Órbitas de Sussmann e aplicações

Renato Andrielli Laguna

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Órbitas de Sussmann e aplicações

Renato Andrielli Laguna

Orientador: ***Prof. Dr. Sérgio Luís Zani***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

USP – São Carlos
Junho/2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L181Ó Laguna, Renato Andrielli
Órbitas de Sussmann e aplicações / Renato Andrielli Laguna; orientador Sérgio Luís Zani -- São Carlos, 2011.
97 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES. 2. CAMPOS VETORIAIS. 3. ÓRBITAS DE SUSSMANN. 4. RESOLUBILIDADE LOCAL. I. Zani, Sérgio Luís, orient. II. Título.

Resumo

Nesta dissertação, estudamos as órbitas de uma família D de campos vetoriais suaves em uma variedade suave M. O objetivo é demonstrar dois teoremas de Sussmann: o primeiro teorema diz que as órbitas são subvariedades integrais de uma certa distribuição P_D de vetores tangentes em M. O segundo teorema dá condições necessárias e suficientes para que P_D seja igual à distribuição gerada pelos campos de D. Como aplicação, estudamos uma caracterização da condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves para campos vetoriais complexos em $\mathbb{R}^2$.

Abstract

In this dissertation, we study the orbits of a family D of smooth vector fields on a smooth manifold M. The goal is to demonstrate two theorems of Sussmann: the first theorem says that the orbits are integral submanifolds of a certain distribution P_D of tangent vectors of M. The second theorem gives necessary and sufficient conditions for P_D to be the same as the distribution generated by the vector fields of D. As an application, we study a characterization of the condition $(\mathcal{P})$ of Nirenberg and Treves for complex vector fields on $\mathbb{R}^2$.

Sumário

Introdução

Sejam M uma variedade suave e X um campo vetorial suave em M. Uma curva integral maximal de X pode ser apenas de três tipos:

(i) uma constante $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto p_0 \in M$;

(ii) uma curva regular sem auto-intersecção;

(iii) uma curva regular $\alpha : \mathbb{R} \to M$ que é periódica e só se intercepta no fim de seu período, isto é, existe $T > 0$ tal que, para todos $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \alpha(s) \Leftrightarrow t - s \in T\mathbb{Z}.$$

Nos três casos, a imagem de α é uma subvariedade imersa de M. Note que esta subvariedade nem sempre é mergulhada — um exemplo é o chamado fluxo irracional no toro (ver Sotomayor [7], capítulo VI, seção 7).

Para cada $p \in M$, seja S_p a imagem de uma curva integral maximal de X que passa por p. S_p é bem-definida, pois a curva integral maximal de X passando por p é única a menos de reparametrização.

Isto particiona M em subvariedades disjuntas (quando não são iguais) S_p, cujos espaços tangentes em cada ponto coincidem com o espaço gerado por X e que são conexas e maximais com relação a esta propriedade. As S_p são as órbitas do campo vetorial X.

Agora, vamos introduzir um segundo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Será possível particionar M em subvariedades S_p conexas de forma que o espaço tangente de cada uma (em cada ponto) coincida com o espaço gerado por X e Y e que elas sejam maximais ?

A resposta vai depender da escolha de X e Y. Por exemplo, se o colchete de Lie $[X, Y]$ for linearmente independente (em algum ponto) de X e Y, a resposta é “não”.

Caso a resposta seja “sim”, cada S_p deverá conter as curvas integrais de X ou de Y que a interceptam.

Isto nos leva a considerar como candidato a S_p o menor conjunto (contendo p) que contém todas as curvas integrais de X ou de Y que o interceptam. Tal conjunto é uma órbita do par de campos $\{X, Y\}$.

Mais geralmente, seja M uma variedade suave e seja D um conjunto de campos vetoriais suaves definidos em abertos de M, de forma que todo ponto $p \in M$ está no domínio de pelo menos um campo de D. As D-órbitas são as classes de equivalência da seguinte relação de equivalência: dois pontos p e q são equivalentes se podem ser ligados por uma sequência finita de segmentos de curvas integrais de campos de D.

Uma distribuição é uma aplicação Δ que associa a cada ponto p de M um subespaço vetorial $\Delta(p)$ de $\mathrm{T}_p M$. A distribuição que associa a cada ponto o espaço gerado pelos campos de D naquele ponto é denotada por Δ_D.

Sussmann [10] demonstra dois teoremas principais: o primeiro teorema diz que as D-órbitas, dotadas de uma topologia apropriada, são subvariedades imersas de M e que seus espaços tangentes coincidem, em cada ponto, com uma certa distribuição P_D (definida no artigo) que é involutiva e contém Δ_D; o segundo teorema dá condições necessárias e suficientes para que P_D seja igual a Δ_D.

Nesta dissertação, demonstramos em detalhes os dois teoremas supracitados. Em seguida, faremos uma breve discussão da condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves em $\mathbb{R}^2$.

O primeiro capítulo contém as definições de campo vetorial e do diferencial de uma aplicação entre variedades, conforme são usadas neste trabalho, junto com algumas propriedades importantes das subvariedades imersas. Por variedade, entende-se um espaço topológico de Hausdorff dotado de uma estrutura diferenciável $\mathcal{C}^\infty$. As definições de campo vetorial complexo e vetores tangentes complexos usadas neste capítulo seguem o capítulo I de Berhanu, Cordaro e Hounie [1].

O segundo capítulo é uma exposição detalhada das definições e teoremas principais de [10]. Duas modificações relevantes foram feitas:

(i) No lema 2.72, que é o lema 5.3 de [10], a demonstração de que a subvariedade em questão é um aberto na topologia da órbita foi feita de outro jeito, devido a um *"from this it follows easily that"* do qual, aparentemente, não seguia o resultado desejado. A nova demonstração é mais longa e desagradável.

(ii) No teorema 2.80, que é o teorema 4.2 de [10], foi adicionado à condição (e) o requisito de que a distribuição Δ tenha posto constante nas D-órbitas. Tal modificação é necessária para evitar que a condição (e) se aplique ao exemplo 2.68, o que tornaria o teorema falso. A origem do erro está no uso de um lema de Lobry [4] que é falso (ver [5]). A condição (e') da errata de Sussmann aparentemente tem o mesmo problema.

O terceiro capítulo é uma introdução à transformada de Fourier na reta real. Isto é necessário para os cálculos do quarto capítulo.

O quarto capítulo, seguindo as ideias do início do capítulo IV de [1], é sobre a condição $(\mathcal{P})$ para a resolubilidade local de um campo vetorial complexo não-singular L em $\mathbb{R}^2$. Localmente, a equação $Lu = f$ sempre pode ser transformada (via mudança de coordenadas) em

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ib\frac{\partial u}{\partial x} = f,$$

onde b é uma função que só assume valores reais. Para campos que já são da forma $L = \partial_t + ib\partial_x$, com b real, definimos a condição $(\mathcal{P})$ em um ponto p como sendo: que b não muda de sinal sobre as retas verticais (que são as de coordenada x constante) dentro de algum retângulo que contém p. Uma segunda definição da condição $(\mathcal{P})$ é dada, independente de coordenadas, que faz uso das órbitas de Sussmann e que é equivalente à definição anterior quando aquela se aplica. Concluímos mostrando que a condição $(\mathcal{P})$ implica a resolubilidade local em L^2.

Agradecimentos

(i) Ao meu orientador, Sérgio Luís Zani.

(ii) Ao professor Paulo Leandro Dattori da Silva, que me emprestou o seu livro de variedades e me ajudou com algumas dúvidas.

(iii) Mais geralmente, aos professores e funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação.

(iv) Aos meus colegas da pós-graduação, pessoas tolerantes e amigáveis.

(v) A Deus e à minha família, por motivos óbvios.

(vi) Ao Brasil.

(vii) Em particular, ao CNPq, que financiou este trabalho.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

1.1 Campos vetoriais complexos

1.1.1 Definição

Definição 1.1. (i) Um *campo vetorial complexo* na variedade M é uma aplicação $X : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

$\mathbb{C}$-Linearidade $\forall \lambda \in \mathbb{C}, f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$X(\lambda f + g) = \lambda X f + X g.$$

Regra de Leibniz $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$X(fg) = (Xf)g + (Xg)f.$$

(ii) Um campo vetorial complexo X é *real* (neste caso, chamado somente de *campo vetorial*) quando, sempre que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ for uma função que assume somente valores reais, Xf somente assumir valores reais.

Observação 1.2. $\mathcal{C}^\infty(M)$ denota o conjunto de todas as funções $f : M \to \mathbb{C}$ que são suaves. Denotaremos o conjunto de todos os campos vetoriais complexos em M por $\mathbb{C}\mathfrak{X}(M)$ e o conjunto de todos os campos vetoriais (reais) em M por $\mathfrak{X}(M)$.

Proposição 1.3. *Se f é constante, $Xf = 0$*

Demonstração. Seja f a função de valor constante α. $X(f^2) = 2(\alpha X f) = \alpha X f$, pela regra de Leibniz e pela $\mathbb{C}$-linearidade (respectivamente). Então $\alpha = 0$ ou $Xf = 0$. Se $\alpha = 0$, $Xf = X(0f) = 0(Xf) = 0$, pela $\mathbb{C}$-linearidade. □

Proposição 1.4. *Sejam $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tais que $f = g$ em um aberto $U \in M$. Então $Xf = Xg$ em U.*

Demonstração. Dado $p \in U$, mostremos que $Xf(p) = Xg(p)$. Defina $\psi_p \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\psi_p(p) = 0$ e $\psi_p = 1$ fora do aberto U. Então $f-g = (\psi_p)(f-g)$. Pela regra de Leibniz:

$$X(f-g) = X((\psi_p)(f-g)) = (X\psi_p)(f-g) + (X(f-g))\psi_p$$
$$\therefore X(f-g)(p) = 0 \quad \therefore Xf(p) = Xg(p).$$

□

1.1.2 Vetores tangentes complexos

Definição 1.5. (i) Um *vetor tangente complexo* no ponto $p \in M$ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear $\vec{v}_p : \mathcal{C}^\infty(p) \to \mathbb{C}$ satisfazendo a seguinte regra de Leibniz:

$$\forall f|_p, g|_p \in \mathcal{C}^\infty(p) : \vec{v}_p\big[f|_p g|_p\big] = \vec{v}_p\big[f|_p\big]g(p) + \vec{v}_p\big[g|_p\big]f(p).$$

(ii) Um vetor tangente complexo $\vec{v}_p$ é *real* (neste caso, chamado simplesmente de *vetor tangente*) quando, sempre que $f|_p \in \mathcal{C}^\infty(p)$ for um germe de função real, $\vec{v}_p[f|_p]$ é real.

(iii) O conjunto de todos os vetores tangentes reais de M em p é denotado por $\mathrm{T}_p M$ e chamado de *espaço tangente de M em p.*

(iv) O conjunto de todos os vetores tangentes complexos de M em p é denotado por $\mathbb{C}\mathrm{T}_p M$ e chamado de *espaço tangente complexo de M em p.*

(v) A união $\bigcup_{p\in M} \mathrm{T}_p M$ é chamada de *fibrado tangente de M* e denotada por $\mathrm{T}M$.

(vi) A união $\bigcup_{p\in M} \mathbb{C}\mathrm{T}_p M$ é chamada de *fibrado tangente complexificado de M* e denotada por $\mathbb{C}\mathrm{T}M$.

(vii) Se $X \in \mathbb{C}\mathfrak{X}(M)$ é um campo vetorial complexo em M e $p \in M$, o vetor tangente complexo $X|_p$ é definido por

$$X|_p[f|_p] = Xf(p).$$

Observação 1.6. Denotamos por $\mathcal{C}^\infty(p)$ a $\mathbb{C}$-álgebra dos germes de função suave em $p \in M$. $f|_p$ denota o germe de uma função f no ponto p.

Observação 1.7. Usaremos colchetes ($\vec{v}_p[f|_p]$) para denotar a aplicação de um vetor tangente complexo a um germe e usaremos parênteses, ou mera concatenação ($X(f)$ ou Xf) para denotar a aplicação do campo vetorial complexo a uma função.

Proposição 1.8. *Seja $\phi : M \to \mathbb{C}\mathrm{T}M$ uma função que associa a cada ponto p da variedade M um vetor tangente complexo $\phi(p) \in \mathbb{C}\mathrm{T}_p M$. Se, para cada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, a função $\phi_f : p \mapsto \phi(p)[f|_p]$ é suave, então existe um único campo vetorial complexo X tal que $X|_p = \phi(p), \quad \forall p \in M$.*

Demonstração. Defina X pela fórmula $Xf = \phi_f$. A $\mathbb{C}$-linearidade de X e a regra de Leibniz serão consequência das propriedades dos vetores tangentes complexos.

Dado $p \in M$, $X|_p[f|_p] = Xf(p) = \phi_f(p) = \phi(p)[f|_p], \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Portanto, $X|_p = \phi(p)$.

Mostremos a unicidade de X.

Sejam X^1 e X^2 campos vetoriais complexos com $X^1|_p = X^2|_p = \phi(p)$ para todo $p \in M$. Então, dado $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$X^1 f(p) = X^1\big|_p[f|_p] = \phi(p)[f|_p] = X^2\big|_p[f|_p] = X^2 f(p), \quad \forall p \in M.$$

$\therefore X^1 f = X^2 f$, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Portanto $X^1 = X^2$. □

1.1.3 Restrição de campo vetorial a um aberto

Proposição 1.9. *Seja X um campo vetorial complexo na variedade M e $U \subset M$ um aberto. Então existe um único campo vetorial complexo $X|_U \in \mathbb{C}\mathfrak{X}(U)$ tal que $X|_U(f|_U) = (Xf)|_U$, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Demonstração. Dado $p \in U$, o vetor tangente complexo $X|_p$ está em $\mathbb{C}\mathrm{T}_p M$. Queremos identificar $\mathbb{C}\mathrm{T}_p M$ com $\mathbb{C}\mathrm{T}_p U$. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, identificamos o germe $f|_p$ (que é germe na variedade M) com o germe $(f|_U)|_p$ (germe em U). É fácil ver que tal identificação é um isomorfismo de álgebra entre $\mathcal{C}^\infty(p)_M$ e $\mathcal{C}^\infty(p)_U$. Assim, vamos tratar estes espaços de germes como se fossem o mesmo.

Identificando-se os germes, ficam identificados os vetores tangentes complexos de U e M.

Definimos $X|_U$, usando a proposição 1.8, por $(X|_U)|_p = X|_p, \forall p \in U$. Para isso, devemos mostrar que as aplicações $\phi_f : p \in U \mapsto X|_p(f)$, definidas para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, são suaves.

Mostremos que ϕ_f é localmente suave em um ponto $p_0 \in U$ qualquer. De fato, pois ϕ_f é igual, em alguma vizinhança de p_0, a Xg, onde $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é uma função com $f|_{p_0} = g|_{p_0}$.

Assim definido $X|_U$, usando a identificação entre germes de M e U que fizemos, temos que

$$X|_U(f|_U)(p) = (X|_U)|_p\Big[(f|_U)|_p\Big] = X|_p\Big[f|_p\Big] = Xf(p)$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e todo $p \in U$. □

Observação 1.10. O aberto $U \subset M$ é considerado uma variedade, cuja estrutura diferenciável é obtida pela restrição da estrutura diferenciável de M.

1.1.4 Forma local dos campos vetoriais

Definição 1.11. Seja M uma variedade e $\vec{x} : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local de M. Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$. Podemos escrever $f = f_{\vec{x}} \circ \vec{x}$, onde $f_{\vec{x}} : V \to \mathbb{C}$ é a função suave $f \circ \vec{x}^{-1}$. Então definimos as *derivadas parciais*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^\infty(U), j = 1, \ldots, m$$

pela fórmula:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f = \partial_j(f_{\vec{x}}) \circ \vec{x}.$$

As aplicações

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$$

(que também podem ser denotadas ∂_{x_j}, quando quisermos economizar espaço) são campos vetoriais reais em U. Dada $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, fica denotado

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(g|_U).$$

Observação 1.12. O símbolo ∂_j denota a derivada parcial usual na j-ésima coordenada.

Proposição 1.13. *Seja $X \in \mathbb{C}\mathfrak{X}(U)$, onde U é o domínio de uma carta local $\vec{x} : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ da variedade M. Então*

$$X = \sum_{j=1}^{m} X(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ e $p \in U$. Seja $r > 0$ tal que a bola aberta $B(\vec{x}(p), r)$ está contida em V. Então $\vec{x} - \vec{x}(p)$ é uma carta local definida em U que se anula em p. Restringindo esta carta, obtemos uma carta local $\vec{y} : U' \to B(0, r)$, com $\vec{y}(p) = 0$.

Seja $f_{\vec{y}} = f|_{U'} \circ \vec{y}^{-1} : B(0, r) \to \mathbb{C}$ a expressão de f nas coordenadas locais de $\vec{y}$. Dado $h \in B(0, r)$, seja $\alpha_h : (0, 1) \to B(0, r)$ definida por $\alpha_h(t) = th$. Pelo teorema fundamental do cálculo e pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} f_{\vec{y}}(h) &= f_{\vec{y}}(0) + \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\vec{y}}(\alpha_h(t))\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \langle \nabla f_{\vec{y}}(\alpha_h(t)), \alpha_h'(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^m h_j \partial_j (f_{\vec{y}})(ht) \, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^m h_j \int_0^1 \partial_j (f_{\vec{y}})(ht) \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Defina as funções

$$g_j(q) = \int_0^1 \partial_j (f_{\vec{y}})(t\vec{y}(q)) \, \mathrm{d}t, \quad j = 1, \ldots, m,$$

com $q \in U'$. Note que $g_j(p) = \partial f / \partial y_j(p)$. Temos:

$$f|_{U'} = f(p) + \sum_{j=1}^m y_j g_j.$$

Aplicando o campo $X|_{U'}$ e usando a regra de Leibniz, obtemos:

$$\begin{aligned} Xf(p) &= \sum_{j=1}^m \Big(X|_{U'}(y_j)(p) g_j(p) + \underbrace{y_j(p)}_{=0} X|_{U'}(g_j)(p) \Big) = \sum_{j=1}^m X|_{U'}(y_j)(p) g_j(p) \\ &= \sum_{j=1}^m X|_p \Big[y_j|_p \Big] \frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = \sum_{j=1}^m X(x_j)(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p). \end{aligned}$$

□

Observação 1.14. O mesmo procedimento que foi usado na proposição acima serve para demonstrar que todo vetor tangente complexo $\vec{v}_p \in \mathbb{C}\mathrm{T}_p M$ se decompõe em coordenadas locais na forma

$$\vec{v}_p = \sum_{j=1}^m \vec{v}_p[x_j] \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$$

1.2 Derivada de uma curva

Definição 1.15. Seja $\alpha : (a,b) \to M$ uma curva suave em M. Para cada $t \in (a,b)$, definimos $\alpha'(t) \in \mathrm{T}_p M$ (que também pode ser denotado por $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t)$) pela equação:

$$\alpha'(t)\Big[f|_{\alpha(t)}\Big] := (f \circ \alpha)'(t).$$

Verifiquemos que $\alpha'(t) : \mathcal{C}^\infty(\alpha(t)) \to \mathbb{C}$ satisfaz a definição de um vetor tangente complexo:

$\mathbb{C}$-linearidade $\alpha'(t)\Big[f|_{\alpha(t)} + \lambda\Big(g|_{\alpha(t)}\Big)\Big] =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha'(t)\Big[(f+\lambda g)|_{\alpha(t)}\Big] = \big((f+\lambda g)\circ\alpha\big)'(t)\\
&= \big((f\circ\alpha) + \lambda(g\circ\alpha)\big)'(t) = \alpha'(t)\Big[f|_{\alpha(t)}\Big] + \lambda\alpha'(t)\Big[g|_{\alpha(t)}\Big].
\end{aligned}$$

Regra de Leibniz $\alpha'(t)\Big[f|_{\alpha(t)}g|_{\alpha(t)}\Big] = \alpha'(t)\Big[(fg)|_{\alpha(t)}\Big]$

$$\begin{aligned}
&= (fg\circ\alpha)'(t) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha(t))g(\alpha(t))\\
&= (f\circ\alpha)'(t)(g\circ\alpha)(t) + (f\circ\alpha)(t)(g\circ\alpha)'(t)\\
&= \alpha'(t)\Big[f|_{\alpha(t)}\Big]g(\alpha(t)) + f(\alpha(t))\alpha'(t)\Big[g|_{\alpha(t)}\Big].
\end{aligned}$$

Como $(f\circ\alpha)'(t)$ é real sempre que f é uma função real, $\alpha'(t)$ é um vetor tangente real.

Exemplo 1.16 (Fórmula local da derivada). Seja $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local de M tal que $\alpha(t_0) \in U$ para algum t_0. Seja $\delta > 0$ tal que $\alpha((t_0-\delta, t_0+\delta)) \subset U$. Seja $\tilde{\alpha} = \alpha|_{(t_0-\delta,t_0+\delta)\to U}$ (restrição de domínio e contra-domínio de α). Defina $\alpha^j = x_j \circ \tilde{\alpha}, \forall j = 1\ldots, m$. Assim, a curva α é dada, para $|t-t_0| < \delta$, pelas suas coordenadas

$$\vec{x}(\alpha(t)) = (\alpha^1(t), \ldots, \alpha^m(t)).$$

Dado um germe de função suave $f|_{\alpha(t_0)}$, calculemos $\alpha'(t_0)\Big[f|_{\alpha(t_0)}\Big]$:

$$\begin{aligned}
\alpha'(t_0)\Big[f|_{\alpha(t_0)}\Big] &= (f\circ\alpha)'(t_0) = (f\circ\tilde{\alpha})'(t_0) = \big(f\circ(\vec{x})^{-1}\circ\vec{x}\circ\tilde{\alpha}\big)'(t_0)\\
&= \sum_{j=1}^{n}(x_j\circ\tilde{\alpha})'(t_0)\,\partial_j\big(f\circ(\vec{x})^{-1}\big)(\vec{x}\circ\tilde{\alpha}(t_0)) \quad \text{(regra da cadeia)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(\alpha^j)'(t_0)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\tilde{\alpha}(t_0)}\Big[f|_{\tilde{\alpha}(t_0)}\Big].
\end{aligned}$$

Assim, a derivada de uma curva em coordenadas locais é dada pela fórmula:

$$\alpha'(t) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha^j)'(t_0) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\alpha(t_0)}.$$

1.3 Diferencial

Definição 1.17. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades. Se $g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, $g \circ F \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Dado um vetor tangente complexo $\vec{v}_p$ em $\mathbb{C}\mathrm{T}_p\, M$, definimos um vetor tangente complexo em $\mathbb{C}\mathrm{T}_{F(p)}\, N$, que será chamado de $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)$, pela seguinte fórmula:

$$\mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g|_{F(p)} \Big] = \vec{v}_p \Big[(g \circ F)|_p \Big].$$

Se $\vec{v}_p$ for real, $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)$ será real e com isto definimos o *diferencial de F* como a aplicação

$$\mathrm{d}F : \mathrm{T}M \longrightarrow \mathrm{T}N.$$

Se considerarmos $p \in M$ fixado, a restrição

$$\mathrm{d}F|_p : \mathrm{T}_p\, M \longrightarrow \mathrm{T}_{F(p)}\, N$$

é uma aplicação linear cujo posto é chamado *posto de F em p*.

Observação 1.18. Verifiquemos que $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)$ satisfaz os requisitos de um vetor tangente complexo:

$\mathbb{C}$-Linearidade $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_1|_{F(p)} + \lambda\Big(g_2|_{F(p)} \Big) \Big]$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[(g_1 + \lambda g_2)|_{F(p)} \Big] = \vec{v}_p\Big[\Big((g_1 + \lambda g_2) \circ F \Big)\Big|_p \Big] \\
&= \vec{v}_p\Big[\Big(g_1 \circ F + \lambda (g_2 \circ F) \Big)\Big|_p \Big] = \vec{v}_p\Big[(g_1 \circ F)|_p + \lambda\Big((g_2 \circ F)|_p \Big) \Big] \\
&= \vec{v}_p\Big[(g_1 \circ F)|_p \Big] + \lambda \vec{v}_p\Big[(g_2 \circ F)|_p \Big] \\
&= \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_1|_{F(p)} \Big] + \lambda\, \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_2|_{F(p)} \Big].
\end{aligned}$$

Regra de Leibniz $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_1|_{F(p)}\, g_2|_{F(p)} \Big] =$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[(g_1 g_2)|_{F(p)} \Big] = \vec{v}_p\Big[\Big((g_1 g_2) \circ F \Big)\Big|_p \Big] = \vec{v}_p\Big[(g_1 \circ F)|_p (g_2 \circ F)|_p \Big] \\
&= \vec{v}_p\Big[(g_1 \circ F)|_p \Big] g_2(F(p)) + g_1(F(p)) \vec{v}_p\Big[(g_2 \circ F)|_p \Big] \\
&= \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_1|_{F(p)} \Big] g_2(F(p)) + g_1(F(p))\, \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g_2|_{F(p)} \Big].
\end{aligned}$$

Observação 1.19. Verifiquemos que $\mathrm{d}F$ leva vetores tangentes reais em vetores tangentes reais. Se $g|_{F(p)}$ é um germe de função real em N, $(g \circ F)|_p$ é um germe de função real em M. Assim, se $\vec{v}_p$ é um vetor tangente real em $p \in M$, $\mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[g|_{F(p)}\Big] = \vec{v}_p\Big[(g \circ F)|_p\Big]$ é um número real sempre que $g|_{F(p)}$ é um germe de função real.

Observação 1.20. Verifiquemos a linearidade de $\mathrm{d}F|_p$: dados $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{T}_p\, M$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f|_{F(p)} \in \mathcal{C}^\infty(F(p))$, com $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}F(\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2)\Big[f|_{F(p)}\Big] = (\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2)\Big[(f \circ F)|_p\Big] \\
&= \vec{v}_1\Big[(f \circ F)|_p\Big] + \lambda\vec{v}_2\Big[(f \circ F)|_p\Big] = \mathrm{d}F(\vec{v}_1)\Big[f|_{F(p)}\Big] + \lambda\, \mathrm{d}F(\vec{v}_2)\Big[f|_{F(p)}\Big].
\end{aligned}$$

Proposição 1.21 (Cálculo do diferencial usando caminhos)**.** *Sejam* $\alpha : (a, b) \to M$ *uma curva suave na variedade* M *e* $F : M \to N$ *uma aplicação entre variedades. Então* $\mathrm{d}F(\alpha'(t)) = (F \circ \alpha)'(t)$.

Demonstração. Basta calcular $\mathrm{d}F(\alpha'(t))$ em um germe de função suave arbitrário $g|_{F(\alpha(t))}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}F(\alpha'(t))\Big[g|_{F(\alpha(t))}\Big] &= \alpha'(t)\Big[(g \circ F)|_{\alpha(t)}\Big] = (g \circ F \circ \alpha)'(t) \\
&= (F \circ \alpha)'(t)\Big[g|_{F\circ\alpha(t)}\Big]. \\
\therefore \mathrm{d}F(\alpha(t)) &= (F \circ \alpha)'(t).
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.22 (Regra da Cadeia em Variedades)**.** *Sejam* $F : M \to N$ *e* $G : N \to P$ *aplicações suaves entre variedades. Então*

$$\mathrm{d}(G \circ F) = \mathrm{d}G \circ \mathrm{d}F.$$

Demonstração. Sejam $\vec{v}_p$ um vetor tangente qualquer em $\mathrm{T}_p\, M$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(G \circ F)(\vec{v}_p)\Big[f|_{G\circ F(p)}\Big] &= \vec{v}_p\Big[(f \circ (G \circ F))|_p\Big] = \vec{v}_p\Big[((f \circ G) \circ F)|_p\Big] \\
&= \mathrm{d}F(\vec{v}_p)\Big[(f \circ G)|_{F(p)}\Big] = \mathrm{d}G(\mathrm{d}F(\vec{v}_p))\Big[f|_{F\circ G(p)}\Big].
\end{aligned}$$

□

1.3.1 Derivadas parciais de uma aplicação

Definição 1.23. Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades e seja $\vec{x} : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$, $\quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ carta local de M. Definimos

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \mathrm{d}F\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right), \quad \forall p \in U, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Observação 1.24. Se $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\Big[f|_{F(p)}\Big] = \mathrm{d}F\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)\Big[f|_{F(p)}\Big] = \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\Big[(f \circ F)|_p\Big].$$

Exemplo 1.25. Considere $p \in M$ fixo, F como acima. Seja $\vec{y} : U' \subset N \to V' \subset \mathbb{R}^n$ uma carta local de N com $F(p) \in U'$. Vamos calcular $\partial F/\partial x_j(p)$ usando as coordenadas locais $(y_1, \ldots, y_n)$ de N.

Seja $\Omega = U \cap F^{-1}(U')$, aberto em M. Sejam $\alpha_j : (-\delta, \delta) \to \Omega$, dadas por $\vec{x}(\alpha_j(t)) = \vec{x}(p) + \vec{e_j}t$, onde $\vec{e_j}$ é o j-ésimo elemento da base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $\delta > 0$ é pequeno o bastante para que cada $\alpha_j \in \Omega$. Então $\alpha_j'(0) = \partial_{x_j}\big|_p$ e podemos calcular (pela proposição 1.21):

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(p) = \mathrm{d}F\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right) = \mathrm{d}F(\alpha_j'(0)) = (F \circ \alpha_j)'(0).$$

Seja β_j a curva $F \circ \alpha_j$. Defina $\beta_j^i(t) = y_i(\beta_j(t)), |t| < \delta$. Defina também $F_j : \vec{x}(\Omega) \to \mathbb{R}$, pela fórmula $F_j(T) = y_j(F(\vec{x}^{-1}(T))), \quad \forall T \in \vec{x}(\Omega)$. Pela fórmula local da derivada de curva (exemplo 1.16),

$$(F \circ \alpha_j)'(0) = \beta_j'(0) = \sum_{i=1}^n (\beta_j^i)'(0) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)} = \sum_{i=1}^n \partial_j(F_i)(\vec{x}(p)) \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{F(p)}.$$

1.3.2 Matriz jacobiana

Definição 1.26. A matriz $A(p) = (a_{ij})_{n \times m}$, com $a_{ij} = \partial_j(F_i)(\vec{x}_i(p))$, onde F_i é definida como no exemplo anterior (exemplo 1.25), é chamada de *matriz jacobiana de F no ponto p, em relação às cartas $\vec{x}$ e $\vec{y}$.*

Proposição 1.27. *Seja $F : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades e sejam $\vec{x} : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$ e $\vec{y} : U' \subset N \to V' \subset \mathbb{R}^n$ cartas locais de M e N, respectivamente, com $p \in M$ um ponto tal que $p \in U$ e $F(p) \in U'$.*

Considere $A(p) = (a_{ij})_{n\times m}$ a matriz jacobiana de F em p, em relação às cartas $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Então o diferencial de F no ponto p,

$$\mathrm{d}F|_p : \mathrm{T}_p\, M \longrightarrow \mathrm{T}_{F(p)}\, N,$$

é determinado por $A(p)$, pela fórmula

$$\mathrm{d}F|_p(\vec{v}_p) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_p\Big[x_j|_p\Big]\, a_{ij}\, \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_p .$$

Demonstração. De fato, usando a proposição 1.13 e o exemplo 1.25:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(\vec{v}_p) = \mathrm{d}F\left(\sum_{j=1}^{m} \vec{v}_p\Big[x_j|_p\Big]\, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p\right) &= \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_p\Big[x_j|_p\Big]\, \frac{\partial F}{\partial x_j}(p)\\ &= \sum_{j=1}^{m} \vec{v}_p\Big[x_j|_p\Big] \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \frac{\partial}{\partial y_i}\bigg|_p .\end{aligned}$$

□

Corolário 1.28. *O posto de F em p é o posto da matriz jacobiana $A(p)$ de F, em relação a cartas locais quaisquer.*

Observação 1.29. A matriz jacobiana de F em p, em relação a $\vec{x}$ e $\vec{y}$, é precisamente a matriz jacobiana em $\vec{x}(p)$ de $F_{\vec{x}\vec{y}}$, que é a aplicação entre espaços euclidianos definida por $F_{\vec{x}\vec{y}}(T) = \vec{y}(F(\vec{x}^{-1}(T)))$.

1.4 Teoremas da imersão, da submersão e do posto

Sejam M e N variedades $\mathcal{C}^\infty$ de dimensão m e n, respectivamente, e seja $F : M \to N$ uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$. Seja $p \in M$.

Seguem três resultados básicos do cálculo em variedades:

Teorema 1.30 (Imersão)**.** *Se F tem posto m em p, então existem cartas*

$$\begin{array}{rlcll}\vec{x}: & U \subset M & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^m, & p \in U e\\ \vec{y}: & U' \subset N & \longrightarrow & V' \subset \mathbb{R}^n, & f(p) \in U'\end{array}$$

de M e N tais que $F(U) \subset U', V' = V \times (-\delta, \delta)^{n-m}$ com $\delta > 0$ e, sendo $\tilde{F} = F|_{U\to U'}$,

$$\vec{y} \circ \tilde{F} = (x_1, \ldots, x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})\big|_{U\to V'}.$$

Teorema 1.31 (Submersão). *Se F tem posto n em p, então existem cartas*

$$\begin{array}{llll} \vec{x}: & U \subset M & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^m, & p \in U \, e \\ \vec{y}: & U' \subset N & \longrightarrow & V' \subset \mathbb{R}^n, & f(p) \in U' \end{array}$$

de M e N tais que $F(U) \subset U', V = V' \times (-\delta, \delta)^{m-n}$ com $\delta > 0$ e, sendo $\tilde{F} = F|_{U \to U'}$,

$$\vec{y} \circ \tilde{F} = (x_1, \ldots, x_n)\big|_{U \to V'}.$$

Teorema 1.32 (Posto). *Se F tem posto k em uma vizinhança de p, então existem cartas*

$$\begin{array}{llll} \vec{x}: & U \subset M & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^m, & p \in U \, e \\ \vec{y}: & U' \subset N & \longrightarrow & V' \subset \mathbb{R}^n, & f(p) \in U' \end{array}$$

de M e N e um aberto $W \subset \mathbb{R}^k$ tais que $F(U) \subset U', V = W \times (-\delta, \delta)^{m-k}$, $V' = W \times (-\delta, \delta)^{n-k}$ com $\delta > 0$ e, sendo $\tilde{F} = F|_{U \to U'}$,

$$\vec{y} \circ \tilde{F} = (x_1, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})\big|_{U \to V'}.$$

Para demonstrar estes teoremas, basta usar nas coordenadas locais os teoremas respectivos (forma local das imersões, forma local das submersões e teorema do posto) do cálculo em $\mathbb{R}^n$. Uma demonstração destes se encontra em [3].

1.5 Subvariedades imersas

Definição 1.33. Uma *subvariedade imersa* (que às vezes chamaremos simplesmente de *subvariedade*) da variedade M é uma variedade N cujo conjunto dos pontos é subconjunto do conjunto dos pontos de M e que satisfaz a seguinte propriedade: a inclusão em M,

$$\begin{array}{rccc} i: & N & \longrightarrow & M \\ & p & \longmapsto & p \end{array},$$

é uma imersão, isto é, i é uma aplicação suave (e, portanto, contínua) cujo diferencial em cada $p \in N$, $\mathrm{d}i|_p : \mathrm{T}_p N \to \mathrm{T}_p M$, é injetivo.

Observação 1.34. Como i é injetiva e imersão, $\mathrm{d}i$ será injetivo. O fato de $\mathrm{d}i$ ser injetivo implica que $\mathrm{d}i$ é uma bijeção sobre sua imagem, isto é, $\mathrm{d}i$ faz uma relação biunívoca entre o fibrado tangente $\mathrm{T}N$ e $\mathrm{d}i(\mathrm{T}N) \subset \mathrm{T}M$. Para cada

$p \in N$, a imagem $\mathrm{d}i(\mathrm{T}_p N)$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{T}_p M$ de dimensão igual à dimensão de N.

Assim, vamos identificar cada vetor tangente $\vec{v}_p \in \mathrm{T}_p N$ com $\mathrm{d}i(\vec{v}_p) \in \mathrm{T}_p M$. Com esta identificação, podemos tratar os vetores tangentes da subvariedade imersa como se fossem vetores tangentes da variedade.

Observação 1.35. Para verificar que uma aplicação F é uma imersão, basta verificar que a matriz jacobiana tem sempre posto igual a $\dim(\mathrm{Dom}(F))$.

Observação 1.36. O fato de a inclusão $i : N \to M$ ser contínua implica que a topologia de N (como variedade) é mais fina do que a topologia de N como subespaço topológico de M.

Observação 1.37. Aplicando o teorema da imersão na inclusão, obtemos uma caracterização da estrutura diferenciável das subvariedades imersas: dados $p \in N$, sendo N subvariedade imersa de M, existem cartas locais:

$$\begin{array}{rlcl} \vec{x}: & U \subset N & \longrightarrow & V \subset \mathbb{R}^n \text{ e} \\ \vec{y}: & U' \subset M & \longrightarrow & V' \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

de N e M respectivamente tais que $p \in U \subset U'$, $V' = V \times (-\delta, \delta)^{m-n}$ para algum $\delta > 0$ e

$$\vec{y}|_{U \to \vec{y}(U)} = (x_1, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n}).$$

Note que nem sempre podemos exigir que $U' \cap N = U$.

Proposição 1.38 (Imagem de Imersão Quociente). *Seja $F : M \to N$ uma imersão entre variedades. Se F é uma aplicação quociente, isto é, se $F^{-1}(F(U))$ é aberto em M para todo aberto U em M, então:*

(i) $F(M)$ é uma subvariedade imersa de N com a topologia co-induzida por F (isto é, com a topologia dos conjuntos cuja imagem inversa por F é aberta).

(ii) O espaço tangente de $F(M)$ em um ponto $F(q)$ é dado por $\mathrm{T}_{F(q)} F(M) = \mathrm{d}F(\mathrm{T}_q M)$.

Demonstração. Vamos construir uma estrutura diferenciável para o espaço topológico $(F(M), \tau)$, onde

$$\tau = \big\{ U \subset N \mid F^{-1}(U) \text{ é aberto em } M \big\}.$$

Usaremos o teorema da imersão em F: dado $p \in M$, existem cartas locais:

$$\begin{array}{llll} \vec{x}_p : U_p \overset{ab.}{\subset} M \longrightarrow V_p \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^m, & p \in U_p, & \vec{x}_p = (x_1^p, \ldots, x_m^p) & \text{e} \\ \vec{y}_p : U'_p \overset{ab.}{\subset} N \longrightarrow V'_p \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n, & F(p) \in U'_p, & \vec{y}_p = (y_1^p, \ldots, y_n^p), & \end{array}$$

com $V_p' = V_p \times (-\delta_p, \delta_p)^{n-m}$, para algum $\delta_p > 0$, onde $n = \dim N$ e $m = \dim M$, $F(U_p) \subset U_p'$ e

$$\vec{y}_p(F(p')) = (x_1^p, \ldots, x_m^p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m})(p'), \quad \forall p' \in U_p. \tag{1.39}$$

Para servir de carta local de $F(M)$ em torno do ponto $F(p)$, definiremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \phi_p : & F(U_p) & \longrightarrow & V_p \\ & q & \longmapsto & (y_1^p(q), \ldots, y_m^p(q)), \end{array}$$

cujo domínio $F(U_p)$ é aberto em $(F(M), \tau)$ devido a F ser quociente. Note que $\phi_p(F(p')) = (x_1^p(p'), \ldots, x_m^p(p'))$, $\forall p' \in U_p$. Mostremos que ϕ_p é um homeomorfismo entre $F(U_p)$ e V_p.

ϕ_p **é contínua:** dado $O \overset{ab.}{\subset} V_p \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \phi_p^{-1}(O) &= \{ q \in F(U_p) \mid (y_1^p, \ldots, y_m^p)(q) \in O \} \\ &= \{ F(p') \in V_p \mid (x_1^p, \ldots, x_m^p)(p') \in O \} = F(\vec{x}_p^{-1}(O)). \end{aligned}$$

Como $\vec{x}_p : U_p \to V_p$ é contínua, a imagem inversa $\vec{x}_p^{-1}(O)$ é aberta em U_p. Como F é uma aplicação quociente, $F(\vec{x}_p^{-1}(O))$ é aberto em $F(M)$ e está contido em $F(U_p)$, que, por sua vez, é aberto em $F(M)$. Concluímos que $\phi_p^{-1}(O) = F(\vec{x}_p^{-1}(O))$ é aberto em $F(U_p)$.

ϕ_p **é aberta:** Seja $O' \overset{ab.}{\subset} F(U_p)$. Podemos escrever $O = F(\Omega)$, com $\Omega = F^{-1}(O') \cap U_p \overset{ab.}{\subset} U_p$. Então, $\phi_p(O') = \phi_p(F(\Omega)) = \vec{x}_p(\Omega)$, que é aberto em V_p.

Como ϕ_p é contínua, aberta e bijetiva, ϕ_p é um homeomorfismo.

Agora, verifiquemos que as cartas locais construídas desta forma são compatíveis. Sejam $\phi_{p_1} : F(U_{p_1}) \to V_{p_1}$ e $\phi_{p_2} : F(U_{p_2}) \to V_{p_2}$, construídas como acima com cartas locais $x^{p_1}, x^{p_2}, y^{p_1}, y^{p_2}$ de M e N associadas. Mostremos que a mudança de carta

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \phi_{p_1}(F(U_{p_1}) \cap F(U_{p_2})) & \longrightarrow & \phi_{p_2}(F(U_{p_1}) \cap F(U_{p_2})) \\ & p & \longmapsto & \phi_{p_2}(\phi_{p_1}(p)) \end{array}$$

é uma aplicação suave. De fato, pois:

$$\Psi(t_1, \ldots, t_m) = (\eta_1, \ldots, \eta_m)(t_1, \ldots, t_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-m}),$$

onde $\eta : \vec{y}_{p_1}(U'_{p_1} \cap U'_{p_2}) \to \vec{y}_{p_2}(U'_{p_1} \cap U'_{p_2})$ é a mudança de coordenada de $\vec{y}_{p_1}$ para $\vec{y}_{p_2}$, uma aplicação suave.

Assim, as aplicações da forma ϕ_p induzem uma estrutura diferenciável sobre o espaço topológico $(F(M), \tau)$ formando uma variedade.

Agora, devemos mostrar que a variedade $F(M)$ construída acima é uma subvariedade imersa de N.

Seja $i : F(M) \to N$ a inclusão. Dado $q = F(p) \in F(M)$, consideremos as cartas locais $\phi_p : F(U_p) \to V_p$ e $\vec{y}^p : U'_p \to V'_p$, definidas como na construção acima. A expressão de i em coordenadas locais é

$$\vec{y}^p(i(\phi_p^{-1}(t_1, \ldots, t_m))) = (t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0),$$

o que nos dá uma matriz jacobiana da forma $\left(\begin{array}{c|c} I_{m\times m} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, onde $I_{m\times m}$ é a matriz identidade de tamanho m e os zeros representam blocos nulos. Isto mostra que i é uma imersão.

$\mathrm{d}F(\partial_{x_j}|_p) = \partial_{y_j}|_p$, pela equação (1.39). Assim, $\mathrm{T}_{F(p)} F(M) = \mathrm{d}F(\mathrm{T}_p M)$. □

Corolário 1.40. *A imagem de uma imersão injetiva é uma subvariedade imersa na topologia co-induzida.*

1.5.1 Unicidade

Subvariedades diferentes com o mesmo conjunto de pontos

Definição 1.41 (Subvariedade aberta)**.** Seja M uma variedade suave e $U \subset M$ um aberto em M. Considere U dotado da topologia que é herdada de M.

A restrição da estrutura diferenciável de M para U é uma estrutura diferenciável em U. A variedade U assim obtida é uma subvariedade imersa de U. Uma subvariedade deste tipo será chamada de *subvariedade aberta* de M.

Observação 1.42. Para verificar que a subvariedade aberta é mesmo uma subvariedade imersa, basta considerar que a matriz jacobiana da inclusão, escolhendo-se em U uma carta que é a restrição da carta escolhida em M, é a matriz identidade.

Proposição 1.43 (União disjunta de subvariedades imersas)**.** *Sejam $\{N_j\}_{j\in J}$ subvariedades imersas disjuntas de M, todas com a mesma dimensão $n \leq \dim M$. Seja $N = \bigcup_{j\in J} N_j$ a união, dotada da topologia gerada pela união das topologias das N_j. Então a união das estruturas diferenciáveis das N_j gera uma estrutura diferenciável para N, de dimensão n.*

A variedade N assim construída é subvariedade imersa de M.

Demonstração. As estruturas diferenciáveis das N_j são compatíveis entre si, pois neste caso as cartas de subvariedades distintas não se interceptam. Como as cartas das N_j, tomadas em conjunto, cobrem N, é possível gerar uma estrutura diferenciável em N a partir delas.

Afirmação: a inclusão $i : N \to M$ é uma imersão. De fato, pois a matriz jacobiana de i em cada ponto coincide com a matriz jacobiana de alguma inclusão $i_j : N_j \to M$ (escolhendo-se as cartas convenientemente) e esta terá posto n. □

Exemplo 1.44. (i) Considere o aberto $Q = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, visto apenas como conjunto de pontos e não como variedade. Seja N_1 a subvariedade aberta de $\mathbb{R}^2$ que tem Q como conjunto de pontos.

Para cada $y \in (0,1)$, seja R_y a imagem da imersão injetiva $\alpha_y : (0,1) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha_y(t) = (t, y)$. Isto é simplesmente o segmento de reta $(0,1) \times \{y\}$, uma subvariedade imersa unidimensional de $\mathbb{R}^2$.

Seja N_2 a união disjunta $\bigcup_{y\in(0,1)} R_y$ de subvariedades. Assim como N_1, N_2 é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^2$ com o conjunto de pontos Q, mas a dimensão de N_2 é 1. A topologia de N_2 é estritamente mais fina que a topologia de N_1.

(ii) Ainda no plano cartesiano, seja N_3 a união disjunta dos seguintes segmentos de reta: $(-1,0) \times \{0\}$, $(0,1) \times \{0\}$ e $\{0\} \times (-1,1)$, e seja N_4 a união disjunta dos segmentos: $(-1,1)\times\{0\}$, $\{0\}\times(-1,0)$ e $\{0\}\times(0,1)$.

N_3 e N_4 são subvariedades com o mesmo conjunto de pontos e a mesma dimensão, mas têm topologias diferentes e, portanto, estruturas diferenciáveis diferentes. As topologias de N_3 e N_4 não são comparáveis.

Subvariedade de dimensão maximal

Proposição 1.45. *Uma subvariedade imersa de dimensão maximal é sempre uma subvariedade aberta.*

Demonstração. Seja $N \subset M$ uma subvariedade imersa com $\dim N = \dim M = m$. Como $i : N \to M$ é uma imersão, o diferencial $\mathrm{d}i|_p$ tem posto m para cada $p \in N$. Ou seja, $di|_p$ é isomorfismo para cada $p \in N$. Aplicando o teorema da função inversa em i, encontramos vizinhanças $U_p \overset{ab.}{\subset} N$, $V_p \overset{ab.}{\subset} M$ de p tais que $i|_{U_p\to V_p}$ é difeomorfismo — em particular, como V_p é uma vizinhança aberta de p em M, isto implica que $i(N)$ é aberto em M, ou seja, o conjunto de pontos de N é aberto em M.

Seja N_2 a subvariedade aberta de M no conjunto de pontos de N. Como as cartas de N_2 também são cartas de M, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} I: & N & \longrightarrow & N_2 \\ & p & \longmapsto & p \end{array}$$

terá a mesma matriz jacobiana que i nos pontos de p, com a escolha conveniente das cartas. Assim, $\mathrm{d}I|_p$ será um isomorfismo para cada p e, pelo teorema da função inversa, I será um difeomorfismo, o que implica que $N = N_2$. □

Corolário 1.46. *Duas subvariedades com o mesmo conjunto de pontos são iguais, desde que elas tenham dimensão maximal.*

Subvariedades com topologias comparáveis

Proposição 1.47. *Sejam N_1 e N_2 duas subvariedades imersas de M com o mesmo conjunto de pontos e suponha que a topologia de N_1 é mais fina que a topologia de N_2. Então N_1 é subvariedade de N_2.*

Demonstração. Sejam N_1 e N_2 como na hipótese. Primeiro, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} I_{12}: & N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ & p & \longmapsto & p \end{array}$$

é suave. A continuidade de I_{12} é consequência de a topologia de N_1 ser mais fina que a topologia de N_2. Seja $p \in N_1 = N_2$. Sejam

$$\begin{aligned} \vec{x} &: U_1 \subset N_1 \longrightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, & n_1 &= \dim N_1, \\ \vec{y} &: U_1' \subset M \longrightarrow V_1' \subset \mathbb{R}^{m}, & m &= \dim M, \\ & U_1 \subset U_1', & V_1' &= V_1 \times (-\delta_1, \delta_1)^{m-n_1}, \quad \delta > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \vec{z} &: U_2 \subset N_2 \longrightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}, & n_2 &= \dim N_2, \\ \vec{w} &: U_2' \subset M \longrightarrow V_2' \subset \mathbb{R}^{m}, & & \\ & U_2 \subset U_2', & V_2' &= V_2 \times (-\delta_2, \delta_2)^{m-n_1}, \quad \delta > 0 \end{aligned}$$

cartas locais em p tais que

$$\vec{y}|_{U_1 \to \vec{y}(U_1)} = (x_1, \ldots, x_{n_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n_1}) \text{ e}$$
$$\vec{w}|_{U_2 \to \vec{w}(U_2)} = (z_1, \ldots, z_{n_2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n_2}).$$

A intersecção $\Omega' = U_1' \cap U_2'$ contém $\Omega = U_1 \cap U_2$. Como a topologia de N_1 é mais fina que a de N_2, Ω é aberto em N_1. Seja $\Psi : \vec{y}(\Omega') \to \vec{w}(\Omega')$ a mudança de carta de $\vec{y}$ para $\vec{w}$. A função I_{12} se expressa, em função das cartas $\vec{x}$ e $\vec{z}$, como:

$$\vec{z}(I_{12}(\vec{x}^{-1}(t_1,\ldots,t_{n_1}))) = (\Psi_1,\ldots,\Psi_{n_2})(t_1,\ldots,t_{n_1},\underbrace{0,\ldots,0}_{m-n_1}),$$

definida no aberto $\vec{x}(\Omega)$. Isto faz de I_{12} uma função suave em p. Como p é arbitrário, I_{12} é suave.

Em segundo lugar, vamos calcular o posto de I_{12}. Seja A a matriz jacobiana $m \times m$ de Ψ em $p \in \Omega$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial y_1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial y_m}\Big|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial y_1}\Big|_p & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial y_m}\Big|_p \end{pmatrix} \quad \text{(jacobiana da mudança de coordenadas).}$$

Como as coordenadas $w_j, j > n_2$ são nulas em Ω, e os vetores tangentes $\partial_{y_k}|_p$, com $1 \le k \le n_1$ podem ser escritos como derivada de uma curva contida em Ω, temos:

$$\frac{\partial w_j}{\partial y_k}\Big|_p = 0, \quad \forall j,k \text{ tais que } n_2 < j \le m \text{ e } 1 \le k \le n_1.$$

Assim, A terá a seguinte forma em blocos: $\left(\begin{array}{c|c} (A_1)_{n_2\times n_1} & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right)$. Note que a submatriz A_1 é a matriz jacobiana de I_{12} em p, nas coordenadas locais $\vec{x}$ e $\vec{z}$.

O posto de A é m, pois A é a matriz jacobiana de um difeomorfismo. Usando-se o fato de que o posto de uma matriz é igual ao número de colunas linearmente independentes, concluímos que o posto de A_1 é igual a n_1. Como p é arbitrário, o posto de I_{12} é sempre igual a n_1 e, portanto, I_{12} é uma imersão, o que prova a proposição. □

Corolário 1.48. *Se duas subvariedades N_1, N_2 de M têm o mesmo conjunto de pontos e a mesma topologia, então elas são iguais.*

Demonstração. Temos que N_1 é subvariedade de N_2 e N_2 é subvariedade de N_1. Isto significa que $\dim N_2 = \dim N_1$ e, ainda, que a identidade entre N_1 e N_2 é um difeomorfismo. Logo, $N_1 = N_2$. □

Corolário 1.49 (Mesma dimensão e topologias comparáveis)**.** *Se duas subvariedades N_1 e N_2 de M têm o mesmo conjunto de pontos, a mesma dimensão e suas topologias são comparáveis, então $N_1 = N_2$*

Demonstração. Suponha que a topologia de N_1 é mais fina que a topologia de N_2. Então N_1 é uma subvariedade de dimensão maximal de N_2. Pela proposição 1.45, N_1 é a subvariedade aberta de N_2 com o mesmo conjunto de pontos de N_2, ou seja: é a própria N_2.

Se a topologia de N_2 é mais fina, procede-se analogamente □

Subvariedades mergulhadas

Definição 1.50. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ cuja topologia coincide com a topologia do subespaço herdada de M é chamada de *subvariedade mergulhada.*

Exemplo 1.51. Uma subvariedade aberta é subvariedade mergulhada.

Observação 1.52. Pela proposição 1.48, a estrutura diferenciável de uma subvariedade mergulhada é unicamente definida. Em outras palavras, duas subvariedades mergulhadas com o mesmo conjunto de pontos sempre serão iguais.

1.5.2 União de subvariedades imersas

Proposição 1.53. *Seja $C = \{N_j\}_{j \in J}$ uma família indexada de subvariedades imersas de M. Suponha que:*

(i) As subvariedades têm todas a mesma dimensão, n.

(ii) A intersecção de duas subvariedades quaisquer N_{j_1} e N_{j_2} é aberta, tanto em relação à topologia de N_{j_1} quanto em relação à topologia de N_{j_2}.

(iii) As topologias das subvariedades são compatíveis, isto é, dados $j_1, j_2 \in J$, e denotando $\Omega := N_{j_1} \cap N_{j_2}$, as restrições das topologias de N_{j_1} e N_{j_2} a Ω são iguais.

Então $N := \bigcup_{j \in J} N_j$ é uma subvariedade imersa de M, com a topologia gerada pela união das topologias das N_j e a estrutura diferenciável gerada pela união das estruturas diferenciáveis das N_j. Se $p \in N_{j_0}$ para algum $j_0 \in J$, o espaço tangente de N em p é dado por $\mathrm{T}_p N = \mathrm{T}_p N_{j_0}$.

Demonstração. Para mostrar que a união é uma variedade, basta mostrar que as estruturas diferenciáveis das partes $N_j \in C$ são compatíveis. Isto é consequência da proposição 1.48 — que subvariedades imersas com a mesma topologia são iguais.

Para mostrar que a união é uma subvariedade imersa, usamos o mesmo argumento que foi usado na proposição 1.43. □

Observação 1.54. Toda subvariedade imersa pode ser decomposta em abertos que são subvariedades mergulhadas: de fato, seja N uma n-subvariedade imersa da m-variedade M. Dado $p \in N$, o teorema da imersão nos dá cartas

$$\vec{x} : U \subset N \to V \subset \mathbb{R}^n \quad \text{de } N \text{ e}$$
$$\vec{y} : U' \subset M \to V' \subset \mathbb{R}^m \quad \text{de } M,$$

com $p \in U$, tais que $U \subset U'$, $V' = V \times (-\delta, \delta)^{m-n}$ e

$$\vec{y}|_{U \to \vec{y}(U)} = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}).$$

Se considerarmos U como subvariedade aberta de N, veremos que U é uma subvariedade mergulhada de M: pois, dado um aberto $\mathcal{O} \subset U$,

$$\mathcal{O} = \vec{y}^{-1}(\vec{x}(\mathcal{O}) \times \{0\}^{m-n}) = U \cap \underbrace{\vec{y}^{-1}(\vec{x}(\mathcal{O}) \times (-\delta, \delta)^{m-n})}_{\text{aberto em M}}.$$

Ou seja, a topologia da variedade U é menos fina do que a topologia do subespaço que U herda de M. Por se tratar de uma subvariedade imersa, isto implica que as topologias são iguais.

Variando p, obtemos subvariedades abertas U_p de N, todas de dimensão n e com topologias compatíveis (pois são subvariedades abertas de N) que são subvariedades mergulhadas de M e cobrem N.

1.5.3 Restrição de campo vetorial a subvariedade

Definição 1.55. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial real na variedade M e $N \subset M$ uma subvariedade imersa de M. Dizemos que X é *tangente* a N se $X|_p \in \mathrm{T}_p N, \quad \forall p \in N$.

Proposição 1.56 (Restrição de campo escalar à subvariedade)**.** *Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ e N subvariedade de M. Então $f|_N \in \mathcal{C}^\infty(N)$.*

Demonstração. A continuidade de $f|_N$ segue do fato de a topologia de N ser mais fina do que a topologia do subespaço herdada de M. Dado $p \in N$, mostremos que $f|_N$ é suave em p.

Sejam $\vec{x} : U \subset N \to V \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} : U' \subset M \to V' \subset \mathbb{R}^m$ cartas locais de N e M, respectivamente, tais que

$$\begin{array}{ll} p \in U, & V' = V \times (-\delta, \delta)^{m-n}, \\ U \subset U', & \vec{y}(U) = V \times \{0\}^{m-n} \end{array}$$

e

$$\vec{y}(q) = (x_1, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n})(q), \quad \forall q \in N.$$

Então

$$(f|_N)|_U \circ \vec{x}^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = f(\vec{y}^{-1}(t_1, \ldots, t_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n})), \quad \forall (t_1, \ldots, t_n) \in V.$$

Assim, como $f|_{U'} \circ \vec{y}^{-1}$ é suave, $f|_N$ é suave em p. □

Proposição 1.57 (Restrição de campo vetorial à subvariedade)**.** *Seja X um campo vetorial real definido na variedade suave M e tangente à subvariedade $N \subset M$. Existe um único campo $X|_N \in \mathfrak{X}(N)$ tal que, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,*

$$X|_N(f|_N) = (Xf)|_N,$$

e ele é definido por $(X|_N)|_p = X|_p, \quad \forall p \in N$.

Demonstração. Quando a subvariedade N é uma subvariedade aberta, basta usar a proposição 1.9. Façamos o caso geral.

Existência: Seja $i : N \to M$ a inclusão. Definiremos $X|_N$ como o campo vetorial que satisfaz $(X|_N)|_p = (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p)$. Para que este campo exista basta mostrar que, $\forall g \in \mathcal{C}^\infty(N)$, a função $q \mapsto (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_q)[g|_q]$ é suave. Fixado $p \in N$, mostremos que esta função é suave em p.

Sejam $\vec{x} : U \subset N \to V \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} : U' \subset M \to V' \subset \mathbb{R}^m$ cartas locais de N e M, respectivamente, tais que

$$\begin{array}{ll} p \in U, & V' = V \times (-\delta, \delta)^{m-n}, \\ U \subset U', & \vec{y}(U) = V \times \{0\}^{m-n} \end{array}$$

e

$$\vec{y}(q) = (x_1, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-n})(q), \quad \forall q \in N.$$

Então

$$\mathrm{d}i\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p \right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p, \quad \forall p \in U, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

O campo X se escreve localmente como

$$X|_{U'} = \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

com $a_j \in \mathcal{C}^\infty(U')$ funções reais. Como X é tangente a N, $a_j(p) = 0, \quad \forall p \in U, \quad \forall j : n < j \leq m$.

Assim,

$$(\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p) = (\mathrm{d}i)^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j(p) \frac{\partial}{\partial y_j}\bigg|_p\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p, \quad \forall p \in U.$$

$$\therefore (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p)\Big[g|_p\Big] = \sum_{j=1}^{n} a_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \Big[g|_p\Big], \quad \forall p \in U.$$

Portanto a função $q \mapsto (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p)[g|_q]$ é igual, quando restrita a U, a $\sum_{j=1}^{n}(a_j|_U)\partial g/\partial x_j$. Isto demonstra a suavidade e fica definido o campo $X|_N$, com a seguinte fórmula em coordenadas locais:

$$(X|_N)|_U = \sum_{j=1}^{n} a_j|_N \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Seja $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Mostremos que $(X|_N)(f|_N) = (Xf)|_N$. Dado $p \in N$, sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ cartas locais de N e M definidas em U e U' como foi feito acima, e escreva $X|_{U'} = \sum_{j=1}^{m} a_j \partial_{y_j}$, também como antes.

$$\begin{aligned} Xf(p) = \sum_{j=1}^{m} a_j(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}\bigg|_p = \sum_{j=1}^{n} a_j(p) \frac{\partial f}{\partial y_j}\bigg|_p &= \sum_{j=1}^{n} a_j(p) \frac{\partial (f|_N)}{\partial x_j}\bigg|_p \\ &= X|_N(f|_N)(p). \end{aligned}$$

Unicidade: Seja $Y \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M) : (Xf)|_N = Y(f|_N)$. Mostremos que $Y = X|_N$. Isto é, mostremos que $\forall p \in N : Y|_p = (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}i(Y|_p)[f|_p] &= Y|_p\Big[(f \circ i)|_p\Big] = Y|_p\Big[(f|_N)|_p\Big] = Y(f|_N)(p) = (Xf)|_N(p) \\ &= Xf(p) = X|_p[f|_p], \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M). \end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{d}i(Y|_p) = X|_p \quad \therefore Y|_p = (\mathrm{d}i)^{-1}(X|_p).$ □

1.5.4 Imagem de subvariedade por difeomorfismo

Proposição 1.58. *Seja* $M' \subset M$ *uma subvariedade imersa de* M *e* $F : M \to N$ *um difeomorfismo. Então* $F(M')$ *é uma subvariedade imersa de* N, $F|_{M' \to F(M')}$ *é difeomorfismo entre* M' *e* $F(M')$ *e, para cada* $p \in M'$, *o espaço tangente de* $F(M')$ *é dado por* $\mathrm{T}_{F(p)} F(M') = \mathrm{d}F(\mathrm{T}_p M')$.

Demonstração. Considere a restrição $F|_{M'}$. $F|_{M'} = F \circ i$, onde i é a inclusão de M' em M. Assim, $F|_{M'}$ será suave e uma imersão (por ser composição de imersões). O resultado segue da proposição 1.38 (imagem de imersão injetiva é subvariedade) e da regra da cadeia (para calcular o diferencial de $F \circ i$). $\square$

Capítulo 2

Órbitas de Sussmann

2.1 Curvas integrais e fluxo

2.1.1 Curvas integrais

Definição 2.1. Sejam M uma variedade suave e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial real em M.

(i) Uma curva $\alpha : (a, b) \to M$, com $a, b \in [-\infty, \infty]$, $a < b$ é chamada de *curva integral* do campo X quando $\alpha'(t) = X|_{\alpha(t)}, \forall t \in (a, b)$.

(ii) Quando $0 \in (a, b)$ e $p = \alpha(0)$, dizemos que a curva α está *centrada em* p.

(iii) Dizemos que a curva integral α é *maximal* quando não existir nenhuma outra curva integral $\beta : (c, d) \to M$ que seja extensão de α, isto é, que tenha $(a, b) \subsetneq (c, d)$ e $\beta|_{(a,b)} = \alpha$.

Observação 2.2. Estamos pedindo na definição que o campo vetorial seja real: pois a derivada de uma curva em uma variedade, $\alpha'(t)$, é sempre um vetor tangente real.

Proposição 2.3 (Existência e Unicidade das Curvas Integrais)**.** *Sejam M variedade suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo real, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p \in M$. Então existe $\delta > 0$ tal que:*

(i) $\forall T \in (0, \delta)$, existe uma única curva integral $\alpha : (t_0 - T, t_0 + T) \to M$ de X com $\alpha(t_0) = p$.

(ii) Existe uma vizinhança aberta V de p tal que, para cada $p' \in V$, $\forall T \in (0, \delta)$, existe uma única curva integral $\alpha : (t_0 - T, t_0 + T) \to M$ de X com $\alpha(t_0) = p'$.

Demonstração. Isto é uma aplicação do Teorema de Picard. □

Corolário 2.4. *Sejam M uma variedade suave e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$, existe uma única curva integral maximal de X centrada em p.*

Observação 2.5. Isto implica que uma curva integral não pode ter pontos críticos, a menos que ela seja constante.

Proposição 2.6 (Curva integral na subvariedade)**.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial em M e N uma subvariedade imersa de M, com X tangente a N. Seja $\alpha : (a,b) \to N$ uma curva integral de $X|_N$. Então a inclusão de α em M é uma curva integral de X.*

Demonstração. $(i \circ \alpha)'(t) = \mathrm{d}i(\alpha'(t)) = X|_{\alpha(t)}$. □

Exemplo 2.7. Em geral, a reparametrização de uma curva integral não é curva integral. Procuremos condições para que isto ocorra. Seja $\phi : (a,b) \to (c,d)$ um difeomorfismo entre intervalos e $\alpha : (a,b) \to M$ curva integral do campo X. Então

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \phi)'(t)\big[f|_{\alpha(t)}\big] &= (f \circ \alpha \circ \phi)'(t) = ((f \circ \alpha) \circ \phi)'(t)\\ &= \phi'(t)(f \circ \alpha)'(\phi(t)) = \phi'(t)\alpha'(t)\big[f|_{\alpha(t)}\big]\\ &\therefore (\alpha \circ \phi)'(t) = \phi'(t)\alpha'(\phi(t)) = \phi'(t)X|_{\alpha\circ\phi(t)}.\end{aligned}$$

Assim, a reparametrização $\alpha \circ \phi$ só é uma curva integral de X quando ϕ é uma translação:

$$\begin{array}{rccc}\phi : & (a,b) & \longrightarrow & (a+t_0, b+t_0)\\ & t & \longmapsto & t+t_0\end{array}$$

Exemplo 2.8. Seja $M = \mathbb{R}^2$ com a estrutura diferenciável gerada pela carta global $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = (x,y)$. Seja $X = \partial_x$.

Dado $p = (x_0, y_0)$, a curva integral maximal de X centrada em p é $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) := (x_0 + t, y_0)$.

De fato, pois

$$\alpha'(t) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x_0+t,y_0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\alpha(t)}$$

e o domínio de α já é a reta inteira, não admitindo extensões.

Exemplo 2.9. Nem sempre a curva integral maximal pode ter como domínio a reta real inteira. Seja $M = (a,b)$, com $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{Id}\,|_{(a,b)} = x$ carta global e $X = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$. Seja $p = x_0 \in (a,b)$. Neste caso, a curva integral maximal centrada em p será dada por $\alpha : (a - x_0, b - x_0) \to M$, com $\alpha(t) = x_0 + t$.

Exemplo 2.10. $M = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $(x, y) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}}$ carta global.

Considere os campos

$$\frac{\partial}{\partial \theta} := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{ e } \quad \frac{\partial}{\partial r} := \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{r} \frac{\partial}{\partial y}$$

onde a função $r \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é definida por $r := \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dado o ponto $p = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \operatorname{sen} \theta_0)$, as curvas integrais maximais de $\partial / \partial \theta$ e de $\partial / \partial r$ são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \alpha : \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow M \\ t \ &\longmapsto (r_0 \cos(\theta_0 + t), r_0 \operatorname{sen}(\theta_0 + t)) \end{aligned}$$

(rotação de p_0 em torno da origem com velocidade angular 1), e

$$\begin{aligned} \beta : \ (-r_0, \infty) \ &\longrightarrow M \\ t \ &\longmapsto ((r_0 + t) \cos \theta_0, (r_0 + t) \operatorname{sen} \theta_0) \end{aligned}$$

(movimento linear de p_0 na direção radial, com velocidade 1).

2.1.2 Fluxo

Definição 2.11. Seja M uma variedade suave e $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial real em M. Dado $p \in M$, seja $\alpha_p : (a_p, b_p) \to M$ a curva integral maximal de X centrada em p. Para cada $t \in (a_p, b_p)$, denotaremos por $X_t(p)$ o ponto $\alpha_p(t)$. A aplicação $(p, t) \mapsto X_t(p)$ será chamada de *fluxo* do campo X.

Proposição 2.12 (Suavidade do Fluxo)**.** *O fluxo de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação suave, definida em um subconjunto aberto de $M \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. Ver Sotomayor [7], capítulo VI, para uma prova em $\mathbb{R}^n$. $\square$

Proposição 2.13 (Propriedade de Grupo)**.** *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M), t, s \in \mathbb{R}$ e $p \in M$. Se $X_t(X_s(p))$ for definido, $X_{t+s}(p)$ também é definido e $X_t(X_s(p)) = X_{t+s}(p)$.*

Demonstração. Seja $\alpha : (a, b) \to M := r \mapsto X_r(p)$ a curva integral maximal de X centrada em p e seja $\beta : (c, d) \to M := r \mapsto X_r(X_s(p))$ a curva integral maximal de X centrada em $X_s(p)$. Por hipótese, $s \in (a, b)$ e $t \in (c, d)$.

Seja $\alpha_s : (a - s, b - s) \to M$ a curva α transladada:

$$\alpha_s(r) = \alpha(r + s).$$

Sabemos (exemplo 2.7) que a translação de uma curva integral também é uma curva integral. É fácil ver que a translação de uma curva integral maximal é outra curva integral maximal. Assim, α_s é uma curva integral maximal de X. Como $\alpha_s(0) = \alpha(s) = X_s(p)$, temos que $\alpha_s = \beta$ e portanto $(c, d) = (a - s, b - s)$.

Assim, $t \in (a - s, b - s)$ e $\alpha_s(t) = X_{s+t}(p) = \beta(t) = X_t(X_s(p))$.

□

Exemplo 2.14. $X = \partial_x$ em $\mathbb{R}^2$, com $\mathrm{Id}|_{\mathbb{R}^2} = (x, y)$. Então, para cada $p \in \mathbb{R}^2$, e para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$X_t(p) = \big(x(p) + t, y(p)\big).$$

Exemplo 2.15. $M = (a, b) \subset \mathbb{R}$, com a estrutura diferenciável induzida pela carta global $x = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$; $X = \mathrm{d}\,/\,\mathrm{d}x$. Então, dado $p \in \mathbb{R}$,

$$X_t(p) = p + t, \text{ desde que } p + t \in (a, b).$$

Neste caso, o domínio do fluxo é $\big\{(p, t) \in \mathbb{R}^2 | p \in (a, b) \text{ e } p + t \in (a, b)\big\}$.

Exemplo 2.16. $M = \mathbb{R}^2$,

$$X = \frac{\partial}{\partial \theta} := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Então

$$X_t(p) = \big(x(p)\cos t - y(p)\,\mathrm{sen}\,t, x(p)\,\mathrm{sen}\,t + y(p)\cos t\big),$$

definido para todo t.

2.2 Difeomorfismos locais

2.2.1 Definição e operações

Definição 2.17. (i) Um *difeomorfismo local* na variedade suave M é um difeomorfismo entre dois abertos de M. A aplicação vazia, cujos domínio e contra-domínio são o subconjunto vazio de M, é considerada também como um difeomorfismo local.

(ii) Dados dois difeomorfismos locais $\phi : U \subset M \mapsto V \subset M$ e $\psi : U' \subset M \mapsto V' \subset M$, definimos o seu produto como sendo o seguinte difeomorfismo local, potencialmente vazio:

$$\begin{array}{rccc} \phi\psi: & \psi^{-1}(V' \cap U) & \longrightarrow & \phi(V' \cap U) \\ & p & \longmapsto & \phi(\psi(p)) \end{array}$$

(iii) Definimos o inverso de um difeomorfismo local (notação ϕ^{-1}) como sendo a sua função inversa.

Propriedades das operações

Proposição 2.18. *(i) O produto de difeomorfismos locais é associativo.*

(ii) Dados ϕ_1, ϕ_2 difeomorfismos locais, $(\phi_1\phi_2)^{-1} = \phi_2^{-1}\phi_1^{-1}$.

Demonstração. Associatividade do produto: Sejam

$$\phi_1 : U_1 \to V_1, \quad \phi_2 : U_2 \to V_2 \quad \text{e} \quad \phi_3 : U_3 \to V_3.$$

Mostremos que o produto de difeomorfismos locais é associativo. Isto é, que

$$\phi_1(\phi_2\phi_3) = (\phi_1\phi_2)\phi_3.$$

Para isto, precisamos identificar o domínio e o contra-domínio destas aplicações.

$$\begin{array}{rrcl}
\phi_2\phi_3 : & \phi_3^{-1}(V_3 \cap U_2) & \longrightarrow & \phi_2(V_3 \cap U_2) \\
& p & \longmapsto & \phi_2(\phi_3(p)) \\
\phi_1(\phi_2\phi_3) : & (\phi_2\phi_3)^{-1}(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1) & \longrightarrow & \phi_1(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1) \\
& p & \longmapsto & \phi_1(\phi_2(\phi_3(p))) \\
\phi_1\phi_2 : & \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2) & \longrightarrow & \phi_1(U_1 \cap V_2) \\
& p & \longmapsto & \phi_1(\phi_2(p)) \\
(\phi_1\phi_2)\phi_3 : & \phi_3^{-1}(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)) & \longrightarrow & \phi_1\phi_2(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)) \\
& p & \longmapsto & \phi_1(\phi_2(\phi_3(p)))
\end{array}.$$

Assim, temos que mostrar as seguintes igualdades de conjuntos:

$$\phi_3^{-1}(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)) = (\phi_2\phi_3)^{-1}(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1) \text{ e} \tag{2.19}$$
$$\phi_1\phi_2(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)) = \phi_1(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1). \tag{2.20}$$

Demonstração de (2.19):

$$\begin{aligned}
&(\phi_2\phi_3)^{-1}(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1) \\
&\quad = \left\{p \in \phi_3^{-1}(V_3 \cap U_2) \,\middle|\, \phi_2(\phi_3(p)) \in \phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1\right\} \\
&\quad = \left\{p \in \phi_3^{-1}(V_3 \cap U_2) \,\middle|\, \phi_3(p) \in (V_3 \cap U_2) \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)\right\} \\
&\quad = \left\{p \in U_3 \,\middle|\, \phi_3(p) \in (V_3 \cap U_2) \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)\right\} \\
&\quad = \phi_3^{-1}(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)).
\end{aligned}$$

Demonstração de (2.20):

$$\begin{aligned}\phi_1\phi_2(V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)) &= \Big\{\phi_1(\phi_2(p)) \,\Big|\, p \in V_3 \cap \phi_2^{-1}(U_1 \cap V_2)\Big\}\\ &= \Big\{\phi_1(q) \,\Big|\, q \in \phi_2(V_3 \cap U_2) \cap (U_1 \cap V_2)\Big\}\\ &= \Big\{\phi_1(q) \,\Big|\, q \in \phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1\Big\} = \phi_1(\phi_2(V_3 \cap U_2) \cap U_1).\end{aligned}$$

Inversão do produto:

$$\begin{array}{rccc}(\phi_1\phi_2)^{-1}: & \phi_1(V_2 \cap U_1) & \longrightarrow & \phi_2^{-1}(V_2 \cap U_1)\\ & p & \longmapsto & \phi_2^{-1}(\phi_1^{-1}(p))\\ \phi_2^{-1}\phi_1^{-1}: & (\phi_1^{-1})^{-1}(U_1 \cap V_2) & \longrightarrow & \phi_2^{-1}(V_2 \cap U_1)\\ & p & \longmapsto & \phi_2^{-1}(\phi_1^{-1}(p)).\end{array}$$

Como $(\phi_1^{-1})^{-1} = \phi_1$, $(\phi_1\phi_2)^{-1} = \phi_2^{-1}\phi_1^{-1}$. □

2.2.2 As aplicações X_t

Definição 2.21. Dado um $t \in \mathbb{R}$ fixo, seja Ω_t o conjunto de todos os pontos $p \in M$ tais que $X_t(p)$ é definido. Ω_t é aberto (pois o domínio do fluxo é aberto, pela proposição 2.12) assim definimos a aplição:

$$\begin{array}{rcl}X_t: \ \Omega_t & \longrightarrow & X_t(\Omega_t) \subset M\\ p & \longmapsto & X_t(p)\end{array}$$

Observação 2.22. X_t é um difeomorfismo local: X_t tem como função inversa X_{-t}. Ambas sao suaves, em virtude da proposição 2.12. Assim, X_t é um difeomorfismo entre os abertos de Ω_t e Ω_{-t} de M.

2.2.3 Grupos de difeomorfismos locais

Definição 2.23. Um *grupo de difeomorfismos locais* na variedade suave M é um conjunto de difeomorfismos locais que é fechado nas operações produto e inversão.

Observação 2.24. Um grupo de difeomorfismos locais pode não ser um grupo no sentido algébrico do termo. Por exemplo, seja G o conjunto de todos os difeomorfismos locais de M. G é um grupo de difeomorfismos locais. O elemento neutro de G, se G fosse um grupo no sentido algébrico, seria a identidade $\mathrm{Id} : M \to M$.

Se $\phi : U \to V$ é um difeomorfismo local, $\phi\phi^{-1} = \mathrm{Id}|_U$, a restrição de Id ao aberto U, que só coincide com Id quando $U = M$.

Exemplo 2.25. Dado um campo real $X \in \mathfrak{X}(M)$, suponha que as curvas integrais maximais de X tenham como domínio toda a reta real. Então as aplicações X_t são definidas em toda a variedade M para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere o conjunto $G = \{X_t | t \in \mathbb{R}\}$. Sejam X_t e X_s elementos de G. Pela proposição 2.13, $X_t X_s = X_{t+s}$ e $X_t^{-1} = X_{-t}$. Assim, G é um grupo de difeomorfismos locais — e também, neste caso, um grupo no sentido algébrico do termo.

2.3 Famílias de campos vetoriais e órbitas

2.3.1 Famílias de campos vetoriais

Definição 2.26. (i) Uma *família de campos vetoriais* D em M é um conjunto de campos vetoriais (reais) definidos em abertos da variedade M.

(ii) Diremos que a família de campos vetoriais D é *definida em todo lugar* quando, para todo ponto $p \in M$, p está no domínio de algum dos campos vetoriais de D.

Seja D uma família de campos vetoriais em M.

Definição 2.27. O *grupo gerado por* D, G_D, é o menor grupo de difeomorfismos locais que contém todas as aplicações da forma X_t, com $X \in D$ e $t \in \mathbb{R}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ um número natural, $\xi = (X^1, X^2, \ldots, X^n) \in D^n$ uma n-upla de campos vetoriais da família D, $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos por ξ_T o difeomorfismo local $X^1_{t_1} X^2_{t_2} \cdots X^n_{t_n}$.

Proposição 2.28. $G_D = C$, *onde*

$$C = \{\xi_T \,|\, \xi \in D^n, T \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

Demonstração. Afirmação: $C \subset G_D$.

De fato, dado $\xi_T := X^1_{t_1} \cdots X^n_{t_N} \in C$, ξ_T é formado usando-se apenas a operação de composição a partir dos elementos $X^1_{t_1}, \ldots, X^n_{t_n}$ e portanto está em todos os grupos que os contém. Em particular, $\xi_T \in G_D$.

Afirmação: C é um grupo de difeomorfismos locais.

De fato: dados

$$\xi_T := X^1_{t_1} \cdots X^n_{t_n} \text{ e } \eta_S := Y^1_{s_1} \cdots Y^m_{s_m} \in C \ ,$$

temos

$$\xi_T \eta_S = X^1_{t_1} \cdots X^n_{t_n} Y^1_{s_1} \cdots Y^n_{s_m} \overset{\text{notação}}{=} (\xi\eta)_{TS} \in C$$

e

$$(\xi_T)^{-1} = X^n_{-t_n} \cdots X^1_{-t_1} \overset{\text{notação}}{=} \hat{\xi}_{-\hat{T}} \in C$$

Portanto, $C = G_D$. □

Exemplo 2.29. $M = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 = (x, y, z)$, $D = \{X, Y\}$, com $X = \partial_x$ e $Y = \partial_y$.

$$X_t, Y_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad X_t = (x + t, y, z) \qquad Y_t = (x, y + t, z)$$

Neste caso $G_D = \{X_{t_1} Y_{t_2} \big| t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$

Para verificar este exemplo, basta mostrar que o conjunto acima é um grupo, o que é consequência de as aplicações da forma X_{t_1} e Y_{t_2} comutarem.

2.3.2 Definição das D-órbitas

Definição 2.30. Seja D uma família de campos vetoriais definida em todo lugar. Dizemos que $p \sim q$ se $\exists \phi \in G_D : \phi(p) = q$. A relação $\sim$ é de equivalência. As *órbitas* da família D ou D-*órbitas* são as classes de equivalência de $\sim$.

Observação 2.31. Mostremos que $\sim$, como definida acima, é mesmo uma relação de equivalência.

$p \sim p$: Como D é definido em todo lugar, existe $X \in D$, $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$ com $p \in \Omega \subset M$. A aplicação X_0 é a identidade em Ω, então $p = X_0(p)$.

$p \sim q \Rightarrow q \sim p$: Seja $\phi \in G_D$ tal que $\phi(p) = q$. Então $\phi^{-1}(q) = p$ e $\phi^{-1} \in G_D$.

$p \sim q$ e $q \sim r \Rightarrow p \sim r$: Sejam $\phi, \psi \in G_D$ tais que $\phi(p) = q$ e $\psi(q) = r$. Então $\psi\phi(p) = r$, e $\psi\phi \in G_D$.

2.3.3 Definição por curvas integrais por partes

Definição 2.32. Seja D uma família de campos vetoriais definida em todo lugar na variedade M. Uma *curva integral por partes de* D é um caminho contínuo $\alpha : [a, b] \to M$ tal que existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$ e existem campos vetoriais $X^1, \ldots, X^n \in D$ tais que $\alpha|_{(t_{j-1}, t_j)}$ é curva integral de X^j ou de $-X^j$ para todo $j \in 1, 2, \ldots, n$.

Proposição 2.33. *Seja $\approx$ a relação, nos pontos de M, definida pela regra: $p \approx q \Leftrightarrow \exists \alpha : [a, b] \to M$, curva integral por partes de D, tal que $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.*

Então $\approx$ é uma relação de equivalência que coincide com $\sim$, da definição 2.30.

Demonstração. $p \approx q \Rightarrow q \approx p$: Pois o caminho inverso de uma curva integral por partes de D ainda é uma curva integral por partes de D.

$p \approx q$ e $q \approx r \Rightarrow p \approx r$: Pois a concatenação de duas curvas integrais por partes ainda é uma curva integral por partes.

$p \approx p$: como D é definida em todo lugar, há um campo $X \in D$ que é definido em um aberto contendo p. Usando a curva integral de X centrada em p, podemos encontrar $q \in M$ (potencialmente igual) tal que $p \approx q$. Como $p \approx q$ e $q \approx p$, temos $p \approx p$.

Assim, $\approx$ é uma relação de equivalência.

Se $q = X_t(p)$, $X \in D$, $t \in \mathbb{R}$, então podemos ligar p e q por um segmento de curva integral, e portanto $q \approx p$. Mais geralmente, se $q = \xi_T(p)$, com $\xi_T = (X^1)_{t_1} \cdots (X^n)_{t_n}$, então podemos fazer indução em n e usar a transitividade de $\approx$ para concluir que $p \approx q$. Assim, $p \approx q$ sempre que $p \sim q$.

Por outro lado, suponha que p e q se ligam por uma curva integral por partes de um só segmento, isto é, existe $\alpha : [a,b] \to M$ tal que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$ e $\alpha|_{(a,b)}$ é curva integral de algum campo $X \in D$ (se $\alpha|_{(a,b)}$ for curva integral de $-X$, podemos trocar p e q sem perda de generalidade). Ainda, podemos supor que $a = 0$.

Como existem os limites laterais de $\alpha|_{(0,b)}$, podemos estendê-la pelos dois lados (isto é consequência da proposição 2.4). A extensão maximal de $\alpha|_{(0,b)}$ coincide com $X_t(p)$, e passa por q. Portanto, $p \sim q$. Por indução, e novamente usando a transitividade da relação $\approx$, se p se liga a q por uma curva integral por partes de n segmentos, $p \sim q$.

Assim, são equivalentes: $p \approx q$ e $p \sim q$. □

Corolário 2.34. *As D-órbitas coincidem com as classes de equivalência de $\approx$. Assim, podemos usar a relação "estão ligados por uma curva integral por partes" nos pontos de M como uma maneira alternativa de definir as D-órbitas.*

Exemplo 2.35. (i) $M = \mathbb{R}^3$, $D = \{\partial_x, \partial_y\}$. Então as D-órbitas serão os planos horizontais.

(ii) $M = \mathbb{R}^3$, $D = \{\partial_z, \partial_\theta\}$, onde $\partial_\theta := -y\partial_x + x\partial_y$. Neste caso, as D-órbitas são os cilindros (de base circular) em torno do eixo z e o próprio eixo z.

(iii) $M = \mathbb{R}^3$, $D = \{X^1, X^2\}$, com

$$X^1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ e } X^2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Então a única órbita é $\mathbb{R}^3$.

O primeiro e o segundo caso são fáceis de se ver, usando-se que as curvas integrais dos campos em questão são retas e círculos. Para o terceiro exemplo, dado $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, as seguintes ligações podem ser feitas por curvas integrais dos campos indicados:

$$(x_0, y_0, z_0) \overset{X^1}{\approx} (0, y_0, z_0) \overset{X^2}{\approx} (0, z_0, z_0) \overset{X^1}{\approx} (1, z_0, z_0) \overset{X^2}{\approx} (1, 0, 0).$$

2.3.4 As aplicações $\rho_{\xi,p}$

Definição 2.36. Para cada n-upla $\xi \in D^n$, e para cada $p \in M$, seja $\Omega_{\xi,p}$ o conjunto de todos os $T \in \mathbb{R}^n$ tais que $\xi_T(p)$ é definido. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in D^n$, definimos a aplicação:

$$\begin{array}{rccl} \rho_{\xi,p}: & \Omega_{\xi,p} \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & M \\ & T & \longmapsto & \xi_T(p). \end{array}$$

Proposição 2.37. *O conjunto $\Omega_{\xi,p}$ da definição acima é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja $\xi = (X^1, \ldots, X^n)$. Façamos uma indução finita em n:

Se $n = 1$: então $\Omega_{\xi,p}$ é o domínio da curva integral maximal centrada em p, que é aberto.

Se $n > 1$, e supondo que o teorema vale para $n-1$: Seja $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega_{\xi,p}$.

$$\xi_T(p) = X^1_{t_1}(\eta_S(p))$$

onde $\eta = (X^2, \ldots, X^n)$ e $S = (t_2, \ldots, t_n)$

Por indução, existe uma vizinhança (aberta) $V' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de S tal que $\eta_R(p)$ é definido para todo $R \in V'$. Pela continuidade do fluxo, se W é uma vizinhança de $\eta_S(p)$, podemos restringir V' de forma que $\eta_R(p) \in W, \forall R \in V'$. Por 2.3, podemos escolher a vizinhança W de tal forma que as curvas integrais centradas em $p' = \eta_R(p) \in W$, dadas por $X^1_{t_1}(\eta_R(p))$ na variável t_1, são definidas para todo $t_1 \in (-r, r)$, onde $r > 0$ pode ser escolhido uniformemente. Assim, o aberto $(-r, r) \times V'$ está contido em $\Omega_{\xi,p}$, e é vizinhança de T. □

Proposição 2.38. *As aplicações $\rho_{\xi,p}$ são suaves.*

Demonstração. Isto é consequência da suavidade do fluxo. Dado $\xi \in D^n$, façamos indução em n. Se $n = 1$, $\xi = (X)$ e portanto $\rho_{\xi,p}(t) = X_t(p) = \Phi(p, t)$, onde Φ é o fluxo de X, que sabemos ser suave.

Se $n > 1$, e usando a hipótese de indução, escrevamos $\xi = (X)\eta$, onde $X \in D, \eta \in D^{n-1}$. $\rho_{\xi,p}(t_1, \ldots, t_n) = \Phi(\rho_{\eta,p}(t_2, \ldots, t_n), t_1)$, onde Φ é o fluxo de X. Como $\rho_{\eta,p}$ e Φ são ambas suaves, $\rho_{\xi,p}$ é suave. □

Observação 2.39. Sejam p um ponto da variedade suave M e D uma família definida em todo lugar de campos vetoriais em M. A D-órbita do ponto p é dada pelo conjunto:

$$S_p := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\xi_T(p) \middle| \xi \in D^n, T \in \mathbb{R}^n \text{ e } p \in \mathrm{Dom}(\xi_T)\right\}.$$

Com a definição das aplicações $\rho_{\xi,p}$, a D-órbita de um ponto $p \in M$ pode ser escrita como:

$$S_p := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\rho_{\xi,p}(T) \middle| \xi \in D^n, T \in \Omega_{\xi,p}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\xi\in D^n} \mathrm{Imagem}(\rho_{\xi,p}).$$

2.3.5 Topologia da D-órbita

Definição 2.40. A topologia da D-órbita S_p de um ponto p é a topologia co-induzida pelas aplicações $\rho_{\xi,p}$, isto é:

$$\tau_p = \left\{U \subset S_p \middle| \rho_{\xi,p}^{-1}(U) \text{ é aberto em } \Omega_{\xi,p}\right\}$$

Proposição 2.41. *A topologia da D-órbita é bem-definida. Isto é, se p e q estão na mesma órbita, as topologias τ_p e τ_q são iguais.*

Demonstração. Sejam p e q na mesma órbita. Seja $U \in \tau_p$. Mostremos que $U \in \tau_q$. Dados $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in D^n$, queremos mostrar que $\rho_{\xi,q}^{-1}(U)$ é aberto em $\Omega_{\xi,q}$. Como p e q estão na mesma órbita, existem $m \in \mathbb{N}, \eta \in D^m$ e $T_0 \in \Omega_{\eta,p}$ tais que $\eta_{T_0}(p) = q$.

Dado $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega_{\xi,q}$,

$$\rho_{\xi,q}(T) = \xi_T(q) = \xi_T(\eta_{T_0}(p)) = (\xi\eta)_{TT_0}(p) = \rho_{\xi\eta,p}(TT_0).$$

Portanto, $\rho_{\xi,q} = \rho_{\xi\eta,p} \circ C$, onde $C : \Omega_{\xi,q} \to \Omega_{\xi\eta,p}$ é a concatenação $C(T) = TT_0$.

Assim, $\rho_{\xi,q}^{-1}(U) = C^{-1}(\rho_{\xi\eta,p}^{-1}(U))$. Pela continuidade da concatenação C, obtemos o resultado desejado. □

Proposição 2.42. *(i) A topologia das D-órbitas é mais fina que a topologia do subespaço.*

(ii) As órbitas, dotadas de suas topologias, são conexas.

Demonstração. (i) Seja S_p a D-órbita de p na variedade M. Se $U \subset M$ é um aberto de M, queremos mostrar que $U \cap S_p$ é aberto na topologia da órbita. Mas isto é consequência de as aplicações $\rho_{\xi,p} : \Omega_{\xi,p} \to M$ serem contínuas: como a imagem destas aplicações está contida em S_p, temos $\rho_{\xi,p}^{-1}(U \cap S_p) = \rho_{\xi,p}^{-1}(U)$, que é aberto.

(ii) Seja $\alpha : (a,b) \to S_p$ tal que $\alpha|_{(a,b)\to M}$ é uma curva integral de algum $X \in D$. Mostremos que α é contínua (em relação à topologia de S_p).

Podemos supor, sem perda de generalidade, que α é maximal — pois toda curva integral é restrição de alguma curva integral maximal, e a restrição preserva continuidade. Ainda podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in (a,b)$, pois a translação de uma curva preserva continuidade.

Seja $q = \alpha(0)$. Assim, α coincide com a função $t \mapsto X_t(q) = \rho_{\xi_0,q}$, onde $\xi_0 = (X)$. Pela proposição 2.41,

$$\tau_p = \tau_q = \left\{U \subset S_q \mid \rho^{-1}_{\xi,q}(U) \text{ é aberto}, \forall \xi \in D^n, \forall T \in \mathbb{R}^n, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Assim, se $U \in \tau_p$, $\alpha^{-1}(U) = \rho^{-1}_{\xi_0,q}(U)$ é aberto em $\Omega_{\xi_0,q} = (a,b)$. Ou seja, α é contínua.

Como as curvas integrais em S_p são contínuas, e todos pontos de S_p podem ser ligados por uma concatenação de segmentos de curvas integrais, concluímos que S_p é conexa por caminhos — e, portanto, conexa.

□

Observação 2.43. Como a topologia de uma órbita é mais fina do que a sua topologia como subespaço, a órbita também será conexa como subespaço de M.

Observação 2.44. A topologia da D-órbita, em geral, *não* coincide com a topologia co-induzida por todas as curvas integrais de elementos de D. Em $\mathbb{R}^2$ com as coordenadas usuais, considere $D = \{\partial_x, \partial_y\}$. A única D-órbita é $\mathbb{R}^2$, e sua topologia será a topologia usual do plano (o que é facilmente demonstrado se usarmos o teorema 2.73 e a proposição 1.45).

O conjunto

$$W = \left\{p \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x^2+y^2)(p) < 1\right\} \setminus \left\{\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

é aberto na topologia co-induzida pelas curvas integrais de ∂_x e ∂_y: pois, dado $p \in W$, sempre podemos mover p um pouco nas direções vertical e horizontal. Mas W não é aberto na topologia usual do plano, pois 0 não é ponto interior de W.

2.4 Distribuições

Definição 2.45. Uma *distribuição* Δ é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ da variedade M um subespaço vetorial $\Delta(p) \subset T_pM$ do espaço tangente de M em p.

Definição 2.46. (i) Dada uma família D de campos vetoriais definida em todo lugar na variedade M, a *distribuição gerada por* D, Δ_D, é a distribuição que associa a cada $p \in M$ o subespaço vetorial gerado pelos campos de D que são definidos em p, isto é:

$$\Delta_D(p) = \left\langle \left\{ X|_p \middle| X \in D, X \text{ é definido em } p \right\} \right\rangle$$

(ii) Uma distribuição Δ que pode ser gerada por uma alguma família D de campos vetoriais (suaves) é chamada de *distribuição suave*.

Definição 2.47. Dizemos que um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Omega)$, com Ω um aberto de M, *pertence à distribuição* Δ (notação $X \in \Delta$) se, para cada $p \in \Omega$, $X|_p \in \Delta(p)$. A família de todos os campos vetoriais que pertencem a uma distribuição Δ é denotada D_Δ.

Exemplo 2.48. Uma distribuição que não é suave: em $M = \mathbb{R}^2$:

$$\Delta(p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}, & \text{se } x(p) \text{ e } y(p) \text{ são ambos racionais;} \\ \frac{\partial}{\partial y}, & \text{se } x(p) \text{ é irracional ou se } y(p) \text{ é irracional.} \end{cases}$$

2.4.1 Subvariedades integrais

Definição 2.49. (i) Uma *subvariedade integral* da distribuição Δ é uma subvariedade imersa $N \subset M$ cujo espaço tangente coincide com Δ em cada ponto.

(ii) Uma distribuição Δ tem a propriedade das subvariedades integrais quando, para cada $p \in M$, existe uma subvariedade integral de Δ passando por p.

(iii) Uma subvariedade integral maximal da distribuição Δ é uma subvariedade integral N de Δ tal que cada subvariedade integral *conexa* de Δ que intercepta N é uma subvariedade aberta de N.

(iv) Uma distribuição Δ tem a propriedade das subvariedades integrais maximais quando, para cada $p \in M$, existe uma subvariedade integral maximal de Δ passando por p.

Proposição 2.50. *Sejam $X^1, \ldots, X^n$ campos vetoriais na variedade M que são tangentes à subvariedade $N \subset M$. Sejam*

$$\xi = (X^1, \ldots, X^n) \quad e \quad \xi|_N = (X^1|_N, \ldots, X^n|_N).$$

Seja $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \Omega_{\xi|_N, p}$. Então $T \in \Omega_{\xi,p}$ e $(\xi|_N)_T(p) = \xi_T(p)$.

Demonstração. Se $n = 1$:

Então $\xi = (X), \xi_T = X_{t_1}, (\xi|_N)_T = (X|_N)_{t_1}$. Seja $\alpha : (a,b) \to N$ a curva integral maximal de $X|_N$ centrada em p, definida na subvariedade N. A inclusão de α em M é uma curva integral de X em M centrada em p. Assim, dado $t \in (a,b)$, $X_t(p) = (i \circ \alpha)(t) = (X|_N)_t(p)$. Portanto, $X_{t_1}(p) = (X|_N)_{t_1}(p)$.

Se $n > 1$ e supondo a hipótese de indução:

Então $\xi = \eta\psi$, com $\eta = (X_1)$ e $\psi = (X_2, \ldots, X_n)$. $\xi|_N = (\eta|_N)(\psi|_N)$. Seja $T' = (t_2, \ldots, t_n)$. Então

$$\begin{aligned}(\xi|_N)_T(p) &= (X|_N)_{t_1}((\psi|_N)_{T'}(p)) \\ &= (X|_N)_{t_1}(\psi_{T'}(p)) = X_{t_1}(\psi_{T'}(p)) = \xi_T(p).\end{aligned}$$

□

Corolário 2.51. *Na linguagem das aplicações ρ que foram usadas para definir a topologia, a proposição acima diz: definidas*

$$\rho_{\xi,p} : \Omega_{\xi,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow M \quad e \quad \rho_{\xi|_N,p} : \Omega_{\xi|_N,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n \longrightarrow N,$$

tem-se que $\Omega_{\xi|_N,p} \overset{ab.}{\subset} \Omega_{\xi,p}$ *e* $\rho_{\xi,p}(T) = \rho_{\xi|_N,p}(T), \forall T \in \Omega_{\xi|_N,p}$.

Exemplo 2.52. Seja $M = \mathbb{R}^3$. Então os planos horizontais da forma $z = k$ são subvariedades integrais maximais da distribuição Δ gerada por $\{\partial_x, \partial_y\}$.

Para mostrar que os planos horizontais são subvariedades integrais de Δ, podemos escrever cada plano como uma imagem de imersão injetiva (de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$) e usar a proposição 1.38.

Seja S_p um desses planos horizontais. Mostremos que S_p é maximal. Seja N uma subvariedade integral *conexa* de Δ que passa por p. Mostremos primeiro que o conjunto de pontos de N é um aberto em S_p. Os campos ∂_x e ∂_y são tangentes a N, então podemos restringi-los a N.

Vamos dar nome aos campos: $X = \partial_x$ e $Y = \partial_y$. Sejam $\xi = (X, Y)$ e $\eta = (X|_N, Y|_N) = \xi|_N$. Para cada $q \in N \cap S_p$, temos a aplicação suave $\rho_{\eta,q} : \Omega_{\eta,q} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^2 \to N$, definida por

$$\rho_{\eta,q}(t_1, t_2) = \eta_{(t_1,t_2)}(q) = (X|_N)_{t_1}\Big((Y|_N)_{t_2}(q)\Big).$$

Pela proposição 2.50, $\Omega_{\eta,q} \subset \Omega_{\xi,q}$ e

$$\rho_{\eta,q}(t_1, t_2) = \rho_{\xi,q}(t_1, t_2) = (x(q) + t_1, y(q) + t_2), \quad \forall (t_1, t_2) \in \Omega_{\eta,q}.$$

Como $\rho_{\eta,q}$ tem posto 2 e é injetiva, podemos argumentar pelo teorema da função inversa que $\rho_{\eta,q}$ tem imagem aberta em N. Como a imagem de $\rho_{\eta,q}$ é também um aberto em S_p (pela fórmula acima), concluímos que todo ponto $q \in S_p \cap N$ possui uma vizinhança aberta em N que também é um aberto de S_p.

Isto implica que $N \cap S_p$ é aberto em S_p. Mostremos que $N = N \cap S_p$. Dado $q \in N \backslash S_p$, q está no plano horizontal $S_q = \{q' \in \mathbb{R}^3 \mid z(q') = z(q)\}$ e podemos usar um argumento análogo ao anterior para mostrar que q tem uma vizinhança aberta em N que está contida em S_q — e, portanto, não em S_p. Assim, $N \backslash S_p$ também será aberto. Pela conexidade de N, $N \backslash S_p$ é vazio (porque $N \cap S_p$ não é).

Agora, mostremos que N é uma subvariedade aberta de S_p. Seja N_2 a subvariedade aberta de S_p (e, portanto, subvariedade imersa de $\mathbb{R}^3$) com o conjunto de pontos de N. Queremos mostrar que $N = N_2$. Seja U um aberto de N. Então U — visto como subvariedade aberta de N — também é uma subvariedade integral de Δ.

Se U for conexo, U será um subconjunto aberto de S_p, pelo argumento que foi feito anteriormente. Se U não for conexo, cada componente conexa de U é aberta em S_p e, portanto, U também o é.

Assim, todo conjunto aberto U de N é aberto em S_p (e, portanto, em N_2). Isto implica que a topologia de N é mais fina do que a topologia de N_2. Com o fato de que $\dim N = \dim N_2$, o corolário 1.49 nos diz que $N = N_2$.

2.4.2 D-invariância

Definição 2.53. Seja D uma família de campos vetoriais na variedade M. Uma distribuição Δ é dita *D-invariante* quando, para toda $\phi \in G_D$, $\phi : \Omega \to \Omega'$, temos:

$$\mathrm{d}\phi(\Delta(p)) \subset \Delta(\phi(p)), \forall p \in \Omega$$

Definição 2.54. Dada uma família de campos vetoriais D definida em todo lugar na variedade M, a distribuição P_D é definida como a menor distribuição D-invariante contendo Δ_D.

Definição 2.55. Seja $\phi : \Omega_\phi \to \Omega'_\phi$ um difeomorfismo local em M. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Omega_X)$, com Ω_X aberto em M interceptando Ω_ϕ, definimos o campo vetorial

$$\mathrm{d}\phi(X) \in \mathfrak{X}(\phi(\Omega_X \cap \Omega_\phi))$$

da seguinte maneira: a cada ponto $\phi(p)$ associamos o vetor tangente $\mathrm{d}\phi(X|_p)$. Ou seja, $\mathrm{d}\phi(X)|_q = \mathrm{d}\phi(X|_{\phi^{-1}(q)})$. Isto será um campo vetorial suave, devido ao fato de ϕ^{-1} ser suave.

Proposição 2.56 (Gerador de P_D)**.** *Dada uma família D de campos vetoriais definida em todo lugar em M, seja*

$$A = \{\,\mathrm{d}\phi(X) \mid \phi \in G_D, X \in D\}.$$

Então $P_D = \Delta_A$.

Demonstração. Δ_A contém Δ_D: pois $D \subset A$, pois, dado $X \in D$, a aplicação $X_0 : \Omega_X \to \Omega_X$, que é a identidade no aberto Ω_X em que X é definido, está em G_D. Então $\mathrm{d}X_0(X) = X$ está em A.

Δ_A está contida em P_D: Dado $\vec{v}_p \in \Delta_A(p)$, $\vec{v}_p = \mathrm{d}\phi(X|_q)$, para $X \in D$, $\phi \in G_D$ e $\phi(q) = p$. Como $X|_q$ está contido em $P_D(q)$ e $P_D(q)$ é D-invariante, $\vec{v}_p \in P_D(p)$.

Δ_A é D-invariante: dados $\vec{v}_p \in \Delta_A(p)$ e $\psi \in G_D$, sabemos que $\vec{v}_p = \mathrm{d}\phi(X|_q)$, para $X \in D$, $\phi \in G_D$, e $\phi(q) = p$. Então queremos mostrar que $\mathrm{d}\psi(\vec{v}_p)$ está em Δ_A. De fato:

$$\mathrm{d}\psi\Big(\mathrm{d}\phi\big(X|_q\big)\Big) = \mathrm{d}(\psi\phi)\big(X|_q\big) \in \Delta_A,$$

pois $\phi g \in G_D$. □

Exemplo 2.57. Em $\mathbb{R}^3$, a distribuição Δ_D gerada por

$$D = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

é D-invariante.

Seja $\vec{v}_p \in \Delta(p)$ um vetor tangente de $\Delta(p)$, ou seja,

$$\vec{v}_p = a\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_p + b\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_p.$$

Mostremos que $\phi \in G_D$ implica $\mathrm{d}\phi(\vec{v}_p) \in \Delta(\phi(p))$. Podemos escrever (ver a observação 1.14) $\vec{v}_p = \alpha'(0)$, onde $\alpha : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^3$ é uma curva cuja imagem está contida no plano horizontal S_p que passa por p. O diferencial $\mathrm{d}\phi(\vec{v}_p)$, então, pode ser calculado usando a curva α:

$$\mathrm{d}\phi(\vec{v}_p) = \mathrm{d}\phi(\alpha'(0)) = (\phi \circ \alpha)'(0).$$

Como S_p é uma D-órbita, $\phi(S_p) \subset S_p$ e portanto a imagem da curva $\phi \circ \alpha$ está contida em S_p. Temos que $z(\phi \circ \alpha)$ é constante, logo

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = d\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\phi(p)} + e\frac{\partial}{\partial y}\bigg|_{\phi(p)} \quad (\text{com } d, e \in \mathbb{R}),$$

que pertence a $\Delta(\phi(p))$.

Exemplo 2.58. A distribuição gerada por $D = \{\partial_x, \partial_y + x\partial_z\}$ em $\mathbb{R}^3$ não é D-invariante.

De fato: sejam

$$p = (1,0,0), \quad \vec{v}_p = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p + \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_p \in \Delta(p).$$

A translação $\phi = (x-1, y, z)$ pertence a G_D. Aplicando seu diferencial a $\vec{v}_p$, obtemos:

$$\mathrm{d}\phi(\vec{v}_p) = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0 + \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0 \notin \Delta(0)$$

(note que $\phi(p) = 0$).

2.4.3 Posto das D-órbitas

Definição 2.59. Chamaremos $\dim P_D(p)$ de *posto da D-órbita* que passa pelo ponto p.

Observação 2.60. É preciso mostrar que esta definição não depende da escolha do ponto p.

Proposição 2.61. *Seja D uma família de campos vetoriais definida em todo lugar na variedade M. Se p e q são dois pontos na mesma D-órbita, então* $\dim P_D(p) = \dim P_D(q)$.

Demonstração. Seja $\phi \in G_D$ tal que $\phi(p) = q$. Como ϕ é um difeomorfismo local, $\mathrm{d}\phi|_p : \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_q M$ é um isomorfismo. $\phi(P_D(p)) \subset P_D(q)$, pela D-invariância de P_D. Assim, $\phi(P_D(p))$ será um subespaço de dimensão $\dim P_D(p)$ de $P_D(q)$, o que implica $\dim P_D(q) \geq \dim P_D(p)$. Analogamente, $\dim P_D(q) \geq \dim P_D(p)$. □

Exemplo 2.62. $D = \{\partial_x, \partial_y + x\partial_z\}$ em $\mathbb{R}^3$ Então $P_D(p) = \mathrm{T}_p\mathbb{R}^3, \quad \forall p \in \mathbb{R}^3$.

Como a única D-órbita é todo o $\mathbb{R}^3$, a dimensão de P_D deve ser uma constante k. Mostremos que $P_D(0)$ tem dimensão 3.

Os vetores

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0$$

estão em $P_D(0)$, por estarem em Δ_D. O vetor

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_0 + \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_0,$$

linearmente independente dos dois outros, também está em $P_D(0)$, pois é o resultado do diferencial da translação $(x-1, y, z)$ aplicado em

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(1,0,0)} + \left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{(1,0,0)} \in \Delta_D(1,0,0).$$

Assim, $P_D(p)$ tem dimensão 3 em cada $p \in \mathbb{R}^3$, ou seja, é igual a todo o espaço tangente.

2.4.4 Involutividade

Definição 2.63. Uma distribuição Δ é *involutiva* se, dados $X, Y \in D_\Delta$, $X \in \mathfrak{X}(\Omega_1), Y \in \mathfrak{X}(\Omega_2), \Omega_1, \Omega_2 \overset{ab.}{\subset} M$, o colchete de Lie ou comutador $[X, Y]$ (definido em $\Omega_1 \cap \Omega_2$) pertence a D_Δ.

Proposição 2.64. *Uma distribuição que possui a propriedade das subvariedades integrais é involutiva.*

Demonstração. Sejam dois campos $X, Y \in \Delta$ e seja $p \in M$. Existe uma subvariedade integral $N_p \subset M$ de Δ que passa por p. Os campos X e Y são tangentes a N_p e podem ser restritos a ela. Assim, o colchete de Lie em p, $[X,Y]|_p$, pode ser calculado na subvariedade N_p:

$$[X,Y]|_p = \left.\left[X|_{N_p}, Y|_{N_p}\right]\right|_p \in \mathrm{T}N_p \subset \Delta(p)$$

$\square$

Exemplo 2.65. Seja $M = \mathbb{R}^3$, $D = \{\partial_x, \partial_y\}$, $\Delta = \Delta_D$. Δ é involutiva.

$$D_\Delta = \left\{ a \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_\Omega + b \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_\Omega \,\middle|\, a, b \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \Omega \text{ aberto em } \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Dados

$$X_1 = a_1 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\Omega_1} + b_1 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\Omega_1} \text{ e } X_2 = a_2 \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{\Omega_2} + b_2 \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{\Omega_2},$$

o campo $[X,Y]$ é definido em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Como X e Y não envolvem a derivada parcial na coordenada z, seu colchete de Lie $[X,Y]$ também não a envolverá e, portanto, $[X,Y] \in D_\Delta$.

Observação 2.66. Mais geralmente, se Δ é uma distribuição tal que todo ponto de M tem uma vizinhança aberta na qual a restrição de Δ é gerada pelas primeiras k derivadas parciais $(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_k})$ de algum sistema de coordenadas locais $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, (onde n é a dimensão de M e $k \leq n$ é constante nas componentes conexas de M) Δ é involutiva.

Exemplo 2.67. Novamente em $\mathbb{R}^3$, seja $D = \{\partial_x, \partial_y + x\partial_z\}$. Então $\Delta := \Delta_D$ não é involutiva. De fato, dando os nomes $X = \partial_x$ e $Y = \partial_y + x\partial_z$,

$$[X, Y] = XY - YX = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}$$

O campo ∂_z não pertence à distribuição Δ, pois $\Delta(0)$ é o espaço gerado por $\partial_x|_0$ e $\partial_y|_0$.

Exemplo 2.68. Seja $M = \mathbb{R}^2$ com as coordenadas usuais $(x, y) = \operatorname{Id}$. Seja $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t}, & \text{se } t > 0 \text{ e} \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Seja Δ a distribuição gerada por

$$D = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \phi(x)\frac{\partial}{\partial y}\right\}.$$

Δ não é D-invariante mas é involutiva.

Para mostrar que Δ não é D-invariante, basta reparar que o vetor tangente

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(1,0)} \in \Delta(1, 0)$$

é levado em

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(-1,0)} \notin \Delta(-1, 0)$$

pelo diferencial da translação $(x - 2, y)$, que está em G_D, gerada pelo fluxo de ∂_x.

Δ é involutiva: Dados dois campos $X, Y \in \Delta$, suponha que eles são definidos em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $p \in \Omega$. Devemos mostrar que $[X, Y]|_p \in \Delta(p)$. Se $x(p) > 0$, então $\Delta(p) = \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^2$ e portanto $[X, Y]|_p \in \Delta(p)$.

Se $x(p) < 0$, podemos supor que o $\Omega \subset \{x < 0\}$. Então X e Y não envolverão a derivação ∂_y. Logo, $[X, Y]$ não envolverá a derivação ∂_y. Assim, teremos $[X, Y]|_p \in \Delta(p)$.

Se $x(p) = 0$: queremos mostrar que $[X, Y]|_p$ é um múltiplo de $\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p$. Vamos escrever

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e}$$
$$Y = c\frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial y},$$

Com $b(q) = 0$ e $d(q) = 0$ sempre que $x(q) \leq 0$. Pela suavidade de b e d, as derivadas

$$\frac{\partial b}{\partial x}(p), \frac{\partial d}{\partial x}(p), \frac{\partial b}{\partial y}(p), \frac{\partial d}{\partial y}(p)$$

serão nulas. Para calcular $[X, Y]$, usamos a fórmula:

$$[X, Y] = (XY - YX)(x)\frac{\partial}{\partial x} + (XY - YX)(y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

$XY(y) = Xd = 0$ em p, e $YX(y) = Yb = 0$ em p. Assim, $[X, Y]|_p$ não envolverá $\partial_y|_p$, que é o que queríamos demonstrar.

2.5 Teoremas principais

2.5.1 Que as D-órbitas são subvariedades

Direções de movimento em uma órbita

Seja D uma família definida em todo lugar de campos vetoriais na variedade M. Dados $\xi = (X^1, \ldots, X^n) \in D^n$, $p \in M$ e $T \in \Omega_{\xi,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n$, sabemos que a aplicação $T' \mapsto \rho_{\xi,p}(T') = \xi_{T'}(p)$, é suave em $\Omega_{\xi,p}$.

Definição 2.69. $V(\xi, p, T)$ é a imagem do diferencial $\mathrm{d}(\rho_{\xi,p})|_T$, isto é,

$$V(\xi, p, T) = \mathrm{d}(\rho_{\xi,p})(\mathrm{T}_T\, \Omega_{\xi,p}).$$

Lema 2.70 (Lema (5.1) de Sussmann [10])**.**

$$V(\xi, p, T) \subset P_D(\xi_T(p)).$$

Demonstração. Seja $(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Id}\,|_{\Omega\xi,p}$, a carta global usual de $\Omega_{\xi,p}$.

$V(\xi, p, T)$ é gerado pelos vetores tangentes

$$\left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_1}\right|_T, \ldots, \left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_n}\right|_T = \mathrm{d}\rho_{\xi,p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_T\right), \ldots, \mathrm{d}\rho_{\xi,p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_T\right).$$

Queremos, então, mostrar que estes diferenciais estão em P_D. Partimos de

$$\rho_{\xi_p} = X^1_{x_1}\big(X^2_{x_2}\big(\ldots\big(X^n_{x_n}(p)\big)\ldots\big)\big).$$

A expressão acima, ao se variar x_1, e mantendo $x_2 = t_2, \ldots, x_n = t_n$ constantes, será uma curva integral do campo X_1 — isto é,

$$\alpha(t) := \rho_{\xi,p}(t, t_2, \ldots, t_n)$$

(que pode ser definida para $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, para algum $\delta > 0$) é uma curva integral de X_1.

Pela proposição 1.21 (cálculo do diferencial por caminhos) e usando que α é curva integral de X^1, obtemos:

$$\left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_1}\right|_T = \mathrm{d}\rho_{\xi,p}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_T\right) = \alpha'(t_1) = X^1\big|_{X^1_{t_1}\left(X^2_{t_2}\left(\dots\left(X^n_{t_n}(p)\right)\dots\right)\right)}.$$

Para calcular as outras derivadas parciais, usa-se a regra da cadeia e repetimos o argumento anterior:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_2}\right|_T &= \mathrm{d}X^1_{t_1}\left(\mathrm{d}\Big(X^2_{x_2}\big(\dots\big(X^n_{x_n}(p)\big)\dots\big)\Big)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(t_1,t_2,\dots,t_n)}\right)\right)\\
&= \mathrm{d}X^1_{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(X^2_{x_2}\big(\dots\big(X^n_{x_n}(p)\big)\dots\big)\Big)(t_1,t_2,\dots,t_n)\right)\\
&= \mathrm{d}X^1_{t_1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\Big(X^2_{y_1}\big(\dots\big(X^n_{y_{n-1}}(p)\big)\dots\big)\Big)(t_2,\dots,t_n)\right)\\
&= \mathrm{d}X^1_{t_1}\Big(X^2\big|_{X^2_{t_2}\left(\dots\left(X^n_{t_n}(p)\right)\dots\right)}\Big),\\
&\vdots\\
\left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_n}\right|_T &= \mathrm{d}X^1_{t_1}\Big(\dots\Big(\mathrm{d}X^{n-1}_{t_{n-1}}\big(X^n|_{X^n_{t_n}(p)}\big)\Big)\dots\Big).
\end{aligned}$$

Estes vetores são todos pertencentes a P_D, por serem obtidos pela aplicação repetida dos diferenciais de elementos de G_D — $X^1_{t_1}, \dots, X^n_{t_n}$ — a vetores dos campos $X^1, \dots, X^n$, que são pertencentes à distribuição D-invariante P_D. □

Lema 2.71 (Lema (5.2) de Sussmann [10]). *Para todo $q \in M$, podemos escolher ξ, p, T de forma que $q = \xi_T(p)$ e*

$$V(\xi, p, T) = P_D(q).$$

Demonstração. Pela proposição 2.56, o conjunto

$$A = \Big\{\mathrm{d}\phi(X|_p)\ \Big|\ \phi \in G_D, X \in D, p \in \phi^{-1}(\{q\}) \cap \mathrm{Dom}\, X\Big\}$$

de vetores tangentes em q é um gerador de $P_D(q)$.

Seja $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ uma base de $P_D(q)$ com $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in A$.

Então, para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, podemos escrever

$$\vec{u}_j = \mathrm{d}\Big(\xi_{j\,T_j}\Big)\Big(X^j\big|_{p_j}\Big),$$

onde $\xi_j \in D^{n_j}, T_j \in \mathbb{R}^{n_j}, X^j \in D$ e $p_j \in \operatorname{Dom} X_j$ é tal que $\xi_{j\,T_j}(p_j) = q$.

Assim, temos $\vec{u}_j \in V(\xi_j, p_j, T_j)$.

Faça $\xi = \xi_k\widehat{\xi_k}\cdots\xi_2\widehat{\xi_2}\xi_1$, $p = p_1$ e $T = T_k(-\widehat{T_k})\cdots T_2(-\widehat{T_2})T_1$. Aqui, estamos usando a notação que foi introduzida na demonstração da proposição 2.28.

Afirmação: $V(\xi, T, p) = P_D(q)$. Para provar isto, basta mostrar que a imagem do diferencial da função

$$\rho_{\xi,p} : \Omega_{\xi,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^{n_1+2\left(\sum_{j=2}^{k} n_j\right)} \longrightarrow M$$

em T contém os espaços $V(\xi_j, p_j, T_j), \quad j = 1, \ldots, k$.

$$\rho_{\xi,p}(T) = \xi_{kT_k}\left(\xi_{kT_k}\right)^{-1}\cdots\xi_{2T_2}\left(\xi_{2T_2}\right)^{-1}\xi_{1T_1}(p_1) = \xi_{1T_1}(p_1) = q.$$

Vamos nomear as coordenadas de $\Omega_{\xi,p}$:

$$\mathrm{Id}\,|_{\Omega_{\xi,p}} = (\underbrace{x_k^1, \ldots, x_k^{n_k}}_{\vec{x}_k}, \underbrace{y_k^1, \ldots, y_k^{n_k}}_{\vec{y}_k}, \ldots, \underbrace{x_2^1, \ldots, x_2^{n_2}}_{\vec{x}_2}, \underbrace{y_2^1, \ldots, y_2^{n_2}}_{\vec{y}_2}, \underbrace{x_1^1, \ldots, x_1^{n_1}}_{\vec{x}_1}).$$

Assim, temos:

$$\rho_{\xi,p} = (\xi_k)_{\vec{x}_k}(\widehat{\xi_k})_{\vec{y}_k}\cdots(\xi_2)_{\vec{x}_2}(\widehat{\xi_2})_{\vec{y}_2}(\xi_1)_{\vec{x}_1},$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\xi,p}(T_k, -\widehat{T_k}, \cdots, T_2, -\widehat{T_2}, \vec{x}_1) &= \xi_{1\vec{x}_1}(p_1) = \rho_{\xi_1,q_1}(\vec{x}_1),\\
\rho_{\xi,p}(T_k, -\widehat{T_k}, \cdots, \vec{x}_2, -\widehat{T_2}, T_1) &= \xi_{2\vec{x}_2}(p_2) = \rho_{\xi_2,q_2}(\vec{x}_2),\\
&\vdots\\
\rho_{\xi,p}(\vec{x}_k, -\widehat{T_k}, \cdots, T_2, -\widehat{T_2}, T_1) &= \xi_{k\vec{x}_k}(p_k) = \rho_{\xi_k,q_k}(\vec{x}_k).
\end{aligned}$$

Isto implica que o espaço gerado pelas derivadas parciais

$$\left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_j^1}\right|_T, \ldots, \left.\frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial x_j^{n_j}}\right|_T$$

é $V(\xi_j, p_j, T_j)$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. □

Subvariedades integrais de P_D

Lema 2.72 (Lema 5.3 de Sussmann [10])**.** *Seja D uma família definida em todo lugar de campos vetoriais na variedade M. Seja S uma D-órbita de p, dotada da topologia da D-órbita. Então toda subvariedade integral conexa de P_D que intercepta S é (vista como conjunto) um subconjunto aberto de S.*

Demonstração. Seja N uma subvariedade integral conexa de P_D que intercepta a D-órbita S. Mostremos primeiro que $N \subset S$.

Afirmação: dado $p \in N \cap S$ existe uma vizinhança aberta de p em N que está contida em S. De fato, pela proposição 2.56, sabemos que a família

$$A = \{\, \mathrm{d}\phi(X) \mid \phi \in G_D, X \in D\}$$

de campos vetoriais gera P_D. Assim, podemos escolher campos $X^1, \ldots, X^k \in D$ e difeomorfismos locais $\phi_1, \ldots, \phi_k \in G_D$ tais que

$$\mathrm{d}\phi_1(X^1)\big|_p, \ldots, \mathrm{d}\phi_k(X^k)\big|_p$$

são uma base para $P_D(p) = \mathrm{T}_p\, N$, onde $k = \dim N = \dim P_D(p)$.

Sejam $Y^1 = \mathrm{d}\phi_1(X^1), \ldots, Y^k = \mathrm{d}\phi_k(X^k)$. Estes campos são tangentes a N, pois N é subvariedade integral de P_D.

Sejam $\xi = (Y^1, \ldots, Y^k)$ e $\xi|_N = (Y^1\big|_N, \ldots, Y^k\big|_N)$ e considere as aplicações

$$\rho_{\xi,p} : \Omega_{\xi,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^k \longrightarrow M \quad \text{e} \quad \rho_{\xi|_N,p} : \Omega_{\xi|_n,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^k \longrightarrow N.$$

Pelo corolário da proposição 2.50, $\Omega_{\xi|_N,p} \overset{ab.}{\subset} \Omega_{\xi,p}$ e $\rho_{\xi,p}(T) = \rho_{\xi|_N,p}(T)$, $\forall T \in \Omega_{\xi|_n,p}$.

Como a imagem de $\rho_{\xi,p}$ está contida na D-órbita S de p, então a imagem de $\rho_{\xi|_N,p}$ também está. Como $\rho_{\xi|_N,p}$ tem posto k na origem, o teorema da função inversa nos diz que a sua imagem contém um aberto, em N, contendo p. Assim, p tem uma vizinhança aberta em N que está contida em S.

Variando p, isso implica que $N \cap S$ é aberto em N. Mostremos que $N \backslash S$ também é aberto em N. Dado $q \in N \backslash S$, temos que q está na D-órbita S_q, disjunta de S. Usando o argumento anterior, podemos mostrar que q tem uma vizinhança aberta (em N) que está contida em S_q, e portanto que não intercepta S. Variando q, temos que $N \backslash S$ é aberto em N.

Pela conexidade de N, e como estamos supondo, por hipótese, que $N \cap S$ não é vazio, $N \backslash S$ será vazio e portanto $N \subset S$.

Agora, devemos mostrar que o conjunto de pontos de N é aberto na topologia da órbita S. Isto é, para quaisquer $m \in \mathbb{N}$, $\eta \in D^m$, queremos que o conjunto

$$\rho_{\eta,p}^{-1}(N) = \{\, T' \in \Omega_{\eta,p} \mid \rho_{\eta,p}(T') \in N\}$$

seja aberto em $\mathbb{R}^m$. Seja $T \in \rho_{\eta,p}^{-1}(N)$. Mostremos que T tem uma vizinhança aberta em $\rho_{\eta,p}^{-1}(N)$.

Faremos uma indução finita para provar que a seguinte proposição é verdadeira para todo $m \in \mathbb{N}$: se N é uma subvariedade integral de P_D contida na D-órbita S, então $\rho_{\eta,p}^{-1}(N)$ é aberto para toda $\eta \in D^m$.

Em primeiro lugar, podemos supor sem perda de generalidade que N é uma subvariedade mergulhada, pois (observação 1.53) sempre podemos decompor N em abertos que são subvariedades mergulhadas de M.

Se $m = 1$: Então $\rho_{\eta,p}$ é a curva integral maximal $\alpha : (a, b) \to M$ de um campo $Z \in D$ com $T = t \in (a, b)$ e $\alpha(t) = p$. Tendo $\alpha(t) \in N$, queremos achar $\delta > 0$ tal que $\alpha\big((t - \delta, t + \delta)\big) \subset N$.

Seja $\alpha^* : (c, d) \to N$ a curva integral maximal de $Z|_N$ tal que $\alpha^*(t) = p$. Como a inclusão de α^* é curva integral de Z e vale p no parâmetro t, então α^* e α coincidem em (c, d). Assim, fazendo $\delta = \min\{t - c, d - t\}$, temos $\rho_{\eta,p}((t - \delta, t + \delta)) \subset N$.

Se $m > 1$: Então $\eta = (Z)\sigma$, com $Z \in D, \sigma \in D^{m-1}$. Escreva $T = (t_1, \ldots, t_m)$. Então

$$\rho_{\eta,p}(t_1, \ldots, t_m) = Z_{t_1}(\rho_{\sigma,p}(t_2, \ldots, t_m)) \in N.$$

Vamos usar o fato (consequência da proposição 1.58 e de que difeomorfismos são homeomorfismos) de que a imagem de uma subvariedade mergulhada por um difeomorfismo é outra subvariedade mergulhada. Com isso, $Z_{t_1}^{-1}(N)$ será uma subvariedade integral mergulhada de P_D.

Seja V uma vizinhança de $\rho_{\sigma,p}(t_2, \ldots, t_m)$ em $Z_{t_1}^{-1}(N)$ tal que, para cada $q \in V$, para as curvas integrais

$$\alpha_q(h) = \Big(Z|_{Z_{t_1}^{-1}(N)}\Big)_h(q),$$

são definidas em $Z_{t_1}^{-1}(N)$ no intervalo $h \in (-\delta, \delta)$, com algum $\delta > 0$ independente de q. A existência de tal δ é consequência da proposição 2.3 (existência e unicidade local de curva integral). Temos, como consequência da propriedade de grupo (proposição 2.13) que, dados $q \in V, h \in (-\delta, \delta)$,

$$Z_{t_1}(\alpha_q(h)) = Z_{t_1}(Z_h(q)) = Z_{t_1+h}(q) \in N.$$

Como $Z_{t_1}^{-1}(N)$ é subvariedade mergulhada, $V = Z_{t_1}^{-1}(N) \cap V_M$, para um aberto V_M de M. Pela continuidade de $\rho_{\sigma,p}$, existe um aberto $U' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ tal que $\rho_{\sigma,p}(U') \subset V_M$. Como $\rho_{\sigma,p}^{-1}(Z_{t_1}^{-1}(N))$ é um aberto $U'' \subset \mathbb{R}^{m-1}$ pela hipótese de indução, a intersecção $\Omega = U' \cap U''$ será um aberto em $\mathbb{R}^{m-1}$ e, assim, $\rho_{\sigma,p}(\Omega) \subset Z_{t_1}^{-1}(N) \cap V$. Portanto,

$$\rho_{\sigma,p}(\Omega) \subset V \quad \therefore \rho_{\eta,p}(\underbrace{(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \times \Omega}_{\text{aberto em } \mathbb{R}^m}) \subset N.$$

Isto mostra que o conjunto de pontos de N é aberto em S. $\square$

Teorema 2.73 (Teorema 4.1 de Sussmann [10])**.** *Seja M uma variedade e seja D uma família definida em todo lugar de campos vetoriais reais suaves.*

(a) Cada D-órbita, com a sua topologia de órbita, admite uma única estrutura diferenciável que a torna uma subvariedade imersa.

(b) As D-órbitas, com a estrutura diferenciável acima, são subvariedades integrais maximais de P_D.

(c) P_D tem a propriedade das variedades integrais maximais.

(d) P_D é involutiva.

Demonstração. Seja S uma D-órbita. Mostremos que S, com a topologia de D-órbita, é uma subvariedade imersa. Seja $p \in S$. Pelo lema 2.71, existem $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in D^n$, $T \in \mathbb{R}^n$ e $q \in S$ tais que $V(\xi, q, T) = P_D(p)$.

Seja $k = \dim P_D(p)$. Considere a aplicação $\rho_{\xi,q} : \Omega_{\xi,q} \to M$. O posto de $\rho_{\xi,q}$ é igual a k em T, pelo que foi dito acima, e nunca excede k, pelo lema 2.70.

Como o posto de uma aplicação suave nunca decresce subitamente, existe uma vizinhança $\mathcal{O}$ de T na qual o posto de $\rho_{\xi,q}$ é igual a k.

Considere $\mathcal{O}$ como variedade. Vamos usar o teorema do posto em $\rho_{\xi,q}|_{\mathcal{O}}$ em torno do ponto T: existem cartas locais

$$\begin{aligned} &\vec{x} : U \overset{ab.}{\subset} \mathcal{O} \longrightarrow V \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n, && T \in U \quad \text{e} \\ &\vec{y} : U' \overset{ab.}{\subset} M \longrightarrow V' \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^m, && p \in U' \end{aligned}$$

tais que

$$\rho_{\xi,q}(U) \subset U', \qquad \begin{aligned} V &= W \times (-\delta, \delta)^{n-k} \\ V' &= W \times (-\delta, \delta)^{m-k}, \end{aligned} \qquad \text{e}$$

sendo que $W \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^k$ e nas quais se escreve:

$$\vec{y} \circ \left(\rho_{\xi,q}|_{U \to U'}\right) = (x_1, \ldots, x_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k})|_{U \to V'}. \tag{2.74}$$

O conjunto $N = \vec{x}^{-1}(W \times \{0\}^{n-k})$ se torna uma subvariedade imersa de U de dimensão k, quando damos a ele a estrutura diferenciável induzida pela carta global $(x_1, \ldots, x_k)|_N$. O fibrado tangente de N será o espaço gerado por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_N, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x_k}\right|_N.$$

Pela equação (2.74), vemos que $\rho_{\xi,q}|_N$ será uma imersão injetiva, com diferencial igual ao de $\rho_{\xi,q}$ nos pontos de U, que tem posto k em cada ponto e, pelo lema 2.70, está contido em P_D. Portanto, $\mathrm{d}(\rho_{\xi,q}|_N)(T') = P_D(T'), \quad \forall T' \in U$.

$\rho_{\xi,q}|_N$ é uma imersão injetiva e portanto a sua imagem, $N' = \rho_{\xi,q}|_N(N)$, será uma subvariedade integral de P_D que passa pelo ponto p (pela proposição 1.38).

Mostremos que a topologia de N' é a mesma que a induzida por S em N'. Dado um aberto conexo $\Omega \subset N'$, visto como subvariedade aberta, Ω será uma subvariedade integral conexa de P_D. Assim, pelo lema 2.70, Ω é um aberto de S. Como todo aberto de N' é uma união de abertos conexos (variedades são localmente conexas), temos que todo aberto de N' é aberto na topologia de S. Assim, o conjunto de pontos de N' é aberto em S e a topologia de N' é mais fina que a topologia de $S|_{N'}$.

Por outro lado, $\rho_{\xi,q}|_{N\to N'}$ é um homeomorfismo entre N e N', pois a topologia de N' é a co-induzida por $\rho_{\xi,q}|_N$ (proposição 1.38). Dado Ω' um aberto de $S|_{N'}$, ou seja, um aberto em S que está contido em N', queremos mostrar que Ω' é aberto em N'.

Como Ω' é aberto em S, $\rho_{\xi,q}^{-1}(\Omega')$ é aberto em $\Omega_{\xi,q}$.

$$\Omega'' := (\rho_{\xi,q}|_U)^{-1}(\Omega') = U \cap \rho_{\xi,q}^{-1}(\Omega')$$

também é aberto. Por (2.74),

$$\vec{y}(\Omega'') = \mathcal{A} \times (-\delta, \delta)^{n-k},$$

onde $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$. Como este conjunto é aberto, concluímos que $\mathcal{A}$ é aberto. Seja $\Omega^{(3)} = (\rho_{\xi,q}|_N)^{-1}(\Omega')$. Novamente por (2.74), obtemos

$$(x_1, \ldots, x_k)|_N(\Omega^{(3)}) = \mathcal{A}.$$

Como $(x_1, \ldots, x_k)|_N$ é carta local de N, temos que $\Omega^{(3)}$ é aberto em N. Como $(\rho_{\xi,q}|_{N\to N'})^{-1}$ é homeomorfismo, concluímos que Ω' é aberto em N'. Assim, temos que, para cada $p \in S$, existe uma subvariedade integral de P_D contendo o ponto p, contida em S, de dimensão k e cuja topologia é a restrição da topologia de S. Variando p, obtemos uma cobertura de S por subvariedades de mesma dimensão e de topologias compatíveis, que são conjuntos abertos em S. Temos as condições necessárias para para unir estas subvariedades em uma só (proposição 1.53), que terá o conjunto de pontos e a topologia de S. Está provado que toda órbita de Sussmann é uma subvariedade integral de P_D.

Maximalidade: Mostremos que S é uma subvariedade integral maximal. Se R é uma subvariedade integral conexa que intercepta S, pelo lema 2.72, o conjunto de pontos de R é aberto em S. Como os abertos conexos de R também são subvariedades integrais conexas de P_D, eles serão abertos em S. Como todo aberto de R é uma união de abertos conexos de R, todo aberto de R será aberto em S. R tem a topologia mais fina do que a topologia de $S|_R$ e ambos têm a mesma dimensão, portanto $R = S|_R$, isto é, R é subvariedade aberta de S.

Como todo ponto de M tem uma D-órbita, P_D possui a propriedade das variedades integrais maximais. Pela proposição 2.64, P_D é involutiva. $\square$

2.5.2 Condições para que $\Delta_D = P_D$

Um lema sobre o colchete de Lie

Lema 2.75. *Sejam X e Y dois campos vetoriais em M e $p \in M$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $X_t(p)$ está definido para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Seja*

$$W(t) = \mathrm{d}X_{-t}(Y|_{X_t(p)}) \in \mathrm{T}_p\, M$$

um caminho (no espaço vetorial $\mathrm{T}_p\, M$). Então

$$W'(t) = \mathrm{d}X_{-t}\Big([X, Y]\big|_{X_t(p)}\Big).$$

Demonstração. A derivada em $\mathrm{T}_p\, M$ pode ser definida da seguinte forma: Seja $v_1, \ldots, v_m$ uma base de $\mathrm{T}_p\, M$. Então W se decompõe como

$$W(t) = \sum_{j=1}^{m} w_j(t) v_j.$$

onde as funções w_j são definidas unicamente. Definimos

$$W'(t) = \sum_{j=1}^{m} w_j'(t) v_j.$$

$W'(t)$ é definida se e somente se as derivadas $w_j'(t)$ existirem. É um simples exercício de álgebra linear mostrar que $W'(t)$ não depende da escolha da base.

Mostremos, primeiro, que a derivada $W'(t)$ existe. Como base de $\mathrm{T}_p\, M$, tome as derivadas parciais $\partial_{x_1}|_p, \ldots, \partial_{x_m}|_p$ de alguma carta local

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^m$$

que tenha $p \in U$. Então

$$W(t) = \sum_{j=1}^{m} W(t)\Big[x_j\big|_p\Big] \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p.$$

Queremos mostrar que as funções $w_j(t) := W(t)[x_j\big|_p]$ são suaves. Seja $\xi = (X, Y, X)$. Considere a aplicação

$$\rho_{\xi,p} : \Omega_{\xi,p} \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^3 \longrightarrow M.$$

Seja $(a, b, c) = \mathrm{Id}\,|_{\Omega_{\xi,p}}$ o sistema de coordenadas usuais em $\Omega_{\xi,p}$. A derivada parcial na coordenada b é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial b}\rho_{\xi,p} = \frac{\partial}{\partial b}X_a\Big(Y_b\big(X_c(p)\big)\Big) = \mathrm{d}X_a\Big(Y|_{Y_bX_c(p)}\Big).$$

Assim,

$$W(t) = \mathrm{d}X_{-t}\Big(Y|_{X_t(p)}\Big) = \frac{\partial}{\partial b}\rho_{\xi,p}(-t, 0, t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w_j(t) = W(t)[x_j\big|_p] = \frac{\partial}{\partial b}\rho_{\xi,p}(-t,0,t)[x_j\big|_p] = \frac{\partial}{\partial b}\bigg|_{(-t,0,t)}\Big[(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})|_{(-t,0,t)}\Big] \\ = \partial_2(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})(-t,0,t), \end{aligned}$$

Onde $\overline{x_j} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ é representante do germe $x_j\big|_p$ — isto é, uma função que coincide com x_j em um aberto contendo p. Como $\rho_{\xi,p}$ é uma função suave, $\partial_2(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})$ é infinitamente diferenciável, e assim $w_j(t) = \partial_2(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})(-t,0,t)$. também o será.

Calculemos então $w_j'(t)$:

$$\begin{aligned} w_j'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})(-t,0,t) \\ &= -\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t), \end{aligned} \tag{2.76}$$

onde foi usada a regra da cadeia.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p}) = \mathrm{d}\rho_{\xi,p}\left(\frac{\partial}{\partial b}\bigg|_{(a,b,c)}\right)\Big[\overline{x_j}|_{\rho_{\xi,p}(a,b,c)}\Big] \\ = \frac{\partial \rho_{\xi,p}}{\partial b}(a,b,c)\Big[\overline{x_j}|_{\rho_{\xi,p}}\Big] = \mathrm{d}X_a\Big(Y|_{Y_bX_c(p)}\Big)\Big[\overline{x_j}|_{\rho_{\xi,p}}\Big] \\ = Y|_{Y_bX_c(p)}\Big[(\widetilde{x_j} \circ X_a)|_{Y_bX_c(p)}\Big], \end{aligned}$$

onde $\widetilde{x_j}$ é a restrição de $\overline{x_j}$ ao contra-domínio do difeomorfismo local X_a.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right|_t\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})(-t,0,c)\right)\\ = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right|_t\Big(Y|_{X_c(p)}\Big[(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})|_{X_c(p)}\Big]\Big) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right|_t\Big(\widetilde{Y}(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})(X_c(p))\Big)\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right|_t\Big(\widetilde{Y}(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})(\alpha(c))\Big),\end{aligned}$$

onde $\widetilde{Y}$ é a restrição do campo Y ao domínio de X_{-t} e $\alpha(c)=X_c(p)$ é uma curva integral de X, com o domínio devidamente escolhido para que sua imagem esteja dentro do domínio de X_{-t}. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c}\right|_t\Big(\widetilde{Y}(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})(\alpha(c))\Big) &= \alpha'(t)\Big[\widetilde{Y}(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})|_{\alpha(t)}\Big] \quad \text{(definição de } \alpha')\\ &= X|_{X_t(p)}\Big[\widetilde{Y}(\widetilde{x_j}\circ X_{-t})\Big|_{X_t(p)}\Big]\\ &= \widetilde{X}\widetilde{Y}((\widetilde{x_j}\circ X_{-t}))(X_t(p))\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t)=\widetilde{X}\widetilde{Y}((\widetilde{x_j}\circ X_{-t}))(X_t(p)) \tag{2.77}$$

onde $\widetilde{X}$ é a restrição apropriada do campo X.

Para calcular

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial b}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})(-t,0,t)\right)(-t,0,t),$$

vamos inverter a ordem da derivação:

$$\frac{\partial}{\partial a}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})=\frac{\partial\rho_{\xi,p}}{\partial a}(a,b,c)\Big[\overline{x_j}|_{\rho_{\xi,p}}\Big]=X|_{\rho_{\xi,p}}\Big[\overline{x_j}|_{\rho_{\xi,p}}\Big]=(X\overline{x_j})\circ\rho_{\xi,p}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial}{\partial a}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\right|_0\left(\frac{\partial}{\partial a}(\overline{x_j}\circ\rho_{\xi,p})(-t,b,t)\right)\\ = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\right|_0 X(\overline{x_j})(X_{-t}Y_bX_t(p)) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\right|_0 X(\overline{x_j})\circ\rho_{\xi,p}(-t,b,t)\\ &= \left.\frac{\partial}{\partial b}\right|_{(-t,0,t)}\Big[(X(\overline{x_j})\circ\rho_{\xi,p})|_{(-t,0,t)}\Big]\\ &= \frac{\partial\rho_{\xi,p}}{\partial b}(-t,0,t)\Big[(X(\overline{x_j}))|_p\Big]=\mathrm{d}X_{-t}\Big(Y|_{X_t(p)}\Big)\Big[X(\overline{x_j})|_p\Big]\\ &= \widetilde{Y}\Big|_{X_t(p)}\Big[\Big(\widetilde{X}\widetilde{x_j}\circ X_{-t}\Big)\Big|_{X_t(p)}\Big]=\widetilde{Y}\Big(\widetilde{X}\widetilde{x_j}\circ X_{-t}\Big)(X_t(p)).\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial}{\partial a}(\overline{x_j} \circ \rho_{\xi,p})\right)(-t,0,t) = \widetilde{Y}\left(\widetilde{X}\widetilde{x_j} \circ X_{-t}\right)(X_t(p)). \tag{2.78}$$

Assim, por (2.76), (2.77) e (2.78),

$$w_j'(t) = \widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})\big)(X_t(p)) - \widetilde{Y}\left(\widetilde{X}\widetilde{x_j} \circ X_{-t}\right)(X_t(p)). \tag{2.79}$$

Mostremos que $\widetilde{X}\widetilde{x_j} \circ X_{-t}\Big|_{X_t(p)} = \widetilde{X}(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})\Big|_{X_t(p)}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})(q) &= \widetilde{X}\big|_q\Big[(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})|_q\Big] = \mathrm{d}X_{-t}\Big(\widetilde{X}\big|_q\Big)\Big[\widetilde{x_j}|_{X_{-t}(q)}\Big] \\
&= \mathrm{d}X_{-t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_0 \widetilde{X}_s(q)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_0 X_{-t}\Big(\widetilde{X}_s(q)\Big)\Big[\widetilde{x_j}|_{X_{-t}(q)}\Big] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_0 X_{s-t}(q)\Big[\widetilde{x_j}|_{X_{-t}(q)}\Big] \quad \text{(para } q \text{ próximo de } X_t(p)) \\
&= X|_{X_{-t}(q)}\Big[\widetilde{x_j}|_{X_{-t}(q)}\Big] = \widetilde{X}\widetilde{x_j}(X_{-t}(q)) = \Big(\widetilde{X}\widetilde{x_j} \circ X_{-t}\Big)(q).
\end{aligned}$$

Assim, usando (2.79) temos:

$$\begin{aligned}
w_j'(t) &= \widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})\big)(X_t(p)) - \widetilde{Y}\big(\widetilde{X}(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})\big)(X_t(p)) \\
&= \Big(\widetilde{X}\widetilde{Y} - \widetilde{Y}\widetilde{X}\Big)(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})(X_t(p)) = \big[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big](\widetilde{x_j} \circ X_{-t})(X_t(p)) \\
&= [X,Y]|_{X_t(p)}\Big[(\widetilde{x_j} \circ X_{-t})|_{X_t(p)}\Big] = \mathrm{d}X_{-t}\Big([X,Y]|_{X_t(p)}\Big)[x_j|_p].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore W'(t) &= \sum_{j=1}^{m} w_j'(t)\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}X_{-t}\Big([X,Y]|_{X_t(p)}\Big)[x_j|_p]\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \\
&= \mathrm{d}X_{-t}\Big([X,Y]|_{X_t(p)}\Big).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.80 (Teorema 4.2 de Sussmann [10])**.** *Sejam M uma variedade $\mathcal{C}^\infty$ e Δ uma distribuição $\mathcal{C}^\infty$ (em M) gerada por uma família D de campos vetoriais definida em todo lugar. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) Δ tem a propriedade das subvariedades integrais.

(b) Δ tem a propriedade das subvariedades integrais maximais.

(c) Δ é D-invariante.

(d) $\forall X \in D, t \in \mathbb{R}, p \in M$ tais que $X_t(p)$ é definido, $\mathrm{d}X_t$ leva vetores de $\Delta(p)$ em vetores de $\Delta(X_t(p))$.

(e) Δ *tem posto constante nas* D*-órbitas e, para cada* $p \in M$*, existem* $X^1, \ldots, X^k \in D$ *tais que:*

(1) $\Delta(p)$ *é gerado por* $X^1\big|_p, \ldots, X^k\big|_p$ *e*

(2) para cada $X \in D$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que existem funções* $\mathcal{C}^\infty$

$$f^i_j : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \ldots, k$$

que satisfazem

$$\left[X, X^i\right]\big|_{X_t(p)} = \sum_{j=1}^{k} f^i_j(t) X^j\big|_{X_t(p)}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

(f) $\Delta = P_D$*.*

Demonstração. As implicações

$$\text{(d)} \Rightarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(f)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}$$

são consequência direta do teorema 2.73 e das definições usadas. Mostremos então as implicações (a) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (d).

(a) $\Rightarrow$ **(e):** Suponha que Δ tem a propriedade das subvariedades integrais.

1. Afirmação: Δ tem posto constante nas D-órbitas. Para mostrar isto, basta mostrar que o posto de Δ é constante sobre as curvas integrais de cada campo $X \in D$. Seja $\alpha : (a, b) \to M$ uma destas curvas integrais. Se mostrarmos que o posto de Δ é localmente constante sobre α, isto é, que para todo $t \in (a, b)$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta \Rightarrow \dim \Delta(\alpha(t + h)) = \dim \Delta(\alpha(t))$, isto será suficiente.

   Ora, pegue uma subvariedade integral A de Δ contendo o ponto p. Como α é curva integral de um campo tangente a A, $\alpha(t + h)$ estará em A para todo h suficientemente pequeno (coincidindo com a curva integral de $X|_A$ que passa por $\alpha(t)$ quando o parâmetro é t). Como a dimensão de A é sempre a mesma (por se tratar de uma variedade),

   $$\dim \Delta(\alpha(t + h)) = \dim A = \dim \Delta(\alpha(t)).$$

2. Dado $p \in M$, seja N uma subvariedade integral de Δ contendo o ponto p. Sejam $X^1, \ldots, X^k \in D$ tais que $X^1\big|_p, \ldots, X^k\big|_p$ são uma base de $\Delta(p)$. Como eles são tangentes a N, considere as restrições $Y^1 =$

$X^1|_N, \ldots, Y^k = X^k\big|_N$. Os vetores $Y^1|_p, \ldots, Y^k\big|_p$ formam uma base de $\mathrm{T}_p N$. Pela continuidade dos campos, existe uma vizinhança aberta $V \subset N$ de p tal que, para todo $p' \in V$, $Y^1|_{p'}, \ldots, Y^k\big|_{p'}$ são base de $\mathrm{T}_{p'} N$.

Podemos supor, pela escolha adequada de N, que $N = V$. Assim, os campos $Y^1, \ldots, Y^k$ formam uma base do espaço tangente de N em cada ponto. Isto implica que, dado qualquer campo vetorial real $W \in \mathfrak{X}(N)$, podemos escrever $W = \sum_{j=1}^k w_j Y^j$, onde as funções $w_j : V \to \mathbb{R}$ serão suaves — para verificar isto, basta verificar que a matriz mudança de base, das derivadas parciais das cartas locais de V para os campos $Y^1, \ldots, Y^k$, será suave.

Tome estes campos $X^1, \ldots, X^k$ como os requeridos pela condição (e). Dado $X \in D$,

$$\left[X, X^i\right] \text{ é tangente a } N.$$

Assim, podemos escrever

$$\left[X, X^i\right]\big|_N = \sum_{j=1}^k g_j^i Y^j, \quad \forall i = 1, \ldots, k,$$

onde as funções $g_j^i : i, j = 1, \ldots, k$ são suaves em N.

Seja $\delta > 0$ tal que $X_t(p) \in N$ sempre que $|t| < \delta$. Assim, temos

$$\left[X, X^i\right]\big|_{X_t(p)} = \sum_{j=1}^k g_j^i(X_t(p))\, X^j\big|_{X_t(p)}, \quad \forall i = 1, \ldots, k.$$

As funções $t \mapsto g_j^i(X_t(p))$ são as f_j^i requeridas na condição (e).

(e) $\Rightarrow$ (d): Suponha que vale a propriedade (e). Chamemos de (d$'$) a seguinte propriedade: para cada $p \in M, X \in D, \exists \delta > 0$ tal que $\forall |t| < \delta$: $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) = \Delta(X_t(p))$. Mostraremos então que a condição (e) implica (d$'$) e que (d$'$) implica (d).

(e) $\Rightarrow$ (d)$'$: Defina, para $|t| < \epsilon$, $W_i(t) = \mathrm{d}X_{-t}\Big(X^i|_{X_t(p)}\Big)$. Então, pelo lema 2.71,

$$\begin{aligned} W_i'(t) &= \mathrm{d}X_{-t}\Big(\left[X, X^i\right]\big|_{X_t(p)}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^k f_j^i(t)\, \mathrm{d}X_{-t}\Big(X^j\big|_{X_t(p)}\Big) = \sum_{j=1}^k f_j^i(t) W_j(t). \end{aligned}$$

Assim, $(W_1, \dots, W_k)$, curva em $(\mathrm{T}_p\, M)^k$, é uma solução do sistema de EDO:

$$\begin{cases} W_i'(t) = \sum_{j=1}^{k} f_j^i(t) W_j(t), & i = 1, \dots, k, \\ W_i(0) = X^i\big|_p, & i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Como as condições iniciais de $W_1, \dots, W_k$ estão em $\Delta(p)$, então os vetores $W_1(t), \dots, W_k(t)$ estarão em $\Delta(p)$ para todo $|t| < \epsilon$. Não mostraremos isto em detalhes. A ideia é que podemos resolver o sistema acima no espaço $\Delta(p)^k$ e usar a unicidade da solução.

Como $W_1(0), \dots, W_k(0)$ são base $W_1, \dots, W_k$, existe $\delta \in (0, \epsilon)$ tal que $W_1(t), \dots, W_k(t)$ geram $\Delta(p)$ para todo $|t| < \delta$.

Isto implica que todo vetor $\vec{v} \in \Delta(p)$ pode ser escrito como combinação linear dos $W_i(t)$, para todo $|t| < \delta$. Mas

$$\mathrm{d}X_t(W_i(t)) = X^i\big|_{X_t(p)} \in \Delta(X_t(p)).$$

Assim, $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) \subset \Delta(X_t(p)), \forall |t| < \delta$.

Como X_t é um difeomorfismo local , a dimensão de $\mathrm{d}X_t(\Delta(p))$ é a mesma que a dimensão de $\Delta(p)$, que é a mesma que a dimensão de $\Delta(X_t(p))$ — pois, por hipótese, o posto de Δ é constante nas órbitas. Assim $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) = \Delta(X_t(p))$, sempre que $|t| < \delta$.

(d′) ⇒ (d): Agora, devemos mostrar que vale $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) \subset \Delta(X_t(p))$ para todo t em que $X_t(p)$ é definido.

Seja $(a, b) \subset \mathbb{R}$ o domínio da curva integral maximal $t \mapsto X_t(p)$. Seja $J \subset (a_p, b_p)$ o conjunto de todos os t tais que $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) = \Delta(X_t(p))$. Devemos mostrar que $J = (a, b)$.

Dado $t \in J$ com $q = X_t(p)$, pela propriedade $(\mathrm{d})'$, existe $\delta_t > 0$ tal que

$$|h| < \delta_t \Rightarrow \mathrm{d}X_h(\Delta(q)) = \Delta(X_h(q)).$$

Pela propriedade de grupo (proposição 2.13) e pela regra da cadeia,

$$X_h(q) = X_{t+h}(p) \text{ e } \mathrm{d}X_{t+h}(\Delta(p)) = \mathrm{d}X_h(\mathrm{d}X_t(\Delta(p))) = \Delta(X_{t+h}(p)).$$

Assim, $(t - \delta_t, t + \delta_t) \in J$. Portanto, J é aberto.

J é fechado em (a, b): Seja $(t_0, t_1, \dots)$ uma sequência em J que converge para $t \in (a, b)$. Afirmação: $t \in J$. De fato, seja δ' tal que

$$|h| < \delta' \Rightarrow \mathrm{d}X_h(\Delta(X_t(p))) = \Delta(X_h(X_t(p))) = \Delta(X_{t+h}(p))$$

(dado pela propriedade (d′)). Como t é o limite de uma sequência em J, existe $t_k \in J$ tal que $|t-t_k| < \delta_t$. Então $X_{t_k}(p) = X_h(X_t(p))$, para $h = t-t_k$. Assim, $X_t(p) = X_{-h}X_{t_k}(p)$ e

$$\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) = \mathrm{d}X_{-h}(\mathrm{d}X_{t_k}(\Delta(p)) = \mathrm{d}X_{-h}(\Delta(X_{t_k}(p))).$$

Como X_{-h} é o inverso de X_h, $\mathrm{d}X_{-h}$ é o inverso de $\mathrm{d}X_h$ e, assim, leva $\Delta(X_{t_k}(p))$ em $\Delta(X_t(p))$. Portanto, $\mathrm{d}X_t(\Delta(p)) = \Delta(X_t(p))$ e $t \in J$.

Temos que J é aberto e fechado em (a, b), portanto $J = (a, b)$. □

Corolário 2.81. *Uma distribuição suave $\Delta = \Delta_D$ em M é D-invariante se e somente se ela é involutiva e seu posto é constante nas D-órbitas.*

Demonstração. Se Δ é D-invariante, $\Delta = P_D$ e o teorema 2.73 nos diz que P_D é involutiva e tem posto constante nas D-órbitas.

Por outro lado, se Δ é involutiva e tem posto constante nas órbitas, vamos mostrar que Δ satisfaz a condição (e) do teorema 2.80.

Dado $p \in M$, sejam $X^1, \ldots, X^k \in D$ tais que $X^1\big|_p, \ldots, X^k\big|_p$ são uma base de $\Delta(p)$. Dado $X \in D$ qualquer, considere a curva integral $\alpha(t) = X_t(p)$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $X^1\big|_{\alpha(t)}, \ldots, X^k\big|_{\alpha(t)}$ são L.I. para todo $|t| < \epsilon$.

Como o posto de Δ é constante nas órbitas,

$$\dim \Delta(\alpha(t)) = \dim \Delta(\alpha(0)) = k.$$

Isto implica que $X^1\big|_{\alpha(t)}, \ldots, X^k\big|_{\alpha(t)}$ é uma base de $\Delta(\alpha(t))$ sempre que $|t| < \epsilon$.

Seja $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como Δ é involutiva, $[X, X^i] \in \Delta$. Como os campos $X^1, \ldots, X^k$ formam uma base de Δ sobre $\alpha(t), |t| < \epsilon$, podemos escrever

$$[X, X^i]\big|_{\alpha(t)} = \sum_{j=1}^{k} f^i_j(t)\, X^j\big|_{\alpha(t)}, \quad \forall |t| < \epsilon.$$

Fica como exercício para o leitor provar que as funções f^i_j são suaves. □

Capítulo 3

Um Parêntese: Transformada de Fourier

3.1 Aproximação da identidade

Definição 3.1. Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n, p \in [1, \infty)$ e m^n a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$, o espaço $L^p(\Omega)$ é o espaço vetorial

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ Lebesgue-mensurável e } \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}m^n < \infty \right\},$$

dotado da *seminorma*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}m^n \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 3.2. *Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função L^1. O majorante radial de ϕ é a função*

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & h & \longmapsto & \sup_{|y|>h} |\phi(y)|. \end{array}$$

Suponha que $I := \int_0^\infty \eta(h) \, \mathrm{d}h$ é finito.

Então, para toda função localmente integrável f, dados $x \in \mathbb{R}$ e $M > 0$ arbitrários,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_M(x) f(x - y)| \, \mathrm{d}y \leq I \, \mathrm{H}f(x),$$

onde $\phi_M(x) = M\phi(Mx)$ e $\mathrm{H}f$ é a função maximal de Hardy-Littlewood, definida por

$$\mathrm{H}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x - y)| \, \mathrm{d}y.$$

Demonstração. Fixado $x \in \mathbb{R}$, seja $F = F_x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(h) = \int_{-h}^{h} |f(x-y)| \, \mathrm{d}y.$$

Note que

$$F(h) \leq 2h \, \mathrm{H}f(x).$$

F é contínua e, quando restrita a compactos, é de variação limitada. Assim, dado $r > 0$, podemos definir no intervalo $[0, r]$ a medida de Lebesgue-Stieltjes μ_F, determinada pela fórmula

$$\mu_F([a,b]) = F(b) - F(a) = \int_{|y| \in [a,b]} |f(x-y)| \, \mathrm{d}y,$$

para todo intervalo $[a, b] \subset [0, r]$. É fácil ver que, para uma função integrável $g : [0, r] \to \mathbb{C}$, a integral de Lebesgue-Stieltjes de g em relação a F será

$$\int_0^r g(h) \, \mathrm{d}F(h) = \int_{-r}^{r} g(|h|) |f(x-h)| \, \mathrm{d}h.$$

Assim,

$$\int_{-r}^{r} |\phi_M(y) f(x-y)| \, \mathrm{d}y \leq \int_{-r}^{r} \eta_M(|y|) |f(x-y)| \, \mathrm{d}y = \int_0^r \eta_M(y) \, \mathrm{d}F(y),$$

onde $\eta_M(y) = M\eta(My)$. A função η_M tem variação limitada em $[0, r]$. Com isto e com o fato de que F tem variação limitada em $[0, r]$ e é contínua, podemos fazer a seguinte integração por partes:

$$\int_0^r \eta_M(y) \, \mathrm{d}F(y) = \eta_M(r) F(r) - \int_0^r F(y) \, \mathrm{d}\eta_M(y).$$

$$\begin{aligned} -\int_0^r F(y) \, \mathrm{d}\eta_M(y) = \int_0^r F(y)(-\mathrm{d}\eta_M(y)) &\leq \int_0^r 2y \, \mathrm{H}f(x)(-\mathrm{d}\eta_M(y)) \\ &= 2 \, \mathrm{H}f(x) \int_0^r -y \, \mathrm{d}\eta_M(y) \end{aligned}$$

(notando que $-d\eta_M(y)$ é medida positiva). Novamente, usamos a integração por partes para calcular

$$\int_0^r -y \, \mathrm{d}\eta_M(y) = \eta_M(r)(-r) + \int_0^r \eta_M(y) \, \mathrm{d}y.$$

Temos

$$\int_{-r}^{r} |\phi_M(y) f(x-y)| \, \mathrm{d}y \\ \leq \eta_M(r) F(r) + 2\,\mathrm{H}f(x)\bigg(\eta_M(r)(-r) + \int_0^r \eta_M(y)\,\mathrm{d}y\bigg).$$

Note que $\lim_{r\to\infty} \eta_M(r) r = 0$, pois

$$\int_{\frac{r}{2}}^{r} \eta_M(y)\,\mathrm{d}y \geq \eta_M(r)\frac{r}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{r}{2}}^{r} \eta_M(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Assim, fazendo $r \to \infty$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_M(y) f(x-y)|\,\mathrm{d}y \leq 2\,\mathrm{H}f(x) \int_0^{\infty} \eta_M(y)\,\mathrm{d}y = I\,\mathrm{H}f(x).$$

□

Corolário 3.3. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ tais que ϕ tem majorante radial integrável e $I := \int \phi$. Então, para quase todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{M\to\infty} f * \phi_M(x) = I f(x).$$

Demonstração. Basta mostrar o caso em que $I = 1$. Primeiro, suponha que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Seja $v(y) = \int_{-\infty}^{y} \phi_M(t)\,\mathrm{d}t$. Façamos uma integração por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\phi_M(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\mathrm{d}v(y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(y) f'(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Como $\lim_{M\to\infty} v(y)$ é 0 se $y < 0$ e 1 se $y > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(y) f'(x-y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow{M\to\infty} \int_0^{\infty} f'(x-y)\,\mathrm{d}y = f(x).$$

Agora, suponha que f é uma função integrável qualquer. Usando o fato de que as funções suaves de suporte compacto são densas em $L^1(\mathbb{R})$, vamos escrever

$$f = f_0 + r,$$

onde $f_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\|r\|_1$ é arbitrariamente pequena.

$$\begin{aligned} |f * \phi_M(x) - f(x)| &= |(f_0 + r) * \phi_M(x) - (f_0 + r)(x)| \\ &= |f_0 * \phi_M(x) + r * \phi_M(x) - f_0(x) + r(x)| \\ &\leq |f_0 * \phi_M(x) - f_0(x)| + |r * \phi_M(x)| + |r(x)| \\ &\leq |f_0 * \phi_M(x) - f_0(x)| + J\,\mathrm{H}r(x) + |r(x)|, \end{aligned}$$

onde J é a integral do majorante radial de ϕ.

Dado $\epsilon > 0$, temos:

1. $|r(x)| < \epsilon$ para todo x exceto em um conjunto de medida menor que $\|r\|_1/\epsilon$.

2. $\mathrm{H}r(x) < \epsilon$ para todo x exceto em um conjunto de medida menor que $C\|r\|_1/\epsilon$, onde C é uma constante que não depende da função r (ver Stein [8], capítulo I para uma demonstração deste fato).

Assim,

$$\limsup_{M\to\infty} |f * \phi_M(x) - f(x)| \leq (1+J)\epsilon$$

para todo x exceto em um conjunto de medida menor que

$$\frac{\|r\|_1}{\epsilon} + C\frac{\|r\|_1}{\epsilon}.$$

Fazendo $r \to 0$, reduzimos o conjunto de exceções para medida nula. Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos o resultado desejado. □

3.2 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R})$

Definição 3.4. Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. A *transformada de Fourier* de f é a função $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

A transformada de Fourier é um operador linear que será denotado de duas maneiras:

(i) $\hat{f} = (f)\hat{}$

(ii) $\hat{f} = \mathcal{F}_x(f(x))$

Proposição 3.5. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

(ii) $\mathcal{F}_x(f(x+h))(\xi) = \mathrm{e}^{i\xi h}\hat{f}(\xi), \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

(iii) $\hat{f}(\xi + h) = \mathcal{F}_x\big(\mathrm{e}^{-ixh}f(x)\big)(\xi), \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

(iv) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ diferente de zero,

$$\mathcal{F}_x(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|}\hat{f}(\tfrac{1}{\lambda}\xi).$$

(v) $\hat{f}$ é uniformemente contínua.

(vi) Se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ e $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, então

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi).$$

(vii) Se a função $xf(x)$ em x pertence a $L^1(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e

$$(\hat{f})' = \mathcal{F}_x(-ixf(x)).$$

(viii) $\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Demonstração. (i):

$$|\hat{f}(\xi)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$= \|f\|_1.$$

(ii):

$$\mathcal{F}_x(f(x+h)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi(u-h)} f(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi(-h)}\mathrm{e}^{-i\xi u} f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{i\xi h}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi u} f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{i\xi h}\hat{f}(\xi).$$

(iii):

$$\hat{f}(\xi+h) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i(\xi+h)x} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x}\mathrm{e}^{-ihx} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathcal{F}_x\big(\mathrm{e}^{-ihx} f(x)\big)(\xi).$$

(iv): Se $\lambda > 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi\frac{u}{\lambda}} f(u)\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda}).$$

Se $\lambda < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{e}^{-i\xi\frac{u}{\lambda}} f(u)\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\lambda}\hat{f}(\tfrac{\xi}{\lambda}).$$

(v):

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)| &= \left|\mathcal{F}_x\big((\mathrm{e}^{-ihx} f(x)\big)(\xi)-\hat{f}(\xi)\right| \\
&= \left|\mathcal{F}_x\big((\mathrm{e}^{-ihx}-1)f(x)\big)(\xi)\right| \le \left\|x\mapsto(\mathrm{e}^{-ihx}-1)f(x)\right\|_1 \xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}
$$

onde é usado o teorema da convergência dominada, e a convergência não depende da variável ξ.

(vi): Suponha que $f', f\in L^1(\mathbb{R})$, f' é contínua e $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$. Por integração por partes:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f'}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{M\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\Big|_{x=-M}^{M} - \int_{-M}^{M}\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-i\xi x}\right) f(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty}(-i\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x = i\xi\hat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

(vii): Suponha que $x\mapsto xf(x)\in L^1(\mathbb{R})$.

$$
\frac{\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)}{h} = \frac{1}{h}\mathcal{F}_x\big(\mathrm{e}^{-ixh}f(x)-f(x)\big)(\xi) = \mathcal{F}_x\left(\frac{f(x)\big(\mathrm{e}^{-ixh}-1\big)}{h}\right)(\xi).
$$

Pela propriedade (i), se mostrarmos que

$$
\left[x\mapsto f(x)\frac{\mathrm{e}^{-ixh}-1}{h}\right] \xrightarrow{h\to 0} [x\mapsto -ixf(x)] \text{ em } L^1(\mathbb{R}), \tag{3.6}
$$

então teremos o resultado desejado. A convergência pontual destas funções é dada por:

$$
\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-ixh}-1}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\bigg|_0 \mathrm{e}^{-ixh} = -ix \text{ (definição de derivada)}
$$

Mostremos que a convergência é dominada por $|xf(x)|$. Pela desigualdade do valor médio,

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{\mathrm{e}^{-ixh}-1}{h}\right| \le \sup_{\xi\in[0,1]}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{\xi h}\mathrm{e}^{-ixr}\right| = \sup_{\xi\in[0,1]}\left|-ix\mathrm{e}^{-ix\xi h}\right| \le |x| \\
\therefore \left|f(x)\frac{\mathrm{e}^{-ixh}-1}{h}\right| \le |xf(x)|\,.
\end{gathered}
$$

Assim, o teorema da convergência dominada nos dá o resultado desejado.

(viii): Suponha inicialmente que f é uma função $\mathcal{C}^1$ de suporte compacto. Por (vi), (v) e (i), $\xi \mapsto i\xi\hat{f}(\xi)$ é uma função uniformemente contínua e limitada, o que implica que $\hat{f}(\pm\infty) = 0$.

Caso geral: dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ qualquer, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções $\mathcal{C}^1$ de suporte compacto que converge em $L^1(\mathbb{R})$ para f. Pela propriedade (i), $\hat{f}_n$ converge uniformemente para $\hat{f}$. Assim, podemos trocar a ordem no limite duplo:

$$\hat{f}(\pm\infty) = \lim_{|\xi|\to\infty} \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = \lim_{n\to\infty} \lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = 0.$$

$\square$

Exemplo 3.7 (Transformada da curva gaussiana)*.* Seja $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. As regras da transformada de Fourier e a integral gaussiana nos dão:

$$(g')\hat{}(\xi) = i\xi\hat{g}(\xi) = \mathcal{F}_x(-2xg(x)) = -2i\mathcal{F}_x(-ixg(x)) = -2i(\hat{g})'(\xi),$$
$$\hat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Assim, $\hat{g}$ é solução de:

$$\begin{cases} u'(\xi) = -\frac{\xi}{2}u(\xi), \forall\xi \in \mathbb{R}. \\ u(0) = \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Resolvendo a equação diferencial, obtemos a solução

$$\hat{g}(\xi) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4}} = \sqrt{\pi}g\big(\tfrac{1}{2}\xi\big).$$

Pela regras da transformada de Fourier, pode-se calcular ainda a transformada segunda (notando que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\hat{\hat{g}}(x) = \mathcal{F}_\xi\big(\sqrt{\pi}g\big(\tfrac{1}{2}\xi\big)\big)(x) = \sqrt{\pi}(2\hat{g}(2x)) &= 2\sqrt{\pi}\hat{g}(2x) \\ &= 2\sqrt{\pi}\big(\sqrt{\pi}g\big(\tfrac{1}{2}2x\big)\big) = 2\pi g(x).\end{aligned}$$

Convolução

Definição 3.8. (i) Definimos o operador $\tilde{}$ como sendo a reflexão:

$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

(ii) Dado $h \in \mathbb{R}$, definimos o operador translação τ_h como sendo:

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h).$$

Definição 3.9. A *convolução* de duas funções Lebesgue-mensuráveis $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ no ponto $x \in \mathbb{R}$ é denotada $(f * g)(x)$ e definida (quando a integral abaixo existir) por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Proposição 3.10. *Sejam $f, g, f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}), h \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$. A convolução satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $f * g = g * f$.

(ii) $(f * g)\tilde{} = \tilde{f} * \tilde{g}$.

(iii) $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g$.

(iv) $(f_1 + \lambda f_2) * g = f_1 * g + \lambda f_2 * g$.

Demonstração.

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,\mathrm{d}u = (g * f)(x).$$

$$\begin{aligned}(f * g)\tilde{}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x+y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x+y)\tilde{g}(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x-u)\tilde{g}(u)\,\mathrm{d}u = \tilde{f} * \tilde{g}(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_h(f * g)(x) = (f * g)(x-h) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-h-y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau_h f)(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = (\tau_h f) * g(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((f_1 + \lambda f_2) * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x-y) + \lambda f_2(x-y))g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (f_1 * g + \lambda f_2 * g)(x).\end{aligned}$$

□

Proposição 3.11. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

(i) $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *com* $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ *e*

(ii) $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

Demonstração. Para mostrar que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, usaremos o teorema de Fubini-Tonelli:

$$\begin{aligned}
&\int_{\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Façamos a transformada de Fourier de $f * g$.

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Para mudar a ordem da integração, devemos mostrar que

$$\left[(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x-y)g(y)\right] \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |\mathrm{e}^{ix\xi} f(x-y)g(y)| \,\mathrm{d}m^2(x,y) \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-ix\xi} f(x-y)g(y)\right| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-ix\xi} f(x-y)\right| \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x-y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \mathcal{F}_x(f(x-y))(\xi)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \mathrm{e}^{-i\xi y} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}y \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

3.2.1 Funções de Schwartz

Definição 3.12. (i) Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é de *decrescimento rápido* se

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n f(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Uma *função de Schwartz em* $\mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que as derivadas $f^{(n)}$ são de decrescimento rápido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de Schwartz em $\mathbb{R}$.

Observação 3.13 (Funções de múltiplas variáveis). Para que uma função $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ seja de Schwartz, pede-se que

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^n D^\alpha f(x) = 0$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, onde $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N}$ e $\|.\|$ é uma norma pré-fixada em $\mathbb{R}^N$.

Proposição 3.14. *(i) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.*

(ii) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iii) Se $P(x)$ é um polinômio em x e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \mapsto P(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(iv) Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, f é limitada.

(v) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

Demonstração. Mostremos que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial.Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m (f + \lambda g)^{(n)}(x) = \lim_{|x|\to\infty} x^m f^{(n)}(x) + \lambda \lim_{|x|\to\infty} x^m g^{(n)}(x) = 0.$$

Assim $f + \lambda g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mostremos que toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tem $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m (f')^{(n)}(x) = \lim_{|x|\to\infty} x^m f^{(n+1)}(x) = 0.$$

Assim, $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mostremos que, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e para todo polinômio $P(x)$, $x \mapsto P(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Seja $P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$. Então

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty} x^m P(x)f(x) &= \lim_{|x|\to\infty} x^m \left(\sum_{j=0}^{p} a_j x^j\right) f(x) \\ &= \lim_{|x|\to\infty} \sum_{j=0}^{p} a_j x^{j+m} f(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j \lim_{|x|\to\infty} x^{j+m} f(x) = 0\end{aligned}$$

Assim, $x \mapsto P(x)f(x)$ é de decrescimento rápido. Como todas as derivadas de $P(x)f(x)$ são somas da forma $P_1(x)f_1(x) + \cdots + P_k(x)f_k(x)$, onde $P_1, \ldots, P_k$ são polinômios e $f_1, \ldots, f_k$ são funções de Schwartz, teremos o resultado desejado.

Mostremos que toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é limitada. Como $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, existe $K > 0$ tal que $|x| > K \Rightarrow |f(x)| < 1$. Como f é contínua, f é limitada em $[-K, K]$. Assim, $|f(x)| \leq \max\{\sup_K |f|, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ é integrável. $x \mapsto (1 + x^2)f(x)$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, assim $x \mapsto (1 + x^2)f(x)$ é limitada por algum $L > 0$.

$$|(1 + x^2)f(x)| \leq L \therefore |f(x)| \leq \frac{L}{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq L \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = L\pi \therefore f \in L^1(\mathbb{R}).$$

□

Proposição 3.15. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Primeiro, mostremos que $\hat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R}) &\Rightarrow \exists (\hat{f})' = \mathcal{F}_x(-ixf(x)). \\ x \mapsto -ix^2 f(x) \in L^1(\mathbb{R}) &\Rightarrow \exists (\hat{f})'' = \mathcal{F}_x(-ixf(x))' = \mathcal{F}_x\big((-i)^2 x^2 f(x)\big). \\ &\vdots \\ x \mapsto (-i)^{k-1} x^k f(x)) \in L^1(\mathbb{R}) &\Rightarrow \exists (\hat{f})^{(k)} = \mathcal{F}_x\big((-1)^k x^k f(x)\big). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Em seguida, mostremos que $\hat{f}$ tem decrescimento rápido.

$$\begin{aligned}
\lim_{|\xi|\to\infty} \xi \hat{f}(\xi) &= \lim_{|\xi|\to\infty} \tfrac{1}{i}(f')\hat{}(\xi) = 0. \\
\lim_{|\xi|\to\infty} \xi^2 \hat{f}(\xi) &= \lim_{|\xi|\to\infty} \left(\tfrac{1}{i}\right)^2 (f'')\hat{}(\xi) = 0. \\
&\vdots \\
\lim_{|\xi|\to\infty} \xi^k \hat{f}(\xi) &= \lim_{|\xi|\to\infty} \left(\tfrac{1}{i}\right)^k (f^{(k)})\hat{}(\xi) = 0. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Já mostramos que a transformada de Fourier de uma função de Schwartz é sempre suave e tem decrescimento rápido. Falta mostrar que as derivadas de $\hat{f}$ têm decrescimento rápido. Mas

$$(\hat{f})^{(n)} = \mathcal{F}_x((-ix)^n f(x)),$$

que é a uma transformada de Fourier de função de Schwartz e, portanto, tem decrescimento rápido. $\square$

Exemplo 3.16. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função gaussiana.

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

É fácil ver que g tem decrescimento rápido:

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{x^2}} = 0 \qquad \text{(Regra de L'Hospital).}$$

Assim, $x \mapsto P(x)g(x)$ também tem decrescimento rápido, onde P é um polinômio qualquer. Como todas as derivadas de g são da forma $x \mapsto P(x)g(x)$, g é uma função de Schwartz.

Exemplo 3.17 (Autovetor da transformada de Fourier). Considere g a função gaussiana. Vimos no exemplo 3.7 que $\hat{g}(\xi) = \sqrt{\pi} g(\xi/2)$. Fazendo $\lambda = 1/\sqrt{2}$, defina

$$\begin{gathered}
f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\lambda^2 x^2} = g(\lambda x) \\
\therefore \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\lambda}\hat{g}\left(\tfrac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} g\left(\tfrac{\xi}{2\lambda}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} f\left(\tfrac{\xi}{2\lambda^2}\right) = \sqrt{2\pi} f(\xi).
\end{gathered}$$

Assim, temos que $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ é um autovetor da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e seu autovalor associado é $\sqrt{2\pi}$.

3.2.2 Transformada de Fourier inversa

Definição 3.18. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotaremos por $\check{f}$ ou $\mathcal{F}_\xi^{-1}(f(\xi))$ a seguinte função, chamada de *transformada de Fourier inversa* de f:

$$\check{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\xi x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Note que $\check{f} = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}$.

Observação 3.19. Vimos, nas propriedades da transformada de Fourier, que $\hat{\bar{f}} = \bar{\hat{f}}$. O mesmo vale para a transformada inversa: $\check{\bar{f}} = \bar{\check{f}}$.

Lema 3.20. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$\int \hat{f} g = \int f \hat{g}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} f(y)\,\mathrm{d}y \right) g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-ixy} f(y) g(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} g(x)\,\mathrm{d}x \right) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{g}(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.21. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$$

para quase todo x.

Demonstração. Seja $G(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

$$\hat{\hat{f}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixy} \hat{f}(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{M \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tfrac{1}{M} y) \mathrm{e}^{-ixy} \hat{f}(y)\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G(\tfrac{1}{M} y) \mathrm{e}^{-ixy} \hat{f}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\tfrac{1}{M} y) \mathcal{F}_u(f(u-x))(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_t(G(\tfrac{1}{M} t))(y) f(y-x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} M \widehat{G}(My) f(y-x)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_M(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

$\widehat{G}$ tem majorante radial integrável igual a ele mesmo e $\int \widehat{G} = (G)\hat{\hat{}}(0) = 2\pi G(0) = 2\pi$ (ver exemplo 3.7). Assim, pelo corolário 3.3,

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{G}_M(y) f(y-x)\,\mathrm{d}y = 2\pi f(-x),$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolário 3.22. *Suponha que f e $\hat{f}$ ambas pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ (e, portanto, também $\check{f}$). Então*

$$(\check{f})\hat{} = \frac{1}{2\pi}(\tilde{f})\hat{}\hat{} = \tilde{\tilde{f}} = f \quad e$$

$$(\hat{f})\check{} = \frac{1}{2\pi}(\hat{f})\hat{\tilde{}} = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{\tilde{f}}} = \tilde{\tilde{f}} = f,$$

onde as igualdades são em quase todo ponto.

A seguinte equação, válida para quase todo x, é chamada de Fórmula Inversa de Fourier*:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\xi x}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Corolário 3.23. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}.$$

Demonstração. Para ver que $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, basta notar que

$$x^n (fg)^{(m)}(x) = x^n \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} f^{(j)}(x) g^{(m-j)}(x)$$

se anula quando $|x| \to \infty$ para quaisquer m, n naturais.

$$fg = (\check{f} * \check{g})\hat{}$$

$$\therefore \widehat{fg} = (\check{f} * \check{g})\hat{}\hat{} = 2\pi(\check{f} * \check{g})\tilde{} = 2\pi(\tilde{\check{f}} * \tilde{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g}).$$

$\square$

Proposição 3.24 (Teorema de Plancherel)**.** *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Então*

$$\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2\,.$$

Demonstração. Para começar, note que

$$\overline{(\hat{f})}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathrm{e}^{-i\xi y} f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\xi y}\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \widehat{(\overline{f})}(-\xi) = \tilde{\hat{\overline{f}}}(\xi).$$

Note também que o operador $\tilde{}$ comuta com a transformada de Fourier e com a conjugação.

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\overline{\hat{f}(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\widehat{\tilde{\overline{f}}(y)}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widehat{\widehat{\tilde{\overline{f}}(y)}}\,\mathrm{d}y \\ = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}y = 2\pi\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

□

3.2.3 Aplicação: o núcleo de Poisson no semiplano

Observação 3.25. Vamos procurar soluções da seguinte equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

definidas no semiplano $y > 0$ de $\mathbb{R}^2$ e que se anulam no infinito. Supondo que u é suficientemente bem-comportada para isto, aplicamos a transformada de Fourier em relação à variável x para obter

$$-\xi^2\hat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2\hat{u}(\xi, y)}{\partial y^2} = 0.$$

As soluções desta E.D.O. em y que nos interessam (por não crescerem demasiadamente no infinito) são dadas por

$$\hat{u}(\xi, y) = k(\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|y},$$

Como a transformada de Fourier transforma convoluções em produtos, a solução u será da forma

$$u(x, y) = \check{k}(x) * \mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|y})(x),$$

onde o asterisco denota convolução em relação à variável x.

Calculemos a transformada inversa de $\mathrm{e}^{-|\xi|y}$, que será chamada de núcleo de Poisson no semiplano.

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|y})(x) = \tfrac{1}{y}\mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|})(\tfrac{x}{y}).$$

$$\mathcal{F}_\xi^{-1}(\mathrm{e}^{-|\xi|})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x\xi)\mathrm{e}^{-|\xi|}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Para integrar $\cos(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi}$, podemos fazer a integração por partes duas vezes:

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \cos(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi} &= -\mathrm{e}^{-\xi}\cos(x\xi)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-x\,\mathrm{sen}(x\xi))(-\mathrm{e}^{-\xi})\,\mathrm{d}\xi \\ &= 1 - x\int_0^\infty \mathrm{sen}(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{sen}(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi &= -\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{sen}(x\xi)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x\cos(x\xi)(-\mathrm{e}^{-\xi})\,\mathrm{d}\xi \\ &= x\int_0^\infty \cos(x\xi)\mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi = xI \end{aligned}$$

$$\therefore I = 1 - x^2 I \qquad \therefore I(1+x^2) = 1 \qquad \therefore I = \frac{1}{1+x^2}.$$

Assim, temos

$$u(x,y) = \check{k}(x) * P_y(x),$$

onde estamos usando a seguinte notação:

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad P_y(x) = \frac{1}{y}P(\tfrac{x}{y}) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Como P tem majorante radial integrável e integral unitária, o corolário 3.3 nos diz que

$$\lim_{y\to 0} \check{k}(x) * P_y(x) = \check{k}(x)$$

para quase todo x. A solução da equação fica sendo determinada pelo valor limite de u no eixo x, ou seja:

$$u(x,y) = u(x,0^+) * P_y(x).$$

Capítulo 4

Sobre a Condição $(\mathcal{P})$ em $\mathbb{R}^2$

4.1 Resolubilidade Local

Definição 4.1. Seja L um campo vetorial (complexo) definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e seja $p \in \Omega$. Dizemos que L é *localmente resolúvel em* p se existe uma vizinhança $U = U(p)$ tal que, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $Lu = f$ em U (isto é, $Lu(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ para toda função teste ϕ com suporte contido em U).

Observação 4.2. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, estamos denotando por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço das distribuições (no sentido de Laurent Schwartz) em Ω, isto é, o dual do espaço $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ das funções suaves em Ω com suporte compacto (que pode ser identificado com o espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^N$ com suporte compacto contido em Ω), dotado da topologia apropriada. Para uma introdução à teoria das distribuições, ver Hormänder [2].

Observação 4.3. A definição será equivalente se supormos que as distribuições u e as funções f têm suporte compacto.

Observação 4.4. Equivalentemente, podemos pedir nesta definição que exista $u \in \mathcal{D}'(U)$ tal que $Lu = f|_U$

Proposição 4.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $(x, t) = \mathrm{Id}|_\Omega$ as coordenadas usuais de Ω e*

$$L = A\frac{\partial}{\partial t} + B\frac{\partial}{\partial x}$$

um campo vetorial complexo em Ω, com $A, B \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Vamos supor que $|A| + |B| > 0$ em Ω. Dado $p \in \Omega$, $|A|$ ou $|B|$ é diferente de zero em alguma vizinhança Ω_p de p. Vamos supor que este campo é A. Então definiremos em Ω_p o campo $\tilde{L}$ dado por $(1/A)L$, isto é,

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{\Omega_p} + \tilde{B}\frac{\partial}{\partial x}\bigg|_{\Omega_p},$$

onde

$$\tilde{B} = \frac{B|_{\Omega_p}}{A|_{\Omega_p}} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_p).$$

L é localmente resolúvel em p se e somente $\tilde{L}$ o for.

Demonstração. Suponha que L é localmente resolúvel em p. Seja U_p uma vizinhança de p tal que, para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $Lu = f$ em U_p.

Seja U_p' uma vizinhança de p tal que $U_p' \subset\subset U_p \cap \Omega_p$. Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_p)$, seja $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que coincide com f em U_p'. Então existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que

$$Lu = A\tilde{f} \text{ em } U_p.$$

Seja $\tilde{u} = u|_{\Omega_p}$. Então

$$L|_{\Omega_p}\tilde{u} = A|_{\Omega_p} f \text{ em } U_p'.$$

Portanto, como $\tilde{L} = (1/A|_{\Omega_p}) L|_{\Omega_p}$,

$$\tilde{L}\tilde{u} = f \text{ em } U_p'.$$

Temos que a resolubilidade local de L em p implica a resolubilidade local de $\tilde{L}$ em p.

Por outro lado, suponha que $\tilde{L}$ é localmente resolúvel em p. Seja V_p a vizinhança de p associada. Podemos tomar uma $V_p \subset\subset \Omega_p$. Dada $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tome $u \in \mathcal{D}'(\Omega_p)$ tal que

$$\tilde{L}u = \frac{1}{A|_{\Omega_p}} g|_{\Omega_p} \text{ em } V_p.$$

Afirmação: existe uma distribuição $u_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $u = u_0$ em V_p. De fato, tome $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\psi) \subset \Omega_p$ e que vale 1 em V_p. Então $u_0(\phi) := u((\psi\phi)|_{\Omega_p})$ é a distribuição desejada.

Portanto,

$$Lu_0 = g \text{ em } V_p.$$

□

Proposição 4.6. *Seja*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + B\frac{\partial}{\partial x}$$

um campo vetorial complexo definido em um aberto Ω *de* $\mathbb{R}^2$*, onde* $(x,t) = \mathrm{Id}|_\Omega$ *são as coordenadas usuais e* $B \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*. Então existe uma carta local* $(\xi, s) : U \subset \Omega \to V \subset \mathbb{R}^2$*, com* $\xi = x$*,* $p \in U$*, tal que*

$$L|_U = \frac{\partial}{\partial s} + ib\frac{\partial}{\partial \xi},$$

onde $b \in \mathcal{C}^\infty(U)$ *assume somente valores reais.*

Demonstração. Escrevamos $B = B_1 + iB_2$, onde B_1 é a parte real de B e B_2 é a parte imaginária de B. Então

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + B_1\frac{\partial}{\partial x} + iB_2\frac{\partial}{\partial x}.$$

Sejam $Y = \partial_t + B_1\partial_x$, $p = (x_0, t_0)$. A aplicação

$$\phi : (\xi', s') \longmapsto Y_{s'}(x_0 + \xi', t_0)$$

(que é a aplicação $\rho_{\eta,p}$ com $\eta = (Y, \partial_x)$ conforme definida na subseção 2.3.4) tem posto dois em p e é suave, portanto é localmente invertível. Seja (ξ, s) o seu inverso local (também suave) em torno de p, ou seja, (ξ, s) é uma carta local que satisfaz (onde é definida)

$$(x,t) = Y_s(x_0 + \xi, t_0).$$

Pela proposição 1.13,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Com a variação do parâmetro s (e mantendo ξ constante), (x,t) é uma curva integral de Y. Com isto, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} = Y = \frac{\partial}{\partial t} + B_1\frac{\partial}{\partial x}.$$

Repare que

$$t = t(Y_s(x_0 + \xi, t_0)) = t_0 + s,$$
$$\therefore \frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}(t_0 + s) = 0.$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Portanto, fazendo

$$b = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)} B_2,$$

temos o resultado desejado. □

Exemplo 4.7 (Caso "tubo"). Vamos supor que b não depende de x. Ou seja, $L = \partial_t + ib(t)\partial_x$ com $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, onde b assume somente valores reais. Vamos procurar condições *suficientes* para que L seja localmente resolúvel na origem.

Consideremos a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ib(t)\frac{\partial u}{\partial x} = f.$$

Vamos supor que u é uma função e que podemos aplicar a transformada de Fourier parcial da equação em relação à variável x. Temos

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t}(\xi, t) - b(t)\xi\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t).$$

Resolvendo esta equação diferencial, obtemos

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_T^t \mathrm{e}^{\xi(B(t)-B(s))}\hat{f}(\xi, s)\,\mathrm{d}s,$$

onde B é uma antiderivada de b e T é um número real. Para poder fazer a transformada de Fourier inversa de $\hat{u}(\xi, t)$ em relação a ξ, temos que controlar o seu crescimento em relação à variável ξ.

Se $\hat{f}(\xi, t) = 0$ *sempre que* $|\xi| > 1$: neste caso, $\hat{u}(\xi, t)$ será uma função de Schwartz em relação a ξ. Aplicando a fórmula da transformada inversa de Fourier (e usando $T(\xi) = 0$), obtemos uma solução

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \mathrm{e}^{i\xi x+\xi(B(t)-B(s))}\hat{f}(\xi, s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi,$$

que funciona em todo o plano.

Se $\hat{f}(\xi, t) = 0$ *sempre que* $\xi < 0$: para que $\hat{u}(\xi, t)$ seja uma função de Schwartz em relação a ξ, devemos exigir que

$$B(t) - B(s) \leq 0, \text{ sempre que } s \text{ está entre } T \text{ e } t.$$

Pelo teorema do valor médio, $B(t) - B(s) = b(\eta)(t - s)$, onde η está entre t e s.

Vamos supor que b não muda de sinal na origem. Isto é, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $t \in [-\delta, \delta], b(t) \geq 0$ ou para todo $t \in [-\delta, \delta], b(t) \leq 0$. Caso $b(t) \geq 0$ em $(-\delta, \delta)$, faça $T = -\delta$. Caso $b(t) \leq 0$ em $(-\delta, \delta)$, faça $T = \delta$. Assim, $\hat{u}(\xi, t)$ será uma função de Schwartz em relação a ξ sempre que $|t| < \delta$. Aplicando novamente a fórmula inversa de Fourier, temos uma solução local,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{T}^{t} \mathrm{e}^{i\xi x + \xi(B(t) - B(s))} \hat{f}(\xi, s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi,$$

definida em $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$.

Se $\hat{f}(\xi, t) = 0$ *sempre que* $\xi > 0$: podemos encontrar uma solução local de $Lu = f$ em $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$, de forma análoga — onde o δ é tal que b não muda de sinal em $(-\delta, \delta)$.

Se f *é uma função suave em* $\mathbb{R}^2$ *que é de Schwartz em relação à coordenada* x: sejam

$$\phi_0, \phi^+, \phi^- : \mathbb{R} \to [0,1]$$

funções suaves, com $\operatorname{supp} \phi_0 \subset (-1, 1)$, $\operatorname{supp} \phi^+ \subset (0, \infty)$ e $\operatorname{supp} \phi^- \subset (-\infty, 0)$ tais que $1 = \phi_0 + \phi^+ + \phi^-$.

Defina $f_0(x,t) = \mathcal{F}_{\xi}^{-1}\Big(\hat{f}(\xi, t)\phi_0(\xi)\Big)(x)$ e f^+, f^- analogamente. Então

$$f = f_0 + f^+ + f^-,$$

$\widehat{f_0}(\xi, t)$ se anula quando $|\xi| > 1$, $\widehat{f^+}(\xi, t)$ se anula quando $\xi < 0$ e $\widehat{f^-}(\xi, t)$ se anula quando $\xi > 0$. Assim, desde que b não mude de sinal na origem, existem soluções u^-, u^+ e u_0 tais que

$$Lu^- = f^-, \quad Lu^+ = f^+ \quad \text{e} \quad Lu_0 = f_0$$

em uma faixa $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$, onde δ não depende de f. Fazendo $u = u_0 + u^+ + u^-$, temos que $Lu = f$ em $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$.

Caso geral: para $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ qualquer, podemos pegar uma função g que coincide com f no retângulo $U = [0,1]^2$, mas que é de Schwartz em relação a x. Seja u tal que $Lu = g$ na faixa $\mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$. Assim, $Lu = f$ em $U \cap \mathbb{R} \times (-\delta, \delta)$.

Concluímos que, para $L = \partial_t + ib(t)\partial_x$ ser localmente resolúvel na origem, é suficiente que b não mude de sinal na origem.

4.2 Uma primeira definição da condição ($\mathcal{P}$)

Definição 4.8. Seja L um campo da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} + ib\frac{\partial}{\partial x}$$

em $\mathbb{R}^2$, onde $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma função real. Dizemos que L satisfaz a *condição* ($\mathcal{P}$) *em* $p = (x_0, t_0)$ se existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, a função $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \mapsto b(x,t)$ não muda de sinal.

Observação 4.9. Vimos no "caso tubo" (exemplo 4.7) que a condição ($\mathcal{P}$), como definida acima, implica a resolubilidade local quando b não depende de x. Veremos na seção 4.4 que isto também é verdade para qualquer b suave, com solução fraca em L^2.

4.3 Uma segunda definição da condição ($\mathcal{P}$)

4.3.1 Parêntese: produto exterior de campos vetoriais

Definição 4.10. Sejam $L_1, \dots, L_k \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais na variedade M. Vamos definir o *produto exterior* $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ como sendo a aplicação multilinear e alternada

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k : (\mathcal{C}^\infty(M))^k \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

definida por

$$\begin{aligned} L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(f_1, \dots, f_k) &= \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sgn}(\sigma) L_1(f_{\sigma(1)}) \cdots L_k(f_{\sigma(k)}) \\ &= \det \begin{pmatrix} L_1(f_1) & \dots & L_1(f_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k(f_1) & \dots & L_k(f_k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação 4.11. Na notação "L_i" usada aqui, i é apenas o subíndice. Não iremos usar a notação $t \mapsto L_t$ para o fluxo do campo nesta seção.

Observação 4.12. Embora tenhamos feito a definição de produto exterior para campos vetoriais reais, a mesma também funcionaria para campos vetoriais complexos.

Observação 4.13 (Propriedades). Sejam $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\sigma \in S^k$, $L_1, \dots, L_k \in \mathfrak{X}(M)$ e $L_1' \in \mathfrak{X}(M)$. Então:

(i) $L_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge L_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$.

(ii) $(gL_1) \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_k = g(L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_k)$.

(iii) $(L_1 + L_1') \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_k = (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_k) + (L_1' \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_k)$.

Observação 4.14. Vamos supor que $(x_1, \dots, x_m)$ é um sistema de coordenadas global para a variedade M. Aplicando a proposição 1.13 (expressão dos campos vetoriais em coordenadas locais) e as propriedades vistas acima, podemos calcular a fórmula de $L_1 \wedge \cdots \wedge L_k$ em função das derivadas parciais $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_m}$:

$$\begin{aligned} L_1 \wedge \cdots \wedge L_k &= \left(\sum_{i_1=1}^{m} L_1(x_{i_1}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_k=1}^{m} L_k(x_{i_k}) \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} \left(L_1(x_{i_1}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right) \wedge \cdots \wedge \left(L_k(x_{i_k}) \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{m} L_1(x_{i_1}) \cdots L_k(x_{i_k}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}. \end{aligned}$$

Como o produto $\partial_{x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_{i_k}}$ é nulo sempre que dois de $i_1, \dots, i_k$ são iguais, a última soma pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i_1<\cdots<i_k}}^{m} \sum_{\sigma \in S^k} L_1(x_{i_{\sigma(1)}}) \cdots L_k(x_{i_{\sigma(k)}}) \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}} \\ &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i_1<\cdots<i_k}}^{m} \sum_{\sigma \in S^k} \operatorname{sgn}(\sigma) L_1(x_{i_{\sigma(1)}}) \cdots L_k(x_{i_{\sigma(k)}}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \\ &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i_1<\cdots<i_k}}^{m} L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}. \end{aligned}$$

Concluímos que

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1 \\ i_1<\cdots<i_k}}^{m} \det \begin{pmatrix} L_1(x_{i_1}) & \dots & L_1(x_{i_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_k(x_{i_1}) & \dots & L_k(x_{i_k}) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}.$$

4.3.2 A definição em questão

Definição 4.15. Seja $L = L_1 + iL_2$ um campo vetorial complexo em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com L_1, L_2 campos reais, tal que L não se anula em nenhum ponto.

(i) Chamaremos as órbitas de $\{L_1, L_2\}$ de *órbitas de L*.

(ii) Dizemos que L satisfaz a *condição* ($\mathcal{P}$) *em* Ω se $L_1 \wedge L_2$ não muda de sinal nas órbitas bidimensionais de L.

Observação 4.16. É necessário explicar o que queremos dizer quando pedimos que $L_1 \wedge L_2$ não "mude de sinal" em uma órbita bidimensional de L. Seja S uma órbita bidimensional de L. Como S é uma subvariedade de dimensão maximal, S é um aberto de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e, portanto, é orientável. Sejam (x, y) e (z, w) duas cartas locais de S que se interceptam e são da mesma orientação. Restrinja L_1, L_2, x, y, z, w à intersecção de seus domínios.

$$\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial w} = J \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial w},$$

onde J é uma função estritamente positiva.

$$L_1 \wedge L_2 = L_1 \wedge L_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} = L_1 \wedge L_2(x, y) J \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial w},$$

ou seja, $L_1 \wedge L_2(z, w) = J L_1 \wedge L_2(x, y)$, com $J > 0$. Ambas terão o mesmo sinal.

Fixada uma orientação $\mathcal{O}$, definimos o sinal de $L_1 \wedge L_2$ em cada ponto $p \in S$ como sendo o sinal de $L_1 \wedge L_2(x', y')$, onde (x', y') é uma carta local de orientação $\mathcal{O}$ contendo p.

Como S é um aberto conexo de $\mathbb{R}^2$, só existem duas orientações possíveis — a positiva e a negativa. Trocar a orientação escolhida inverte o sinal de $L_1 \wedge L_2$, o que não afeta a definição 4.15.

Observação 4.17. Seja

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib \frac{\partial}{\partial x},$$

definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde a função b é real. Então as partes real e imaginária são $L_1 = \partial_t$ e $L_2 = b\, \partial_x$.

O produto exterior $L_1 \wedge L_2 = b\, \partial_t \wedge \partial_x$ tem o sinal de $-b$ (em relação à orientação de (x, t)).

As curvas integrais de L_1 são as retas verticais contidas em Ω. As curvas integrais de L_2 são retas horizontais em Ω que não cruzam nenhum ponto em que $b = 0$, ou então são constantes em um ponto em que $b = 0$.

Se b não muda de sinal nas órbitas de dimensão 2, tampouco mudará de sinal nas órbitas de dimensão 1 (que são retas verticais nas quais $b = 0$). Nesse caso, o sinal de b não mudará em nenhuma reta vertical contida em Ω.

Por outro lado, seja S uma órbita de dimensão 2, e sejam p e q dois pontos em S tais que $b(p) > 0$ e $b(q) < 0$. Então p e q se ligam por um caminho feito de segmentos de curvas integrais de L_1 e L_2, e já sabemos que o sinal de b não pode mudar nas curvas integrais de L_2. Concluímos que a mudança de sinal de b ocorre em uma curva integral de L_1, que é uma reta vertical contida em Ω.

Isto prova que, para este campo L, a condição $(\mathcal{P})$ da definição 4.15 é equivalente à condição $(\mathcal{P})$ da definição 4.8 valendo em todos os pontos de Ω.

Observação 4.18. Seja L um campo vetorial complexo não-singular definido no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dado $p \in \Omega$, vimos (proposição 4.6) que existem coordenadas locais (ξ, s) definidas em $U \subset \Omega$, com $p \in U$ nas quais

$$L|_U = \frac{\partial}{\partial s} + ib\frac{\partial}{\partial \xi},$$

onde b é uma função real. Se $p' \in U$, a órbita de $L|_U$ contendo p' está contida na órbita de L contendo p'. Portanto, se L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em Ω, $L|_U$ satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em U. Repetindo-se o raciocínio da observação anterior, isto implica que b não muda de sinal nas curvas integrais de ∂_s.

4.4 Resolubilidade local em L^2

Teorema 4.19. *Seja L um campo vetorial complexo em $\mathbb{R}^2$ da forma*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib\frac{\partial}{\partial x},$$

com $\mathrm{Id}|_{\mathbb{R}^2} = (x,t)$, onde b é uma função suave que só assume valores reais e tal que L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em uma vizinhança U da origem. Então existem $a, T_0, C > 0$ tais que, para todo $0 < T \leq T_0$, dada $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty((-a,a) \times (-T,T))$,

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq CT \left\| {}^tL\phi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Demonstração. Vamos usar as letras x e t como variáveis, e não apenas como coordenadas locais. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $b(x,t)$ tem suporte compacto e que a propriedade $(\mathcal{P})$ é valida em todo o plano.

${}^tL$ é, por definição, o operador que satisfaz $\langle L\phi, \psi\rangle = \langle \phi, {}^tL\psi\rangle$ para qualquer par de funções ϕ, ψ em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, onde $\langle f, g\rangle := \int fg$. Como

$$\begin{aligned} \langle L\phi, \psi\rangle &= \langle \phi_t, \psi\rangle + i\langle b\phi_x, \psi\rangle = -\langle \phi, \psi_t\rangle + i\langle \phi_x, b\psi\rangle \\ &= -\langle \phi, \psi_t\rangle - i\langle \phi, b_x\psi\rangle - i\langle \phi b\psi_x\rangle = \langle \phi, -\psi_t - ib\psi_x - ib_x\psi\rangle \\ &= \langle \phi, -L\phi - ib_x\phi\rangle, \end{aligned}$$

então ${}^tL = -L - ib_x$.

Suponha que a estimativa do teorema vale para o campo L, ao invés de ${}^tL$. Como $L = -ib_x - {}^tL$,

$$\|\phi\|_2 \leq CT\,\|ib_x\phi\|_2 + CT\,\left\|{}^tL\phi\right\|_2 \leq CT\sup|b_x|\,\|\phi\|_2 + CT\,\left\|{}^tL\phi\right\|_2$$
$$\therefore \|\phi\|_2\,(1 - CT\sup|b_x|) \leq CT\,\left\|{}^tL\phi\right\|_2.$$

Escolhendo $T_0' > 0$ suficientemente pequeno para que $CT_0'\sup|b_x| < 1$, poderemos dizer que, para qualquer $0 < T < T_0'$,

$$\|\phi\|_2 \leq \frac{C}{1 - CT_0'}T\,\left\|{}^tL\phi\right\|_2.$$

Assim, basta demonstrar este teorema para L ao invés de ${}^tL$. Vamos fazer isto agora.

Sejam $\psi^+ + \psi_0 + \psi^- \equiv 1$ uma partição $\mathcal{C}^\infty$ da unidade em $\mathbb{R}$ com $\operatorname{supp}\psi^- \subset (-\infty, 0)$, $\operatorname{supp}\psi_0 \subset (-1,1)$ e $\operatorname{supp}\psi^+ \subset (0,\infty)$. Para as funções $\phi(x,t)$ no plano, denotaremos por $\widehat{\phi}(\xi,t)$ a transformada de Fourier parcial em relação à variável x.

Seja P^+ o operador dado por

$$P^+f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix\xi}\psi^+(\xi)\hat{f}(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi.$$

Seja $B(x,t) = \int_0^t b(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Defina o operador

$$K^+f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{T(x)}^{t} \mathrm{e}^{ix\xi + (B(x,t)-B(x,s))\xi}\tilde{\psi}^+(\xi)\hat{f}(\xi,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi \qquad (4.20)$$
$$= \int_{T(x)}^{t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi + (B(x,t)-B(x,s))|\xi|}\widehat{\tilde{P}^+ f}(\xi,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s. \qquad (4.21)$$

onde $T(x)$ é T se $b(x,t) \geq 0$ para todo t e $-T$ no caso contrário (lembrando que estamos supondo que a condição ($\mathcal{P}$) vale em todo o plano).

A função $0 \leq \tilde{\psi}^+ \leq 1$ é escolhida em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ de forma que ela valha 1 no suporte de ψ^+ mas seu suporte ainda esteja contido em $(0,\infty)$. Definimos o operador $\tilde{P}^+$ de forma análoga a P^+. Assim, teremos $\tilde{P}^+P^+f(x,t) = P^+f(x,t)$ (enquanto geralmente não é verdade que $P^+P^+f = P^+f$).

Para cada $y \geq 0$, vamos denotar por $\mathrm{e}^{-y|D_x|}$ o operador dado por

$$\mathrm{e}^{-y|D_x|}f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{e}^{-y|\xi|}\hat{f}(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi,$$

Se $y > 0$, seja P_y o núcleo de Poisson no semiplano,

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2 + x^2},$$

cuja transformada de Fourier é $\mathrm{e}^{-y|\xi|}$ (ver a subseção 3.2.3). Com isso, temos

$$\mathrm{e}^{-y|D_x|}f(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{se } y = 0, \\ f * P_y(x,t), & \text{se } y \neq 0. \end{cases}$$

Isto implica (proposição 3.2) que $|\mathrm{e}^{-y|D_x|}f(x,t)| \leq \mathrm{H}f(x,t)$, onde

$$\mathrm{H}f(x,t) = \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(s,t)| \,\mathrm{d}s$$

é a função maximal de Hardy-Littlewood de $f(x,t)$ em relação a x. Sabemos (ver Stein [8], capítulo I para uma demonstração) que existe $C > 0$ tal que $\|\mathrm{H}\phi\|_2 \leq C \|\phi\|_2$ para qualquer $\phi \in L^2(\mathbb{R})$.

Com isto, (4.20) pode ser reescrita como

$$K^+f(x,t) = \int_{T(x)}^{t} \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\tilde{P}^+f(x,s)\,\mathrm{d}s.$$

Vamos agora limitar a norma de $K^+f(\cdot,t)$ em $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\left\|K^+f(\cdot,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|K^+f(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-T(x)}^{t} \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\tilde{P}^+f(x,s)\,\mathrm{d}s \right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T(x)}^{t} \left| \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\tilde{P}^+f(x,s) \right| \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} \left| \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\tilde{P}^+f(x,s) \right| \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-T}^{T} \mathrm{H}\tilde{P}^+f(x,s)\,\mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}x = \left\| \int_{-T}^{T} \mathrm{H}\tilde{P}^+f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \right\|_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-T}^{T} \mathrm{H}\tilde{P}^+f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \right\|_2 &\leq \int_{-T}^{T} \left\|\mathrm{H}\tilde{P}^+f(\cdot,s)\right\|_2 \mathrm{d}s \qquad \text{(des. de Minkowsky)} \\
&\leq C \int_{-T}^{T} \left\|\tilde{P}^+f(\cdot,s)\right\|_2 \mathrm{d}s \\
&\leq C \int_{-T}^{T} \|f(\cdot,s)\|_2 \,\mathrm{d}s \qquad \text{(teo. de Plancherel)} \\
\therefore \left\|K^+f(\cdot,t)\right\|_2 &\leq C \int_{-T}^{T} \|f(\cdot,s)\|_2 \,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Usamos agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\left\|K^+f(\cdot,t)\right\|_2 \le C\left|\int_{-T}^{T}(1)\Big(\,\|f(\cdot,s)\|_2\Big)\,\mathrm{d}s\right| \\ \le C\sqrt{2T}\Big\|(\|f(\cdot,s)\|_2)\Big\|_{L^2(-T,T)[s]}.\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado:

$$\begin{aligned}\left\|K^+f(\cdot,t)\right\|_2^2 &\le 2C^2T\int_{-T}^{T}\|f(\cdot,s)\|_2^2\,\mathrm{d}s \\ &= 2C^2T\int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}}f(x,s)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = 2C^2T\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}.\end{aligned}$$

Integrando de $-T$ a T, obtemos a estimativa de K^+f em $L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))$.

$$\begin{aligned}\left\|K^+f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}^2 &\le 4C^2T^2\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \\ \therefore \left\|K^+f\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} &\le 2CT\|f\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}. \end{aligned}\tag{4.22}$$

Em seguida, vamos examinar o efeito de K^+ em $L\phi$, $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}\times(-T,T))$. Calculemos $K^+(\phi_t^+(x,t))$, onde $\phi^+(x,t)=P^+\phi(x,t)$ e $\phi_t^+(x,t)$ é a notação para $P^+(\partial_t\phi(x,t))$ (note que ∂_t comuta com a transformada parcial $\hat{}$ e com os operadores P^+, $\tilde{P}^+$)

Por (4.20),

$$\begin{aligned}K^+\phi_t^+(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{T(x)}^{t}\mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\tilde{\psi}^+(\xi)\widehat{\phi_t^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{T(x)}^{t}\mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\phi^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

onde estamos usando que $\tilde{\psi}^+(\xi)\psi^+(\xi)=\psi^+(\xi)$.

A integral interior é:

$$\begin{aligned}\int_{T(x)}^{t}\mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{\phi^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s &= \mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\phi^+}(\xi,s)\Big|_{T(x)}^{t} \\ &\quad-\int_{T(x)}^{t}-b(x,s)\xi\mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\phi^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{ix\xi}\widehat{\phi^+}(\xi,t)-i\int_{T(x)}^{t}b(x,s)\mathrm{e}^{i\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\phi_x^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&K^+\phi_t^+(x,t) = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\widehat{\phi^+}(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi - \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{T(x)}^t b(x,s)\mathrm{e}^{i\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\phi_x^+}(\xi,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi \\
&\qquad = \phi^+(x,t) - i\int_{T(x)}^t\int_{\mathbb{R}} b(x,s)\mathrm{e}^{i\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\phi_x^+}(\xi,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s \\
&\qquad\qquad = \phi^+(x,t) - i\int_{T(x)}^t b(x,s)\mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\big(\phi_x^+\big)(x,s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
b(x,s)\mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\big(\phi_x^+\big)(x,s) &= \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\big(b\phi_x^+\big)(x,s) \\
&\quad + \big[b, \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s)|D_x|}\big]\phi_x^+(x,s),
\end{aligned}$$

onde o colchete entre dois operadores denota o comutador $[X,Y]f = XYf - YXf$ e b é o operador de multiplicação $(bf(x,t) = b(x,t)f(x,t))$.

Assim,

$$\begin{aligned}
&K^+\phi_t^+(x,t) = \\
&\qquad \phi^+(x,t) - iK^+\big(b\phi_x^+\big)(x,t) \underbrace{-i\int_{T(x)}^t \big[b, \mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))|D_x|}\big]\phi_x^+(x,s)\,\mathrm{d}s}_{R^+\phi^+(x,t)}.
\end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $L\phi^+ = \phi_t^+ + ib\phi_x^+$,

$$K^+L\phi^+(x,t) = \phi^+(x,t) + R^+\phi^+(x,t). \tag{4.23}$$

Para estimar a norma do resto $R^+\phi^+(x,t)$, vamos precisar do seguinte resultado:

Afirmação: Dados $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, existe constante $C' > 0$, independente de f e de h, tal que

$$\forall\epsilon > 0, \quad \big|\big[h, \mathrm{e}^{-\epsilon|D_x|}\big]f'(x)\big| \le C'(\sup|h'|)\,\mathrm{H}f(x).$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\big[h, \mathrm{e}^{-\epsilon|D_x|}\big] f' &= h(x)P_\epsilon * f'(x) - P_\epsilon * (hf') \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(x)f'(x-y)P_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y - \int_{\mathbb{R}} h(x-y)f'(x-y)P_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} (h(x)-h(x-y))f'(x-y)P_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} (h(x)-h(y))f'(y)P_\epsilon(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \underbrace{f(y)P_\epsilon(x-y)(h(x)-h(y))\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} \qquad \text{(integração por partes)} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \big(-(P_\epsilon)'(x-y)(h(x)-h(y)) + P_\epsilon(x-y)(-h'(y))\big) f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= P_\epsilon * fh'(x) + (P_\epsilon)' * ((h(x)-h)f)(x).
\end{aligned}
$$

O primeiro termo é limitado (proposição 3.2) por $\mathrm{H}(fh')(x)$, que é menor ou igual a $(\sup|h'|)\,\mathrm{H}f(x)$. Quanto ao segundo termo, note que

$$(P_\epsilon)'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\epsilon}P(x/\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}P'(x/\epsilon).$$

Fazendo $Q(x) = xP'(x)$, teremos

$$Q_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2}xP'(x/\epsilon) = x(P_\epsilon)'(x)$$

e, assim, o segundo termo é igual a

$$\int_{\mathbb{R}} (h(x)-h(y))f(y)\frac{Q_\epsilon(x-y)}{x-y}\,\mathrm{d}y = (Q_\epsilon * g_x)(x),$$

onde g_x é a função definida por

$$g_x(y) = \frac{h(x)-h(y)}{x-y}f(y).$$

Pelo teorema do valor médio, $|g_x| \le (\sup|h'|)|f|$. Como Q tem majorante radial integrável, $(Q_\epsilon * g_x)(x)$ é limitado por $I(\sup|h'|)\,\mathrm{H}f(x)$, onde I é a integral do majorante radial de Q. Tomando-se $C' = 1 + I$, a afirmação fica provada.

Com isto, podemos estimar a norma de R^+ procedendo analogamente ao que foi feito para estimar K^+. Fazendo $C'' = C' \sup_{\mathbb{R}^2} |h_x|$,

$$\begin{aligned}\left\|R^+\phi^+(\cdot,t)\right\|_2 &\leq C'' \int_{-T}^{T} \left\|\mathrm{H}(\phi^+(\cdot,s))\right\|_2 \mathrm{d}s \leq CC'' \int_{-T}^{T} \left\|\phi^+(\cdot,s)\right\|_2 \mathrm{d}s \\ &\leq CC''\sqrt{2T}\left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\phi^+(\cdot,s)\right\|_2^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} = C_3\sqrt{2T}\left\|\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))},\end{aligned}$$

onde $C_3 = CC''$.

$$\begin{aligned}\therefore \left\|R^+\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} &= \left(\int_{-T}^{T} \left\|R^+\phi^+(\cdot,s)\right\|_2^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2C_3T\left\|\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T)}. \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Juntando (4.22), (4.23) e (4.24), temos

$$\begin{aligned}\left\|\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} &= \left\|K^+L\phi^+ - R^+\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T)} \\ &\leq 2CT\left\|L\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} + 2C_3T\left\|\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}.\end{aligned}$$

Sabemos que $\|\phi^+\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}$, o que pode ser visto usando-se o teorema de Plancherel e da desigualdade Cauchy-Scwharz. Para estimar $\|L\phi^+\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}$ em função da norma de $L\phi$, vamos escrever

$$L\phi^+ = LP^+\phi = [L, P^+]\phi + P^+L\phi.$$

Como a derivada ∂_t comuta com P^+, $[L, P^+] = [ib\partial_x, P^+]$, que é limitado em L^2 (ver Stein [9], página 309). Assim, poderemos concluir que existe $C_4 > 0$ independente de ϕ, tal que

$$\left\|\phi^+\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq C_4T\left\|L\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} + C_4T\left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}.$$

Procedendo analogamente, existe $C_5 > 0$ independente de ϕ tal que

$$\left\|\phi^-\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq C_5T\left\|L\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} + C_5T\left\|\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}.$$

Para estimar ϕ_0, definimos P_0 e $\tilde{P}_0$ análogos a P^+ e $\tilde{P}^+$ (mas usando ψ_0 ao invés de ψ^+) e

$$\begin{aligned}K_0f(x,t) &= \int_{-T}^{t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\tilde{P}_0f}(\xi,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-T}^{t}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ix\xi+(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\tilde{P}_0f}(\xi,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Seja $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função que vale 1 no intervalo $(-2\eta, 2\eta)$, onde $\eta > \sup_{\mathbb{R}^2}|B|$.

Com isso, $\theta((B(x,t) - B(x,s))\xi) = 1$ sempre que $\xi \in (-1,1)$. Isto nos permite escrever a fórmula de K_0 como:

$$\begin{aligned} K_0 f(x,t) &= \int_{-T}^{t}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{ix\xi}\theta((B(x,t) - B(x,s))\xi)\mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\tilde{P}_0 f}(x,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-T}^{t}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\theta((B(x,t) - B(x,s))\xi)\mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))\xi}\widehat{\tilde{P}_0 f}(x,s)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{-T}^{t} \big(\theta((B(x,t) - B(x,s))D_x)\mathrm{e}^{(B(x,t)-B(x,s))D_x}\big)\tilde{P}_0 f(x,s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

onde, para cada $y \in \mathbb{R}$, o operador $\theta(yD_x)\mathrm{e}^{yD_x}$ é definido pela fórmula

$$\theta(yD_x)\mathrm{e}^{yD_x} f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\theta(y\xi)\mathrm{e}^{y\xi}\hat{f}(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi.$$

Seja G a transformada de Fourier inversa de $\theta(\xi)\mathrm{e}^{\xi}$. Dado $y \in \mathbb{R}$ diferente de zero, defina

$$G_y(x) = \frac{1}{|y|}G(x/y) = \mathcal{F}_\xi^{-1}\big(\theta(y\xi)\mathrm{e}^{y\xi}\big)(x).$$

Isto nos dá que

$$\theta(yD_x)\mathrm{e}^{yD_x} f(x,t) = \begin{cases} f * G_y(x,t), & \text{se } y \neq 0, \\ f(x,t), & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Podemos limitar $\theta(yD_x)\mathrm{e}^{yD_x}$ pelo maximal $\mathrm{H}f(x,t)$ multiplicado por uma constante (pois G tem majorante radial limitado). Assim, G é análogo ao núcleo de Poisson no semiplano usado na estimativa de K^+.

Isto nos permite mostrar, de forma análoga à com que fizemos a estimativa de K^+, que existe constante $C_6 > 0$ tal que

$$\|\phi_0\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq C_6 T\,\|L\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} + C_6 T\,\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}\,.$$

Assim, como $\phi = \phi^+ + \phi_0 + \phi_-$, existe constante $C_7 > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq C_7 T\,\|L\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} + C_7 T\,\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}\,.$$

$$\therefore \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))} \leq \frac{C_7 T}{1 - C_7 T}\,\|L\phi\|_{L^2(\mathbb{R}\times(-T,T))}\,.$$

Tomando $T_0 < \frac{1}{C_7}$ e renomeando $C = C_7/(1-C_7T_0)$, o teorema está provado.

$\square$

Corolário 4.25. *Se o campo L da definição 4.8 satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em uma vizinhança da origem, então existem $T_0 > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $0 < T < T_0$, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, existe $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com norma*

$$\|u\|_2 \leq CT\, \|f\|_2$$

tais que

$$Lu = f \quad \text{em } \mathbb{R} \times (-T, T) \text{ (no sentido de distribuição).}$$

Demonstração. Seja $\Omega_T = \mathbb{R} \times (-T, T)$. Considere o funcional linear

$$\begin{array}{rrcl} \lambda: & {}^tL(C_c^\infty(\Omega_T)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & {}^tL\phi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}^2} f(x,t)\phi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

que é bem definido, pois o teorema 4.19 implica que ${}^tL$ é injetiva. Pela desigualdade Cauchy-Schwarz e pelo teorema 4.19,

$$\left|\lambda({}^tL\phi)\right| \leq \|f\|_2 \|\phi\|_2 \leq CT\, \|f\|_2 \left\|{}^tL\phi\right\|_2,$$

ou seja, λ é um funcional linear limitado no subespaço vetorial ${}^tL(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega_T))$ de $L^2(\mathbb{R}^2)$, com norma $\leq CT\, \|f\|_2$. Pelo teorema de Hahn-Banach, podemos estender λ para um funcional linear limitado (e de mesma norma) λ^* em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pelo teorema da representação de Riesz, existe $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, com $\|u\|_2 \leq CT\, \|f\|_2$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u\phi = \lambda^*(\phi), \quad \forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Em particular, se $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_T)$,

$$\langle Lu, \phi \rangle = \langle u, {}^tL\phi \rangle = \lambda({}^tL\phi) = \langle f, \phi \rangle,$$

o que significa que $Lu = f$ em Ω_T no sentido das distribuições. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Shiferaw Berhanu, Paulo D. Cordaro, and Jorge Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] Lars Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[3] Elon Lages Lima, *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

[4] Claude Lobry, *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, SIAM J. Control **8** (1970), 573–605.

[5] ______, *Erratum: Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, SIAM J. Control and Optimization **14** (1976), 387.

[6] L. Nirenberg and F. Treves, *Solvability of a First Order Linear Partial Differential Equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics **XVI** (1963), 331–351.

[7] Jorge Sotomayor Tello, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1979.

[8] Elias M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[9] ______, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[10] Héctor J. Sussmann, *Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions*, Transactions of the American Mathematical Society **180** (June 1973), 171–188.