espaço classificante** do grupo G e usaremos as notações $E_0 = EG$, $B_0 = BG$, $p_0 = p_G$ e $\omega = \omega_G$.

Temos assim o seguinte teorema de classificação de G -fibrados principais, no caso paracompacto

Teorema 1.40. Teorema da Classificação [12, Capítulo 14, Teorema 14.4.1] *Associamos a cada classe de isomorfismo de G -fibrados principais sobre um espaço paracompacto B a classe de homotopia de uma aplicação classificante, obtendo uma bem definida bijeção $K_G(B) \cong [B, BG]$.*

Seja $\omega_G = (EG, p_G, BG, G, G)$ um G -fibrado universal. Então, são válidos os seguintes resultados

Proposição 1.41. [28, Capítulo 4, Teorema 12.2] *Para cada G -fibrado principal $\xi = (E, p, B, G, G)$ sobre um espaço paracompacto B , existe uma aplicação contínua $q : B \rightarrow BG$ tal que ξ e o G -fibrado induzido $q^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais B -isomorfos. A aplicação $q : B \rightarrow BG$ é chamada uma **aplicação classificante** para o G -fibrado principal $\xi = (E, p, B, G, G)$.*

Proposição 1.42. [28, Capítulo 4, Teorema 12.4] *Sejam $u, v : B \rightarrow BG$ duas aplicações contínuas tais que $u^*(\omega_G)$ e $v^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais B -isomorfos. Então u e v são homotópicas.*

Do teorema 1.35, temos que a aplicação de órbitas determina um G -fibrado principal, no caso em que G é um grupo de Lie compacto e o espaço total desse fibrado é paracompacto. Além disso, nesse caso o espaço base é paracompacto. Assim, usando este fibrado, obtemos o seguinte

Teorema 1.43. *Sejam X e Y espaços paracompactos com ação livre de um grupo de compacto de Lie G . Denotemos por ξ_X e ξ_Y os G -fibrados principais $(X, p_X, X/G, G, G)$ e $(Y, p_Y, Y/G, G, G)$, respectivamente, com X/G e Y/G paracompactos. Seja $q_X : X/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para ξ_X e suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação G -equivariante. Se $q_Y : Y/G \rightarrow BG$ for uma aplicação classificante para ξ_Y , então a aplicação $q_Y \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$ também classifica o G -fibrado principal ξ_X . Em outras palavras, o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X/G & \xrightarrow{q_X} & BG \\ \bar{f} \downarrow & \nearrow q_Y & \\ Y/G & & \end{array}$$

é homotopicamente comutativo, onde $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$ é a induzida por f entre os espaços de órbitas.

Demonstração: Desde que $q_X : X/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para ξ_X , segue da proposição 1.41 que ξ_X e $q_X^*(\omega_G)$ são (X/G) -isomorfos e, analogamente, ξ_Y e $q_Y^*(\omega_G)$ são (Y/G) -isomorfos. Obtemos assim os seguintes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} q_X^*(\omega_G) & \xrightarrow{\cong} & X & \longrightarrow & EG \\ & \searrow & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ & & X/G & \xrightarrow{q_X} & BG \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} q_Y^*(\omega_G) & \xrightarrow{\cong} & Y & \longrightarrow & EG \\ & \searrow & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ & & Y/G & \xrightarrow{q_Y} & BG \end{array}$$

Desde que $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação G -equivariante, temos de [28, Capítulo 4, Teorema 4.2], que ξ_X e o G -fibrado induzido $\bar{f}^*(\xi_Y)$ são G -fibrados principais (X/G) -isomorfos. Por outro lado, desde que ξ_Y é isomorfo a $q_Y^*(\omega_G)$, segue de [28, Capítulo 4, §10], que $\bar{f}^*(\xi_Y)$ é isomorfo a

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \bar{f}^*(\xi_Y) \\
 & & & \parallel & \\
 q_X^*(\omega_G) & \dashrightarrow & X & \xrightarrow{\quad} & EG \\
 & \searrow f & \downarrow p_X & \nearrow & \downarrow \\
 q_Y^*(\omega_G) & \dashrightarrow & Y & \xrightarrow{\quad} & X/G \xrightarrow{q_X} BG \\
 & \searrow \bar{f} & \downarrow p_Y & \nearrow q_Y & \\
 & & Y/G & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}$$

1.3.3 A construção de Milnor

Consideremos o join de $(n + 1)$ -cópias de G

munido da topologia de Milnor¹⁰. Assim, temos uma sequência de inclusões

$$G \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow EG(n) \hookrightarrow EG(n+1) \hookrightarrow \cdots$$

Dessa forma, a coleção $\{EG(n), f^{mn} = \iota, \mathbb{Z}^+, n \leq m\}$ é um sistema direto de espaços topológicos¹¹, indexado no conjunto dirigido $\mathbb{Z}^+$. Segue da Proposição B.18 que

$$EG = \lim_{\substack{\rightarrow \\ n \in \mathbb{Z}^+}} EG(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} EG(n) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} EG(n). \quad (1.8)$$

¹⁰Vide Definição A.51

¹¹Vide Seção B.1.2

Milnor define uma G -ação à direita sobre cada $EG(n)$

$$\begin{aligned} EG(n) \times G &\rightarrow EG(n) \\ (t_0g_0 + \dots + t_ng_n, g) &\mapsto t_0(g_0g) + \dots + t_n(g_ng), \end{aligned}$$

a qual induz uma G -ação à direita sobre o espaço EG , como foi definido em (1.5). Mostra-se que essa ação é livre. O espaço de órbitas

$$EG/G$$

determinado pela G -ação livre sobre EG será denotado por BG e

$$p_G : EG \rightarrow EG/G = BG$$

denotará a aplicação de órbitas. Enunciamos a seguir o Teorema de Milnor, no caso particular em que G é um grupo de Lie compacto, cuja demonstração no caso geral pode ser encontrada em [12], Capítulo 14, Teorema 14.4.2 e [33].

Teorema 1.44. *Dado um grupo de Lie compacto G , existe um G -fibrado universal $\omega_G = (EG, p_G, BG, G, G)$, com EG contrátil e $BG = EG/G$.*

Observação 1.45. Dado um grupo de Lie compacto, consideremos o G -fibrado universal $\omega_G = (EG, p_G, BG, G, G)$. Desde que G é compacto Hausdorff, temos da Proposição A.52, que cada $EG(n)$ é compacto Hausdorff e segue da Proposição A.37 que cada $EG(n)$ é paracompacto. Como a união disjunta de espaços pacompactos é um espaço paracompacto (Vide Observação B.19), temos que EG é paracompacto, logo EG é normal¹² e, conseqüentemente, regular. Por outro lado, sendo uma reunião enumerável de espaços compactos, temos da Definição A.44, que EG é σ -compacto e assim, concluímos que EG é um espaço regular e σ -compacto. Portanto, segue da Observação A.45, que se X for um espaço paracompacto, então o produto cartesiano $EG \times X$, munido da topologia produto, será um espaço paracompacto.

Observação 1.46. Segue dos Teoremas 1.35 e 1.44 e das Observações 1.45 e 1.36, que (EG, p_G, BG, G, G) é um G -fibrado principal com espaço base BG paracompacto.

Observação 1.47. *Sejam G_1 e G_2 grupos compactos de Lie. Então, temos as seguintes identificações*

$$(G_1 * \dots * G_1) \times (G_2 * \dots * G_2) \approx (G_1 \times G_2) * \dots * (G_1 \times G_2)$$

as quais nos leva às seguintes identificações:

$$EG_1 \times EG_2 \approx E(G_1 \times G_2) \quad BG_1 \times BG_2 \approx B(G_1 \times G_2) \quad (1.9)$$

¹²Vide Proposição A.40

Exemplo 1.48. Seja $G = \mathbb{Z}_2$, então o espaço $EG(n)$ é o join

$$\mathbb{Z}_2 * \cdots * \mathbb{Z}_2,$$

de $(n+1)$ -cópias de $\mathbb{Z}_2$, o qual é homeomorfo à n -esfera S^n e a ação de $\mathbb{Z}_2$ sobre $EG(n) = S^n$ é definida pela identidade e pela aplicação antipodal. O espaço $BG(n)$ é $\mathbb{R}P^n$. As inclusões $EG(n) \subset EG(n+1)$ e $BG(n) \subset BG(n+1)$ são as inclusões naturais $S^n \subset S^{n+1}$ e $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{R}P^{n+1}$. O espaço EG é S^∞ e BG é $\mathbb{R}P^\infty$. O $\mathbb{Z}_2$ -fibrado $(S^{n+1}, p_G, \mathbb{R}P^{n+1})$ é um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado universal para dimensões menores ou iguais a n .

Exemplo 1.49. Seja $G = S^1$, então o espaço $EG(n)$ é o join

$$S^1 * \cdots * S^1,$$

de $(n+1)$ -cópias de S^1 , o qual é homeomorfo à esfera S^{2n+1} e a ação de S^1 sobre $EG(n) = S^{2n+1}$ é dada pela relação

$$(z_0, z_1, \dots, z_n)e^{i\theta} = (e^{i\theta}z_0, e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_n),$$

para cada $e^{i\theta} \in S^1$. O espaço $BG(n)$ é o n -dimensional espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$. As inclusões $EG(n) \subset EG(n+1)$ e $BG(n) \subset BG(n+1)$ são as inclusões naturais $S^{2n+1} \subset S^{2n+3}$ e $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{n+1}$. O espaço EG é S^∞ e BG é $\mathbb{C}P^\infty$. O S^1 -fibrado $(S^{2n+1}, p_G, \mathbb{C}P^n)$ é um S^1 -fibrado universal para dimensões menores ou iguais a $2n$.

1.3.4 Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1 .

Exemplo 1.50. Um modelo para $B\mathbb{Z}_2$, o espaço classificante para $\mathbb{Z}_2$, é o espaço projetivo infinito P^∞ . Então, $H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2[a]$, onde $a \in H^1(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é o gerador. O gerador de $H^i(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ é a^i , para qualquer $i \geq 0$. Se $p > 2$ é primo, um modelo para $B\mathbb{Z}_p$, o espaço classificante para $\mathbb{Z}_p$ é o espaço lens infinito $L_p^\infty = S^\infty/\mathbb{Z}_p$. Assim, $H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = H^i(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, para todo $i \geq 0$ e dado qualquer elemento não nulo $a \in H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$, temos que $b = \beta(a)$ é um elemento não nulo de $H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$, onde $\beta : H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$ é o homomorfismo de Bockstein¹³. Mais geralmente, um gerador $\mu \in H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ é dado por

$$\mu = \begin{cases} a \smile b^{(i-1)/2}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ b^{i/2}, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad (1.10)$$

Exemplo 1.51. Um modelo para BS^1 , o espaço classificante para S^1 , é o espaço projetivo complexo infinito $\mathbb{C}P^\infty$. Então, $H^*(BS^1; \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}[c]$ com gerador $c \in H^2(BS^1; \mathbb{Z})$ (para demonstração, vide [10, Cap.3, §2, Proposição 2.1, pg. 183]). Observemos que $B(S^1 \times S^1) = BS^1 \times BS^1$.

¹³Vide Apêndice A, Seção A.5.

1.3.5 A Construção de Borel

Nesta seção, descrevemos a construção de Borel sobre os espaços classificantes de um grupo compacto de Lie. Tal construção é um procedimento para criar novos espaços e aplicações, através do G -fibrado universal. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados nas referências [3], [5] e [10].

Seja G um grupo de Lie compacto e consideremos o G -fibrado universal

$$(EG, p_G, BG, G, G),$$

com EG contrátil e $BG = EG/G$, apresentado na Subseção 1.3.3.

Dado um G -espaço X , a ação diagonal¹⁴ sobre o produto $EG \times X$, é uma G -ação livre. Com efeito, desde que a G -ação diagonal sobre EG é livre, temos que $gm \neq m, \forall m \in EG$ e $\forall g \neq e$. Assim,

$$g(m, x) = (gm, gx) \neq (m, x), \quad \forall (m, x) \in EG \times X \quad \text{e} \quad \forall g \neq e.$$

Definição 1.52. Dado um G -espaço X , definimos o **espaço de Borel**, o qual será denotado por

$$X_G = EG \times_G X$$

como sendo o espaço de órbitas do produto $EG \times X$ com relação à G -ação diagonal livre, ou seja,

$$X_G = EG \times_G X = \frac{EG \times X}{G}$$

As órbitas $G(m, x)$, serão denotadas por $[m, x]$.

Observação 1.53. Seja X um G -espaço paracompacto, onde G é um grupo de Lie compacto. Segue da Observação 1.45 que $EG \times X$ é paracompacto e, desde que esse espaço admite ação livre de G , segue do Teorema 1.35 que

$$(EG \times X, p, X_G, G, G)$$

é um G -fibrado principal, com espaço base X_G paracompacto (Vide Observação 1.36). Segue da Proposição 1.41, que existe uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $(EG \times X, p, X_G, G, G)$. Desde que a projeção na primeira coordenada

$$\pi_1 : EG \times X \rightarrow EG$$

é uma aplicação G -equivariante, segue do Teorema 1.43 que a aplicação induzida por π_1 nos

¹⁴Vide Definição 1.27

espaços órbitas, a qual será denotada por

$$\pi : X_G = \frac{EG \times X}{G} \rightarrow BG = \frac{EG}{G}. \quad (1.11)$$

também classifica o G -fibrado principal $(EG \times X, p, X_G, G, G)$. Obtemos assim, um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} EG \times X & \xrightarrow{\pi_1} & EG \\ p \downarrow & & \downarrow p_G \\ X_G & \xrightarrow{\pi} & BG \end{array}$$

onde as funções verticais p e p_G são as respectivas aplicações de órbitas.

Definição 1.54. A aplicação $\pi : X_G \rightarrow BG$ dada em (1.11) é uma fibração com fibra X e espaço base BG , chamada **fibração de Borel** associada ao G -espaço X . Tal fibração será denotada por

$$X \xrightarrow{\iota} X_G \xrightarrow{\pi} BG.$$

Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação G -equivariante. Então, a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Id}_{EG} \times f : EG \times X &\rightarrow EG \times Y \\ (m, x) &\mapsto (m, f(x)) \end{aligned}$$

é uma aplicação G -equivariante, desde que

$$\begin{aligned} (\text{Id}_{EG} \times f)(g(m, x)) &= (\text{Id}_{EG} \times f)(gm, gx) = (gm, f(gx)) \\ &= (gm, gf(x)) = g((\text{Id}_{EG} \times f)(m, x)) \end{aligned}$$

Logo, a passagem aos espaços órbitas nos leva à seguinte

Definição 1.55. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação G -equivariante. Definimos a **aplicação de Borel** como sendo a aplicação contínua

$$f_G : \overline{\text{Id}_{EG} \times f} : X_G \rightarrow Y_G, \quad [m, x] \mapsto [m, f(x)]$$

Uma consequência do teorema 1.43 para a construção de Borel é o seguinte

Teorema 1.56. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação G -equivariante, onde X e Y são paracompactos. Então, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_G & \xrightarrow{q_X} & BG \\ f_G \downarrow & \nearrow q_Y & \\ Y_G & & \end{array} \quad (1.12)$$

é homotopicamente comutativo, ou seja, $q_X \cong q_Y \circ f_G$.

Demonstração: Sejam q_X e q_Y as aplicações classificantes para os G -fibrados principais $(EG \times X, \pi, X_G, G, G)$ e $(EG \times Y, \pi, Y_G, G, G)$. Desde que

$$\text{Id}_{EG} \times f : EG \times X \rightarrow EG \times Y$$

é uma aplicação G -equivariante entre os G -espaços paracompactos $EG \times X$ e $EG \times Y$, segue do teorema 1.43 que o Diagrama 1.12 é homotopicamente comutativo. ■

Seqüências Espectrais

Uma das principais ferramentas utilizadas no cálculo do anel de cohomologia dos espaços considerados neste trabalho é a chamada Seqüência Espectral de Leray-Serre associada a uma fibração $F \hookrightarrow E \rightarrow B$. Tais seqüências são objetos algébricos utilizados no cálculo de grupos de homologia e cohomologia através de aproximações sucessivas. Seqüências espectrais são uma generalização das seqüências exatas e, desde a sua introdução por Jean Leray, em 1946, tornaram-se um importante instrumento de pesquisa, particularmente em teoria de homotopia. Motivado por problemas em Topologia Algébrica, Jean Leray introduziu a noção de *feixe* e viu-se confrontado com o problema da computação da cohomologia de um feixe. Para calcular tal cohomologia, Leray introduziu uma técnica computacional conhecida hoje como a seqüência espectral de Leray-Serre.

Logo percebeu-se que a técnica computacional de Leray era um exemplo de um fenômeno mais geral. Seqüências espectrais foram desenvolvidas em diversas situações, e elas forneceram intrincadas relações entre homologia e cohomologia de grupos provenientes de situações geométricas como fibrações e de situações algébricas envolvendo funtores derivados. Os E_2 -termos dessas seqüências espectrais são expressos em termos do sistema de coeficientes locais, os quais são induzidos pela fibração sobre B . Tais sistemas de coeficientes locais surgem naturalmente no estudo de teoria de obstrução e no estudo de feixes.

Este Capítulo está organizado como segue. Na Seção 2.1 introduzimos o conceito de *Sistema de Coeficientes Locais* sobre um espaço topológico B e na Seção 2.2, apresentamos as definições e resultados básicos sobre *Seqüências Espectrais*. As referências básicas para este capítulo são: [32], [31] e [47].

2.1 Sistemas de Coeficientes Locais

Nosso objetivo, nesta seção, é definir os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes locais em um fibrado de grupos. Dado um espaço topológico B , seja

$$\Pi_1(B, a, b) = \{[\lambda]; \lambda : I \rightarrow B, \lambda(0) = a, \lambda(1) = b\} \quad (2.1)$$

o conjunto das classes de homotopia de caminhos em B unindo os pontos a e b .

Definição 2.1. Um fibrado de grupos sobre B , o qual será denotado por $\mathcal{G}$, é uma coleção de grupos $\{G_b; b \in B\}$, junto com uma coleção de homomorfismos $h[\lambda] : G_{b_1} \rightarrow G_{b_0}$, para cada elemento $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$, satisfazendo

- (1) se $[b]$ é a identidade (o caminho constante) em $\Pi_1(B, b, b)$ então $h[b] = id : G_b \rightarrow G_b$;
- (2) se $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_2)$ e $[\mu] \in \Pi_1(B, b_1, b_2)$ e se $\lambda * \mu$ é o caminho justaposto de λ por μ , então $h[\lambda * \mu] = h[\lambda] \circ h[\mu] : G_{b_2} \rightarrow G_{b_0}$.

Observação 2.2. As condições (1) e (2) da Definição 2.1 implicam que $h[\lambda]$ é um isomorfismo. De fato, denotando por $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1 - t)$ temos que $[\lambda * \lambda^{-1}] = [b_0] \in \Pi_1(B, b_0, b_0)$ e assim $h[\lambda * \lambda^{-1}] = h[\lambda] \circ h[\lambda^{-1}] = id$.

Observação 2.3. Sejam B um espaço topológico e G um grupo. Fixado um ponto base $b \in B$, então uma representação

$$\rho : \pi_1(B; b) \rightarrow \text{Aut}(G)$$

determina um fibrado de grupos G_ρ sobre B como segue. Para cada $b' \in B$, seja $G_{b'} = G$; escolha $[\lambda_{b'}] \in \Pi_1(B; b, b')$ e seja $h_\rho[\lambda_{b'}] = Id_{G_{b'}}$. Então, para qualquer $[\mu] \in \Pi_1(B; b_0, b_1)$ seja

$$h_\rho[\mu] = \rho[\lambda_{b_0}^{-1} * \mu * \lambda_{b_1}].$$

Isso determina um fibrado de grupos associado à representação ρ . Reciprocamente, um fibrado de grupos determina uma representação $\rho' : \pi_1(B, b') \rightarrow \text{Aut}(G_{b'})$, para $b' \in B$.

Exemplo 2.4. Dado um grupo G , existe o *fibrado trivial de grupos* sobre B , também denotado por G , onde $G_b = G$ para todo $b \in B$ e $h[\lambda] = id : G \rightarrow G$ para todo $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$.

Exemplo 2.5. Suponhamos que $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ seja uma fibração, com B conexo por caminhos. Para cada natural $n \geq 0$, podemos construir um fibrado de R -módulos, $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$ como segue: dado um elemento $b \in B$ seja $G_b = H_n(F_b; R)$, onde $F_b = p^{-1}(b)$. Dado um caminho $\lambda : I \rightarrow B$ com $\lambda(0) = b_0$ e $\lambda(1) = b_1$, aplicando a propriedade do levantamento de homotopia para fibrações, um levantamento de λ dá origem a uma aplicação $\tilde{\lambda} : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}$ tal que $\tilde{\lambda}$ é uma equivalência de homotopia e $\tilde{\lambda}$ é única, a menos de homotopia [47, pg.185]. Para cada

$[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$, seja

$$h[\lambda] = (\tilde{\lambda}^{-1})_* : H_n(F_{b_1}; R) \rightarrow H_n(F_{b_0}; R). \quad (2.2)$$

Segue de [47, Cap.4, §8] que $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$, juntamente com a coleção de homomorfismos $h[\lambda]$ definidos acima, é um fibrado de R -módulos.

Observação 2.6. Usando os mesmos argumentos do Exemplo 2.5, temos que $\mathcal{G} = \mathcal{H}^n(F; R)$, juntamente com a seguinte coleção de homomorfismos $h[\lambda]$

$$h[\lambda] = \tilde{\lambda}^* : H^n(F_{b_1}; R) \rightarrow H^n(F_{b_0}; R). \quad (2.3)$$

é um fibrado de R -módulos (vide [31, Cap.3, §2, Teorema 2.8]).

Definição 2.7. Um morfismo entre fibrados de grupos, $\Xi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é uma coleção de homomorfismos $\Xi_b : (G_1)_b \rightarrow (G_2)_b$, para cada $b \in B$, satisfazendo a propriedade que o seguinte diagrama comuta, para todo $[\lambda]$ em $\Pi_1(B, b_0, b_1)$.

$$\begin{array}{ccc} (G_1)_{b_1} & \xrightarrow{h_1[\lambda]} & (G_1)_{b_0} \\ \Xi_{b_1} \downarrow & & \downarrow \Xi_{b_0} \\ (G_2)_{b_1} & \xrightarrow{h_2[\lambda]} & (G_2)_{b_0} \end{array}$$

Exemplo 2.8. Sejam $E \xrightarrow{p} B$ e $E' \xrightarrow{p'} B$, fibrações com mesmo espaço base B , conexo por caminhos. Suponhamos que exista uma aplicação entre fibrações,

$$\begin{array}{ccc} F_b & \xrightarrow{\tilde{f}|_{F_b}} & F'_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array} \quad (2.4)$$

a qual preserva fibra, ou seja, $\tilde{f}(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$, para cada $b \in B$. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_{b_1}; R) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_n(F_{b_0}; R) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* \\ H_n(F'_{b_1}; R) & \xrightarrow{h'[\lambda]} & H_n(F'_{b_0}; R) \end{array}$$

é comutativo, onde $h[\lambda]$ e $h'[\lambda]$ são os homomorfismos definidos no Exemplo 2.5. Deste modo, $\tilde{f}_*$ induz um morfismo de fibrados $\mathcal{H}_n(F; R) \rightarrow \mathcal{H}_n(F'; R)$

Definição 2.9. Um morfismo de fibrados é um isomorfismo se cada Ξ_b for um isomorfismo. Fixemos um fibrado de grupos abelianos, $\mathcal{G}$, sobre um espaço B , então $\mathcal{G}$ é chamado um Sistema de Coeficientes Locais sobre B . Um Sistema de Coeficientes Locais $\mathcal{G}$ é chamado trivial se existe um fibrado trivial de grupos G e um isomorfismo $\Xi : \mathcal{G} \rightarrow G$, para algum grupo G .

Proposição 2.10. Seja $\mathcal{G} = \{G_{b'}; b' \in B\}$ um sistema de coeficientes locais sobre B isto é, $\mathcal{G}$ é um fibrado de grupos sobre B . Se $\pi_1(B, b)$ age trivialmente sobre $G = G_b$, para $b \in B$ fixado, então o sistema de coeficientes locais $\mathcal{G}$ sobre B é trivial.

Demonstração. Se $\pi_1(B, b)$ age trivialmente sobre $\mathcal{G}$, então a única representação

$$\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(G)$$

é a representação trivial, ou seja, $\rho[\lambda] = \text{Id}_G$, para todo $[\lambda] \in \pi_1(B, b)$. De fato, suponhamos que exista uma representação não trivial $\rho : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(G)$. Neste caso, existe $[\lambda] \in \pi_1(B, b)$ tal que $\rho[\lambda] \neq \text{Id}_G$, ou seja, existe $g \in G$ tal que

$$\rho[\lambda](g) \neq g. \quad (2.5)$$

Assim, podemos definir a seguinte multiplicação de $\pi_1(B, b)$ sobre G :

$$\begin{aligned} \cdot : \pi_1(B, b) \times G &\rightarrow G \\ ([\lambda], g) &\mapsto [\lambda] \cdot g = \rho[\lambda](g). \end{aligned}$$

Temos que a multiplicação acima determina uma ação sobre G , pois

(i) $[\lambda] \cdot e = \rho[\lambda](e) = e$, desde que $\rho[\lambda] : G \rightarrow G$ é um automorfismo, onde e denota o elemento identidade de G .

(ii) dados $[\lambda_1], [\lambda_2] \in \pi_1(B, b)$, para todo $g \in G$, temos:

$$\begin{aligned} [\lambda_1] \cdot ([\lambda_2] \cdot g) &= [\lambda_1] \cdot (\rho[\lambda_2](g)) \\ &= \rho[\lambda_1](\rho[\lambda_2](g)) \\ &= (\rho[\lambda_1] \cdot \rho[\lambda_2])(g) \quad (\rho \text{ é um homomorfismo}) \\ &= \rho([\lambda_1] * [\lambda_2])(g) \\ &= [\lambda_1] * [\lambda_2] \cdot g. \end{aligned}$$

De (2.5) temos que existe $g \in G$ tal que

$$[\lambda] \cdot g = \rho[\lambda](g) \neq g, \quad (2.6)$$

o que é uma contradição, pois $\pi_1(B, b)$ age trivialmente sobre G .

Como da Observação 2.3, existe uma correspondência entre os fibrados de grupos sobre B

e as representações $\rho[\lambda] : \pi_1(B, b) \rightarrow \text{Aut}(G)$ e a única representação ρ é a trivial, concluímos que $G_\rho = \mathcal{G} = G$, onde G é o fibrado trivial de grupos sobre B (Vide Exemplo 2.4). Assim, segue da Definição 2.9 que o sistema de coeficientes locais $\mathcal{G}$ sobre B é trivial. $\square$

Exemplo 2.11. Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração com fibra F e base B conexos por caminhos. Então, o sistema de coeficientes locais sobre B , $\mathcal{H}_0(F; R)$ é trivial. Fixemos um ponto $b \in B$ e mostremos que existe um isomorfismo $\Xi : \mathcal{H}_0(F) \rightarrow H_0(F_b)$, com $H_0(F_b) = H_0(F)$ o fibrado trivial de grupos sobre B . Sejam $b_0, b_1 \in B$ e $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$. Desde que B é conexo por caminhos, existem caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow B$ tais que $\alpha(0) = b, \alpha(1) = b_1, \beta(0) = b, \beta(1) = b_0$. Consideremos os homomorfismos $h[\alpha] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_b)$, $h[\beta] : H_0(F_{b_0}) \rightarrow H_0(F_b)$, $h[\lambda] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_{b_0})$, definidos no Exemplo 2.5, os quais são isomorfismos, pela Observação 2.2. Como F é conexo por caminhos, temos que o homomorfismo

$$h[\beta] \circ h[\lambda] \circ h[\alpha]^{-1} = h[\beta * \lambda * \alpha^{-1}] : H_0(F_b) \rightarrow H_0(F_b). \quad (2.7)$$

coincide com o homomorfismo identidade $Id : H_0(F_b) \rightarrow H_0(F_b)$. Assim, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_0(F_{b_1}) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_0(F_{b_0}) \\ \Xi_{b_1} = h[\alpha] \downarrow & & \downarrow \Xi_{b_0} = h[\beta] \\ H_0(F_b) & \xrightarrow{Id} & H_0(F_b) \end{array} \quad (2.8)$$

para todo $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$ e o sistema de coeficientes locais $\mathcal{H}_0(F; R)$ sobre B é trivial.

Observação 2.12. Usando os mesmos argumentos do Exemplo 2.11, prova-se que se $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração com fibra F e base B conexos por caminhos, então o sistema de coeficientes locais sobre B , $\mathcal{H}^0(F; R)$, é trivial.

Denotemos por $C_*(B)$ o grupo das cadeias singulares sobre B . Definimos

$$\begin{aligned} C_p(B; \mathcal{G}) &= \{ \text{funções } c : C_p(B) \rightarrow \cup_{b \in B} G_b; c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \\ &\quad \text{somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \} \\ &= \{ p\text{-cadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}. \end{aligned}$$

onde $e_0 \in \Delta^p$. Uma p -cadeia é chamada *elementar* se $c(\alpha) \neq 0$ para no máximo um p -simplexo singular $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$. Uma p -cadeia típica com coeficientes em $\mathcal{G}$ pode ser escrita como uma soma formal de p -cadeias elementares

$$c = \sum g_i \alpha_i, \text{ onde } g_i \in G_{\alpha_i(e_0)}.$$

Para definir o bordo de uma p -cadeia elementar c , observemos que se $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$,

$$(\partial_i \alpha)(e_0) = \begin{cases} \alpha(e_0), & \text{se } i \neq 0; \\ \alpha(e_1), & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

onde $\partial : C_p(B) \rightarrow C_{p-1}(B)$. Consideremos o caminho $\lambda_\alpha : I \rightarrow B$, definido por

$$\lambda_\alpha(t) = \alpha(te_0 + (1-t)e_1),$$

unindo $\alpha(e_1)$ a $\alpha(e_0)$. Segue que a classe de homotopia $[\lambda_\alpha] \in \Pi_1(B, \alpha(e_1), \alpha(e_0))$ induz um isomorfismo $h[\lambda_\alpha] : G_{\alpha(e_0)} \rightarrow G_{\alpha(e_1)}$. O operador bordo $\partial : C_p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C_{p-1}(B; \mathcal{G})$, definido pela fórmula

$$\partial(c) = \partial \left(\sum_i g_i \alpha_i \right) = \sum_i \left(h[\lambda_{\alpha_i}](g_i) \cdot \partial_0 \alpha_i + \sum_{j=1}^p (-1)^j g_i \partial_j \alpha_i \right),$$

é um homomorfismo, o qual satisfaz $\partial \circ \partial = 0$ (para detalhes, vide [47, Cap.6, §2]).

Definição 2.13. O grupo graduado $C_*(B; \mathcal{G})$ é um complexo de cadeias e seus grupos de homologia $H_p(B; \mathcal{G}) = H_p(C_*(B; \mathcal{G}), \partial)$, são chamados grupos de homologia de B com coeficientes no fibrado de grupos $\mathcal{G}$, também conhecidos como grupos de homologia de B com coeficientes locais em $\mathcal{G}$.

Seja $\mathcal{G}$ um fibrado de grupos e denotemos por $C^*(B)$ o grupo de cocadeias singulares sobre B . Definimos

$$\begin{aligned} C^p(B; \mathcal{G}) &= \{ \text{funções } c : C^p(B) \rightarrow \cup_{b \in B} G_b; c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \\ &\quad \text{somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \}, \\ &= \{ p\text{-cocadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}, \end{aligned}$$

onde $e_0 \in \Delta^p$. O conjunto $C^p(B; \mathcal{G})$ é um grupo abeliano com a operação de adição de funções. O operador cobordo $\delta : C^p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C^{p+1}(B; \mathcal{G})$ é definido pela fórmula

$$(-1)^p \delta c(\alpha) = h[\lambda_\alpha^{-1}]c(\partial_0 \alpha) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i c(\partial_i \alpha), \quad (2.9)$$

para cada simplexo singular $\alpha : \Delta^{p+1} \rightarrow B$, onde $h[\lambda_\alpha^{-1}] : G_{\alpha(e_1)} \rightarrow G_{\alpha(e_0)}$. Então, δ é um homomorfismo e $\delta \circ \delta = 0$ (vide [47, pg.270]).

Definição 2.14. O grupo graduado $C^*(B; \mathcal{G})$ é um complexo de cocadeias e seus grupos de cohomologia $H^p(B; \mathcal{G}) = H^p(C^*(B; \mathcal{G}), \delta)$, são chamados grupos de cohomologia de B com coeficientes locais no fibrado de grupos $\mathcal{G}$.

Uma importante propriedade dos grupos de homologia e cohomologia de B com

coeficientes locais no fibrado de grupos $\mathcal{G}$ é dada pelo seguinte lema (para demonstração vide [31, Cap.3, §1, Lema 1.18(2), pg. 104] e [32, Proposição 5.22, pg. 166]).

Lema 2.15. *Se o sistema de coeficientes locais $\mathcal{G}$ sobre B for trivial, então*

$$H_*(B; \mathcal{G}) \cong H_*(B; G) \text{ e } H^*(B; \mathcal{G}) \cong H^*(B; G), \quad (2.10)$$

onde $G = G_b$, para todo $b \in B$.

2.2 Seqüências Espectrais

Nesta seção, apresentamos uma breve descrição dos resultados sobre seqüências espectrais que serão usados no Capítulo 3. Usamos como referências para o estudo deste importante tópico os seguintes textos: [32], [31], [41] e [47].

Definição 2.16. *Um módulo diferencial bigraduado sobre um anel R , é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$, para todo par de inteiros p e q , junto com uma aplicação R -linear $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, o diferencial, de bigrau $(-r, r-1)$ ou $(r, -r+1)$, para algum inteiro r , satisfazendo $d \circ d = 0$.*

Definição 2.17. *O módulo de homologia $H(E)$ é o módulo bigraduado*

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r, q+r-1})}{\operatorname{im}(d : E_{p+r, q-r+1} \rightarrow E_{p,q})}. \quad (2.11)$$

Definição 2.18. *O módulo de cohomologia $H(E)$ é o módulo bigraduado*

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q-r+1})}{\operatorname{im}(d : E^{p-r, q+r-1} \rightarrow E^{p,q})}. \quad (2.12)$$

Definição 2.19. *Uma seqüência espectral do tipo homológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_{*,*}^r, d_r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais têm bigrau $(-r, r-1)$ e $E_{p,q}^{r+1}$ é isomorfo a $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d_r)$.*

Definição 2.20. *Uma seqüência espectral do tipo cohomológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais têm bigrau $(r, -r+1)$ e $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.*

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & E_r^{p,q} & & E_r^{p+1,q} & & \cdots & E_r^{p+r,q} \quad \cdots \\
& \searrow & & & & & \\
\cdots & E_r^{p,q-1} & & & & \vdots & \cdots \\
& & & & & & \\
\cdots & \vdots & & & & E_r^{p+r,q+2-r} & \cdots \\
& & & & & & \\
\cdots & E_r^{p,q+1-r} & & E_r^{p+1,q+1-r} & & \cdots & E_r^{p+r,q+1-r} \quad \cdots \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Observação 2.21. Embora a seqüência espectral esteja indexada para $r = 1, 2, \dots$, essa indexação pode começar em qualquer inteiro e, para as nossas aplicações, a seqüência começa em $r = 2$.

Até o final desta seção, estaremos considerando seqüências espectrais do tipo cohomológicas. As definições e propriedades apresentadas a seguir, também podem ser obtidas no caso de uma seqüência espectral homológica e uma exposição detalhada nesse sentido pode ser encontrada em [32, 41].

Para definir o termo limite de uma seqüência espectral cohomológica, para todo $k \geq r$, denotemos por

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &= \ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}) \\
B_r^{p,q} &= \operatorname{im}(d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q}).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A condição $d_r \circ d_r = 0$, implica que $B_r \subset Z_r \subset E_r$, e segue da Definição 2.18 que $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. Sejam

$$\begin{aligned}
Z(E_{r+1})^{p,q} &= \ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p+r+1,q-r}) \\
B(E_{r+1})^{p,q} &= \operatorname{im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,q+r} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Segue de [27, Teorema 1.10, pg.173], que existem submódulos bigraduados Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r , contendo B_r , tais que $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$, para todo p, q . Assim, $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$ e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r.$$

Além disso, $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando esse processo por indução, obtemos uma seqüência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r,$$

com a propriedade que $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$.

Definição 2.22. Definimos os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \text{ e } B_\infty = \bigcup_n B_n. \quad (2.15)$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$ é chamado o limite da seqüência espectral E .

Definição 2.23. Uma seqüência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsa no N -ésimo termo se o diferencial $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.

Observação 2.24. Uma consequência imediata do fato de uma seqüência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsar no N -ésimo termo, é que $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \cong \cdots \cong E_\infty^{*,*}$.

Definição 2.25. Uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\cdots F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \cdots \subset A. \quad (2.16)$$

Definição 2.26. Dada uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , o módulo graduado associado $E_0^*(A)$ é dado por

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A). \quad (2.17)$$

Observação 2.27. Se H^* é um R -módulo graduado e se F é uma filtração sobre H^* , então $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}$ é dado por

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q}). \quad (2.18)$$

Definição 2.28. Uma seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para um R -módulo graduado H^* , se existe uma filtração F sobre H^* tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F), \quad (2.19)$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da seqüência espectral.

Definição 2.29. Uma seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é uma seqüência espectral do primeiro quadrante, se existe r tal que $E_r^{p,q} = 0$, para $p < 0$ ou $q < 0$.

2.2.1 Álgebras Graduadas e Bigraduadas sobre um corpo

É freqüente o caso em que H^* possui uma estrutura mais rica do que a simples estrutura de espaço vetorial graduado. Por exemplo, quando H^* é o anel de cohomologia de um espaço topológico, H^* é uma álgebra graduada através da estrutura do produto cup. Se H^* é uma álgebra graduada, podemos perguntar como uma seqüência espectral pode determinar esta estrutura. Mais precisamente, munimos a seqüência espectral com uma estrutura algébrica e determinamos o que significa, para tal estrutura, a seqüência espectral convergir para H^* , como um álgebra.

Definição 2.30. Se $H^* = \{H^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ é um espaço vetorial graduado sobre um corpo $\mathbb{K}$, então seja $H^* \otimes_{\mathbb{K}} H^*$ o espaço vetorial graduado dado por

$$(H^* \otimes_{\mathbb{K}} H^*)^n = \bigoplus_{p+q=n} H^p \otimes_{\mathbb{K}} H^q.$$

H^* é uma **álgebra graduada** se existe uma aplicação de espaços vetoriais graduados, chamada **produto**, $\varphi : H^* \otimes_{\mathbb{K}} H^* \rightarrow H^*$, ou seja, para todo p, q , temos uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \varphi : H^p \otimes_{\mathbb{K}} H^q &\rightarrow H^{p+q} \\ a \otimes a' &\mapsto \varphi(a \otimes a') \stackrel{\text{notação}}{=} a \cdot a'. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A aplicação φ deve satisfazer o seguinte diagrama comutativo, que expressa o fato de que a multiplicação sobre H^* é associativa:

$$\begin{array}{ccc} H^* \otimes H^* \otimes H^* & \xrightarrow{\varphi \otimes 1} & H^* \otimes H^* \\ \downarrow 1 \otimes \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^* \otimes H^* & \xrightarrow{\varphi} & H^* \end{array} \quad (2.21)$$

Uma álgebra pode conter também um elemento unidade. Isto é determinado por uma aplicação $\eta : \mathbb{K}^* \rightarrow H^*$, onde $\mathbb{K}^* = \{\mathbb{K}^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ é a álgebra graduada dada por

$$\mathbb{K}^p = \begin{cases} \mathbb{K}, & \text{se } p = 0; \\ \{0\}, & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

A aplicação η deve satisfazer o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K}^* \otimes H^* & \xrightarrow{\eta \otimes id} & H^* \otimes H^* & \xleftarrow{id \otimes \eta} & H^* \otimes \mathbb{K}^* \\ \cong \downarrow & & \downarrow \varphi & & \cong \downarrow \\ H^* & \xlongequal{\quad} & H^* & \xlongequal{\quad} & H^* \end{array} \quad (2.22)$$

Definição 2.31. Se $E^{*,*} = \{E^{p,q}\}_{p,q \in \mathbb{N}}$ é um espaço vetorial bigraduado sobre $\mathbb{K}$, seja $E^{*,*} \otimes_{\mathbb{K}} E^{*,*}$

o espaço vetorial bigraduado dado por

$$(E^{*,*} \otimes_{\mathbb{K}} E^{*,*})^{p,q} = \bigoplus_{\substack{m+n=p \\ r+s=q}} E^{m,r} \otimes_{\mathbb{K}} E^{n,s}.$$

Dizemos que $E^{*,*}$ é uma **álgebra bigraduada**, se existe uma aplicação de espaços vetoriais bigraduados, chamada produto: $\varphi : E^{*,*} \otimes_{\mathbb{K}} E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, isto é, φ possui componentes

$$\begin{aligned} \varphi : E^{m,n} \otimes_{\mathbb{K}} E^{r,s} &\rightarrow E^{m+r,n+s} \\ e \otimes e' &\mapsto \varphi(e \otimes e') \stackrel{\text{notação}}{=} e \cdot e'. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Assumimos também que φ satisfaz as condições análogas de associatividade e da existência de elemento unidade, dadas em 2.21 e 2.22.

Exemplo 2.32. Suponhamos que A^* e B^* sejam álgebras graduadas, com produtos φ e ψ , respectivamente. Se $E^{p,q} = A^p \otimes_{\mathbb{K}} B^q$, definimos uma estrutura de álgebra sobre $E^{*,*}$ pela composição:

$$\begin{aligned} \Phi : E^{p,q} \otimes_{\mathbb{K}} E^{r,s} &= A^p \otimes B^q \otimes A^r \otimes B^s \xrightarrow{1 \otimes T \otimes 1} \\ &A^p \otimes A^r \otimes B^q \otimes B^s \xrightarrow{\varphi \otimes \psi} A^{p+r} \otimes B^{q+s} = E^{p+r,q+s}, \end{aligned}$$

onde $T(b \otimes a) = (-1)^{(\deg a)(\deg b)} a \otimes b$.

O próximo ingrediente em nossas definições é o conceito de diferencial.

Definição 2.33. Uma **álgebra diferencial graduada** (A^*, d) é uma álgebra graduada, juntamente com uma aplicação linear de grau 1, $d : A^* \rightarrow A^*$, tal que d é uma **derivação**, isto é, para todo p, q , $d : A^{p+q} \rightarrow A^{p+q+1}$ satisfaz a **regra de Leibniz**

$$d(a \cdot a') = d(a) \cdot a' + (-1)^{\deg a} a \cdot d(a'), \quad (2.24)$$

onde $a \cdot a' = \varphi(a \otimes a')$, com $\varphi : A^p \otimes_{\mathbb{K}} A^q \rightarrow A^{p+q}$ o produto sobre A^* .

Uma **álgebra diferencial bigraduada** $(E^{*,*}, d)$ é uma álgebra bigraduada, juntamente com uma aplicação de grau total 1,

$$d : \bigoplus_{p+q=n} E^{p,q} \rightarrow \bigoplus_{r+s=n+1} E^{r,s}$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$d(e \cdot e') = d(e) \cdot e' + (-1)^{p+q} e \cdot d(e'), \quad \forall e \in E^{p,q}, e' \in E^{r,s}. \quad (2.25)$$

Exemplo 2.34. Podemos construir uma álgebra diferencial bigraduada a partir de duas álgebras diferenciais graduadas (A^*, d) e (B^*, d') tomando $E^{*,*} = A^* \otimes B^*$ e definindo o diferencial $d_{\otimes}$

sobre $E^{*,*}$ pela fórmula

$$d_{\otimes}(a \otimes b) = d(a) \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes d'(b). \quad (2.26)$$

2.2.2 Seqüência espectral de álgebras sobre R

Nesta seção, a fim de definirmos uma seqüência espectral de álgebras sobre R , faremos um breve resumo das definições dadas na Seção 2.2.1, para o caso em que R é um anel comutativo com identidade.

Definição 2.35. *Sejam (A, d_A) e (B, d_B) módulos diferenciais graduados sobre R . O **produto tensorial de R -módulos diferenciais graduados** $(A \otimes_R B, d_{\otimes})$ é dado por*

$$(A \otimes_R B)^n = \bigoplus_{p+q=n} A^p \otimes_R B^q,$$

com $d_{\otimes}(a \otimes b) = d_A(a) \otimes b + (-1)^{\deg a} a \otimes d_B(b)$.

Uma **álgebra diferencial graduada** sobre R é um módulo diferencial graduado (A, d) junto com um morfismo de módulos diferenciais graduados

$$\psi : (A \otimes_R A, d_{\otimes}) \rightarrow (A, d)$$

para o qual os diagramas 2.21 e 2.22 comutam, expressando a associatividade e, caso exista, a propriedade de uma unidade em A^0 .

O **produto tensorial de módulos diferenciais bigraduados sobre R** é definido como segue. Dados $(E^{*,*}, d_E)$ e $(\bar{E}^{*,*}, d_{\bar{E}})$ R -módulos diferenciais bigraduados, seja

$$(E \otimes_R \bar{E})^{p,q} = \bigoplus_{r+t=p, s+u=q} E^{r,s} \otimes_R \bar{E}^{t,u},$$

com $d_{\otimes}(e \otimes \bar{e}) = d_E(e) \otimes \bar{e} + (-1)^{r+s} e \otimes d_{\bar{E}}(\bar{e})$, sempre que $e \in E^{r,s}$ e $\bar{e} \in \bar{E}^{t,u}$.

Uma **álgebra diferencial bigraduada** sobre R é um módulo diferencial bigraduado $(E^{*,*}, d)$ junto com um morfismo de álgebras diferenciais bigraduadas $\psi : (E \otimes_R E)^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$ para o qual os diagramas usuais comutam.

Assumindo os conceitos anteriores, estamos em condições de definir uma seqüência espectral de álgebras, como segue.

Definição 2.36. *Uma **seqüência espectral de álgebras sobre R** é uma seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, junto com estruturas de álgebra $\psi_r : E_r \otimes_R E_r \rightarrow E_r$, para cada r , tal que ψ_{r+1} pode ser escrito como sendo a composição*

$$\begin{aligned} \psi : E_{r+1} \otimes_R E_{r+1} &\longrightarrow H(E_r) \otimes H(E_r) \\ &\xrightarrow{p} H(E_r \otimes_R E_r) \xrightarrow{H(\psi_r)} H(E_r) \xrightarrow{\cong} E_{r+1} \end{aligned}$$

onde o homomorfismo p é dado por $p([u] \otimes [v]) = [u \otimes v]$

Definição 2.37. Suponhamos que F^* seja uma filtração de uma álgebra graduada H^* , com produto φ . Dizemos que a filtração é **estável** com relação ao produto se

$$\varphi(F^r H^* \otimes F^s H^*) \subset F^{r+s} H^*$$

Observação 2.38. Uma filtração F^* sobre H^* que é **estável** com relação a um produto sobre H^* , induz uma estrutura de álgebra bigraduada sobre o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}(H^*)$.

Definição 2.39. Dizemos que uma seqüência espectral de álgebras $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, **converge para uma álgebra graduada H^* , como uma álgebra graduada**, se existe uma filtração estável sobre H^* tal que o termo E_∞ da seqüência espectral é isomorfo, como uma álgebra bigraduada, à álgebra bigraduada associada, $E_0^{*,*}(H^*, F^*)$.

Observação 2.40. Uma seqüência espectral de álgebras converge para H^* , como uma álgebra graduada, quando a estrutura de álgebra sobre $E_\infty^{*,*}$ é isomorfa à estrutura de álgebra induzida sobre a álgebra bigraduada $E_0^{*,*}(H^*, F^*)$, onde F^* é uma filtração estável de H^* .

Definição 2.41. Uma álgebra graduada H^* é chamada **álgebra graduada comutativa** se

$$x \cdot y = (-1)^{pq} y \cdot x, \text{ para todo } x \in H^p \text{ e } y \in H^q.$$

Nas aplicações em espaços topológicos, em geral, H^* é uma álgebra graduada comutativa. Assim, introduzimos a noção análoga para álgebras bigraduadas.

Definição 2.42. Dizemos que uma álgebra bigraduada $E^{*,*}$ é uma **álgebra graduada comutativa**, se

$$x \cdot y = (-1)^{(r+s)(p+q)} y \cdot x, \text{ para todo } x \in E^{p,q} \text{ e } y \in E^{r,s}.$$

Observação 2.43. Consideremos o funtor

$$\text{Tot} : \text{Alg-Bigraduadas} \rightarrow \text{Alg-Graduadas}, \quad (2.27)$$

da categoria das álgebras bigraduadas com morfismos de bi-grau $(0, 0)$, na categoria das álgebras graduadas com morfismos de grau 0, dado por

$$(\text{Tot} E^{*,*})^n = \bigoplus_{p+q=n} E^{p,q},$$

chamado o **complexo total** e, denotado por $\text{Tot}(E^{*,*}) = \{(\text{Tot} E^{*,*})^n; n \in \mathbb{Z}\}$. Desde que a multiplicação sobre $E^{*,*}$ determina uma aplicação $E^{p,r} \otimes E^{q,s} \rightarrow E^{p+q, r+s}$, se consideramos x e y pertencendo ao complexo total, a condição de comutatividade graduada de $E^{*,*}$ é a mesma

comutatividade graduada para $\text{Tot}(E^{*,*})$. Observamos também que $\text{Tot}E_0^{*,*}(H^*) \cong H^*$, como espaços vetoriais graduados, quando H^* é filtrado.

AFIRMAÇÃO 2.44. *Sejam A^* e B^* duas álgebras comutativas graduadas com produtos φ e ψ , respectivamente. Então, a álgebra bigraduada $A^* \otimes B^*$ do Exemplo 2.34 é uma álgebra bigraduada comutativa.*

Demonstração. De fato, sejam $a^p \in A^p$, $a^q \in A^q$, $b^r \in B^r$ e $b^s \in B^s$. Sabemos pelo Exemplo 2.34, que o produto em $A^* \otimes B^*$ é dado por

$$\Psi((a^p, b^q), (a^r, b^s)) = \varphi(a^p \otimes (-1)^{r_q} a^r) \otimes \psi(b^q \otimes b^s).$$

Mas, os produtos φ e ψ são comutativos, então

$$\varphi(a^p \otimes (-1)^{r_q} a^r) \otimes \psi(b^q \otimes b^s) = (-1)^{pr} \varphi((-1)^{r_q} a^r \otimes a^p) \otimes (-1)^{qs} \psi(b^s \otimes b^q)$$

e, como φ é linear, segue que

$$(-1)^{pr} \varphi((-1)^{r_q} a^r \otimes a^p) \otimes (-1)^{qs} \psi(b^s \otimes b^q) = (-1)^{pr+rq+qs} \varphi(a^r \otimes a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q).$$

Agora, somando e subtraindo ps no expoente, obtemos

$$(-1)^{pr+rq+qs} \varphi(a^r \otimes a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q) = (-1)^{(p+q)(r+s)} (-1)^{ps} \varphi(a^r \otimes a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q).$$

Como φ é linear, segue que

$$(-1)^{(p+q)(r+s)} (-1)^{ps} \varphi(a^r \otimes a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q) = (-1)^{(p+q)(r+s)} \varphi(a^r \otimes (-1)^{ps} a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q).$$

Assim, da definição do produto Ψ , temos

$$(-1)^{(p+q)(r+s)} \varphi(a^r \otimes (-1)^{ps} a^p) \otimes \psi(b^s \otimes b^q) = (-1)^{(p+q)(r+s)} \Psi((a^r \otimes b^s), (a^p \otimes b^q)).$$

Segue o resultado. □

São válidos os seguintes teoremas de existência da sequência espectral de Leray-Serre para fibrações (para demonstração vide [32, Capítulo 5, Teoremas 5.1 e 5.2, pg. 134, 135]).

Teorema 2.45. (A Sequência Espectral Homológica de Leray-Serre) *Seja G um grupo abeliano. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos e F é conexo, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, convergindo para $H_*(E; G)$, com*

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G)), \quad (2.28)$$

a homologia de B com coeficientes locais na homologia de F , a fibra de p . Além disso, essa sequência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

Teorema 2.46. (A Seqüência Espectral Cohomológica de Leray-Serre) *Seja R um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos e F é conexo, existe uma seqüência espectral do primeiro quadrante de álgebras, $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, convergindo para $H^*(E; R)$ como uma álgebra, com*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)), \quad (2.29)$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia de F , a fibra de p . Essa seqüência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras. Além disso, o produto cup $\smile$ sobre a cohomologia com coeficientes locais e o produto $\cdot_2$ sobre $E_2^{*,*}$ estão relacionados pela fórmula:

$$u \cdot_2 v = (-1)^{p'q'} u \smile v,$$

onde $u \in E_2^{p,q}$ e $v \in E_2^{p',q'}$.

Com a introdução de algumas hipóteses adicionais, a seqüência espectral de Leray-Serre associada a uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ pode ser simplificada como segue: suponhamos que o sistema de coeficientes locais sobre B , determinado pela fibra F , seja trivial, onde B é conexo por caminhos e F é conexo. Então, segue do Teorema 2.46 que

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} &\cong H^p(B; H^0(F; R)) \cong H^p(B; R) \\ E_2^{0,q} &\cong H^0(B; H^q(F; R)) \cong H^q(F; R). \end{aligned}$$

Note que $E_2^{p,0}$ e $E_2^{0,q}$ são ambos sub-álgebras da álgebra bigraduada $E_2^{*,*}$. Nessas condições, temos a seguinte

Proposição 2.47 (McCleary [32], Capítulo 5, Proposição 5.6, pg. 140). *Quando restritos às sub-álgebras $E_2^{p,0}$ e $E_2^{0,q}$, a estrutura de produto na seqüência espectral $E_2^{*,*}$ coincide com a estrutura do produto cup sobre $H^*(B; R)$ e $H^*(F; R)$, respectivamente. Além disso, se para todo p, q , $H^p(B; R)$ e $H^q(F; R)$ forem R -módulos livres do tipo finito¹ e se o sistema de coeficientes locais sobre B for trivial,*

$$E_2^{*,*} \cong H^*(B, R) \otimes_R H^*(F, R),$$

como uma álgebra bigraduada.

Observação 2.48. Consideremos uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ nas mesmas hipóteses anteriores. Então,

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B, H^q(F, R)) \cong H^p(B, R) \otimes_R H^q(F, R).$$

Denotemos por $\smile$ o produto cup em $H^*(B; H^*(F; R))$, $\smile_B$ o produto cup em $H^*(B; R)$ e

¹Vide Apêndice, Definição A.18

por $\smile_F$ o produto cup em $H^*(F; R)$. Assim,

$$(a \otimes b) \smile (c \otimes d) = (a \smile_B c) \otimes (b \smile_F d), \quad (2.30)$$

onde $a \in H^p(B; R)$, $b \in H^q(F; R)$, $c \in H^{p'}(B; R)$ e $d \in H^{q'}(F; R)$. Deste modo,

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \cdot_2 (c \otimes d) &= (-1)^{(\deg c)(\deg b)} (a \otimes b) \smile (c \otimes d) \\ &= (-1)^{(\deg c)(\deg b)} (a \smile_B c) \otimes (b \smile_F d). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Em particular, se $b = 1 \in H^0(B; R)$ ou $c = 1 \in H^0(F; R)$, temos

$$\begin{aligned} (a \otimes 1) \cdot_2 (c \otimes d) &= (a \smile_B c) \otimes d = (a \otimes 1) \smile (c \otimes d) \\ (a \otimes b) \cdot_2 (1 \otimes d) &= a \otimes (b \smile_F d) = (a \otimes b) \smile (1 \otimes d) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Teorema 2.49. *Seja $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ uma fibração com B conexo por caminhos e F conexo, para a qual o sistema de coeficientes locais sobre B é trivial. Então, as composições*

$$\begin{aligned} H^q(B; R) = E_2^{q,0} \twoheadrightarrow E_3^{q,0} \twoheadrightarrow \dots \\ \twoheadrightarrow E_q^{q,0} \twoheadrightarrow E_{q+1}^{q,0} = E_\infty^{q,0} \subset H^q(E; R) \quad e \end{aligned}$$

$$H^q(E; R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,q} = E_{q+1}^{0,q} \subset E_q^{0,q} \dots \subset E_2^{0,q} = H^q(F; R)$$

são os homomorfismos $\pi^* : H^q(B; R) \rightarrow H^q(E; R)$ e $i^* : H^q(E; R) \rightarrow H^q(F; R)$.

2.3 Álgebra Exterior e Álgebra de Hopf

Definição 2.50. *Seja R um anel comutativo com identidade. A **Álgebra Exterior** $\Lambda_R[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$ sobre R é o R -módulo livre cuja base são os produtos finitos $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$, onde $i_1 < \dots < i_k$, com multiplicação definida pelas regras:*

$$\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i \quad e \quad \alpha_i^2 = 0,$$

a segunda relação sendo um caso especial da primeira, se $2 \neq 0$ em R . O produto vazio dos α_i 's é permitido e fornece um elemento identidade 1 em $\Lambda_R[\alpha_1, \alpha_2, \dots]$.

Definição 2.51. *Uma **Álgebra de Hopf** é uma álgebra graduada ² $A = \bigoplus_{n \geq 0} A^n$ sobre um anel comutativo com identidade R , satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *existe um elemento identidade $1 \in A^0$, tal que a função $R \rightarrow A^0$ dada por $r \mapsto r \cdot 1$ é um isomorfismo.*

(ii) *existe um homomorfismo de álgebras graduadas, $\Delta : A \rightarrow A \otimes_R A$, chamado aplicação **diagonal** ou*

²Vide Seção 2.2.2.

co-produto, satisfazendo para cada $\alpha \in A^n$, $n > 0$, e $\alpha'_j, \alpha''_j \in A^j$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_{0 < i < n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}, \text{ onde } |\alpha'_j| = j = |\alpha''_j|,$$

onde $\otimes$ significa $\otimes_R$. A multiplicação em $A \otimes A$ é dada pela fórmula:

$$(\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \delta) = (-1)^{jk}(\alpha\gamma \otimes \beta\delta), \text{ onde } \beta \in A^j \text{ e } \gamma \in A^k.$$

Observação 2.52. Em geral, em uma álgebra de Hopf, a multiplicação não é associativa ou comutativa, no sentido graduado.

Apresentamos as seguir exemplos de álgebras de Hopf³.

Exemplo 2.53. Um dos exemplos mais simples de uma álgebra de Hopf é o anel de polinômios $R[\alpha]$, onde R é um anel comutativo com identidade. O co-produto $\Delta(\alpha)$ dever ser igual a $\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$, desde que os únicos elementos de $R[\alpha]$ de dimensão menor do que a dimensão de α são os elementos de R em dimensão zero, então os termos α'_i e α''_{n-i} na fórmula do co-produto $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_{0 < i < n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}$ devem ser zero.

Exemplo 2.54. A álgebra exterior $\Lambda_R[\alpha]$ sobre um gerador α na dimensão ímpar é uma álgebra de Hopf, com $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha$.

Exemplo 2.55. Dados um espaço topológico X e R um anel comutativo com identidade, podemos considerar o anel de cohomologia $H^*(X; R)$ como uma álgebra sobre R , em vez de simplesmente considerá-lo como um anel. Suponhamos que X seja um H -espaço⁴ satisfazendo as seguintes condições:

- (i) X é conexo por caminhos, logo $H^0(X; R) \cong R$.
- (ii) $H^n(X; R)$ é um R -módulo livre finitamente gerado, para cada n . Então, o produto cross

$$H^*(X; R) \otimes_R H^*(X; R) \rightarrow H^*(X \times X; R)$$

é um isomorfismo. A multiplicação $\mu : X \times X \rightarrow X$ induz uma aplicação $\mu^* : H^*(X; R) \rightarrow H^*(X \times X; R)$, que quando combinada com o produto cross em (ii), produz uma aplicação:

$$\Delta : H^*(X; R) \xrightarrow{\mu^*} H^*(X \times X; R) \longrightarrow H^*(X; R) \otimes_R H^*(X; R)$$

onde a segunda seta denota a inversa do produto cross. Δ é um homomorfismo de álgebras, desde que μ^* e o produto cross são homomorfismos de álgebras. A propriedade chave da

³Detalhes podem ser encontrados em [24], Capítulo 3, exemplos 3C.1 e 3C.2.

⁴Um espaço topológico X é um H -espaço se existe uma multiplicação contínua $\mu : X \times X \rightarrow X$ e um elemento $e \in X$ tal que as aplicações $X \rightarrow X$ dadas por $x \mapsto \mu(x, e)$ e $x \mapsto \mu(e, x)$ são homotópicas à aplicação identidade.

aplicação Δ^5 é que para qualquer $\alpha \in H^n(X; R)$, com $n > 0$:

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha + \sum_{0 < i < n} \alpha'_i \otimes \alpha''_{n-i}, \text{ onde } |\alpha'_j| = j = |\alpha''_j|.$$

Portanto, $H^*(X; R)$ é uma álgebra de Hopf associativa e comutativa.

⁵Para demonstração, vide [24], p. 283.

Cálculo do anel de cohomologia do espaço de órbitas de $\mathbb{Z}_p$ -ações livres sobre produtos de esferas

O objetivo principal deste capítulo é apresentar um estudo detalhado da estrutura do anel de cohomologia do espaço de órbitas de grupos de transformações livres do produto de duas esferas $S^m \times S^n$, no caso específico em que o grupo $G = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar. O cálculo do anel de cohomologia de tais espaços foi desenvolvido por R. M. Dotzel, T. B. Singh e S. P. Tripathi no artigo *The cohomology Rings of the Orbit Spaces of Free Transformation Groups of the Product of Two Spheres* [14], também para os casos $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$.

Na Seção 3.1, introduzimos os pré-requisitos necessários para a demonstração do teorema principal deste capítulo. Na Seção 3.2, descrevemos os cálculos detalhados dos resultados provados em [14], quando $G = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar. Na Seção 3.3, enunciamos as versões do Teorema principal nos casos em que $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$. Em todo este capítulo estaremos considerando espaços topológicos paracompactos Hausdorff.

3.1 Preliminares

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos e resultados sobre a teoria de grupos de transformações necessários para a demonstração dos teoremas principais deste capítulo. O conceito de espaço finitístico foi introduzido por Richard G. Swan, no artigo *A New Method in Fixed Point Theory* [44], em seu estudo de teoria de ponto fixo. Tais espaços têm se mostrado bastante úteis na teoria de cohomologia de grupos de transformação (Vide [8], [21] e [23]). Propriedades conhecidas de tais espaços serão assumidas aqui e podem ser encontradas nos seguintes trabalhos: *On Certain Constructions in Finitistic Spaces* de Satya Deo e Mohan Singh [18], *Compact Lie Group Actions on Finitistic Spaces* de Satya Deo e Hari Shankar Tripathi [19], *On Finitistic*

Spaces and Related Notions de Satya Deo and Janak Singh Andotra [20] e *Cohomology Projective Spaces of Finite Cohomological Dimension need not be finitistic* de Satya Deo [22]. Alguns resultados conhecidos sobre a estrutura do anel de cohomologia do conjunto dos pontos fixos pela ação de um grupo finito sobre espaços finitísticos, provados por Bredon em *Introduction to Compact Transformation Groups* [8] e fatos relacionados com ações de um grupo cíclico de ordem prima p sobre o anel de cohomologia de espaços que possuem a mesma cohomologia módulo p que um produto de esferas provados por J. C. SU em *Periodic Transformations on the Product of Two Spheres* [43], são apresentados sem demonstração.

Definição 3.1. Seja $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de um espaço topológico X . A ordem de $\mathcal{U}$, denotada por $\text{ord } \mathcal{U}$, é o maior inteiro n tal que a família $\mathcal{U}$ contém n elementos com intersecção não vazia. Dizemos que uma família $\mathcal{U}$ possui ordem finita se $\text{ord } \mathcal{U} = n$, para algum n . Se tal inteiro não existe, dizemos que a família $\mathcal{U}$ possui ordem ∞ .

Observação 3.2. Observemos que se a ordem de uma família $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é igual a n , então para cada $n + 1$ índices distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \Lambda$ temos $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \cap \dots \cap U_{\lambda_{n+1}} = \emptyset$. Em particular, uma família de ordem -1 consiste apenas do conjunto vazio e uma família de ordem 0 consiste de conjuntos dois a dois disjuntos que não são todos vazios.

Definição 3.3. Um espaço topológico X possui dimensão topológica menor ou igual a n e escrevemos $\dim X \leq n$, onde $n \geq 0$, se toda cobertura aberta $\mathcal{U}$ de X pode ser refinada por uma cobertura aberta $\mathcal{V}$ de X de ordem $\text{ord } \mathcal{V} \leq n + 1$. Se $\dim X \leq n$ e se a afirmação $\dim X \leq n - 1$ for falsa, dizemos que X possui dimensão finita e escrevemos $\dim X = n$. Se a afirmação $\dim X \leq n$ for falsa, para todo n , dizemos que X possui dimensão infinita e escrevemos $\dim X = \infty$. Para o conjunto vazio, definimos $\dim \emptyset = -1$.

Definição 3.4. Dizemos que um espaço topológico X é finitístico (Vide [8], p.133) se satisfaz a condição de Swan, ou seja, se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto com ordem finita.

Observação 3.5. Todos os espaços compactos e todos os espaços de dimensão finita (no sentido de dimensão topológica) são espaços finitísticos, assim como subespaços fechados de um espaço finitístico.

Definição 3.6. Dado um G -espaço X , um ponto $x \in X$ é chamado ponto fixo pela ação de G se $Gx = \{x\}$. O subespaço de todos os pontos fixos pela ação de G sobre X será denotado por

$$X^G = \{x \in X; gx = x, \forall g \in G\}. \quad (3.1)$$

Lema 3.7. [Bredon, [8], Capítulo VII, Proposição 1.1, p. 371] Sejam $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é primo, e $\varphi : X_G \rightarrow X/G$ a induzida da projeção equivariante $X \times E_G \rightarrow X$ entre os espaços de órbitas. Então,

$$\varphi^* : \check{H}^k(X/G, A/G \cup X^G) \rightarrow \check{H}^k(X_G, A_G \cup (X^G)_G)$$

é um isomorfismo, para coeficientes arbitrários e para qualquer subespaço fechado invariante $A \subset X$. Este resultado também é válido para $G = S^1$ e coeficientes racionais.

Lema 3.8. [Bredon, [8], Capítulo VII, Teorema 1.5, p. 374] *Suponhamos que p seja primo e que $G = \mathbb{Z}_p$ atue sobre um espaço finitístico X . Seja $A \subset X$ um subespaço fechado e invariante tal que $\check{H}^i(X, A; \mathbb{Z}_p) = \{0\}$, para $i > n$. Então,*

$$j^* : \check{H}^k(X_G, A_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow \check{H}^k((X^G)_G, (X^G)_G \cap A_G; \mathbb{Z}_p)$$

é um isomorfismo, para $k > n$.

Lema 3.9 (Bredon, [8], Capítulo III, Teorema 7.10, p. 145). *Seja X um G -espaço finitístico, onde G é um grupo cíclico de ordem prima p . Se $rk[\check{H}^i(X; \mathbb{Z}_p)]^1 < \infty, \forall i \geq 0$, e se as características de Euler² estiverem definidas em termos da cohomologia de Čech módulo p , então:*

$$\chi(X) + (p-1)\chi(X^G) = p \cdot \chi(X/G).$$

Lema 3.10 (Bredon [8], Capítulo VII, Teorema 1.6, p. 374). *Seja $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é primo, agindo sobre um espaço finitístico X . Suponhamos que $\sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X; \mathbb{Z}_p)] < \infty$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $G = \mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ e a sequência espectral de Leray Serre associada à fibração $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{\pi} B_G$ colapsa no E_2 -termo³, com $E_2^{r,q} = \check{H}^r(B_G; \check{H}^q(X; \mathbb{Z}_p)) \Rightarrow \check{H}^{r+q}(X_G; \mathbb{Z}_p)$.

(2) $\sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X^G; \mathbb{Z}_p)] = \sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X; \mathbb{Z}_p)]$, onde X^G denota o subespaço dos pontos fixos pela ação de $G = \mathbb{Z}_p$ sobre X .

Os dois lemas a seguir foram provados por J. C. Su em [43]. Seja X um espaço paracompacto⁴ (ou compacto Hausdorff) que possui a mesma cohomologia módulo p que um produto de esferas $S^m \times S^n$ e $G = \mathbb{Z}_p$, o grupo cíclico de ordem prima p .

Definição 3.11. *Um espaço topológico é do tipo finito se $\check{H}_i(X; \mathbb{Z})$ for finitamente gerado, para todo i .*

Lema 3.12 (J. C. Su [43], Seção 4, p. 376). *Se $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ for do tipo finito, então $G = \mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ somente se $p = 2$ ou $p = 3$.*

Lema 3.13 (J. C. Su [43], Teorema 4.7, p. 378). *Suponhamos que $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ seja do tipo finito. Se $p = 3$ e se $G = \mathbb{Z}_3$ age não trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_3)$, então $X^G = \emptyset$.*

De agora em diante, denotaremos por $X \sim_p S^m \times S^n$ um espaço finitístico⁵ com anel de cohomologia módulo p isomorfo a um produto de esferas $S^m \times S^n$, o qual admite ação do grupo $G = \mathbb{Z}_p$, com p primo. Seja X^G o subespaço dos pontos fixos pela ação de $G = \mathbb{Z}_p$ sobre X . As proposições provadas a seguir serão usadas nas demonstrações dos teoremas principais deste capítulo.

¹Como p é primo, $\mathbb{Z}_p$ é corpo e rk denota o rank ou a dimensão do espaço vetorial $\check{H}^i(X; \mathbb{Z}_p)$, $\forall i \geq 0$.

²Vide Apêndice A, Definição A.22.

³Vide Definição 2.23

⁴Vide Apêndice A, Seção A.7

⁵Vide Definição 3.4

Proposição 3.14. *Se $G = \mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ e se a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{\pi} B_G$ colapsa no E_2 -termo, então $\sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X^G; \mathbb{Z}_p)] = 4$.*

Demonstração. De fato, como o anel de cohomologia de X é isomorfo ao anel de cohomologia de um produto de esferas $S^m \times S^n$, temos

$$\check{H}^q(X; \mathbb{Z}_p) \cong \check{H}^q(S^m \times S^n; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} m \neq n \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & \text{se } q = 0, q = m, q = n, q = m + n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \\ m = n \begin{cases} \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, & \text{se } q = m \\ \mathbb{Z}_p, & \text{se } q = 0, q = m + n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{cases}$$

Assim, para $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X, \mathbb{Z}_p)] &= rk[\check{H}^0(X; \mathbb{Z}_p)] + rk[\check{H}^m(X; \mathbb{Z}_p)] + rk[\check{H}^n(X; \mathbb{Z}_p)] + rk[\check{H}^{m+n}(X; \mathbb{Z}_p)] \\ &= rk[\mathbb{Z}_p] + rk[\mathbb{Z}_p] + rk[\mathbb{Z}_p] + rk[\mathbb{Z}_p] \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4. \end{aligned}$$

No caso em que $m = n$, temos:

$$\begin{aligned} \sum rk[\check{H}^i(X, \mathbb{Z}_p)] &= rk[\check{H}^0(X; \mathbb{Z}_p)] + rk[\check{H}^m(X; \mathbb{Z}_p)] + rk[\check{H}^{m+n}(X; \mathbb{Z}_p)] \\ &= rk[\mathbb{Z}_p] + rk[\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p] + rk[\mathbb{Z}_p] \\ &= 1 + 2 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Em qualquer desses casos, $\sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X, \mathbb{Z}_p)] < \infty$. Agora, como por hipótese $G = \mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ e a sequência espectral de Leray-Serre associada à fibração $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{\pi} B_G$ colapsa no E_2 -termo, com $E_2^{r,q} = \check{H}^r(B_G; \check{H}^q(X; \mathbb{Z}_p)) \Rightarrow \check{H}^{r+q}(X_G; \mathbb{Z}_p)$, segue do Lema 3.10, que

$$\sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X^G, \mathbb{Z}_p)] = \sum_{i \geq 0} rk[\check{H}^i(X, \mathbb{Z}_p)] = 4.$$

□

Proposição 3.15. *Se m e n são pares e se $p > 2$, então $X^G \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que $X^G = \emptyset$. Nesse caso, temos $\chi(X^G) = 0$ e desde que $\chi(X) = \sum_{i \geq 0} rk[\check{H}_i(X; \mathbb{Z}_p)] = 4$, segue do Lema 3.9 que

$$\chi(X) + (p-1)\chi(X^G) = p \cdot \chi(X/G),$$

ou seja, $p \cdot \chi(X/G) = 4$. Assim, p divide 4, o que é uma contradição, desde que $p > 2$ é primo. Portanto, $X^G \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 3.16. *Seja $p > 2$ e suponhamos que $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ seja do tipo finito e que $G = \mathbb{Z}_p$ age não trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$. Então, $p = 3$ e $X^G \neq \emptyset$.*

Demonstração. Segue do Lema 3.12 que, se $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ é do tipo finito, $\mathbb{Z}_p$ pode agir não trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_p)$ somente se $p = 2$ ou $p = 3$. Assim, concluímos que $p = 3$. Mais ainda, como $G = \mathbb{Z}_3$ age não trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_3)$ e $\check{H}^*(X; \mathbb{Z})$ é do tipo finito, segue do Lema 3.13 que $X^G \neq \emptyset$. $\square$

Proposição 3.17 (Bredon [8], Capítulo 7, Corolário 7.5, pg. 407). *Se $p = 2$ e $G = \mathbb{Z}_2$ age não trivialmente sobre $\check{H}^*(X; \mathbb{Z}_2)$, então $m = n$, $X^G \neq \emptyset$ e $X^G \sim_2 S^m$.*

Observação 3.18. Desde que, para $p \geq 2$, $G = \mathbb{Z}_p$ é um grupo topológico discreto, temos $\pi_0(G) \cong G$ e $\pi_i(G) = \{0\}$, $\forall i > 0$. Assim, $\pi_1(B_G) \cong G$ e $\pi_i(B_G) = \{0\}$, $\forall i \neq 1$. Segue que B_G tem o mesmo tipo de homotopia de um espaço de Eilenberg-Mac Lane⁶ do tipo $K(G, 1)$ e E_G é o seu espaço de recobrimento universal.⁷ Por outro lado, temos do Exemplo 1.50 e de [24, Capítulo 3, Exemplo 3E2, p. 304] que:

$$\check{H}^*(B_G; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p[t], & \text{se } \deg t = 1, p = 2; \\ \wedge(s) \otimes \mathbb{Z}_p[t], & \text{se } \deg s = 1, t = \beta(s), p > 2; \end{cases}$$

onde β é o homomorfismo de Bockstein⁸ em cohomologia associado à seqüência

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

e $\wedge(s) = \wedge_{\mathbb{Z}_p}(s)$ é uma álgebra exterior⁹. Em outras palavras, para $p > 2$, $s \in \check{H}^1(B_G; \mathbb{Z}_p)$, $\beta(s) = t \in \check{H}^2(B_G; \mathbb{Z}_p)$ e a estrutura deste anel de cohomologia¹⁰, para cada $k \geq 0$, é dada por:

$$\check{H}^k(B_G; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} st^i, & \text{se } k = 2i + 1 \\ t^i, & \text{se } k = 2i. \end{cases}$$

Para o cálculo do anel de cohomologia do espaço de órbitas X/G é preciso conhecer a estrutura do anel de cohomologia do espaço $X \sim_p S^m \times S^n$, a qual é dada no exemplo a seguir.

Exemplo 3.19. Sejam $p \geq 2$ e $X \sim_p S^m \times S^n$. Então, o anel de cohomologia de X possui a

⁶Vide Apêndice A, Definição A.23.

⁷Vide McCleary [32], Observação (3), pg. 212.

⁸Vide Apêndice A, Seção A.5.

⁹Vide Apêndice A, Seção 2.3, Definição 2.50 e Exemplos 2.53 e 2.54.

¹⁰Onde o produto do anel é o produto cup.

seguinte estrutura (Vide Hatcher [24], Capítulo 3, Exemplo 3.18, p. 220.):

$$\check{H}^*(X, \mathbb{Z}_p) \cong \begin{cases} m \text{ ímpar}, n \text{ ímpar} \left\{ \wedge(v_1, v_2), \quad \text{onde } \deg(v_1) = m \text{ e } \deg(v_2) = n, \right. \\ m \text{ ímpar}, n \text{ par} \left\{ \wedge(v_1) \otimes \frac{\mathbb{Z}_p[v_2]}{(v_2^2)}, \quad \text{onde } \deg(v_1) = m \text{ e } \deg(v_2) = n, \right. \\ m \text{ par}, n \text{ ímpar} \left\{ \frac{\mathbb{Z}_p[v_1]}{(v_1^2)} \otimes \wedge(v_2), \quad \text{onde } \deg(v_1) = m \text{ e } \deg(v_2) = n, \right. \\ m \text{ par}, n \text{ par} \left\{ \frac{\mathbb{Z}_p[v_1]}{(v_1^2)} \otimes \frac{\mathbb{Z}_p[v_2]}{(v_2^2)}, \quad \text{onde } \deg(v_1) = m \text{ e } \deg(v_2) = n. \right. \end{cases}$$

3.2 O anel de cohomologia do espaço X/G

Por simplicidade de notação, nesta seção H^q denotará o q -ésimo R -módulo de cohomologia de Čech dos espaços em questão.

Teorema 3.20. *Sejam $G = \mathbb{Z}_p$, onde p é um primo ímpar, agindo livremente sobre um espaço finitístico $X \sim_p S^m \times S^n$, $0 < m \leq n$. Suponhamos que $H^*(X; \mathbb{Z})$ seja do tipo finito. Então, $H^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_p[x, y, z]/\phi(x, y, z)$, como uma álgebra graduada comutativa ¹¹, onde $\phi(x, y, z)$ é um dos seguintes ideais graduados:*

- (i) $(x^2, y^{(m+1)/2}, z^2)$, m ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = n$;
- (ii) $(x^2, y^{(m+n+1)/2}, y^{(n-m+1)/2}z - ay^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, m par, n ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = m$, $a, b \in \mathbb{Z}_p$, com $a = 0$, necessariamente quando $n < 2m$;
- (iii) $(x^2, y^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, n ímpar, $\deg x = 1$, $y = \beta(x)$, $\deg z = m$, $b \in \mathbb{Z}_p$, com $b \neq 0$, somente quando m for par e $2m < n$,

onde β é o homomorfismo de Bockstein ¹² em cohomologia associado à seqüência

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0.$$

Demonstração. Consideremos a fibração de Borel¹³

$$X \xrightarrow{i} X_G \xrightarrow{\pi} B_G$$

associada ao G -fibrado universal ¹⁴ $E_G \rightarrow B_G$, com $B_G = E_G/G$, onde $G = \mathbb{Z}_p$. Segue do Teorema 2.46, que existe uma seqüência espectral do primeiro quadrante de álgebras $\{E_r^{*,*}, d_r\}$

¹¹Vide Capítulo 2, Sub-seção 2.2.1, Definição 2.41

¹²Vide Apêndice A, Seção A.5.

¹³Vide Capítulo 1, Definição 1.54.

¹⁴Vide Capítulo 1, Definição 1.39

convergindo para $H^*(X_G, \mathbb{Z}_p)$ como uma álgebra, com

$$E_2^{k,l} \cong H^k(B_G; \mathcal{H}^l(X; \mathbb{Z}_p)),$$

a cohomologia de B_G com coeficientes locais na cohomologia de X , a fibra de π . Além disso, o produto $\cup$ sobre a cohomologia com coeficientes locais e o produto $\cdot_2$ sobre $E_2^{*,*}$ estão relacionados pela fórmula:

$$u \cdot_2 v = (-1)^{k'l} u \cup v, \text{ onde } u \in E_2^{k,l} \text{ e } v \in E_2^{k',l'}.$$

Agora, a ação de $G = \mathbb{Z}_p$ sobre X é livre, logo $X^G = \emptyset$ e como $H^*(X, \mathbb{Z})$ é do tipo finito e $p > 2$, usando a contrapositiva da Proposição 3.16, concluímos que $G = \mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$. Temos ainda da Observação 3.18 que $\pi_1(B_G) \cong \mathbb{Z}_p$, assim $\pi_1(B_G)$ age trivialmente sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$ e segue da Proposição 2.10 que o sistema de coeficientes locais $\mathcal{H}^l(X; \mathbb{Z}_p)$ sobre B_G é trivial, para todo $l \geq 0$. Mais ainda, desde que pela Observação 3.18, $H^*(B_G; \mathbb{Z}_p)$ também é do tipo finito, da Proposição 2.47 temos

$$E_2^{k,l} \cong H^k(B_G, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^l(X, \mathbb{Z}_p).$$

Por outro lado, para $a \in H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$, $b \in H^l(X; \mathbb{Z}_p)$, $c \in H^{k'}(B_G; \mathbb{Z}_p)$ e $d \in H^{l'}(X; \mathbb{Z}_p)$, temos da Observação 2.48 que

$$\begin{aligned} (a \otimes b) \cup (c \otimes d) &= (a \cup_{B_G} c) \otimes (b \cup_X d) \text{ e, conseqüentemente,} \\ (a \otimes b) \cdot_2 (c \otimes d) &= (-1)^{(\deg c)(\deg b)} (a \cup_{B_G} c) \otimes (b \cup_X d). \end{aligned}$$

Em particular, se $b = 1 \in H^0(B_G; \mathbb{Z}_p)$ ou $c = 1 \in H^0(X; \mathbb{Z}_p)$ temos

$$\begin{aligned} (a \otimes 1) \cdot_2 (c \otimes d) &= (a \cup_{B_G} c) \otimes d = (a \otimes 1) \cup (c \otimes d) \\ (a \otimes b) \cdot_2 (1 \otimes d) &= a \otimes (b \cup_X d) = (a \otimes b) \cup (1 \otimes d). \end{aligned}$$

Observação 3.21. Se $a \otimes b \in E_2^{k,l} \cong H^k(B_G, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^l(X, \mathbb{Z}_p)$, então

$$\begin{aligned} a \otimes b &= (a \cup_{B_G} 1) \otimes (1 \cup_X b) \\ &= (a \otimes 1) \cup (1 \otimes b) \\ &= (a \otimes 1) \cdot_2 (1 \otimes b). \end{aligned}$$

Usando novamente o fato de que $X^G = \emptyset$, temos da Proposição 3.15 que m e n não são ambos pares. Além disso, como $H^k(X^G; \mathbb{Z}_p) = \{0\}$, para todo k , temos

$$\sum_{k \geq 0} rk H^k(X^G, \mathbb{Z}_p) = 0$$

e como $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre $H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, segue da contrapositiva da Proposição 3.14, que a seqüência espectral de Leray-Serre $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ associada à fibração $X \hookrightarrow X_G \xrightarrow{\pi} B_G$, convergindo para $H^*(X_G, \mathbb{Z}_p)$, não colapsa no E_2 -termo¹⁵. Assim, seja $r \geq 2$ o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$.

Observemos que, como as únicas linhas não nulas no termo $E_2^{k,l}$ da seqüência espectral são $l = 0, m, n, m + n$, então d_r pode ser diferente de zero apenas nos seguintes casos:

$$r = m + 1 \text{ ou } r = n - m + 1 \text{ ou } r = n + 1 \text{ ou } r = m + n + 1.$$

Mostraremos mais adiante, na Observação 3.25, que $d_r = 0$, para $r = m + n + 1$. Deste modo, a demonstração do Teorema 3.20 será dividida em três casos:

1º Caso: quando $r = m + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (i).

2º Caso: quando $r = n - m + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (ii) .

3º Caso: quando $r = n + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (iii).

Antes de iniciarmos a demonstração de cada um dos casos acima, discutiremos algumas propriedades gerais válidas para $r \geq 2$, decorrentes das propriedades multiplicativas da seqüência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, onde r é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$.

A partir de agora, com o objetivo de esclarecer todos os passos da demonstração do teorema, serão apresentadas diversas observações e afirmações relevantes ao longo da prova.

Observação 3.22. Se $r \geq 2$ é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$, então

$$E_2^{*,*} = E_3^{*,*} = E_4^{*,*} = \dots = E_r^{*,*},$$

como álgebras bigraduadas.

Demonstração. De fato, como $r \geq 2$ é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$, para todo $2 \leq s \leq r - 1$, temos $d_s = 0$. Assim, segue que

$$E_{s+1}^{k,l} = H(E_s^{k,l}) = \ker(d_s^{k,l}) / \text{Im}(d_s^{k-s,l-1+s}) = E_s^{k,l} / \{0\} = E_s^{k,l} = \dots = E_2^{k,l}.$$

□

Observação 3.23. Desde que $E_2^{k,l} \cong H^k(B_G, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^l(X, \mathbb{Z}_p)$, das Observações 3.18, 3.22 e do

¹⁵Vide Definição 2.23.

Exemplo 3.19, podemos escrever

$$E_r^{k,l} = E_2^{k,l} = \begin{cases} m \neq n \left\{ \begin{array}{l} \langle st^{(k-1)/2} \rangle \otimes \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for ímpar, } k \geq 0. \\ \langle t^{k/2} \rangle \otimes \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for par, } k \geq 0. \\ w = 1, \text{ se } l = 0. \\ w = v_1, \text{ se } l = m. \\ w = v_2, \text{ se } l = n. \\ w = v_1 \smile_X v_2 = v_3 \neq 0, \text{ se } l = m + n. \end{array} \right. \\ m = n \left\{ \begin{array}{l} \langle st^{(k-1)/2} \rangle \otimes \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for ímpar, } k \geq 0. \\ \langle t^{k/2} \rangle \otimes \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for par, } k \geq 0. \\ w = 1, \text{ se } l = 0. \\ w = v_1 \smile_X v_2 = v_3 \neq 0, \text{ se } l = m + n. \\ \langle st^{(k-1)/2} \rangle \otimes \langle v_1, v_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for ímpar, } l = m = n. \\ \langle t^{k/2} \rangle \otimes \langle v_1, v_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, \text{ se } k \text{ for par, } l = m = n. \end{array} \right. \end{cases}$$

Observação 3.24. Seja $a \otimes b \in E_r^{k,l} = E_2^{k,l} \neq 0$ e $r \geq 2$. Então,

$$d_r^{k,l}(a \otimes b) = (-1)^k a \otimes 1 \smile d_r^{0,l}(1 \otimes b).$$

Conseqüentemente, se $d_r^{k,l} \neq 0$ para algum $k > 0$, então $d_r^{0,l} \neq 0$.

Demonstração. De fato, segue das propriedades de álgebra diferencial bigraduada da seqüência espectral que s

$$\begin{aligned} d_r^{k,l}(a \otimes b) &= d_r^{k,l}[(a \otimes 1) \cdot_2 (1 \otimes b)] && (\text{Obs. 3.21}) \\ &= d_r^{k,0}(a \otimes 1) \cdot_2 (1 \otimes b) + (-1)^k (a \otimes 1) \cdot_2 d_r^{0,l}(1 \otimes b) && (\text{Def. 2.33}) \\ &= d_r^{k,0}(a \otimes 1) \smile (1 \otimes b) + (-1)^k (a \otimes 1) \smile d_r^{0,l}(1 \otimes b) && (\text{Obs. 2.48}). \end{aligned}$$

Por outro lado, $d_r^{k,0}(a \otimes 1) \in E_r^{k+r,1-r} = E_2^{k+r,1-r} = 0$, então

$$d_r^{k,l}(a \otimes b) = (-1)^k a \otimes 1 \smile d_r^{0,l}(1 \otimes b),$$

Dessa forma, se $d_r^{k,l} \neq 0$ para algum $k > 0$, então $d_r^{0,l} \neq 0$. □

Observação 3.25. Se $r \geq 2$ é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$, então $r \neq m + n + 1$.

Demonstração. Se $r = n + m + 1$, então pela Observação 3.24 temos $d_{n+m+1}^{0,n+m} \neq 0$ e, como

$$d_{n+m+1}^{0,n+m} : E_{n+m+1}^{0,n+m} \cong \mathbb{Z}_p \rightarrow E_{n+m+1}^{n+m+1,0} \cong \mathbb{Z}_p,$$

logo $d_{n+m+1}^{0,n+m}$ é um isomorfismo. Escolhendo $0 \neq v_1 \in H^m(X; \mathbb{Z}_p)$ e $0 \neq v_2 \in H^n(X; \mathbb{Z}_p)$ tais que $0 \neq v_1 \smile_X v_2 \in H^{n+m}(X; \mathbb{Z}_p)$, temos

$$0 \neq 1 \otimes (v_1 \smile_X v_2) \in E_2^{0,n+m} = E_{n+m+1}^{0,n+m}.$$

Assim, das propriedades de álgebra diferencial bigraduada da sequência espectral e da Observação 3.24, temos

$$\begin{aligned} 0 \neq d_{n+m+1}^{0,n+m}[1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)] &= d_{n+m+1}^{0,n+m}(1 \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_2) \\ &= d_{n+m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile d_{n+m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d_{n+m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \in E_{n+m+1}^{n+m+1,-n} \cong E_2^{n+m+1,-n} = 0,$$

$$d_{n+m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \in E_{n+m+1}^{n+m+1,-m} \cong E_2^{n+m+1,-m} = 0.$$

Deste modo, $d_{n+m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = d_{n+m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = 0$. Portanto,

$$d_{n+m+1}^{0,n+m}[1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)] = 0,$$

o que é uma contradição. Logo, $r \neq n + m + 1$. □

Observação 3.26. Da Observação 3.24, temos

$$d_r^{0,m} \neq 0 \text{ ou } d_r^{0,n} \neq 0 \text{ ou } d_r^{0,m+n} \neq 0,$$

com $r = m + 1$ ou $r = n - m + 1$ ou $r = n + 1$. Como

$$\begin{aligned} d_r^{0,m+n}(1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)) &= d_r^{0,m+n}(1 \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_2) \\ &= d_r^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile d_r^{0,n}(1 \otimes v_2), \end{aligned}$$

não podemos ter

$$d_r^{0,m+n}(1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)) \neq 0 \text{ e } d_r^{0,m}(1 \otimes v_1) = 0 = d_r^{0,n}(1 \otimes v_2)$$

Assim, $d_r^{0,m}(1 \otimes v_1) \neq 0$ ou $d_r^{0,n}(1 \otimes v_2) \neq 0$.

Agora, iniciaremos as demonstrações dos casos específicos listados anteriormente.

Demonstração do 1º Caso: quando $r = m + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (i).

Neste caso, assumiremos $r = m + 1 \geq 2$ como sendo o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$. Em particular, temos que $d_{m+1}^{0,m} \neq 0$ e $d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \neq 0$.

AFIRMAÇÃO 3.27. O inteiro m deve ser ímpar.

Demonstração. De fato, como n e m não são ambos pares, se $n = 2m$ ou $n = m$, segue que m é ímpar. Se $n \neq 2m$ e $n \neq m$, então também temos $m + n \neq 2m$. Logo, $E_{m+1}^{0,2m} = E_2^{0,2m} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= d_{m+1}^{0,2m}(1 \otimes v_1 \smile_X v_1) \\ &= d_{m+1}^{0,2m}(1 \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_1) \\ &= d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_1 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_1 &= (-1)^{(m+1)m} 1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) && (m+1)m \text{ é par} \\ &= 1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se m for par, podemos escrever $d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = st^{m/2} \otimes 1$, pois $st^{m/2} \otimes 1$ é um gerador de $E_2^{m+1,0} = E_{m+1}^{m+1,0} \cong \mathbb{Z}_p$ e $d_{m+1}^{0,m}$ é um isomorfismo. Além disso, combinando as fórmulas (3.2) e (3.3), temos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1)) \\ &= 2(1 \otimes v_1 \smile st^{m/2} \otimes 1) \\ &= 2(st^{m/2} \otimes v_1), \end{aligned}$$

o que é uma contradição, desde que $st^{m/2} \otimes v_1$ é um gerador de $E_{m+1}^{m+1,m} = E_2^{m+1,m} \cong \mathbb{Z}_p$ e $\mathbb{Z}_p$ não possui elemento não nulo de ordem 2. Segue que m é ímpar. □

Agora, vamos analisar dois sub-casos do caso $r = m + 1$, que são $m \neq n$ e $m = n$.

Sub-caso: $m \neq n$.

AFIRMAÇÃO 3.28. Se $n \neq m$, então

(a) os diferenciais $d_{m+1}^{k,n} : E_{m+1}^{k,n} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,n-m}$ são triviais, para todo $k \geq 0$. Em particular, $d_{m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = 0$.

(b) os diferenciais

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,m} &: E_{m+1}^{k,m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,0} \\ d_{m+1}^{k,m+n} &: E_{m+1}^{k,m+n} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,n}, \end{aligned}$$

são isomorfismos, para todo $k \geq 0$.

Demonstração. De fato, como $n \neq m$, $n - m \neq 0$ e, assim, $E_{m+1}^{k+m+1, n-m} = 0$, o que prova (a).

Por outro lado, se $n \neq m$, desde que $d_{m+1}^{0,m} \neq 0$, segue que $d_{m+1}^{0,m}$ é um isomorfismo de $\mathbb{Z}_p$ em $\mathbb{Z}_p$. Pela Observação 3.27, sendo m ímpar, podemos escrever

$$d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = t^{(m+1)/2} \otimes 1, \text{ pois}$$

$$\text{Im}(d_{m+1}^{0,m}) = E_{m+1}^{m+1,0} = E_2^{m+1,0} \cong H^{m+1}(B_G; \mathbb{Z}_p) \otimes H^0(X; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p,$$

com $t^{(m+1)/2} \otimes 1$ gerador de $E_2^{m+1,0}$. Assim, para todo $k \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes v_1) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(m+1)/2} \otimes 1 \\ &= (-1)^k (\zeta_k \smile t^{(m+1)/2}) \otimes 1, \end{aligned}$$

onde ζ_k é um gerador de $H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$. Deste modo,

$$d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes v_1) = \begin{cases} (-1)^k (st^{(k-1)/2} \smile_{B_G} t^{(m+1)/2}) \otimes 1, & \text{se } k \text{ for ímpar.} \\ (-1)^k (t^{k/2} \smile_{B_G} t^{(m+1)/2}) \otimes 1, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Portanto,

$$0 \neq d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes v_1) = \begin{cases} (-1)^k st^{(k+m)/2} \otimes 1, & \text{se } k \text{ for ímpar.} \\ (-1)^k t^{(k+m+1)/2} \otimes 1, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Como, $\forall k \geq 0$, $E_{m+1}^{k,m} = E_2^{k,m} \cong \mathbb{Z}_p$, $E_{m+1}^{k+m+1,0} = E_2^{k+m+1,0} \cong \mathbb{Z}_p$ e $d_{m+1}^{k,m} \neq 0$, concluimos que

$$d_{m+1}^{k,m} : E_{m+1}^{k,m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,0},$$

é um isomorfismo, para todo $k \geq 0$.

Agora, para $\zeta_k \otimes v_3 = \zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)$ gerador de $E_{m+1}^{k,m+n} = E_2^{k,m+n}$, temos

$$d_{m+1}^{k,m+n}(\zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)) = (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,m+n}(1 \otimes (v_1 \smile_X v_2))$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{0,m+n}(1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)) &= d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \quad \text{item (a)} \\ &= d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile 0 \\ &= d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 \\ &= t^{(m+1)/2} \otimes v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,m+n}(\zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(m+1)/2} \otimes v_2 \\ &= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} t^{(m+1)/2} \otimes v_2. \end{aligned}$$

Assim, se k for par, podemos escrever $\zeta_k = t^{k/2}$. Portanto,

$$d_{m+1}^{k,m+n}(\zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)) = t^{(k+m+1)/2} \otimes v_2 \neq 0.$$

Agora, se k for ímpar, escrevemos $\zeta_k = st^{(k-1)/2}$ e

$$d_{m+1}^{k,m+n}(\zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)) = (-1)^k st^{(k+m)/2} \otimes v_2 \neq 0.$$

Como, $\forall k \geq 0$, $E_{m+1}^{k,m+n} = E_2^{k,m+n} \cong \mathbb{Z}_p$, $E_{m+1}^{k+m+1,n} = E_2^{k+m+1,n} \cong \mathbb{Z}_p$ e $d_{m+1}^{k,m+n} \neq 0$, então

$$d_{m+1}^{k,m+n} : E_{m+1}^{k,m+n} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,n},$$

é um isomorfismo, para todo $k \geq 0$, o que conclui a prova de (b). $\square$

Agora, vamos analisar o que acontece com o termo $E_{m+2}^{k,l} = H(E_{m+1}^{k,l})$, para todo k, l . Primeiramente, consideremos os únicos termos não nulos de E_{m+1} representados no diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} E_{m+1}^{0,m+n} & E_{m+1}^{1,m+n} & \dots & E_{m+1}^{m+1,m+n} & E_{m+1}^{m+2,m+n} & \dots \\ & \searrow d_{m+1} & & \searrow d_{m+1} & \searrow d_{m+1} & \\ E_{m+1}^{0,n} & E_{m+1}^{1,n} & \dots & E_{m+1}^{m+1,n} & E_{m+1}^{m+2,n} & \dots \\ \\ E_{m+1}^{0,m} & E_{m+1}^{1,m} & \dots & E_{m+1}^{m+1,m} & E_{m+1}^{m+2,m} & \dots \\ & \searrow d_{m+1} & & \searrow d_{m+1} & \searrow d_{m+1} & \\ E_{m+1}^{0,0} & E_{m+1}^{1,0} & \dots & E_{m+1}^{m+1,0} & E_{m+1}^{m+2,0} & \dots \end{array}$$

Pela Observação 3.28, ítem (b), como os diferenciais $d_{m+1}^{k,m}$ e $d_{m+1}^{k,m+n}$ representados no diagrama acima são isomorfismos, para todo $k \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} E_{m+2}^{k,m} &= H(E_{m+1}^{k,m}) = \ker(d_{m+1}^{k,m}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),2m}) = \{0\} / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),2m}) = \{0\}, \\ E_{m+2}^{k,m+n} &= H(E_{m+1}^{k,m+n}) = \ker(d_{m+1}^{k,m+n}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),2m+n}) = \{0\} / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),2m+n}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Deste modo, as linhas $l = m$ e $l = m + n$ são nulas no termo E_{m+2} .

Por outro lado, segue da Observação 3.28, ítem (a) que $d_{m+1}^{k,n} = 0$, para todo $k \geq 0$. Mais ainda, $d_{m+1}^{k,m+n} = 0$, para $k < 0$, pois o seu domínio é $E_{m+1}^{k,m+n} = 0$.

Para $0 \leq k \leq n$, temos $k - (m + 1) < 0$ e, deste modo,

$$E_{m+2}^{k,n} = H(E_{m+1}^{k,n}) = \ker(d_{m+1}^{k,n}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m+n}) = E_{m+1}^{k,n} / \{0\} = E_{m+1}^{k,n} = E_2^{k,n}.$$

Agora, se $k \geq m + 1$, temos $k - (m + 1) \geq 0$ e, pela Observação 3.28, item (b), o diferencial $d_{m+1}^{k-(m+1),m+n}$ é um isomorfismo, assim, $\text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m+n}) = E_{m+1}^{k,n}$. Portanto,

$$E_{m+2}^{k,n} = H(E_{m+1}^{k,n}) = \ker(d_{m+1}^{k,n}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m+n}) = E_{m+1}^{k,n} / E_{m+1}^{k,n} = \{0\}.$$

Deste modo, concluímos que, na linha $l = n$, os únicos termos não nulos são $E_{m+1}^{k,n} = E_2^{k,n}$, para todo $0 \leq k \leq m$.

Agora, $d_{m+1}^{k,0} = 0$, para todo $k \geq 0$ e $d_{m+1}^{k,m} = 0$, para $k < 0$, pois

$$\text{Im}(d_{m+1}^{k,0}) \subset E_{m+1}^{k+m+1,-m} = \{0\} \text{ e } \text{Dom}(d_{m+1}^{k,m}) = E_{m+1}^{k,m} = \{0\},$$

desde que a sequência espectral é do primeiro quadrante. Portanto, para todo $0 \leq k \leq m$, temos que $k - (m + 1) < 0$ e, assim

$$E_{m+2}^{k,0} = H(E_{m+1}^{k,0}) = \ker(d_{m+1}^{k,0}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m}) = E_{m+1}^{k,0} / \{0\} = E_{m+1}^{k,0} = E_2^{k,0}.$$

Como, pela Observação 3.28, item (b), o diferencial $d_{m+1}^{k,m}$ é um isomorfismo, $\forall k \geq 0$ e, $d_{m+1}^{k,0} = 0$, $\forall k \geq 0$, então para todo $k \geq m + 1$, ou seja, $k - (m + 1) \geq 0$, segue que

$$E_{m+2}^{k,0} = H(E_{m+1}^{k,0}) = \ker(d_{m+1}^{k,0}) / \text{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m}) = E_{m+1}^{k,0} / E_{m+1}^{k,0} = \{0\}.$$

Deste modo, concluímos que, na linha $l = 0$, os únicos termos não nulos são $E_{m+1}^{k,0} = E_2^{k,0}$, para todo $0 \leq k \leq m$.

Observação 3.29. Em resumo, para $m \neq n$, os únicos termos não nulos são representados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_{m+2}^{0,n} & E_{m+2}^{1,n} & \cdots & E_{m+2}^{m-1,n} & E_{m+2}^{m,n} \\ E_{m+2}^{0,0} & E_{m+2}^{1,0} & \cdots & E_{m+2}^{m-1,0} & E_{m+2}^{m,0} \end{array}$$

AFIRMAÇÃO 3.30. Os diferenciais $d_s^{k,l} : E_s^{k,l} \rightarrow E_s^{k+s,l-s+1}$ são triviais, para todo $s \geq m + 2$, ou seja, a sequência espectral colapsa no E_{m+2} -termo, o que significa que $E_{m+2} = E_\infty$.

Demonstração. Se $s \geq m + 2$, então $\text{Im}(d_s^{k,l}) \subset E_s^{k+s,l-s+1}$. Mas $E_s^{k+s,l-s+1}$ é um sub-quociente de $E_{m+2}^{k+s,l-s+1} = \{0\}$, pois como $s \geq m + 2$, para todo $k \geq 0$, $k + s \geq m + 2$, usando o fato de que na coluna $k' = k + s$ todos os termos são nulos pela Observação 3.29, segue o resultado. Então, $E_s^{k+s,l-s+1} = \{0\}$ e, portanto, $d_s^{k,l} = 0$. Assim, $E_{m+2} = E_\infty$. $\square$

Observação 3.31. Segue da Observação 3.29 e da Afirmação 3.30 que $E_\infty^{k,l} = E_{m+2}^{k,l} = E_2^{k,l}$, sempre que $E_\infty^{k,l} \neq 0$. Deste modo, da Observação 3.23 podemos representar o termo $E_\infty^{k,l}$ da seguinte forma

$$E_\infty^{k,l} = E_2^{k,l} = \begin{cases} \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle 1 \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = 0. \\ \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle v_2 \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = n. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

como álgebra bigraduada. Agora, como $E_2^{*,0} \cong H^*(B_G)$ como álgebras graduadas, podemos substituir $\langle \zeta_k \rangle \otimes \langle 1 \rangle$ por $\langle \zeta_k \rangle$. Por outro lado, como a multiplicação

$$\begin{aligned} (\cdot) \smile 1 \otimes v_2 : E_\infty^{k,0} &\longrightarrow E_\infty^{k,n} \\ a\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_k \otimes v_2, \end{aligned}$$

é um isomorfismo, $\forall 0 \leq k \leq m$, substituindo $\langle \zeta_k \rangle \otimes \langle v_2 \rangle$ por $\langle \zeta_k \otimes v_2 \rangle$, como álgebra bigraduada, temos o seguinte diagrama para o termo E_∞ :

$$\begin{array}{ccccccc} \langle v_2 \rangle & \langle s \otimes v_2 \rangle & \dots & \langle t^{(m-1)/2} \otimes v_2 \rangle & \langle st^{(m-1)/2} \otimes v_2 \rangle \\ \\ \langle 1 \rangle & \langle s \rangle & \dots & \langle t^{(m-1)/2} \rangle & \langle st^{(m-1)/2} \rangle, \end{array}$$

isto é,

$$E_\infty^{k,l} = E_2^{k,l} = \begin{cases} \langle \zeta_k \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = 0. \\ \langle \zeta_k \otimes v_2 \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Observação 3.32. Se $m \neq n$, então temos da fórmula (3.4) e da Observação 2.43 que o complexo total associado ao termo E_∞ : $(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^* = \bigoplus_k (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k$, como espaço vetorial graduado, é dado como segue.

$$(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} = \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m. \\ E_\infty^{k-n,n} = \langle \zeta_{k-n} \otimes v_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n \leq k \leq n+m. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, desde que a sequência espectral $\{E_r, d_r\}$ converge para $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ como uma álgebra graduada, segue da Definição 2.39 que $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p); F^*)$, como álgebras bigradas, onde F^* é uma filtração de $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Por outro lado, também pela Observação 2.43, sabemos que $(\text{Tot} E_0^{*,*})^*(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)) \cong H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como espaços vetoriais graduados.

Deste modo,

$$H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} = \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m. \\ E_\infty^{k-n,n} = \langle \zeta_{k-n} \otimes v_2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n \leq k \leq n+m. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

como espaços vetoriais graduados.

Sub-caso: $m = n$.

Sejam $1 \otimes v_1, 1 \otimes v_2$ geradores de $E_2^{0,m} = E_{m+1}^{0,m} \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$. Pela Observação 3.27, sendo m ímpar, podemos escrever

$$d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = t^{(m+1)/2} \otimes 1,$$

desde que $d_{m+1}^{0,m} \neq 0$ é sobrejetora. Como $d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_2) \in E_{m+1}^{m+1,0} \cong \mathbb{Z}_p$, temos

$$d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_2) = ad_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = at^{(m+1)/2} \otimes 1, \text{ onde } a \in \mathbb{Z}_p.$$

Seja $1 \otimes v_3 = 1 \otimes v_1 \smile_X v_2$ gerador de $E_2^{0,2m} = E_{m+1}^{0,2m} \cong \mathbb{Z}_p$. Então,

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{0,2m}(1 \otimes v_3) &= d_{m+1}^{0,2m}(1 \otimes (v_1 \smile_X v_2)) \\ &= d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_2) \\ &= t^{(m+1)/2} \otimes 1 \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^m 1 \otimes v_1 \smile at^{(m+1)/2} \otimes 1 \\ &= t^{(m+1)/2} \otimes v_2 - at^{(m+1)/2} \otimes v_1 \\ &= t^{(m+1)/2} \otimes v_2 + t^{(m+1)/2} \otimes -av_1 \\ &= t^{(m+1)/2} \otimes (v_2 - av_1) \neq 0. \end{aligned}$$

AFIRMAÇÃO 3.33. Se $m = n$, os diferenciais

$$d_{m+1}^{k,m} : E_{m+1}^{k,m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,0}$$

são sobrejetores, com $\ker(d_{m+1}^{k,m})$ gerado por $\zeta_k \otimes (v_2 - av_1)$, onde ζ_k é o gerador de $H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$ e os diferenciais

$$d_{m+1}^{k,2m} : E_{m+1}^{k,2m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,m}$$

são injetores, com $\text{Im}(d_{m+1}^{k,2m})$ gerada por $\zeta_{k+m+1} \otimes (v_2 - av_1)$.

Demonstração. Temos que o diferencial

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes v_1) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \smile v_1) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(m+1)/2} \otimes 1 \\ &= (-1)^k \zeta_{k+m+1} \otimes 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $d_{m+1}^{k,m} : E_{m+1}^{k,m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,0}$ é sobrejetor. Note que

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes (v_2 - av_1)) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes (v_2 - av_1)) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_2) - ad_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile (at^{(m+1)/2} \otimes 1 - at^{(m+1)/2} \otimes 1) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\ker(d_{m+1}^{k,m}) = \langle \zeta_k \otimes (v_2 - av_1) \rangle$. Mais ainda, desde que

$$\begin{aligned} d_{m+1}^{k,2m}(\zeta_k \otimes (v_1 \smile_X v_2)) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,2m}(1 \otimes v_1 \smile_X v_2) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(m+1)/2} \otimes (v_2 - av_1) \\ &= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} t^{(m+1)/2} \otimes (v_2 - av_1) \\ &= (-1)^k \zeta_{k+m+1} \otimes (v_2 - av_1), \end{aligned}$$

concluimos que $\text{Im}(d_{m+1}^{k,2m}) = \langle \zeta_{k+m+1} \otimes (v_2 - av_1) \rangle$. □

Segue da Afirmação 3.33, que para $m = n$, $d_{m+1}^{k,m}$ é sobrejetor, com $\ker(d_{m+1}^{k,m}) \cong \mathbb{Z}_p$ e $d_{m+1}^{k,2m}$ é injetor, com $\text{Im}(d_{m+1}^{k,2m}) \cong \mathbb{Z}_p$, para todo $k \geq 0$. Agora, vamos analisar o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccc} E_{m+1}^{0,2m} & E_{m+1}^{1,2m} & \dots & E_{m+1}^{m+1,2m} & E_{m+1}^{m+2,2m} & \dots \\ & \searrow d_{m+1} & & \searrow d_{m+1} & \searrow d_{m+1} & \\ E_{m+1}^{0,m} & E_{m+1}^{1,m} & \dots & E_{m+1}^{m+1,m} & E_{m+1}^{m+2,m} & \dots \\ & \searrow d_{m+1} & & \searrow d_{m+1} & \searrow d_{m+1} & \\ E_{m+1}^{0,0} & E_{m+1}^{1,0} & \dots & E_{m+1}^{m+1,0} & E_{m+1}^{m+2,0} & \dots \end{array}$$

Como d_{m+1} é um diferencial, temos

$$\text{Im}(d_{m+1}^{k,2m}) \subset \ker(d_{m+1}^{k+m+1,m}) \quad \text{e} \quad \text{Im}(d_{m+1}^{k,m}) \subset \ker(d_{m+1}^{k+m+1,0}).$$

Portanto,

$$\text{Im}(d_{m+1}^{k,2m}) = \ker(d_{m+1}^{k+m+1,m}) = E_{m+1}^{k+m+1,m} \quad \text{e} \quad \text{Im}(d_{m+1}^{k,m}) = \ker(d_{m+1}^{k+m+1,0}) = E_{m+1}^{k+m+1,0}$$

Assim, para $k \geq m + 1$, temos

$$\begin{aligned} E_{m+2}^{k,0} &= H(E_{m+1}^{k,0}) = \ker(d_{m+1}^{k,0}) / \operatorname{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),m}) = E_{m+1}^{k,0} / E_{m+1}^{k,0} \cong 0 \\ E_{m+2}^{k,m} &= H(E_{m+1}^{k,m}) = \ker(d_{m+1}^{k,m}) / \operatorname{Im}(d_{m+1}^{k-(m+1),2m}) = \mathbb{Z}_p / \mathbb{Z}_p \cong 0. \end{aligned}$$

Agora, como a sequência espectral é do primeiro quadrante, $d_{m+1}^{k,0} = 0$, para todo $k \geq 0$ e $d_{m+1}^{k,m} = 0$, para $k < 0$. Portanto, para todo $0 \leq k \leq m$, temos o seguinte diagrama representando os únicos E_{m+2} -termos não nulos da sequência espectral:

$$E_{m+2}^{0,m} \quad E_{m+2}^{1,m} \quad \cdots \quad E_{m+2}^{m-1,m} \quad E_{m+2}^{m,m} \quad (3.5)$$

$$E_{m+2}^{0,0} \quad E_{m+2}^{1,0} \quad \cdots \quad E_{m+2}^{m-1,0} \quad E_{m+2}^{m,0}$$

Mais especificamente, usando a Afirmação 3.33, o diagrama 3.5 pode ser representado como segue.

$$\begin{aligned} <1> \otimes <(v_2 - av_1)> \quad <\zeta_1> \otimes <(v_2 - av_1)> \quad \cdots \quad <\zeta_{m-1}> \otimes <(v_2 - av_1)> \quad <\zeta_m> \otimes <(v_2 - av_1)> \\ <1> \otimes <1> \quad <\zeta_1> \otimes <1> \quad \cdots \quad <\zeta_{m-1}> \otimes <1> \quad <\zeta_m> \otimes <1> \end{aligned} \quad (3.6)$$

Deste modo, se $s \geq m + 2$, então $\operatorname{Im}(d_s^{k,l}) \subset E_s^{k+s,l-s+1}$. Mas $E_s^{k+s,l-s+1}$ é um sub-quociente de $E_{m+2}^{k+s,l-s+1} = \{0\}$, pois como $s \geq m + 2$, para todo $k \geq 0$, $k + s \geq m + 2$, usando o fato de que na coluna $k' = k + s$ todos os termos são nulos pelo diagrama 3.6, segue o resultado. Então, $E_s^{k+s,l-s+1} = \{0\}$ e, portanto, $d_s^{k,l} = 0$. Assim, $E_{m+2} = E_\infty$. Portanto, para $m = n$ temos

$$E_\infty^{k,l} = E_2^{k,l} = \begin{cases} <\zeta_k> \otimes <1> \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = 0. \\ <\zeta_k> \otimes <(v_2 - av_1)> \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = m. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Agora, como $E_2^{*,0} \cong H^*(B_G; \mathbb{Z}_p)$, como álgebras graduadas, podemos substituir em (3.7), o termo $<\zeta_k> \otimes <1>$ por $<\zeta_k>$. Por outro lado, a multiplicação

$$\begin{aligned} (\cdot) \smile 1 \otimes (v_2 - av_1) : \quad E_\infty^{k,0} &\rightarrow E_\infty^{k,m} \\ \zeta_k \otimes 1 &\mapsto \zeta_k \otimes (v_2 - av_1), \end{aligned}$$

para todo $0 \leq k \leq m$ é um isomorfismo. Assim, como álgebra bigraduada temos

$$E_\infty^{k,l} = E_2^{k,l} = \begin{cases} <\zeta_k>, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = 0. \\ <\zeta_k \otimes (v_2 - av_1)>, & \text{se } 0 \leq k \leq m \text{ e } l = m. \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

Observação 3.34. Se $m = n$, então temos da fórmula (3.8) e da Observação 2.43 que o complexo

total associado ao termo E_∞ : $(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^* = \bigoplus_k (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k$, como uma álgebra graduada, é dado como segue.

$$(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} = \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m-1. \\ E_\infty^{m,0} \oplus E_\infty^{0,m} = \langle \zeta_m \rangle + \langle v_2 - av_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & \text{se } k = m. \\ E_\infty^{k-m,m} = \langle \zeta_{k-m} \otimes (v_2 - av_1) \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } m < k \leq 2m. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, desde que a sequência espectral $\{E_r, d_r\}$ converge para $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ como uma álgebra graduada, segue da Definição 2.39 que $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p); F^*)$, como álgebras bigradas, onde F^* é uma filtração de $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Por outro lado, também pela Observação 2.43, sabemos que $(\text{Tot} E_0^{*,*})^*(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)) \cong H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como espaços vetoriais graduados. Deste modo,

$$H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} = \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m-1. \\ E_\infty^{m,0} \oplus E_\infty^{0,m} = \langle \zeta_m \rangle + \langle v_2 - av_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & \text{se } k = m. \\ E_\infty^{k-m,m} = \langle \zeta_{k-m} \otimes (v_2 - av_1) \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } m < k \leq 2m. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

como espaços vetoriais graduados.

Observação 3.35. Podemos sintetizar os resultados obtidos até agora, para valores de m ímpar, $m \geq n$, como segue:

$$H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} m \neq n \begin{cases} \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m. \\ \langle \zeta_{k-n} \otimes w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n \leq k \leq m+n. \\ 0, & \text{se } m < k < n \text{ e } k > m+n. \end{cases} \\ m = n \begin{cases} \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m-1, \\ \langle \zeta_m \rangle + \langle w \rangle \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p, & \text{se } k = m = n. \\ \langle \zeta_{k-m} \otimes w \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } m < k \leq 2m. \\ 0, & \text{se } k > 2m, \end{cases} \end{cases} \quad (3.9)$$

como espaços vetoriais graduados, onde $w = v_2$, se $m \neq n$ e $w = v_2 - av_1$, se $m = n$, com

$$\zeta_k = \begin{cases} st^{(k-1)/2}, & \text{se } k \text{ for ímpar.} \\ t^{k/2}, & \text{se } k \text{ for par.} \end{cases}$$

Observação 3.36. A multiplicação por $t \in H^2(B_G; \mathbb{Z}_p)$:

$$t \smile (\cdot) : E_\infty^{k,l} \rightarrow E_\infty^{k+2,l}, \quad (3.10)$$

considerada como um endomorfismo de sequência espectral, é um isomorfismo, para todo

$0 \leq k \leq m-2$, $m > 1$ e $l = 0$ ou $l = n$, desde que $E_\infty^{k,l} \cong \mathbb{Z}_p$ e $E_\infty^{k+2,l} \cong \mathbb{Z}_p$, para $0 \leq k \leq m-2$ e, dado $0 \neq \zeta_k w \in E_\infty^{k,l}$, onde $w = 1$, se $l = 0$ e $w = v_2$, se $l = n$, temos

$$t \smile (\zeta_k \otimes w) = t\zeta_k \otimes w = \zeta_{k+2} \otimes w \neq 0.$$

Se $m \neq n$ (respectivamente $m = n$), o elemento $1 \otimes v_2$ (respectivamente $1 \otimes (v_2 - av_1)$) de $E_2^{0,n}$ é um cociclo permanente¹⁶ e determina um elemento não nulo $\mu \in E_\infty^{0,n}$.

Além disso, existem elementos $x \in H^1(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $y \in H^2(X_G; \mathbb{Z}_p)$, com $x = \pi^*(s)$ e $y = \pi^*(t)$. De fato, segue do Teorema 2.49 que a aplicação

$$H^k(B_G; \mathbb{Z}_p) = E_2^{k,0} \rightarrow E_3^{k,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_k^{k,0} \rightarrow E_k^{k+1,0} = E_\infty^{k,0} \subset H^k(X_G; \mathbb{Z}_p),$$

é o homomorfismo $\pi^* : H^k(B_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^k(X_G; \mathbb{Z}_p)$.

Desde que $H^k(B_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, para todo $k \geq 0$, $\mathbb{Z}_p \cong E_\infty^{k,0} \cong H^k(X_G; \mathbb{Z}_p)$, para $0 \leq k < m$, $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, quando $m \neq n$ e $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, quando $m = n$, segue que o homomorfismo $\pi^* : H^k(B_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^k(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é um isomorfismo, para $0 \leq k < m$, é monomorfismo, para $k = m$ e é nulo, para $k = m+1$. Como $\pi^* : H^*(B_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é um homomorfismo de anéis graduados, π^* leva o gerador $\zeta_k \in H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$ em um gerador de $H^k(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Então, podemos escrever $H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle \pi^*(\zeta_k) \rangle$, para $0 \leq k < m$, com $m \geq 3$. Em particular, $H^1(X_G) = \langle \pi^*(s) \rangle$ e $H^2(X_G) = \langle \pi^*(t) \rangle$, onde $s \in H^1(B_G)$ e $t \in H^2(B_G)$. Assim, escolhemos geradores $x \in H^1(X_G; \mathbb{Z}_p)$, $y \in H^2(X_G; \mathbb{Z}_p)$ tais que $x = \pi^*(s)$ e $y = \pi^*(t)$.

Sendo $y = \pi^*(t) \in H^2(X_G; \mathbb{Z}_2) = E_\infty^{2,0}$, segue de (3.10) que a multiplicação

$$y \smile (\cdot) : H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{k,0} \rightarrow H^{k+2}(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{k+2,0}, \quad (3.11)$$

é um isomorfismo, para todo $0 \leq k \leq m-2$ e $n \leq k \leq n+m-2$. Mais ainda, observemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= (\pi^*(s))^2 \\ &= \pi^*(s) \cdot \pi^*(s) \quad (\pi^* \text{ é homomorfismo de anéis}) \\ &= \pi^*(s^2) \\ &= \pi^*(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$y^{(m+1)/2} = 0$, pois é um elemento em $H^{m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{m+1,0} = 0$ e $\mu^2 = 0$, pois é um elemento em $E_\infty^{2n,0} = 0$. Assim, concluímos que $\text{Tot}(E_\infty^{*,*})$, como álgebra graduada comutativa¹⁷, é gerado pelos elementos

$$1, x, y, xy, \dots, y^{(m-1)/2}, xy^{(m-1)/2}, \mu, x\mu, xy\mu, \dots, y^{(m-1)/2}\mu, xy^{(m-1)/2}\mu,$$

¹⁶Isso significa que $E_\infty^{0,q} = E_2^{0,q}$.

¹⁷Vide Definição 2.41

com as relações $x^2 = 0$, $y^{(m+1)/2} = 0$ e $\mu^2 = 0$, ou seja,

$$\text{Tot}(E_\infty^{*,*}) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, \mu]/(x^2, y^{(m+1)/2}, \mu^2), \quad (3.12)$$

como uma álgebra graduada comutativa.

Agora, como $E_\infty^{0,n} = E_{m+2}^{0,n} = E_{m+1}^{0,n} = \dots = E_2^{0,n} = H^n(X; \mathbb{Z}_p)$, segue do Teorema 2.49 que a aplicação

$$H^n(X_G; \mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} = E_2^{0,n} = H^n(X; \mathbb{Z}_p)$$

é o homomorfismo $i^* : H^n(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^n(X; \mathbb{Z}_p)$. Assim, i^* é um homomorfismo sobrejetor e, podemos escolher $z \in H^n(X_G; \mathbb{Z}_p)$ tal que $i^*(z) = w$, onde $w = v_2$ se $n \neq m$ e, $w = v_2 - av_1$, se $n = m$. Então, $xz \neq 0 \neq yz$. Note que $z^2 \in H^{2n}(X_G; \mathbb{Z}_p) = 0$, logo $z^2 = 0$. Sabemos de (3.11) que a multiplicação

$$y \smile (\cdot) : H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{k+2}(X_G; \mathbb{Z}_p),$$

é um isomorfismo para $0 \leq k < m-2$ e $n < k \leq n+m-2$. Dessa forma, $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como uma álgebra graduada comutativa, é gerado pelos elementos

$$1, x, y, xy, \dots, y^{(m-1)/2}, xy^{(m-1)/2}, z, xz, yz, xyz, \dots, y^{(m-1)/2}, xy^{(m-1)/2}z,$$

com as relações $x^2 = 0$, $y^{(m+1)/2} = 0$ e $z^2 = 0$, ou seja,

$$H^*(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, z]/(x^2, y^{(m+1)/2}, z^2). \quad (3.13)$$

Em particular, quando $m = 1$, temos $y = 0$, pois $y \in E_\infty^{2,0} = E_\infty^{m+1,0} = 0$. Portanto,

$$H^*(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[x, z]/(x^2, z^2). \quad (3.14)$$

Além disso, como $G = \mathbb{Z}_p$ age livremente sobre X , segue do Lema 3.7, que $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $H^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos como anéis, o que encerra o 1º **Caso** da prova do **Teorema 3.20(i)**.

Demonstração do 2º Caso: quando $r = n - m + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (ii).

Observemos que, neste caso $n > m$, pois $r \geq 2$. Consideremos o seguinte diagrama, o qual representa as únicas linhas não nulas do $E_{n-m+1} = E_2$ -termo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n-m+1}^{0,m+n} & E_{n-m+1}^{1,m+n} & \dots & E_{n-m+1}^{n-m+1,m+n} & E_{n-m+1}^{n-m+2,m+n} & \dots & \\
 \\
 E_{n-m+1}^{0,n} & E_{n-m+1}^{1,n} & \dots & E_{n-m+1}^{n-m+1,n} & E_{n-m+1}^{n-m+2,n} & \dots & \\
 \swarrow & \searrow & & \searrow & \searrow & & \\
 & d_{n-m+1} & & d_{n-m+1} & d_{n-m+1} & & \\
 E_{n-m+1}^{0,m} & E_{n-m+1}^{1,m} & \dots & E_{n-m+1}^{n-m+1,m} & E_{n-m+1}^{n-m+2,m} & \dots & \\
 \\
 E_{n-m+1}^{0,0} & E_{n-m+1}^{1,0} & \dots & E_{n-m+1}^{n-m+1,0} & E_{n-m+1}^{n-m+2,0} & \dots &
 \end{array}$$

Desde que $r = n - m + 1$ é o menor inteiro tal que $d_r \neq 0$, temos que o diferencial $d_{n-m+1}^{k,n} \neq 0$, para algum $k \geq 0$ e segue da Observação 3.24 que $d_{n-m+1}^{0,n} \neq 0$ e, portanto,

$$d_{n-m+1}^{0,n} : E_{n-m+1}^{0,n} \rightarrow E_{n-m+1}^{n-m+1,m} \quad (3.15)$$

é um isomorfismo e, desde que

$$d_{n-m+1}^{0,n}(E_{n-m+1}^{0,n}) = E_{n-m+1}^{n-m+1,m} = E_2^{n-m+1,m} \cong H^{n-m+1}(B_G; \mathbb{Z}_p) \otimes H^m(X; \mathbb{Z}_p),$$

podemos escrever

$$d_{n-m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = A \otimes v_1, \quad (3.16)$$

onde A é um gerador de $H^{n-m+1}(B_G; \mathbb{Z}_p)$.

AFIRMAÇÃO 3.37. O inteiro n deve ser ímpar e inteiro m deve ser par.

Demonstração. Suponhamos que n seja par. Assim,

$$\begin{aligned}
 0 &= d_{n-m+1}^{0,2n}(1 \otimes v_2 \smile_X v_2) \\
 &= d_{n-m+1}^{0,2n}(1 \otimes v_2 \smile 1 \otimes v_2) \\
 &= d_{n-m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^n 1 \otimes v_2 \smile d_{n-m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \quad (\text{de (3.16) e de } n \text{ ser par}) \\
 &= A \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_2 + 1 \otimes v_2 \smile A \otimes v_1 \\
 &= A \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^{n \cdot (m+1)} A \otimes v_1 \smile 1 \otimes v_2 \\
 &= A \otimes v_1 \smile_X v_2 + (-1)^{n \cdot (m+1)} A \otimes v_1 \smile_X v_2 \quad (n(m+1) \text{ é par}) \\
 &= A \otimes v_3 + A \otimes v_3 \\
 &= 2 \cdot A \otimes v_3 \neq 0,
 \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Deste modo, n é ímpar.

Agora, mostremos que m deve ser par. Suponhamos que m seja ímpar e consideremos a sequência espectral $\tilde{E}_2^{*,*}$ associada à fibração de Borel $\pi : X_G \rightarrow B_G$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Como $H^*(X; \mathbb{Z})$ é finitamente gerado, ele não possui elementos de p -torção. Consequentemente, temos que $\tilde{E}_2^{k,l} \cong H^*(B_G; H^l(X; \mathbb{Z})) = 0$, para todo k ímpar. Então, $\tilde{E}_r^{k,l} = 0$, para todo k ímpar e $r \geq 2$. O homomorfismo de coeficientes $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ dado por $q(n) = \bar{n}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, nos fornece o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_{n-m+1}^{0,n} & \xrightarrow{\tilde{d}_{n-m+1}^{0,n}} & \tilde{E}_{n-m+1}^{n-m+1,m} \\ q^* \downarrow & & \downarrow q^* \\ E_{n-m+1}^{0,n} & \xrightarrow{d_{n-m+1}^{0,n}} & E_{n-m+1}^{n-m+1,m} \end{array} \quad (3.17)$$

Temos que as composições $q^* \circ \tilde{d}_{n-m+1}^{0,n} = d_{n-m+1}^{0,n} \circ q^*$ são triviais, pois $n-m+1$ é ímpar. Como $q^* : \tilde{E}_{n-m+1}^{0,n} \rightarrow E_{n-m+1}^{0,n}$ é sobrejetora, segue que $d_{n-m+1}^{0,n} : E_{n-m+1}^{0,n} \rightarrow E_{n-m+1}^{n-m+1,m}$ é trivial, o que é uma contradição, pois de (3.15), temos $d_{n-m+1}^{0,n} \neq 0$. Portanto, m deve ser par. $\square$

Sendo n ímpar e m par, temos que $n-m+1$ é par, então de (3.16), podemos escrever

$$d_{n-m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = t^{(n-m+1)/2} \otimes v_1.$$

Se $\zeta_k \otimes v_2$ for um gerador de $E_{n-m+1}^{k,n} = E_2^{k,n}$, então

$$\begin{aligned} d_{n-m+1}^{k,n}(\zeta_k \otimes v_2) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{n-m+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(n-m+1)/2} \otimes v_1 \\ &= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} t^{(n-m+1)/2} \otimes v_1. \end{aligned}$$

Assim, se k for par, $\zeta_k = t^{k/2}$ e, podemos escrever

$$d_{n-m+1}^{k,n}(\zeta_k \otimes v_2) = (-1)^k t^{(k+n-m+1)/2} \otimes v_1 \neq 0.$$

Agora, se k for ímpar, $\zeta_k = st^{(k-1)/2}$ e, podemos escrever

$$d_{n-m+1}^{k,n}(\zeta_k \otimes v_2) = (-1)^k st^{(k+n-m)/2} \otimes v_1 \neq 0.$$

Deste modo, concluímos que

$$d_{n-m+1}^{k,n} : E_{n-m+1}^{k,n} \rightarrow E_{n-m+1}^{k+n-m+1,m} \quad (3.18)$$

é um isomorfismo, para todo $k \geq 0$.

Mais ainda, para todo $k \geq 0$,

$$d_{n-m+1}^{k,m}(E_{n-m+1}^{k,m}) = 0 = d_{n-m+1}^{k,m+n}(E_{n-m+1}^{k,m+n}), \quad (3.19)$$

desde que $0 \neq 2m - n < m$, $n \neq 2m$, pois n é ímpar, $2n \neq m + n$ e

$$\begin{aligned} \text{Im}(d_{n-m+1}^{k,m}) &\subset E_{n-m+1}^{k+n-m+1,2m-n} \cong E_2^{k+n-m+1,2m-n} \cong 0 \\ \text{Im}(d_{n-m+1}^{k,m+n}) &\subset E_{n-m+1}^{k+n-m+1,2m} \cong E_2^{k+n-m+1,2m} \cong 0. \end{aligned}$$

Segue de (3.18) e (3.19) que

$$E_r^{k,n} = 0 = E_r^{k+n-m+1,m}, E_r^{k,m+n} = E_2^{k,m+n} \text{ e } E_r^{k,0} = E_2^{k,0},$$

para todo $k \geq 0$ e $r = n - m + 2$. Temos também que $E_{n-m+2}^{k,m} = E_2^{k,m}$, para $0 \leq k \leq m - n$. Assim, os únicos termos não nulos em E_{n-m+2} são representados no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccc} E_{n-m+2}^{0,m+n} & E_{n-m+2}^{1,m+n} & \cdots & E_{n-m+2}^{n-m,m+n} & E_{n-m+2}^{n-m+1,m+n} & \cdots & & & (3.20) \\ E_{n-m+2}^{0,m} & E_{n-m+2}^{1,m} & \cdots & E_{n-m+2}^{n-m,m} & & & & & \\ E_{n-m+2}^{0,0} & E_{n-m+2}^{1,0} & \cdots & E_{n-m+2}^{n-m,0} & E_{n-m+2}^{n-m+1,0} & \cdots & & & \end{array}$$

Especificamente, temos

$$E_{n-m+2}^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } k \geq 0. \\ E_2^{k,m} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n - m. \\ E_2^{k,m+n} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } k \geq 0. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que o diferencial

$$d_{m+1}^{k,m} : E_{m+1}^{k,m} \rightarrow E_{m+1}^{k+m+1,0}$$

é trivial, para todo $0 \leq k \leq m - n$, desde que $d_{m+1}^{0,m} = 0$ e

$$d_{m+1}^{k,m}(\zeta_k \otimes v_1) = (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{m+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = 0.$$

AFIRMAÇÃO 3.38. Os diferenciais

$$d_{n+m+1}^{k,n+m} : E_{n+m+1}^{k,n+m} \rightarrow E_{n+m+1}^{k+n+m+1,0}$$

são isomorfismos, para todo $k \geq 0$.

Demonstração. Desde que a ação de $G = \mathbb{Z}_p$ sobre X é livre, segue que o conjunto de pontos fixos X^G é vazio e, como $H^k(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $k > n + m$, segue do Lema 3.8 que $H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong H^k((X^G)_G; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $k > n + m$, desde que $(X^G)_G = \emptyset$. Em particular, $H^{n+m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = 0$.

Afirmamos que o diferencial

$$d_{n+m+1}^{0,n+m} : E_{n+m+1}^{0,n+m} \rightarrow E_{n+m+1}^{n+m+1,0}$$

é não trivial. De fato, suponhamos que $d_{n+m+1}^{0,n+m} = 0$, neste caso,

$$E_{n+m+2}^{n+m+1,0} = \frac{\ker d_{n+m+1}^{n+m+1,0}}{\operatorname{Im} d_{n+m+1}^{0,n+m}} = \frac{E_{n+m+1}^{n+m+1,0}}{0} = E_{n+m+1}^{n+m+1,0}.$$

Mas como os diferenciais $d_s^{*,*} = 0$, $\forall s \geq n + m + 2$, concluímos que $E_{n+m+1}^{n+m+1,0} = E_{\infty}^{n+m+1,0}$. Assim,

$$\begin{aligned} E_{\infty}^{n+m+1,0} &= E_{n+m+2}^{n+m+1,0} = E_2^{n+m+1,0} \cong H^{n+m+1}(B_G; \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p \text{ e, como} \\ H^{n+m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) &\cong \operatorname{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^{n+m+1} \cong E_{\infty}^{n+m+1,0} \oplus E_{\infty}^{0,n+m+1}, \end{aligned}$$

segue que $H^{n+m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, o que é uma contradição.

Deste modo, sendo $d_{n+m+1}^{0,m+n} \neq 0$, segue que $d_{n+m+1}^{0,m+n}$ é um isomorfismo. Como n é ímpar e m é par, podemos escrever

$$d_{n+m+1}^{0,m+n}(1 \otimes v_3) = \zeta_{n+m+1} \otimes 1 = t^{(n+m+1)/2} \otimes 1.$$

Por outro lado, se ζ_k for um gerador de $H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$, temos

$$\begin{aligned} d_{n+m+1}^{k,n+m}(\zeta_k \otimes v_3) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{n+m+1}^{0,n+m}(1 \otimes v_3) \\ &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(n+m+1)/2} \otimes 1 \\ &= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} t^{(n+m+1)/2} \otimes 1. \end{aligned}$$

Assim, se k for par, então $\zeta_k = t^{k/2}$, logo,

$$d_{n+m+1}^{k,n+m}(\zeta_k \otimes v_2) = (-1)^k t^{(k+n+m+1)/2} \otimes 1 \neq 0.$$

Agora, se k for ímpar, então $\zeta_k = st^{(k-1)/2}$ e

$$d_{n+m+1}^{k,n+m}(\zeta_k \otimes v_2) = (-1)^k st^{(k+n+m)/2} \otimes 1 \neq 0.$$

Portanto, $d_{n+m+1}^{k,n+m}$ é um isomorfismo, para todo $k \geq 0$. □

Usando a Afirmação 3.38 e analisando o diagrama do termo E_{m+n+1} a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n+m+1}^{0,m+n} & \cdots & E_{n+m+1}^{n-m,m+n} & E_{n+m+1}^{n-m+1,m+n} & \cdots & E_{n+m+1}^{n+m+1,m+n} & \cdots \\
 & & & \searrow d_{n+m+1} & & \searrow d_{n+m+1} & \\
 E_{n+m+1}^{0,m} & \cdots & E_{n+m+1}^{n-m,m} & & & & \\
 & & & & & & \\
 E_{n+m+1}^{0,0} & \cdots & E_{n+m+1}^{n-m,0} & E_{n+m+1}^{n-m+1,0} & \cdots & E_{n+m+1}^{n+m+1,0} & \cdots
 \end{array}$$

temos que os únicos termos não nulos em E_{m+n+2} são representados no diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n+m+2}^{0,m} & \cdots & E_{n+m+2}^{n-m,m} & & & & \\
 & & & & & & \\
 E_{n+m+2}^{0,0} & \cdots & E_{n+m+2}^{n-m,0} & E_{n+m+2}^{n-m+2,0} & \cdots & E_{n+m+2}^{n+m,0} &
 \end{array}$$

Mais especificamente,

$$E_{n+m+2}^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m+n. \\ E_2^{k,m} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n-m. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $r \geq n+m+2$, $d_r^{k,l} = 0$ então, $E_\infty^{k,l} = E_{m+n+2}^{k,l}$. Assim,

$$E_\infty^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq m+n. \\ E_2^{k,m} \cong \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n-m. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.21)$$

como álgebras bigraduadas.

Agora, como $E_2^{*,0} \cong H^*(B_G; \mathbb{Z}_p)$, como álgebras graduadas, podemos substituir em (3.21), $\langle \zeta_k \rangle \otimes \langle 1 \rangle$ por $\langle \zeta_k \rangle$. Por outro lado, para todo $0 \leq k \leq n-m$, a multiplicação

$$\begin{aligned}
 (\cdot) \smile 1 \otimes v_1 : E_\infty^{k,0} &\rightarrow E_\infty^{k,m} \\
 a\zeta_k \otimes 1 &\mapsto a\zeta_k \otimes v_1,
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

é um isomorfismo. Assim, podemos escrever

$$E_\infty^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq m+n \text{ e } l=0. \\ E_2^{k,m} \cong \langle \zeta_k \otimes v_1 \rangle, & \text{se } 0 \leq k \leq n-m \text{ e } l=m. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Observação 3.39. Temos que as multiplicações a seguir são todas isomorfismos.

$$\begin{aligned} (\cdot) \smile 1 \otimes v_1 : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+m}, \\ a\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_k \otimes v_1, \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq n - m$.

$$\begin{aligned} t \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+2}, \\ a\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto at\zeta_k \otimes 1 = a\zeta_{k+2} \otimes 1, \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq m - 3$ e $n < k \leq m + n - 2$.

$$\begin{aligned} s \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+l} &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+l+1}, \\ at^{k/2} \otimes w &\longmapsto ast^{k/2} \otimes w, \end{aligned}$$

onde k é par, $0 \leq k \leq m + n - 1$ e $w = 1$, se $l = 0$ e k é par, $0 \leq k \leq n - m - 1$, $w = v_1$, se $l = m$.

$$\begin{aligned} t \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+2} \\ a\zeta_{k-m} \otimes v_1 + b\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_{k-m+2} \otimes v_1 + b\zeta_{k+2} \otimes 1, \end{aligned}$$

para $m \leq k \leq n - 2$.

$$\begin{aligned} s \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+2} \\ a\zeta_{k-m} \otimes v_1 + b\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_{k-m+1} \otimes v_1 + b\zeta_{k+1} \otimes 1, \end{aligned}$$

se k é par e $m \leq k \leq n - 1$.

Observação 3.40. De (3.23) e das Observações 2.43 e 3.39, temos que o complexo total associado ao termo E_∞ : $(\text{Tot}E_\infty^{*,*})^* = \bigoplus_k (\text{Tot}E_\infty^{*,*})^k$, como uma álgebra graduada, é dado como segue.

$$(\text{Tot}E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k < m. \\ E_\infty^{k-m,m} + E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle + \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & \text{se } m \leq k \leq n. \\ E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n < k \leq m + n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, desde que a sequência espectral $\{E_r, d_r\}$ converge para $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ como uma álgebra graduada, segue da Definição 2.39 que $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p); F^*)$, como álgebras bigradas, onde F^* é uma filtração de $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Por outro lado, também pela Observação 2.43, sabemos que $(\text{Tot}E_0^{*,*})^*(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)) \cong H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como espaços vetoriais graduados.

Deste modo,

$$H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k < m. \\ E_\infty^{k-m,m} + E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle + \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & m \leq k \leq n. \\ E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n < k \leq m+n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

como espaços vetoriais graduados.

Observamos que $1 \otimes v_1 \in E_2^{0,m}$ é um cociclo permanente e determina um elemento não nulo $\mu \in E_\infty^{0,m}$. De maneira análoga à prova do 1º **Caso**¹⁸, podemos escolher $x \in H^1(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $y \in H^2(X_G; \mathbb{Z}_p)$, tais que $x = \pi^*(s)$ e $y = \pi^*(t)$. Nestas condições, temos $x^2 = (\pi^*(s))^2 = \pi^*(s^2) = 0$, $y^{(n+m+1)/2} = 0$, pois é um elemento em $H^{n+m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{n+m+1,0} = 0$, $\mu^2 = 0$, pois é um elemento em $E_\infty^{0,2m} = 0$ e $y^{(n-m+1)/2}\mu = 0$, pois é um elemento em $E_\infty^{n-m+1,m} = 0$.

Assim, concluímos que $\text{Tot}(E_\infty^{*,*})$, como álgebra graduada comutativa¹⁹, é gerado pelos elementos

$$\begin{aligned} &1, x, y, xy, y^2, \dots, xy^{(m-2)/2}, \\ &y^{m/2}, xy^{m/2}, \dots, y^{(n-1)/2}, xy^{(n-1)/2}, \\ &\mu, x\mu, xy\mu, y^2\mu, \dots, y^{(n-m-1)/2}\mu, xy^{(n-m-1)/2}\mu, \\ &y^{(n+1)/2}, xy^{(n+1)/2}, y^{(n+3)/2}, xy^{(n+3)/2}, \dots, y^{(m+n-1)/2}, xy^{(m+n-1)/2}, \end{aligned}$$

com as relações $x^2 = 0$, $\mu^2 = 0$, $y^{(n+m+1)/2} = 0$ e $y^{(n-m+1)/2}\mu = 0$, ou seja,

$$\text{Tot}(E_\infty^{*,*}) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, \mu] / (x^2, \mu^2, y^{(n+m+1)/2}, y^{(n-m+1)/2}\mu), \quad (3.24)$$

como uma álgebra graduada comutativa.

Agora, como $E_\infty^{0,m} = E_2^{0,m} = H^m(X; \mathbb{Z}_p)$, segue do Teorema 2.49 que a aplicação

$$H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,m} = E_2^{0,m} = H^m(X; \mathbb{Z}_p)$$

é o homomorfismo $i^* : H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X; \mathbb{Z}_p)$. Assim, i^* é sobrejetor e, podemos escolher $z \in H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ tal que $i^*(z) = v_1$. Temos que $y^q z$ e $y^{(m+2q)/2}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Z}_p$, para $q \leq \frac{(m-n-1)}{2}$, pois $2q \leq n-m-1$ e $H^{2q+m}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^q z \rangle + \langle y^{(m+2q)/2} \rangle$.

Sabemos da Observação 3.39, que a multiplicação

$$y \smile (\cdot) : H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{k+2}(X_G; \mathbb{Z}_p),$$

é um isomorfismo para $0 \leq k \leq m-2$, $m \leq k \leq n-2$ e $n < k \leq m+n-2$.

¹⁸Vide Afirmação 3.36

¹⁹Vide Definição 2.41

AFIRMAÇÃO 3.41. Temos $x^2 = 0 = y^{(m+n+1)/2}$ e, podemos escolher $z' \in H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ tal que $y^{(n-m+1)/2}z' = 0$, $(z')^2 = by^m$, com $b \in \mathbb{Z}_p$, quando $n < 2m$ e $y^{(n-m+1)/2}z' = ay^{n+1}$, $(z')^2 = by^m$, quando $n > 2m$.

Demonstração. De fato, como $x = \pi^*(s)$ e $\pi^* : H^*(B_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é um homomorfismo de anéis, temos $x^2 = (\pi^*(s))^2 = \pi^*(s^2) = \pi^*(0) = 0$. Por outro lado, $y^{(n+m+1)/2} = 0$, pois é um elemento em $H^{n+m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{n+m+1,0} = 0$.

Vamos analisar agora o que ocorre nos casos $n < 2m$ e $n > 2m$.

(i) Se $n < 2m$, temos $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle z \rangle + \langle y^{m/2} \rangle$, onde $z \in H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é tal que $i^*(z) = v_1$, como anteriormente, $H^{n-m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{(n-m+1)/2} \rangle$, $H^{2m}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^m \rangle$ e $H^{n+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{(n+1)/2} \rangle$. Então,

$$y^{(n+m+1)/2}z = ay^{(n+1)/2}, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z}_p, \text{ o que implica } (z - ay^{m/2})y^{(n-m+1)/2} = 0.$$

Agora, desde que $z - ay^{m/2}$ e $y^{m/2}$ são linearmente independentes em $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$, podemos substituir z por $z' = z - ay^{m/2}$ e, assim, $y^{(n-m+1)/2}z' = 0$. Como $(z')^2 \in H^{2m}(X_G; \mathbb{Z}_p)$, existe $b \in \mathbb{Z}_p$ tal que $(z')^2 = by^m$.

(ii) Se $n > 2m$, temos $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle z \rangle + \langle y^{m/2} \rangle$, onde $z \in H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é tal que $i^*(z) = v_1$, como anteriormente, $H^{n-m+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{(n-m+1)/2} \rangle + \langle y^{(n-2m+1)/2}z \rangle$, $H^{2m}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^m \rangle + \langle y^{m/2}z \rangle$ e $H^{n+1}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{(n+1)/2} \rangle$. Assim, existem $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_p$ tais que

$$z^2 = \alpha y^m + \gamma y^{m/2}z.$$

Por outro lado, como $z - (\gamma/2)y^{m/2}$ e $y^{m/2}$ são linearmente independentes em $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p)$, podemos substituir z por $z' = z - (\gamma/2)y^{m/2}$ e, assim,

$$\begin{aligned} (z')^2 &= [z - (\gamma/2)y^{m/2}]^2 \\ &= z^2 - \gamma y^{m/2}z + (\gamma/2)^2 y^m \\ &= [\alpha y^m + \gamma y^{m/2}z] - \gamma y^{m/2}z + (\gamma/2)^2 y^m \\ &= [\alpha + (\gamma/2)^2] y^m \\ &= by^m, \end{aligned}$$

isto é, $(z')^2 = by^m$, onde $b = \alpha + (\gamma/2)^2 \in \mathbb{Z}_p$. Mais ainda, como $y^{(n-m+1)/2}z' \in H^{n+1}(X_G; \mathbb{Z}_p)$, existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tal que $y^{(n+m+1)/2}z' = ay^{(n+1)/2}$. $\square$

Observação 3.42. Por simplicidade de notação, substituiremos z' por z , na Afirmação 3.41.

Dessa forma, $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como uma álgebra graduada comutativa, é dado por

$$H^*(X_G) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, z] / (x^2, y^{(m+n+1)/2}, y^{(n-m+1)/2}z - ay^{(n+1)/2}, z^2 - by^m), \quad (3.25)$$

onde m é par, n é ímpar, $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = m$, $a, b \in \mathbb{Z}_p$ e $a = 0$, necessariamente quando $n < 2m$. Além disso, como $G = \mathbb{Z}_p$ age livremente sobre X , segue do Lema 3.7, que $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $H^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos como anéis, o que encerra o 2º Caso da prova do Teorema 3.20(ii).

Demonstração do 3º Caso: quando $r = n + 1$, obteremos o Teorema 3.20 (iii).

Neste caso, $n \neq m$. Suponhamos que $d_{n+1}^{k,l} \neq 0$, para algum $k \geq 0$ e $l = n$ ou $l = m + n$. Então, pela Observação 3.24, temos que

$$d_{n+1}^{0,n} \neq 0 \text{ ou } d_{n+1}^{0,m+n} \neq 0.$$

Mais ainda, da Observação 3.26, como $d_{n+1}^{0,m} = 0$, então $d_{n+1}^{0,m+n} \neq 0$ implica $d_{n+1}^{0,n} \neq 0$. Assim,

$$d_{n+1}^{0,m}(1 \otimes v_1) = 0 \text{ e } d_{n+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = A \otimes 1, \quad (3.26)$$

onde $0 \neq A \in H^{n+1}(B_G; \mathbb{Z}_p)$ é um gerador.

Consideremos o seguinte diagrama, representando os únicos termos não nulos em $E_{n+1} = E_2$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{n+1}^{0,m+n} & E_{n+1}^{1,m+n} & \dots & E_{n+1}^{n,m+n} & E_{n+1}^{n+1,m+n} & \dots & (3.27) \\
 & \searrow & & \searrow & \searrow & & \\
 & & & d_{n+1} & d_{n+1} & & \\
 & & & & E_{n+1}^{n,n} & E_{n+1}^{n+1,n} & \dots \\
 E_{n+1}^{0,n} & E_{n+1}^{1,n} & \dots & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & \searrow & & \\
 & & & d_{n+1} & d_{n+1} & & \\
 & & & & E_{n+1}^{n,m} & E_{n+1}^{n+1,m} & \dots \\
 E_{n+1}^{0,m} & E_{n+1}^{1,m} & \dots & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & \searrow & & \\
 & & & d_{n+1} & d_{n+1} & & \\
 & & & & E_{n+1}^{n,0} & E_{n+1}^{n+1,0} & \dots \\
 E_{n+1}^{0,0} & E_{n+1}^{1,0} & \dots & & & &
 \end{array}$$

AFIRMAÇÃO 3.43. O inteiro n deve ser ímpar.

Demonstração. Suponhamos que n seja par. Então, da Observação 3.24 segue que

$$\begin{aligned}
0 &= d_{n+1}^{0,2n}(1 \otimes v_2 \smile_X v_2) \\
&= d_{n+1}^{0,2n}(1 \otimes v_2 \smile 1 \otimes v_2) \\
&= d_{n+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^n 1 \otimes v_2 \smile d_{n+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \quad (\text{de (3.26) e de } n \text{ ser par}) \\
&= A \otimes 1 \smile 1 \otimes v_2 + 1 \otimes v_2 \smile A \otimes 1 \\
&= A \otimes 1 \smile 1 \otimes v_2 + (-1)^{n \cdot (n+1)} A \otimes 1 \smile 1 \otimes v_2 \\
&= A \otimes v_2 + (-1)^{n \cdot (n+1)} A \otimes v_2 \quad (n(n+1) \text{ é par}) \\
&= A \otimes v_2 + A \otimes v_2 \\
&= 2 \cdot A \otimes v_2 \neq 0,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Portanto, n deve ser ímpar. □

Assim, podemos escrever

$$d_{n+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) = t^{(n+1)/2} \otimes 1.$$

Por outro lado, se $0 \neq \zeta_k \in H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$, então $0 \neq \zeta_k \otimes v_2 \in E_2^{k,n} = E_{n+1}^{k,n}$, logo

$$\begin{aligned}
d_{n+1}^{k,n}(\zeta_k \otimes v_2) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{n+1}^{0,n}(1 \otimes v_2) \\
&= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile t^{(n+1)/2} \otimes 1 \\
&= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} t^{(n+1)/2} \otimes 1 \\
&= (-1)^k \zeta_{k+n+1} \otimes 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$d_{n+1}^{k,n} : E_{n+1}^{k,n} \rightarrow E_{n+1}^{k+n+1,0} \tag{3.28}$$

é isomorfismo, para todo $k \geq 0$. Por outro lado,

$$d_{n+1}^{0,m+n}(1 \otimes v_3) = \pm t^{(n+1)/2} \otimes v_1.$$

Então, se $0 \neq \zeta_k \in H^k(B_G; \mathbb{Z}_p)$, temos $0 \neq \zeta_k \otimes v_3 \in E_2^{k,m+n} = E_{n+1}^{k,m+n}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
d_{n+1}^{k,m+n}(\zeta_k \otimes v_3) &= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile d_{n+1}^{0,m+n}(1 \otimes v_3) \\
&= (-1)^k \zeta_k \otimes 1 \smile \pm t^{(n+1)/2} \otimes v_1 \\
&= (-1)^k \zeta_k \smile_{B_G} \pm t^{(n+1)/2} \otimes v_1 \\
&= \pm \zeta_{k+n+1} \otimes v_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$d_{n+1}^{k,m+n} : E_{n+1}^{k,m+n} \rightarrow E_{n+1}^{k+n+1,m} \quad (3.29)$$

é isomorfismo, para todo $k \geq 0$.

Temos do diagrama 3.27, de (3.28) e de (3.29), que os únicos termos não nulos em E_{n+2} podem representados como segue.

$$\begin{array}{ccccccccc} E_{n+2}^{0,m} & E_{n+2}^{1,m} & \dots & E_{n+2}^{n-1,m} & E_{n+2}^{n,m} \\ E_{n+2}^{0,0} & E_{n+2}^{1,0} & \dots & E_{n+2}^{n-1,0} & E_{n+2}^{n,0} \end{array}$$

ou seja, a menos de isomorfismos de espaços vetoriais, temos

$$E_{n+2}^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \\ E_2^{k,m} \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Agora, observemos que se $r \geq n+2$, então $d_r^{k,l} = 0$ e a seqüência colapsa no E_{n+2} -termo, ou seja, $E_{n+2}^{*,*} = E_{\infty}^{*,*}$. Assim,

$$E_{\infty}^{k,l} = \begin{cases} E_2^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \\ E_2^{k,m} \cong \langle \zeta_k \rangle \otimes \langle v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k \leq n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.31)$$

como álgebras bigraduadas.

Observação 3.44. Temos que as multiplicações a seguir são todas isomorfismos.

$$\begin{aligned} (\cdot) \smile 1 \otimes v_1 : \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^{k+m} \\ a\zeta_k \otimes 1 &\mapsto a\zeta_k \otimes v_1, \end{aligned}$$

para todo $0 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} t \otimes 1 \smile (\cdot) : \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^{k+2} \\ a\zeta_k \otimes w &\mapsto a\zeta_k t \otimes w = a\zeta_{k+2} \otimes w, \end{aligned}$$

onde $w = 1$, se $0 \leq k \leq m-2$ e $w = v_1$, se $n < k \leq m+n-2$.

$$\begin{aligned} s \otimes 1 \smile (\cdot) : \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^{k+l} &\rightarrow \text{Tot}(E_{\infty}^{*,*})^{k+l+1} \\ at^{k/2} \otimes w &\mapsto ast^{k/2} \otimes w, \end{aligned}$$

onde k é par, $0 \leq k \leq m-2$ e $w = 1$, se $l = 0$ e se k for par, $n < k \leq m+n-1$ e $w = v_1$, se $l = m$.

$$\begin{aligned} t \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+2} \\ a\zeta_{k-m} \otimes v_1 + b\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_{k-m+2} \otimes v_1 + b\zeta_{k+2} \otimes 1, \end{aligned}$$

para $m \leq k \leq n-2$.

$$\begin{aligned} s \otimes 1 \smile (\cdot) : \quad \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^k &\rightarrow \text{Tot}(E_\infty^{*,*})^{k+2} \\ a\zeta_{k-m} \otimes v_1 + b\zeta_k \otimes 1 &\longmapsto a\zeta_{k-m+1} \otimes v_1 + b\zeta_{k+1} \otimes 1, \end{aligned}$$

onde k é par e $m \leq k \leq n-1$.

Observação 3.45. De (3.31) e das Observações 2.43 e 3.44, temos que o complexo total associado ao termo E_∞ : $(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^* = \bigoplus_k (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k$, como uma álgebra graduada, é dado como segue.

$$(\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k < m. \\ E_\infty^{k-m,m} + E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle + \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & \text{se } m \leq k \leq n. \\ E_\infty^{k-m,m} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n < k \leq m+n. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, desde que a sequência espectral $\{E_r, d_r\}$ converge para $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ como uma álgebra graduada, segue da Definição 2.39 que $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p); F^*)$, como álgebras bigradas, onde F^* é uma filtração de $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$. Por outro lado, também pela Observação 2.43, sabemos que $(\text{Tot} E_0^{*,*})^*(H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)) \cong H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como espaços vetoriais graduados. Deste modo,

$$H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \cong (\text{Tot} E_\infty^{*,*})^k = \begin{cases} E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } 0 \leq k < m. \\ E_\infty^{k-m,m} + E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle + \langle \zeta_k \rangle \cong \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p, & m \leq k \leq n. \\ E_\infty^{k,0} \cong \langle \zeta_{k-m} \otimes v_1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p, & \text{se } n < k \leq m+n. \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

como espaços vetoriais graduados.

Observamos que $1 \otimes v_1 \in E_2^{0,m}$ é um cociclo permanente e determina um elemento não nulo $\mu \in E_\infty^{0,m}$. De maneira análoga à prova do 1º Caso²⁰, podemos escolher $x \in H^1(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $y \in H^2(X_G; \mathbb{Z}_p)$, tais que $x = \pi^*(s)$ e $y = \pi^*(t)$. Nestas condições, temos $x^2 = (\pi^*(s))^2 = \pi^*(s^2) = 0$, $y^{(n+1)/2} = 0$, pois é um elemento em $E_\infty^{n+1,0} = 0$, $\mu^2 = 0$, pois é um elemento em $E_\infty^{0,2m} = 0$. Assim, concluímos que $\text{Tot}(E_\infty^{*,*})$, como álgebra graduada comutativa, é gerado

²⁰Vide Afirmação 3.36

pelos elementos

$$\begin{aligned} &1, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{m-1}, \\ &\eta_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_{n-1}, \eta_n, \\ &\mu, \eta_1\mu, \eta_2\mu, \eta_3\mu, \dots, \eta_{m-n}\mu, \\ &\eta_{n-m+1}\mu, \eta_{n-m+2}\mu, \dots, \eta_n\mu, \end{aligned}$$

onde

$$\eta_k = \begin{cases} xy^{(k-1)/2}, & \text{se } k \text{ for ímpar.} \\ y^{k/2}, & \text{se } k \text{ for par,} \end{cases}$$

com as relações $x^2 = 0$, $y^{(n+1)/2} = 0$ e $\mu^2 = 0$, ou seja,

$$\text{Tot}(E_\infty^{*,*}) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, \mu]/(x^2, y^{(n+1)/2}, \mu^2), \quad (3.32)$$

como uma álgebra graduada comutativa.

Agora, como $E_\infty^{0,m} = E_2^{0,m} = H^m(X; \mathbb{Z}_p)$, segue do Teorema 2.49 que a aplicação

$$H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,m} = E_2^{0,m} = H^m(X; \mathbb{Z}_p)$$

é o homomorfismo $i^* : H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^m(X; \mathbb{Z}_p)$. Assim, i^* é sobrejetor e, podemos escolher

$$z \in H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) = E_\infty^{m,0} \oplus E_\infty^{0,m} = \langle \eta_m \rangle + \langle \mu \rangle, \text{ tal que } i^*(z) = v_1$$

Então, z representa μ . Sabemos da Observação 3.44, que a multiplicação

$$y \smile (\cdot) : H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{k+2}(X_G; \mathbb{Z}_p),$$

é um isomorfismo para $0 \leq k \leq m-2$, $m \leq k \leq n-2$ e $n < k \leq m+n-2$. Assim, $y^q z \neq 0$, para $q \leq \frac{n-1}{2}$, pois $2q \leq n-1$, $2q+m \leq m+n-1$ e $y^q z$ determina o subespaço não trivial $\langle y^q z \rangle \subset H^{2q+m}(X_G; \mathbb{Z}_p)$.

AFIRMAÇÃO 3.46. Temos $x^2 = y^{(n+1)/2} = 0$ e, podemos escolher z' tal que $(z')^2 = 0$, quando m for par e $n < 2m$ e, $(z')^2 = by^m$, quando m for par e $n > 2m$.

Demonstração. Como $\pi^* : H^*(B_G; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ é um homomorfismo de anéis e $x = \pi^*(s)$, temos $x^2 = (\pi^*(s))^2 = \pi^*(s^2) = \pi^*(0) = 0$. Por outro lado, $y^{(n+1)/2} = 0$, pois é um elemento em

$E_{\infty}^{n+1,0} = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_p &\cong H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle \eta_k \rangle, \text{ para } 0 \leq k < m, \\ \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p &\cong H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle \eta_{k-m} z' \rangle + \langle \eta_k \rangle, \text{ para } m \leq k \leq n \text{ e} \\ \mathbb{Z}_p &\cong H^k(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle \eta_{k-m} z' \rangle, \text{ para } n \leq k \leq m+n.\end{aligned}$$

Assim, se m for par e se $n < 2m$, temos $H^{2m}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle \eta_m z' \rangle = \langle y^{m/2} z' \rangle$. Deste modo, existe $b \in \mathbb{Z}_p$ tal que $(z')^2 = by^{m/2} z'$. Agora, como $y^{m/2}$ e $z - (b/2)y^{m/2}$ são linearmente independentes, tomando $z = z' - (b/2)y^{m/2}$, podemos escrever

$$H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{m/2} \rangle + \langle z \rangle, \text{ com}$$

$$\begin{aligned}z^2 &= [z' - (b/2)y^{m/2}]^2 \\ &= (z')^2 - by^{m/2} z' + y^m \\ &= by^{m/2} z' - by^{m/2} z' + y^m \\ &= y^m \\ &= \eta_{2m} = 0,\end{aligned}$$

pois $\eta_k = 0$, para todo $k > n$ e estamos assumindo $n < 2m$.

Agora, se m for par e se $n > 2m$ temos $H^{2m}(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^m \rangle + \langle y^{m/2} z' \rangle$, então existem $\alpha, \gamma \in \mathbb{Z}_p$ tais que $(z')^2 = \alpha y^m + \gamma y^{m/2} z'$. Como $y^{m/2}$ e $z' - (\gamma/2)y^{m/2}$ são linearmente independentes, tomando $z = z' - (\gamma/2)y^{m/2}$, temos $H^m(X_G; \mathbb{Z}_p) = \langle y^{m/2} \rangle + \langle z' \rangle$, com

$$\begin{aligned}z^2 &= [z' - (\gamma/2)y^{m/2}]^2 \\ &= (z')^2 - \gamma y^{m/2} z' + (\alpha/2)^2 y^m \\ &= (\alpha y^m + \gamma y^{m/2} z') - \gamma y^{m/2} z' + (\alpha/2)^2 y^m \\ &= [\alpha + (\alpha/2)^2] y^m,\end{aligned}$$

isto é, $z^2 = by^m$, onde $b = \alpha + (\alpha/2)^2 \in \mathbb{Z}_p$. □

Observação 3.47. Novamente, por simplicidade de notação, substituiremos z' por z , na Afirmação 3.46.

Dessa forma, $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$, como uma álgebra graduada comutativa, é dado por

$$H^*(X_G) \cong \mathbb{Z}_p[x, y, z]/(x^2, y^{(n+1)/2}, z^2 - by^m), \quad (3.33)$$

onde n é ímpar, $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg z = m$, $b \in \mathbb{Z}_p$ e $b \neq 0$, somente quando m for par e $2m < n$. Além disso, como $G = \mathbb{Z}_p$ age livremente sobre X , segue do Lema 3.7, que $H^*(X_G; \mathbb{Z}_p)$ e $H^*(X/G; \mathbb{Z}_p)$ são isomorfos como anéis, o que encerra o 3º Caso da prova do

Teorema 3.20(iii). Isso finaliza a prova do Teorema 3.20. □

3.3 Versões do Teorema 3.20 para os casos $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$

A seguir, apresentamos as versões do Teorema 3.20, provadas por Dotzel, Singh e Tripathi em [14] nos casos $G = \mathbb{Z}_2$ e $G = S^1$. A demonstração do caso $G = \mathbb{Z}_2$ é análoga à do caso $G = \mathbb{Z}_p$, com p um primo ímpar. No caso em que $G = S^1$, embora os argumentos sejam diferentes, a técnica da demonstração permanece a mesma dos casos anteriores.

Teorema 3.48. *Seja $G = \mathbb{Z}_2$ agindo livremente sobre um espaço finitístico $X \sim_2 S^m \times S^n$, $0 < m \leq n$. Então, $H^*(X/G; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2[y, z]/\psi(y, z)$, como uma álgebra graduada, onde $\psi(y, z)$ é um dos seguintes ideais graduados:*

- (i) (y^{m+2}, z^2) , $\deg y = 1$, $\deg z = n$;
- (ii) $(y^{m+n+1}, y^{n-m+1}, z, z^2 - ay^m z - by^{2m})$, $\deg y = 1$, $\deg z = m$, $a, b \in \mathbb{Z}_2$, com $a = 0$, necessariamente quando $n < 2m$;
- (iii) $(y^{n+1}, z^2 - ay^m z - by^{2m})$, $\deg y = 1$, $\deg z = m$, $a, b \in \mathbb{Z}_2$, com $b = 0$, somente quando $m = n$ ou $n < 2m$.

Teorema 3.49. *Seja $G = S^1$ agindo livremente sobre um espaço finitístico $X \sim_{\mathbb{Q}} S^m \times S^n$, $0 < m \leq n$. Então, $H^*(X/G; \mathbb{Q})$ é isomorfo a $\mathbb{Q}[y, z]/\psi(y, z)$, como uma álgebra graduada, onde $\psi(y, z)$ é um dos seguintes ideais graduados:*

- (i) $(y^{(m+1)/2}, z^2)$, m ímpar, $\deg y = 2$, $\deg z = n$;
- (ii) $(y^{(m+n+1)/2}, zy^{(n-m+1)/2} - ay^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, m par, n ímpar, $\deg y = 2$, $\deg z = m$, com $a = 0$, necessariamente quando $n < 2m$;
- (iii) $(y^{(n+1)/2}, z^2 - by^m)$, n ímpar, $\deg y = 2$, $\deg z = m$, com $b \neq 0$, somente quando m for par e $2m < n$.

Fatos Algébricos e Topológicos

Este capítulo tem como objetivo apenas introduzir as noções básicas e notações que serão usadas em todo este trabalho, de forma alguma ele preenche todas as necessidades para um texto auto-contido. Muitos resultados são apenas enunciados, mas contêm as devidas referências para suas demonstrações. Uma discussão mais completa, incluindo provas e aplicações pode ser encontrada nos seguintes textos: Dugundji [15], Eilenberg and Steenrod [16], Hatcher [24], Lee [30], Munkres [35], [36], Rotman [40], Spanier [41] and Whitehead [47].

A.1 Categorias e Funtores

Definição A.1. *Uma Categoria $\mathcal{C}$ consiste de:*

- (1) *Uma classe de objetos X .*
- (2) *Para cada par ordenado (X, Y) de objetos de $\mathcal{C}$, um conjunto $\text{Hom}(X, Y)$ de morfismos f . Se $f \in \text{Hom}(X, Y)$, escrevemos $f : X \rightarrow Y$.*
- (3) *Uma função, chamada composição de morfismos,*

$$: \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$$

a qual está definida para toda tripla (X, Y, Z) de objetos de $\mathcal{C}$. Dados quaisquer dois morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$, a imagem do par (f, g) pela operação de composição será denotada por $g \circ f : X \rightarrow Z$ e os seguintes axiomas devem ser satisfeitos:

Axioma 1.(Associatividade) *Dados morfismos $f : W \rightarrow X$, $g : X \rightarrow Y$ e $h : Y \rightarrow Z$, então:*
 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Axioma 2.(Existência de identidades) *Para cada objeto X , existe um elemento $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ tal*

que

$$Id_X \circ f = f \text{ e } g \circ Id_X = g$$

para todo morfismo $f \in \text{Hom}(W, X)$ e para todo morfismo $g \in \text{Hom}(X, Y)$, onde W e Y são arbitrários.

Observação A.2. O morfismo identidade $Id_X \in \text{Hom}(X, X)$ é único (vide [36, pg. 155]).

Observação A.3. A categoria básica que estaremos considerando neste trabalho é a categoria dos espaços topológicos (às vezes chamados apenas de espaços) e das funções contínuas, a qual será denotada por **Top**.

Definição A.4. Dados morfismos $f \in \text{Hom}(X, Y)$ e $g, g' \in \text{Hom}(Y, X)$, se $g \circ f = Id_X$, g é chamado um morfismo inverso à esquerda para f e se $f \circ g' = Id_Y$, g' é chamado um morfismo inverso à direita para f .

Observação A.5. Observemos que se f possui morfismo inverso à esquerda g e inverso à direita g' , então $g = g'$ (vide [36, pg.156]). Nesse caso, g é chamado morfismo inverso para f . Além disso, mostra-se que g é único.

Definição A.6. Se f possui morfismo inverso, então f é chamado uma equivalência na categoria em questão.

Observação A.7. Uma equivalência na categoria **Top** é chamada um homeomorfismo.

Definição A.8. Um funtor covariante $\mathfrak{F}$ de uma categoria $\mathbf{C}$ em uma categoria $\mathbf{D}$ é uma função, a qual será denotada por $\mathfrak{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, que associa a cada objeto X de $\mathbf{C}$, um objeto $\mathfrak{F}(X)$ em $\mathbf{D}$ e, a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$, um morfismo $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(X) \rightarrow \mathfrak{F}(Y)$ de $\mathbf{D}$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\mathfrak{F}(Id_X) = Id_{\mathfrak{F}(X)}$, para todo objeto X de $\mathbf{C}$.
- (ii) $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(f)$, para todo morfismo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ em $\mathbf{C}$.

Ou seja, um funtor covariante deve preservar composições e identidades.

Observação A.9. Seja $\mathfrak{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ um funtor covariante. Observemos que se $f : X \rightarrow Y$ for uma equivalência na categoria $\mathbf{C}$, então existe um único morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$. Assim, segue da Definição A.8 que $\mathfrak{F}(g) \circ \mathfrak{F}(f) = \mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(Id_X) = Id_{\mathfrak{F}(X)}$ e $\mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g) = \mathfrak{F}(f \circ g) = \mathfrak{F}(Id_Y) = Id_{\mathfrak{F}(Y)}$ e, portanto, $\mathfrak{F}(f)$ será uma equivalência na categoria $\mathbf{D}$.

Definição A.10. Um funtor contravariante $\mathfrak{F}$ de uma categoria $\mathbf{C}$ em uma categoria $\mathbf{D}$ é uma função, a qual será denotada por $\mathfrak{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, que associa a cada objeto X de $\mathbf{C}$, um objeto $\mathfrak{F}(X)$ em $\mathbf{D}$ e, a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$, um morfismo $\mathfrak{F}(f) : \mathfrak{F}(Y) \rightarrow \mathfrak{F}(X)$ de $\mathbf{D}$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $\mathfrak{F}(Id_X) = Id_{\mathfrak{F}(X)}$, para todo objeto X de $\mathbf{C}$.
- (ii) $\mathfrak{F}(g \circ f) = \mathfrak{F}(f) \circ \mathfrak{F}(g)$, para todo morfismo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ em $\mathbf{C}$.

Observação A.11. Exemplos importantes de funtores contravariantes que estaremos considerando neste trabalho serão apresentados no Capítulo B (*Cohomologia Simplicial e Cohomologia de Čech*).

A.2 Rank de Grupos Abelianos Livres Finitamente Gerados e Módulos Graduados do Tipo Finito

Lema A.12 ([30], Capítulo 9, Lema 9.12, pg. 205). *Se um grupo abeliano livre G possui base finita, então toda base de G possui o mesmo número de elementos.*

Definição A.13. *Se G for um grupo abeliano livre com base finita, o rank de G , denotado por $rk(G)$, é definido como sendo o número de elementos de qualquer base finita (desde que, pelo Lema A.12, toda base finita de G possui o mesmo número de elementos).*

Definição A.14. *Dizemos que um elemento g de um grupo abeliano G é um elemento de torção se $ng = 0$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os elementos de torção é um subgrupo de G , chamado subgrupo de torção e denotado por G_{tor} . Dizemos que G é livre de torção se o único elemento de torção for o elemento neutro $0 \in G$.*

Observação A.15. O grupo quociente G/G_{tor} é livre de torção.

Proposição A.16 ([30], Capítulo 9, Proposição 9.14, pg. 206). *Qualquer grupo abeliano que é finitamente gerado e livre de torção é um grupo abeliano livre de rank finito.*

Observação A.17. Se G for um grupo abeliano finitamente gerado, desde que G/G_{tor} é finitamente gerado e livre de torção, segue da Proposição A.16 que G/G_{tor} é um grupo abeliano livre de rank finito. Assim, podemos definir o rank de G como sendo o rank de G/G_{tor} .

Definição A.18. *Dizemos que um módulo graduado $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ é do tipo finito se C_q for finitamente gerado, para todo $q \in \mathbb{Z}$.*

Observação A.19. Um módulo graduado $\{C_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ do tipo finito é finitamente gerado (como um módulo graduado) se, e somente se, $C_q = 0$, exceto para um conjunto finito de inteiros q .

A.3 Característica de Euler

Definição A.20. *Para qualquer espaço topológico X , o inteiro $\beta_q(X, \mathbb{Z}) = rk H_q(X, \mathbb{Z})$ (se for finito), é chamado o q -ésimo número de Betti de X . A característica de Euler de X^1 é definida pela fórmula:*

$$\chi(X, \mathbb{Z}) = \sum_q (-1)^p \beta_q(X, \mathbb{Z}),$$

desde que cada $\beta_q(X, \mathbb{Z})$ seja finito e $\beta_q(X, \mathbb{Z}) = 0$, para q suficientemente grande.

¹Vide [30], Capítulo 13, pg. 328

Podemos também definir a característica de Euler em termos de um espaço vetorial graduado sobre um corpo $\mathbb{K}^2$ como segue.

Definição A.21. Seja $A^* = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ um espaço vetorial graduado sobre $\mathbb{K}$ localmente finito, isto é, $\dim_{\mathbb{K}} A^n$ é finita, para todo $n \in \mathbb{N}$. A série de Poincaré para A^* é a série de potências formal

$$P(A^*, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{K}} A^n) t^n.$$

A característica de Euler para A^* é definida como sendo

$$\chi(A^*) = P(A^*, -1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\dim_{\mathbb{K}} A^n),$$

quando esta expressão fizer sentido.

Definição A.22. Se X for um espaço topológico e se $\mathbb{K}$ for um corpo, temos o espaço vetorial graduado sobre $\mathbb{K}$, $\check{H}^*(X; \mathbb{K}) = \{\check{H}^n(X; \mathbb{K}); n \in \mathbb{N}\}$. Se $\check{H}^*(X; \mathbb{K})$ for localmente finito, a característica de Euler de X será, por definição,

$$\chi(X, \mathbb{K}) = \chi(\check{H}^*(X; \mathbb{K})) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dim_{\mathbb{K}} \check{H}^n(X; \mathbb{K}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n rk \check{H}^n(X; \mathbb{K}),$$

quando esta expressão fizer sentido.

A.4 Espaços de Eilenberg-Mac Lane

Definição A.23. Sejam G um grupo e $n \geq 1$. Um espaço de Eilenberg-Mac Lane do tipo $(G, n)^3$ é um espaço com ponto base conexo por caminhos (X, x_0) satisfazendo a seguinte condição

$$\pi_q(X, x_0) \cong \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq n \\ G, & \text{se } q = n. \end{cases}$$

Observação A.24. Se $n > 1$, G é um grupo abeliano. Usaremos a notação $K(G, n)$ para um espaço de Eilenberg-MacLane do tipo (G, n) .

A.5 O homomorfismo de Bockstein

Sejam A, B, C grupos abelianos e X um espaço topológico. Se

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \tag{A.1}$$

²Vide [32], Capítulo 1, Definição 1.9, pg. 14.

³Vide [47], Capítulo 5, § 7, pg. 244

é uma seqüência exata curta, então a seqüência

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), A) \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), B) \rightarrow \text{Hom}(C_*(X), C) \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

é exata, onde $C_*(X)$ denota o complexo de cadeias singulares de X . Assim, obtemos uma seqüência exata longa em cohomologia

$$\cdots \rightarrow H^k(X; A) \rightarrow H^k(X; B) \rightarrow H^k(X; C) \xrightarrow{\beta_k} H^{k+1}(X; A) \rightarrow \cdots \quad (\text{A.3})$$

Definição A.25. Os homomorfismos conectantes

$$\beta_k : H^k(X; C) \rightarrow H^{k+1}(X; A) \quad (\text{A.4})$$

são chamados homomorfismos de Bockstein associados à seqüência exata curta A.1.

A.6 Produto Tensorial

Definição A.26. Sejam X um conjunto não vazio e R um anel comutativo com identidade. Denotaremos por $R(X)$ o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow R$ que são quase nulas, isto é, $f(x) \neq 0$ (elemento neutro da soma de R) apenas para um número finito de elementos $x \in X$. Fazendo $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(rf)(x) = r f(x)$, para $f, g \in R(X)$, $r \in R$ e $x \in X$, o conjunto $R(X)$ é munido de uma estrutura de R -módulo. Os elementos $x \in X$ podem ser identificados com as funções $f_x \in R(X)$, que em x valem 1 (elemento neutro da multiplicação), e valem 0, caso contrário. Dessa forma, uma função f pode ser representada como uma soma formal $\sum r_i x_i$. O R -módulo $R(X)$ é chamado **R -módulo livre gerado por X** .

Sejam M, N dois R -módulos. Consideremos $R(M \times N)$ o R -módulo livre gerado pelos pares $(m, n) \in M \times N$ e S o R -submódulo de $R(M \times N)$ gerado por elementos das seguintes formas:

$$\begin{aligned} (m + m', n) - (m, n) - (m', n), \\ (m, n + n') - (m, n) - (m, n'), \\ (rm, n) - r(m, n), \\ (m, rn) - r(m, n), \end{aligned}$$

no qual $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$.

Definição A.27. O **produto tensorial** de M e N é o R -módulo $M \otimes_R N = \frac{R(M \times N)}{S}$.

Na maioria das vezes adotaremos a notação $\otimes$ ao invés de $\otimes_R$. As classes dos pares (m, n) serão denotadas por $m \otimes n$. Estes elementos geram $M \otimes N$ e possuem as seguintes propriedades, para cada $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$.

$$(i) (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n.$$

$$(ii) m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n'.$$

$$(iii) rm \otimes n = r(m \otimes n) = m \otimes rn.$$

Observação A.28. Tais propriedades seguem diretamente da definição.

Proposição A.29 ([16], Capítulo 5, Lema 9.2, pg. 140). *Seja M um R -módulo, então $R \otimes M$ e $M \otimes R$ são isomorfos a M .*

Demonstração: De fato, basta verificar que as seguintes aplicações $M \otimes R \rightarrow R$, $m \otimes r \mapsto mr$ e $R \otimes M \rightarrow R$, $r \otimes m \mapsto rm$ são isomorfismos. ■

Definição A.30. *Sejam $f : M \rightarrow M'$ e $g : N \rightarrow N'$ dois R -homomorfismos. Então,*

$$\begin{aligned} f \otimes g : M \otimes N &\rightarrow M' \otimes N' \\ m \otimes n &\mapsto f(m) \otimes g(n) \end{aligned}$$

define um R -homomorfismo, chamado o homomorfismo induzido por f e g .

Dado um R -módulo A , observemos que $\otimes A$ é funtor covariante entre a categoria dos R -módulos. De fato, dado um R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$, obtemos $f \otimes 1_A : M \otimes A \rightarrow N \otimes A$, definida por $m \otimes a \mapsto f(m) \otimes a$. Os fatos que comprovam que $\otimes A$ é um funtor covariante podem ser encontrados em [40, Capítulo 2, Teorema 2.48, pg. 74]. Analogamente, $A \otimes$ é um funtor covariante.

A.7 Espaços Paracompactos

Definição A.31. *Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ uma cobertura de um espaço topológico X . Um refinamento de $\mathcal{U}$ é uma cobertura $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in \mathfrak{B}\}$ de X tal que para cada $\beta \in \mathfrak{B}$, existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ com $V_\beta \subset U_\alpha$. Se $\mathcal{V}$ for um refinamento de uma cobertura $\mathcal{U}$ de X , dizemos que $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$.*

Observação A.32. Se os elementos de $\mathcal{V}$ são subconjuntos abertos de X , dizemos que $\mathcal{V}$ é um refinamento aberto de $\mathcal{U}$. Se os elementos de $\mathcal{V}$ são subconjuntos fechados de X , dizemos que $\mathcal{V}$ é um refinamento fechado de $\mathcal{U}$.

Definição A.33. *Uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ de um espaço topológico X é chamada localmente finita se para cada $x \in X$, existe um subconjunto aberto $V(x) \subset X$ com $x \in V(x)$ tal que $U_\alpha \cap V(x) \neq \emptyset$, apenas para um número finito de índices $\alpha \in \mathfrak{A}$, ou seja, o conjunto*

$$\{\alpha \in \mathfrak{A} : U_\alpha \cap V(x) \neq \emptyset\}$$

é finito.

Observação A.34. Se $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ for uma cobertura localmente finita de um espaço topológico X , então

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \overline{U_\alpha}.$$

(Vide [35, Lema 39.1]).

Definição A.35. Um espaço de Hausdorff X é paracompacto se toda cobertura aberta de X possui um refinamento aberto localmente finito.

Observação A.36. Como parte da definição do termo paracompacto, seguindo a convenção de Bourbaki, estamos incluindo a hipótese de que o espaço deve satisfazer a condição de Hausdorff.

Proposição A.37. Todo espaço compacto Hausdorff é paracompacto.

Demonstração: Seja X um espaço compacto Hausdorff. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_\alpha; \alpha \in \mathfrak{A}\}$ de X , desde que X é compacto, existe uma subcobertura finita $\mathcal{V} = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_n}\}$ de $\mathcal{U}$, a qual refina $\mathcal{U}$. Além disso, dado $x \in X$, para todo aberto $V(x)$ de X contendo x , temos que

$$V(x) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} = X,$$

ou seja, $V(x)$ intercepta apenas uma quantidade finita de abertos de $\mathcal{V}$ e, portanto, X é paracompacto.

Observação A.38. Se X for um espaço regular então X é paracompacto se, e somente se toda cobertura aberta de X possui um refinamento fechado localmente finito. Esse resultado foi provado por Ernest Michael em [34, Lema 1, pg.831] (Vide também [15, Teorema 2.3, pg.163]).

Proposição A.39. Todo subespaço fechado de um espaço paracompacto é paracompacto.

Demonstração: Sejam Y um subespaço fechado de um espaço paracompacto X e $\mathcal{V} = \{V_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ uma cobertura aberta de Y por subconjuntos abertos em Y . Para cada $V_\alpha \in \mathcal{V}$, escolhamos um aberto U_α de X tal que $U_\alpha \cap Y = V_\alpha$. Então, a coleção

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha : U_\alpha \cap Y = V_\alpha \in \mathcal{V}\} \cup \{X - Y\}$$

é uma cobertura aberta de X e, desde que X é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{W} = \{W_\beta, \beta \in \mathfrak{B}\}$ de $\mathcal{U}$. Mostremos que a coleção

$$\mathcal{W}_Y = \{W_\beta \cap Y : W_\beta \in \mathcal{W}\}$$

é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{V}$. Com efeito, dado $W_\beta \in \mathcal{W}$, desde que $\mathcal{W}$ refina $\mathcal{U}$, existe um aberto $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $W_\beta \subset U_\alpha$, logo $W_\beta \cap Y \subset U_\alpha \cap Y = V_\alpha$, o que mostra que

$\mathcal{W}_Y$ refina $\mathcal{V}$. Além disso, dado $y \in Y \subset X$, desde que $\mathcal{W}$ é localmente finito, existe um aberto $V(y)$ em X tal que o conjunto $\{\beta \in \mathfrak{B} : W_\beta \cap V(y) \neq \emptyset\}$ é finito. Assim, $V(y) \cap Y$ é um aberto de Y contendo y tal que o conjunto

$$\{\beta \in \mathfrak{B} : (W_\beta \cap Y) \cap (V(y) \cap Y) \neq \emptyset\}$$

é finito e, portanto, Y é paracompacto. ■

Proposição A.40. *Todo espaço paracompacto é normal.*

Demonstração: Seja X um espaço paracompacto e mostremos primeiramente que X é regular. Dados $a \in X$ e F um fechado de X tal que $a \notin F$, desde que X é Hausdorff⁴, para cada $x \in F$, podemos escolher um aberto $U(x)$ que contém x tal que $a \notin \overline{U(x)}$. A coleção

$$\mathcal{U} = \{U(x) : x \in F\} \cup \{X - F\}$$

é uma cobertura aberta de X e, sendo X paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$. Consideremos a seguinte subcoleção

$$\mathcal{W} = \{W \in \mathcal{V} : W \cap F \neq \emptyset\} \subset \mathcal{V}.$$

Então, $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta de F e, além disso, se $W \in \mathcal{W}$, então $a \notin \overline{W}$. Desde que $W \cap F \neq \emptyset$, existe $U(x) \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U(x)$, com $a \notin \overline{U(x)}$. Seja

$$V = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W$$

Temos que V é um aberto de X contendo F e, desde que $\mathcal{W}$ é uma cobertura aberta localmente finita (pois $\mathcal{V}$ o é) segue de A.34 que

$$\overline{V} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \overline{W}.$$

Assim, $a \notin \overline{V}$. Portanto, V e $X - \overline{V}$ são abertos disjuntos contendo F e a , respectivamente, o que implica que X é regular.

Para concluirmos que X é normal, sejam F_1 e F_2 dois fechados disjuntos de X . Usando a regularidade⁵ de X , para cada $x \in F_1$ podemos escolher um aberto $U(x)$ de X contendo x tal que $\overline{U(x)} \cap F_2 = \emptyset$. Usando os mesmos argumentos anteriores, é possível exibir um aberto V de X contendo F_1 tal que $\overline{V} \cap F_2 = \emptyset$. Dessa forma, V e $X - \overline{V}$ são abertos disjuntos contendo F_1 e F_2 , respectivamente, o que implica que X é normal. ■

⁴ X é Hausdorff se, e somente se, dado $p \in X$, para cada ponto $q \neq p$ em X , existe um aberto $U(p) \subset X$ tal que $q \notin \overline{U(p)}$ (Vide [15, Teorema 1.2, pg.138]).

⁵ X é regular se, e somente se, dados um ponto $x \in X$ e um fechado $F \subset X$ que não contém x , existe um aberto $V \subset X$ contendo x tal que $\overline{V} \cap F = \emptyset$ Vide [15, Teorema 2.2, pg.141].

Observação A.41. Usando-se a Proposição A.40 e o **Teorema de E.Michael** [15, Teorema 2.3(2), pg.163], prova-se o resultado a seguir.

Proposição A.42 ([15], Teorema 2.6, pg.165). *Sejam X um espaço paracompacto e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, fechada e sobrejetora. Então, Y é paracompacto.*

Proposição A.43. *O produto de um espaço paracompacto com um espaço compacto Hausdorff é paracompacto.*

Demonstração: Sejam X um espaço paracompacto e Y um espaço compacto Hausdorff. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U}$ de $X \times Y$, para cada $x \in X$ fixado, desde que $\{x\} \times Y$ é compacto, existe uma subcoleção finita $\{U_{\alpha_1}^x, \dots, U_{\alpha_{n_x}}^x\}$ de $\mathcal{U}$ que cobre $\{x\} \times Y$. Podemos escolher um aberto $V(x) \subset X$ contendo x tal que $V(x) \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{\alpha_i}^x$.⁶ Consideremos a cobertura aberta

$$\mathcal{U}_X = \{V(x) : x \in X\}$$

de X . Como X é paracompacto, existe um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{V}_X$ de $\mathcal{U}_X$ e assim, para cada $V \in \mathcal{V}_X$, $V \subset V(x)$ para algum $x \in X$. Mostremos que a cobertura aberta

$$\mathcal{W} = \{(V \times Y) \cap U_{\alpha_i}^x ; i = 1, \dots, n_x, V \in \mathcal{V}_X\}$$

de $X \times Y$ é um refinamento aberto localmente finito de $\mathcal{U}$. Com efeito, temos que $(V \times Y) \cap U_{\alpha_i}^x \subset U_{\alpha_i}^x$, com $U_{\alpha_i}^x \in \mathcal{U}$. Além disso, dado $(x, y) \in X \times Y$, como $\mathcal{V}_X$ é localmente finito, existe um aberto U de X contendo x tal que $U \cap V \neq \emptyset$, apenas para um número finito de elementos $V \in \mathcal{V}_X$. Então, considerando o aberto $U \times Y$ de $X \times Y$ contendo (x, y) , temos que $(U \times Y) \cap [(V \times Y) \cap U_{\alpha_i}^x] \neq \emptyset$, apenas para um número finito de elementos $(V \times Y) \cap U_{\alpha_i}^x \in \mathcal{W}$ e, portanto, $X \times Y$ é paracompacto. ■

Definição A.44. *Um espaço topológico X é chamado σ -compacto se ele pode ser escrito como uma reunião enumerável de subconjuntos compactos (Vide[34, pg.833]).*

Observação A.45. Ernest Michael mostrou em [34, Proposição 4, pg.837] que o produto cartesiano de um espaço paracompacto com um espaço regular σ -compacto é paracompacto.

A.8 Join de Espaços Topológicos

Para qualquer espaço topológico X , o cone CX é o espaço quociente $\frac{(X \times I)}{\sim}$, onde $I = [0, 1]$ e $\sim$ é a relação de equivalência definida por $(x, 1) \sim (x', 1)$, para todo $x, x' \in X$ ou, equivalentemente,

$$CX = \frac{X \times I}{X \times \{1\}}.$$

⁶Sejam $A \subset X$, $B \subset Y$ e W um aberto em $X \times Y$ tal que $A \times B \subset W$. Se A e B são compactos, existem abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $A \times B \subset U \times V \subset W$ (Vide [35, Exercício 9, pg.171])

Intuitivamente, o cone CX é obtido a partir de $X \times I$, identificando-se $X \times \{1\}$ em um único ponto e pode ser visto como sendo a união de todos os segmentos de reta ligando os pontos de X a um ponto que não pertence a X , chamado vértice. De maneira análoga, a suspensão SX é o espaço quociente $\frac{(X \times I)}{\sim}$, onde $\sim$ é a relação de equivalência $(x, 0) \sim (x', 0)$ e $(x, 1) \sim (x', 1)$, para todo $x, x' \in X$. Intuitivamente, SX é obtido de $X \times I$ identificando-se $X \times \{0\}$ a um vértice e $X \times \{1\}$ a um outro vértice e pode ser visto como sendo a união de todos os segmentos de reta ligando pontos de X a dois vértices distintos, ambos não pertencendo a X . Mais geralmente, temos a seguinte

Definição A.46. O *join* $X * Y$ de dois espaços X e Y é o espaço quociente

$$X * Y = \frac{X \times I \times Y}{\sim},$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por

$$\begin{aligned} (x, 0, y) &\sim (x, 0, y'), \quad \forall y, y' \in Y \text{ e para cada } x \in X \text{ fixado,} \\ (x, 1, y) &\sim (x', 1, y), \quad \forall x, x' \in X \text{ e para cada } y \in Y \text{ fixado.} \end{aligned}$$

A classe de equivalência de um elemento (x, t, y) em $X * Y$ será denotada por $[x, t, y]$. Observemos que o espaço X torna-se naturalmente um subespaço do join $X * Y$, onde os pontos de X são pontos finais de segmentos de reta. A inclusão natural é dada por

$$\begin{aligned} \iota: X &\hookrightarrow X * Y \\ x &\mapsto [x, 0, y]. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Notemos também que a fórmula A.5 para a inclusão faz sentido e não depende da escolha particular do ponto $y \in Y$. Existe um mergulho similar

$$\begin{aligned} j: Y &\hookrightarrow X * Y \\ y &\mapsto [x, 1, y]. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Intuitivamente, $X * Y$ é obtido identificando-se o subespaço $X \times \{0\} \times Y$ a X e o subespaço $X \times \{1\} \times Y$ é identificado com Y . Esse espaço pode ser visualizado como sendo a união de todos os segmentos de reta unindo pontos em X a pontos em Y , onde tais segmentos não possuem pontos em comum, exceto possivelmente em seus extremos, ou seja, todo ponto $[x, y, t] \in X * Y$ está sobre um único segmento de reta unindo o ponto $x \in X \subset X * Y$ ao ponto $y \in Y \subset X * Y$; tal segmento é obtido fixando-se os pontos x, y e variando-se a coordenada t .

Exemplo A.47. Seja X um espaço topológico arbitrário.

(i) Se $Y = \{y_0\}$, então $X * \{y_0\}$ é o cone $CX = \frac{X \times I}{X \times \{1\}}$.

(ii) Se $Y = \{y_1, y_2\}$ for o espaço consistindo de dois pontos distintos, então $X * Y$ é a suspensão

SX discutida anteriormente. Observemos que a suspensão pode ser vista como a união de dois cones, com vértices y_1 e y_2 respectivamente, identificados ao longo do “equador” X , ou seja,

$$\begin{aligned} (x, 0, y_1) &\sim (x, 0, y_2), \text{ para cada } x \in X \\ (x, 1, y_1) &\sim (x', 1, y_1) \text{ e } (x, 1, y_2) \sim (x', 1, y_2), \text{ para todo } x, x' \in X. \end{aligned}$$

(iii) $S^0 * S^0$ é homeomorfo à esfera S^1 . Mais geralmente, $S^n * S^m$ é homeomorfo à esfera S^{n+m+1} , via o homeomorfismo $(t_1 z_1, t_2 z_2) \mapsto (\sqrt{t_1} z_1, \sqrt{t_2} z_2)$. Detalhes desse fato no caso $n = 1$ e $m = 2n - 1$ podem ser encontrados em [2].

(iv) Se X e Y forem iguais ao intervalo fechado $I = [0, 1]$, então $I \times I \times I$ é um cubo e $I * I$ é obtido identificando-se as duas faces opostas desse cubo: $X \times \{0\} \times Y$ e $X \times \{1\} \times Y$ aos segmentos de reta $X \times \{0\} \times \{0\}$ e $\{0\} \times \{1\} \times Y$, respectivamente e, deste modo, $I * I$ é homeomorfo a um tetraedro.

Lema A.48. *As inclusões $\iota : X \hookrightarrow X * Y$ e $j : Y \hookrightarrow X * Y$ definidas em A.5 e A.6 respectivamente, são homotópicas a uma aplicação constante.*

Demonstração: Fixemos um ponto $y_0 \in Y$. Por definição, o mergulho $\iota : X \hookrightarrow X * Y$ se fatora como a composição

$$\begin{aligned} \iota : X &\hookrightarrow X * \{y_0\} \subset X * Y \\ x &\mapsto [x, 0, y_0]. \end{aligned}$$

Mas, como observado no Exemplo A.47 (i), $X * \{y_0\}$ é o cone sobre X e, portanto, contrátil. Isso significa que ι é homotópica à constante, como queríamos demonstrar. De maneira inteiramente análoga, mostra-se que a inclusão $j : Y \hookrightarrow X * Y$ é homotópica a uma aplicação constante. ■

Desde que todo ponto $[x, t, y] \in X * Y$ está sobre um único segmento de reta unindo o ponto $x \in X \subset X * Y$ ao ponto $y \in Y \subset X * Y$, uma forma conveniente de se escrever um elemento de $X * Y$ é como uma combinação linear formal $t_1 x + t_2 y$, com $0 \leq t_i \leq 1$ e $t_1 + t_2 = 1$, com as seguintes condições: $0x + 1y = y, \forall x \in X$ e $1x + 0y = x, \forall y \in Y$, as quais correspondem exatamente às identificações $(x, 1, y) \sim (x', 1, y)$ e $(x, 0, y) \sim (x, 0, y')$, respectivamente, na definição de $X * Y$. De maneira análoga, o **join** de uma coleção finita de espaços topológicos $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é definido como segue.

Definição A.49. *O join $X_1 * \dots * X_n$ de n -espaços $X_1, \dots, X_n$ é o espaço das combinações lineares formais $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ tais que $0 \leq t_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, com a convenção de que os termos $0t_i$ podem ser omitidos.*

Exemplo A.50. Um caso especial da definição acima é quando cada um dos espaços X_i é apenas um ponto. Assim, temos que:

- (i) O **join** de dois pontos $\{x_0\} * \{x_1\}$ é um segmento de reta.
- (ii) O **join** de três pontos $\{x_0\} * \{x_1\} * \{x_2\}$ é um 2-simplexo com vértices x_0, x_1, x_2 .
- (iii) O **join** de quatro pontos $\{x_0\} * \{x_1\} * \{x_2\} * \{x_3\}$ é um 3-simplexo com vértices x_0, x_1, x_2, x_3 .
- (iii) Mais geralmente, se $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ for uma coleção de $k + 1$ pontos distintos, então, o **join** $x_0 * x_1 * \dots * x_k$ é a envoltória convexa desses pontos e, portanto, é o k -dimensional simplexo Δ^k com vértices $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$. Se os $k + 1$ pontos $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ são tais que $\{x_i - x_0, i = 1, \dots, k\}$ formam a base canônica do $\mathbb{R}^k$, então o seu **join** é o k -simplexo padrão

$$\Delta^k = \{(t_0, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1}; \sum_{i=0}^k t_i = 1 \text{ e } 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

Mais geralmente, o join^7 de uma família arbitrária de espaços topológicos pode ser definido como segue

Definição A.51. Dada uma família de espaços topológicos $\{X_j\}_{j \in J}$, definimos o **join** $X = *_{j \in J} X_j$ como sendo o seguinte espaço: os elementos de X são representados por J -uplas

$$(t_j x_j)_{j \in J}, \text{ onde } t_j \in [0, 1], x_j \in X_j \text{ e } \sum_{j \in J} t_j = 1,$$

onde apenas um número finito dos $t_{j'}$ s são não nulos. Os elementos $(t_j x_j)$ e $(u_j y_j)$ representam o mesmo elemento de X se, e somente se,

- (i) para cada $j \in J$, $t_j = u_j$,
- (ii) para cada $j \in J$, $t_j \neq 0$, implica que $x_j = y_j$.

Temos aplicações coordenadas

$$\begin{aligned} t_j : X = *_{j \in J} X_j &\rightarrow [0, 1] \\ (t_i x_i) &\mapsto t_j \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned} p_j : t_j^{-1}(0, 1] &\rightarrow X_j \\ (t_i x_i) &\mapsto x_j. \end{aligned} \tag{A.8}$$

A topologia de Milnor sobre $X = *_{j \in J} X_j$ é a topologia menos fina que torna contínuas todas as aplicações t_j e p_j , a qual pode ser caracterizada pela seguinte propriedade universal: uma aplicação $f : Y \rightarrow X = *_{j \in J} X_j$ é contínua se, e somente se, as aplicações

$$t_j \circ f : Y \rightarrow [0, 1] \text{ e } p_j \circ f : f^{-1}(t_j^{-1}(0, 1]) \rightarrow X_j$$

⁷Essa construção é devida a Milnor [33].

são contínuas, onde Y é arbitrário.

Proposição A.52. O *join* $X_1 * \cdots * X_n$ de n -espaços topológicos compactos é um espaço compacto.

Demonstração: É suficiente provar o caso $n = 2$ e o resultado seguirá por indução. Dados X_1, X_2 espaços compactos, o produto cartesiano $X_1 \times I \times X_2$ é um espaço compacto. Desde que a projeção

$$p : X_1 \times I \times X_2 \rightarrow X_1 * X_2 = \frac{X_1 \times I \times X_2}{\sim}$$

é contínua e sobrejetora, segue que $X_1 * X_2$ é compacto. ■

Cohomologia de Čech

Este capítulo introduz a teoria básica da cohomologia de Čech. A idéia dessa construção é associar a um par de espaços topológicos (X, A) , pares simpliciais $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$, onde $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta de X . Os R -módulos de cohomologia de Čech do par (X, A) são definidos então, como sendo o limite direto dos R -módulos de cohomologia simplicial relativos $H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R)$, onde R é um anel comutativo com identidade. Para a construção da cohomologia de Čech apresentamos inicialmente, na Seção B.1, uma descrição do conceito de limite direto de R -módulos. Na Subseção B.1.2, é introduzido o conceito de limite direto de espaços topológicos, que será usado na construção de Milnor, descrita no Capítulo 1. Na Seção B.2 apresentamos os R -módulos de cohomologia simplicial relativos, a partir dos quais a cohomologia de Čech é definida, na Seção B.3. As referências básicas para este capítulo são o artigo *Čech cohomology theory and the axioms* de C.H.Dowker [13] e *Algebraic Topology, Homology and Cohomology* de A.H. Wallace [46]. Usamos também como referência a dissertação de mestrado [37].

B.1 Limite Direto

Definição B.1. Seja $(\Lambda, \leq)$ um *conjunto pré-ordenado*.¹ Dizemos que $(\Lambda, \leq)$ é um *conjunto dirigido* se, para cada par de pontos α_1 e $\alpha_2 \in \Lambda$, existe $\alpha_3 \in \Lambda$ tal que $\alpha_1 \leq \alpha_3$ e $\alpha_2 \leq \alpha_3$.

Observação B.2. Alguns autores consideram na Definição B.1 a relação $\leq$ como sendo uma relação de ordem parcial².

Definição B.3. Seja $(\Lambda, \leq)$ um conjunto dirigido. Um *sistema direto*

$$\{X_{\alpha}, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$$

¹Uma relação binária $\leq$ sobre um conjunto Λ é chamada uma pré-ordem se $\leq$ for reflexiva e transitiva. Um conjunto Λ munido de uma pré-ordem é chamado um conjunto pré-ordenado e será denotado por $(\Lambda, \leq)$.

²Seja $(\Lambda, \leq)$ um conjunto pré-ordenado. Se $\leq$ satisfaz a propriedade adicional: $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica), então Λ é chamado um conjunto parcialmente ordenado.

em uma categoria $\mathcal{C}$, consiste de uma família de objetos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em $\mathcal{C}$ indexados no conjunto dirigido Λ e uma família de morfismos de $\mathcal{C}$

$$\{f^{\alpha\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha, \text{ para cada } \beta \leq \alpha\},$$

satisfazendo as seguintes condições

$$(i) f^{\alpha\alpha} = Id_{X_\alpha} : X_\alpha \rightarrow X_\alpha.$$

$$(ii) f^{\alpha\gamma} = f^{\alpha\beta} \circ f^{\beta\gamma} : X_\gamma \rightarrow X_\alpha, \text{ se } \gamma \leq \beta \leq \alpha.$$

B.1.1 Limite Direto de R -módulos

Sejam R um anel comutativo com identidade 1_R e

$$\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$$

um **sistema direto R -módulos**, ou seja, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é um família de R -módulos indexada em um conjunto dirigido Λ e

$$\{f^{\alpha\beta} : M_\beta \rightarrow M_\alpha; \text{ para cada } \beta \leq \alpha\}$$

é uma família de R -homomorfismos satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição B.3. Consideremos a soma direta dos R -módulos M_α : $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ e observemos que seus elementos podem ser escritos de maneira única como uma soma finita $m_{\alpha_1} + m_{\alpha_2} + \cdots + m_{\alpha_n}$, onde cada $m_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$ e $i = 1, \dots, n$ (Vide [26, pg.22]). Seja S o seguinte subconjunto de $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$,

$$S = \{m_\alpha - f^{\beta\alpha}(m_\beta); \alpha, \beta \in \Lambda, \text{ com } \alpha \leq \beta\}, \quad (\text{B.1})$$

onde $f^{\beta\alpha} : M_\alpha \rightarrow M_\beta$, para cada $\alpha \leq \beta$ e consideremos o sub-módulo $\langle S \rangle$ de $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ gerado por S .

Definição B.4. Definimos o **limite direto** do sistema direto de R -módulos $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ como sendo o R -módulo quociente:

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha = \frac{\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha}{\langle S \rangle}.$$

Observação B.5. Seja $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ um sistema direto de R -módulos. Se

$$m \in \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha,$$

então m possui um representante em $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$, o qual é exatamente um elemento $m_\alpha \in M_\alpha$, para algum $\alpha \in \Lambda$, ou seja, $m = m_\alpha + \langle S \rangle$, para algum $\alpha \in \Lambda$ (Vide [46, pg.242]).

Observação B.6. Observemos que se $m_\alpha \in \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ é tal que $m_\alpha \in \langle S \rangle$, então existe $\beta \in \Lambda$, com $\alpha \leq \beta$ tal que $f^{\beta\alpha}(m_\alpha) = 0$ (Vide [46, pg.242]).

Definição B.7. Sejam Λ e Λ' dois conjuntos dirigidos e $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ e $\{N_{\alpha'}, g^{\alpha'\beta'}, \Lambda'\}$ dois sistemas diretos de R -módulos, indexados pelos conjuntos dirigidos Λ e Λ' , respectivamente. Seja $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ uma aplicação preservando a relação de ordem. Um sistema direto de R -homomorfismos é uma família de R -homomorfismos $\{f_\alpha : M_\alpha \rightarrow N_{\phi(\alpha)}; \alpha \in \Lambda\}$, tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & N_{\alpha'} \\ f^{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow g^{\beta'\alpha'} \\ M_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & N_{\beta'} \end{array} \quad (\text{B.2})$$

onde $\alpha' = \phi(\alpha) \leq \phi(\beta) = \beta'$, para todo $\alpha \leq \beta$.

Observação B.8. A família $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ induz um R -homomorfismo

$$\bigoplus f_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha' \in \Lambda'} N_{\alpha'}$$

definido por $(\bigoplus f_\alpha)(m_{\alpha_1} + \cdots + m_{\alpha_n}) = f_{\alpha_1}(m_{\alpha_1}) + \cdots + f_{\alpha_n}(m_{\alpha_n})$.

Observemos que o elemento $m_\alpha - f^{\beta\alpha}(m_\alpha)$ é levado por esta aplicação no elemento $f_\alpha(m_\alpha) - f_\beta(f^{\beta\alpha}(m_\alpha)) = f_\alpha(m_\alpha) - g^{\beta'\alpha'}(f_\alpha(m_\alpha))$, onde a última igualdade segue da comutatividade do diagrama B.2.

Assim, os elementos de $\langle S \rangle$ em $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ são levados por $\bigoplus f_\alpha$ em elementos do sub-módulo correspondente $\langle S' \rangle$ de $\bigoplus_{\alpha' \in \Lambda'} N_{\alpha'}$ e, portanto, $\bigoplus f_\alpha$ induz um homomorfismo entre os R -módulos quocientes

$$f = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} f_\alpha : \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha \rightarrow \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha' \in \Lambda'}} N_{\alpha'}, \text{ onde}$$

$$\left(\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} f_\alpha \right) (m_\alpha + \langle S \rangle) = f_\alpha(m_\alpha) + \langle S' \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Definição B.9. O homomorfismo $f = \lim_{\rightarrow} f_\alpha$ definido em B.3 é chamado o **limite direto dos R -homomorfismos f_α** .

Observação B.10. Observemos da Definição B.7 que o limite direto dos R -homomorfismos f_α é determinado também pela aplicação $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$, a qual preserva a relação de ordem entre os conjuntos dirigidos Λ e Λ' .

Observação B.11. Sejam $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$, $\{N_{\alpha'}, g^{\alpha'\beta'}, \Lambda'\}$ e $\{P_{\alpha''}, h^{\alpha''\beta''}, \Lambda''\}$ sistemas diretos, $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ e $\psi : \Lambda' \rightarrow \Lambda''$ aplicações preservando as respectivas relações de ordem. Dados

os sistemas diretos de R -homomorfismos

$$\{f_\alpha : M_\alpha \rightarrow N_{\phi(\alpha)}; \alpha \in \Lambda\} \text{ e } \{g_{\alpha'} : N_{\alpha'} \rightarrow P_{\psi(\alpha')}; \alpha' \in \Lambda'\},$$

onde $\phi(\alpha) = \alpha'$ e $\psi(\alpha') = \alpha''$, temos que a composição $\psi \circ \phi : \Lambda \rightarrow \Lambda''$ é uma aplicação que preserva ordem e, desde que pela Definição B.7, cada quadrado no seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} M_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & N_{\alpha'} & \xrightarrow{g_{\alpha'}} & P_{\alpha''} \\ f^{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow g^{\beta'\alpha'} & & \downarrow h^{\beta''\alpha''} \\ M_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & N_{\beta'} & \xrightarrow{g_{\beta'}} & P_{\beta''} \end{array} \quad (\text{B.4})$$

segue que o diagrama a seguir também é comutativo

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{g_{\alpha'} \circ f_\alpha} & P_{\alpha''} \\ f^{\beta\alpha} \downarrow & & \downarrow h^{\beta''\alpha''} \\ M_\beta & \xrightarrow{g_{\beta'} \circ f_\beta} & P_{\beta''}. \end{array} \quad (\text{B.5})$$

Portanto, a família de R -homomorfismos $\{g_{\alpha'} \circ f_\alpha : M_\alpha \rightarrow P_{\alpha''}\}$ é um sistema direto de R -homomorfismos. Além disso, se $m_\alpha + \langle S \rangle \in \lim_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$, temos

$$\begin{aligned} \left(\lim_{\alpha' \in \Lambda'} g_{\alpha'} \right) \left(\lim_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \right) (m_\alpha + \langle S \rangle) &= \lim_{\alpha' \in \Lambda'} g_{\alpha'} (f_\alpha(m_\alpha) + \langle S' \rangle) \\ &= g_{\alpha'} \circ f_\alpha(m_\alpha) + \langle S'' \rangle \\ &= \left(\lim_{\alpha \in \Lambda} g_{\alpha'} \circ f_\alpha \right) (m_\alpha + \langle S \rangle). \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\alpha \in \Lambda} g_{\alpha'} \circ f_\alpha = \left(\lim_{\alpha' \in \Lambda'} g_{\alpha'} \right) \left(\lim_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \right).$ ■

Definição B.12. Seja Λ um conjunto dirigido. Um subconjunto Λ_0 de Λ é chamado **co-final** em Λ se, para cada $\alpha \in \Lambda$, existe $\beta \in \Lambda_0$ com $\alpha \leq \beta$.

Observação B.13. Seja Λ um conjunto dirigido. Se $\Lambda_0 \subset \Lambda$ for co-final em Λ , então Λ_0 é um conjunto dirigido pela relação de ordem de Λ . De fato, dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda_0 \subset \Lambda$, desde que Λ é um conjunto dirigido, existe $\alpha_3 \in \Lambda$ tal que $\alpha_1 \leq \alpha_3$ e $\alpha_2 \leq \alpha_3$. Além disso, como Λ_0 é co-final em Λ , para este $\alpha_3 \in \Lambda$, existe $\beta \in \Lambda_0$ tal que $\alpha_1 \leq \alpha_3 \leq \beta$ e $\alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \beta$. Portanto, Λ_0 é um conjunto dirigido.

Proposição B.14. *Sejam $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ um sistema direto de R -módulos indexado pelo conjunto dirigido Λ e $\Lambda_0 \subset \Lambda$ co-final em Λ . Então,*

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} M_\alpha \cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha \quad (\text{B.6})$$

Demonstração: Dado o sistema direto de R -módulos $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$, indexado pelo conjunto dirigido Λ , desde Λ_0 é co-final em Λ , temos da Observação B.13 que $\{M_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda_0\}$ é um sistema direto de R -módulos. Consideremos a inclusão $\phi : \Lambda_0 \hookrightarrow \Lambda$, a qual é uma aplicação que preserva a relação de ordem. Assim, temos que a família de R -homomorfismos

$$\{\text{Id} = f_\alpha : M_\alpha \rightarrow M_{\phi(\alpha)} : \alpha \in \Lambda_0\}$$

é um sistema direto de R -homomorfismos. Seja

$$f = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} f_\alpha : \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} M_\alpha \rightarrow \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha$$

o limite direto dos R -homomorfismos f_α e mostremos que f é um isomorfismo. Dada uma classe lateral

$$m_\alpha + \langle S \rangle \in \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} M_\alpha,$$

para algum $\alpha \in \Lambda$, segue da co-finalidade de Λ_0 que existe $\beta \in \Lambda_0$ tal que $\alpha \leq \beta$. Seja $f^{\beta\alpha}(m_\alpha) = m_\beta$, então $m_\beta + \langle S_0 \rangle \in \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} M_\alpha$ e

$$\begin{aligned} (\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} f_\alpha)(m_\beta + \langle S_0 \rangle) &= f_\beta(m_\beta) + \langle S \rangle \\ &= m_\beta + \langle S \rangle \\ &= m_\beta + [m_\alpha - f^{\beta\alpha}(m_\alpha)] + \langle S \rangle \\ &= m_\beta + [m_\alpha - m_\beta] + \langle S \rangle \\ &= m_\alpha + \langle S \rangle, \end{aligned}$$

desde que, por B.1, $m_\alpha - f^{\beta\alpha}(m_\alpha) \in \langle S \rangle$. Portanto, $\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} f_\alpha$ é sobrejetora.

Seja $m_\alpha + \langle S_0 \rangle \in \lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} M_\alpha$ tal que $m_\alpha + \langle S_0 \rangle$ pertence ao núcleo de f . Assim,

$$(\lim_{\substack{\rightarrow \\ \alpha \in \Lambda_0}} f_\alpha)(m_\alpha + \langle S_0 \rangle) = f_\alpha(m_\alpha) + \langle S \rangle = m_\alpha + \langle S \rangle = \langle S \rangle,$$

o que implica que $m_\alpha \in \langle S \rangle$. Segue da Observação B.6 que $f^{\beta\alpha}(m_\alpha) = 0$, para algum $\beta \in \Lambda$,

com $\alpha \leq \beta$. Pela co-finalidade de Λ_0 , para este $\beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda_0$ tal que $\beta \leq \gamma$. Então,

$$f^{\gamma\alpha}(m_\alpha) = f^{\gamma\beta} \circ f^{\beta\alpha}(m_\alpha) = 0, \text{ com } \alpha \leq \beta \leq \gamma.$$

Logo, $m_\alpha = m_\alpha - f^{\gamma\alpha}(m_\alpha)$, onde $\alpha, \gamma \in \Lambda_0$ são tais que $\alpha \leq \gamma$, o que implica de B.1, que $m_\alpha \in \langle S_0 \rangle$, ou seja, $m_\alpha + \langle S_0 \rangle = \langle S_0 \rangle$. Portanto, f é injetora. ■

B.1.2 Limite Direto de Espaços Topológicos

Definição B.15. Sejam Λ um conjunto dirigido e $\{X_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos indexada por Λ . Dada uma família de funções contínuas

$$\{f^{\alpha\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha, \text{ para cada par de índices } \alpha, \beta \in \Lambda \text{ tais que } \beta \leq \alpha\}$$

satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição B.3, então $\{X_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ é chamado um **sistema direto de espaços topológicos**.

Definição B.16. Seja $\{X_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ uma família de espaços topológicos indexada em um conjunto de índices arbitrário Λ . Para cada $\alpha \in \Lambda$, seja

$$X_\alpha^* = \{(x, \alpha); x \in X_\alpha\} = X_\alpha \times \{\alpha\},$$

o qual é homeomorfo a X_α . Observemos que $X_\alpha^* \cap X_\beta^* = \emptyset$, se $\alpha \neq \beta$, ou seja, $\{X_\alpha^*; \alpha \in \Lambda\}$ é uma família de espaços topológicos dois a dois disjuntos. Definimos uma topologia sobre

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha^*$$

como segue: $U \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $U \cap X_\alpha^*$ for aberto em X_α^* , para cada $\alpha \in \Lambda$. X munido desta topologia é chamado a **união disjunta** (ou **união livre**, ou ainda **soma topológica**) dos espaços X_α e será denotado por

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

Definição B.17. Sejam $\{X_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ um sistema direto de espaços topológicos. Definimos sobre $\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ a seguinte relação de equivalência: dados $x_\alpha \in X_\alpha$ e $x_\beta \in X_\beta$, então

$$x_\alpha \sim x_\beta \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Lambda, \text{ com } \alpha \leq \gamma \text{ e } \beta \leq \gamma \text{ tal que } f^{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f^{\gamma\beta}(x_\beta).$$

O **limite direto** do sistema direto $\{X_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$, o qual será denotado por

$$\lim_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \text{ ou } X^\infty,$$

é definido como sendo o espaço quociente

$$\lim_{\rightarrow, \alpha \in \Lambda} X_\alpha = \frac{\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha}{\sim} = \{[x_\alpha] : x_\alpha \in X_\alpha\}$$

Proposição B.18. *Seja $\{X_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ um sistema direto de espaços topológicos. Suponhamos que para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $\beta \leq \alpha$, as aplicações contínuas $f^{\alpha\beta} : X_\beta \hookrightarrow X_\alpha$ sejam inclusões. Então,*

$$\lim_{\rightarrow, \alpha \in \Lambda} X_\alpha \stackrel{def}{=} \frac{\sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha}{\sim} = \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

Demonstração: Sejam $x_\alpha, x_\beta \in \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ tais que $x_\alpha \sim x_\beta$. Então, existe $\gamma \in \Lambda$ com $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$ tal que $x_\alpha = f^{\gamma\alpha}(x_\alpha) = f^{\gamma\beta}(x_\beta) = x_\beta$, desde que as aplicações $f^{\gamma\alpha} : X_\alpha \hookrightarrow X_\gamma$ e $f^{\gamma\beta} : X_\beta \hookrightarrow X_\gamma$ são inclusões. Portanto, $[x_\alpha] = [x_\beta]$, para todo $x_\alpha \in \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Segue o resultado.

Observação B.19. Seja $\{X_\alpha, f^{\alpha\beta}, \Lambda\}$ um sistema direto de espaços topológicos nas mesmas hipóteses da Proposição B.18. Se cada X_α for um espaço compacto Hausdorff, então,

$$\lim_{\rightarrow, \alpha \in \Lambda} X_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

é paracompacto³, desde que a união disjunta de espaços paracompactos é um espaço paracompacto (Vide [25, 9 DUP, pg.495]).

Exemplo B.20. Dado o sistema direto $\{S^n, \iota, \mathbb{Z}^+\}$, onde $\iota : S^n \hookrightarrow S^m$, é a inclusão, para $n \leq m$, segue da Proposição B.18 que

$$S^\infty = \lim_{\rightarrow, n \in \mathbb{Z}^+} S^n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} S^n.$$

B.2 Cohomologia Simplicial

Esta seção introduz a construção dos R -módulos de cohomologia simplicial relativos, os quais satisfazem os Axiomas de Eilenberg-Steenrod. Para essa construção, usamos como referências [36] e [41].

B.2.1 A categoria dos pares simpliciais

Inicialmente, apresentamos as noções básicas sobre a categoria dos pares simpliciais e das aplicações de pares simpliciais, necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição B.21. Um **complexo simplicial abstrato** K é um par (V, S) onde V é um conjunto e S é uma coleção de subconjuntos finitos e não vazios de V satisfazendo as seguintes condições:

³Vide Definição A.35

(i) Se $v \in V$, então $\{v\} \in S$.

(ii) Se $\tau \subset \sigma \in S$ e se $\tau \neq \emptyset$, então $\tau \in S$.

Os elementos de $v \in V$ são chamados *vértices* e os elementos $\sigma \in S$ são chamados *simplexos*. Com essa terminologia, a condição (i) afirma que qualquer conjunto consistindo de exatamente um vértice é um simplexo e a condição (ii) diz que qualquer subconjunto não vazio de um simplexo é um simplexo. Um ***q-simplexo*** é um elemento de S com $q + 1$ vértices. Se $\sigma \in S$ for um q -simplexo, dizemos que $\dim(\sigma) = q$. Se $\tau \subset \sigma$, τ é chamado uma *face* de σ , se $\tau \neq \sigma$, τ é chamada uma *face própria* de σ e se τ for um p -simplexo, ele é chamado uma p -face de σ . Se σ for um q -simplexo, então σ é a única q -face de σ e $\tau \subset \sigma$ é uma face própria de σ se, e somente se, $\dim \tau < q$.

Observação B.22. Seja K um complexo simplicial abstrato. Observemos que qualquer simplexo $\sigma \in K$ possui um número finito de faces e, desde que, toda face de uma face de σ é ela própria uma face de σ , os simplexos de K são parcialmente ordenados pela relação: $\tau \subset \sigma$, se τ for uma face de σ . Segue da condição (i) da Definição B.21 que existe uma correspondência bijetora entre os 0-simplexos de K e os vértices de K . E, da condição (ii), temos que qualquer simplexo é determinado por suas 0-faces. Portanto, K pode ser considerado como sendo igual ao conjunto de seus simplexos e identificamos um vértice de K com o 0-simplexo correspondente a ele.

Exemplo B.23. Existe um complexo simplicial, cujo conjunto de vértices é $V = \mathbb{Z}$ e cujo conjunto de simplexos é

$$S = \{\{n\}; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\}; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{Z}$, K contém os 0-simplexos $\{n\}$ e os 1-simplexos $\{n, n+1\}$.

Definição B.24. Um **sub-complexo** L de um complexo simplicial K , o qual será denotado por $L \subset K$, é um subconjunto de K (ou seja, $\sigma \in L \Rightarrow \sigma \in K$) que é ele próprio um complexo simplicial.

Exemplo B.25. Dado um complexo simplicial K , o seu q -dimensional esqueleto $K^{(q)}$ é definido como sendo o sub-complexo consistindo de todos os p -simplexos de K , para $p \leq q$.

Observação B.26. Um subconjunto L de K é um sub-complexo de K se, e somente se, dado qualquer simplexo τ em K que é uma face de um simplexo de L , ou seja, $\tau \subset \sigma$, para algum $\sigma \in L$, então τ é um simplexo de L .

Definição B.27. Se K for um complexo simplicial, sua *dimensão*, denotada por $\dim K$, é definida como sendo -1 , se K for vazio e é igual a n , se K contém um n -simplexo, mas não contém nenhum $(n+1)$ -simplexo. Se K contém n -simplexos, para todo $n \geq 0$, dizemos que $\dim K$ é infinita e, nesse caso, K é chamado um complexo simplicial infinito-dimensional. Assim, $\dim K = \sup\{\dim \sigma; \sigma \in K\}$. Dizemos que K é finito se ele contém apenas um número finito de simplexos.

Observação B.28. Se K for um complexo simplicial finito, então temos que $\dim K < \infty$. Entretanto, se $\dim K < \infty$, K não é necessariamente finito. O Exemplo B.23, mostra um complexo simplicial infinito-dimensional K tal que $\dim K = 1$.

Definição B.29. Dados dois complexos simpliciais abstratos K_1 e K_2 , uma **aplicação simplicial** $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ é uma função φ do conjunto de vértices de K_1 no conjunto de vértices de K_2 com a seguinte propriedade: para qualquer simplexo $\sigma = \{v_0, \dots, v_q\} \in K_1$, sua imagem $\varphi(\sigma) = \{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_q)\}$ é um simplexo de K_2 . Especificamente, uma aplicação simplicial $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ é da forma $\varphi(\{v_0, \dots, v_q\}) = \{\varphi_0(v_0), \dots, \varphi_0(v_q)\}$, para alguma aplicação $\varphi_0 : K_1^{(0)} \rightarrow K_2^{(0)}$, chamada aplicação vértice de φ , onde $K_1^{(0)}$ e $K_2^{(0)}$ denotam os 0-esqueletos de K_1 e K_2 , respectivamente.

Observação B.30. Para qualquer complexo simplicial abstrato K , existe uma aplicação simplicial identidade $Id_K : K \rightarrow K$, a qual corresponde a uma aplicação vértice identidade. Se $L \subset K$, existe uma inclusão natural $\iota : L \hookrightarrow K$, a qual é um aplicação simplicial. Dadas aplicações simpliciais

$$K_1 \xrightarrow{\varphi} K_2 \xrightarrow{\psi} K_3$$

então a composição $\psi \circ \varphi : K_1 \rightarrow K_3$ é uma aplicação simplicial, a qual corresponde a uma aplicação vértice composição.

Definição B.31. Um **par simplicial** é um par (K, L) , onde K é um complexo simplicial abstrato e L é um subcomplexo de K . Uma **aplicação de pares simpliciais** $\varphi : (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$ é uma aplicação simplicial $\varphi : K_1 \rightarrow K_2$ tal que $\varphi(L_1) \subset L_2$, ou seja, φ leva cada simplexo de L_1 em um simplexo de L_2 .

A categoria, cujos objetos são pares simpliciais (K, L) e cujos morfismos são aplicações de pares simpliciais $\varphi : (K_1, L_1) \rightarrow (K_2, L_2)$ é chamada **categoria dos pares simpliciais**

B.2.2 Os R -módulos de Cohomologia Simplicial Relativos

Nesta seção, apresentamos um breve resumo sobre a construção dos R -módulos de cohomologia simplicial relativos, onde R é um anel comutativo com identidade.

Definição B.32. Sejam K um complexo simplicial abstrato. Um **q -simplexo orientado** de K é um q -simplexo $\sigma \in K$ junto com uma classe de equivalência, determinada pelas ordenações dos vértices de σ . Dadas duas ordenações $v_{i_0} < \dots < v_{i_q}$ e $v_{j_0} < \dots < v_{j_q}$ dos vértices de σ , existe uma permutação P do conjunto $\{0, \dots, q\}$ tal que $P(i_k) = j_k$, para $k = 0, \dots, q$. Definimos uma relação de equivalência sobre o conjunto de todas as ordenações dos vértices de σ da seguinte forma: duas ordenações são equivalentes se, e somente se, elas diferem por uma permutação par dos vértices de σ . Uma escolha de uma classe de equivalência de ordenações dos vértices de σ é chamada uma **orientação** para σ . Se $v_0, \dots, v_q$ são vértices de σ , então $[v_0, v_1, \dots, v_q]$ denotará o q -simplexo orientado de K consistindo do simplexo σ junto com a classe de equivalência da ordenação $v_0 < v_1 < \dots < v_q$ de seus vértices.

Exemplo B.33. Seja K um complexo simplicial abstrato. Se $q < 0$, não existem q -simplexos orientados. Para todo vértice v de K , existe um único 0-simplexo orientado $[v]$ e, para todo q -simplexo de K , com $q \geq 1$, correspondem exatamente dois simplexos q -orientados. Assim,

se σ for um 0-simplexo, existe uma única orientação para σ . Uma orientação de um 1-simplexo é apenas uma escolha dos vértices inicial e final, a qual pode ser indicada esquematicamente, desenhando-se uma seta ao longo do simplexo. Uma orientação de um 2-simplexo é uma escolha de um sentido preferencial de rotação, a qual pode ser indicada por uma "seta circular" e, assim, sucessivamente.

Definição B.34. Dado um complexo simplicial abstrato K , seja $C_q(K; R)$ o R -módulo livre cuja base são os q -simplexos orientados de K , chamado o R -módulo de q -cadeias simpliciais de K . Observemos que $C_q(K; R) = \{0\}$, para $q < 0$ ou $q > \dim K$ e, para todo $q \geq 0$, $C_q(K; R)$ é o R -módulo livre cujo rank é igual ao número de q -simplexos orientados de K .

Para cada $q \geq 1$, definimos um **operador bordo** ∂_q sobre um q -simplexo orientado pela fórmula:

$$\partial_q[\sigma] = \partial_q[v_0, v_1, \dots, v_q] = \sum_{m=0}^q (-1)^m [v_0, v_1, \dots, \widehat{v_m}, \dots, v_q],$$

onde $[v_0, v_1, \dots, \widehat{v_m}, \dots, v_q]$ denota o $(q-1)$ -simplexo obtido omitindo-se o vértice v_m . Então, ∂_q se estende por R -linearidade a um único homomorfismo

$$\partial_q : C_q(K; R) \rightarrow C_{q-1}(K; R)$$

definido pela fórmula

$$\partial_q \left(\sum_{i=1}^l r_i [\sigma_i] \right) = \sum_{i=1}^l r_i \partial_q [\sigma_i] = \sum_{i=1}^l r_i \left(\sum_{m=0}^q (-1)^m [v_0^i, v_1^i, \dots, \widehat{v_m^i}, \dots, v_q^i] \right)$$

Para $q \leq 0$, definimos $\partial_q : C_q(K; R) \rightarrow C_{q-1}(K; R)$ como sendo o homomorfismo trivial.

Observação B.35. O operador bordo ∂_q , dado na Definição B.34, satisfaz $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ (Vide [36, pg.30, Lema 5.3]). Portanto, existe um complexo de cadeias

$$C(K; R) = \{C_q(K; R), \partial_q\}_{q \geq 0},$$

chamado complexo de cadeias orientado de K .

Definição B.36. Dado um par simplicial (K, L) , então $C_q(L; R)$ é naturalmente um sub-módulo de $C_q(K; R)$ e o R -módulo quociente

$$C_q(K, L) = \frac{C_q(K; R)}{C_q(L; R)}$$

é um R -módulo livre, chamado o R -módulo de q -cadeias simpliciais relativo de K módulo L , o qual que tem como base todos os elementos da forma

$$\sigma_i + C_q(L; R),$$

onde σ_i é um q -simplexo orientado de K que não está em L . Temos que

$$\partial_q : C_q(K; R) \rightarrow C_{q-1}(K; R)$$

satisfaz $\partial_q(C_q(L; R)) \subset C_{q-1}(L; R)$. Assim, $\partial_q : C_q(L; R) \rightarrow C_{q-1}(L; R)$ é a restrição do operador bordo. Logo, ∂_q induz um R -homomorfismo

$$C_q(K, L) \rightarrow C_{q-1}(K, L),$$

chamado *operador bordo relativo*, o qual também será denotado por ∂_q e satisfaz $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. Dessa forma, obtemos um complexo de cadeias

$$C(K, L; R) = \{C_q(K, L; R); \partial_q\}_{q \geq 0} = \left\{ \frac{C_q(K; R)}{C_q(L; R)}; \partial_q \right\}_{q \geq 0}.$$

Definimos o q -ésimo R -**módulo de q -cocadeias simpliciais relativo** como sendo

$$C^q(K, L; R) = \text{Hom}(C_q(K, L); R) = \text{Hom}\left(\frac{C_q(K)}{C_q(L)}; R\right),$$

onde $\text{Hom}(C_q(K, L); R)$ é o conjunto dos R -homomorfismos de $C_q(K, L)$ em R . O **operador cobordo relativo** $\delta^q : C^q(K, L; R) \rightarrow C^{q+1}(K, L; R)$ é definido como sendo o dual do operador bordo relativo $\partial_q : C_q(K, L) \rightarrow C_{q-1}(K, L)$ e, desde que satisfaz $\delta^q \circ \delta^{q-1} = 0$, obtemos um **complexo de cocadeias**, denotado por $\text{Hom}(C(K, L; R))$

$$\begin{aligned} \{C^q(K, L; R), \delta^q\}_{q \geq 0} &= \{\text{Hom}(C_q(K, L); R), \delta^q\}_{q \geq 0} \\ &= \left\{ \text{Hom}\left(\frac{C_q(K)}{C_q(L)}; R\right), \delta^q \right\}_{q \geq 0} \end{aligned}$$

O R -**módulo de cohomologia orientado** do par simplicial (K, L) , com coeficientes em R , também chamado R -módulo de cohomologia simplicial e denotado por $H^*(K, L; R) = \{H^q(K, L; R)\}_{q \geq 0}$ é definido como sendo o R -módulo de cohomologia graduado do complexo de cocadeias

$$\{\text{Hom}(C_q(K, L); R)\}_{q \geq 0}.$$

Observação B.37. Dada uma aplicação simplicial de pares

$$f : (K, L) \rightarrow (K_1, L_1),$$

então f induz um R -homomorfismo $f^* : H^*(K_1, L_1; R) \rightarrow H^*(K, L; R)$. $H^*(K, L; R)$ é um funtor contravariante da categoria dos pares simpliciais na categoria dos R -módulos, o qual satisfaz os Axiomas de Eilenberg-Steenrod (Vide [36, Pg.265]).

B.3 Os R -módulos de Cohomologia de Čech Relativos

Nesta seção, apresentamos a construção dos R -módulos de cohomologia de Čech relativos. A idéia básica dessa construção é associar a um par de espaços topológicos (X, A) , pares simpliciais (K_U, L_U) . Os R -módulos de cohomologia de Čech do par (X, A) serão definidos como sendo o limite direto dos R -módulos $H^q(K_U, L_U; R)$. A referência básica para esta seção é o artigo *Čech cohomology theory and the axioms* de C.H.Dowker [13].

B.3.1 O nervo de uma cobertura

Definição B.38. Seja (X, A) um par de espaços topológicos. Uma **cobertura aberta do par** (X, A) , a qual será denotada por $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$, é uma coleção $\mathcal{U}$ de subconjuntos abertos de X cuja reunião é X , juntamente com uma subcoleção $\mathcal{U}|_A$ de $\mathcal{U}$, cuja reunião contém A . Denotaremos por $\Lambda(X, A)$ a coleção de todas as coberturas abertas do par (X, A) .

Definição B.39. Uma cobertura aberta $(\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A)$ em $\Lambda(X, A)$ é chamada um **refinamento aberto** de $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$, se todo conjunto aberto de $\mathcal{V}$ está contido em algum conjunto aberto de $\mathcal{U}$ e, se além disso, todo conjunto aberto de $\mathcal{V}|_A$ está contido em algum conjunto aberto de $\mathcal{U}|_A$.

Definição B.40. Definimos sobre $\Lambda(X, A)$ a seguinte relação de ordem:

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \Leftrightarrow (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \text{ é um refinamento de } (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A).$$

Lema B.41. $(\Lambda(X, A), \leq)$ é um conjunto dirigido.

Demonstração: Para qualquer cobertura aberta $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ em $\Lambda(X, A)$, $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$. Além disso, se

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \text{ e } (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \leq (\mathcal{W}, \mathcal{W}|_A),$$

dado $W \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{V}$ com $W \subset V$. Para este V , existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset V \subset U$. Logo, todo aberto de $\mathcal{W}$ está contido em algum aberto de $\mathcal{U}$. Analogamente, mostra-se que todo conjunto aberto de $\mathcal{W}|_A$ está contido em algum aberto de $\mathcal{U}|_A$. Portanto,

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq (\mathcal{W}, \mathcal{W}|_A)$$

e, segue que, $(\Lambda(X, A), \leq)$ é um conjunto pré-ordenado. Para mostrarmos que $(\Lambda(X, A), \leq)$ é um conjunto dirigido, sejam $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ e $(\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A)$ duas coberturas abertas em $\Lambda(X, A)$ e consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{U \cap V; U \in \mathcal{U} \text{ e } V \in \mathcal{V}\} \\ \mathcal{W}|_A &= \{U|_A \cap V|_A; U|_A \in \mathcal{U}|_A \text{ e } V|_A \in \mathcal{V}|_A\}. \end{aligned}$$

Então, dado $W \in \mathcal{W}$ existem $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$ tais que $W = U \cap V \subset U$ e $W = U \cap V \subset V$. Analogamente, mostra-se que todo aberto de $\mathcal{W}|_A$ está contido em algum aberto de $\mathcal{U}|_A$ e em algum aberto de $\mathcal{V}|_A$. Assim,

$$(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq (\mathcal{W}, \mathcal{W}|_A) \text{ e } (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \leq (\mathcal{W}, \mathcal{W}|_A),$$

ou seja, $(\mathcal{W}, \mathcal{W}|_A)$ refina $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ e $(\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A)$. ■

Observação B.42. Para simplificar a notação, de agora em diante, denotaremos uma cobertura $(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ do par (X, A) simplesmente por $\mathcal{U}$, ou seja, $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$. Assim, a relação $\leq$ definida sobre $\Lambda(X, A)$ será representada da seguinte forma

$$\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) \leq \mathcal{V} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A) \Leftrightarrow \mathcal{V} \text{ refina } \mathcal{U}. \quad (\text{B.7})$$

A cada cobertura aberta $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ de um par (X, A) , podemos associar um par simplicial $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$, de tal forma que os vértices de $K_{\mathcal{U}}$ são os conjuntos abertos dessa cobertura; um simplexo de $K_{\mathcal{U}}$ é qualquer coleção finita de conjuntos abertos de $\mathcal{U}$, cuja intersecção é não vazia. Um simplexo de $L_{\mathcal{U}}$ é qualquer coleção finita de conjuntos abertos de $\mathcal{U}$ cuja intersecção encontra A . Mais precisamente, temos a seguinte

Definição B.43. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ do par (X, A) , seja $K_{\mathcal{U}}$ o complexo simplicial cujos vértices são os conjuntos abertos $U \in \mathcal{U}$. Se σ é um simplexo de $K_{\mathcal{U}}$, então $\sigma = [U_0, U_1, \dots, U_q]$ é tal que

$$U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset.$$

Além disso, $L_{\mathcal{U}}$ denotará o subcomplexo de $K_{\mathcal{U}}$ consistindo de todos os simplexos $\tau = [U_0, U_1, \dots, U_n]$ tais que

$$U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_n \cap A \neq \emptyset.$$

O par simplicial $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ é chamado o **nervo** da cobertura $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ e será denotado por $\mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A) = \mathcal{N}(\mathcal{U})$. Para todo $q \geq 0$, os R-módulos de cohomologia simplicial

$$H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R)$$

do par simplicial $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ também são denotados por

$$H^q(\mathcal{N}(\mathcal{U}); R).$$

Definição B.44. Sejam $\mathcal{U} = (\mathcal{U}, \mathcal{U}|_A)$ e $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}|_A)$ duas coberturas abertas do par (X, A) tais que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, ou seja, $\mathcal{V}$ refina $\mathcal{U}$. Assim, para cada $V \in \mathcal{V}$, podemos escolher $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subset U$. Analogamente, para cada $V|_A \in \mathcal{V}|_A$, podemos escolher $U|_A \in \mathcal{U}|_A$ tal que $V|_A \subset U|_A$. Definimos uma

aplicação, chamada **aplicação projeção**, da seguinte forma

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) &\rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}) \\ V &\mapsto f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V) = U, \text{ com } V \subset U \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Lema B.45. A aplicação projeção $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ é uma aplicação simplicial.

Demonstração: Observemos inicialmente que $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}$ leva vértices de $K_{\mathcal{V}}$ em vértices de $K_{\mathcal{U}}$. Além disso, dado um simplexo $\sigma = [V_0, \dots, V_q] \in K_{\mathcal{V}}$, temos

$$\emptyset \neq V_0 \cap \dots \cap V_q \subset U_0 \cap \dots \cap U_q = f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_0) \cap \dots \cap f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_q)$$

e, deste modo, $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(\sigma) = [f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_0), \dots, f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_q)]$ é um simplexo em $K_{\mathcal{U}}$.

Mais ainda, dado um simplexo $\tau = [V_0, \dots, V_n] \in L_{\mathcal{V}}$, então cada $V_i \in \mathcal{V}|_A$ e, deste modo, $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_i) \in \mathcal{U}|_A$, para todo $i = 0, \dots, n$. Assim, temos que

$$\emptyset \neq V_0 \cap \dots \cap V_q \cap A \subset U_0 \cap \dots \cap U_n \cap A = f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_0) \cap \dots \cap f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_n) \cap A$$

e, portanto, $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(\tau) = [f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_0), \dots, f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V_q)]$ é um simplexo em $L_{\mathcal{U}}$. ■

Observação B.46. A aplicação projeção $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ não é necessariamente única, desde que dado um aberto $V \in \mathcal{V}$, $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V)$ depende de uma escolha para o aberto $U \in \mathcal{U}$ satisfazendo a condição $V \subset U$. Entretanto, para cada $q \geq 0$, o homomorfismo induzido em cohomologia simplicial

$$(f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^* : H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R) \rightarrow H^q(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}; R) \quad (\text{B.9})$$

é independente da escolha para $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}$, como mostra o lema a seguir.

Lema B.47. [13, pg. 182] Sejam $f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}, g^{\mathcal{V}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ aplicações projeções obtidas a partir de escolhas distintas. Então, os homomorfismos induzidos em cohomologia simplicial coincidem, ou seja, para cada $q \geq 0$,

$$(f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^* = (g^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^* : H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R) \rightarrow H^q(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}; R).$$

Obtemos assim uma coleção de homomorfismos

$$\{(f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^* : H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R) \rightarrow H^q(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}; R), \text{ para cada } \mathcal{U} \leq \mathcal{V}\} \quad (\text{B.10})$$

e, dessa forma, podemos considerar a seguinte

Proposição B.48. Seja $\Lambda(X, A)$ a coleção de todas as coberturas abertas do par (X, A) . Então, para

cada $q \geq 0$, a coleção

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R), (f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^*, \Lambda(X, A)\}$$

é um sistema direto.

Demonstração: Dada uma aplicação projeção $f^{\mathcal{U}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$, então $f^{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ induz o homomorfismo identidade

$$(f^{\mathcal{U}\mathcal{U}})^* = Id : H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R) \rightarrow H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R).$$

Se $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são coberturas abertas do par (X, A) tais que $\mathcal{U} \leq \mathcal{V} \leq \mathcal{W}$ e se

$$f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}) \text{ e } f^{\mathcal{W}\mathcal{V}} : (K_{\mathcal{W}}, L_{\mathcal{W}}) \rightarrow (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}})$$

são aplicações projeções, então a composição

$$f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} \circ f^{\mathcal{W}\mathcal{V}} : (K_{\mathcal{W}}, L_{\mathcal{W}}) \rightarrow (K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$$

é uma aplicação projeção, desde que dado $W \in \mathcal{W}$, existe $V = f^{\mathcal{W}\mathcal{V}}(W) \in \mathcal{V}$ tal que $W \subset V$. Para este $V \in \mathcal{V}$, existe $U = f^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(V) \in \mathcal{U}$, com $V \subset U$, logo existe $U = f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} \circ f^{\mathcal{W}\mathcal{V}}(W)$, com $W \subset U$.

Como $f^{\mathcal{W}\mathcal{U}} : (K_{\mathcal{W}}, L_{\mathcal{W}}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}})$ é também uma aplicação projeção, segue do Lema B.47 e do fato da cohomologia simplicial ser um funtor contravariante que

$$(f^{\mathcal{W}\mathcal{U}})^* = (f^{\mathcal{V}\mathcal{U}} \circ f^{\mathcal{W}\mathcal{V}})^* = (f^{\mathcal{W}\mathcal{V}})^* \circ (f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^* : H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}) \rightarrow H^q(K_{\mathcal{W}}, L_{\mathcal{W}}).$$

Portanto, para cada $q \geq 0$, a coleção $\{H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R), (f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^*, \Lambda(X, A)\}$ é um sistema direto. ■

Definição B.49. O q -ésimo R -módulo de **Cohomologia de Čech** do par (X, A) , denotado por $\check{H}^q(X, A; R)$, é definido como sendo o limite direto do sistema direto

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R), (f^{\mathcal{V}\mathcal{U}})^*, \Lambda(X, A)\}$$

(Vide Definição B.4), ou seja, para cada $q \geq 0$:

$$\check{H}^q(X, A; R) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U} \in \Lambda(X, A)}} H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}; R). \quad (\text{B.11})$$

Portanto, temos o R -módulo graduado de cohomologia de Čech

$$\check{H}^*(X, A; R) = \bigoplus_{q \geq 0} \check{H}^q(X, A; R). \quad (\text{B.12})$$

B.3.2 O Homomorfismo induzido em Cohomologia de Čech

Para cada aplicação de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, nosso objetivo é construir um sistema direto de R -homomorfismos, (Vide Definição B.7) associado a f , o qual induz um R -homomorfismo entre os R -módulos de cohomologia de Čech. Para isto, sejam $\Lambda(Y, B)$ e $\Lambda(X, A)$ os conjuntos dirigidos formados pelas coleções de todas as coberturas abertas dos pares (Y, B) e (X, A) , respectivamente. Dados os sistemas diretos de R -módulos

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R), (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y})^*, \Lambda(Y, B)\}$$

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X}; R), (f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})^*, \Lambda(X, A)\}$$

seja $\phi : \Lambda(Y, B) \rightarrow \Lambda(X, A)$ definida da seguinte forma:

$$\phi(\mathcal{U}_Y) = \mathcal{U}_X = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_Y\}. \quad (\text{B.13})$$

Lema B.50. *A aplicação $\phi : \Lambda(Y, B) \rightarrow \Lambda(X, A)$ definida em (B.13) preserva ordem.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{U}_Y, \mathcal{V}_Y \in \Lambda(Y, B)$ tais que $\mathcal{U}_Y \leq \mathcal{V}_Y$, ou seja, $\mathcal{V}_Y$ refina $\mathcal{U}_Y$ e mostremos que $\phi(\mathcal{U}_Y) = \mathcal{U}_X \leq \mathcal{V}_X = \phi(\mathcal{V}_Y)$. Dado um aberto $V_X \in \mathcal{V}_X$, então $V_X = f^{-1}(V_Y)$, para algum $V_Y \in \mathcal{V}_Y$. Como $\mathcal{V}_Y$ refina $\mathcal{U}_Y$, existe um aberto $U_Y \in \mathcal{U}_Y$ tal que $V_Y \subset U_Y$. Assim,

$$V_X = f^{-1}(V_Y) \subset f^{-1}(U_Y),$$

e existe $U_X = f^{-1}(U_Y) \in \mathcal{U}_X$ tal que $V_X \subset U_X$. Portanto, $\mathcal{U}_X \leq \mathcal{V}_X$. ■

Dadas duas coberturas abertas $\mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)$ e $\mathcal{U}_X \in \Lambda(X, A)$ tais que $\mathcal{U}_X = \phi(\mathcal{U}_Y)$, consideremos os nervos associados a estas coberturas,

$$(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}) \text{ e } (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}).$$

Seja $U_X \in \mathcal{U}_X = \phi(\mathcal{U}_Y)$ um vértice no complexo simplicial $K_{\mathcal{U}_X} = K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}$. Então, $U_X = f^{-1}(U_Y)$, para algum $U_Y \in \mathcal{U}_Y$, ou seja, U_Y é um vértice em $K_{\mathcal{U}_Y}$. Analogamente, se $U_X|_A$ é um vértice em $L_{U_X} = L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}$, desde que $f(A) \subset B$, segue que $U_X|_A = f^{-1}(U_Y|_B)$, para algum vértice $U_Y|_B$ em $L_{\mathcal{U}_Y}$. Observemos que o aberto U_X não é necessariamente único, desde que dois conjuntos abertos em $\mathcal{U}_Y$ podem possuir a mesma imagem inversa pela aplicação f . Contudo, fixamos uma escolha para U_X e definimos a aplicação

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{U}_Y} : (K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}) &\rightarrow (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}), \text{ onde } \phi(\mathcal{U}_Y) = \mathcal{U}_X \\ U_X &\mapsto U_Y, \quad \text{com } U_X = f^{-1}(U_Y) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

a qual leva os vértices $U_X = f^{-1}(U_Y)$ de $K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}$ sobre os vértices U_Y de $K_{\mathcal{U}_Y}$. Mostremos que $f_{\mathcal{U}_Y}$ assim definida é uma aplicação simplicial. Com efeito, seja $\sigma = [U_X^0, \dots, U_X^p]$ um simplexo

em $K_{\mathcal{U}_X} = K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}$. Desde que

$$\emptyset \neq U_X^0 \cap \dots \cap U_X^p = f^{-1}(U_Y^0) \cap \dots \cap f^{-1}(U_Y^p) = f^{-1}(U_Y^0 \cap \dots \cap U_Y^p),$$

isso implica que $U_Y^0 \cap \dots \cap U_Y^p \neq \emptyset$. Portanto,

$$f_{\mathcal{U}_Y}(\sigma) = f_{\mathcal{U}_Y}([U_X^0, \dots, U_X^p]) = [U_Y^0, \dots, U_Y^p]$$

é um simplexo de $K_{\mathcal{U}_Y}$. Mais ainda, dado um simplexo $\tau = [U_X^0, \dots, U_X^n] \in L_{\mathcal{U}_X} = L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}$, então cada $U_X^i \in \mathcal{U}_X|_A$ e, como $f(A) \subset B$, deste modo, $f_{\mathcal{U}_Y}(U_X^i) = U_Y^i \in \mathcal{U}_Y|_B$, para todo $i = 0, \dots, n$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \emptyset \neq U_X^0 \cap \dots \cap U_X^n \cap A &\subset f^{-1}(U_Y^0) \cap \dots \cap f^{-1}(U_Y^n) \cap f^{-1}(B) \\ &= f^{-1}(U_Y^0 \cap \dots \cap U_Y^n \cap B) \end{aligned}$$

isso implica que $U_Y^0 \cap \dots \cap U_Y^n \cap B \neq \emptyset$. Portanto,

$$f_{\mathcal{U}_Y}(\tau) = f_{\mathcal{U}_Y}([U_X^0, \dots, U_X^n]) = [U_Y^0, \dots, U_Y^n]$$

é um simplexo de $L_{\mathcal{U}_Y}$. ■

Observação B.51. A aplicação $f_{\mathcal{U}_Y} : (K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y})$, onde $\phi(\mathcal{U}_Y) = \mathcal{U}_X$, definida em (B.14), não é necessariamente única, desde que dado um aberto $U_X \in \mathcal{U}_X$, $f_{\mathcal{U}_Y}(U_X)$ depende de uma escolha para o aberto $U_Y \in \mathcal{U}_Y$ satisfazendo a condição $U_X = f^{-1}(U_Y)$. Entretanto, para cada $q \geq 0$, o homomorfismo induzido em cohomologia simplicial

$$(f_{\mathcal{U}_Y})^* : H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) \rightarrow H^q(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}; R); \phi(\mathcal{U}_Y) = \mathcal{U}_X \quad (\text{B.15})$$

é independente da escolha para $f_{\mathcal{U}_Y}$, como mostra o lema a seguir.

Lema B.52. [13, Pg. 283] *Sejam $f_{\mathcal{U}_Y}, g_{\mathcal{U}_Y} : (K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y})$ aplicações obtidas a partir de escolhas distintas. Então, os homomorfismos induzidos em cohomologia simplicial coincidem, ou seja, para cada $q \geq 0$,*

$$(f_{\mathcal{U}_Y})^* = (g_{\mathcal{U}_Y})^* : H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) \rightarrow H^q(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}; R).$$
■

Obtemos assim, uma coleção de R -homomorfismos

$$\{(f_{\mathcal{U}_Y})^* : H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) \rightarrow H^q(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}; R), \mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)\}$$

e, dessa forma, podemos considerar a seguinte

Proposição B.53. *Dada uma aplicação de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, consideremos os sistemas diretos*

de R -módulos:

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R), (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y})^*, \Lambda(Y, B)\},$$

$$\{H^q(K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X}; R), (f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})^*, \Lambda(X, A)\},$$

com $\mathcal{U}_X = \phi(\mathcal{U}_Y) \leq \phi(\mathcal{V}_Y) = \mathcal{V}_X$, para cada $\mathcal{U}_Y \leq \mathcal{V}_Y$ (Vide B.10), onde $\phi : \Lambda(Y, B) \rightarrow \Lambda(X, A)$ é a aplicação definida em (B.13), a qual preserva ordem. Então, a família de R -homomorfismos

$$\{(f_{\mathcal{U}_Y})^* : H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) \rightarrow H^q(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}; R), \mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)\},$$

é um sistema direto de R -homomorfismos.

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} (K_{\mathcal{V}_X}, L_{\mathcal{V}_X}) & \xrightarrow{f_{\mathcal{V}_Y}} & (K_{\mathcal{V}_Y}, L_{\mathcal{V}_Y}) \\ \downarrow f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X} & & \downarrow f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y} \\ (K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X}) & \xrightarrow{f_{\mathcal{U}_Y}} & (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}) \end{array} \quad (\text{B.16})$$

onde $\mathcal{U}_X = \phi(\mathcal{U}_Y) \leq \phi(\mathcal{V}_Y) = \mathcal{V}_X$, para cada $\mathcal{U}_Y \leq \mathcal{V}_Y$ em $\Lambda(Y, B)$. Dado um aberto $V_X \in \mathcal{V}_X = \phi(\mathcal{V}_Y)$, então $V_X = f^{-1}(V_Y)$, para algum $V_Y \in \mathcal{V}_Y$. Como $\mathcal{V}_Y$ refina $\mathcal{U}_Y$, existe um aberto $U_Y \in \mathcal{U}_Y$ tal que $V_Y \subset U_Y$. Assim,

$$V_X = f^{-1}(V_Y) \subset f^{-1}(U_Y),$$

e existe $U_X = f^{-1}(U_Y) \in \mathcal{U}_X$ tal que $V_X \subset U_X$. Então, segue das Definições (B.8) e (B.14) que

$$\begin{aligned} (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y} \circ f_{\mathcal{V}_Y})(V_X) &= f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y}(f_{\mathcal{V}_Y}(V_X)) \\ &= f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y}(V_Y) \\ &= U_Y \\ &= f_{\mathcal{U}_Y}(U_X) \\ &= f_{\mathcal{U}_Y}(f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X}(V_X)) \\ &= (f_{\mathcal{U}_Y} \circ f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})(V_X). \end{aligned}$$

Deste modo, segue que o diagrama (B.16) é comutativo. Assim, temos que

$$\begin{aligned} (f_{\mathcal{V}_Y})^* \circ (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y})^* &= (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y} \circ f_{\mathcal{V}_Y})^* \\ &= (f_{\mathcal{U}_Y} \circ f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})^* \\ &= (f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})^* \circ (f_{\mathcal{U}_Y})^*. \end{aligned}$$

e, portanto, o correspondente diagrama em cohomologia

$$\begin{array}{ccc} H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) & \xrightarrow{(f_{\mathcal{U}_Y})^*} & H^q(K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X}; R) \\ (f^{\mathcal{V}_Y \mathcal{U}_Y})^* \downarrow & & \downarrow (f^{\mathcal{V}_X \mathcal{U}_X})^* \\ H^q(K_{\mathcal{V}_Y}, L_{\mathcal{V}_Y}; R) & \xrightarrow{(f_{\mathcal{V}_Y})^*} & H^q(K_{\mathcal{V}_X}, L_{\mathcal{V}_X}; R) \end{array} \quad (\text{B.17})$$

é comutativo. Portanto, a família de R -homomorfismos dada é um sistema direto de R -homomorfismos. ■

Definição B.54. Seja $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ uma aplicação de pares. Definimos o **homomorfismo induzido em cohomologia de Čech**, o qual será denotado por $\check{f}^*$, como sendo o limite direto do sistema direto de R -homomorfismos

$$\{(f_{\mathcal{U}_Y})^* : H^q(K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}; R) \rightarrow H^q(K_{\phi(\mathcal{U}_Y)}, L_{\phi(\mathcal{U}_Y)}; R), \mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)\},$$

ou seja, para cada $q \geq 0$:

$$\check{f}^* = \varinjlim_{\mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)} (f_{\mathcal{U}_Y})^* : \check{H}^q(Y, B; R) \rightarrow \check{H}^q(X, A; R) \quad (\text{B.18})$$

Portanto, existe o homomorfismo de R -módulos graduados de grau zero induzido em cohomologia de Čech,

$$\check{f}^* : \check{H}^*(Y, B; R) \rightarrow \check{H}^*(X, A; R). \quad (\text{B.19})$$

B.3.3 Os Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Denotemos por $\mathbf{Top}^2$ a categoria dos pares topológicos junto com as aplicações contínuas de pares e por $\mathbf{R-mod}$ a categoria que tem como objetos os R -módulos e como morfismos os R -homomorfismos.

Teorema B.55. Para todo $q \geq 0$, a função

$$\check{H}^q : \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{R-mod} \quad (\text{B.20})$$

que associa a cada par de espaços (X, A) , o R -módulo de cohomologia de Čech

$$\check{H}^q(X, A; R)$$

e a cada aplicação continua de pares $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ associa o homomorfismo induzido em cohomologia de Čech

$$\check{f}^* : \check{H}^q(Y, B; R) \rightarrow \check{H}^q(X, A; R)$$

é um funtor contravariante, chamado **q -funtor Cohomologia de Čech**.

Demonstração: [1] Seja $\text{Id} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ a aplicação identidade. Então, para cada cobertura aberta $\mathcal{U}_X \in \Lambda(X, A)$, a aplicação simplicial $f_{\mathcal{U}_X} = \text{Id}_{(K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X})}$ é a aplicação identidade e, portanto, induz o homomorfismo identidade $(f_{\mathcal{U}_X})^*$ na cohomologia simplicial e, deste modo,

$$\check{f}^* = (\check{\text{Id}})^* : \check{H}^q(X, A; R) \rightarrow \check{H}^q(X, A; R).$$

[2] Sejam $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ aplicações de pares. Para cada cobertura aberta $\mathcal{U}_Z \in \Lambda(Z, C)$, seja $\mathcal{U}_Y = g^{-1}(\mathcal{U}_Z)$, $\mathcal{U}_X = f^{-1}(\mathcal{U}_Y)$. Consideremos

$$f_{\mathcal{U}_Y} : (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X}) \quad , \quad g_{\mathcal{U}_Z} : (K_{\mathcal{U}_Z}, L_{\mathcal{U}_Z}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}_Y}, L_{\mathcal{U}_Y})$$

$$(g \circ f)_{\mathcal{U}_Z} : (K_{\mathcal{U}_Z}, L_{\mathcal{U}_Z}) \rightarrow (K_{\mathcal{U}_X}, L_{\mathcal{U}_X})$$

as aplicações simpliciais. Se U_X é um vértice de $K_{\mathcal{U}_X}$, então $f_{\mathcal{U}_Y}(U_X)$ é um vértice V_Y de $K_{\mathcal{U}_Y}$ tal que $U = f^{-1}(V_Y)$ e $g_{\mathcal{U}_Z}(V_Y)$ é um vértice W_Z de $K_{\mathcal{U}_Z}$ tal que $V_Y = g^{-1}(W_Z)$. Assim, $g_{\mathcal{U}_Z} \circ f_{\mathcal{U}_Y}$ leva o vértice U_X no vértice W_Z e $U_X = (g \circ f)^{-1}(W_Z)$. Segue do Lema B.52 e do fato da cohomologia simplicial ser um função contravariante que

$$((g \circ f)_{\mathcal{U}_Z})^* = (g_{\mathcal{U}_Z} \circ f_{\mathcal{U}_Y})^* = (f_{\mathcal{U}_Y})^* \circ (g_{\mathcal{U}_Z})^*$$

e, portanto, usando a Observação B.11 temos que

$$\begin{aligned} (g \circ f)^* &= \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U}_Z \in \Lambda(Z, C)}} ((g \circ f)_{\mathcal{U}_Z})^* \\ &= \lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U}_Z \in \Lambda(Z, C)}} [(f_{\mathcal{U}_Y})^* \circ (g_{\mathcal{U}_Z})^*] \\ &= \left(\lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U}_Y \in \Lambda(Y, B)}} (f_{\mathcal{U}_Y})^* \right) \left(\lim_{\substack{\rightarrow \\ \mathcal{U}_Z \in \Lambda(Z, C)}} (g_{\mathcal{U}_Z})^* \right) \\ &= \check{f}^* \circ \check{g}^*, \end{aligned}$$

o que implica que $\check{H}^q$ é um funtor contravariante. ■

C.H. Dowker mostrou em [13, pgs. 285-292], que a Teoria de Cohomologia de Čech satisfaz os **axiomas de Eilenberg-Steenrod**. Em resumo, a Teoria de Cohomologia de Čech é a coleção dos q -funtores cohomologia de Čech $\{\check{H}^q\}$ que satisfaz os seguintes axiomas:

1. (INVARIÂNCIA HOMOTÓPICA) Se $f_1, f_2 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são aplicações homotópicas, então $\check{f}_1^* = \check{f}_2^*$.
2. (EXATIDÃO) Dados os pares (X, A) e (A, B) , existe um R -homomorfismo

$$\delta : \check{H}^q(A, B; R) \rightarrow \check{H}^{q+1}(X, A; R)$$

que comuta com os homomorfismos induzidos em cohomologia de Čech e a sequência longa

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \check{H}^{q+1}(X, A; R) \xrightarrow{j^*} \check{H}^{q+1}(X, B; R) \xrightarrow{i^*} \check{H}^{q+1}(A, B; R) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

é exata, onde $\iota : (A, B) \rightarrow (X, B)$, $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ são as inclusões.

3. (EXCISÃO) Se (X, A) é um par e B é um subconjunto de X tal que $\bar{B} \subset \text{Int}(A)$, então, para todo $q \geq 0$, o homomorfismo

$$i^* : \check{H}^q(X, A; R) \rightarrow \check{H}^q(X - B, A - B; R)$$

induzido da inclusão é um isomorfismo.

4. (DIMENSÃO) Se $X = \{x_0\}$ consiste de um apenas ponto, então

$$\check{H}^q(\{x_0\}; R) = \begin{cases} R, & q = 0 \\ 0, & q > 0 \end{cases}.$$

Segue da validade dos Axiomas de Eilenberg-Steenrod, como acontece no caso da cohomologia singular, que existe a sequência de Mayer-Vietoris na cohomologia de Čech, dada a seguir:

Proposição B.56. Se $\{(X_1, A_1), (X_2, A_2)\}$ for um par excisivo ⁴ de $(X, A) = (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, então a seguinte sequência longa

$$\cdots \rightarrow \check{H}^q(X, A; R) \xrightarrow{\zeta} \check{H}^q(X_1, A_1; R) \oplus \check{H}^q(X_2, A_2; R) \xrightarrow{\eta} \check{H}^q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2; R) \rightarrow \cdots$$

é exata, onde $\zeta = (\check{i}_1^*, -\check{i}_2^*)$, $\eta = \check{\ell}_1^* + \check{\ell}_2^*$ com $i_1 : (X_1, A_1) \rightarrow (X, A)$, $i_2 : (X_2, A_2) \rightarrow (X, A)$, $\ell_1 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X_1, A_1)$ e $\ell_2 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \rightarrow (X_2, A_2)$.

Definição B.57. Dizemos que o par (U, V) é um **par de vizinhanças** do par (X, A) se U for uma vizinhança de X e se V for uma vizinhança de A . Se U e V forem vizinhanças fechadas em um espaço topológico Y , dizemos que (U, V) é um **par de vizinhanças fechadas**.

Seja $\mathcal{N}$ a família de pares de vizinhanças fechadas $\{(U, V)\}$ do par (X, A) com a seguinte relação de ordem dada pelas inclusões, ou seja,

$$(U, V) \leq (U', V') \Leftrightarrow U' \subset U \text{ e } V' \subset V. \quad (\text{B.21})$$

Temos que $\mathcal{N}$ conjunto é um dirigido. Com efeito, para todo

$$(U, V), (U, V) \leq (U, V)$$

⁴Vide [41, Pag. 188]

pois $U \subset U$ e $V \subset V$. Dados $(U, V) \leq (U', V') \leq (U'', V'')$, então temos as inclusões $V'' \subset V' \subset V$ e $U'' \subset U' \subset U$, o que implica que $V'' \subset V$ e $U'' \subset U$, logo, $(U, V) \leq (U'', V'')$. Finalmente, dados $(U, V), (U', V')$ pares de vizinhanças fechadas de (X, A) , temos que $U \cap U'$ é uma vizinhança fechada que está contida em U e U' e, analogamente $V \cap V'$ é uma vizinhança fechada que está contida em V e V' e, portanto,

$$(U, V) \leq (U \cap U', V \cap V') \quad (U', V') \leq (U \cap U', V \cap V')$$

ou seja $\mathcal{N}$ é um conjunto dirigido. Usando as propriedades da cohomologia de Čech, temos que a família

$$\{\check{H}^q(U, V), i^*, \mathcal{N}\}$$

onde $i^* : \check{H}^q(U', V'; R) \rightarrow \check{H}^q(U, V; R)$ é a induzida em cohomologia de Čech da inclusão $i : (U', V') \rightarrow (U, V)$, é um sistema direto. Deste modo, temos o seguinte

Teorema B.58. [46, Teorema 6-16 pag 227 e Teorema 7.10, pag. 250]

(TEOREMA DA CONTINUIDADE) *Seja (X, A) um par de espaços, onde A é fechado em X e X é um subconjunto fechado de um espaço normal Y . Então, existe um isomorfismo*

$$\varpi : \lim_{\substack{\rightarrow \\ (U, V) \in \mathcal{N}}} \check{H}^q(U, V; R) \rightarrow \check{H}^q(X, A; R),$$

ou seja,

$$\check{H}^q(X, A; R) \cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ (U, V) \in \mathcal{N}}} \check{H}^q(U, V; R).$$

B.3.4 Produto cup $\smile$

Sejam $(X, A_1), (X, A_2)$ pares de espaços tais que $\{A_1, A_2\}$ é um par excisivo de $A_1 \cup A_2$ e $\Lambda(X, A)$ é o conjunto dirigido de todas coberturas abertas do par (X, A) . Suponhamos que $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^1), (K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^2)$ e $(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^{12})$ sejam os pares simpliciais para $(X, A_1), (X, A_2)$ e $(X, A_1 \cup A_2)$, respectivamente.

Temos que, se $\{A_1, A_2\}$ é um par excisivo de $A_1 \cup A_2$, então $\{L_{\mathcal{U}}^1, L_{\mathcal{U}}^2\}$ é um par excisivo de $L_{\mathcal{U}}^{12}$.

e, deste modo temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^1; R) \times H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^2; R) & \xrightarrow{f_1^{\mathcal{V}\mathcal{U}} \times f_2^{\mathcal{V}\mathcal{U}}} & H^p(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}; R) \times H^q(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}^2; R) \\ \smile \downarrow & & \downarrow \smile \\ H^{p+q}(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^{12}; R) & \xrightarrow{f_{12}^{\mathcal{V}\mathcal{U}}} & H^{p+q}(K_{\mathcal{V}}, L_{\mathcal{V}}^{12}; R) \end{array}$$

com $\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$, onde $\smile$ é o produto cup na cohomologia simplicial. Com efeito, dados $x \in$

$H^p(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^1; R)$ e $y \in H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^2; R)$

$$\begin{aligned} f_{12}^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(\smile(x, y)) &= f_{12}^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(x \smile y) \\ &= f_1^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(x) \smile f_2^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(y) \\ &= \smile(f_1^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(x), f_2^{\mathcal{V}\mathcal{U}}(y)) \\ &= \smile(f_1^{\mathcal{V}\mathcal{U}} \times f_2^{\mathcal{V}\mathcal{U}})(x, y). \end{aligned}$$

Assim, o homomorfismo produto $\smile$ em cohomologia simplicial

$$\smile: H^p(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^1; R) \times H^q(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^2; R) \rightarrow H^{p+q}(K_{\mathcal{U}}, L_{\mathcal{U}}^{12}; R)$$

é um homomorfismo de sistemas diretos.

Definição B.59. *Sejam (X, A_1) , (X, A_2) pares topológicos tais que $\{A_1, A_2\}$ é um par excisivo de $A_1 \cup A_2$. O homomorfismo induzido do homomorfismo de limites diretos, denotado por $\smile$, é chamado **produto cup na cohomologia de Čech**, ou seja*

$$\smile: \check{H}^p(X, A_1; R) \otimes \check{H}^q(X, A_2; R) \rightarrow \check{H}^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; R)$$

O produto cup na cohomologia de Čech, satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição B.60.

1. (Linearidade) *Sejam $f : (X, A_1 \cup A_2) \rightarrow (Y, B_1 \cup B_2)$, $f_1 : (X, A_1) \rightarrow (Y, B_1)$ e $f_2 : (X, A_2) \rightarrow (Y, B_2)$ aplicações de pares tais que, para todo $x \in X$, $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$. Suponhamos que $u \in \check{H}^p(Y, B_1; R)$ e $v \in \check{H}^q(Y, B_2; R)$, então em $\check{H}^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; R)$ temos*

$$\check{f}^*(u \smile v) = \check{f}_1^*(u) \smile \check{f}_2^*(v).$$

2. (Identidade) *Para qualquer $u \in \check{H}^q(X, A; R)$, temos que*

$$1 \smile u = u \smile 1 = u, \text{ com } 1 \in \check{H}^0(X; R).$$

3. (Associatividade) *Sejam $u_1 \in \check{H}^p(X, A_1; R)$, $u_2 \in \check{H}^q(X, A_2; R)$ e $u_3 \in \check{H}^r(X, A_3; R)$, então em $\check{H}^{p+q+r}(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3; R)$ temos*

$$u_1 \smile (u_2 \smile u_3) = (u_1 \smile u_2) \smile u_3.$$

4. (Anticomutatividade) *Sejam $u \in \check{H}^p(X, A_1; R)$ e $v \in \check{H}^q(X, A_2; R)$, então em $\check{H}^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; R)$ temos*

$$u \smile v = (-1)^{pq} v \smile u.$$

Finalizamos esta seção, observando que existe uma relação entre a cohomologia de Čech e a cohomologia de Alexander (Para detalhes, vide [41]) mediante um isomorfismo natural, como mostra a seguinte

Proposição B.61. [41, Capítulo 6, Ex.3, pag.359] *Para todo par topológico (X, A) existe um isomorfismo natural*

$$\check{H}^q(X, A; R) \cong \bar{H}^q(X, A; R),$$

onde $\bar{H}^q$ denota o funtor cohomologia de Alexander. ■

Referências Bibliográficas

- [1] A. Adem, $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ actions on $(S^n)^k$, Trans. Amer. Math. Soc., (300) (1987) 791-809.
- [2] Araújo, A.M., *Versão Homológica do Teorema de Borsuk-Ulam para funções $\mathbb{Z}_q$ -equivariantes*, Dissertação de Mestrado, UFSCAR (1998).
- [3] Baues, H.J., *The Algebra of Secondary Cohomology Operations* Progress in Mathematics 2003.
- [4] Bacon, P., *Axioms for the Čech Cohomology of Paracompacta* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 52, N°1, (1974).
- [5] Borel, A., *Seminar on Transformation Groups*. Ann. of Math. Studies 46 Princeton Univ. Press Princeton N.J., 1960.
- [6] Borel, A., *Topics in the Homology Theory of Fibre Bundles*. Lecture Notes in Mathematics 36 Institute for Advanced Study Princeton N.J., 1954
- [7] De Mattos, D. and Dos Santos, E.L. *A parametrized Borsuk-Ulam theorem for a product of spheres with free $\mathbb{Z}_p$ -action and free S^1 -action*. Algebraic and Geometric Topology 7 1791-1804, 2007.
- [8] Bredon, G., *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, INC., New York and London (1972).
- [9] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200, Springer - Verlag, 1972.
- [10] Dieck, T., *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, (1987).
- [11] Dieck, T.t. and Bröcker, T., *Representations of Compact Lie Groups*, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, Tokio, 1985.
- [12] Dieck, T.t., *Algebraic Topology*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2008.
- [13] Dowker, C.H., *Čech Cohomology Theory and the Axiom*. Ann. Math. 51:2 (1950)

- [14] Dotzel, R.M., Singh, T.B. and Tripathi S.P., *The cohomology Rings of the orbit spaces of free transformation groups of the Product of Two Spheres*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **129** (2000) 921-930.
- [15] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, (1966).
- [16] Eilenberg, S. and Steenrod, N., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Mathematical Series n.15, Princeton University Press, (1952).
- [17] Lima, Elon Lages, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, terceira edição, IMPA, Rio de Janeiro (2006).
- [18] Deo, S. and Singh, M. *On Certain Constructions in Finitistic Spaces*. Internat. J. Math. and Math. Sci., **6**, no. 4, (1983), 477, 482.
- [19] Deo, S. and Singh, M. *Compact Lie Group Actions on Finitistic Spaces*. Topology, **21**, no. 4, (1982), 393, 399.
- [20] Deo, S. and Andotra, J.S., *On Finitistic Spaces and Related Notions*. Internat. J. Math. and Math. Sci., **15**, no. 2, (1992), 371, 378.
- [21] Deo, S. and Singh, T. B., *On the Converse of Some Theorems About Orbit Spaces*. J. London Math. Soc., **2**, no. 25, (1982), 162, 170.
- [22] Deo, S., *Cohomology Projective Spaces of Finite Cohomological Dimension need not be finitistic*. Nat. Acad. Sci. Lett., **15**, no. 2, (1992), 45, 48.
- [23] Hsiang, W. Y., *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*. Springer-Verlag, Ergebnisee, (1975).
- [24] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [25] Howard, P., Keremedis, K., Rubin, H. and Rubin, J., *Disjoint Unions of Topological Spaces and Choice*, Math. Log. Quart. Vol.44 (1998), 493-508.
- [26] Hu, S.T. *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, (1968)
- [27] Hungerford T.W. *Algebra*. Springer-Verlag New York Inc., 1974.
- [28] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Third edition, Springer-Verlag, New York (1994).
- [29] James F. Davis, Paul Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Volume 35, American mathematical Society, (2001)
- [30] Lee, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics (202), Springer, New York, 2000.

- [31] Mimura, M. and Toda, H., *Topology of Lie Groups, I and II*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Vol. **91**, (1991).
- [32] McCleary, J. M., *A User's Guide to Spectral Sequences*. Second Edition, Cambridge University Press, United Kingdom, 2001.
- [33] Milnor, J., *Construction of Universal Bundles. II*, Ann. of Math. **63** (1956), 430-436.
- [34] Michael, E., *A Note on Paracompact Spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society Vol. **4**, n.5 (1953), 831-838.
- [35] Munkres, J.R., *Topology, A First Course*, Prentice Hall, 2000.
- [36] Munkres, J.R., *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Cambridge, Massachusetts, (1984).
- [37] Norbil, C.N., *Teoria de G -índice e grau de aplicações G -equivariantes*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP (2010).
- [38] Robert Oliver, *A proof of the Conner conjecture*, Ann. Maths., (**103**) (1976) 637-644.
- [39] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring I*, Ann. of Maths., (**94**) (1971) 549-572.
- [40] Rotman, J. J., *An Introduction to Homological Algebra*, Second Edition, Springer-Verlag, Universitext, (2008).
- [41] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1966.
- [42] Steenrod, N., *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton Mathematical Series No. **14**, Princeton University Press, (1951).
- [43] SU, J. C.; *Periodic Transformations on the Product of Two Spheres*. Trans. Amer. Math. Soc., **112**, (1964), 369-380, MR 29:612.
- [44] Swan, R.G., *A New Method in Fixed Point Theory*, Comm. Math. Helv., (**34**) (1960) 1-16.
- [45] P. Tomter, *Transformation groups on cohomology product of spheres*, Invent. Math., (**23**) (1974) 79-88.
- [46] Wallace, A.H., *Algebraic Topology, Homology and Cohomology* W. A. Benjamin Inc., (1970).
- [47] Whitehead, G. W.; *Elements of Homotopy Theory*. Springer-Verlag, (1978).

Índice Remissivo

- G -ação à direita, 8
- G -espaço, 10
- G -fibrado
 - principal, 13
 - produto, 13
 - universal, 15
- R -módulo
 - de cohomologia orientado, 101
 - livre, 100
 - de q -cadeias simpliciais relativo, 100
 - de q -cocadeias simpliciais relativo, 101
- R -módulo livre gerado por X , 81
- Álgebra
 - bigraduada, 32
 - de Hopf, 38
 - diferencial bigraduada, 33
 - diferencial graduada, 33
 - Exterior, 38
 - graduada, 32
- Álgebra bigraduada
 - comutativa, 35
- Álgebra diferencial
 - bigraduada sobre R , 34
- Álgebra diferencial graduada
 - sobre R , 34
- Álgebra graduada
 - comutativa, 35
- órbita, 10
- Ação
 - à esquerda, 8
 - diagonal, 11
 - efetiva, 10
 - Livre, 10
 - produto, 9
 - Transitiva, 11
 - Trivial, 10
- Aplicação
 - G -equivariante, 11
 - classificante, 16
 - de órbitas, 10
 - de Borel, 21
 - induzida nos espaços de órbitas, 12
 - multiplicação: inversão, 6
 - projeção natural, 10
 - de pares simpliciais, 99
 - própria, 12
 - projeção, 104
 - simplicial, 99
- Axiomas
 - de Eilenberg-Steenrod, 110
- Característica de Euler
 - de um espaço topológico X , 79
- Categoria, 77
- Cobertura
 - cobertura aberta do par, 102
 - localmente finita, 82
 - nervo de uma cobertura, 103
 - refinamento, 82
 - refinamento, 102
- Cohomologia

- de Čech, 105
- Complexo
 - de cocadeias, 101
 - simplicial abstrato, 97
 - subcomplexo, 98
- Complexo total, 35
- Conjunto
 - dos pontos fixos por uma ação, 42
 - cofinal, 94
 - dirigido, 91
 - pré-ordenado, 91
- Construção
 - de Milnor, 18
- Construção de Milnor, 18
- Continuidade
 - Čech, 112
- Convergência
 - de uma seqüência espectral de álgebras, 35
- Dimensão
 - de um complexo simplicial, 98
 - topológica, 42
- Elemento de torção, 79
- Espaço
 - G -espaço à esquerda, 8
 - Borel, 20
 - classificante, 15
 - de Eilenberg-Mac Lane, 80
 - do tipo finito, 43
 - paracompacto, 83
 - finitístico, 42
- Fibrado
 - G -fibrado principal, 13
 - G -fibrado universal, 15
 - de grupos, 24
 - induzido, 13, 14
 - produto, 13
- Filtração
 - decrecente, 31
 - estável, 35
- Funtor
 - cohomologia Čech, 109
 - contravariante, 78
 - covariante, 78
- Grupo
 - compacto, 6
 - das p -cadeias singulares, 27
 - de cohomologia de B com coeficientes locais no fibrado de grupos, 28
 - de Lie, 7
 - graduado, 28
 - topológico, 5
- grupo de transformação, 8
- Homomorfismo
 - de Bockstein, 81
 - induzido em cohomologia de Čech, 109
- Join
 - de espaços topológicos, 86
 - de uma família de espaços topológicos, 88
- Limite
 - direto de R -homomorfismos, 93
 - direto de R -módulos, 92
 - direto do sistema direto de espaços topológicos, 96
- Módulo
 - de cohomologia, 29
 - de homologia, 29
 - diferencial bigraduado, 29
- Módulo graduado
 - do tipo finito, 79
- Morfismo
 - B -morfismo, 14
 - de fibrados de grupos, 25
- Operador

- cobordo, 28
- cobordo relativo, 101
- bordo, 100
- Ordem
 - de uma família de espaços topológicos, 42
- Par
 - simplicial, 99
- Produto
 - tensorial $\otimes$, 81
- Produto cup
 - Čech, 113
- Produto tensorial, 81
 - de módulos diferenciais bigraduados sobre R , 34
 - de módulos diferenciais graduados, 34
- Pull-back, 14
- R -módulo
 - livre, 81
- Rank
 - de um grupo abeliano livre, 79
- Seqüência Espectral
 - Cohomológica de Leray-Serre, 37
 - Homológica de Leray-Serre, 36
- Seqüência espectral
 - colapsa no N -ésimo termo, 31
 - convergência de uma, 31
 - de álgebras, 34
 - de álgebras sobre R , 34
 - do primeiro quadrante, 31
 - do tipo cohomológica, 29
 - do tipo homológica, 29
- Simplexo
 - q -simplexo, 98
 - orientado, 99
- Sistema
 - direto, 91
 - direto de R -módulos, 92
 - direto de espaços topológicos, 96
 - soma topológica, 96
 - subgrupo de isotropia, 10
 - Translação à esquerda, 9
 - União
 - disjunta, 96
 - livre, 96
 - Vizinhança
 - par de vizinhanças fechadas, 111
 - par de vizinhanças, 111