A equação de Morse e o índice de Conley

Eduardo Favarão Botelho

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 28 de Janeiro de 2008

Assinatura: _____

A equação de Morse e o índice de Conley

*Eduardo Favarão Botelho*¹

Orientadora: *Maria do Carmo Carbinatto*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP - São Carlos

Janeiro/2008

¹O autor teve apoio financeiro da Fapesp.

*Aos meus pais,
Dorvalino e
Romilde.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Dorvalino e Romilde, pelo privilégio de ter sido criado pelas grandes figuras humanas que são. Sem eles, tenho certeza, nem uma só palavra deste trabalho teria sido escrita.

Agradeço aos meus amados irmãos, Daniela e Robson, pelo companheirismo ao longo destes anos, e a minha tia Mercedes, pelo carinho perene e incondicional, um traço reservado apenas às pessoas que amam verdadeiramente.

Agradeço aos grandes amigos Castilho e Giu pela parceria e por compartilharem não só momentos de alegria, mas também de indecisão. Agradeço também aos amigos da pós-graduação: Catalão, Claudinei, Leitão, Marcos, Wescley, Yuri e todos os demais.

Finalmente, mas não menos importante, agradeço à Prof. Dra. Maria do Carmo Carbinatto pela orientação e pelo empenho na revisão do texto.

Resumo

O índice de Conley é uma ferramenta utilizada no estudo de sistemas dinâmicos. Em particular, as decomposições de Morse combinadas com uma apropriada versão do índice de Conley e uma correspondente equação de Morse freqüentemente nos permitem obter resultados de multiplicidade de soluções. Neste trabalho, apresentamos a teoria do índice de Conley e a equação de Morse associada a uma decomposição de Morse e aplicamos os resultados em equações diferenciais ordinárias.

Abstract

The Conley index is a well known tool used in the analysis of dynamical systems. In particular, Morse decompositions combined with an appropriate version of the Conley index and a corresponding Morse equation, often allow us to obtain multiplicity results for solutions. In this work we introduce the Conley index theory and the Morse equation relative to a Morse decomposition and apply the results to ordinary differential equations.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Equações diferenciais ordinárias	5
1.1.1 Teoria geral	5
1.1.2 Resultados de continuidade	6
1.1.3 Sistemas autônomos	7
1.2 Topologia	9
1.2.1 Categorias	9
1.2.2 Homotopias	11
1.2.3 Espaços quocientes	13
1.2.4 Aplicação induzida por inclusão	14
1.2.5 A adição wedge	16
2 O índice de Conley	21
2.1 Semifluxos	21
2.2 Conjuntos limites	23
2.3 Vizinhanças isolantes e blocos isolantes	28
2.4 Admissibilidade	36
2.5 Par índice para um conjunto invariante isolado	41
2.6 O índice de Conley homotópico	43

2.7	O caso linear hiperbólico	45
2.8	O índice de Conley homológico	49
3	Propriedades do índice de Conley	51
3.1	A propriedade de adição	51
3.2	Irredutibilidade	52
3.3	A Propriedade de Continuação	57
3.4	Pontos de equilíbrio e o índice de Conley	73
3.5	A propriedade de adição e de continuação e a existência de solução limitada	76
3.6	Equações diferenciais assintoticamente lineares	79
3.7	Soluções de onda de choque e propriedade de irredutibilidade	83
4	A equação de Morse	91
4.1	Par atrator-repulsor	92
4.2	Decomposição de Morse	97
4.3	Par bloco e trio-índice	100
4.4	A Equação de Morse	106
4.5	A Equação de Morse e um resultado de multiplicidade	113
	Referências Bibliográficas	117

Introdução

O índice de Conley é uma ferramenta utilizada no estudo de sistemas dinâmicos. Na sua forma original, a teoria foi desenvolvida por Conley. Na monografia [4] encontramos a versão original desta teoria, que teve como objetivo principal as aplicações em problemas provenientes de equações diferenciais ordinárias. O índice foi definido para fluxos definidos em espaços localmente compactos. Enquadram-se em tal situação, por exemplo, as equações diferenciais ordinárias definidas em espaços de dimensão finita.

No trabalho [9], Rybakowski estendeu a teoria do índice de Conley para uma classe de semifluxos definidos em espaços não compactos. Em particular, não somente as equações diferenciais parciais parabólicas e equações diferenciais funcionais retardadas puderam ser tratadas por essa extensão, mas também certas classes de equações diferenciais funcionais neutras e equações hiperbólicas. No livro [10] e nos trabalhos citados nele, algumas aplicações para essas classes de equações são apresentadas.

A teoria do índice de Conley pode ser vista como uma generalização da teoria clássica do índice de Morse em variedades compactas. A teoria de Morse apresenta um índice para todo equilíbrio não degenerado, ao passo que a teoria de Conley apresenta um índice a todo conjunto invariante isolado compacto de uma equação diferencial ordinária. O índice de Conley estendido para semifluxos definidos em espaços não compactos apresentado por Rybakowski pode ser entendido como análogo à extensão de Palais-Smale para espaços não compactos do índice de Morse clássico.

Recordemos que um conjunto compacto invariante S é chamado isolado se admite uma vizinhança fechada N de modo que S é o conjunto invariante maximal contido em

N . Ao conjunto invariante isolado S podemos associar um par de conjuntos fechados (N_1, N_2) , chamado par índice, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $N_2 \subset N_1$ é o “conjunto saída” de N_1 ,
- (ii) S é um subconjunto do interior de $N_1 \setminus N_2$ e
- (iii) S é o subconjunto invariante maximal contido em N_1 .

O tipo de homotopia do espaço com um ponto base $(N_1/N_2, [N_2])$, denotado por $[(N_1/N_2, [N_2])]$, não depende da particular escolha do par índice. O índice de Conley homotópico de S é definido por $h(S) := [(N_1/N_2, [N_2])]$. Utilizando uma teoria de homologia, temos bem definido o índice de Conley homológico de S dado por $H_*(S) := (H_*(N_1/N_2, [N_2]))$. A Propriedade de Continuação satisfeita pelo índice de Conley torna a teoria uma ferramenta útil em problemas de análise funcional não-linear, permitindo muitas aplicações em equações diferenciais.

Por meio de ferramentas mais refinadas, como as decomposições de Morse combinadas com uma apropriada versão do índice de Conley e uma correspondente Equação de Morse, podemos obter resultados de multiplicidade de soluções para problemas variacionais.

O objetivo geral desse trabalho é apresentar a Equação de Morse para uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado proveniente um semifluxo local definido num espaço métrico e apresentar algumas ilustrações do uso de tal equação no estudo de sistemas dinâmicos com exemplos obtido das equações diferenciais ordinárias.

O trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias e de topologia que serão utilizados ao longo do texto.

No Capítulo 2 apresentamos a definição do índice de Conley homotópico e homológico para semifluxos locais definidos em espaços métricos e calculamos o índice de Conley de um ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias.

No Capítulo 3, discutimos três propriedades básicas do índice de Conley: a Propriedade de Adição, de Irreduzibilidade e de Continuação. Concluímos o capítulo com aplicações dessas propriedades no estudo de equações diferenciais.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos a Equação de Morse associada a uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado. Inicialmente, apresentamos o par repulsor-atrator, que representa a decomposição de Morse mais simples que um conjunto invariante pode ter. Utilizando o conceito de trio-índice e o índice de Conley homológico, definimos a Equação de Morse. Fechamos o capítulo com um resultado de multiplicidade de soluções para um problema assintoticamente linear.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e conceitos básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias e de topologia algébrica.

1.1 Equações diferenciais ordinárias

Os conceitos e resultados desta seção podem ser encontrados em [6] ou [13].

1.1.1 Teoria geral

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Um ponto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ é denotado por (t, x) , com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e seja I um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo I pode ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 1.1.1. *Uma função diferenciável $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução da equação diferencial ordinária*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.1}$$

no intervalo I se o gráfico de φ em I está contido em Ω e

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ para todo } t \in I. \quad (1.2)$$

Observação 1.1.2. Na definição anterior, se $t \in I$ é um ponto extremo do intervalo, a derivada em (1.2) é a derivada lateral correspondente.

Temos o seguinte resultado de existência e unicidade de soluções.

Teorema 1.1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e f uma função contínua em Ω e localmente lipschitziana com relação a x em Ω . Seja $(t_0, x_0) \in \Omega$. Então existem um $\alpha > 0$ e uma única solução $\varphi : (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

com $\varphi(t_0) = x_0$.

Suponhamos as hipóteses do Teorema 1.1.3. Então, para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe uma única solução (maximal) $\varphi = \varphi(\cdot, t_0, x_0)$ de

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{com } x(t_0) = x_0, \quad (1.3)$$

definida num intervalo maximal de existência de φ . Denotaremos este intervalo por $(\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$ ou, simplesmente, por (ω_-, ω_+) . Recordemos que ω_- pode ser $-\infty$ e que ω_+ pode ser $+\infty$.

Teorema 1.1.4. *Suponhamos as hipóteses do Teorema 1.1.3 e seja $\varphi(\cdot, t_0, x_0)$ a solução maximal de*

$$\dot{x} = f(t, x) \text{ com } x(t) = x_0$$

definida em $(\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$. Então $(t, \varphi(t))$ tende à fronteira de Ω quando $t \rightarrow \omega_-(t_0, x_0)$ ou $t \rightarrow \omega_+(t_0, x_0)$.

1.1.2 Resultados de continuidade

Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$ um subconjunto fechado e $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Seja $f : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua em $\Omega \times \Lambda$ e localmente lipschitziana com relação

a x em $\Omega \times \Lambda$ com constante de Lipschitz independente de $\lambda \in \Lambda$. Seja $(t_0, x_0) \in \Omega$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, segue do Teorema 1.1.3 que existe uma única solução maximal de

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda) \text{ com } x(t_0) = x_0$$

definida no intervalo maximal $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$. Além disso, o seguinte resultado é válido:

Teorema 1.1.5. *O conjunto*

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0) \in \Omega, \lambda \in \Lambda \text{ e } t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega \times \Lambda$ e a função

$$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por $\Phi(t, t_0, x_0, \lambda) = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ é contínua em D .

Proposição 1.1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua localmente lipschitziana com relação a x em Ω . Suponhamos ainda que a seqüência $(f_k)_k$ convirja uniformemente para f_0 em cada parte compacta de Ω . Seja $((t_k, x_k))_k$ uma seqüência em Ω convergindo para $(t_0, x_0) \in \Omega$. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $\varphi_k = \varphi_k(\cdot, t_0, x_0)$ a única solução maximal de*

$$\dot{x} = f_k(t, x) \text{ com } x(t_k) = x_k$$

definida no intervalo maximal $(\omega_-(k), \omega_+(k))$. Seja $[a, b] \subset (\omega_-(0), \omega_+(0))$. Então existe um $k_0 = k_0(a, b)$ tal que, para cada $k \geq k_0$, temos $[a, b] \subset (\omega_-(k), \omega_+(k))$ e $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ uniformemente em $[a, b]$.

1.1.3 Sistemas autônomos

Consideremos um importante caso particular de equações diferenciais ordinárias. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente lipschitziana em Ω . Os resultados descritos na Subseção 1.1.1 implicam que, para cada $x_0 \in \Omega$,

existe uma única solução maximal $\varphi = \varphi(\cdot, x_0)$ de

$$\dot{x} = f(x) \text{ com } x(0) = x_0$$

definida em $(\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$. Além disso, o conjunto

$$D = \{(t, x_0) : x_0 \in \Omega \text{ e } t \in (\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times \Omega$ e a aplicação $\pi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ e $t \in (\omega_-(x), \omega_+(x))$, definida por $\pi(t, x) = \varphi(t, x)$, é contínua. Além disso:

Proposição 1.1.7. *A aplicação π possui as seguintes propriedades:*

- (1) $\pi(0, x) = x$, para todo $x \in \Omega$;
- (2) $\pi(t + s, x) = \pi(t, \pi(s, x))$ para todo $x \in \Omega$ e todos $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $t + s \in (\omega_-(x), \omega_+(x))$ e $t \in (\omega_-(\pi(s, x)), \omega_+(\pi(s, x)))$.

Observação 1.1.8. *A aplicação f é também chamada campo de vetores.*

Um *ponto de equilíbrio do campo de vetores f* é um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = 0$. Notemos que, se x_0 é um ponto de equilíbrio de f , então a função constante $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, dada por $\varphi(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.4}$$

Reciprocamente, se uma função constante $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$, dada por $\varphi(t) = x_0$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de (1.4), então x_0 é ponto de equilíbrio de f .

Um caso particular de sistemas autônomos são os sistemas lineares. Seja A uma matriz $n \times n$ e consideremos o sistema linear

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.5}$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. A única solução maximal de

$$\dot{x} = Ax \text{ com } x(0) = x_0$$

definida em $\mathbb{R}$ é denotada por $e^{tA}x$.

Segue que 0 é o único ponto de equilíbrio de $f(x) = Ax$. Dizemos que o sistema (1.5) é um sistema linear hiperbólico se a parte real dos autovalores de A é diferente de zero. O número $s = s(A)$ de autovalores com parte real negativa, contando suas multiplicidades, chama-se *índice de estabilidade do sistema*. O número $k(A)$ de autovalores com parte real positiva, contando multiplicidades, chama-se *índice de Morse de 0*.

Proposição 1.1.9. *Suponhamos que*

$$\dot{x} = Ax \tag{1.6}$$

seja um sistema linear hiperbólico. Então $\mathbb{R}^n$ é decomposto em soma direta de dois subespaços S e U satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) *S é um subespaço invariante de (1.6), isto é, se $x \in S$, então $e^{tA}x \in S$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in S$. Além disso, $A|_S$ possui todos os autovalores com parte real negativa;*
- (2) *U é um subespaço invariante de (1.6), isto é, $e^{tA}x \in U$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $x \in U$, e $A|_U$ possui todos os autovalores com parte real positiva;*
- (3) *Existem constantes $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que*

$$\|e^{tA}x\| \leq Ke^{-\mu t}\|x\|, \quad x \in S \text{ e } t \geq 0,$$

$$\|e^{tA}x\| \leq Ke^{\mu t}\|x\|, \quad x \in U \text{ e } t \leq 0.$$

Nesta dissertação, exemplificaremos a teoria do índice de Conley e a equação de Morse através de equações diferenciais autônomas.

1.2 Topologia

Para os conceitos apresentados e demonstração dos resultados enunciados, sugerimos [7], [8] e [14].

1.2.1 Categorias

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de

- (1) uma classe de objetos;
- (2) para todo par ordenado de objetos X, Y , um conjunto $\text{hom}(X, Y)$ dos morfismos com domínio em X e imagem em Y . Se $f \in \text{hom}(X, Y)$, escrevemos $f : X \rightarrow Y$;
- (3) para toda terna ordenada de objetos X, Y e Z , uma função associando ao par de morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ sua composição

$$g \circ f : X \rightarrow Z.$$

Além disso, as seguintes propriedades estão satisfeitas:

- (4) se $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow W$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \rightarrow W$;
- (5) para todo objeto Y , existe um morfismo $\text{Id}_Y : Y \rightarrow Y$, chamado *morfismo identidade*, tal que, se $f : X \rightarrow Y$, então $\text{Id}_Y \circ f = f$, e se $h : Y \rightarrow Z$, então $h \circ \text{Id}_Y = h$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Se a classe de objetos é um conjunto, dizemos que $\mathcal{C}$ é uma *categoria pequena*. Um morfismo $g : Y \rightarrow X$ é a inversa de $f : X \rightarrow Y$ se $g \circ f = \text{Id}_X$ e $f \circ g = \text{Id}_Y$. Neste caso, denotamos g por f^{-1} e dizemos que f é um *isomorfismo*.

Mostremos o seguinte resultado, que será utilizado na demonstração da Propriedade de Continuação do índice de Conley.

Lema 1.2.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Sejam $a : X \rightarrow Y$, $b : Y \rightarrow Z$ e $c : Z \rightarrow W$ morfismos tais que $c \circ b : Y \rightarrow W$ e $b \circ a : X \rightarrow Z$ são isomorfismos. Então então a, b, c são isomorfismos.*

Demonstração. Seja $a_1 : Y \rightarrow X$ a aplicação dada por $a_1 := (b \circ a)^{-1} \circ b$. Então a_1 é um morfismo em $\mathcal{C}$ e

$$a_1 \circ a = (b \circ a)^{-1} \circ (b \circ a) = \text{Id}_X. \quad (1.7)$$

Notemos que $(b \circ a) \circ a_1 = b$. Logo, $(c \circ b) \circ (a \circ a_1) = c \circ b$. Portanto,

$$a \circ a_1 = (c \circ b)^{-1} \circ (c \circ b) = \text{Id}_Y. \quad (1.8)$$

As equações (1.7) e (1.8) implicam que a é isomorfismo e que $a_1 = a^{-1}$. Desta maneira, como $b = (b \circ a) \circ a^{-1}$, segue que b é um isomorfismo e, portanto, que c também o é. $\square$

Definição 1.2.2. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é chamada sistema simples conexo se, para todo par (A, B) de objetos em $\mathcal{C}$, o conjunto $\text{hom}(A, B)$ de morfismos de A em B contém exatamente um elemento.*

Uma consequência imediata da definição acima é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.2.3. *Suponhamos que $\mathcal{C}$ seja um sistema simples conexo e sejam X e Y objetos em $\mathcal{C}$. Então, o único elemento f em $\text{hom}(X, Y)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja g o único elemento em $\text{hom}(Y, X)$. Logo, $g \circ f$ é um elemento em $\text{hom}(X, X)$. Porém, $\text{hom}(X, X) = \{\text{Id}_X\}$. Portanto, $g \circ f = \text{Id}_X$. Analogamente, podemos mostrar que $f \circ g = \text{Id}_Y$. $\square$

Para maiores informações sobre os conceitos de categoria, indicamos a leitura de [14].

1.2.2 Homotopias

Sejam Y é um espaço topológico e $A \subset Y$ um subespaço de Y . O par (Y, A) é chamado *par topológico*. No caso especial em que $A = \emptyset$, identificamos (Y, A) com Y . Mais ainda, se $A = \{y_0\}$, $y_0 \in Y$, identificamos (Y, A) com (Y, y_0) e chamamos (Y, y_0) de *espaço com ponto base y_0* ou *com ponto distinguido y_0* .

Sejam (Y, A) e (Z, B) dois pares topológicos. Um *morfismo* $f : (Y, A) \rightarrow (Z, B)$ é uma aplicação contínua $f : Y \rightarrow Z$ tal que $f(A) \subset B$.

A classe de todos os pares topológicos (respectivamente, de todos os espaços com ponto base) e seus morfismos correspondentes definem uma categoria denotada por $\mathcal{TP}$ (respectivamente, $\mathcal{T}^*$).

Definição 1.2.4. *Sejam (X, A) , (Y, B) pares topológico e $X' \subset X$. Sejam $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ morfismos tais que $f_0|_{X'} = f_1|_{X'}$. Denotando $(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$ por $(X, A) \times [0, 1]$, dizemos que f_0 é homotópico a f_1 relativamente a X' , denotando $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } X'$, se existe uma aplicação*

$$F : (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$$

tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ para todo $x \in X$ e $F(x, t) = f_0(x)$ para $x \in X'$ e $t \in [0, 1]$.

Uma tal aplicação F é chamada *homotopia de f_0 em f_1 relativamente a X'* . Caso $X' = \emptyset$, escrevemos $f_0 \simeq f_1$ e dizemos apenas que f_0 é homotópico a f_1 e que F é uma homotopia entre f_0 e f_1 .

Diremos que um espaço com ponto base (X, x_0) é *contrátil* quando existe uma homotopia entre a aplicação identidade $\text{Id}_{(X, x_0)}$ e a aplicação constante $f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ dada por $f(x) = x_0$ para todo $x \in X$.

Proposição 1.2.5. *A relação $\simeq$ é uma relação de equivalência no conjunto de todos os morfismos de (Y, A) em (Z, B) .*

Observemos ainda que, se (W, C) é um terceiro par e $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são dois morfismos de (Z, B) em (W, C) tais que $f \simeq g$ e $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$, então $\tilde{f} \circ g \simeq \tilde{g} \circ g$.

Dois pares topológicos (Y, A) e (Z, B) são ditos *homotopicamente equivalentes*, e escrevemos $(Y, A) \simeq (Z, B)$, quando existem morfismos $f : (Y, A) \rightarrow (Z, B)$ e $g : (Z, B) \rightarrow (Y, A)$ tais que $f \circ g \simeq \text{Id}_{(Z, B)}$ e $g \circ f \simeq \text{Id}_{(Y, A)}$, sendo $\text{Id}_{(Y, A)}$ e $\text{Id}_{(Z, B)}$ os morfismos identidade em (Y, A) e (Z, B) respectivamente.

Seja $f : (Y, A) \rightarrow (Z, B)$ (respectivamente, $f : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$) um morfismo de pares topológicos (respectivamente, de espaços com ponto base). Então a classe de equivalência de f , isto é, o conjunto de todos os morfismos homotópicos a f , é denotada por $[f]$.

Seja (Y, A) um par topológico (respectivamente, seja (Y, y_0) um espaço com ponto base). Denotaremos por $[(Y, A)]$ (respectivamente, $[(Y, y_0)]$) sua correspondente classe de equivalência, isto é, a classe de todos os pares topológicos (respectivamente, de todos os espaços com ponto base) homotopicamente equivalentes a (Y, A) (respectivamente, (Y, y_0)).

Se $Y = \{y_0\}$, o tipo de homotopia de $(\{y_0\}, y_0)$ é chamado *trivial* e denotado por $\bar{0}$. Notemos que, se (Y, y_0) é contrátil, então $[(Y, y_0)] = \bar{0}$.

Sejam S^k a esfera unitária em $\mathbb{R}^{k+1}$ e $s_0 \in S^k$. O tipo de homotopia de (S^k, s_0) será denotado por Σ^k .

Denotaremos por $\mathcal{HT}^*$ a categoria cujos objetos são espaços com ponto distinguido e seus morfismos são as classes de equivalência $[f]$ dos morfismos f de $\mathcal{T}^*$.

Definição 1.2.6. *Sejam A um subespaço do espaço X e $i : A \rightarrow X$ a aplicação inclusão. O conjunto A é chamado retrato de X se existe uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal*

que $r \circ i = \text{Id}_A$, ou seja, se $r(x) = x$ para todo $x \in A$. Uma tal aplicação é chamada retração de X em A .

Definição 1.2.7. *Sejam A um subespaço do espaço X e $i : A \rightarrow X$ a aplicação inclusão. O subespaço A é chamado retração por deformação forte de X se existe uma retração r de X em A tal que $\text{Id}_X \simeq i \circ r$ rel A . Uma homotopia $F : \text{Id}_X \simeq \text{rel } A$ é chamada retração por deformação forte de X em A .*

1.2.3 Espaços quocientes

Sejam Z um espaço topológico e A e Y subespaços de Z . Suponhamos primeiro que $Y \cap A \neq \emptyset$. Definamos uma relação de equivalência em Y da seguinte maneira: $x \sim y$ se, e somente se, $x = y$ ou $x, y \in Y \cap A$.

Para $x \in Y$, seja $[x]$ a classe de equivalência de x . Portanto, $[x] = \{x\}$ se $x \notin Y \cap A$ e $[x] = Y \cap A$ para $x \in Y \cap A$. Denotaremos o conjunto de todas as classes de equivalência de $\sim$ por Y/A .

Seja agora $q_Y : Y \rightarrow Y/A$ a aplicação quociente. Isto significa que $q_Y(x) = [x]$ para $x \in Y$.

Consideremos em Y/A a topologia quociente com respeito a q_Y , ou seja, $U \subset Y/A$ é aberto se, e somente se, $q_Y^{-1}(U)$ é aberto em Y .

O espaço quociente Y/A é tratado como um par topológico com ponto base, escolhendo a classe de $Y \cap A$, denotada por $[A]$, como ponto base.

Se $Y \cap A = \emptyset$, escolhemos um ponto $p \notin Y$. Munindo o conjunto $Y \dot{\cup} \{p\}$ com a topologia da soma, definimos $Y/A := (Y \dot{\cup} \{p\})/\{p\}$.

Escolhemos p como ponto base para Y/A , mas escrevemos, assim como antes, $p = [A]$. Neste caso, a aplicação $q_Y : Y \rightarrow Y/A$, $q_Y(x) = [x]$ é tal que a topologia de Y/A é a quociente com respeito a q_Y , ou seja, $U \subset Y/A$ é aberto se, e somente se, $q_Y^{-1}(U)$ é aberto em Y .

Notemos que, se $V \subset Y$ é um subconjunto de Y e $V \supset Y \cap A$ ou $V \cap A = \emptyset$, então $q_Y^{-1}(q_Y(V)) = V$. Portanto, neste caso, V é um aberto em Y se, e somente se, $q_Y(V)$ é um aberto em Y/A .

Proposição 1.2.8. *Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua, $\sim$ uma relação de equivalência em X e $q : X \rightarrow X/\sim$ a correspondente aplicação*

quociente. Então existe uma função contínua $g : X/\sim \rightarrow Y$ satisfazendo $f = g \circ q$ se, e somente se, $x \sim y$ implica $f(x) = f(y)$.

Definição 1.2.9. *Seja B um espaço topológico e $A \subset B$ um subespaço munido da topologia induzida. A aplicação inclusão $i : A \rightarrow B$, $i(x) = x$, $x \in A$, é chamada cofibração se satisfaz a propriedade da extensão de homotopia com respeito a qualquer espaço Y , isto é, se dadas duas aplicações contínuas $g : B \rightarrow Y$ e $G : A \times [0, 1] \rightarrow Y$ tais que $g(x) = G(x, 0)$ para todo $x \in A$, existe uma aplicação contínua $F : B \times [0, 1] \rightarrow Y$ com $F(x, 0) = g(x)$ para $x \in B$ e $F|_{A \times [0, 1]} = G$.*

A seguinte caracterização de cofibração é muito útil e será utilizada no Capítulo 2.

Proposição 1.2.10. *Se B é um espaço métrico e $A \subset B$ é fechado, então a aplicação inclusão $i : A \rightarrow B$, $i(x) = x$, $x \in A$, é uma cofibração se, e somente se, existem uma vizinhança aberta U de A e uma aplicação contínua $H : U \times [0, 1] \rightarrow B$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = a$ e $H(x, 1) \in A$ para todo $x \in U$, todo $a \in A$ e todo $t \in [0, 1]$.*

O próximo resultado apresenta uma importante relação entre espaços quocientes e a propriedade de cofibração.

Proposição 1.2.11. *Sejam B um espaço topológico e $A \subset B$ um subespaço munido da topologia induzida. Suponhamos que a inclusão $i : A \rightarrow B$ seja uma cofibração. Então a aplicação quociente $q_Y : (B, A) \rightarrow (B/A, [A])$ induz um isomorfismo $(q_Y)_* : h_n(B, A) \rightarrow h_n(B/A, [A])$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, sendo h_* uma teoria de homologia não reduzida em $\mathcal{HT}$.*

Para a demonstração do resultado acima, veja a Proposição 7.14 em [15].

1.2.4 Aplicação induzida por inclusão

Sejam Y um espaço topológico e A, B, C e D subconjuntos de Y . Sejam $q_A : A \rightarrow A/B$ e $q_C : C \rightarrow C/D$ aplicações quocientes. Uma aplicação $j : A/B \rightarrow C/D$ é chamada *induzida por inclusão* se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- (1) $A \cap B$ é fechado em A e $C \cap D$ é fechado em C ;
- (2) $A \setminus B \subset C$ e $A \cap B \cap C \subset D$;

(3) se $z \in A/B$, então

$$j(z) = \begin{cases} q_C(x) & \text{se } z = q_A(x), x \in A \setminus B \\ [D] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 1.2.12. *Notemos que a aplicação inclusão induzida preserva ponto base.*

Uma aplicação inclusão induzida é chamada *admissível* se j é contínua e $\text{Cl}(A \setminus B) \cap B \cap C \subset D$. A dificuldade em mostrar que uma dada aplicação induzida j é admissível está na continuidade de j . O próximo resultado apresenta condições para que j seja contínua.

Proposição 1.2.13. *Seja $j : A/B \rightarrow C/D$ uma aplicação inclusão induzida. Se $\text{Cl}(A \setminus B) \cap A \subset C$, então j é contínua.*

Demonstração. Definamos a aplicação $G : A \rightarrow C/D$ por

$$G(x) = \begin{cases} q_C(x) & \text{se } x \in A \setminus B \\ [D] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se $x \in A \cap B$, então $G(x) = [D]$. Mostremos que j é a única aplicação que satisfaz $G = j \circ q_A$ e que preserva ponto base. De fato, sejam $z \in A/B$ e $x \in A$ tais que $z = q_A(x)$. Se $x \in A \setminus B$, segue que $q_C(x) = G(x) = j'(q_A(x)) = j'(z)$. A definição de j implica que $j(z) = j'(z)$. Suponhamos que $x \notin A \setminus B$. Portanto, $[D] = G(x) = j'(q_A(x)) = j'(z)$. Novamente, a definição de j implica que $j(z) = j'(z)$. Isto mostra nossa afirmação.

Além disso, como q_A é uma aplicação quociente, j é contínua se, e somente se, G é contínua. Portanto, basta mostrar que G é contínua para concluir a demonstração.

Sejam $x_0 \in A$ e U um conjunto aberto em C/D tais que $G(x_0) \in U$. Temos que existe um conjunto aberto $W \subset Y$ tal que $W \cap C = q_C^{-1}(U)$. Consideremos dois casos.

Primeiro caso: Suponhamos que $x_0 \in A \setminus B$.

Definamos $\Omega := W \cap (A \setminus B)$. Como $A \cap B$ é um conjunto fechado em A , temos que Ω é aberto em A . Além disso, como $G(x_0) = q_C(x_0) \in U$, segue que $x_0 \in W \cap C$, o que implica que $x_0 \in \Omega$. Seja $x \in \Omega$. Então $x \in W \cap (A \setminus B) \subset W \cap C$. Logo, $G(x) = q_C(x) \in q_C(W \cap C) \subset U$. Isto prova a continuidade de G em x_0 neste caso.

Segundo caso: Suponhamos que $x_0 \in A \cap B$.

Nesta situação, temos $C \cap D \subset W$. Definamos $\Omega := (W \cup (Y \setminus \text{Cl}(A \setminus B))) \cap A$. Então Ω é aberto em A . Seja $x \in A \cap B$. Temos duas situações possíveis: $x \notin \text{Cl}(A \setminus B)$ ou $x \in \text{Cl}(A \setminus B)$. Na primeira situação, é claro que $x \in \Omega$; na segunda, a hipótese $\text{Cl}(A \setminus B) \cap A \subset C$ implica que $x \in C$. Portanto, como $A \cap B \cap C \subset D$, temos $x \in D$ e obtemos $x \in C \cap D \subset W$. Logo, $A \cap B \subset \Omega$ e, conseqüentemente, $x \in \Omega$. Como x é um ponto arbitrário em $A \cap B$, temos $A \cap B \subset \Omega$. Em particular, segue que $x_0 \in \Omega$.

Para finalizar, seja $x \in \Omega$. Suponhamos que $x \in A \setminus B$. A definição de aplicação induzida por inclusão implica que $x \in C$. Além disso, $G(x) = q_C(x)$. Portanto, $x \in \text{Cl}(A \setminus B) \cap A \subset C$, ou seja, $x \in W \cap C$, e $G(x) = q_C(x) \in q_C(W \cap C) = U$. Finalmente, suponhamos que $x \in A \cap B$. Temos $G(x) = [D] \in U$. Concluimos a demonstração da continuidade da aplicação G . $\square$

1.2.5 A adição wedge

Discutiremos uma operação entre os espaços topológicos com ponto base.

Definição 1.2.14. *Sejam (Y, y_0) e (Z, z_0) dois espaços com ponto base. A adição wedge $(Y_0, y_0) \vee (Z_0, z_0)$ é o espaço com ponto base (W, w_0) , sendo $W = Y \times \{z_0\} \cup \{y_0\} \times Z \subset Y \times Z$, $w_0 = (y_0, z_0)$.*

Por uma questão de simplicidade, a adição wedge é freqüentemente denotada por $Y \vee Z$.

Observação 1.2.15. *Por resultados que não demonstraremos nesta dissertação mas que podem ser encontrados em [14], a adição wedge depende somente dos tipos de homotopia dos pares (Y, y_0) e (Z, z_0) .*

Mostremos o seguinte resultado que será relevante para demonstrar a Propriedade da Adição do índice de Conley.

Proposição 1.2.16. *Sejam B_i um espaço topológico e A_i um conjunto fechado em B_i , $i = 1, 2$. Escrevamos $Y = (B_1 \dot{\cup} B_2) / (A_1 \dot{\cup} A_2)$, $y_0 = [A_1 \dot{\cup} A_2]$, sendo que $\dot{\cup}$ denota a reunião disjunta munida da topologia da soma. Além disso, definamos $Z_i = B_i / A_i$, $z_i = [A_i]$, $i = 1, 2$. Então (Y, y_0) e $(Z_1, z_1) \vee (Z_2, z_2)$ são isomorfos em $\mathcal{T}^*$.*

Demonstração. Vamos mostrar que (Y, y_0) e $(Z_1, z_1) \vee (Z_2, z_2)$ são homeomorfos por um homeomorfismo que preserva ponto base. Sejam $q_i : B_i \rightarrow B_i/A_i$, $i = 1, 2$, e $q : B \rightarrow B/A$ as aplicações quocientes, sendo $B = B_1 \cup B_2$ e $A = A_1 \cup A_2$. Sejam também

$$F_1 = (B_1/A_1) \times \{[A_2]\} \quad \text{e} \quad F_2 = \{[A_1]\} \times B_2/A_2.$$

Para cada $i = 1, 2$, seja $f_i : B_i/A_i \rightarrow B/A$ a aplicação induzida por inclusão. Recordemos que, para cada $i = 1, 2$,

$$f_i(z) = \begin{cases} q(x) & \text{se } z = q_i(x), x \in B_i \setminus A_i \\ [A] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, é claro que $\text{Cl}(B_i \setminus A_i) \cap B_i \subset B$. Logo, segue da Proposição 1.2.13 que f_i é contínua, $i = 1, 2$.

Como A_i é fechado em B_i para cada $i = 1, 2$, segue que F_i é fechado em $(B_1/A_1) \vee (B_2/A_2)$ para cada $i = 1, 2$. Para cada $i = 1, 2$, seja p_i a projeção de $(B_1/A_1) \vee (B_2/A_2)$ sobre (B_i, A_i) . Definamos $f : (B_1/A_1) \vee (B_2/A_2) \rightarrow B/A$ por $f|_{F_i} = f_i \circ p_i|_{F_i}$, $i = 1, 2$. Segue que f é contínua e preserva ponto base.

Finalmente, definamos $G : B_1 \dot{\cup} B_2 \rightarrow (B_1/A_2) \vee (B_2/A_2)$ por

$$G(y_1) = (q_1(y_1), [A_2]), \quad y_1 \in B_1,$$

$$G(y_2) = ([A_1], q_2(y_2)), \quad y_2 \in B_2.$$

Como G é contínua nos fechados B_i , $i = 1, 2$, e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, segue que G é contínua. Além disso, G leva A em $\{([A_1], [A_2])\}$. Nestas condições, segue da Proposição 1.2.8 que existe uma única aplicação contínua $g : B/A \rightarrow (B_1/A_1) \vee (B_2/A_2)$ que preserva ponto base e satisfaz $g \circ q = G$.

Além disso, g é a inversa de f . De fato, como G é sobrejetora, g também o é. Portanto, basta mostrar que $f \circ g = \text{Id}_{B/A}$ para mostrar que g é a inversa de f . Para ver isto, seja $z \in B/A$. Temos que $z = q(x)$ para algum $x \in B \setminus A$. Sem perda de

generalidade, suponhamos que $x \in B_1$. Então

$$\begin{aligned} f(g(z)) &= f((g \circ q)(x)) = f(G(x)) = f(q_1(x), [A_2]) \\ &= (f_1 \circ p_1|_{F_1})(q_1(x), [A_2]) = f_1(q_1(x)) = q(z) = z. \end{aligned}$$

Caso contrário, $z = [A]$ e $(f \circ g)(z) = f([A_1], [A_2]) = [A]$. Isto que encerra a demonstração. $\square$

O próximo resultado mostra que a adição wedge é não negativa.

Proposição 1.2.17. *Se (Y, y_0) e (Z, z_0) são espaços com ponto base e $[(Y, y_0) \vee (Z, z_0)] = \bar{0}$, então $[(Y, y_0)] = [(Z, z_0)] = \bar{0}$.*

Demonstração. Seja $(W, w_0) = (Y, y_0) \vee (Z, z_0)$. Como $[(W, w_0)] = \bar{0}$, segue que (W, w_0) é contrátil. Logo, existe uma contração $H : W \times [0, 1] \rightarrow W$ satisfazendo $H(w, 0) = w$, $H(w, 1) = w_0$ e $H(w_0, s) = w_0$ para todo $w \in W$, $s \in [0, 1]$. Mostremos que $[(Y, y_0)] = \bar{0}$. Definamos a imersão $e : (Y, y_0) \rightarrow (W, w_0)$ por $e(y) = (y, z_0)$ e a projeção $p : (W, w_0) \rightarrow (Y, y_0)$, por $p(y, z) = y$. É claro que e e p são contínuas.

Definamos a aplicação $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ por $\tilde{H}(y, s) = p(H(e(y), s))$. Afirmamos que $\tilde{H}$ é uma contração. De fato, é claro que $\tilde{H}$ é contínua. Além disso, $\tilde{H}(y, 0) = p(H(e(y), 0)) = p(e(y)) = p((y, z_0)) = y$ para todo $y \in Y$. Mais ainda, $\tilde{H}(y, 1) = p(H(e(y), 1)) = p(y_0, z_0) = y_0$ para todo $y \in Y$. Por fim, $\tilde{H}(y_0, s) = p(H(e(y_0), s)) = p(H((y_0, z_0), s)) = p(y_0, z_0) = y_0$ para todo $s \in [0, 1]$. Isso prova nossa afirmação.

Portanto, $[(Y, y_0)] = \bar{0}$. De maneira análoga, mostramos que $[(Z, z_0)] = \bar{0}$. $\square$

Dado um objeto (A, a_0) em $\mathcal{T}^*$, denotemos o n -ésimo grupo de homotopia de (A, a_0) por $\pi_n(A, a_0)$. De acordo com o Exercício B.6 do Capítulo 7 de [14], temos o seguinte resultado.

Proposição 1.2.18. *Dado $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y$, existe um isomorfismo*

$$\pi_n(X \vee Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y, (x_0, y_0)).$$

Encerramos este capítulo com o seguinte resultado.

Lema 1.2.19. *Sejam (Y, y_0) e (Z, z_0) dois espaços com ponto base e $(W, w_0) := (Y, y_0) \vee (Z, z_0)$. Se $h(W, w_0) = \Sigma^m$ para algum $m \geq 0$, então*

$$[(Y, y_0)] = \bar{0} \quad \text{ou} \quad [(Z, z_0)] = \bar{0}.$$

Demonstração. Consideremos o caso $m \geq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o Lema 1.2.18 implica que $\pi_n(Y, y_0) \oplus \pi_n(Z, z_0)$ pode ser mergulhado injetivamente em $\pi_n(W, w_0)$ e $\pi(S^m, s_0) = \mathbb{Z}$. Segue que

$$\pi_m(Y, y_0) = 0 \text{ ou } \pi_m(Z, z_0) = 0.$$

Suponhamos que $\pi_m(Y, y_0) = 0$. Como (W, w_0) e (S^m, s_0) possuem o mesmo tipo de homotopia, segue que existem aplicações

$$f : (W, w_0) \rightarrow (S^m, s_0) \text{ e } g : (S^m, s_0) \rightarrow (W, w_0)$$

tais que $g \circ f$ é homotópica a $\text{Id}_{(W, w_0)}$. Logo, existe uma aplicação contínua $H : W \times [0, 1] \rightarrow W$ tal que $H(w, 0) = (f \circ g)(w)$, $H(w, 1) = w$ e $H(w_0, t) = w_0$ para todo $w \in W$ e todo $t \in [0, 1]$.

Definamos as aplicações $e_Y : (Y, y_0) \rightarrow (W, w_0)$ por $e_Y(y) = (y, z_0)$ para todo $y \in Y$ e $p_Y : (W, w_0) \rightarrow (Y, y_0)$ por $p_Y(y, z) = y$ para todo $(y, z) \in W$. É claro que e_Y e p_Y são contínuas. Consideremos as aplicações contínuas $\tilde{f} := f \circ e_Y$ e $\tilde{g} := p_Y \circ g$. Definamos $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ por

$$\tilde{H}(y, t) = p_Y(H(e_Y(y), t)) \text{ para todo } (y, t) \in Y \times [0, 1].$$

Temos que $\tilde{H}$ é contínua, $\tilde{H}(y, 0) = (\tilde{f} \circ \tilde{g})(y)$, $\tilde{H}(y, 1) = y$ e $\tilde{H}(y_0, t) = y_0$ para todo $y \in Y$ e todo $t \in [0, 1]$. Portanto, $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ é homotópica a $\text{Id}_{(Y, y_0)}$. Como $\pi_m(Y, y_0) = 0$, temos que $\tilde{g}$ é homotópica à aplicação constante. Portanto, $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ é homotopicamente nula, ou seja, (Y, y_0) é contrátil e o lema está demonstrado para o caso $m = 1$.

Consideremos o caso $m = 0$. Definamos

$$f : (W, w_0) \rightarrow (\{-1, 1\}, \{-1\}) \text{ e } g : (\{-1, 1\}, \{-1\}) \rightarrow (W, w_0)$$

tais que as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotópicas às correspondentes aplicações identidade. Afirmamos que $f \circ g = \text{Id}_{(S^0, s_0)}$. De fato, é claro que $(f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(w_0) = -1$. Por outro lado, há duas possibilidades para $(f \circ g)(1)$: 1 ou -1 .

Se $(f \circ g)(1) = -1$, temos que $f \circ g$ é constante. Segue que $\text{Id}_{(S^0, s_0)}$ é homotópica a uma função constante e, portanto, $[(S^0, s_0)] = \bar{0}$, o que é uma contradição. Logo, $(f \circ g)(1) = 1$ e a afirmativa está demonstrada.

Em particular, g é uma aplicação injetiva. Como $g(-1) = (y_0, z_0)$, temos que $g(1) \neq (y_0, z_0)$. Recordemos que $W = Y \times \{z_0\} \cup \{y_0\} \times Z$. Logo, se $g(1) = (y', z')$ para algum $y' \in Y$ e $z' \in Z$, temos $y' = y_0$ ou $z' = z_0$. Suponhamos que $z' = z_0$. Portanto, $g(1) = (y', z_0)$ para algum $y' \in Y$ com $y' \neq y_0$. Afirmamos que (Z, z_0) é contrátil. De fato, consideremos as aplicações

$$e_Z : (Z, z_0) \rightarrow (W, w_0) \text{ e } p_Z : (W, w_0) \rightarrow (Z, z_0)$$

dadas por $e_Z(z) = (y_0, z)$ para todo $z \in (Z, z_0)$ e $p_Z(y, z) = z$ para todo $(y, z) \in (W, w_0)$. Definamos $\tilde{H} : Z \times [0, 1] \rightarrow Z$ por $\tilde{H}(z, s) = p_Z(H(e_Z(z), s))$, $(z, s) \in Z \times [0, 1]$, sendo H uma homotopia entre $g \circ f$ e $\text{Id}_{(W, w_0)}$.

Afirmamos que $\tilde{H}$ é uma contração de (Z, z_0) . De fato, a aplicação $\tilde{H}$ é contínua e $\tilde{H}(z, 0) = p_Z(H(e_Z(z), 0)) = p_Z(e(z)) = p_Z((y_0, z)) = z$ para todo $z \in Z$. Além disso, $\tilde{H}(z, 1) = p_Z(H(e_Z(z), 1)) = p_Z(H((g \circ f)(e_Z(z))))$. Temos dois casos a considerar: se $f((y_0, z)) = 1$, então $\tilde{H}(z, 1) = p_Z(H(g(1))) = p_Z((y', z_0)) = z_0$ para todo $z \in Z$; se $f((y_0, z)) = -1$, então $\tilde{H}(z, 1) = p_Z(g(-1)) = p_Z((y_0, z_0)) = z_0$ para todo $z \in Z$. Em qualquer dos casos, temos $\tilde{H}(z, 1) = z_0$ para todo $z \in Z$. Por fim, $\tilde{H}(z_0, s) = p_Z(H(e_Z(z_0), s)) = p_Z(H((y_0, z_0), s)) = p_Z((y_0, z_0)) = z_0$ para todo $s \in [0, 1]$. Isso demonstra que (Z, z_0) é contrátil e encerra a demonstração. $\square$

O índice de Conley

Neste capítulo, apresentamos a definição do índice de Conley homotópico. Iniciaremos com as definições básicas (Seções 1 e 2) e demonstraremos diversos resultados. O conceito de bloco isolante é apresentado na Seção 3 e o de admissibilidade, na Seção 4. Na Seção 5, apresentamos o conceito de par índice e enunciamos o resultado que nos permite definir o índice de Conley (ver Seção 6). Ilustramos os conceitos com exemplos provenientes de equações diferenciais ordinárias e calculamos o índice de um ponto de equilíbrio hiperbólico na Seção 7. Finalizaremos o capítulo com a definição do índice de Conley homológico.

A exposição a seguir é baseada em [10] e [9].

2.1 Semifluxos

Definição 2.1.1. *Sejam X um espaço métrico, D um conjunto aberto de $[0, \infty) \times X$ e $\pi : D \rightarrow X$ uma aplicação. Denotaremos os pontos $\pi(t, x)$ por $x\pi t$. A aplicação π é chamada um semifluxo local em X , se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

- (1) π é contínua em D ;

- (2) para cada $x \in X$, existe um $\omega_x \in (0, \infty]$ tal que $(t, x) \in D$ se, e somente se, $0 \leq t < \omega_x$;
- (3) $x\pi 0 = x$ para todo $x \in X$;
- (4) se $(t, x) \in D$ e $(s, x\pi t) \in D$, então $(t + s, x) \in D$ e vale $x\pi(t + s) = (x\pi t)\pi s$.

Observação 2.1.2. Se $\omega_x = \infty$ para todo $x \in X$, então π é chamado um semifluxo global em X .

O próximo exemplo coloca as equações diferenciais autônomas descritas na Subseção 1.1.3 no contexto de semifluxos.

Exemplo 2.1.3. Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e localmente lipschitziana. Para cada $x_0 \in \Omega$, consideremos a equação diferencial ordinária

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

Utilizando os fatos descritos na Subseção 1.1.3, para cada $x \in \Omega$, existe uma única solução maximal $t \mapsto x(t, x_0)$ de (2.1) definida em algum intervalo maximal $(\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$.

Definindo, $x_0\pi_f t := x(t, x_0)$ para $x_0 \in \Omega$ e $t \in (\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$, os fatos descritos na Subseção 1.1.3 e a Proposição 1.1.7 implicam que π_f é um semifluxo local em $X := \Omega$.

Observação 2.1.4. Nas condições do Exemplo 2.1.3, π_f é, na verdade, um fluxo local em Ω .

Sejam X um espaço métrico e π um semifluxo local em X . Denotemos por d a métrica em X .

Sejam π e π_n , $n \in \mathbb{N}$, semifluxos locais em X . Dizemos que a seqüência $(\pi_n)_n$ converge para π (e escrevemos $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$) se, para quaisquer que sejam $x \in X$, $t \in \mathbb{R}^+$ e seqüências $(x_n)_n$ em X e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ com $x_n \rightarrow x$ e $t_n \rightarrow t$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x\pi t$ estiver definido, então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n\pi_n t_n$ está definido para todo $n \geq n_0$ e $x_n\pi_n t_n \rightarrow x\pi t$ quando $n \rightarrow \infty$.

Exemplo 2.1.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e localmente lipschitziana. Denotemos por π_{f_k} o semifluxo local em Ω gerado pelas soluções de*

$$\dot{x} = f_k(x), \quad x(0) = x_0,$$

sendo $x_0 \in \Omega$.

Suponhamos que a seqüência $(f_k)_k$ converge uniformemente para f_0 em cada subconjunto compacto de Ω . A Proposição 1.1.6 implica que $\pi_{f_k} \rightarrow \pi_0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Seja J um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma aplicação $\sigma : J \rightarrow X$ é chamada *solução* (de π) se, para todos $t \in J$, $s \in [0, \infty)$ tais que $t + s \in J$, tivermos $\sigma(t)\pi s$ definido e $\sigma(t)\pi s = \sigma(t + s)$.

Se $0 \in J$ e $\sigma(0) = x$, a aplicação σ é dita uma *solução por x* . Se $J = (-\infty, \infty)$, a aplicação σ é chamada de *solução completa*.

Definição 2.1.6. *Um ponto $x_0 \in X$ é chamado um equilíbrio de π se a função constante $\sigma(t) = x_0$, $t \in [0, \infty)$, é uma solução de π .*

2.2 Conjuntos limites

Nesta seção, X denota um espaço métrico e π , um semifluxo local em X .

Seja σ uma solução de π definida em $[0, \infty)$. O conjunto ω -limite, $\omega(\sigma)$, de σ é o conjunto de todos $y \in X$ para os quais existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$, com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $\sigma(t_n) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja σ uma solução de π definida em $(-\infty, 0]$. De forma análoga, podemos definir o conjunto α -limite, $\omega^*(\sigma)$, de σ .

Observação 2.2.1. *Notemos que, se σ é uma solução definida em $[0, \infty)$, então $\sigma(t) = \sigma(0)\pi t$ para todo $t \in [0, \infty)$ e, portanto, o conjunto $\omega(\sigma)$ depende apenas de $x_0 := \sigma(0)$. Neste caso, também escrevemos $\omega(x_0)$ para denotar $\omega(\sigma)$. Para o caso de fluxos locais, como é o caso de equações diferenciais ordinárias, também podemos escrever $\omega^*(x_0)$ em vez de $\omega^*(\sigma)$.*

Definição 2.2.2. *Uma aplicação contínua $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada função de Liapunov para o semifluxo π se, para todo $x \in X$, a função $t \mapsto V(x\pi t)$ é não crescente em*

$t \in [0, \omega_x)$. O semifluxo π é chamado do tipo gradiente com respeito a V se V é uma função de Liapunov para π e a aplicação $t \mapsto V(\sigma(t))$ é não constante sempre que σ é uma solução completa não constante de π .

Exemplo 2.2.3. Seja $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^2 . Consideremos a equação diferencial ordinária

$$\dot{x} = -\nabla F(x) \quad (2.2)$$

e seja π o semifluxo local gerado pelas soluções de (2.2). Então F é uma função de Liapunov associada a π , ou seja, π é um semifluxo (do tipo) gradiente.

Lema 2.2.4. Seja Ω um subconjunto aberto de X . Para cada $x \in \Omega$ e cada solução σ por x , temos que $\sigma(t) \rightarrow \partial\Omega$ quando $t \rightarrow \omega_x$. Formulando de outra maneira, para todo compacto $K \subset \Omega$, existe $\epsilon(K) > 0$ tal que, se $t \in [\omega_x - \epsilon, \omega_x)$, então $\sigma(t) \notin K$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existam um compacto $K \subset \Omega$ e uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \nearrow \omega_x < \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $\sigma(t_n) \in K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando a uma subseqüência se necessário, podemos supor que $(\sigma(t_n))_n$ converge a um ponto $x_0 \in K$. Como $d(K, \partial\Omega) > 0$, seja $\alpha > 0$ tal que $B_\alpha := \{x \in X : d(x, x_0) < \alpha\} \subset \Omega$ e o aberto básico $B_\alpha \times [0, 2\alpha)$ esteja contido no conjunto aberto $\{(t, y) : y \in \Omega \text{ e } t \in [0, \omega_y)\}$. Logo existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(t_n) \in B_\alpha$ e $\omega_x - t_n < \alpha$ para $n \geq n_0$. Portanto, se $n \geq n_0$, $\sigma(t_n + s)$ está definida para todo $s \in [0, 2\alpha)$. Porém, como $\omega_x < t_n + \alpha < t_n + 2\alpha$, isto é uma contradição. $\square$

Proposição 2.2.5. Sejam S um conjunto positivamente π -invariante e K um conjunto compacto tal que $S \subset K \subset X$. Então $\omega_x = \infty$ para todo $x \in S$.

Demonstração. Seja $x \in S$ e suponhamos que $\omega_x < \infty$. Pelo Lema 2.2.4, existe um $\epsilon > 0$ tal que $x\pi t \notin K$ para todo $t \in [\omega_x - \epsilon, \omega_x)$. Logo, $x\pi t \notin S$ para $t \in [\omega_x - \epsilon, \omega_x)$. Como S é positivamente invariante, temos uma contradição. $\square$

Observação 2.2.6. A demonstração da Proposição 2.2.5 também segue do Lema 4.2 de [2].

Teorema 2.2.7. Sejam $x \in X$ e $\sigma : [0, \infty) \rightarrow X$ uma solução por x . Se o conjunto $\sigma([0, \infty))$ é relativamente compacto, então o conjunto $\omega(\sigma)$ é compacto e invariante.

Demonstração. Temos que $\omega(\sigma) \subset \text{Cl}(\sigma([0, \infty)))$. Por conseguinte, para mostra que $\omega(\sigma)$ é compacto, é suficiente mostrar que $\omega(\sigma)$ é fechado.

Seja $(y_n)_n$ uma sequência em $\omega(\sigma)$ tal que $y_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$ para algum $y \in X$. Mostremos que $y \in \omega(\sigma)$. Como $y \in \omega(\sigma)$, para cada y_n , existe uma sequência $(t_m^{(n)})_m$ tal que $t_m^{(n)} \rightarrow \infty$ e $\sigma(t_m^{(n)}) \rightarrow y_n$ quando $m \rightarrow \infty$.

Escolhamos, para cada sequência $(t_m^{(n)})_m$, um ponto $t_n = t_{m(n)}^{(n)} > n$ tal que $d(\sigma(t_n), y_n) < 1/n$. Temos então:

$$d(\sigma(t_n), y) \leq d(\sigma(t_n), y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + d(y_n, y).$$

Segue que $d(\sigma(t_n), y) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, segue-se que $y \in \omega(\sigma)$. Isto mostra que $\omega(\sigma)$ é um conjunto fechado.

Para mostrar que $\omega(\sigma)$ é invariante, mostremos primeiro que $\omega(\sigma)$ é positivamente invariante. Sejam $y \in \omega(\sigma)$ e $y_1 := y\pi t_0$ para algum $t_0 \in [0, \omega_y)$. Mostremos que $y_1 \in \omega(\sigma)$.

Como $y \in \omega(\sigma)$, existe uma sequência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $x\pi t_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Como π é contínua, segue que

$$y_1 = y\pi t_0 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x\pi t_n \right) \pi t_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x\pi t_n) \pi t_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x\pi(t_0 + t_n).$$

Definindo, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(s_n)_n$ por $s_n := (t_0 + t_n)$, temos que $s_n \rightarrow \infty$ e $x\pi s_n \rightarrow y_1$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $y_1 \in \omega(\sigma)$. Logo, $\omega(\sigma)$ é positivamente π -invariante.

Mostremos que $\omega(\sigma)$ é também negativamente invariante. Seja $y \in \omega(\sigma)$. Devemos mostrar a existência de uma solução μ por y definida em $(-\infty, 0]$ tal que $\mu((-\infty, 0]) \subset \omega(\sigma)$. Como $y \in \omega(\sigma)$, existe uma sequência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\sigma(t_n) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n - 1 \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Consideremos a sequência $(\sigma(t_n - 1))_{n \geq n_0}$. Como $\sigma([0, \infty))$ é relativamente compacto, podemos assumir que existem uma subsequência $(\sigma(t_n^1))_n$ de $(\sigma(t_n))_{n \geq n_0}$ e um $a_{-1} \in X$ tais que

$$\sigma(t_n^1) \rightarrow a_{-1} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue que $a_{-1} \in \omega(\sigma)$. Como $\omega(\sigma)$ é positivamente invariante e $\omega(\sigma) \subset \text{Cl } \sigma([0, \infty))$, segue da Proposição 2.2.5 que $\omega_{a_{-1}} = \infty$. Logo, a aplicação $\sigma_1 : [-1, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_1(t) = a_{-1}\pi(t+1)$, $t \in [-1, 0]$, está bem definida. Além disso, $\sigma_1(t) \in \omega(\sigma)$ para todo $t \in [-1, 0]$. É claro que $\sigma_1(0) = y$.

Como $t_n^1 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que existe um $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n^1 - 2 \geq 0$ para todo $n \geq n_0^1$. Consideremos a seqüência $(\sigma(t_n^1 - 2))_{n \geq n_0^1}$. Como $\sigma([0, \infty))$ é relativamente compacto, podemos assumir que existem uma subseqüência $(\sigma(t_n^2))_n$ de $(\sigma(t_n^1))_{n \geq n_0^1}$ e um $a_{-2} \in X$ tais que

$$\sigma(t_n^2) \rightarrow a_{-2} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue que $a_{-2} \in \omega(\sigma)$. Como $\omega(\sigma)$ é positivamente invariante e $\omega(\sigma) \subset \text{Cl } \sigma([0, \infty))$, segue da Proposição 2.2.5 que $\omega_{a_{-2}} = \infty$. Logo, a aplicação $\sigma_2 : [-2, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_2(t) = a_{-2}\pi(t+2)$, $t \in [-2, 0]$, está bem definida. Além disso, $\sigma_2(t) \in \omega(\sigma)$ para todo $t \in [-2, 0]$. É claro que $\sigma_2(0) = y$.

Repetindo indutivamente estes argumentos para um $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma solução $\sigma_k : [-k, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_k(t) = a_{-k}\pi(t+k)$ para $t \in [-k, 0]$, e tal que $\sigma_k(0) = y$. Além disso, se $k' \in \mathbb{N}$ é tal que $k' < k$, temos que $\sigma_k(t) = \sigma_{k'}(t)$ para todo $t \in [-k', 0]$.

Deste modo, podemos definir uma solução $\mu : (-\infty, 0] \rightarrow X$ dada por $\mu(s) = \sigma_k(s)$, sendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq s$. Segue que μ está bem definida, $\mu(0) = y$ e $\mu(t) \in \omega(\sigma)$ para todo $t \in (-\infty, 0]$. Logo, $\omega(\sigma)$ é negativamente invariante e, portanto, invariante. O teorema está demonstrado. $\square$

Observação 2.2.8. *Um resultado análogo vale para $\omega^*(\sigma)$. Mais precisamente, se $\sigma : (-\infty, 0] \rightarrow X$ é uma solução do semifluxo π e $\sigma((-\infty, 0])$ é um conjunto relativamente compacto, então $\omega^*(\sigma)$ é compacto e invariante.*

Proposição 2.2.9. *Seja $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para π . Se $J = \mathbb{R}^+$ (respectivamente, $J = \mathbb{R}^-$) e $\sigma : J \rightarrow X$ é uma solução de π com $\sigma(J)$ relativamente compacto, então V é constante em $\omega(\sigma)$ (respectivamente, em $\omega^*(\sigma)$). Além disso, se π é do tipo gradiente com respeito a V , então $\omega(\sigma)$ (respectivamente, $\omega^*(\sigma)$) contém somente equilíbrios de π .*

Demonstração. Suponhamos que $J = [0, \infty)$. Seja $\sigma : [0, \infty) \rightarrow X$ uma solução de π com $\sigma([0, \infty))$ relativamente compacto. Mostremos que V é constante em $\omega(\sigma)$. Suponha

que a afirmação seja falsa. Logo, existem pelo menos dois pontos distintos x_1 e x_2 em $\omega(\sigma)$ de tal modo que

$$V(x_1) < V(x_2). \quad (2.3)$$

Definamos $\epsilon := \frac{1}{2} (V(x_2) - V(x_1))$. Da continuidade de V , segue que existe um $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_j) < \delta \text{ implica } |V(x) - V(x_j)| < \epsilon \text{ para } j = 1, 2.$$

Como $x_1, x_2 \in \omega(\sigma)$, podemos encontrar uma seqüência $(t_n)_n$ estritamente crescente em $[0, \infty)$ tal que

$$\sigma(t_{2n}) \rightarrow x_1 \text{ e } \sigma(t_{2n+1}) \rightarrow x_2 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos que $d(\sigma(t_{2n}), x_1) < \delta$ e $d(\sigma(t_{2n+1}), x_2) < \delta$. Portanto, para todo $n \geq n_0$,

$$V(x_2) \leq V(\sigma(t_{2n+1})) + \epsilon \leq V(\sigma(t_{2n})) + \epsilon < V(x_1) + 2\epsilon.$$

Logo,

$$V(x_2) - V(x_1) < 2\epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, concluímos que $V(x_2) \leq V(x_1)$, o que contradiz (2.3).

Suponhamos agora que π seja do tipo gradiente com respeito a V e, por absurdo, que exista um $x \in \omega(\sigma)$ que não seja um ponto de equilíbrio de π . Segue do Teorema 2.2.7 que $\omega(\sigma)$ é invariante. Portanto, existe uma solução completa σ' por x tal que $\sigma'(t) \in \omega(\sigma)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como x não é ponto de equilíbrio, temos que σ' é não constante e, portanto, a aplicação $t \in [0, \infty) \mapsto V(\sigma'(t)) = V(x\pi t)$ é não constante. Porém, isto é uma contradição.

A demonstração para o caso $J = (-\infty, 0]$ é análoga. □

Corolário 2.2.10. *Sejam π um semifluxo do tipo gradiente com respeito a V e $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução completa não constante de π com a propriedade de que $\sigma(\mathbb{R})$ é relativamente compacto. Nestas condições, os conjuntos $\omega(\sigma)$ e $\omega^*(\sigma)$ são disjuntos, não vazios e contêm somente equilíbrios de π .*

Demonstração. Como $\sigma(\mathbb{R})$ é relativamente compacto, segue que $\omega^*(\sigma)$ e $\omega(\sigma)$ são não vazios. A Proposição 2.2.9 implica que $\omega^*(\sigma)$ e $\omega(\sigma)$ contêm somente equilíbrios de π . Para completar a demonstração, mostremos que $\omega^*(\sigma)$ e $\omega(\sigma)$ são conjuntos disjuntos.

Suponhamos, por absurdo, que exista um ponto comum $x_0 \in \omega^*(\sigma) \cap \omega(\sigma)$. Isto implica a existência de seqüências $(t_n)_n$ em $(-\infty, 0]$ e $(s_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \rightarrow -\infty$, $s_n \rightarrow \infty$, $\sigma(t_n) \rightarrow x_0$ e $\sigma(s_n) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, dado $\epsilon > 0$, a continuidade de V garante a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$|V(x) - V(x_0)| < \epsilon \text{ para } d(x, x_0) < \delta.$$

Fixemos $t \in \mathbb{R}$. Existe um $n_0 = n_0(t) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, temos $t \in (t_n, s_n)$. Além disso, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\max\{d(\sigma(t_n), x_0), d(\sigma(s_n), x_0)\} < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Então temos

$$V(x_0) - \epsilon \leq V(\sigma(s_n)) \leq V(\sigma(t)) \leq V(\sigma(t_n)) \leq V(x_0) + \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Portanto,

$$|V(\sigma(t)) - V(x_0)| < \epsilon \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0^+$, temos $V(\sigma(t)) = V(x_0)$. Como $t \in \mathbb{R}$ é arbitrário, isso significa que V é constante ao longo da solução σ , o que é uma contradição com o fato de que V é uma função de Liapunov para π e σ é uma solução não constante. Isto encerra a demonstração. $\square$

2.3 Vizinhanças isolantes e blocos isolantes

Seja X um espaço métrico e π um semifluxo local em X .

Definição 2.3.1. *Seja Y um subconjunto de X . Definimos*

$$\text{Inv}_\pi^+(Y) = \{x \in X : x\pi[0, \omega_x) \subset Y\}$$

$$\text{Inv}_\pi^-(Y) = \{x \in X : \text{existe uma solução } \sigma : (-\infty, 0] \rightarrow X \text{ por } x \text{ com } \sigma(-\infty, 0] \subset Y\}$$

$$\text{Inv}_\pi(Y) = \text{Inv}_\pi^+(Y) \cap \text{Inv}_\pi^-(Y).$$

- (a) Y será chamado positivamente invariante se $Y = \text{Inv}_\pi^+(Y)$;
- (b) Y será chamado negativamente invariante se $Y = \text{Inv}_\pi^-(Y)$;
- (c) Y será chamado invariante se $Y = \text{Inv}_\pi(Y)$.

A próxima definição é essencial na definição do índice de Conley.

Definição 2.3.2. *Seja N um subconjunto fechado de X . Dizemos que N é uma vizinhança isolante com relação a π se*

$$\text{Inv}_\pi(N) \subset \text{Int}_X(N).$$

Seja K um conjunto fechado em X . Dizemos que K é um conjunto invariante isolado com relação a π se existe um conjunto fechado N tal que

$$K = \text{Inv}_\pi(N) \subset \text{Int}_X(N).$$

Neste caso, dizemos que N é uma vizinhança isolante de K com relação a π .

Exemplo 2.3.3. *Há conjuntos invariantes que não são isolados. Consideremos a equação diferencial ordinária em $\mathbb{R}^2$ dada por*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

O conjunto $K = \{(0, 0)\}$ é invariante, mas não é isolado. O retrato de fase de (2.4) é representado pela Figura 2.1.

Figura 2.1: Diagrama de fase dado por (2.4)

Definição 2.3.4. *Seja N um subconjunto de X . Dizemos que o semifluxo local π não explode em N , se, sempre que $x \in X$ e $x\pi[0, \omega_x) \subset N$, temos $\omega_x = \infty$.*

Exemplo 2.3.5. *Sejam Ω , f e π_f como no Exemplo 2.1.3. Seja $N \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Segue que π_f não explode em N .*

O próximo teorema, sobre conjuntos invariantes isolados, foi aplicado para demonstrar resultados de persistência de populações modeladas por sistemas de equações de reação-difusão e equações diferenciais ordinárias (ver [5]).

Teorema 2.3.6. *Sejam π um semifluxo local, K um conjunto invariante isolado e N uma vizinhança isolante de K tal que π não explode em N . Seja $y \in X$ tal que $\omega_y = \infty$ e $y\pi[0, \infty)$ é relativamente compacto. Se $\omega(y) \cap K \neq \emptyset$ e $\omega(y) \setminus K \neq \emptyset$, então $\text{Inv}_\pi^+(N) \cap \partial N \cap \omega(y) \neq \emptyset$ e $\text{Inv}_\pi^-(N) \cap \partial N \cap \omega(y) \neq \emptyset$.*

Observação 2.3.7. *Intuitivamente, o Teorema 2.3.6 nos diz que, se uma solução fica infinitamente próxima de K sem, no entanto, permanecer sempre próxima, então esta solução fica infinitamente próxima de $\text{Inv}^+(N) \setminus K$ e $\text{Inv}^-(N) \setminus K$.*

Demonstração do Teorema 2.3.6. Seja $z_0 \in \omega(y) \cap K$. Então, existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $y\pi t_n \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como N é uma vizinhança isolante de K e $z_0 \in K$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $y\pi t_n \in \text{Int}_X(N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que K é o conjunto invariante maximal em N e que $\omega(y)$ é invariante, com $\omega(y) \subset K$. Logo, $\omega(y) \not\subset N$. Seja $z'_0 \in \omega(y) \setminus N$. Portanto, existe uma seqüência $(t'_n)_n$ em $[0, \infty)$ com $t'_n \rightarrow \infty$ e $y\pi t'_n \rightarrow z'_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como N é fechado, podemos assumir que $y\pi t'_n \notin N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando subsequências e reenumerando-as, se necessário, podemos assumir que

$$t'_{2n} < t_n < t'_{2n+1}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Definamos

$$s_{2n} = \inf\{t : t'_{2n} < t < t_n \text{ e } y\pi[t, t_n] \subset N\}$$

$$s_{2n+1} = \sup\{t : t_n < t < t'_{2n+1} \text{ e } y\pi[t_n, t] \subset N\}.$$

Temos que $t'_{2n} < s_{2n} < t_n < s_{2n+1} < t'_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$y\pi[s_{2n}, s_{2n+1}] \subset N, \quad y\pi s_{2n} \in \partial N \text{ e } y\pi s_{2n+1} \in \partial N \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Como $y\pi[0, \infty)$ é relativamente compacto, podemos assumir que

$$y\pi s_{2n} \rightarrow z_1 \text{ e } \pi s_{2n+1} \rightarrow z_2 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

para elementos $z_1, z_2 \in X$.

Segue da relação (2.5) que $z_1, z_2 \in \partial N$. Portanto, $z_1, z_2 \in \omega(y) \cap \partial N$. Para completar a demonstração, mostremos que $z_1 \in \text{Inv}_\pi^+(N)$ e $z_2 \in \text{Inv}_\pi^-(N)$. Como π não explode em N , $K \subset \text{Int}_X(N)$ e K é invariante, temos que $z_0\pi t$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ e $z_0\pi[0, \infty) \subset \text{Int}_X(N)$.

Afirmamos que $s_{2n+1} - t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, suponhamos que a afirmativa seja falsa. Então existe uma subsequência $(s_{2n_k+1} - t_{n_k})_k$ de $(s_{2n} - t_n)_n$ tal que $(s_{2n_k+1} - t_{n_k})_k \rightarrow \tau$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $\tau \in [0, \infty)$. A continuidade de π implica que

$$y\pi s_{2n_k+1} = (y\pi t_{n_k})\pi(s_{2n_k+1} - t_{n_k}) \rightarrow z_0\pi\tau \in K.$$

Por outro lado, $y\pi s_{2n_k+1} \rightarrow z_2$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $z_2 = z_0\pi\tau \in K \cap \partial N$, o que contradiz o fato de N ser uma vizinhança isolante de K . Logo, $s_{2n+1} - t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $s_{2n+1} - s_{2n} > s_{2n} - t_n$, temos também que $s_{2n+1} - s_{2n} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Sejam $t \in [0, \omega_{z_1})$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{2n} + t < s_{2n+1}$ para todo $n > n_0$. Portanto, $y\pi(s_{2n} + t) \rightarrow z_1\pi t \in N$ para todo $t \in [0, \omega_{z_1})$. Como π não explode em N , segue que $\omega_{z_1} = \infty$ e $z_1 \in \text{Inv}_\pi^+(N)$.

Como $s_{2n+1} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{2n+1} - 1 \geq 0$ para todo $n \geq n_0$. Consideremos a sequência $(y\pi(s_{2n+1} - 1))_{n \geq n_0}$. Como $y\pi[0, \infty)$ é relativamente compacto, podemos assumir que existem uma subsequência $(y\pi s_{2n^1+1})_n$ de $(y\pi s_{2n+1})_{n \geq n_0}$ e um $a_{-1} \in X$ tais que

$$y\pi(s_{2n^1+1} - 1) \rightarrow a_{-1} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue que $a_{-1} \in \omega(\sigma)$. Como $\omega(\sigma) \subset \text{Cl}(y\pi[0, \infty))$ e $\omega(\sigma)$ é positivamente invariante, segue da Proposição 2.2.5 que $\omega_{a_{-1}} = \infty$. Logo, a aplicação $\sigma_1 : [-1, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_1(t) = a_{-1}\pi(t+1)$ para todo $t \in [-1, 0]$, está bem definida. Além disso, $\sigma(t) \in N$ para todo $t \in [-1, 0]$ e $\sigma_1(0) = z_2$.

Como $s_{2n^1+1} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que existe um $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{2n^1+1} - 2 \geq 0$ para todo $n \geq n_0^1$. Consideremos a seqüência $(y\pi(s_{2n^1+1} - 2))_{n \geq n_0^1}$. Como $y\pi[0, \infty)$ é relativamente compacto, podemos assumir que existem uma subsequência $(y\pi s_{2n^2+1})_n$ de $(y\pi s_{2n^1+1})_{n \geq n_0^1}$ e um $a_{-2} \in X$ tais que

$$y\pi(s_{2n^2+1} - 2) \rightarrow a_{-2} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue que $a_{-2} \in \omega(\sigma)$. Como $\omega(\sigma) \subset \text{Cl}(y\pi[0, \infty))$ e $\omega(\sigma)$ é positivamente invariante, segue da Proposição 2.2.5 que $\omega_{a_{-2}} = \infty$. Logo, a aplicação $\sigma_2 : [-2, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_2(t) = a_{-2}\pi(t+2)$ para todo $t \in [-2, 0]$, está bem definida. Além disso, $\sigma(t) \in N$ para todo $t \in [-2, 0]$ e $\sigma_2(0) = z_2$.

Repetindo indutivamente estes argumentos para um $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma solução $\sigma_k : [-k, 0] \rightarrow X$, dada por $\sigma_k(t) = a_{-k}\pi(t+k)$ para $t \in [-k, 0]$, e tal que $\sigma_k(0) = z_2$. Além disso, se $k' \in \mathbb{N}$ é tal que $k' < k$, temos que $\sigma_k(t) = \sigma_{k'}(t)$ para todo $t \in [-k', 0]$.

Deste modo, podemos definir uma solução $\sigma : (-\infty, 0] \rightarrow X$ dada por $\sigma(s) = \sigma_k(s)$, sendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq s$. Segue que σ está bem definida, $\sigma(0) = z_2$ e $\sigma(t) \in N$ para todo $t \in (-\infty, 0]$. Portanto, $z_2 \in \text{Inv}_\pi(N)$, o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 2.3.8. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.6, os conjuntos $(\text{Inv}_\pi^+(N) \setminus K) \cap \omega(y)$ e $(\text{Inv}_\pi^-(N) \setminus K) \cap \omega(y)$ são infinitos.*

Demonstração. Seja $V = \text{Int}_X(N)$. Então $K \subset V \subset N$. Como X é um espaço normal, existem conjuntos abertos V_1, W_1 tais que $V_1 \cap W_1 = \emptyset$ e $K \subset V_1, X \setminus W_1 \subset V$. Portanto, $K \subset V_1 \subset X \setminus W_1 \subset V$. Repetindo este argumento, obtemos seqüências $(V_n)_n$ e $(W_n)_n$ de abertos tais que

$$K \subset V_{n+1} \subset X \setminus W_{n+1} \subset V_n \subset X \setminus W_n \subset V \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $N_n := X \setminus W_n$. É claro que

$$\text{Inv}_\pi^+(N_n) \subset \text{Inv}_\pi^+(N) \text{ e } \text{Inv}_\pi^-(N_n) \subset \text{Inv}_\pi^-(N). \quad (2.6)$$

Aplicando o Teorema 2.3.6 e usando (2.6), obtemos seqüências $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ com

$$u_n \in \text{Inv}_\pi^+(N) \cap \partial N_n \cap \omega(y) \text{ e } v_n \in \text{Inv}_\pi^-(N) \cap \partial N_n \cap \omega(y) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $\partial N_n \cap V_n = \emptyset$. Como $\partial N_{n+1} \subset V_n$, segue que $\partial N_n \cap \partial N_{n+1} = \emptyset$. Logo, para todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n \neq m$, temos que $u_n \neq u_m$ e $v_n \neq v_m$. Isto prova o corolário. $\square$

Um objeto importante na teoria do índice de Conley é o bloco isolante. Apresentemos sua definição.

Sejam $B \subset X$ um conjunto fechado e $x \in \partial B$ um ponto de fronteira. O ponto x será chamado ponto *estritamente egresso* de B se, para toda solução $\sigma : [-\delta_1, \delta_2] \rightarrow X$ por $x = \sigma(0)$, com $\delta_1 \geq 0$ e $\delta_2 > 0$, valerem as seguintes propriedades:

- (1) Existe um $\epsilon_2 \in (0, \delta_2]$ tal que $\sigma(t) \notin B$ para $t \in (0, \epsilon_2]$;
- (2) Se $\delta_1 > 0$, então, para algum $\epsilon_1 \in (0, \delta_1)$, $\sigma(t) \in \text{Int}_X(B)$ para $t \in [-\epsilon_1, 0)$.

Um ponto $x \in \partial B$ será chamado *ponto estritamente ingresso* se valerem as condições:

- (1) Existe um $\epsilon_2 \in (0, \delta_2]$ tal que $\sigma(t) \in \text{Int}_X(B)$ para $t \in (0, \epsilon_2]$;
- (2) Se $\delta_1 > 0$, então, para algum $\epsilon_1 \in (0, \delta_1)$, $\sigma(t) \notin B$ para todo $t \in [-\epsilon_1, 0)$.

Da mesma maneira, por *ponto de tangência* entendemos um ponto $x \in \partial B$ tal que:

- (1) Existe um $\epsilon_2 \in (0, \delta_2]$ tal que $\sigma(t) \notin B$ para $t \in (0, \epsilon_2]$;
- (2) Se $\delta_1 > 0$, então, para algum $\epsilon_1 \in (0, \delta_1)$, $\sigma(t) \notin B$ para todo $t \in [-\epsilon_1, 0)$.

Denotamos por B^e , B^i e B^b os conjuntos de todos os pontos estritamente egressos, estritamente ingressos e de tangência do conjunto fechado B , respectivamente. Por fim, definimos $B^+ = B^i \cup B^b$ e $B^- = B^e \cup B^b$.

Definição 2.3.9. *Um conjunto fechado B de X é chamado bloco isolante se*

- (1) $\partial B = B^e \cup B^i \cup B^b$;
- (2) B^- é fechado em X .

Figura 2.2: Bloco isolante

O Teorema 2.3.11 apresenta a propriedade fundamental dos blocos isolantes. Para demonstrá-lo, precisaremos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.3.10. *Sejam π um semifluxo local e B um bloco isolante relativamente a π . Assumamos que π não exploda em B . A aplicação $s_B : B \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ definida por*

$$s_B(x) = \sup\{t < \omega_x : x\pi[0, t] \subset B\}$$

é contínua.

Demonstração. Dado $x \in B$, seja $(x_n)_n$ uma seqüência em B tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos que $s_B(x) \in [0, \infty)$. Como π não explode em B , segue que $s_B(x) < \omega_x$ e $x\pi s_B(x) \in \partial B$. A Definição 2.3.9 implica que $x\pi s_B(x) \in B^-$. Portanto, existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, temos

$$x\pi(s_B(x) + \epsilon) \in X \setminus B.$$

A continuidade de π implica que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, temos $x_n\pi(s_B(x) + \epsilon)$ está definido e $x_n\pi(s_B(x) + \epsilon) \in X \setminus B$ para todo $n \geq n_0$. Portanto,

$$s_B(x_n) < s_B(x) + \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (2.7)$$

Como B é bloco isolante, segue que $x\pi t$ está definido para todo $t \in [0, s_B(x))$ e $x\pi(0, s_B(x)) \subset \text{Int}_X(B)$.

Se $s_B(x) = 0$, a relação (2.7) implica que $s_B(x_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Suponhamos então que $s_B(x) \in (0, \infty)$. Dado $\epsilon \in (0, s_B(x))$, a continuidade de π implica que existe um $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \pi[\epsilon, s_B(x) - \epsilon] \subset \text{Int}_X(B) \text{ para todo } n \geq n_0(\epsilon). \quad (2.8)$$

Afirmamos que, para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ com $n_1(\epsilon) \geq n_0(\epsilon)$ tal que $x_n \pi[0, s_B(x) - \epsilon] \subset B$ para todo $n \geq n_1(\epsilon)$. Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existem um $\epsilon_0 > 0$, uma seqüência $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ e uma seqüência $(t_{n_k})_k$ em $[0, \infty)$ tais que $n_k \geq n_0(\epsilon_0)$ e

$$x_{n_k} \pi t_{n_k} \notin B \text{ e } t_{n_k} \in [0, s_B(x) - \epsilon] \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como B é bloco isolante, existe uma seqüência $(s_{n_k})_k$ em $[0, \infty)$, com $s_{n_k} \leq t_{n_k}$, tal que $x_{n_k} \pi s_{n_k} \in B^-$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $s_{n_k} \rightarrow \tilde{s}$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $\tilde{s} \in [0, \infty)$. A continuidade de π implica então que $x \pi \tilde{s} \in B^-$, o que nos dá $s_B(x) \leq \tilde{s}$. Mas

$$\tilde{s} \leq s_B(x) - \epsilon < s_B(x),$$

o que é uma contradição. Isto demonstra a continuidade de s_B em $x \in B$ para o caso $s_B(x) \in [0, \infty)$.

Para terminar, consideremos agora o caso $s_B(x) = \infty$. Suponhamos que existam $M_0 > 0$ e uma seqüência $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ tais que $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e

$$s_B(x_{n_k}) \leq M_0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como B é bloco isolante, as soluções deixam B por B^- . Portanto, existe uma seqüência $(\delta_{n_k})_k$ tal que $\delta_{n_k} \in (0, M_0)$ e

$$x_{n_k} \pi \delta_{n_k} \in B^- \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\delta_{n_k} \rightarrow \delta_0 \in [0, M_0]$ quando $k \rightarrow \infty$.

A continuidade de π implica que

$$x \pi \delta_0 \in B^-.$$

Ou seja, $s_B(x) < \delta_0$, o que é uma contradição. Isto encerra a demonstração. $\square$

Teorema 2.3.11. *Seja B um bloco isolante relativamente a π e assumamos que π não explode em B . Então a inclusão $i : B^- \rightarrow B$ é uma cofibração.*

Demonstração. Seja $U := B \setminus \text{Inv}_\pi^+(B)$. Mostremos que $\text{Inv}_\pi^+(B)$ é fechado (em X). Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em $\text{Inv}_\pi^+(B)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \pi[0, \omega_{x_n}] \subset B$. Como π não explode em B , segue $\omega_{x_n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $t \in [0, \omega_x)$. A continuidade de π implica que $x_n \pi t \rightarrow x \pi t$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $x \pi t \in B$ para todo $t \in [0, \omega_x)$. Portanto, $x \in \text{Inv}_\pi^+(B)$ e a nossa afirmativa está demonstrada. Notemos que também mostramos que $\omega_x = \infty$.

Logo U é aberto em B . Ainda, $B^- \subset U$. Definamos $H : U \times [0, 1] \rightarrow B$ por $H(x\pi(t \cdot s_B(x)))$. Como $U = X \setminus \text{Inv}_\pi^+(B)$, temos $s_B(x) < \infty$ para todo $x \in U$, o que mostra que H está bem definida. Segue do Lema 2.3.10 que a aplicação H é contínua. É claro que $H(x, 0) = x$ para $x \in U$. Além disso,

$$H(a, t) = a\pi(t \cdot s_B(a)) = a\pi(t \cdot 0) = a \quad \text{para } a \in B^-.$$

Como B é bloco isolante, a definição de s_B implica

$$H(x, 1) = x\pi s_B(x) \in B^- \text{ para } x \in U.$$

Uma aplicação da Proposição 1.2.10 conclui a demonstração. $\square$

Uma pergunta natural a ser feita é: blocos isolantes existem? Para uma resposta positiva no contexto geral de semifluxos definidos em espaços métricos, necessitamos do conceito de admissibilidade, que será apresentado na próxima seção.

2.4 Admissibilidade

Apresentamos o conceito essencial para generalizar a teoria do índice desenvolvida por Conley.

Definição 2.4.1. *Sejam N um subconjunto fechado de X e $(\pi_n)_n$ uma seqüência de semifluxos em X . Então N é chamado $(\pi_n)_n$ -admissível se a seguinte condição for*

satisfeita: se $(x_n)_n$ em X e $(t_n)_n$ em $\mathbb{R}^+$ são duas seqüências satisfazendo $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n \pi_n[0, t_n] \subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a seqüência $(x_n \pi_n t_n)_n$ tem uma subseqüência convergente. O conjunto N é chamado fortemente $(\pi_n)_n$ -admissível se N é $(\pi_n)_n$ -admissível e se π_n não explode em N para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.4.2. *Seja π é um semifluxo local. Dizemos que um subconjunto fechado N de X é π -admissível quando, dadas duas seqüências $(x_n)_n$ em X e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ satisfazendo $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n \pi[0, t_n] \subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a seqüência $(x_n \pi t_n)_n$ admite uma subseqüência convergente.*

Exemplo 2.4.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e, para cada $k \in \mathbb{N}$, sejam $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função localmente lipschitziana e π_k o fluxo gerado pelas soluções de*

$$\dot{x} = f_k(x), \quad x(0) = x_0,$$

sendo $x_0 \in \Omega$. Seja $N \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então N é $(\pi_k)_k$ -admissível de π_k -admissível para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue do Exemplo 2.3.5 que N é fortemente $(\pi_k)_k$ -admissível e fortemente π_k -admissível para todo $k \in \mathbb{N}$.

A condição de admissibilidade, introduzida por Rybakowski em [9], é essencial quando os semifluxos são gerados por soluções de equações diferenciais parciais. Por exemplo, este é o caso se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita. No contexto geral, a condição de admissibilidade garante a existência de blocos isolantes. O seguinte resultado é demonstrado em [9] ou [10].

Teorema 2.4.4. *Sejam K um conjunto isolado π -invariante e N uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de K . Então existe um bloco isolante B tal que $K \subset \text{Int}_X(B) \subset N$.*

Para a demonstração deste teorema, o leitor interessado poderá consultar [10].

Um bloco isolante nas condições do Teorema 2.4.4 será chamado *bloco isolante para K* .

Os próximos resultados são consequência das diversas definições apresentadas até agora.

Teorema 2.4.5. *Sejam $N \subset X$ um conjunto fechado e π, π_n , $n \in \mathbb{N}$, semifluxos locais em X . Assumamos que $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$ e que π não explode em*

N . Suponhamos ainda que $(x_n)_n$ e $(t_n)_n$ sejam duas seqüências em X e em $[0, \infty)$ respectivamente tais que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n \pi_n \tau$ que está definido para todo $\tau \in [0, t_n]$ e $x_n \pi_n [0, t_n] \subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

(i) se $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, então $x\pi t$ está definido para todo $t \geq 0$ e $x \in \text{Inv}_\pi^+(N)$;

(ii) se existe um $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow t_0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $x\pi\tau$ está definido para todo $\tau \in [0, t_0]$ e $x\pi[0, t_0] \subset N$.

Demonstração. Seja $x \in X$ e sejam $(x_n)_n$ uma seqüência em X e $(t_n)_n$ uma seqüência em $\mathbb{R}^+$ tais que $x_n \pi_n \tau \in N$ para todo $\tau \in [0, t_n]$ e $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja também $\omega_x \in (0, \infty]$ tal que $x\pi t$ está definido se, e somente se, $t \in [0, \omega_x)$.

Tomemos $t \in [0, \omega_x)$. Como $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \pi_n t$ está definido para todo $n \geq n_0$ e

$$x_n \pi_n t \rightarrow x\pi t \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Suponhamos que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Mostremos que $\omega_x = \infty$. Por absurdo, suponhamos que $\omega_x < \infty$. Então, para algum $t' \in [0, \infty)$, temos $x\pi t' \notin N$. Como $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $t_n > t'$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o que é uma contradição. Logo, $\omega_x = \infty$ e (2.9) implica que $x\pi[0, \infty) \subset N$, o que conclui a demonstração de (i).

Suponhamos que exista um $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow t_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e assumamos que $x\pi t$ não esteja definido para todo $t \in [0, t_0]$. Isto implica que $\omega_x \leq t_0$. Como π não explode em N , segue que existe $\epsilon > 0$ tal que $x\pi(t_0 - \epsilon)$ está definido e $x\pi(t_0 - \epsilon) \notin N$. Como $t_n \rightarrow t_0$ quando $n \rightarrow \infty$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n > t_0 - \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Além disso, como $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que $x_n \pi_n(t_n - \epsilon)$ está definido para todo n suficientemente grande e $x_n \pi_n(t_n - \epsilon) \rightarrow x\pi(t_0 - \epsilon)$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $x\pi(t_0 - \epsilon) \in N$, o que é uma contradição. Logo, $x\pi\tau$ está definido para todo $\tau \in [0, t_0]$.

Seja $\tau \in [0, t_0]$. Como $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que $x_n \pi_n \tau$ está definido para todo $n \geq n_0$ e $x_n \pi_n \tau \rightarrow x\pi\tau$. Portanto, $x\pi\tau \in N$. Isto conclui a demonstração de (ii) e do teorema. $\square$

Teorema 2.4.6. *Sejam $N \subset X$ um conjunto fechado e $\pi, \pi_n, n \in \mathbb{N}$, semifluxos locais em X . Assumamos que $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$ e que π não explode em N . Suponha ainda que N seja $(\pi_{n_m})_m$ -admissível para toda subsequência $(\pi_{n_m})_m$ de $(\pi_n)_n$. Então as seguintes propriedades estão satisfeitas:*

- (i) *se $(x_n)_n$ é uma seqüência em X e $(t_n)_n$ é uma seqüência em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n \pi_n \tau$ está definido para todo $\tau \in [0, t_n]$ e $x_n \pi_n [0, t_n] \subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então todo ponto limite da seqüência $(x_n \pi_n t_n)_n$ pertence a $\text{Inv}_\pi^-(N)$;*
- (ii) *se W é um subconjunto de N com $\text{Inv}_\pi(N) \subset \text{Int}_X(W)$ e se π_n não explode em N para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Inv}_{\pi_{n_m}}(N) \subset \text{Int}_X(W)$ para todo $m \geq m_0$.*

Demonstração. Assumamos que N seja fortemente $(\pi_{n_m})_m$ -admissível para toda subsequência $(\pi_{n_m})_m$ de $(\pi_n)_n$. Seja y_0 um ponto limite da seqüência $(x_n \pi_n t_n)_n$, isto é, $x_n^0 \pi_n^0 t_n^0 \rightarrow y_0$ quando $n \rightarrow \infty$ para uma subsequência $(x_n^0 \pi_n^0 t_n^0)_n$ de $(x_n \pi_n t_n)_n$. Como N é $(\pi_n)_n$ -admissível, existe uma subsequência $(x_n^1 \pi_n^1 t_n^1)_n$ de $(x_n^0 \pi_n^0 t_n^0)_n$ tal que

$$t_n^1 \geq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n^1 \pi_n^1 (t_n^1 - 1) \rightarrow y_{-1} \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

para algum $y_{-1} \in N$. Procedendo indutivamente, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos uma subsequência $(x_n^k \pi_n^k t_n^k)_n$ de $(x_n^{k-1} \pi_n^{k-1} t_n^{k-1})_n$ tal que $t_n^k \geq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$x_n^k \pi_n^k (t_n^k - k) \rightarrow y_{-k} \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

para algum ponto $y_{-k} \in N$.

Afirmamos que $y_{-k} \pi t$ está definido para $t \in [0, k]$. Suponhamos que $y_{-k} \pi t$ não esteja definido para algum $t \in [0, k]$. Então existe um $t_0 \in (0, k)$, com $y_{-k} \pi t_0$ definido, e $y_{-k} \pi t_0 \notin N$. Como $\pi_n^k \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que

$$(x_n^k \pi_n^k (t_n^k - k)) \pi_n^k t_0 \notin N \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande.}$$

Por outro lado, temos que $t_n^k - k + t_0 < t_n^k$ e $(x_n^k \pi_n^k (t_n^k - k)) \pi_n^k t_0 = x_n^k \pi_n^k (t_n^k + (t_0 - k))$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos uma contradição.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos $\sigma_k : [-k, 0] \rightarrow X$ por

$$\sigma_k(t) = y_{-k}\pi(t+k), \quad t \in [-k, 0].$$

Temos que σ_k é uma solução de π em N . Afirmamos que $\sigma_k(0) = y_0$. De fato, como $\pi_n \rightarrow \pi$ quando $n \rightarrow \infty$, (2.10) implica que

$$x_n^k \pi_n^k (t_n^k - k) \pi_n^k k \rightarrow y_{-k} \pi k \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Mas $x_n^k \pi_n^k (t_n^k - k) \pi_n^k k = x_n^k \pi_n^k t_n^k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que $(x_n^k \pi_n^k t_n^k)_n$ é uma subsequência de $(x_n^0 \pi_n^0 t_n^0)_n$. Portanto,

$$x_n^k \pi_n^k t_n^k \rightarrow y_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

As fórmulas (2.11) e (2.12) implicam que $y_0 = y_{-k} \pi k = \sigma_k(0)$ e nossa afirmativa está demonstrada.

Ademais, se $k, k' \in \mathbb{N}$ são tais que $k < k'$, então σ_k e $\sigma_{k'}$ coincidem em $[-k, 0]$. Assim, $\sigma(t) := \sigma_k(t)$, $t \in [-k, 0]$ define uma solução de π em $(-\infty, 0]$ com $\sigma((-\infty, 0]) \subset N$ e $\sigma(0) = y_0$. Isto completa a demonstração de (i).

Suponhamos agora que π_n não exploda em N para todo $n \in \mathbb{N}$ e seja W um subconjunto de N com $\text{Inv}_\pi(N) \subset \text{Int}_X(W)$. Por absurdo, suponhamos que nossa tese seja falsa. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\text{Inv}_{\pi_n}(N) \setminus (N \setminus \text{Int}_X(W)) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $K_n := \text{Inv}_{\pi_n}(N)$, $n \in \mathbb{N}$, $K := \text{Inv}_\pi(N)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos $x_n \in K_n \cap (N \setminus \text{Int}_X(W))$. Logo, existem $y_n \in K_n$ e $t_n \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, com $t_n \rightarrow \infty$ e $y_n \pi_n t_n = x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Pela hipótese de admissibilidade, assumimos que $y_n \pi_n t_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$ para algum $x_0 \in N$. Como $y_n \pi_n [0, t_n] \subset N$, (i) implica que $x_0 \in \text{Inv}_\pi^-(N)$. Como π_n não explode em N , segue que $x_n \pi_n t_n$ está definido para todo $t \geq 0$. Além disso, $x_n \pi_n t \in N$ para todo $t \geq 0$. Portanto, $x_0 \pi t$ está definido e pertence a N para todo $t \geq 0$, isto é, $x_0 \in \text{Inv}_\pi^+(N)$.

Obtemos, portanto, que $x_0 \in K \cap (N \setminus \text{Int}_X(W)) = \emptyset$, o que é uma contradição. Isto encerra a demonstração de (ii). $\square$

Corolário 2.4.7. *Nas condições do Teorema 2.4.6, se $\pi_n = \pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\text{Inv}_\pi^-(N)$ e $\text{Inv}_\pi(N)$ são conjuntos compactos.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em $\text{Inv}_\pi^-(N)$. Então, existem seqüências $(x_n)_n$ e $(t_n)_n$ tais que $y_n \in \text{Inv}_\pi^-(N)$, $t_n \rightarrow \infty$ e $y_n \pi t_n = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A condição de admissibilidade e o Teorema 2.4.6(i) implicam que existem subsequências $(y_{n_m})_m$ de $(y_n)_n$ e $(t_{n_m})_m$ de $(t_n)_n$ tais que $y_{n_m} \pi t_{n_m} \rightarrow x_0$ quando $m \rightarrow \infty$ para algum $x_0 \in \text{Inv}_\pi^-(N)$. Isto mostra que $\text{Inv}_\pi^-(N)$ é compacto.

Se $(x_n)_n$ é uma seqüência em $K = \text{Inv}_\pi(N)$, então, pelo que acabamos de mostrar, $x_{n_m} \rightarrow x_0 \in \text{Inv}_\pi^-(N)$ para alguma subsequência $(x_{n_m})_m$. Como π não explode em N , segue que $x_{n_m} \pi t$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ e $x_{n_m} \pi [0, \infty) \subset N$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, o Teorema 2.4.5(i) implica que $x_0 \pi t$ está definido para todo $t \in [0, \infty)$ e $x_0 \pi [0, \infty) \subset N$, ou seja, $x_0 \in \text{Inv}_\pi^+(N)$. Em outras palavras, K é compacto. $\square$

2.5 Par índice para um conjunto invariante isolado

Nesta seção, X denota um espaço métrico e π , um semifluxo local em X .

Sejam N, Y subconjuntos de X com $Y \subset N$. O conjunto Y é chamado *N-positivamete invariante* relativamente a π se, sempre que $x \in X$ e $t \geq 0$ são tais que $x\pi[0, t] \subset N$ e $x \in Y$, então $x\pi[0, t] \subset Y$. Em outras palavras, uma solução que parte de Y não pode deixar Y sem deixar N .

Sejam N_1, N_2, N subconjuntos de X com $N_2 \subset N$. Para cada $t \geq 0$, definamos

$$N_1^t = \{x \in X : \text{existe um } y \in X \text{ e um } t \in [0, \omega_y) \text{ tais que } y\pi[0, t] \subset N_1 \text{ e } y\pi t = x\}.$$

Em outras palavras, N_1^t é a imagem por π dos pontos y pelos quais a solução permanece em N_1 para o tempo t . Definamos também

$$N_2^{-t} = N_2^{-t}(N) = \{x \in X : \text{existe um } t' \in [0, t] \text{ tal que } t' < \omega_x, x\pi[0, t'] \subset N \text{ e } x\pi t' \in N_2\}.$$

Ou seja, uma solução pelos pontos de $N_2^{-t}(N)$ atinge N_2 em algum tempo $t' \leq t$ e não deixa N antes disso.

Definição 2.5.1. *Seja K um conjunto invariante isolado e N uma vizinhança isolante de K . O par ordenado (N_1, N_2) de conjuntos é chamado par índice em N se:*

- (1) N_1 e N_2 são subconjuntos fechados de N e N_1, N_2 são N -positivamente invariantes;
- (2) $K \subset \text{Int}_X(N_1 \setminus N_2)$;
- (3) Se $x \in N_1$ e $x\pi[0, \omega_x) \not\subset N$, então $x \in N_2^{-t}(N)$ para algum $t \geq 0$.

Observação 2.5.2. A condição (3) da Definição 2.5.1 significa que, se $x \in N_1$ e $x\pi t' \notin N$ para algum $t \in (0, \omega_x)$, então existe um $t \in [0, t')$ tal que $x\pi[0, t] \subset N$ e $x\pi t \in N_2$.

Como consequência imediata da Definição 2.5.1, temos o seguinte exemplo de par índice.

Exemplo 2.5.3. Seja B um bloco isolante para um conjunto π -invariante K que admite vizinhança isolante fortemente π -admissível. Então, o par (B, B^-) é um par índice em B .

Exemplo 2.5.4. Consideremos a equação diferencial ordinária escalar $\dot{x} = x$ e seja π o semifluxo gerado por suas soluções. Consideremos o intervalo $N = [-1, 1]$. É claro que $\text{Inv}_\pi(N) = \{0\}$. Logo, N é uma vizinhança isolante para o conjunto invariante $\{0\}$. Além disso, N é um bloco isolante para $\{0\}$ com $B^- = \{-1, 1\}$. Pelo Exemplo 2.5.3, segue que $([-1, 1], \{-1, 1\})$ é um par índice em $[-1, 1]$.

Se π é um semifluxo local gerado pelas soluções de uma equação diferencial ordinária definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e (N_1, N_2) é um par índice em $N \subset \Omega$, pode ser mostrado que, para todo $t, s \geq 0$, o par $(N_1^s, N_2^{-t}(N))$ é também um par índice. Porém, este fato deixa de ser verdadeiro para semifluxos locais mais gerais. Com isso, Rybakowski, em [9], introduziu o seguinte conceito.

Definição 2.5.5. Sejam K um conjunto invariante isolado e N uma vizinhança isolante de K . Um par (N_1, N_2) de subconjuntos de N é chamado par quasi-índice em N se existe um conjunto $\tilde{N}_1$ tal que

- (1) $(\tilde{N}_1, N_2)$ é par índice em N , $\tilde{N}_1 \supset N_1 \setminus N_2$ e, para algum $\tilde{s} \geq 0$, $\tilde{N}_1^{\tilde{s}} \subset N_1$;
- (2) ou N_1 é N -positivamente invariante ou existem um conjunto fechado M_1 e um $\tilde{t} \in [0, \infty)$ tais que M_1 é $N \setminus N_2$ -positivamente invariante e $\tilde{N}_1 \supset M_1 \setminus N_2$ e $N_1 = M_1^{\tilde{t}}$.

Observemos que todo par índice é um par quasi-índice.

2.6 O índice de Conley homotópico

A seguir, introduziremos uma função que fará parte dos conceitos que definirão o índice de Conley.

Seja N um conjunto fechado em X tal que π não explode em X e seja (N_1, N_2) um par quasi-índice em N . Seja $s \geq 0$. Consideremos as aplicações quocientes $q : N_1 \rightarrow N_1/N_2^{-s}$ e $\tilde{q} : N_1^s \rightarrow N_1^s/N_2$. Definamos a aplicação $g : N_1/N_2^{-s} \rightarrow N_1^s/N_2$ por

$$g^s(z) = \begin{cases} \tilde{q}(x\pi s), & \text{se existe um } x \in N_1 \text{ tal que } q(x) = z, \\ x\pi[0, s] \text{ esteja definido e } x\pi[0, s] \cap N_2 = \emptyset. \\ [N_2], & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Seja K um conjunto π -invariante isolado e compacto. O conjunto de todas as vizinhanças fortemente π -admissíveis N de K será denotado por $\mathcal{N}(\pi, K)$. Assumamos que $\mathcal{N}(\pi, K) \neq \emptyset$. Seja $\mathcal{V}(\pi, K)$ a menor subcategoria de $\mathcal{T}^*$ tal que

- (1) para todo $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e todo par quasi-índice (N_1, N_2) em N , $(N_1/N_2, [N_2])$ é um objeto de $\mathcal{V}(\pi, K)$;
- (2) se $N, \bar{N} \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)$ são pares quasi-índices em N e $\bar{N}$ respectivamente tais que $N_1 \setminus N_2 \subset \bar{N}_1$ e $(N_1 \cap \text{Cl}(N_1 \setminus N_2)) \cap N_2 \cap \bar{N}_1 \subset N_2$ e se a aplicação induzida por inclusão $i : N_1/N_2 \rightarrow \bar{N}_1/\bar{N}_2$ é admissível, então i é um morfismo de $\mathcal{V}(\pi, K)$. Além disso, se $s \geq 0$ e g^s é a função definida em (2.13), temos que g^s é um morfismo de $\mathcal{V}(\pi, K)$.

Definição 2.6.1. *O índice de Conley $\mathcal{I}(\pi, K)$ é a categoria definida por:*

- (1) *A classe dos objetos de $\mathcal{I}(\pi, K)$ é igual à classe dos objetos de $\mathcal{V}(\pi, K)$, isto é, a classe de todos os espaços com ponto distinguido $(N_1/N_2, [N_2])$, sendo (N_1, N_2) um par quasi-índice em N para algum $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$;*
- (2) *Os morfismos em $\mathcal{I}(\pi, K)$ são classes de homotopia $[f]$ em $\mathcal{HT}^*$ de morfismos f em $\mathcal{V}(\pi, K)$.*

Temos o seguinte fato:

Teorema 2.6.2. *Com a notação introduzida acima, $\mathcal{I}(\pi, K)$ é um sistema simples conexo.*

Não faremos a demonstração deste fato, mas a sua importância será ilustrada na demonstração da Propriedade de Continuação do índice homotópico (ver Teorema 3.3.2).

Como imediata consequência do Teorema 2.6.2, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.6.3. *Sejam $N, \bar{N} \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e sejam (N_1, N_2) e $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)$ quasi-índices em N e $\bar{N}$ respectivamente. Então os espaços com ponto base $(N_1/N_2, [N_2])$ e $(\bar{N}_1/\bar{N}_2, [\bar{N}_2])$ são homotopicamente equivalentes.*

Como consequência deste resultado, o tipo de homotopia $[N_1/N_2, [N_2]]$ depende somente do par (π, K) . Logo, a seguinte definição faz sentido.

Definição 2.6.4. *Sejam π um semifluxo local no espaço métrico X e K um conjunto invariante isolado relativamente a π que admite uma vizinhança isolante fortemente π -admissível. Seja N uma vizinhança isolante fortemente π -admissível e seja (N_1, N_2) um par quasi-índice em N . O índice de Conley, $h(\pi, K)$, de (π, K) é definido pelo tipo de homotopia de $(N_1/N_2, [N_2])$:*

$$h(\pi, K) = [N_1/N_2, [N_2]].$$

No caso mais geral apresentado aqui, não estamos assumindo a existência de fluxos ou a compacidade local do espaço X . Em vez disso, assumimos admissibilidade, e $h(\pi, K)$ está definido sempre que $\mathcal{N}(\pi, K) \neq \emptyset$.

No que segue, $\mathcal{S}(X)$ denota o conjunto de todos os pares (π, K) tais que $\mathcal{N}(\pi, K) \neq \emptyset$. Em outras palavras, $\mathcal{S}(X)$ é o conjunto de todos os pares (π, K) tais que π é um semifluxo local em X e K é um conjunto invariante isolado relativamente a π que admite uma vizinhança fortemente π -admissível relativamente a π .

Exemplo 2.6.5. *É claro que $K = \emptyset$ é um conjunto π -invariante isolado. Além disso, $(\pi, \emptyset) \in \mathcal{S}(X)$. Tomemos $N = \emptyset$, $N_1 = N_2 = \emptyset$. Então $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e (N_1, N_2) é um par índice em N . Agora, $h(\pi, K) = [\emptyset/\emptyset, [\emptyset]] = [\{p_0\}, p_0]$, sendo p_0 ponto arbitrário em X . Logo, $h(\pi, \emptyset) = \bar{0}$ (índice trivial).*

A seguinte proposição é uma consequência do Exemplo 2.6.5.

Proposição 2.6.6. *Se $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ é tal que $h(\pi, K) \neq \bar{0}$, então $K \neq \emptyset$.*

Discutiremos agora dois exemplos básicos.

Exemplo 2.6.7. *Seja π o fluxo local gerado pela equação diferencial ordinária*

$$\dot{x} = 1.$$

Consideremos o conjunto $B = [-1, 1]$. O maior conjunto invariante em B é vazio. Segue do Exemplo 2.6.5 que $h(\pi, K) = \bar{0}$.

Exemplo 2.6.8. *Seja π o fluxo local gerado pela equação diferencial ordinária*

$$\dot{x} = x^2. \tag{2.14}$$

É claro que 0 é um ponto de equilíbrio de (2.14). Recordemos que o retrato de fase associado à equação (2.14) é

Figura 2.3: Diagrama de fase de $\dot{x} = x^2$.

O conjunto $B = [-1, 1]$ é um bloco isolante para $K = \{0\}$. Além disso, $B^- = \{1\}$. Portanto, $h(\pi, \{0\})$ é o tipo de homotopia do espaço com ponto base $(B/B^-, [B^-])$. Como $(B/B^-, [B^-])$ é contrátil, segue que $h(\pi, K) = \bar{0}$.

Observação 2.6.9. *O Exemplo 2.6.8 mostra que um conjunto invariante não vazio pode ter índice trivial. O ponto de equilíbrio 0 da equação do Exemplo 2.6.8 não é hiperbólico. Logo, seu índice de Morse não está definido. Porém, o seu índice de Conley está definido (e é trivial).*

2.7 O caso linear hiperbólico

Nesta seção, mostraremos que o índice de Conley de um ponto de equilíbrio hiperbólico está definido. Recordemos o seguinte resultado de matrizes.

Lema 2.7.1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n cujos autovalores têm parte real positiva. Então*

- (1) *para toda matriz C definida positiva, existe uma matriz definida positiva B tal que $A^T B + BA = C$.*
- (2) *Definamos $V(x) := x^T Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se x é uma solução da equação diferencial ordinária $\dot{x} = Ax$, a função $t \mapsto V(x(t))$ é derivável em $\mathbb{R}$ e sua derivada num ponto $t \in \mathbb{R}$ é dada por $x(t)^T Cx(t)$.*

Um resultado análogo também é válido para o caso de uma matriz cujos autovalores têm parte real negativa:

Lema 2.7.2. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n cujos autovalores têm parte real negativa. Então*

- (1) *Para cada matriz C definida positiva, existe uma matriz definida positiva B tal que $A^T B + BA = -C$.*
- (2) *Definamos $V(x) := x^T Bx$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se x é uma solução da equação diferencial ordinária $\dot{x} = Ax$, a função $t \mapsto V(x(t))$ é derivável e sua derivada num ponto $t \in \mathbb{R}$ é dada por $-x(t)^T Cx(t)$.*

Teorema 2.7.3. *Seja L uma matriz de ordem m . Suponhamos que 0 seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de*

$$\dot{x} = Lx. \quad (2.15)$$

Seja π o fluxo global gerado pelas soluções de (2.15). Então o conjunto $K = \{0\}$ é um conjunto π -invariante isolado, $h(\pi, \{0\})$ está definido e $h(\pi, \{0\}) = \Sigma^k$, sendo k o número de autovalores, contando multiplicidades, com parte real positiva.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.9, existe uma decomposição $\mathbb{R}^m = U \oplus S$ tal que U e S são subespaços vetoriais invariantes pelas soluções de (2.15) e existem constantes $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que

$$\begin{aligned} \|e^{tA}x\| &\leq Ke^{-\mu t}\|x\|, \quad x \in S \text{ e } t \geq 0 \\ \|e^{tA}x\| &\leq Ke^{\mu t}\|x\|, \quad x \in U \text{ e } t \leq 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Denotemos também por L a transformação linear associada à matriz L pelo isomorfismo canônico entre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e $M_n(\mathbb{R})$.

Seja G uma base de $\mathbb{R}^m$ formada pela reunião de uma base de U e por uma base de S . A matriz da transformação linear L nesta base G é do tipo

$$F := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

sendo A e C matrizes.

Como existe uma matriz invertível M tal que $L = M^{-1}FM$, segue que existe uma conjugação linear, $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\Phi(x) = M^{-1}x$, entre os fluxos lineares gerados por

$$\dot{x} = Lx \text{ e } \dot{y} = Fy.$$

Portanto, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma solução de $\dot{x} = Lx$ se, e somente se, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $y(t) := M^{-1}x(t)$ é uma solução de $\dot{y} = Fy$.

Além disso, se $y(t_0) \in U$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, segue que $y(t) \in U$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, se $P_U : \mathbb{R}^m \rightarrow U$ é a projeção de $\mathbb{R}^m$ sobre U e $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma solução de $\dot{y} = Fy$, segue que $P_U y$ é uma solução de

$$\dot{u} = Au. \tag{2.17}$$

A recíproca é verdadeira, isto é, se $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ é uma solução de $\dot{u} = Au$, definindo $y(t) := (u(t), 0) \in \mathbb{R}^m = U \oplus S$, $t \in \mathbb{R}$, temos que $\dot{y} = Fy$.

Como a parte real dos autovalores de A é positiva, o Lema 2.7.1(1) implica que existe uma matriz definida positiva D tal que

$$A^T D + DA = \text{Id}.$$

Definamos $V_U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $V_U(x) = (P_U x)^T D (P_U x)$. Seja $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma solução de (2.15). Portanto, $u(t) := P_U(M^{-1}x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de (2.17) e segue do Lema 2.7.1(2) que

$$\frac{d}{dt} V_U(u(t)) = u(t)^T \text{Id} u(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo, a função $t \in \mathbb{R} \mapsto V_U(P_U M^{-1}x(t))$ é não decrescente. Além disso, se u é uma solução não constante de (2.17), então aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto V_U(P_U M^{-1}x(t))$ é estritamente crescente. É claro que $V_U(0) = 0$.

Tudo o que fizemos para a variedade instável U pode ser feito para a variedade estável S . Seja $V_S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$V_S(x) = P_S(x)EP_S(x),$$

sendo $P_S : \mathbb{R}^m \rightarrow S$ a projeção de $\mathbb{R}^m$ sobre S e E uma matriz definida positiva como no Lema 2.7.2(1) tal que $C^T E + EC = -\text{Id}$. Além disso, se $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma solução de (2.15), então $s(t) := P_S(M^{-1}x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução de $\dot{s} = Cs$ e segue do Lema 2.7.2(2) que

$$\frac{d}{dt}V_S(s(t)) = -s(t)^T \text{Id } s(t) \leq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, a função $t \in \mathbb{R} \mapsto V_S(P_S M^{-1}x(t))$ é não crescente. Além disso, se s é uma solução não constante de $\dot{s} = Cs$, então a aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto V_S(P_S M^{-1}x(t))$ é estritamente decrescente. Novamente, é claro que $V_S(0) = 0$. Consideremos o conjunto

$$B := \text{Cl}\{x \in \mathbb{R}^m : V_U(x) < 1 \text{ e } V_S(x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^m : V_U(x) \leq 1 \text{ e } V_S(x) \leq 1\}.$$

É claro que $K = \{0\} \in \text{Int}_{\mathbb{R}^n} B$. Como a única solução limitada de (2.15) é a solução nula, segue que

$$\{0\} = \text{Inv}_\pi(B).$$

Portanto, B é uma vizinhança isolante para K relativamente a π . Segue do Exemplo 2.5.3 que $h(\pi, K)$ está definido. Para completar a demonstração, temos de calcular $h(\pi, K)$. A definição de B implica que B é um bloco isolante para K com

$$B^- = \{x \in \mathbb{R}^m : V_U(P_U x) = 1 \text{ e } V_S(P_S x) \leq 1\}.$$

Portanto,

$$h(\pi, \{0\}) = [(B/B^-, [B])].$$

Definamos $H : B \times [0, 1] \rightarrow B$ por $H(x, \tau) = P_U x + (1 - \tau)P_S x$, $x \in B$ e $\tau \in [0, 1]$. É claro que H é contínua e, além disso, se $x \in B^-$ e $\tau \in [0, 1]$,

$$V_U(P_U H(x, \tau)) = V_U(P_U x) = 1 \text{ e}$$

$$V_S(P_S H(x, \tau)) = V_S((1 - \tau)P_S x) = (1 - \tau)V_S x \leq 1.$$

Logo, $H(B^- \times [0, 1]) \subset B^-$. Portanto, H induz uma aplicação contínua $\tilde{H} : B/B^- \times [0, 1] \rightarrow B/B^-$ que preserva ponto base. Mais ainda, $\tilde{H}$ é uma retração por deformação forte de B/B^- sobre $B_1/\partial B_1$, sendo $B_1 := \{x \in U : V_U(x) \leq 1\} \oplus \{0\}$.

Portanto,

$$h(\pi, \{0\}) = [(B/B^-, [B^-])].$$

Por outro lado, o par $(B_1/\partial B_1, [\partial B_1])$ é homeomorfo ao par (D^k, S^{k-1}) , sendo D^k a bola unitária k -dimensional, S^{k-1} a esfera unitária $(k - 1)$ -dimensional e $k = \dim U$. Além disso, $(D^k/S^{k-1}, [S^{k-1}])$ é homeomorfo a (S^k, s_0) , $s_0 \in S^k$, por um homeomorfismo que preserva ponto base. Portanto,

$$h(\pi, \{0\}) = [(S^k, s_0)].$$

Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

2.8 O índice de Conley homológico

Seja H_q , $q \in \mathbb{Z}$, uma teoria de homologia não reduzida qualquer.

Sejam $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$, $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e (N_1, N_2) um par quasi-índice em N relativamente a π . Pela propriedade homológica de invariância da homotopia, os grupos $H_q(N_1/N_2, [N_2])$ não dependem das escolhas particulares de $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$ e (N_1, N_2) .

Definição 2.8.1. *Se $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$, então o índice homológico $H_q(h(\pi, K))$ de (π, K) , $q \in \mathbb{Z}$, é definido por $H_q(N_1/N_2, [N_2])$ para qualquer escolha de um par quasi-índice (N_1, N_2) em N (relativamente a π), sendo $N \in \mathcal{N}(\pi, K)$.*

Se B é um bloco isolante para K , com $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$, sabemos que (B, B^-) é um par índice em B para K . Além disso, o Teorema 2.3.11 implica que a inclusão

$i : B^- \rightarrow B$ é uma cofibração. Logo, segue da Proposição 1.2.11 que

$$H_q(h(\pi, K)) = H_q(B/B^-, [B^-]) = H_q(B, B^-) \text{ para todo } q \in \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

Na prática, é mais fácil calcular os grupos de homologia relativa do par (B, B^-) do que os do espaço com ponto base $(B/B^-, [B^-])$. A relação descrita em (2.18) será importante para a obtenção da Equação de Morse associada a uma decomposição de Morse de um conjunto invariante. Voltaremos a este ponto no Capítulo 4.

Propriedades do índice de Conley

Neste capítulo, apresentaremos três propriedades do índice de Conley: a propriedade da adição (Seção 3.1), a propriedade da irredutibilidade (Seção 3.2) e a importante Propriedade da Continuação (Seção 3.3). A ilustração destas propriedades encerra o capítulo.

A exposição a seguir é baseada em [10] e [9].

3.1 A propriedade de adição

Nesta Seção, utilizaremos a notação e os resultados apresentados na Subseção 1.2.5.

A partir da Observação 1.2.15, a soma wedge $\vee$ está bem definida no espaço dos tipos de homotopia dos espaços com ponto base. Em particular, dados $(\pi_1, K_1) \in \mathcal{S}(X_1)$ e $(\pi_2, K_2) \in \mathcal{S}(X_2)$, com X_1, X_2 espaços métricos, faz sentido escrever $h(\pi_1, K_1) \vee h(\pi_2, K_2)$.

O teorema seguinte descreve a propriedade da adição do índice de Conley homotópico.

Teorema 3.1.1. *Seja X um espaço métrico e π um semifluxo local em X . Suponhamos que $(\pi, K_1) \in \mathcal{S}(X)$ e $(\pi, K_2) \in \mathcal{S}(X)$ sejam tais que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Então $(\pi, K_1 \cup K_2) \in \mathcal{S}(X)$ e*

$$h(\pi, K_1 \cup K_2) = h(\pi, K_1) \vee h(\pi, K_2).$$

Demonstração. Para cada $i = 1, 2$, seja N_i uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de K_i . Como $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, podemos assumir que $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Pelo Teorema 2.4.4, para cada $i = 1, 2$, existem blocos isolantes B_i com $K_i \subset B_i \subset N_i$. Portanto, (B_i, B_i^-) é um par índice em B_i e

$$h(\pi, K_i) = [B_i/B_i^-, [B_i^-]], \quad i = 1, 2.$$

Definamos $N := N_1 \cup N_2$. Evidentemente, N é uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de $K := K_1 \cup K_2$ e $B := B_1 \cup B_2$ é um bloco isolante para K com $K \subset B \subset N$ e $B^- = B_1^- \cup B_2^-$. Portanto, $h(\pi, K)$ está definido e $h(\pi, K) = [B/B^-, [B^-]]$.

Notemos que $B/B^- = (B_1 \cup B_2)/(B_1^- \cap B_2^-)$. Portanto, segue da Proposição 1.2.16 que B/B^- é isomorfo a $(B_1/B_1^-) \vee (B_2/B_2^-)$ em $\mathcal{T}^*$. Em particular,

$$h(\pi, K) = [B/B^-, [B^-]] = [B_1/B_1^-, [B_1^-]] \vee [B_2/B_2^-, [B_2^-]] = h(\pi, K_1) \vee h(\pi, K_2),$$

o que demonstra o teorema. □

3.2 Irredutibilidade

Dados conjuntos π -invariantes K , K_1 e K_2 , com $K_1 \subset K$ e $K_2 \subset K$, uma questão que se coloca é se K_1 e K_2 estão “conectados” por uma órbita completa de K . A análise desta questão nos leva ao conceito de irredutibilidade.

Definição 3.2.1. *Um par $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ é chamado redutível se K é reunião de dois conjuntos compactos disjuntos e não vazios K_1 e K_2 tais que $h(\pi, K_1) \neq \bar{0}$ e $h(\pi, K_2) \neq \bar{0}$. Caso contrário, K é chamado irredutível.*

Observação 3.2.2. *No caso em que K é redutível, os conjuntos K_1 e K_2 são necessariamente invariantes.*

Se K é conexo, então (π, K) é irredutível. A seguir, apresentamos outros exemplos de pares irredutíveis.

Lema 3.2.3. *Se $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e $h(\pi, K) = \bar{0}$, então (π, K) é irredutível.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que (π, K) seja redutível. Logo, existem conjuntos disjuntos não vazios $K_1, K_2 \in \mathcal{S}(X)$ tais que $K = K_1 \cup K_2$ com $h(\pi, K_1) \neq \bar{0}$ e $h(\pi, K_2) \neq \bar{0}$. Pelo Teorema 3.1.1, temos

$$h(\pi, K) = h(\pi, K_1 \cup K_2) = h(\pi, K_1) \vee h(\pi, K_2).$$

Como $h(\pi, K) = \bar{0}$, segue da Proposição 1.2.17 que $h(\pi, K_1) = h(\pi, K_2) = \bar{0}$, o que é uma contradição. $\square$

Teorema 3.2.4. *Suponhamos $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e que (π, K) seja irredutível. Suponhamos que exista um conjunto π -invariante $K' \subset K$ tal que*

$$h(\pi, K') \neq \bar{0} \quad e \quad h(\pi, K') \neq h(\pi, K).$$

Então existe uma solução completa, $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$, de π tal que $\sigma(\mathbb{R}) \not\subset K'$ e que satisfaz $\omega^(\sigma) \subset K'$ ou $\omega(\sigma) \subset K'$ (ou ambos).*

O Teorema 3.2.4 afirma que, embora a órbita de σ não esteja inteiramente contida em K' , ela emana de K' ou tende a K' (ou ambos). Além disso, o teorema não nos fornece meios para decidir qual dos dois casos necessariamente ocorre: se $\omega^*(\sigma) \subset K'$ ou se $\omega(\sigma) \subset K'$. Na verdade, não é possível saber qual situação ocorre assumindo apenas as hipóteses do teorema, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2.5. *Consideremos o fluxo local π em $\mathbb{R}$ gerado pelas soluções da equação diferencial ordinária*

$$\dot{x} = x(x - 1). \tag{3.1}$$

O intervalo $[0, 1] =: K$ é um conjunto π -invariante isolado. Recordemos que o diagrama de fase associado a (3.1) é dado pela Figura 3.1.

Analogamente ao Exemplo 2.6.8, temos que $h(\pi, K) = \bar{0}$. Os pontos 0 e 1 são pontos de equilíbrio hiperbólicos de (3.1). Segue do Teorema 3.4.4 que

$$h(\pi, \{0\}) = \Sigma^0 \text{ e } h(\pi, \{1\}) = \Sigma^1.$$

Figura 3.1: Diagrama de fase de $\dot{x} = x(x - 1)$.

Escolhendo $K' = \{0\}$ ou $K' = \{1\}$, vemos que, em ambos os casos, temos satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.2.4. Entretanto, a única solução não constante σ em K tende a K' no primeiro caso, ao passo que ela emana de K' no segundo caso. Aqui, o fato de que $\{0\}$ é um atrator é necessário para determinar a direção da direção da órbita heteroclínica σ .

Demonstração do Teorema 3.2.4. Sejam $K_1 = K'$ e $K_2 = K \setminus K_1$. Mostremos que K_2 não é fechado. De fato, suponha que K_2 seja fechado. Logo, K_2 é compacto. Como $K = K_1 \dot{\cup} K_2$, temos que K_2 é um conjunto π -invariante isolado. Pela irredutibilidade de K , $h(\pi, K_1) = \bar{0}$ ou $h(\pi, K_2) = \bar{0}$. Da nossa hipótese, segue que $h(\pi, K_1) \neq \bar{0}$. Por outro lado, o Teorema 3.1.1 implica

$$h(\pi, K) = h(\pi, K_1) \vee h(\pi, K_2) = h(\pi, K_1) \vee \bar{0} = h(\pi, K_1),$$

o que é uma contradição com a hipótese. Logo, K_2 não é fechado e, conseqüentemente, existe uma seqüência $(x_n)_n$ em K_2 convergindo para algum $x_0 \in K_1$. Seja N uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de K_1 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\sigma_n : \mathbb{R} \rightarrow K$ uma solução completa por x_n . Podemos assumir que $x_n \in \text{Int}_X(N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K_1 é o conjunto π -invariante maximal em N e $x_n \notin K_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\sigma_n(\mathbb{R}) \not\subset N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando subsequências, se necessário, temos dois casos a considerar:

Caso 1: Para todo $n \geq 1$, existe um $t_n \geq 0$ tal que

$$\sigma_n[0, t_n] \subset N \cap K, \quad \sigma_n(t_n) \in \partial N.$$

Afirmamos que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, suponha que a afirmação seja falsa. Então existe uma subsequência limitada $(t_{n_k})_k$ de $(t_n)_n$. Podemos assumir que $t_{n_k} \rightarrow s$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $s \in [0, \infty)$. Pela continuidade do semifluxo, temos

$$x_n \pi t_n \rightarrow x_0 \pi s \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Como K_1 é π -invariante e N é uma vizinhança isolante de K_1 , temos

$$x_0\pi s \in K_1 \subset \text{Int}_X(N).$$

Por outro lado, $x_n\pi t_n = \sigma_n(t_n) \in \partial N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue de (3.2) que $x_0\pi s \in \partial N \cap \text{Int}_X(N)$, o que é uma contradição. Isto demonstra nossa afirmativa.

Mas, pelo Teorema 2.4.5, K_1 é compacto, donde $d(K_1, \partial N) > 0$. Isto é uma contradição, pois $x_n\pi t_n \in \partial N$ e seu limite $x\pi s$ está em K_1 .

Assim, podemos assumir que $(\sigma_n(t_n))_n$ converge a $y_0 \in \text{Inv}_\pi^-(K \cap N) \cap \partial N$, isto é, existe uma solução $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$ por y_0 tal que $\sigma((\infty, 0]) \subset K \cap N$. Como o conjunto α -limite de σ é invariante e $\sigma(0) \notin K_1$, segue que $\omega^*(\sigma) \subset K_1$ e $\sigma(\mathbb{R}) \not\subset K_1$.

Caso 2: Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$\sigma_n[-t_n, 0] \subset N \cap K \quad e \quad \sigma_n(-t_n) \in \partial N.$$

Como K é compacto, podemos assumir que

$$y_n = \sigma_n(-t_n) \rightarrow y_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

para algum $y_0 \in N \cap K \cap \partial N$. Além disso, para $n \in \mathbb{N}$, temos $y_n\pi[0, t_n] \subset N \cap K$.

Se a seqüência $(t_n)_n$ é limitada, podemos assumir que $t_n \rightarrow t_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $y_n\pi t_n \rightarrow y_0\pi t_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $x_n = y_n\pi t_n$, segue que $x_0 = y_0\pi t_0$. Portanto,

$$y_0 \in \text{Inv}_\pi^+(N \cap K) \cap \partial N.$$

Se $(t_n)_n$ é ilimitada, podemos assumir que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, e concluimos novamente que $y_0 \in \text{Inv}_\pi^+(N \cap K) \cap \partial N$.

Seja $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$ uma solução completa por y_0 . Segue que $\omega(\sigma) \subset K_1$ e $\sigma(\mathbb{R}) \not\subset K_1$. Isto encerra a demonstração. $\square$

Teorema 3.2.6. *Se $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e $h(\pi, K) = \Sigma^m$ para algum $m \geq 0$, então (π, K) é irredutível.*

Demonstração. Suponha que o teorema não seja válido. Então existem dois conjuntos não vazios e disjuntos K_1 e K_2 tais que $K = K_1 \cup K_2$, $h(\pi, K_1) \neq \bar{0}$ e $h(\pi, K_2) \neq \bar{0}$.

Pelo Teorema 1.2.14,

$$h(\pi, K) = h(\pi, K_1) \vee h(\pi, K_2).$$

Por outro lado, a Proposição 1.2.18 implica que

$$h(\pi, K_1) = \bar{0} \text{ ou } h(\pi, K_2) = \bar{0},$$

uma contradição. □

Teorema 3.2.7. *Seja $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$, com $K \neq \emptyset$, e suponha que $h(\pi, K)$ o tipo de homotopia de um espaço conexo com ponto base (Y, y_0) . Então, para toda vizinhança isolante N de K , temos*

$$K = \text{Inv}_\pi(N) \neq \text{Inv}_\pi^-(N).$$

A demonstração deste resultado, bastante técnica, pode ser encontrada em [10] (Teorema I.11.8). Conluímos a seção com o seguinte corolário.

Corolário 3.2.8. *Sejam π um semifluxo global em um espaço vetorial normado X . Consideremos*

$$K_\infty := \{x \in X : \text{existe uma solução completa } \sigma \text{ por } x \text{ tal que } \sigma(\mathbb{R}) \text{ é limitado}\}.$$

Suponhamos que $K_\infty \neq \emptyset$, $(\pi, K_\infty) \in \mathcal{S}(X)$ e que $h(\pi, K_\infty) = [(Y, y_0)]$ para algum espaço topológico conexo Y . Então existe uma solução completa $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $\sup_{t \leq 0} \|\sigma(t)\| < \infty$ e $\sup_{t \geq 0} \|\sigma(t)\| = \infty$.

Demonstração. Suponha que o corolário seja falso. Seja N uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de K_∞ . Sejam $x \in \text{Inv}_\pi^-(N)$ e uma solução $\tilde{\sigma} : (-\infty, 0] \rightarrow N$ de π com $\tilde{\sigma}(0) = x$. Como π é semifluxo global, temos $\omega_x = \infty$ e, portanto, σ pode ser estendida a uma solução completa por x .

Pelo Teorema 2.4.7, $\text{Inv}_\pi^-(N)$ é compacto. Em particular, $\text{Inv}_\pi^-(N)$ é limitado. Como estamos assumindo que a conclusão do corolário é falsa, temos de ter $\sigma([0, \infty))$ limitado e, portanto, $x \in K_\infty$. Segue que

$$\text{Inv}_\pi^-(N) = \text{Inv}_\pi(N) = K,$$

o que contradiz o Teorema 3.2.7. Isto termina a demonstração. □

3.3 A Propriedade de Continuação

A Propriedade de Continuação faz com que o índice de Conley seja uma ferramenta importante no estudo de problemas que dependem continuamente de algum parâmetro.

Definição 3.3.1. *Seja $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathcal{S}(X)$ uma aplicação de um espaço métrico Λ em $\mathcal{S}(X)$. Escrevemos $(\pi_\lambda, K_\lambda) := \alpha(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda$. A aplicação α é chamada $\mathcal{S}$ -contínua se, para todo $\lambda_0 \in \Lambda$, existem uma vizinhança W de λ_0 em Λ e um conjunto fechado N em X tais que:*

- (1) *Para todo $\lambda \in W$, o conjunto N é uma vizinhança isolante π_λ -admissível de K_λ relativamente a π_λ ;*
- (2) *Se $(\lambda_n)_n$ é uma seqüência em Λ tal que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$, então N é fortemente $(\pi_{\lambda_n})_n$ -admissível e temos $\pi_{\lambda_n} \rightarrow \pi_{\lambda_0}$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Teorema 3.3.2. *Seja $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathcal{S}(X)$ uma função $\mathcal{S}$ -contínua. Então $h(\pi_\lambda, K_\lambda)$ é contante nas componentes conexas de Λ .*

Corolário 3.3.3. *Nas condições do teorema anterior, se $\Lambda = [0, 1]$, então $h(\pi_\lambda, K_\lambda)$ é contante para todo $\lambda \in [0, 1]$. Em particular,*

$$h(\pi_0, K_0) = h(\pi_1, K_1).$$

Para demonstrar o Teorema 3.3.2, vamos provar o seguinte resultado auxiliar.

Teorema 3.3.4. *Seja π_n , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, um semifluxo local em X tal que $\pi_n \rightarrow \pi_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja N um subconjunto de X e suponha que*

- (a) *N seja fortemente π_n -admissível para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
- (b) *para toda subsequência $(\pi_{n_k})_k$ de $(\pi_n)_n$, N é $(\pi_{n_k})_k$ -admissível;*
- (c) *N seja uma vizinhança isolante relativamente a π_0 .*

Seja $K_0 := \text{Inv}_{\pi_0}(N)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $K_n := \text{Inv}_{\pi_n}(N)$. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, o conjunto N é uma vizinhança isolante de K_n e

$$h(\pi_n, K_n) = h(\pi_0, K_0) \text{ para } n \geq n_0.$$

A demonstração do Teorema 3.3.4 utilizará diversos resultados auxiliares. No que segue, vamos assumir que as hipóteses do Teorema 3.3.4 estejam satisfeitas.

Proposição 3.3.5. *Existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que N é uma vizinhança isolante de K_n para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Suponha que o resultado não seja verdadeiro. Logo, existe uma seqüência $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$, com $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução completa $\sigma_{n_k} : \mathbb{R} \rightarrow X$ de π_{n_k} de modo que

$$\sigma_{n_k}(\mathbb{R}) \subset N \text{ e } \sigma_{n_k}(0)\pi_{n_k}n_k \in \partial N. \quad (3.3)$$

Temos que $\sigma_{n_k}(0)\pi_{n_k}[0, 2n_k] \subset N$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Como N é $(\pi_{n_k})_k$ -admissível, o Teorema 2.4.6 implica que existem uma subsequência $(\sigma_{n_k^1}(0)\pi_{n_k^1}n_k^1)_k$ de $(\sigma_{n_k}(0)\pi_{n_k}n_k)_k$ e um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N)$ tal que

$$x_k := \sigma_{n_k^1}(0)\pi_{n_k^1}n_k^1 \rightarrow x_0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, $x_{n_k^1}\pi_{n_k^1}[0, n_k^1] \subset N$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n_k^1 \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, o Teorema 2.4.5 implica que $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^+(N)$. Desta forma,

$$x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}(N) = K_0.$$

Por (3.3), temos $x_0 \in \partial N$, o que é uma contradição pois N é uma vizinhança isolante de K_0 . $\square$

Proposição 3.3.6. *Suponha que $K_0 = \text{Inv}_{\pi_0}(N) = \emptyset$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Suponha que a proposição não seja verdadeira. Logo, existe uma seqüência $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tal que $K_{n_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $\sigma_{n_k} : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução completa de π_{n_k} satisfazendo

$$\sigma_{n_k}(\mathbb{R}) \subset N \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como N é $(\pi_{n_k})_k$ -admissível, o Teorema 2.4.6 implica que existe uma subsequência $(\sigma_{n_k^1}(0)\pi_{n_k^1}n_k^1)_k$ de $(\sigma_{n_k}(0)\pi_{n_k}n_k)_k$ e um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N)$ tal que

$$x_k := \sigma_{n_k^1}(0)\pi_{n_k^1}n_k^1 \rightarrow x_0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, $x_{n_k^1}\pi_{n_k^1}[0, n_k^1] \subset N$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n_k^1 \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, o Teorema 2.4.5 implica que $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^+(N)$. Desta forma,

$$x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}(N) = K_0,$$

isto é, $\text{Inv}_{\pi_0}(N) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. $\square$

Proposição 3.3.7. *Suponha $K_0 \neq \emptyset$. Então existe um conjunto aberto V tal que $B := \text{Cl}(V)$ é um bloco isolante satisfazendo $K \subset V \subset B \subset N$ e $\partial V = \partial B$.*

Demonstração. O Teorema 2.4.4 implica a existência de um bloco isolante B' tal que

$$K_0 \subset \text{Int}_X(B') \subset N.$$

Definindo $V = \text{Int } B'$ e $B := \text{Cl } V$, temos o resultado. $\square$

Como N é uma vizinhança isolante fortemente π_0 admissível de K_0 , a Proposição 3.3.7 implica que existe um aberto U_0 tal que $N_0 := \text{Cl } U_0$ é um bloco isolante satisfazendo

$$K_0 \subset U_0 \subset N_0 \subset N \quad \text{e } \partial U_0 = \partial N_0.$$

Seja $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [1, 2)$ um difeomorfismo de classe C^∞ estritamente crescente fixado. Definamos as seguintes funções:

- (1) $s^+ : N_0 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $s^+(x) = \sup\{t : x\pi_0[0, t] \subset N_0\}$,
- (2) $t^+ : U_0 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t^+(x) = \sup\{t : x\pi_0[0, t] \subset U_0\}$,
- (3) $F : X \rightarrow [0, 1]$, $F(x) = \min\{1, d(x, \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0))\}$ e
- (4) $g^-(x) = \sup\{\alpha(t)F(x\pi_0 t) : 0 \leq t \leq s^+(x)\}$ se $s^+(x) < \infty$ e
 $g^-(x) = \sup\{\alpha(t)F(x\pi_0 t) : 0 \leq t < s^+(x)\}$ se $s^+(x) = \infty$.

A seguir, enunciaremos sem demonstração um resultado sobre as propriedades de continuidade destas funções. As demonstrações podem ser encontradas em [10].

Proposição 3.3.8. *As seguintes afirmativas são válidas:*

- (1) s^+ é semicontínua superiormente e t^+ é semicontínua inferiormente;
- (2) g^- é semicontínua superiormente. Além disso, se $t^+ = s^+$ em U_0 , então g^- é contínua em U_0 .

Lema 3.3.9. *Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em N_0 tal que $g^-(x_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma subseqüência de $(x_n)_n$ que converge para um elemento de $\text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$.*

Demonstração. Da definição destas funções, temos $0 \leq \alpha(0)F(x_n) \leq g^-(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $F(x_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um $n_0^k \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0^k$ implica $F(x_n) \leq 1/k$. Logo, se $n_k \geq n_0^k$, temos

$$d(x_{n_k}, \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)) = F(x_{n_k}) \leq \frac{1}{k}$$

Logo,

$$d(x_{n_k}, \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Como N_0 é fortemente π_0 -admissível, o Corolário 2.4.7 implica que $\text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ é compacto. Logo, existem um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ e uma subseqüência $(x_{n_{k'}})_{k'}$ de $(x_{n_k})_k$ tais que

$$x_{n_{k'}} \rightarrow x_0 \text{ quando } k' \rightarrow \infty.$$

Isto completa a demonstração. □

Lema 3.3.10. *Sejam $a, b > 0$ e definamos*

$$V(a, b) := \{x \in U_0 : g^-(x) < a \text{ e } t^+(x) > b\}.$$

Então

- (1) *para todo $a, b > 0$, o conjunto $V(a, b)$ é aberto;*
- (2) *existem $a_0, b_0 > 0$ tais que $\text{Cl} V(a_0, b_0) \subset U_0$.*

Demonstração. A parte (1) segue da Proposição 3.3.8.

Para mostrarmos a parte (2), suponhamos que, para todo $a, b > 0$, exista um $x_{a,b} \in \text{Cl } V(a, b)$ tal que $x_{a,b} \notin U_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $a = 1/n$ e $b = n$. Portanto, existe um $x_n \in \text{Cl } V(1/n, n)$ tal que $x_n \notin U_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n \in V(1/n, n)$ tal que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}. \quad (3.4)$$

Segue que $g^-(y_n) < 1/n$ e $t^+(y_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $g^-(y_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Lema 3.3.9, existem uma subsequência de $(y_n)_n$, denotada novamente por $(y_n)_n$, e um $y \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tais que

$$y_n \rightarrow y \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, $t^+(y_n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como

$$y_n \pi_0[0, t^+(y_n)] \subset U_0 \subset N_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

o Teorema 2.4.6 implica que $y \in \text{Inv}_{\pi_0}(N_0)$, ou seja, $y \in \text{Inv}_{\pi_0}(N_0) = K_0 \subset U_0$.

Por (3.4), concluímos que $x_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \in U_0$, o que é uma contradição. $\square$

Lema 3.3.11. *Fixemos as constantes positivas a, b, δ, M tais que $a \leq a_0$, $b \geq b_0$. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos*

$$K(n, a, b) := \text{Inv}_{\pi_n} \text{Cl } V(a, b) \subset V(\delta, M).$$

Demonstração. Suponhamos que o lema seja falso. Então existem constantes positivas $a \leq a_0$, $b \geq b_0$, δ e M e uma sequência $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ com $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ tais que

$$K(n_k, a, b) \not\subset V(\delta, M) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução completa $\sigma_k : \mathbb{R} \rightarrow \text{Cl } V(a, b)$ de π_{n_k} tal que

$$\sigma_k(0) \pi_{n_k} k \notin V(\delta, M)$$

satisfazendo $\sigma_k(0)\pi_{n_k}[0, 2k] \subset \text{Cl } V(a, b) \subset N$. Notemos que $2k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, existem um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}(N)$ e uma subsequência de $(\sigma_k(0)\pi_{n_k}k)_k$, à qual denotaremos novamente por $(\sigma_k(0)\pi_{n_k}k)_k$, tais que

$$\sigma_k(0)\pi_{n_k}k \rightarrow x_0 \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Como $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}(N)$, segue que $g^-(x_0) = 0 < \delta$ e $t^+(x_0) = \infty$. Por fim, (3.5) implica que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sigma_k(0)\pi_{n_k}k \in V(\delta, M) \text{ para todo } k \geq k_0,$$

o que é uma contradição. □

Para $x \in U_0$ e $n \in \mathbb{N}$, definamos a função

$$t_n^+(x) := \sup\{t \geq 0 : x\pi_n t \text{ está definido e } x\pi_n[0, t] \subset U_0\}.$$

Lema 3.3.12. *Sejam $(x_n)_n$ uma seqüência em U_0 tal que $x_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$, para algum $x_0 \in U_0$. Então*

$$t_n^+(x_n) \rightarrow t^+(x_0) \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos: $t^+(x_0) < \infty$ e $t^+(x_0) = \infty$.

No caso em que $t^+(x_0) < \infty$, seja $C \in (0, \infty)$ tal que $t^+(x_0) < C$. Temos que $x_0\pi_0 t^+(x_0) \in \partial U_0 = \partial N_0$ e N_0 é um bloco isolante para π_0 . Portanto, existe um $s \in (0, \infty)$ com $t^+(x_0) < s < C$ tal que $x_0\pi_0 s \notin N_0$. Como $\pi_n \rightarrow \pi_0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$x_n\pi_n s \rightarrow x_0\pi_0 s \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, existem um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n\pi_n s \notin N_0$ para todo $n \in n_0$. Logo, $t_n^+(x_n) < s < C$ para todo $n \geq n_0$.

Seja agora $C > 0$ tal que $t^+(x_0) > C > 0$. Logo, $x_0\pi_0[0, C] \subset U_0$. Afirmamos então que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n\pi_n[0, C] \subset U_0 \text{ para todo } n \geq n_0. \quad (3.6)$$

Suponha que nossa afirmação seja falsa. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$x_n \pi_n [0, C] \not\subset U_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $t_n \in [0, C]$ tal que $x_n \pi_n t_n \notin U_0$. Podemos também assumir que existe um $t' \in [0, C]$ tal que $t_n \rightarrow t'$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\pi_n \rightarrow \pi_0$ quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$x_n \pi_n t_n \rightarrow x_0 \pi_0 t' \text{ e } x_0 \pi_0 t' \notin U_0,$$

uma contradição. Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica $x_n \pi_n [0, C] \subset U_0$. Isto nos dá

$$t_n^+(x_n) > C \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Com isso, demonstramos a continuidade para o caso $t^+(x_0) < \infty$.

Consideremos o segundo caso: $t^+(x_0) = \infty$. Para todo $C > 0$, temos que

$$x_0 \pi_0 [0, C] \subset U_0.$$

Logo, a afirmativa (3.6) implica a existência de um $n_0(C) \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0(C)$, temos

$$x_n \pi_n [0, C] \subset U_0.$$

Portanto, para todo $n \geq n_0(C)$, temos $C \leq t_n^+(x_n)$, o que implica que $t_n^+(x_n) \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Isto encerra a demonstração do lema. $\square$

Definição 3.3.13. *Sejam M, M', a, b, δ constantes positivas. Definamos os seguintes subconjuntos de X :*

$$N_1(n, a, b, \delta, M) := \text{Cl} V(a, b) \cap \text{Cl} \{ \omega \in X : \text{existem um } \bar{\omega} \in V(\delta, M) \text{ e um } t \geq 0 \\ \text{tais que } \bar{\omega} \pi_n [0, t] \subset U_0 \text{ e } \bar{\omega} \pi_n t = \omega \},$$

$$N_2(n, a, b, \delta, M, M') := N_1(n, a, b, \delta, M) \cap \{ \omega \in U_0 : t_n^+(\omega) \leq M' \},$$

$$E(a, b, M) := \{ x \in U_0 : t^+(x) \leq 3M \} \cap \text{Cl} V(\delta, M),$$

$$\hat{E}(a, b, M) := \{ x \in U_0 : t^+(x) \leq 5M \} \cap \text{Cl} V(a, b),$$

$$\hat{C}(n, a, b, \delta, M) := \{x \in U_0 : t_n^+(x) \leq 4M\} \cap N_1(n, a, b, \delta, M),$$

$$C(n, \delta, M) := \{x \in U_0 : t_n^+(x) \leq 2M\} \cap \text{Cl}V(\delta, M).$$

Observação 3.3.14. *Nas condições da Definição 3.3.13,*

- (1) *Se $\delta \leq a$ e $M \geq b$, então $V(\delta, M) \subset N_1(n, a, b, \delta, M)$.*
- (2) *Se a_0, b_0 são como no Lema 3.3.10 e $a < a_0$ e $b \geq b_0$, então $\text{Cl}V(a, b) \subset U_0$.*
- (3) *Definindo $K(n, a, b) := \text{Inv}_{\pi_n}(\text{Cl}(V(a, b)))$, temos $K(n, a, b) \cap N_2(n, a, b, \delta, M, M') = \emptyset$ pois, se $x \in K(n, a, b)$, segue que, para todo $t \geq 0$, $x_n \pi_n t \in U_0$. Logo, $t_n^+(x) = \infty$.*

Proposição 3.3.15. *Fixemos constantes positivas M, M', b e a tais que $M > b, M' > b, a \leq a_0$ e $b \geq b_0$. Então, para todo $\delta > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, $N_1(n, a, b, \delta, M)$ e $N_2(n, a, b, \delta, M, M')$ são fechados e $(\text{Cl}V(a, b))$ -positivamente invariante relativamente a π_n .*

Demonstração. O conjunto $N_1(n, a, b, \delta, M)$ é evidentemente fechado. Para mostrar que $N_2(n, a, b, \delta, M, M')$ é fechado, tomemos uma seqüência $(x_n)_n$ em $N_2(n, a, b, \delta, M, M')$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $x \in N_1(n, a, b, \delta, M)$. Precisamos mostrar que $x \in U_0$ e $t_n^+(x) \leq M'$.

Temos $x \in \text{Cl}V(a, b) \subset U_0$. Como $t_n^+(x_n) \leq M'$ e t_n^+ é semicontínua inferiormente, segue que $t_n(x) \leq M'$.

Mostremos que $N_1(n, a, b, \delta, M)$ é $\text{Cl}V(a, b)$ -positivamente invariante. Para tanto, sejam $x \in N_1(n, a, b, \delta, M)$ e $s \geq 0$ tais que $x \pi_n[0, s] \subset \text{Cl}V(a, b)$. Assim, existem seqüências $(x_k)_k$ em $V(\delta, M)$ e $(t_k)_k$ em $[0, \infty)$ tais que

$$x_k \pi_n[0, t_k] \subset U_0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } \bar{x}_k := x_k \pi_n t_k \rightarrow x \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

A continuidade de π_n implica a existência de um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bar{x}_k \pi_n[0, t_k] \subset U_0 \text{ quando } k \geq k_0.$$

Temos então

$$x_k \pi_n[0, t_k + s] \subset U_0 \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Seja $\tau \in [0, s]$. Temos $x_k \pi_n(t_k + \tau) \rightarrow x \pi_n \tau$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto,

$$x \pi \tau \in \text{Cl}\{\omega : \text{existem } \bar{\omega} \in V(\delta, M) \text{ e um } t \geq 0 \text{ tais que } \bar{\omega} \pi_n[0, t] \subset U_0 \text{ e } \bar{\omega} \pi_n t = \omega\},$$

donde segue que

$$x \pi_n[0, s] \subset N_1(n, a, b, \delta, M).$$

Para concluir, tomemos $x \in N_2(n, a, b, \delta, M)$ e $s > 0$ tais que $x \pi_n[0, s] \subset \text{Cl} V(a, b)$.

Portanto

$$x \pi_n[0, s] \subset N_1(n, a, b, \delta, M').$$

Seja $\tau \in [0, s]$. Então $x \pi_n \tau \in \text{Cl} V(a, b) \subset U_0$. Como $x \in N_2(n, a, b, \delta, M, M')$, temos que $t_n^+(x) \leq M'$. Logo, $t_n^+(x \pi \tau) = t_n^+(x) - \tau \leq M' - \tau \leq M'$. Portanto, segue que

$$x \pi[0, s] \subset N_2(n, a, b, \delta, M, M').$$

Isto encerra a demonstração. □

Proposição 3.3.16. *Nas condições da Proposição 3.3.15, existem um $\delta_0 > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$ e $\delta \in (0, \delta_0]$, vale a seguinte implicação: para todo $x \in N_1(n, a, b, \delta, M)$ para o qual existe $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $x \pi_n t_0 \notin \text{Cl} V(a, b)$, existe $t' \in [0, t_0]$ tal que $x \pi_n[0, t'] \subset \text{Cl} V(a, b)$ e $x \pi_n t' \in N_2(n, a, b, \delta, M, M')$.*

Demonstração. Suponhamos que o resultado seja falso. Como o conjunto $N_1(n, a, b, \delta, M)$ é $\text{Cl} V(a, b)$ -positivamente invariante para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que existem seqüências $(x_k)_k$ em X , $(\delta_k)_k$ em $[0, \infty)$ e $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ tais que $\delta_k \rightarrow 0$ e $n_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ de modo que

$$x_k \in N_1(n_k, a, b, \delta_k, M) \cap \partial \text{Cl} V(a, b) \setminus N_2(n_k, a, b, \delta_k, M').$$

Como, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in N_1(n_k, a, b, \delta_k, M)$, segue que existem um $\bar{x}_k \in V(\delta_k, M)$ e um $t_k \geq 0$ tais que $\bar{x}_k \pi_{n_k}[0, t_k] \subset U_0$ e

$$\tilde{x}_k := \bar{x}_k \pi_{n_k} t_k \text{ é tal que } d(\tilde{x}_k, x_k) < 2^{-k}. \quad (3.7)$$

Logo, $g^-(\bar{x}_k) < \delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Pelo Lema 3.3.9, existe uma subsequência de $(\bar{x}_k)_k$, denotada novamente por $(x_k)_k$, e um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tais que

$$d(\bar{x}_k, x_0) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Afirmamos que existem uma subsequência de $(\bar{x}_k \pi_k t_k)_k$, que denotaremos novamente por $(\bar{x}_k \pi_k t_k)_k$, e um $\tilde{x}_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tais que $d(\bar{x}_k \pi_k t_k, \tilde{x}_0) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Para esta afirmação, consideremos dois casos distintos.

Caso 1: Suponha que a sequência $(t_k)_k$ seja limitada. Podemos então assumir que $t_k \rightarrow t_0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $d(\tilde{x}_k \pi_{n_k} t_k, x_0 \pi_0 t_0) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Definamos $\tilde{x}_0 := x_0 \pi_0 t_0$. Como $\text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ é N_0 -positivamente invariante em relação a π_0 , temos $\tilde{x}_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$.

Caso 2: Assumamos que a sequência $(t_k)_k$ seja ilimitada. Podemos assumir que $t_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Como

$$\bar{x}_k \pi_{n_k} [0, t_k] \subset U_0 \subset N_0 \subset N \text{ para todo } k \in \mathbb{N}$$

e N é fortemente $(\pi_{n_k})_k$ -admissível, segue do Teorema 2.4.6 que existe uma subsequência de $(\bar{x}_k \pi_{n_k} t_k)_k$, denotada novamente por $(\bar{x}_k \pi_{n_k} t_k)_k$, e um $\tilde{x}_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tais que

$$\bar{x}_k \pi_{n_k} t_k \rightarrow \tilde{x}_0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, segue de (3.7) que $x_k \rightarrow \tilde{x}_0$ quando $k \rightarrow \infty$. A demonstração da afirmação está concluída.

Como $x_k \in \text{Cl}V(a, b) \subset U_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\tilde{x}_0 \in \text{Cl}V(a, b) \subset U_0$. Pelo Lema 3.3.12, temos

$$t_n^+(x_k) \rightarrow t^+(\tilde{x}_0) \text{ quando } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Como $t_n^+(x_0) \geq M' > b$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue de (3.8) que $t^+(x_0) \geq M' > b$.

Além disso, como $g^-(\tilde{x}_0) = 0 < a$, concluímos que

$$\tilde{x}_0 \in V(a, b). \quad (3.9)$$

Por outro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \partial \text{Cl} V(a, b)$. Portanto,

$$\tilde{x}_0 \in \partial \text{Cl} V(a, b). \quad (3.10)$$

Das relações (3.9) e (3.10), temos $V(a, b) \cap \partial \text{Cl} V(a, b) \neq \emptyset$, o que é uma contradição. $\square$

Proposição 3.3.17. *Nas condições da Proposição 3.3.15, existem um $\delta_0 > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$ e todo $\delta \in (0, \delta_0]$, temos*

$$E(a, b, M) \subset \hat{C}(n, a, b, \delta, M) \subset \hat{E}(a, b, M).$$

Demonstração. Suponhamos que existam seqüências $(\delta_k)_k$ em $[0, \infty)$, $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ e $(x_k)_k$ em X tais que

$$x_k \in \hat{C}(n_k, a, b, \delta_k, M) \setminus \hat{E}(a, b, M) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3.11)$$

ou

$$x_k \in E(a, b, M) \setminus \hat{C}(n_k, a, b, \delta_k, M). \quad (3.12)$$

A relação (3.11) implica $x_k \in N_1(n_k, a, b, \delta_k, M)$, $x_k \in U_0$ e

$$t_{n_k}^+(x_k) \leq 4M \text{ e } t^+(x_k) > 5M \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Repetindo argumentos da demonstração da Proposição 3.3.16, concluímos que existe um $\tilde{x}_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tal que $d(x_k, \tilde{x}_0) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e

$$t_{n_k}^+(x_k) \rightarrow t^+(\tilde{x}_0) \text{ para todo } k \rightarrow \infty.$$

Como $t_{n_k}^+(x_k) \leq 4M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $t^+(\tilde{x}_0) \leq 4M < 5M$. A continuidade de t^+ implica que $t^+(x_k) \rightarrow t^+(\tilde{x}_0)$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $t^+(x_k) < 5M$ para k suficientemente grande. Porém, isso contradiz o fato de que $x_k \notin \hat{E}(a, b, M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

A relação (3.12) implica $x_k \in U_0$, $t^+(x_k) \leq 3M$ e $x_k \in \text{Cl}V(\delta_k, M)$. Logo, existe um $\bar{x}_k \in V(\delta_k, M)$ tal que

$$d(x_k, \bar{x}_k) < 2^{-k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Como $g^-(\bar{x}_k) < \delta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, segue do Lema 3.3.9 que existe uma subsequência de $(\bar{x}_k)_k$, denotada novamente por $(\bar{x}_k)_k$ e um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tal que

$$\bar{x}_k \rightarrow x_0 \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Além disso, temos $g^-(\bar{x}_k) < \delta_k < a$ e $t^+(\bar{x}_k) > M > b$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\bar{x}_k \in V(a, b)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in \text{Cl}V(a, b) \subset U_0$. Mais ainda, $t^+(x_k) \leq 3M$. A continuidade de t^+ implica que

$$t^+(x_0) \leq 3M.$$

O Lema 3.3.12 implica que $t_{n_k}^+(x_k) \rightarrow t^+(x_0)$ quando $k \rightarrow \infty$, donde

$$t_{n_k}^+(x_k) \leq 3M \leq 4M \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.} \quad (3.13)$$

Como, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k \in \text{Cl}V(\delta_k, M) \subset N_1(n_k, a, b, \delta_k, M), \quad (3.14)$$

segue de (3.13) e (3.14) que $x_k \in \hat{C}(n_k, a, b, \delta_k, M)$ para todo k suficientemente grande, o que é uma contradição. $\square$

Proposição 3.3.18. *Nas condições da Proposição 3.3.15, existem um $\delta_0 > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $\delta \in (0, \delta_0]$ e todo $n \geq n_0$, temos*

$$C(n, \delta, M) \subset E(a, b, M).$$

Demonstração. Suponhamos que existam seqüências $(\delta_k)_k$ em $[0, \infty)$, $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$ e $(x_k)_k$ em X tais que

$$x_k \in C(n_k, \delta_k, M) \text{ e } x_k \notin E(a, b, M) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in \text{Cl}V(\delta_k, M)$, $x_k \in U_0$ e $t_{n_k}^+(x_k) \leq 2M$.

Procedendo como anteriormente, existe uma subsequência $(x_k)_k$ em U_0 e um $x_0 \in \text{Inv}_{\pi_0}^-(N_0)$ tais que $x_k \rightarrow x_0$ quando $k \rightarrow \infty$ e $x_0 \in U_0$. Portanto,

$$t_{n_k}^+(x_0) \rightarrow t^+(x_0) \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

e

$$t^+(x_0) \leq 2M \leq 3M.$$

A continuidade de t^+ implica, para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, que $t^+(x_k) \leq 3M$. $\square$

Estamos em condições de demonstrar o Teorema 3.3.4.

Demonstração do Teorema 3.3.4. A Proposição 3.3.5 implica que existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que N é uma vizinhança isolante para K_n para todo $n \geq n_1$.

Suponhamos que $K_0 = \emptyset$. Pela Proposição 3.3.6, existe um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $K_n = \emptyset$ para todo $n \geq n_2$. Definamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Segue que N é uma vizinhança isolante para K_n para todo $n \geq n_0$ e

$$h(\pi_n, K_n) = \bar{0} = h(\pi_0, K_0) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Logo, o Teorema 3.3.4 está demonstrado para este caso.

Consideremos agora $K_0 \neq \emptyset$. Sejam $a_0 > 0$ e $b_0 > 0$ tais como no Lema 3.3.10 e consideremos constantes positivas M , b e a tais que $a \leq a_0$, $b \geq b_0$ e $M > b$.

Sejam $\delta_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\delta_0 < a_0$ e, para todo $n \geq n_0$ e $\delta \in (0, \delta_0]$, as conclusões da Proposição 3.3.16 estejam satisfeitas. Em particular, para todo $n \geq n_0$ e $\delta \in (0, \delta_0]$, temos que:

- (i) $N_1(n, a_0, b_0, \delta, M)$ e $N_2(n, a_0, b_0, \delta, M, 4M)$ são fechados e $\text{Cl}V(a_0, b_0)$ -positivamente invariantes relativamente a π_n ;
- (ii) para todo $x \in N_1(n, a, b, \delta, M)$ para o qual existe um $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $x\pi_n t_0 \notin \text{Cl}V(a, b)$, existe um $t' \in [0, t_0]$ tal que $x\pi_n[0, t'] \subset \text{Cl}V(a, b)$ e $x\pi_n t' \in N_2(n, a, b, \delta, M, M')$;
- (iii) $E(a_0, b_0, M) \subset \hat{C}(n, a_0, b_0, \delta_0, M) \subset \hat{E}(a_0, b_0, M)$;

(iv) $C(n, \delta, M) \subset E(a_0, b_0, M)$.

Notemos que $2M > b_0$ e $M \geq b_0$. Segue das Proposições 3.3.15, 3.3.16, 3.3.17 e 3.3.18 que existem um $\bar{n}_0 \in \mathbb{N}$ e $\bar{\delta}_0 > 0$ tais que, para todos $n \geq n_0$ e $\delta \in (0, \bar{\delta}_0]$, temos que

- (a) $N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M)$ e $N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M)$ são fechados e $\text{Cl } V(\delta_0, M)$ -positivamente invariantes relativamente a π_n ;
- (b) para todo $x \in N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M)$ para o qual existe um $t_0 \in [0, \infty)$ tal que $x\pi_n t_0 \notin \text{Cl } V(\delta_0, M)$, existe um $t' \in [0, t_0]$ tal que $x\pi_n[0, t'] \subset \text{Cl } V(\delta_0, M)$ e $x\pi_n t' \in N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M)$;
- (c) $E(\delta_0, M, 2M) \subset \hat{C}(n, \delta_0, M, \delta, 2M) \subset \hat{E}(\delta_0, M, 2M)$;
- (d) $C(n, \delta, 2M) \subset E(\delta_0, M, 2M)$.

Recordemos que

$$N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M) = \text{Cl } V(\delta_0, M) \cap \text{Cl}\{x : \text{existem um } \bar{x} \in V(\delta, 2M) \text{ e um } t \geq 0 \text{ tais que } \bar{x}\pi_n[0, t] \subset U_0 \text{ e } \bar{x}\pi_n t = x\} \text{ e}$$

$$N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M) = N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M) \cap \{x \in U_0 : t_n^+(x) \leq 2M\}.$$

Definamos $\tilde{\delta}_0 = \min\{\delta_0, \bar{\delta}_0\}$ e $\tilde{n}_0 := \max\{n_1, n_0, \bar{n}_0\}$. Sejam $\delta \leq \tilde{\delta}_0$ e $n \geq \tilde{n}_0$. Temos

$$\begin{aligned} A_1 &= N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M) \subset A_2 := \text{Cl } V(\delta_0, M) \subset A_3 := N_1(n, a_0, b_0, \delta_0, M) \\ &\subset A_4 := \text{Cl } V(a_0, b_0) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &:= N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M) \subset \text{Cl } V(\delta_0, M) \cap \{x \in U_0 : t_n^+(x) \leq 2M\} = C(n, \delta_0, M) \\ &\subset B_2 := E(a_0, b_0, M) \subset \hat{C}(n, a_0, b_0, \delta_0, M) \subset B_3 := N_2(n, a_0, b_0, \delta_0, M, 4M) \\ &\subset B_4 := \hat{E}(a_0, b_0, M). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 \text{ e } B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4. \quad (3.15)$$

Além disso, temos $B_i \subset A_i$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$.

Afirmamos que existe um $n_0^1 \in \mathbb{N}$, $n_0^1 \geq \tilde{n}_0$, tal que, para $n \geq n_0^1$, os pares (A_1, B_1) e (A_3, B_3) são pares índices para $K(n, a_0, b_0) := \text{Inv}_{\pi_n} \text{Cl } V(a_0, b_0)$.

De fato, (i) e (ii) implicam, respectivamente, que o par (A_1, B_1) satisfaz as condições (1) e (3) da Definição 2.5.1. Analogamente, (a) e (b) implicam, respectivamente, que o par (A_3, B_3) satisfaz as condições (1) e (3) da Definição 2.5.1.

O Lema 3.3.11 implica que existe um $n_0^1 \in \mathbb{N}$, que podemos supor maior que $\tilde{n}_0$, tal que, para todo $n \geq n_0^1$, temos

$$K(n, a_0, b_0) \subset V(\delta_0, M) \cap V(\delta, 2M) \text{ e} \quad (3.16)$$

$$K_n(n, a, b) \subset V(a_0, b_0) \cap V(\delta_0, M). \quad (3.17)$$

Além disso, segue da Observação 3.3.14 que

$$K(n, a_0, b_0) \cap N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M) = \emptyset \text{ e} \quad (3.18)$$

$$K(n, a_0, b_0) \cap N_2(n, a_0, b_0, \delta_0, M, 4M) = \emptyset. \quad (3.19)$$

Como $N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M)$ é fechado, (3.16) e (3.18) implicam que

$$\begin{aligned} K(n, a_0, b_0) &\subset \text{Int}_X(N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M)) \setminus N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M) \\ &\subset \text{Int}_X(N_1(n, \delta_0, M, \delta, 2M) \setminus N_2(n, \delta_0, M, \delta, 2M, 2M)), \end{aligned}$$

o que mostra que o par (A_1, B_1) satisfaz a condição (2) da Definição 2.5.1. Analogamente, (3.17) e (3.19) implicam que o par (A_3, B_3) também satisfaz a condição (2) da Definição 2.5.1. Estes fatos mostram a validade da afirmação.

Também, é claro que (A_2, B_2) e (A_4, B_4) são pares índices para $\text{Inv}_{\pi_0} \text{Cl } V(a_0, b_0) = \text{Inv}_{\pi_0}(N_0) = K_0$ em A_2 e A_4 respectivamente.

As inclusões (3.15) induzem funções contínuas

$$\Lambda_1 : A_1/B_1 \rightarrow A_2/B_2, \quad \Lambda_2 : A_2/B_2 \rightarrow A_3/B_3$$

$$\text{e } \Lambda_3 : A_3/B_3 \rightarrow A_4/B_4.$$

Como as aplicações $\Lambda_2 \circ \Lambda_1$ e $\Lambda_3 \circ \Lambda_2$ satisfazem as condições do item (2) da Definição 2.6.1, temos que $\Lambda_2 \circ \Lambda_1$ e $\Lambda_3 \circ \Lambda_2$ são morfismos de $\mathcal{V}(\pi, K)$. Pelo Teorema 2.6.2, segue que $\Lambda_2 \circ \Lambda_1$ e $\Lambda_3 \circ \Lambda_2$ são isomorfismos em $\mathcal{HT}^*$. Pelo Lema 1.2.1, as aplicações Λ_1 , Λ_2 e Λ_3 são isomorfismos em $\mathcal{HT}^*$. Portanto, se $n \geq n_0^1$, temos

$$h(\pi_n, K_n) = [(A_1, B_1)] = [(A_4, B_4)] = h(\pi_0, K_0),$$

o que completa a demonstração de 3.3.4. $\square$

Agora podemos apresentar a demonstração do Teorema 3.3.2.

Demonstração do Teorema 3.3.2. Seja $\lambda_0 \in \Lambda$. Logo, existem uma vizinhança W de λ_0 e um conjunto fechado N tais que as condições (1) e (2) da Definição 3.3.1 estejam satisfeitas.

Afirmamos que existe um aberto $\tilde{W} \subset W$ com $\lambda_0 \in \tilde{W}$ tal que $h(\pi_\lambda, K_\lambda) = h(\pi_{\lambda_0}, K_{\lambda_0})$ para todo $\lambda \in \tilde{W}$.

Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então existe uma seqüência $(\lambda_n)_n$ em W com $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ quando $n \rightarrow \infty$ e tal que $h(\pi_{\lambda_n}, K_{\lambda_n}) \neq h(\pi_{\lambda_0}, K_{\lambda_0})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\pi_n := \pi_{\lambda_n}$, $\pi_0 := \pi_{\lambda_0}$, $K_n := K_{\lambda_n}$ e $K_0 := K_{\lambda_0}$. Como $\alpha : \Lambda \rightarrow \mathcal{S}$ é $\mathcal{S}$ -contínua, segue que $\pi_n \rightarrow \pi_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, N é uma vizinhança isolante fortemente π_n -admissível de K_n relativamente a π_n e que N é $(\pi_{n_k})_k$ -admissível para qualquer que seja a subseqüência $(\pi_{n_k})_k$ de $(\pi_n)_n$. Logo, as condições do Teorema 3.3.4 estão satisfeitas. Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, N é uma vizinhança isolante de K_n e

$$h(\pi_n, K_n) = h(\pi_0, K_0) \text{ para todo } n \geq n_0,$$

o que é uma contradição. Assim, a afirmação está demonstrada.

Para terminar, sejam C uma componente conexa de Λ e $\mu \in C$ um ponto arbitrário desta componente. Suponhamos, por absurdo, que α não seja constante em C . Consideremos os conjuntos $A := \{\lambda \in C : h(\pi_\lambda, K_\lambda) = h(\pi_\mu, K_\mu)\}$ e $B := \{\lambda \in C : h(\pi_\lambda, K_\lambda) \neq h(\pi_\mu, K_\mu)\}$. Para cada $\lambda \in C$, consideremos uma vizinhança aberta V_λ em

tal que $h(\pi_\lambda, K_\lambda)$ é constante em V_λ . Desta feita, os conjuntos

$$\bigcup_{\lambda \in A} (V_\lambda \cap C) \text{ e } \bigcup_{\lambda \in B} (V_\lambda \cap C)$$

são ambos abertos de C e não vazios. Temos, portanto, uma cisão do conjunto conexo C , o que é uma contradição. Este fato encerra a demonstração do teorema. $\square$

3.4 Pontos de equilíbrio e o índice de Conley

Nesta seção, utilizaremos a Propriedade de Continuação para calcular, desde que esteja definido, o índice de Conley de pontos de equilíbrio de equações diferenciais ordinárias.

Teorema 3.4.1. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ com $0 \in \Omega$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação localmente lipschitziana, diferenciável na origem com $f(0) = 0$ e A uma matriz quadrada de ordem n . Consideremos a equação diferencial*

$$\dot{x} = Ax + f(x). \quad (3.20)$$

e seja π o semifluxo local gerado pelas soluções de (3.20). Definamos a matriz $L := A + f'(0)$ e suponhamos que a parte real dos autovalores de L seja diferente de zero. Então, o conjunto $\{0\}$ é π -invariante isolado, $h(\pi, \{0\})$ está definido e $h(\pi, \{0\}) = \Sigma^m$, sendo m o número de autovalores de L , contando multiplicidades, com parte real positiva.

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $B[0, r] \subset \Omega$. Definamos $U := B(0, r)$. Podemos assumir f é lipschitziana em U , o que implica, em particular, que f é limitada em U . Definamos $g_\tau : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g_\tau(x) = (1 - \tau)(f(x) - f'(0)x), \tau \in [0, 1]$$

e seja π_τ o semifluxo local em U gerado pelas soluções de

$$\dot{x} = Lx + g_\tau(x). \quad (S_\tau)$$

Notemos que π_1 é o fluxo linear gerado pelas soluções de $\dot{x} = Lx$.

Afirmamos que $\tau \mapsto \phi(\tau) = (\pi_\tau, \{0\})$ está bem definida e é $\mathcal{S}$ -contínua de $[0, 1]$ em $\mathcal{S} = \mathcal{S}(U)$. Para mostrar isto, é suficiente encontrar um conjunto fechado $N \subset U$ tal que N é uma vizinhança isolante de $K = \{0\}$ relativamente a π_τ para todo $\tau \in [0, 1]$. Suponhamos que não exista tal conjunto. Portanto, existe uma seqüência $(\tau_n)_n$ em $[0, 1]$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma solução completa $x_n : \mathbb{R} \rightarrow U$ de $\pi_n := \pi_{\tau_n}$ com

$$c_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x_n(t)\| \neq 0, \quad c_n < \|x_n(0)\| + \frac{c_n}{n} \text{ e } c_n \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $g_n := g_{\tau_n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $V := \{v \in U : \|v\| < 2\}$ e seja $\tilde{g}_n : V \rightarrow X$ a aplicação dada por

$$\tilde{g}_n(v) = c_n^{-1} g_n(c_n v) \text{ para todo } v \in V.$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $\tilde{g}_n$ é localmente lipschitziana em V . Além disso, $\tilde{g}_n$ é limitada em V . Definamos $v_n(t) := c_n^{-1} x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Além disso, seja $\tilde{\pi}_n$ o semifluxo local em V gerado pelas soluções de

$$\dot{v} + Lv = \tilde{g}_n(v) \quad (\tilde{S}_n).$$

Afirmamos que v_n é uma solução completa de $\tilde{\pi}_n$. De fato, para $t, t_0 \in \mathbb{R}$, a Fórmula de Variação dos Parâmetros implica que

$$x_n(t) = e^{L(t-t_0)} x_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} g_{\tau_n}(x_n(s)) ds.$$

Portanto

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{1}{c_n} x_n(t) = e^{-L(t-t_0)} \frac{1}{c_n} x_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} \frac{1}{c_n} g_{\tau_n}(c_n v_n(s)) ds \\ &= e^{-L(t-t_0)} v_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} \tilde{g}_n(v_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Seja $N = \{v \in U : \|v\| \leq 1\}$. Como $v_n(t) \in N$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, podemos assumir que existe um $v_0 \in N$ tal que $v_n(0) \rightarrow v_0$ quando $n \rightarrow \infty$. Afirmamos que

$\tilde{g}_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente em V . De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - f'(0)x\| < \frac{\epsilon}{2}\|x\| \text{ para todo } x \in U, \|x\| < \delta.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n > 1/\delta$ para todo $n \geq n_0$. Então, para $n \geq n_0$, temos

$$\|\tilde{g}_n(v)\| = \frac{1}{c_n} \|f(c_nv) - f'(0)c_nv\| \leq c_n^{-1} \frac{\epsilon}{2} \|c_nv\| = \frac{\epsilon}{2} \|v\| < \epsilon, \quad v \in V.$$

Seja $\tilde{\pi}_0 := \pi_1|_V$. Segue do Teorema 1.1.6 que $\tilde{\pi}_n \rightarrow \tilde{\pi}_0$. Como $v_n(0) \in \text{Inv}_{\tilde{\pi}_n}(Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema 2.4.5(ii) implica que $v_0 \in \text{Inv}_{\pi_1}$. Além disso, o Teorema 2.7.3 implica que

$$v_0 \in \text{Inv}_{\tilde{\pi}_0}(Y) = \{0\}.$$

Por outro lado,

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{c_n} \left(c_n - \frac{c_n}{n} \right) \leq \|v_n(0)\| = \frac{1}{c_n} \|u_n(0)\| \leq \frac{c_n}{c_n} = 1. \quad (3.21)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.21), temos que $\|v_0\| = 1$, o que é uma contradição. Portanto, a aplicação ϕ é $\mathcal{S}$ -contínua. Pelos Teoremas 3.3.2 e 2.7.1, temos que

$$h(\pi, \{0\}) = h(\pi_0, \{0\}) = h(\pi_1, \{0\}) = \Sigma^m.$$

O teorema está demonstrado. □

Definição 3.4.2. *Sejam U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Dizemos que um ponto de equilíbrio $x_0 \in U$ do fluxo gerado pela equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ é hiperbólico se a matriz jacobiana de f no ponto x_0 , $f'(x_0)$, tem todos os autovalores com parte real não nula.*

Proposição 3.4.3. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 . Seja π o fluxo local gerado pelas soluções de*

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.22)$$

Suponhamos que 0 seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de π . Então, o conjunto $\{0\}$ é π -invariante isolado, $h(\pi, \{0\})$ está definido e $h(\pi, \{0\}) = \Sigma^k$, sendo k o número de autovalores de $f'(0)$, contando multiplicidades, com parte real positiva.

Demonstração. Como f é de classe C^1 , segue que f é localmente lipschitziana. Assim, o Teorema 3.4.1 implica que $\{0\}$ é um conjunto π -invariante isolado, $h(\pi, \{0\})$ está definido e $h(\pi, \{0\}) = \Sigma^k$, sendo k o número de autovalores com parte real positiva de $f'(0)$. $\square$

Teorema 3.4.4. *Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Suponhamos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ seja um ponto de equilíbrio hiperbólico do fluxo π gerado pela equação diferencial $\dot{x} = g(x)$. Então $\{x_0\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$h(\pi, \{x_0\}) = \Sigma^k,$$

sendo k o número de autovalores, contando multiplicidades, com parte real positiva de $g'(x_0)$.

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a função de classe C^1 dada por $f(x) = g(x + x_0)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Notemos que $f'(0) = g'(x_0)$. Logo, a origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico do fluxo π_f gerado pela equação diferencial

$$\dot{x} = f(x). \tag{3.23}$$

Aplicando a Proposição 3.4.3, segue que $\{0\}$ é um conjunto π_f -invariante isolado, $h(\pi_f, \{0\})$ está definido e $h(\pi_f, \{0\}) = \Sigma^k$.

Observemos que uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (3.23) definida em algum intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, a função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(t) = \varphi(t) + x_0$, $t \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial $\dot{x} = g(x)$. Assim, concluímos que $\{x_0\}$ é um conjunto π -invariante, $h(\pi, \{x_0\})$ está definido e $h(\pi, \{x_0\}) = h(\pi_f, \{0\}) = \Sigma^k$. Isto demonstra a proposição. $\square$

3.5 A propriedade de adição e de continuação e a existência de solução limitada

A exposição a seguir é baseada em [4].

Seja $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e seja π o fluxo gerado pelas soluções do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - 1.\end{aligned}\tag{3.24}$$

É fácil ver que $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são pontos de equilíbrio do fluxo π . Mas poderíamos perguntar: existe alguma outra órbita limitada?

Para responder esta pergunta, comecemos realizando a seguinte mudança de variáveis:

$$z_1 := \epsilon^2 x_1, \quad z_2 := \epsilon^3 x_2 \text{ e } \tau = \frac{t}{\epsilon},$$

onde $\epsilon > 0$. Nas novas variáveis, temos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{d\tau} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= z_1^2 - \epsilon^4.\end{aligned}\tag{S_\epsilon}$$

Para cada $\epsilon > 0$, denotemos por π_ϵ o fluxo gerado pelo sistema de equações diferenciais (S_ϵ) . Notemos que, se $\epsilon \neq 0$, os pontos de equilíbrio de π_ϵ serão $(-\epsilon^2, 0)$ e $(\epsilon^2, 0)$.

Afirmamos que existe uma solução limitada de π_ϵ distinta dos pontos de equilíbrio. para mostrar este fato, utilizamos as propriedades básicas do índice descritas no Capítulo 3 e o Teorema 3.4.4.

Notemos que, em (S_ϵ) , faz sentido considerar o caso $\epsilon = 0$. Nesse caso, a origem é o único ponto de equilíbrio de π_0 , o fluxo gerado pelo sistema

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{d\tau} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= z_1^2.\end{aligned}\tag{S_\epsilon}$$

Afirmamos que $\{(0, 0)\}$ é a única órbita limitada de π_0 . Justifiquemos esse fato. Suponhamos que exista uma órbita limitada de π_0 não trivial. Logo, existe um $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que o conjunto $\{z_0 \pi \tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ é limitado em $\mathbb{R}^2$. Dado $\tau \in \mathbb{R}$, denote $z_0 \pi \tau$ por $(z_0 \phi \tau, z_0 \psi \tau)$. Como

$$\frac{d}{d\tau} z_0 \psi \tau = (z_0 \phi \tau)^2,$$

temos que $z_0\psi\tau$ é não decrescente. Portanto, os limites

$$l_1 := \lim_{\tau \rightarrow \infty} z_0\psi\tau \text{ e } l_2 := \lim_{\tau \rightarrow -\infty} z_0\psi\tau$$

existem. Suponhamos que $l_1 \neq 0$. Este fato, juntamente com

$$\frac{d}{d\tau} z_0\phi\tau = z_0\psi\tau,$$

implicam que a inclinação da reta tangente ao gráfico de $z_0\phi\tau$ não se torna horizontal quando $\tau \rightarrow \infty$. Portanto, $z_0\phi\tau$ é ilimitada, o que é uma contradição. Assim, $l_1 = 0$.

De modo análogo, conclui-se que $l_2 = 0$. Logo, $z_0\psi\tau$ é uma função constante. Mais ainda, $z_0\psi\tau = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$ e segue que $z_0\phi\tau = 0$ para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Concluimos que, dada uma vizinhança compacta N da origem, a única órbita limitada contida em N é $\{(0, 0)\}$. Em particular, $\{(0, 0)\}$ é um conjunto invariante isolado.

Seja $\epsilon \in (0, 1]$. Consideremos a seguinte perturbação do sistema de equações diferenciais (S_0) :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= z_1^2 + \epsilon^4. \end{aligned} \tag{\tilde{S}_\epsilon}$$

Denotemos por $\tilde{\pi}_\epsilon$ o fluxo gerado pelo sistema de equações diferenciais $(\tilde{S}_\epsilon)$. É claro que $\tilde{\pi}_0 = \pi$. Argumentos análogos aos utilizados acima mostram que, dado um conjunto compacto $N \subset \mathbb{R}^2$, temos que N é uma vizinhança isolante e

$$\text{Inv}_{\tilde{\pi}_\epsilon}(N) = \emptyset \text{ para todo } \epsilon \in (0, 1].$$

Nesse caso, um par índice em N é $(\emptyset, \emptyset)$, e seu índice de Conley é o trivial:

$$h(\text{Inv}_{\tilde{\pi}_\epsilon}(N), \tilde{\pi}_\epsilon) = \bar{0}. \tag{3.25}$$

Consideremos a família de fluxos $(\tilde{\pi}_\epsilon)_{\epsilon \in [0, 1]}$. Segue que a família $(\tilde{\pi}_\epsilon)_{\epsilon \in [0, 1]}$ é $\mathcal{S}$ -contínua. Logo a Propriedade de Continuação, dada pelo Teorema 3.3.2, implica que, se $N \subset \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança isolante de $\{(0, 0)\}$, então N é uma vizinhança isolante

para $\tilde{K}_\epsilon = \text{Inv}_{\tilde{\pi}_\epsilon}(N) = \emptyset$ e

$$\bar{0} = h(\tilde{\pi}_\epsilon, \emptyset) = h(\tilde{\pi}_0, \{(0, 0)\}). \quad (3.26)$$

Também, a família $(\pi_\epsilon)_{\epsilon \in [0,1]}$ é $\mathcal{S}$ -contínua e, portanto,

$$h(\pi_0, \{(0, 0)\}) = h(\pi_\epsilon, \text{Inv}_{\pi_\epsilon}(N)) \quad (3.27)$$

De (3.26) e (3.27), segue que

$$h(\text{Inv}_{\pi_\epsilon}(N), \pi_\epsilon) = \bar{0}.$$

Podemos supor que N contém os pontos de equilíbrio de π_ϵ , $(-\epsilon^2, 0)$ e $(\epsilon^2, 0)$. Além disso,

$$DF(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2z_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, os autovalores de $DF(\epsilon^2, 0)$ são $\epsilon\sqrt{2}$ e $-\epsilon\sqrt{2}$. Segue do Teorema 3.4.4 que $K_+ := \{(\epsilon^2, 0)\}$ é um conjunto invariante isolado e que $h(K_+, \pi_\epsilon) = \Sigma^1$. Do mesmo modo, $K_- := \{(-\epsilon^2, 0)\}$ é um conjunto invariante isolado.

Suponhamos que $K := \text{Inv}_{\pi_\epsilon}(N) = \{(-\epsilon^2, 0), (\epsilon^2, 0)\}$. Pelo Teorema 3.1.1, temos

$$h(K, \pi_\epsilon) = h(K_+, \pi_\epsilon) \vee h(K_-, \pi_\epsilon).$$

Como $h(K, \pi_\epsilon)$ é o trivial e $h(K_+, \pi_\epsilon) = \Sigma^1$, temos uma contradição. Logo, no conjunto N , existe uma solução limitada de π_ϵ distinta dos pontos de equilíbrio.

3.6 Equações diferenciais assintoticamente lineares

Teorema 3.6.1. *Suponhamos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função localmente lipschitziana que leva conjunto limitado em conjunto limitado. Suponhamos que exista uma matriz B tal que*

$$\frac{f(x) - Bx}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e seja π o semifluxo local em $\mathbb{R}^n$ gerado pelas soluções da equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + f(x).$$

Definamos $L := A + B$ e suponhamos que todos os autovalores de L tenham parte real não nula. Se K_∞ denota a reunião de todas as órbitas completas limitadas de π e k é o número de autovalores de L com parte real positiva, então $(\pi, K_\infty) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $h(\pi, K_\infty) = \Sigma^k$.

Demonstração. Para cada $\tau \in [0, 1]$, definamos $g_\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$g_\tau(x) = (1 - \tau)(f(x) - Bx).$$

É claro que g_τ , $\tau \in [0, 1]$, é localmente lipschitziana. Seja π_τ o semifluxo local em $\mathbb{R}^n$ gerado pelas soluções de

$$\dot{x} = Lx + g_\tau(x)$$

e seja K_τ o conjunto formado pela reunião de todas as órbitas completas limitadas de π_τ . Observemos que π_1 é o fluxo linear gerado pelas soluções de $\dot{x} = Lx$. Mostremos que a função $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\Phi(\tau) = (\pi_\tau, K_\tau)$ está bem definida e é $\mathcal{S}$ -contínua no sentido da Definição 3.3.1.

Para provar isto, é suficiente mostrar que existe um conjunto limitado $N \subset \mathbb{R}^n$ tal que $K_\tau \subset N$ para todo $\tau \in [0, 1]$.

Suponhamos que não exista uma vizinhança N com esta propriedade. Então existem uma seqüência $(\tau_n)_n$ em $[0, 1]$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, soluções completas limitadas x_n de $\pi_n := \pi_{\tau_n}$ satisfazendo

$$c_n := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x_n(t)\| \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ e } \|x_n(0)\| > c_n - 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\tilde{g}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{g}_n(x) = c_n^{-1} g_{\tau_n}(c_n x).$$

Segue que $\tilde{g}_n$ é localmente lipschitziana para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\tilde{\pi}_n$ o semifluxo local em $\mathbb{R}^n$ gerado pelas soluções de

$$\dot{v} + Lv = \tilde{g}_n(v). \quad (\tilde{S}_n)$$

Definamos $v_n(t) := c_n^{-1}x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Temos que v_n é uma solução completa de $\tilde{\pi}_n$. De fato, para $t, t_0 \in \mathbb{R}$, a Formula de Variação dos Parâmetros implica que

$$x_n(t) = e^{L(t-t_0)} x_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} g_{\tau_n}(x_n(s)) ds.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{1}{c_n} x_n(t) = e^{-L(t-t_0)} \frac{1}{c_n} x_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} \frac{1}{c_n} g_{\tau_n}(c_n v_n(s)) ds \\ &= e^{-L(t-t_0)} v_n(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} \tilde{g}_n(v_n(s)) ds. \end{aligned}$$

Seja $Y := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq 1\}$. É claro que $v_n(t) \in Y$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Podemos assumir que existe um $v_0 \in Y$ tal que $v_n(0) \rightarrow v_0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Mostremos que, para todo $\rho > 0$, temos

$$\sup_{\|v\| < \rho} \|\tilde{g}_n(v)\| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Fixemos $\rho > 0$ e seja $\epsilon > 0$. Então existe um $r > 0$ tal que

$$\|f(x) - Bx\| \leq \epsilon \|x\| \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| > r.$$

Mais ainda, existe um $M = M(r) \geq \|B\|r$ tal que

$$\|f(x)\| \leq M \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ com } \|x\| \leq r.$$

Notemos que

$$\|\tilde{g}_n(v)\| = (1 - \tau_n) c_n^{-1} \|f(c_n v) - B(c_n v)\| \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $c_n \|v\| \leq r$, temos

$$\|\tilde{g}_n(v)\| \leq c_n^{-1} (\|f(c_n v)\| + \|B(c_n v)\|) \leq c_n^{-1}(M + M) = 2Mc_n^{-1}.$$

Por outro lado, se $n \in \mathbb{N}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ são tais que $c_n \|v\| > r$, temos

$$\|\tilde{g}_n(v)\| \leq c_n^{-1} \epsilon \|c_n v\| = \epsilon \|v\| \leq \epsilon \rho.$$

Isto implica (3.28). Em particular, tomemos $\rho = 2$ e definamos $V := \{x : \|x\| \leq 2\}$. A equação (3.28) implica que $\tilde{g}_n|_V$ converge uniformemente para a função nula. O Teorema 1.1.6 implica que

$$\tilde{\pi}_n \rightarrow \tilde{\pi}_0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

sendo $\tilde{\pi}_0 := \pi_1|_V$. Como $v_n(0) \in \text{Inv}_{\tilde{\pi}_n}(Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o Teorema 2.4.5(ii) implica que $v_0 \in \text{Inv}_{\pi_1}$. Além disso, o Teorema 2.7.3 implica que

$$v_0 \in \text{Inv}_{\pi_1}(Y) = \{0\}.$$

Por outro lado,

$$\|v_n(0)\| = \frac{1}{c_n} \|u_n(0)\| > \frac{1}{c_n} (c_n - 1) = 1 - \frac{1}{c_n}.$$

Logo, $\|v_0\| \geq 1$, o que é uma contradição. Portanto, a aplicação Φ é $\mathcal{S}$ -contínua. O Teoremas 3.3.2 e 2.7.3 implicam que

$$\Sigma^k = h(\pi_1, K_1) = h(\pi_0, K_0) = h(\pi, K_\infty).$$

O teorema está demonstrado. □

3.7 Soluções de onda de choque e propriedade de irreducibilidade

Utilizando a propriedade de irreducibilidade e o Teorema 3.6.1, apresentaremos um resultado de existência de perfil viscoso para sistema de leis de conservação assintoticamente lineares. Os resultados descritos nesta Seção encontram-se em [11].

Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 e consideremos a equação

$$D_t(h(u)) + D_x(f(u)) = 0, \quad (3.29)$$

sendo que D_t e D_x representam as derivadas parciais em relação a t e x respectivamente e $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^n$ é uma função de $t \in \mathbb{R}$ e de $x \in \mathbb{R}$.

A equação (3.29) é chamada *sistema de leis de conservação*. Na maioria dos casos, a função h é tomada como função identidade.

Sejam $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$. Por uma *solução de onda de choque* de (3.29), denotada por (u_0, u_1, s) , entenderemos uma função $\bar{u} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ constante por partes definida por

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} u_0, & \text{para } x - st < 0 \\ u_1, & \text{para } x + st > 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

e que satisfaz a condição

$$s \cdot (h(u_1) - h(u_0)) = f(u_1) - f(u_0). \quad (3.31)$$

A condição acima é freqüentemente chamada *condição de Rankine-Hugoniot* e o número s é chamado *velocidade da onda*.

A equação (3.29) é uma equação diferencial parcial de primeira ordem. Sejam $\epsilon_0 > 0$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e P uma aplicação suave com domínio em $\mathbb{R}^n$ e que assume valores no conjunto das matrizes definidas positivas. Consideremos uma perturbação de (3.29) através da adição de um *termo de viscosidade* $\epsilon D_x(P D_x u)$:

$$D_t(h(u)) + D(f(u)) = \epsilon D_x(P(u) \cdot D_x u). \quad (3.32)$$

Uma função $(t, x, \epsilon) \mapsto \tilde{u}(t, x, \epsilon)$ é chamada *solução de onda progressiva de (3.32)* se existem $s \in \mathbb{R}$ e uma aplicação $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tais que

$$\tilde{u}(t, x, \epsilon) := u((x - st)/\epsilon)$$

e, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $\tilde{u}(\cdot, \cdot, \epsilon)$ satisfaz (3.32) no sentido clássico.

Apresentaremos a seguir uma condição necessária e suficiente para que uma dada função u gere uma solução de onda progressiva.

Lema 3.7.1. *A aplicação $\tilde{u}$ é uma solução de onda progressiva de (3.32) se, e somente se, a aplicação u satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$\dot{u} = P^{-1}(u)(-s \cdot h(u) + f(u) + c), \quad (3.33)$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e seja $s \in \mathbb{R}$. Definamos $\tilde{u}(t, x, \epsilon) := u((x - st)/\epsilon)$ e suponhamos que $\tilde{u}$ seja uma solução de (3.32). Portanto, $D_t(h(\tilde{u})) + D_x f(\tilde{u}) = \epsilon D_x(P(\tilde{u}) \cdot D_x \tilde{u})$. Calculando as derivadas, temos

$$\begin{aligned} Dh(\tilde{u}(t, x)) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, x) + Df(\tilde{u}(t, x)) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) &= \epsilon DP(\tilde{u}(t, x)) \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, x) \right]^2 \\ &\quad + \epsilon P(\tilde{u}(t, x)) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, x) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} -s\epsilon^{-1} Dh\left(u\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right)\right) u'\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right) + \epsilon^{-1} Df\left(u\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right)\right) u'\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right) \\ = \epsilon^{-1} DP\left(u\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right)\right) \left[u'\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right)\right]^2 + \epsilon^{-1} P\left(u\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right)\right) u''\left(\frac{x-st}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de parâmetros $\tau = (x - st)/\epsilon$, temos

$$-s Dh(u(\tau)) u'(\tau) + Df(u(\tau)) u'(\tau) = DP(u(\tau)) (u'(\tau))^2 + P(u(\tau)) u''(\tau). \quad (3.34)$$

Observemos agora que a equação (3.34) é a equação (3.33) quando derivada de ambos os lados em relação a τ . Segue u é solução de (3.34) se, e somente se, u é solução de

(3.33). Isto significa que $\tilde{u}$ é solução de onda progressiva se, e somente se, u satisfaz (3.33), o que termina a demonstração do lema. $\square$

A solução de onda de choque (u_0, u_1, s) de (3.29) é dita *admissível* se existe uma solução de onda progressiva $\tilde{u}(t, x, \epsilon)$ de (3.32) tal que a família

$$\tilde{u}_\epsilon(t, x) := \tilde{u}(t, x, \epsilon) = u\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right)$$

converge pontualmente para a solução da equação de choque (3.30) quando $\epsilon \rightarrow 0$. Neste caso, a função u é chamada *perfil viscoso da onda de choque*.

Lema 3.7.2. *Uma solução de onda choque (u_0, u_1, s) é admissível se, e somente se, existe uma solução u de (3.33) para algum $c \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$u(\tau) \rightarrow u_0 \quad \text{quando} \quad \tau \rightarrow -\infty \quad e \quad u(\tau) \rightarrow u_1 \quad \text{quando} \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Consideremos uma solução de onda de choque admissível (u_0, u_1, s) e seu perfil viscoso associado u . Da hipótese de admissibilidade,

$$u\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right) \rightarrow \bar{u}(t, x) \quad \text{quando} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.35)$$

Logo, se $x - st < 0$, (3.35) implica que $u(\tau) \rightarrow u_0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$. Se $x - st > 0$, então (3.35) implica que $u(\tau) \rightarrow u_1$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, suponhamos que exista uma solução u de (3.33) e $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^n$ tais que $u(\tau) \rightarrow u_0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$ e $u(\tau) \rightarrow u_1$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Se $x - st < 0$, então $(x - st)/\epsilon \rightarrow -\infty$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Pela nossa hipótese, isso implica que $u((x - st)/\epsilon) \rightarrow u_0 = \bar{u}(t, x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Analogamente, se $x - st > 0$, então $u((x - st)/\epsilon) \rightarrow u_1 = \bar{u}(t, x)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$. Isto prova o lema. $\square$

Nas condições do Lema 3.7.2, os pontos u_0 e u_1 devem ser pontos críticos de (3.33), ou seja,

$$c = s \cdot h(u_0) - f(u_0) = s \cdot h(u_1) - f(u_1).$$

Usando a teoria desenvolvida no capítulo, apresentaremos condições que garantam que, para um dado $(v, s) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, exista um vetor $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{v} \neq v$, tal que $(v, \tilde{v}, s)$ ou $(\tilde{v}, v, s)$ seja uma solução de onda de choque admissível.

Teorema 3.7.3. *Assumamos as seguintes hipóteses:*

(H1) *Sejam $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e $u \mapsto P(u)$ uma aplicação de classe C^2 que assume valores no conjunto das matrizes definidas positivas. Escrevamos $f := \nabla F$ e $h := \nabla H$.*

(H2) *Existem três matrizes quadradas L_1 , L_2 e L_3 de ordem n tais que*

$$P^{-1}(u) \rightarrow L_1 \quad \text{quando} \quad \|u\| \rightarrow \infty$$

$$\frac{h(u) - L_2 u}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|u\| \rightarrow \infty$$

$$\frac{f(u) - L_3 u}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \|u\| \rightarrow \infty.$$

(H3) *Seja $(v, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um ponto arbitrário e definamos*

$$g(u) = g(u, v, s) = P^{-1}(u)(f(u) - f(v) + s \cdot h(v) - s \cdot h(u)).$$

Definamos $A_0 = g'(v)$ e $A_\infty = L_1(L_3 - sL_2)$. Suponhamos que a parte real dos autovalores de A_0 e A_∞ seja não nula. Denotemos por $d^+(A_0)$ e $d^+(A_\infty)$, respectivamente, o número de autovalores com parte real positiva de A_0 e A_∞ e suponhamos que $d^+(A_0) \neq d^+(A_\infty)$. Além disso, suponhamos também que o conjunto

$$B(v, s) = \{u \in \mathbb{R}^n : f(u) - s \cdot h(u) = f(v) - s \cdot h(v)\}$$

seja discreto.

Então existe um vetor $\tilde{v} \neq v$ tal que (v, v, s) satisfaz a condição Rankine-Huguniot (3.29) e de modo que $(v, \tilde{v}, s)$ ou $(\tilde{v}, v, s)$ é uma solução de onda de choque admissível.

Demonstração. Consideremos a equação diferencial ordinária

$$\dot{u} = g(u), \tag{3.36}$$

sendo g a função definida em (H3) e π_g o correspondente semifluxo local em $\mathbb{R}^n$.

Afirmamos que π_g é do tipo gradiente com respeito à função

$$V(u) = -F(u) + s \cdot H(u) + \langle f(v) - s \cdot h(v), u \rangle.$$

Mostraremos este fato em dois passos.

Seja u uma solução de (3.36). Mostremos que a função V é não crescente ao longo de u . De fato, derivando $V \circ u$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V \circ u)(t) &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x^j}(u(t)) \frac{du_j}{dt}(t) + s \cdot \sum_{j=1}^n \frac{H_j}{\partial x^j}(u(t)) \frac{du_j}{dt}(t) + \left\langle f(v) - s \cdot h(v), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x^j}(u(t)) \cdot \frac{du_j}{dt}(t) + s \cdot \sum_{j=1}^n \frac{H_j}{\partial x^j}(u(t)) \cdot \frac{du_j}{dt}(t) + \sum_{j=1}^n (f_j(v) - s \cdot h_j(v)) \cdot \frac{du_j}{dt}(t) \\ &= - \sum_{j=1}^n (f_j(u(t)) - f_j(v) - s \cdot h_j(u(t)) - s \cdot h_j(v)) \cdot \frac{du_j}{dt}(t) \\ &= - \left\langle f(u(t)) - f(v) - s \cdot h(u(t)) + s \cdot h(v), \frac{du}{dt}(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Então

$$\frac{d}{dt}(V \circ u)(t) = - \langle \xi(t), P^{-1}(u(t)) \xi(t) \rangle, \quad (3.37)$$

sendo $\xi(t) := f(u(t)) - f(v) - s \cdot h(u(t)) + s \cdot h(v)$. Como a matriz $P^{-1}(u(t))$ também é definida positiva, segue que

$$\frac{d}{dt}(V \circ u)(t) \leq 0$$

para todo $t \in I$, sendo I o intervalo maximal da solução u . Logo, $t \mapsto V(u(t))$ é não crescente.

Seja u uma solução de (3.36) por u_0 . Suponhamos que $V \circ u$ seja constante. Mostremos que u_0 é ponto de equilíbrio de π_g . De fato, se $V \circ u$ é constante, então

$$\frac{d}{dt}(V \circ u)(t) = 0$$

para todo $t \in I$, sendo I o intervalo maximal da solução u . De (3.37), temos que

$$f(u(t)) - f(v) - s \cdot h(u(t)) + s \cdot h(v) = 0 \text{ para todo } t \in I.$$

Pela definição de g , isto implica que u_0 é ponto de equilíbrio. Isto prova nossa afirmação.

Seja J_g o conjunto de todas as órbitas limitadas de π_g . Mostremos que

$$\frac{g(u) - A_\infty u}{\|u\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Para tanto, definamos a aplicação $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $E(u) = L_1 u - P^{-1}(u)$. Pela hipótese (H2), temos que $E(u) \rightarrow 0$ quando $\|u\| \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{g(u) - A_\infty u}{\|u\|} &= \frac{1}{\|u\|} (P^{-1}(u)(f(u) - f(v) + s \cdot h(v) - s \cdot h(u)) - L_1(L_3 - s \cdot L_2)u) \\ &= \frac{1}{\|u\|} (P^{-1}(u)(f(u) - f(v) + s \cdot h(v) - s \cdot h(u)) - (P^{-1}(u) + E(u))(L_3 - s \cdot L_2)u) \\ &= P^{-1}(u) \cdot \left(\frac{f(u) - L_3 u}{\|u\|} - s \cdot \frac{h(u) - L_2 u}{\|u\|} + \frac{s \cdot h(v) - f(v)}{\|u\|} \right) \\ &\quad + E(u) \cdot (L_3 - s \cdot L_2) \left(\frac{u}{\|u\|} \right). \end{aligned}$$

Pela hipótese (H2), segue que

$$\frac{g(u) - A_\infty u}{\|u\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Utilizando o Exemplo 3.6.1, é fácil ver que $h(\pi_g, J_g)$ está definido e $h(\pi_g, J_g) = \Sigma^d$, sendo $d = d^+(A_\infty)$. Mais ainda, como $g(v) = 0$, a hipótese (H3) e o Exemplo 3.6.1 implicam que $\{v\}$ é um conjunto π_g -invariante isolado e $h(\pi_g, \{v\}) = \Sigma^{d'}$, sendo $d' = d^+(A_0)$.

Afirmamos que existem um equilíbrio $\tilde{v} \neq v$ de π_g e uma solução completa u de π_g tais que $u(\tau) \rightarrow v$ quando $\tau \rightarrow -\infty$ e $u(\tau) \rightarrow \tilde{v}$ quando $\tau \rightarrow \infty$ ou então tais que $u(\tau) \rightarrow \tilde{v}$ quando $\tau \rightarrow -\infty$ e $u(\tau) \rightarrow v$ quando $\tau \rightarrow \infty$.

Com efeito, o Teorema 3.2.4 implica que existe uma solução limitada $t \mapsto x(t)$ em $(-\infty, \infty)$ tal que $x_0 = x(0) \neq v$ e $x(t) \rightarrow v$ quando $t \rightarrow -\infty$ ou $x(t) \rightarrow v$ quando $t \rightarrow \infty$.

A hipótese (H1) implica que π_g é do tipo gradiente. Logo, pelo Teorema 2.2.10, os conjuntos $\omega(x_0)$ e $\omega^*(x_0)$ são não vazios e contêm apenas pontos de equilíbrio de π_g . Além disso, afirmamos que o campo g possui apenas um número finito de singularidades em qualquer conjunto compacto K que contenha $x([0, \infty))$. De fato, assumamos que

a afirmação seja falsa. A compacidade de K garante a existência de um ponto de equilíbrio de π_g que também é ponto de acumulação de pontos de equilíbrio de π_g . Mas isto contradiz o fato de $B(v, s)$ ser discreto. Isto prova a afirmação.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $x(t) \rightarrow v$ quando $t \rightarrow \infty$. Mostremos que $\omega^*(x_0)$ é um conjunto unitário. Assumamos que existam pelo menos dois pontos distintos, x_1 e x_2 , no conjunto $\omega^*(x_0)$.

Consideremos uma seqüência $(t_n)_n$ em $(-\infty, 0)$ tal que $t_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Seja $d_2 := \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$. Como a solução é limitada, temos que existe um ponto $x_3 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(t_{n_m}) \rightarrow x_3$ quando $m \rightarrow \infty$ para alguma subseqüência $(x(t_{n_m}))_m$ de $(x(t_n))_n$. Logo, $x_3 \in \omega^*(x_0)$. Além disso, $x_3 \neq x_i$, $i = 1, 2$.

Com isso, mostramos indutivamente que a existência de dois pontos distintos em $\omega^*(x_0)$ implica a existência de uma infinidade de pontos distintos em $\omega^*(x_0)$. Pelo Teorema 2.2.10, todos estes pontos são equilíbrios de π_g . Como estes pontos formam um conjunto limitado, existe um equilíbrio y que é limite de uma seqüência de pontos de equilíbrio distintos. Isto contradiz o fato de $B(v, s)$ ser discreto, o que demonstra que o conjunto $\omega^*(x_0)$ é unitário.

Seja $\tilde{v} \neq v$ o único ponto de $\omega^*(x_0)$. Temos, portanto,

$$x(t) \rightarrow \tilde{v} \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

Logo, $(\tilde{v}, v, s)$ é uma solução de onda de choque admissível. □

A equação de Morse

Neste capítulo, apresentamos a Equação de Morse associada a uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado.

Iniciaremos o capítulo apresentando a decomposição de Morse mais simples: o par repulsor-atrator. Em seguida, demonstramos resultados básicos. Na Seção 4.2, definimos decomposição de Morse e apresentamos suas propriedades básicas. Na Seção 4.3, o conceito de par bloco para um par atrator-repulsor é apresentado. Fazendo uso do trio-índice, construímos a Equação de Morse associada a uma decomposição de Morse. Finalizamos o capítulo com uma aplicação da Equação de Morse para obter resultados de multiplicidade de soluções.

Neste capítulo, X denota um espaço métrico e π , um semifluxo local em X . A exposição a seguir é baseada em [10] e [12].

4.1 Par atrator-repulsor

Definição 4.1.1. *Seja $Y \subset X$ tal que $\omega_x = \infty$ para todo $x \in Y$. O conjunto*

$$\omega(Y) := \bigcap_{t \geq 0} \text{Cl}(Y\pi[t, \infty))$$

será chamado conjunto ω -limite dos elementos de Y .

Proposição 4.1.2. *Seja $Y \subset X$ um subconjunto de X . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (1) *Para todo $y \in X$, temos $y \in \omega(Y)$ se, e somente se, existem seqüências $(x_n)_n$ em Y e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n\pi t_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$.*
- (2) *O conjunto $\omega(Y)$ é fechado.*
- (3) *Se $\text{Cl}(Y\pi[0, \infty))$ é um conjunto compacto, então $\omega(Y)$ é compacto e invariante.*

Demonstração. Suponhamos que $y \in \omega(Y)$ e seja $(\tau_n)_n$ uma seqüência em $[0, \infty)$ com $\tau_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe um $y_n \in Y\pi[\tau_n, \infty)$ tal que $d(y, y_n) < 1/n$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem um $x_n \in Y$ e um $t_n \geq \tau_n$ tais que $y_n = x_n\pi t_n$. Como $\tau_n \rightarrow \infty$, segue que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Reciprocamente, suponhamos que existam seqüências $(x_n)_n$ em Y e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \rightarrow \infty$ e $x_n\pi t_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Mostremos que $y \in \omega(Y)$.

Fixemos $t_0 \in [0, \infty)$. Dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $t_n \geq t_0$ e

$$d(x_n\pi t_n, y) < \epsilon. \tag{4.1}$$

Portanto, $x_n\pi t_n \in Y\pi[t_0, \infty)$ para todo $n \geq n_0$ e (4.1) implica que $y \in \text{Cl}(Y\pi[t_0, \infty))$. Segue que

$$y \in \bigcap_{t \geq 0} \text{Cl}(Y\pi[t, \infty)).$$

A demonstração de (1) está completa.

A definição de conjunto ω -limite de Y claramente implica que $\omega(Y)$ é fechado, o que mostra (2).

Mostremos (3). Suponhamos que $\text{Cl}(Y\pi[0, \infty))$ seja compacto. Por (2), o conjunto $\omega(Y)$ é fechado. Além disso, $\omega(Y) \subset \text{Cl}(Y\pi[0, \infty))$. Portanto, $\omega(Y)$ é compacto.

Afirmamos que $\omega(Y)$ é um conjunto positivamente π -invariante. De fato, seja $x \in \omega(Y)$. Devemos mostrar que $x\pi s \in \omega(Y)$ para todo $s \in [0, \omega_x)$. Como $x \in \omega(Y)$, segue de (1) que existem seqüências $(x_n)_n$ em Y e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que

$$t_n \rightarrow \infty \text{ e } x_n\pi t_n \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Notemos que $\omega_{x_n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A continuidade do semifluxo π implica que

$$x_n\pi(t_n + s) \rightarrow x\pi s \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Além disso, $t_n + s \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Por (1), temos que $x\pi s \in \omega(Y)$. A afirmativa está demonstrada.

Como $x\pi[0, \omega_x) \subset \omega(Y)$ para todo $x \in \omega(Y)$, segue da Proposição 2.2.5 que $\omega_x = \infty$ para todo $x \in \omega(Y)$.

Afirmamos que $\omega(Y)$ é um conjunto negativamente π -invariante. De fato, seja $x \in \omega(Y)$. Devemos mostrar que existe uma solução $\sigma : (-\infty, 0] \rightarrow X$ por x tal que $\sigma((-\infty, 0]) \subset \omega(Y)$. Segue de (1) que existem seqüências $(x_n)_n$ em Y e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que

$$t_n \rightarrow \infty \text{ e } x_n\pi t_n \rightarrow x \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $\text{Cl}(Y\pi[0, \infty))$ é compacto e $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, existem subsequências $(x_n^1)_n$ de $(x_n)_n$ e $(t_n^1)_n$ de $(t_n)_n$ satisfazendo $t_n^1 \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n^1\pi(t_n^1 - 1) \rightarrow x_{-1}$ quando $n \rightarrow \infty$ para algum $x_{-1} \in \text{Cl}(Y\pi[0, \infty))$. Além disso, (1) implica que $x_{-1} \in \omega(Y)$. Indutivamente, dado $k \in \mathbb{N}$, encontramos subsequências $(x_n^k)_n$ de $(x_n^{k-1})_n$ e $(t_n^k)_n$ de $(t_n^{k-1})_n$ tais que $t_n^k \geq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n^k\pi(t_n^k - k) \rightarrow x_{-k}$ quando $k \rightarrow \infty$ para algum $x_{-k} \in \omega(Y)$.

Como $\omega_{x_{-k}} = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $x_{-k}\pi t$ está definido para todo $t \in [0, k]$.

Definamos $\sigma_{-k} : [-k, 0] \rightarrow \omega(Y)$ por $\sigma_{-k}(t) = x_{-k}\pi(t + k)$. Segue que $\sigma_{-k}(0) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, além disso, $\sigma_{-k}(t) = \sigma_{-k'}(t)$ para $0 \leq k < k'$ e $k \leq t \leq 0$.

Definamos $\sigma : (-\infty, 0] \rightarrow X$ por $\sigma(t) = \sigma_{-k}(t)$ para $t > -k$. Temos que $\sigma(s) \in \omega(Y)$ para todo $s \in (-\infty, 0]$, ou seja, $\omega(Y)$ é negativamente invariante.

As duas afirmações mostram que $\omega(Y)$ é um conjunto invariante, o que encerra a demonstração do teorema. $\square$

Definição 4.1.3. *Seja S um subconjunto compacto de X (não necessariamente isolado) e π -invariante. Um subconjunto $A \subset S$ é chamado atrator (em S) se existe uma vizinhança U de A em X tal que $\omega(U \cap S) = A$. Se A é um atrator, então o conjunto*

$$A^* := \{x \in S : \omega(x) \cap A = \emptyset\}$$

é chamado repulsor dual de A relativamente a S e o par (A^, A) é chamado par repulsor-atrator em S .*

Observação 4.1.4. *Como S é compacto e π -invariante, a Proposição 2.2.5 implica que $\omega_x = \infty$ para todo $x \in S$. Deste modo, $\omega(U \cap S)$ está bem definido.*

Proposição 4.1.5. *Seja (A^*, A) um par repulsor-atrator em S . Então valem as seguintes propriedades:*

- (1) *Se V é um conjunto aberto em X com $V \supset A$, então existe um $t_0 = t_0(V) \in [0, \infty)$ tal que $x\pi t \in V$ para todo $x \in U \cap S$ e $t \geq t_0$;*
- (2) *Se B é um conjunto fechado disjunto de A , então, para todo $\epsilon > 0$, existe um $t_0 = t_0(\epsilon)$ tal que $d(x, A^*) < \epsilon$ sempre que $x \in S$ e $t \geq t_0$ são tais que $x\pi t \in B$.*

Demonstração. Mostremos (1). Suponhamos que o resultado seja falso. Então existem um aberto $V \supset A$ e seqüências $(x_n)_n$ em $U \cap S$ e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e $x_n\pi t_n \notin V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sem perda de generalidade, a compacidade de S implica que a seqüência $(x_n\pi t_n)_n$ converge para algum $y \in S \setminus V$. A proposição 4.1.2 implica que $y \in \omega(U \cap S) = A$, o que é uma contradição.

Para mostrar (2), suponhamos que o resultado não seja válido. Então existem um conjunto fechado B , com $B \cap A = \emptyset$, um $\epsilon > 0$, e seqüências $(x_n)_n$ em S e $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tais que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$x_n\pi t_n \in B \quad \text{e} \quad d(x_n, A^*) \geq \epsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Podemos assumir que existe um $x \in S$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $d(x, A^*) \geq \epsilon$. Logo, $x \notin A^*$ e, conseqüentemente,

$$\omega(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Logo $x_n \pi t_1 \in U \cap S$ para algum $t_1 \geq 0$. A continuidade de π implica que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica

$$x_n \pi t_1 \in U \cap S \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Definindo $V := X \setminus B$ e $t_0 = t_0(V)$ como em (1), obtemos $x_n \pi t \in V$ para todo $t \geq t_0 + t_1$ e todo $n \geq n_0$. Portanto, $x_n \pi t_n \in V \cap B$ para todo n suficientemente grande, o que é uma contradição. $\square$

A dinâmica dentro de um conjunto invariante S que possui um par repulsor-atrator é bem simples, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 4.1.6. *Seja (A^*, A) um par repulsor-atrator em S . Então:*

- (1) *A e A^* são conjuntos disjuntos, compactos e invariantes;*
- (2) *Se $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma solução completa por y , então valem as seguintes afirmações:*
 - (a) *Se $y \in A^*$ ou se $\omega(y) \cap A^* \neq \emptyset$, então $\sigma(\mathbb{R}) \subset A^*$.*
 - (b) *Se $\omega^*(\sigma) \cap A \neq \emptyset$, então $\sigma(\mathbb{R}) \subset A$.*
 - (c) *Se $y \notin A^* \cup A$, então $\omega^*(\sigma) \subset A^*$ e $\omega(y) \subset A$.*

Demonstração. Mostremos (1). É claro que $A \cap A^* = \emptyset$. Como S compacto, segue da Proposição 4.1.2(3) que A é compacto e invariante. A Definição de A^* implica que A^* é invariante com relação a π . Como $A^* \subset S$, para completar a demonstração de (1), mostremos que A^* é um conjunto fechado. Seja $(x_n)_n$ uma seqüência em A^* tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Afirmamos que $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Caso contrário, existe um $t \in [0, \infty)$ tal que $x \pi t \in U$ e, portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \pi t \in U$ para todo $n \geq n_0$. Conseqüentemente, $\omega(x_n) = \omega(x_n \pi t) \subset \omega(U \cap S) = A$ para todo $n \geq n_0$. Isto é uma contradição. Logo, $\omega(x) \cap A = \emptyset$, isto é, $x \in A^*$.

Passemos à demonstração de (2). Seja $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ uma solução completa por $y \in S$. Suponhamos $y \in A^*$ ou $\omega(y) \cap A^* \neq \emptyset$. Seja B uma vizinhança fechada de A^* satisfazendo $B \cap A = \emptyset$. Então existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$, com $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que

$$\sigma(t_n) \in B \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sejam $t \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. A Proposição 4.1.5(2) implica que existe um $t_0(\epsilon) \in [0, \infty)$ tal que $d(x, A^*) < \epsilon$ sempre que $x \in S$ e $t \geq t_0$ são tais que $x\pi t \in B$. Seja $n_0 = n_0(t, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$t_n - t \geq t_0(\epsilon) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Seja $n \geq n_0$. Como $\sigma(t)\pi(t_n - t) = \sigma(t_n) \in B$, concluímos que $d(\sigma(t), A^*) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos $\sigma(t) \in A^*$. Isto demonstra (a).

Assumamos agora que $\omega^*(\sigma) \cap A \neq \emptyset$. Então existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$\sigma(-t_n) \in U \cap S \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

sendo U como na Definição 4.1.3. Se $t \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_n + t \geq 0$ para $n \geq n_0$. Portanto, $\sigma(-t_n)\pi(t_n + t) = \sigma(t)$ para todo $n \geq n_0$. Então $\sigma(t) \in \omega(U \cap S)$, isto é, $\sigma(t) \in A$. Ou seja, $\sigma(\mathbb{R}) \subset A$. Isto demonstra (b).

Finalmente, assumamos que $y \notin A^* \cup A$. Seja $x \in \omega^*(\sigma)$. Portanto, existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\sigma(-t_n) \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Definamos $B = \{y\}$. Segue da Proposição 4.1.5(2) que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $d(\sigma(-t_n), A^*) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $x \in A^*$.

Se $x \in \omega(y)$, então existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $[0, \infty)$ tal que $t_n \rightarrow \infty$ e $\sigma(t_n) \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmamos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(t_{n_0}) \in U$, sendo U como na Definição 4.1.3. De fato, suponha que a afirmação seja falsa. Isto implica que $\sigma(t_n) \in S \setminus U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $B = S \setminus U$, concluímos que $y \in A^*$, contradizendo a hipótese sobre y . Como $\sigma(t_{n_0}) \in U \cap S$ e $\omega(U \cap S) = A$, segue que $x \in A$. Isto encerra a demonstração. $\square$

4.2 Decomposição de Morse

A próxima definição generaliza o conceito de par repulsor-atrator.

Definição 4.2.1. *Seja S um subconjunto de X , compacto (não necessariamente isolado) e π -invariante. Seja M_j , $j = 1, \dots, n$, um subconjunto de S . Dizemos que a coleção ordenada $(M_1, \dots, M_n)$ é uma decomposição de Morse de S se existir uma seqüência crescente de atratores (em S)*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = S \text{ tal que}$$

$$M_j = A_j \cap A_{j-1}^*, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Exemplo 4.2.2. *Se A é um atrator em S , então (A, A^*) é uma decomposição de Morse de S . De fato, definindo $A_0 = \emptyset$, $A_1 = A$ e $A_2 = S$, temos que $M_1 = A$ e $M_2 = A^*$.*

A seguir, apresentamos as propriedades básicas de uma decomposição de Morse.

Teorema 4.2.3. *Seja $(M_1, \dots, M_n)$ uma decomposição de Morse de S e seja $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = S$ sua seqüência de atratores associada. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *Os conjuntos M_j , $j = 1, \dots, n$, são dois a dois disjuntos.*
- (2) *Se $y \in S$ e $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ é uma solução completa por y , então $\sigma(\mathbb{R}) \subset M_j$ para algum j ou então existem índices i, j , com $i < j$ tais que $\omega^*(\sigma) \subset M_j$ e $\omega(y) \subset M_i$.*
- (3) *Os atratores são unicamente determinados por $(M_1, \dots, M_n)$. A saber,*

$$A_k = \{y \in S : \text{existe uma solução completa } \sigma : \mathbb{R} \rightarrow S \text{ por } y \text{ tal que}$$

$$\omega^*(\sigma) \subset M_1 \cup \dots \cup M_k\} \text{ para } 1 \leq k \leq n;$$

- (4) *Para todo $i = 1, \dots, n$, (M_i, A_{i-1}) é um par repulsor-atrator de A_i .*
- (5) *Se S é um conjunto invariante isolado que admite uma vizinhança fortemente π -admissível, então os conjuntos M_i , $i = 1, \dots, n$ e A_i , $i = 0, \dots, n$ também têm esta propriedade.*

Demonstração. Mostremos (1). Sejam $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$. Podemos assumir que $i < j$ e segue que $A_i \subset A_j$. Além disso, se $x \in A_{j-1}^*$, temos que $\omega(x) \cap A_{j-1} = \emptyset$. Portanto, $\omega(x) \cap A_{i-1} = \emptyset$, já que $A_{i-1} \subset A_{j-1}$. Logo, $x \in A_{i-1}^*$. Portanto,

$$\begin{aligned} M_i \cap M_j &= (A_i \cap A_{i-1}^*) \cap (A_j \cap A_{j-1}^*) = (A_i \cap A_j) \cap (A_{i-1}^* \cap A_{j-1}^*) \\ &= A_i \cap A_{j-1}^* \subset A_{j-1} \cap A_{j-1}^* = \emptyset. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração de (1).

Sejam $y \in S$ e $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ uma solução por y . Como $A_n = S$ e $A_0^* = S$, segue que existem um menor $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\omega(\sigma) \subset A_i$ e um maior $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\omega^*(\sigma) \subset A_j^*$. É claro que $i > 0$ e $j < n$. Além disso, $\omega(y) \not\subset A_{i-1}$. O Teorema 4.1.6 implica que $y \in A_{i-1}^*$, $\sigma(\mathbb{R}) \subset A_{i-1}^*$ e $\omega(y) \subset A_{i-1}^*$.

Por outro lado, $\omega^*(\sigma) \not\subset A_{j+1}^*$. Afirmamos que $\sigma(\mathbb{R}) \subset A_{j+1}$. De fato, caso contrário, existe um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\sigma(t_0) \notin A_{j+1}$. Se $\sigma(t_0) \notin A_{j+1}^*$, o Teorema 4.1.6 implica que $\omega^*(\sigma) \subset A_{j+1}^*$, o que é uma contradição. Logo, $\sigma(t_0) \in A_{j+1}^*$ e, portanto, $\omega(\sigma) \subset A_{j+1}^*$, o que é novamente uma contradição. A afirmativa está demonstrada.

Notemos ainda que $j \geq i-1$. Suponhamos que isto seja falso, ou seja, que $j < i-1$. Logo, $j+1 \leq i-1$ e, portanto, $A_{j+1} \subset A_{i-1}$. Isto implica que

$$\sigma(\mathbb{R}) \subset A_{j+1} \cap A_{i-1}^* \subset A_{i-1} \cap A_{i-1}^* = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Assim, há duas possibilidades a considerar:

Caso 1: Se $j = i-1$, temos que $\sigma(\mathbb{R}) \subset A_{i-1} \cap A_i^* = M_i$.

Caso 2: Se $j > i-1$, temos que $\omega(y) \subset A_{i-1}^* \cap A_i = M_i$ e $\omega^*(\sigma) \subset A_j^* \cap A_{j+1} = M_{j+1}$. A demonstração de (2) está concluída.

Passemos à demonstração de (3). Seja $k \in \{1, \dots, n\}$ fixado e consideremos $y \in A_k$. Como A_k é um conjunto π -invariante, segue que existe uma solução completa $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow A_k$ por y . Logo, $\omega^*(\sigma) \subset A_k$.

Seja $i \in \{1, \dots, n\}$ o menor inteiro menor ou igual a k tal que $\omega^*(\sigma) \subset A_i$. Temos que $i > 0$ e $\omega^*(\sigma) \not\subset A_{i-1}$. O Teorema 4.1.6 implica que $\omega^*(\sigma) \subset A_{i-1}^*$. Portanto,

$$\omega^*(\sigma) \subset A_i \cap A_{i-1}^* = M_i \subset \bigcup_{j=1}^k M_j.$$

Reciprocamente, suponhamos que exista uma solução $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ por $y \in S$ tal que $\omega^*(\sigma) \subset \bigcup_{j=1}^k M_j$. Logo, $\omega^*(\sigma) \subset M_j$ para algum $j \leq k$ e, portanto, $\omega^*(\sigma) \subset A_j \subset A_k$. Segue do Teorema 4.1.6 que $\sigma(\mathbb{R}) \subset A_k$. Isto completa a demonstração de (3).

Mostremos (4). Como A_j , $j = 1, \dots, n$, é atrator em S , o Teorema 4.1.6 implica que A_j e A_j^* , $j = 1, \dots, n$, são conjuntos invariantes. Logo, o conjunto M_j , $j = 1, \dots, n$, também é um conjunto invariante. Fixemos $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $A_{i-1} \subset A_i$, segue que A_{i-1} é um atrator em A_i . Além disso, seja $x \in M_i$. Segue que $x \in A_i$ e $x \in A_{i-1}^* = \{y \in S : \omega(y) \cap A_{i-1} = \emptyset\}$. Portanto, $x \in \{y \in A_i : \omega(y) \cap A_{i-1} = \emptyset\}$. Reciprocamente, se $x \in \{y \in A_i : \omega(y) \cap A_{i-1} = \emptyset\}$, segue que $x \in A_i \cap A_{i-1}^* = M_i$. Ou seja, mostramos que (M_i, A_{i-1}) é um par repulsor-atrator relativamente a A_i .

Finalmente, suponhamos que S seja um conjunto invariante isolado que admite uma vizinhança isolante fortemente π -admissível e seja N uma vizinhança isolante de S . Mostremos que M_j , $j = 1, \dots, n$, é um conjunto invariante isolado. Fixemos $j = 1, \dots, n$. Como os conjuntos A_j e A_j^* são disjuntos e compactos, segue que existe um $\epsilon > 0$ tal que $d(x, y) \geq \epsilon$ para todos $x \in A_j$ e $y \in A_j^*$. Escolhamos $\delta \in (0, \epsilon/2]$ tal que

$$\hat{N} := \{x \in X : d(x, M_j) \leq \delta\} \subset \text{Int}_X(N).$$

É claro que $M_j \subset \text{Int}_X(\hat{N})$. Além disso, $M_j \subset K := \text{Inv}_\pi(\hat{N}) \subset S$. Suponhamos que $K \setminus M_j \neq \emptyset$ e seja $y \in K$ tal que $y \notin M_j$. Seja $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \hat{N}$ uma solução completa por y . Como $y \notin M_j$, temos que $y \notin A_j$ ou $y \notin A_{j-1}^*$.

Suponhamos que $y \notin A_j$. O Teorema 4.1.6 implica que $\omega^*(\sigma) \subset A_j^*$ e, portanto, $A_j^* \cap \hat{N} \neq \emptyset$. Ou seja, existe um $x \in A_j^*$ e um $x_0 \in M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ com $d(x, x_0) \leq \delta$. Porém, $d(x, x_0) \geq \epsilon$ e temos uma contradição.

Suponhamos que $y \notin A_{j-1}^*$. O Teorema 4.1.6 implica que $\omega(y) \subset A_{j-1}$ e, portanto, $A_{j-1} \cap \hat{N} \neq \emptyset$. Novamente, concluímos que existe um $x \in A_{j-1}$ e $x_0 \in A_j \cap A_{j-1}^*$, com $d(x, x_0) \leq \delta$, o que é uma contradição.

Logo, $K = M_j$ e $\hat{N}$ é uma vizinhança isolante de M_j que é fortemente π -admissível, pois N o é.

Para concluir a demonstração do Teorema 4.2.3, mostremos que A_j , $j = 0, \dots, n$, é um conjunto invariante isolado admitindo vizinhança isolante fortemente π -admissível. Como $A_j \cap A_j^* = \emptyset$ e A_j e A_j^* são compactos, podemos escolher uma vizinhança fechada

$\tilde{N}$ de A_j tal que

$$\tilde{N} \subset N \text{ e } \tilde{N} \cap A_j^* = \emptyset.$$

Seja $\tilde{K} := \text{Inv}_\pi(\tilde{N})$. Segue que $A_j \subset \tilde{K} \subset S$. Suponhamos que exista um $y \in \tilde{K} \setminus S$ e seja $\tilde{\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{N}$ uma solução completa por y . Como $y \notin A_j \cup A_j^*$, segue que $\omega^*(\sigma) \subset A_j^*$ e, portanto, $A_j^* \cap \tilde{N} = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $\tilde{K} = A_j$ e $\tilde{N}$ é também uma vizinhança de A_j fortemente π -admissível. $\square$

O próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [10] ou [12], é a recíproca da afirmativa (2) do Teorema 4.2.3.

Teorema 4.2.4. *Seja S como no Teorema 4.2.3 e seja $(M_1, \dots, M_n)$ uma coleção ordenada de subconjuntos de S dois a dois disjuntos, todos invariantes e compactos. Suponhamos que, para todo $y \in S$ e toda solução completa $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow S$ por y , temos $\sigma(\mathbb{R}) \subset M_j$ para algum j ou então $\omega^*(\sigma) \subset M_j$ e $\omega(\sigma) \subset M_i$ para índices $i < j$. Então $(M_1, \dots, M_n)$ é uma decomposição de Morse de S .*

Como consequência imediata dos Teoremas 4.2.4 e 2.2.10, temos o seguinte resultado para semifluxos do tipo gradiente.

Proposição 4.2.5. *Suponhamos que π é do tipo gradiente com respeito à função $V : X \rightarrow \mathbb{R}$. Seja S um conjunto compacto invariante contendo apenas um número finito de pontos de equilíbrio a_i , $i = 1, \dots, n$. Reordenando estes pontos de equilíbrio de modo a termos $V(a_i) \leq V(a_{i+1})$ para $i = 1, \dots, n-1$, a coleção $(M_1, \dots, M_n)$, com $M_i = \{a_i\}$, $i = 1, \dots, n$, é uma decomposição de Morse de S .*

4.3 Par bloco e trio-índice

Definição 4.3.1. *Seja K subconjunto compacto π -invariante e (A^*, A) um par repulsor-atrator em K . O par (B_1, B_2) de subconjuntos de X é chamado par bloco de (A^*, A) relativamente a K se valem as seguintes propriedades:*

- (i) B_1 é bloco isolante para A^* , B_2 é um bloco isolante para A e $B := B_1 \cup B_2$ é um bloco isolante para K ;
- (ii) $B_1 \cap B_2 \subset B_1^- \cap B_2^+$.

Figura 4.1: Par bloco

Um conceito mais geral do que o de par bloco é o de trio-índice.

Definição 4.3.2. *Seja K um conjunto π -invariante isolado e (A^*, A) um par repulsor-atrator em K . Então a terna (N_1, N_2, N_3) , com $N_1 \supset N_2 \supset N_3$, é chamado trio-índice para (A^*, A) relativamente a K se valem as seguintes propriedades:*

- (1) N_1 é uma vizinhança isolante de K e (N_1, N_3) é um par índice em N_1 ;
- (2) N_2 é uma vizinhança isolante de A e (N_2, N_3) é um par índice em N_2 ;
- (3) Se $U \subset X$ é um aberto satisfazendo $A \subset U \cap N_1 \subset N_2$, então $N_1 \setminus U$ é uma vizinhança isolante de A^* e $(N_1 \setminus U, N_2 \setminus U)$ é um par índice em $N_1 \setminus U$.

Se U é um aberto como na Definição 4.3.2(3), diremos que o trio-índice (N_1, N_2, N_3) para (A^*, A) satisfaz a *propriedade da cofibração* se as inclusões $i_{31} : N_3 \rightarrow N_1$, $i_{32} : N_3 \rightarrow N_2$ e $i_{21} : N_2 \setminus U \rightarrow N_1 \setminus U$ são cofibrações.

O próximo resultado mostra que sempre podemos obter um *trio-índice* com a propriedade de cofibração a partir de um par bloco.

Teorema 4.3.3. *Sejam K , A^* e A como na Definição 4.3.1 e (B_1, B_2) um par bloco para (A^*, A) relativamente a K . Seja $B := B_1 \cup B_2$. Suponha que π não exploda em B . Então o trio $(B, B_2 \cup B^-, B^-)$ é um trio-índice para (A^*, A) relativamente a K que satisfaz a propriedade da cofibração.*

Demonstração. Definamos

$$N_1 := B, \quad N_2 := B_2 \cup B^- \quad \text{e} \quad N_3 := B^-.$$

Por hipótese, N_1 é uma vizinhança isolante de K e segue do Exemplo 2.5.3 que (N_1, N_3) é um par índice em N_1 . Portanto, a condição (1) da Definição 4.3.2 está demonstrada.

Como π não explode em $B = N_1$, o Teorema 2.3.11 implica que a inclusão $i_{31} : N_3 \rightarrow N_1$ é uma cofibração.

Mostremos que N_2 é uma vizinhança isolante de A e que (N_2, N_3) é um par índice em N_2 . O fato de que N_2 é uma vizinhança isolante de A é uma consequência imediata das hipóteses. Se $x \in B_2 \cap B^-$, então $x \in \partial B_2$. Desta maneira, $A \subset \text{Int}_X((B_2 \cup B^-) \setminus B^-) = \text{Int}_X(N_2 \setminus N_3)$. Além disso, é claro que N_3 é N_2 -positivamente invariante.

Seja $x \in N_2$ tal que $x\pi t \notin N_2$ para algum $t < \omega_x$. Definamos $\tau := \sup\{s < \omega_x : x\pi[0, s] \subset N_2\}$. Segue que $y := x\pi\tau$ está definido.

Afirmamos que $y \in B^-$. De fato, suponhamos que $y \notin B^-$. Segue que $y \in \partial B_2$. Como B_2 é bloco isolante, temos $y \notin B_2^i$, isto é, $y \in B_2^-$. Logo, existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, temos $y\pi(0, \epsilon) \cap B_2 = \emptyset$. Se $y \notin B_1$, podemos assumir que $y\pi[0, \epsilon) \cap B_1 = \emptyset$, ou seja,

$$y\pi(0, \epsilon) \cap B = \emptyset.$$

Portanto, $y \in B^-$, o que é uma contradição. Deste modo, $y \in B_1$ e, portanto,

$$y \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^- \cap B_2^+.$$

Portanto, existe um $\epsilon'_0 \in (0, \epsilon)$ tal que, se $\epsilon \in (0, \epsilon'_0)$, temos que $y\pi(0, \epsilon) \cap B_1 = \emptyset$, isto é, $y\pi(0, \epsilon) \cap B = \emptyset$. Portanto, $y \in B^-$, outra contradição. Isto mostra que $y \in B^-$ e completa a demonstração da condição (2) da Definição 4.3.2.

Para mostrar que a inclusão $i_{32} : N_3 \rightarrow N_2$ é uma cofibração, seja $U := B \setminus \text{Inv}_\pi^+(B)$. Como π não explode em B , o conjunto $\text{Inv}_\pi^+(B)$ é fechado (em X) e, conseqüentemente, o conjunto U é aberto em B . Seja $H : U \times [0, 1] \rightarrow B$ uma aplicação dada por

$$H(x, t) = x\pi(t \cdot s_B(x)), \quad x \in U \text{ e } t \in [0, 1].$$

sendo s_B a aplicação definida no Lema 2.3.10. Segue deste lema que s_B é contínua e, portanto, que H é contínua.

Definamos agora $\tilde{U} := U \cap (B_2 \cup B^-) = U \cap N_2 = N_2 \setminus \text{Inv}_\pi^+(B)$. Evidentemente, o conjunto $\tilde{U}$ é aberto em N_2 e $N_3 = B^- \subset \tilde{U}$. Mostremos que a imagem de $\tilde{U} \times [0, 1]$ por H está em N_2 . Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então, para algum $x \in \tilde{U}$,

existe um $\alpha \in [0, 1]$ tal que

$$\alpha = \sup\{t \in [0, 1] : x\pi(s \cdot s_B(x)) \in N_2 \text{ para } s \in [0, t]\}.$$

Segue que

$$x\pi(\alpha \cdot s_B(x)) \in N_2 \setminus B^- \subset B_2.$$

Conseqüentemente, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\alpha + \epsilon < 1$ e

$$x\pi(t \cdot s_B(x)) \in \text{Int}_X(B) \text{ para todo } t \in (\alpha, \alpha + \epsilon).$$

Segue que existe uma seqüência $(t_n)_n$ em $(\alpha, \alpha + \epsilon)$, com $t_n \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $x\pi(t_n \cdot s_B(x)) \notin N_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x\pi(t_n \cdot s_B(x)) \in B_1 \setminus B_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $x\pi(\alpha \cdot s_B(x)) \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^- \cap B_2^+$. Por outro lado, $x\pi(\alpha \cdot s_B(x)) \in B_1^-$ implica que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x\pi(t_n \cdot s_B(x)) \notin B_1$ para todo $n \geq n_0$, o que é uma contradição. Logo, a imagem de $\tilde{U} \times [0, 1]$ por H está em N_2 . Seja $\tilde{H} : \tilde{U} \rightarrow N_2$ a correspondente restrição de H . A Proposição 1.2.10 implica que a inclusão $i_{32} : N_3 \rightarrow N_2$ é uma cofibração.

Para concluir a demonstração do teorema, seja V um conjunto aberto tal que $A \subset V \cap N_1 \subset N_2$. Devemos mostrar que $N_1 \setminus V$ é uma vizinhança isolante de A^* , $(N_1 \setminus V, N_2 \setminus V)$ é um par índice em $N_1 \setminus V$ e a inclusão $i_{21} : N_2 \setminus V \rightarrow N_1 \setminus V$ é uma cofibração.

Seja K^* o maior conjunto invariante em $N_1 \setminus V$. Segue que $K^* \subset K$. Afirmamos que $K^* = A^*$. De fato, se $x \in K^* \setminus A^*$, então, pelo Teorema 4.1.6, temos $\omega(x) \subset A \subset V$. Como o conjunto $N_1 \setminus V$ é fechado, temos $\omega(x) \subset N_1 \setminus V$, o que é uma contradição. Logo, $K^* \subset A^*$. Seja $x \in A^*$. Então $x \in \text{Int}_X(B_1) \subset N_1$. Assumindo que $x \in V$, temos que $x \in V \cap N_1 \subset N_2 = B_2 \cup B^-$. É claro que $x \notin B^-$. Portanto, $x \in (\text{Int}_X(B_1)) \cap B_2 = \emptyset$, o que é uma contradição. Logo, $x \in N_1 \setminus V$, isto é, $A^* \subset N_1 \setminus V$, o que prova que $K^* = A^*$. Além disso, temos

$$A^* \subset \text{Int}_X(B_1) = \text{Int}_X(B_1) \setminus (B_2 \cap B^-) \subset (N_1 \setminus V) \setminus (N_2 \setminus V).$$

Portanto, $A^* \subset \text{Int}_X((N_1 \setminus V) \setminus (N_2 \setminus V))$.

Mostremos que $N_2 \setminus V$ é $(N_1 \setminus V)$ -positivamente invariante. De fato, tomemos $x \in N_2 \setminus V$ e seja $t \in [0, \omega_x)$ tal que $x\pi[0, t] \subset N_1 \setminus V$. Suponha que $x\pi t \notin N_2$. Definamos $\tau = \sup\{s < \omega_x : x\pi[0, s] \subset N_2\}$. Segue que $\tau < t$ e, pelo mesmo argumento usado no segundo passo desta demonstração, temos que $x\pi\tau \in B^-$, contradizendo o fato de que $x\pi[0, t] \subset B$. Isto mostra que $N_2 \setminus V$ é $(N_1 \setminus V)$ -positivamente invariante.

Verifiquemos a propriedade *rampa de saída* de $N_2 \setminus V$. Seja $x \in N_1 \setminus V$ tal que $x\pi t \notin N_1 \setminus V$ para algum $t > 0$. Definamos

$$s := s_{N_1 \setminus V}(x) \text{ e } y := x\pi s.$$

Devemos mostrar que $y \in N_2 \setminus V$. Por definição, temos $y \in (N_1 \setminus V) \setminus (\text{Int}_X(N_1 \setminus V))$. Devemos considerar três casos:

Caso 1: $y \in (\text{Int}_X(N_1)) \cap \partial V$: então existe uma seqüência $(x_n)_n$ em $V \cap \text{Int}_X(V_1)$ tal que $x_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $x_n \in (V \cap N_1) \subset N_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Disto segue que $y \in N_2 \setminus V$.

Caso 2: $y \in \partial N_1 \setminus \text{Cl } V$: então afirmamos que $y \in B^-$ pois, caso contrário, $y \in B^i$ e, portanto, $y \in [0, \epsilon] \subset B \setminus \text{Cl } V \subset N_1 \setminus V$ para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, contradizendo a definição de y . Logo, $y \in B^- \setminus V \subset N_2 \setminus V$.

Caso 3: $y \in \partial N_1 \cap \partial V$: neste caso, temos $y \in B^-$ ou $y \in B^i$. Se tivermos $y \in B^-$, então $y \in B^- \setminus V \subset N_2 \setminus V$. Por outro lado, se tivermos $y \in B^i$, então $y\pi[0, \delta] \subset B = N_1$ para algum $\delta > 0$. Da definição de y , concluímos a existência de uma seqüência $(s_n)_n$ em $(0, \delta)$ tal que $s_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e

$$y\pi s_n \in (N_1 \cap V) \subset N_2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isto implica $y \in N_2$ e, portanto, $y \in N_2 \setminus V$.

Finalmente, resta mostrar que $i_{21} : N_2 \setminus V \rightarrow N_1 \setminus V$ é uma cofibração. Definamos $U := (N_1 \setminus V) \setminus \text{Inv}_\pi^+(B_1)$ e seja $H : U \times [0, 1] \rightarrow N_1 \setminus V$ a aplicação definida por

$$H(x, t) = \begin{cases} x\pi(t \cdot s_{B_1}(x)) & \text{se } x \in B_1 \\ x & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verifiquemos que H está bem definida, isto é, que $H(x, t) \in N_1 \setminus V$ para $(x, t) \in U \times [0, 1]$. Isto é claro se $x \notin B_1$ ou se $x \in B_1^-$. Sejam então $x \in B_1 \setminus B_1^-$ e $t \in [0, 1]$. Suponhamos que $H(x, t) \in V$. Então

$$y = x\pi(t \cdot s_{B_1}(x)) \in B_1 \cap V \subset N_1 \cap V \subset N_2 = B_2 \cup B^-.$$

Como $t \cdot s_{B_1}(x) < s_{B_1}(x) \leq s_B(x)$, obtemos $y \notin B^-$. Portanto, $y \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^-$, o que é uma contradição. Isto mostra que $H(x, t) \in N_1 \setminus V$ se $t < 1$, $x \in B_1$. A continuidade de π implica que $H(x, 1) \in N_1 \setminus V$. Portanto, H está bem definida. Mostremos agora que H satisfaz a hipóteses da Proposição 1.2.10.

É claro que o conjunto U é aberto em $N_1 \setminus V$. Mostremos que $N_2 \setminus V \subset U$. De fato, seja $x \in N_2 \setminus V = (B_2 \cup B^-) \setminus V$ e suponhamos que $x \in \text{Inv}_\pi^+(B_1) \subset B_1 \subset B$. Temos duas possibilidades: $x \in B_2$ ou $x \in B^-$. No primeiro caso, temos $x \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^-$, o que é uma contradição; no segundo caso, a contradição é imediata. Isto mostra que $N_2 \setminus V \subset U$.

Mostremos que a aplicação H é contínua. Para isto, basta verificar o caso $(x_n, t_n) \rightarrow (x, t)$, sendo $(x_n)_n$ uma seqüência em $U \setminus B_1$ e $x \in B_1$. Nesta situação, temos que $H(x_n, t_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $U \setminus B_1 \subset B_2$, segue que $x_n \in B_2$. Logo

$$x \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^-.$$

Portanto, $s_{B_1}(x) = 0$, o que implica que

$$H(x, t) = x\pi(t \cdot s_{B_1}(x)) = x.$$

Isto mostra que H é contínua.

Afirmamos que $H(x, t) = x$ para todo $x \in N_2 \setminus V$ e $t \in [0, 1]$. Sejam $x \in N_2 \setminus V$ e $t \in [0, 1]$. De fato, podemos assumir $x \in B_1$. Se $x \in B_2$, então

$$x \in B_1 \cap B_2 \subset B_1^-$$

e, portanto, $H(x, t) = x$; se $x \notin B_2$, então $x \in B^-$ e, portanto,

$$0 = s_B(x) \geq s_{B_1}(x) \geq 0.$$

Logo, $s_{B_1}(x) = 0$, o que implica que $H(x, t) = x$. Por último, mostremos que, para todo $x \in U$, temos

$$H(x, 1) \in N_2 \setminus V.$$

Suponhamos que $x \in B_1$. Temos

$$H(x, t) = x\pi s_{B_1}(x) = y \in B_1^- \setminus V \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Se $y \notin B^-$, então existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$y\pi(0, \epsilon) \in B \setminus B_1 \subset B_2.$$

Portanto, $y \in B_2 \setminus V \subset N_2 \setminus V$. Se $y \in B^-$, segue que $y \in B^- \setminus V \subset N_2 \setminus V$. Por fim, suponhamos que $x \notin B_1$. Temos que $x \in B_2 \setminus V \subset N_2 \setminus V$ e $H(x, 1) = x$. Aplicando a Proposição 1.2.10, segue que a inclusão $i_{21} : N_2 \setminus V \rightarrow N_1 \setminus V$ é uma cofibração. Este fato termina a demonstração do teorema. $\square$

Surge a pergunta natural sobre a existência de par blocos. A resposta é positiva e é apresentada no próximo resultado.

Teorema 4.3.4. *Sejam $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e N uma vizinhança isolante fortemente π -admissível de K . Seja (A^*, A) um par repulsor-atrator em K . Então existe um par bloco (B_1, B_2) para (A^*, A) relativamente a K tal que $B_1 \cup B_2 \subset N$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10] ou [12].

4.4 A Equação de Morse

Finalmente, apresentamos a Equação de Morse associada a uma decomposição de Morse de um conjunto invariante. Iniciamos com o seguinte conceito algébrico.

Definição 4.4.1. *Seja E um R -módulo e $\tilde{E} = E \otimes_R K$, onde K é o corpo quociente de R . Definimos*

$$\text{rank } E = \begin{cases} \dim \tilde{E}, & \text{se } \dim \tilde{E} \text{ é finito} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A demonstração do Lema abaixo pode ser encontrada em [1].

Lema 4.4.2. *Sejam E, F, G R -módulos e consideremos a seqüência exata*

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

de R -homomorfismos, isto é, $\text{Im } f = \text{Ker } g$. Então,

$$\text{rank } F = \text{rank}(\text{Im } f) + \text{rank}(\text{Im } g).$$

Seja X um espaço métrico e π um semifluxo local em X . Seja H_q , $q \in \mathbb{Z}$, uma teoria de homologia não reduzida em X .

Definição 4.4.3. *Seja $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$. O polinômio de Poincaré $p(t, h(K))$ com respeito a H_q é definido por*

$$p(t, h(K)) = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q(h(K)) \cdot t^q, \quad (4.2)$$

com $\beta_q(h(K)) = \text{rank } H_q(h(K))$.

O resultado abaixo mostra que há trios-índices que nos fornecem um modo “fácil” de calcular os coeficientes do polinômio (4.2).

Lema 4.4.4. *Sejam $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e (A^*, A) um par repulsor-atrator em K . Então existe um trio-índice (N_1, N_2, N_3) para (A^*, A) relativamente a K tal que, para todo $q \in \mathbb{Z}$,*

$$H_q(h(A^*)) \cong H_q(N_1, N_2) \cong H_q(N_1 \setminus U, N_2 \setminus U),$$

$$H_q(h(K)) \cong H_q(N_1, N_3),$$

$$H_q(h(A)) \cong H_q(N_2, N_3),$$

sendo U um conjunto aberto em X tal que $\text{Cl } U \subset V$ e $N_1 \cap V \subset N_2$ para algum conjunto aberto V em X .

Demonstração. Pelo Teorema 4.3.4, existe um par bloco (B_1, B_2) para (A^*, A) relativamente a K . Definindo $B := B_1 \cup B_2$, o Teorema 4.3.3 implica que $(B, B_2 \cup B^-, B^-)$ é um trio-índice para (A^*, A) relativamente a K que satisfaz a propriedade da cofibração.

Definamos $N_1 := B$, $N_2 := B \cup B^-$ e $N_3 := B^-$. Pela propriedade da excisão, temos

$$H_q(N_1 \setminus U, N_2 \setminus U) \cong H_q(N_1, N_2) \text{ para todo } q \in \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

A Proposição 1.2.11 e a equação (4.3) implicam que

$$H_q(h(A^*)) \cong H_q((N_1 \setminus U, N_2 \setminus U, \{[N_2 \setminus U]\}) \cong H_q(N_1 \setminus U, N_2 \setminus U) \cong H_q(N_1, N_2) \quad (4.4)$$

$$H_q(h(K)) \cong H_q(N_1/N_1, \{[N_3]\}) \cong H_q(N_1, N_3) \quad (4.5)$$

$$H_q(h(A)) \cong H_q(N_2/N_1, \{[N_3]\}) \cong H_q(N_2, N_3). \quad (4.6)$$

Isto encerra a demonstração do lema. $\square$

Seja $(\pi, K) \in \mathcal{S}$ e seja $(M_1, \dots, M_n)$ uma decomposição de Morse de K . Seja

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = K$$

a seqüência de atratores associada a $(M_1, \dots, M_n)$. Segue do Teorema 4.2.3 que, para cada $j = 1, \dots, n$, o par (M_j, A_{j-1}) é um par repulsor-atrator relativamente a A_j . Aplicando o Lema 4.4.4, segue que, para cada $j = 1, \dots, n$, existe um trio-índice (N_1^j, N_2^j, N_3^j) para o par repulsor-atrator (M_j, A_{j-1}) relativamente a A_j tal que, para todo $q \in \mathbb{Z}$, temos

$$\begin{aligned} H_q(h(M_j)) &\cong H_q(N_1^j, N_2^j) \cong H_q(N_1^j \setminus U, N_2^j \setminus U) \\ H_q(h(A_j)) &\cong H_q(N_1^j, N_3^j) \\ H_q(h(A_{j-1})) &\cong H_q(N_2^j, N_3^j), \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo U e V conjuntos abertos em X tais que $\text{Cl}U \subset V$ e $N_1^j \cap V \subset N_2^j$.

Além disso, existe uma seqüência exata dos módulos de homologia:

$$\dots \longrightarrow H_{q+1}(N_1^j, N_2^j) \xrightarrow{\gamma_q^j} H_q(N_2^j, N_3^j) \xrightarrow{\epsilon_q^j} H_q(N_1^j, N_3^j) \xrightarrow{\alpha_q^j} H_q(N_1^j, N_2^j) \xrightarrow{\gamma_{q-1}^j} \dots \quad (4.8)$$

Segue de (4.7), (4.8) e do Lema 4.4.2 que, para cada $j = 1, \dots, n$, temos

$$\text{rank } H_q(h(A_{j-1})) = \text{rank}(\text{Im} \gamma_q^j) + \text{rank}(\text{Im} \epsilon_q^j) \quad (4.9)$$

$$\text{rank } H_q(h(A_j)) = \text{rank}(\text{Im}\epsilon_q^j) + \text{rank}(\text{Im}\alpha_q^j) \quad (4.10)$$

$$\text{rank } H_q(h(M_j)) = \text{rank}(\text{Im}\alpha_q^j) + \text{rank}(\text{Im}\gamma_{q-1}^j). \quad (4.11)$$

Portanto, para cada $j = 1, \dots, n$, temos

$$\text{rank } H_q(h(A_{j-1})) + \text{rank } H_q(h(M_j)) = \text{rank } H_q(h(A_j)) + \text{rank}(\text{Im}\gamma_{q-1}^j) + \text{rank}(\text{Im}\gamma_q^j). \quad (4.12)$$

Lema 4.4.5. *Nas condições acima, temos*

$$\sum_{j=1}^n \text{rank } H_q(h(M_j)) = \text{rank } H_q(h(K)) + \sum_{j=1}^n (d_{q-1}^j + d_q^j), \quad (4.13)$$

sendo $d_q^j := \text{rank}(\text{Im } \gamma_q^j)$, $q \in \mathbb{Z}$ e $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. Como $A_0 = \emptyset$, temos $H_q(h(A_0)) = \{0\}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Como $A_n = K$, a igualdade (4.12) implica

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } H_q(h(A_j)) + \sum_{j=1}^n \text{rank } H_q(h(M_j)) &= \sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } H_q(h(A_j)) + \text{rank } H_q(h(K)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (d_{q-1}^j + d_q^j). \end{aligned}$$

Suponhamos que $\sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } H_q(h(A_j))$ seja finito. Neste caso, obtemos a relação (4.13).

Assim, suponhamos que $\sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } H_q(h(A_j)) = \infty$. Seja ν o menor inteiro q satisfazendo $H_q(h(M_\nu)) = \infty$. Então $\nu \geq 1$ e, pela relação (4.12), temos que $\text{rank } H_q(h(M_\nu)) = \infty$. Portanto, o primeiro membro da relação (4.13) é igual a ∞ . Assumamos que $\sum_{j=1}^n (d_{q-1}^j + d_q^j) < \infty$. Tomando $j = \nu$ em (4.12), segue que $\text{rank } H_q(h(A_\nu)) = \infty$. De modo análogo e recursivo, obtemos que $\text{rank } H_q(h(A_j)) = \infty$ para todo $j = \nu, \dots, n$. Portanto, $\text{rank } H_q(h(K)) = \infty$, o que mostra que o segundo membro de (4.13) é infinito. Este fato implica a validade da equação (4.13). Se tivermos $\sum_{j=1}^n (d_{q-1}^j + d_q^j) = \infty$, então a equação (4.13) segue, o que demonstra o lema. $\square$

Finalmente, estamos em condições de apresentar a Equação de Morse (4.14) associada a $(M_1, \dots, M_n)$. Particularizando a equação (4.14) para o caso em que o índice de Conley homotópico é o tipo de homotopia de uma esfera, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.4.6. *Seja $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e $(M_1, \dots, M_n)$ uma decomposição de Morse de K . Então existem polinômios formais $Q_j = \sum_{q=0}^{\infty} d_q^j t^q$, $j = 1, \dots, n$, cujos coeficientes são inteiros não negativos ou ∞ tais que*

$$\sum_{j=1}^n p(t, h(M_j)) = p(t, h(K)) + (1+t)Q(t), \quad (4.14)$$

sendo $Q(t) = \sum_{j=1}^n Q_j(t)$.

Além disso, se $Q_j(t) \neq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então existe uma solução $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$ satisfazendo $\omega^*(\sigma) \subset M_j$ e $\omega(\sigma) \subset M_i$ para algum inteiro $i < j$.

Demonstração. Multiplicando a equação (4.13) de ambos os lados por t^q e somando sobre todo $q \in \mathbb{Z}$, obtemos (4.14).

Suponhamos que $Q_j(t) \neq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ e que, para cada $i < j$, não exista nenhuma solução $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$ com $\omega^*(\sigma) \subset M_j$ e $\omega(\sigma) \subset M_i$.

Como (M_j, A_{j-1}) é um par repulsor-atrator em A_j , afirmamos que $A_j = A_{j-1} \dot{\cup} M_j$. De fato, suponha que a afirmação seja falsa. Então o Teorema 4.1.6 implica a existência de uma solução $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow K$ com

$$\omega^*(\sigma) \subset M_j \text{ e } \omega(\sigma) \subset A_{j-1}.$$

Como $A_{j-1} \cap M_j = \emptyset$, o Teorema 4.2.3 implica que $\omega(\sigma) \subset M_i$ para algum $i < j$, o que é uma contradição. Logo, temos $A_j = A_{j-1} \dot{\cup} M_j$.

Sabemos que $\text{rank}(\text{Im } \gamma_q^j) = 0$ para todo $q < 0$. Tomando em particular $q = 0$ na relação (4.12), obtemos que $\text{rank}(\text{Im } \gamma_0^j) = \text{rank } H_0(h(A_{j-1})) + \text{rank } H_0(h(M_j)) - \text{rank } H_0(h(A_j))$. Procedendo recursivamente, fica claro que $Q_j(t)$ não depende da escolha do trio-índice. Desta maneira, podemos escolher o trio dado por $(B, B_2 \cup B^-, B^-)$ com $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ e B_1 um bloco isolante para M_j e B_2 um bloco isolante para A_{j-1} . Utilizando este trio-índice, a sequência (4.8) se torna

$$\dots \xrightarrow{\gamma_q} H_q(B_2 \cup B^-, B^-) \xrightarrow{\epsilon_q} H_q(B_2 \cup B_1, B^-) \xrightarrow{\alpha_q} H_q(B_2 \cup B_1, B_2 \cup B^-) \xrightarrow{\gamma_{q-1}} \dots$$

Consideremos a seqüência de inclusões

$$(B_2, B_2^-) \xrightarrow{e_1} (B_2 \dot{\cup} B_1^-, B_2^- \cup B_1^-) \xrightarrow{e_2} (B_2 \dot{\cup} B_1, B_2^- \cup B_1^-) \xrightarrow{e_3} (B_2 \dot{\cup} B_1, B_2^- \dot{\cup} B_1)$$

e denotemos por e_i^* o morfismo induzido pela respectiva aplicação e_i do q -ésimo grupo de homologia. Pela propriedade da excisão,

$$(e_3 \circ e_2 \circ e_1)^* = e_3^* \circ e_2^* \circ e_1^*$$

é um isomorfismo. A propriedade da excisão também implica que e_1^* é um isomorfismo. Portanto, $e_3^* \circ e_2^*$ é um isomorfismo e, conseqüentemente, e_2^* é um homomorfismo injetivo. Como $e_2^* = \epsilon_q$, temos que $\text{Ker } \epsilon_q = \{0\}$. Entretanto, $\text{Ker } \epsilon_q = \text{Im } \gamma_q$. Segue então que $\text{Im } \gamma_q = \{0\}$ para todo $q \in \mathbb{Z}$, ou seja, $Q_j(t) = 0$, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

Observação 4.4.7. *Notemos que $Q_j(t) \neq 0$ implica a existência de órbita heteroclínica.*

A equação (4.14) é chamada Equação de Morse associada à decomposição de Morse $(M_1, \dots, M_n)$ de K .

Corolário 4.4.8. *Sejam $(\pi, K) \in \mathcal{S}(X)$ e $(M_1, \dots, M_n)$ uma decomposição de Morse de K . Suponhamos que $h(M_j) = \Sigma^{d_j}$ para algum $d_j \geq 0$, com $j = 1, \dots, n$. Seja m_k o número dado pela quantidade de conjuntos M_i tais que $h(M_i) = \Sigma^k$. Então*

$$\sum_{q=0}^{\infty} m_q t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q(h(K)) t^q + (1+t)Q(t),$$

sendo $Q(t)$ um polinômio com um número finito de coeficientes não nulos dados por inteiros não negativos.

Demonstração. Seja δ_{mq} o delta de Kronecker. Como $\text{rank } H_q(S^m, s_0) = \delta_{mq}$ (veja [15]), temos que

$$\sum_{j=1}^n p(t, h(M_j)) = \sum_{j=1}^n \sum_{q=0}^{\infty} \text{rank } H_q(h(K)) t^q = \sum_{j=1}^n t^{d_j} = \sum_{q=0}^{\infty} m_q t^q. \quad (4.15)$$

Portanto, o Teorema 4.4.6 implica que

$$\sum_{q=0}^{\infty} m_q t^q = \sum_{q=0}^{\infty} \beta_q(h(K)) t^q + (1+t)Q(t). \quad (4.16)$$

Além disso, é claro da última igualdade em (4.15) que o polinômio $Q(t)$ tem um número finito de coeficientes não nulos, todos dados por inteiros não negativos. $\square$

Nas condições do Corolário 4.4.8, sejam a_q , $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, os coeficientes de $Q(t)$. Temos que

$$(1+t)Q(t) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q(t^q + t^{q+1}) = \sum_{q=0}^{\infty} (a_q + a_{q-1})t^q,$$

sendo $a_{-1} = 0$. Segue de (4.16) que

$$m_q = \beta_q + (a_q + a_{q-1}), \quad q \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

sendo $\beta_q := \beta_q(h(K))$. Em particular, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\sum_{q=0}^k (-1)^q m_q = \sum_{q=0}^k (-1)^q \beta_q + (-1)^k a_k.$$

Como $a_q = 0$ para todo $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, obtemos

$$\sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q m_q = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \beta_q = \gamma(h(K)), \quad (4.17)$$

sendo $\gamma(h(K))$ a característica de Euler de $h(K)$. Além disso, como $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos que

$$(-1)^k \sum_{q=0}^k (-1)^q m_q \geq (-1)^k \sum_{q=0}^k (-1)^q \beta_q. \quad (4.18)$$

Ou seja, o Corolário 4.4.8 e as fórmulas (4.17) e (4.18) apresentam uma generalização das fórmulas que aparecem na teoria de Morse clássica.

Tudo o que apresentamos neste capítulo também pode ser feito utilizando-se uma teoria de cohomologia (ver [10] e [12]).

Finalizaremos a apresentação da Equação de Morse no contexto da teoria do índice de Conley com o seguinte exemplo.

4.5 A Equação de Morse e um resultado de multiplicidade

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função lipschitziana e suponhamos que f leve conjunto limitado em conjunto limitado de $\mathbb{R}^n$. Suponhamos também que

$$(i) \quad f(0) = 0,$$

$$(ii) \quad f \text{ é diferenciável na origem,}$$

$$(iii) \quad \text{existe uma matriz } B \text{ tal que}$$

$$\frac{f(x) - Bx}{\|x\|} \rightarrow 0 \text{ quando } \|x\| \rightarrow \infty.$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e seja π o semifluxo gerado pelas soluções de

$$\dot{x} = Ax + f(x). \quad (4.19)$$

Suponhamos ainda que

$$(iv) \quad \text{a parte real dos autovalores de } L := A + B \text{ é não nula,}$$

$$(v) \quad \text{a parte real dos autovalores de } \tilde{L} := A + f'(0) \text{ é não nula.}$$

Sejam k o número de autovalores de L , contando multiplicidades, com parte real positiva e m o número de autovalores de $\tilde{L}$, contando multiplicidades, com parte real positiva. Segue dos Exemplos 3.6.1 e 3.4.1 que K_∞ e $\{0\}$ são conjuntos π -invariantes isolados e

$$h(\pi, K_\infty) = \Sigma^k \text{ e } h(\pi, \{0\}) = \Sigma^m,$$

sendo que K_∞ denota a reunião de todas as órbitas completas e limitadas de π . Suponhamos ainda que π seja do tipo gradiente e que $m \neq k$. Nestas condições, existe uma

solução completa σ não constante de (4.19) tal que

$$\sigma(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ ou } \sigma(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty$$

e existe um equilíbrio não trivial de (4.19).

De fato, como π é do tipo gradiente, se σ é uma solução completa limitada em K_∞ , a Proposição 2.2.9 implica que $\omega(\sigma)$ e $\omega^*(\sigma)$ contêm apenas equilíbrios de π . Como $k \neq m$, segue que $\Sigma^m \neq \Sigma^k$ e, portanto, $0 \in K_\infty$ e $\{0\} \neq K_\infty$. Definindo $K' := \{0\}$, as hipóteses do Teorema 3.2.4 estão satisfeitas. Logo, existe uma solução limitada não constante σ com $\omega^*(\sigma) \subset K'$ ou $\omega(\sigma) \subset K'$. Como π é do tipo gradiente e $K' = \{0\}$, segue que somente uma das alternativas ocorre:

$$\begin{aligned} &\sigma(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \\ &\text{ou } \sigma(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

e, além disso, existe um equilíbrio não trivial $v_0 \in \mathbb{R}^n$ de (4.19).

Concluimos com um resultado que ilustra como as Equações de Morse são utilizadas para obter resultados de multiplicidade.

Teorema 4.5.1. *Suponhamos que as hipóteses do Exemplo acima estejam satisfeitas. Suponhamos ainda que f seja diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e que $\text{Re}(A + f'(v)) \neq 0$ para todo ponto v de equilíbrio de*

$$\dot{x} = Ax + f(x). \quad (4.20)$$

Então existe pelo menos dois equilíbrios não triviais de (4.20).

Demonstração. Sejam $u_1 = 0$ e $u_2 \neq 0$ os dois pontos de equilíbrio obtidos acima. Suponhamos que estes sejam os únicos equilíbrios de (4.20). Pela Proposição 4.2.5, $(\{u_1\}, \{u_2\})$ ou $(\{u_2\}, \{u_1\})$ forma uma decomposição de Morse de K_∞ . Temos que

$$h(\pi, \{u_1\}) = \Sigma^m \quad h(\pi, \{u_2\}) = \Sigma^r \quad h(\pi, K_\infty) = \Sigma^k$$

para algum $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pela equação do Corolário 4.4.8, temos

$$t^m + t^r = t^k + \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + a_{j-1})t^j = \sum_{j=0, j \neq k}^{\infty} (a_j + a_{j-1})t^j + (a_k + a_{k-1} + 1)t^k.$$

Como $m \neq k$, obtemos $a_k + a_{k-1} + 1 = 1$ e, portanto, $k = r$ e $a_k + a_{k-1} = 0$. Logo,

$$t^m = \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + a_{j-1}) t^j,$$

o que implica

$$\begin{aligned} a_m + a_{m-1} &= 1 \text{ e} \\ a_j + a_{j-1} &= 0 \text{ para } j \neq m. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Fazendo $j = m - 1$, obtemos $a_{m-1} + a_{m-2} = 0$. Como os coeficientes a_j são não negativos para todo natural $j \in \mathbb{N}$, temos $a_{m-1} = a_{m-2} = 0$. Analogamente, fazendo $j = m + 1$, obtemos $a_{m+1} = a_m = 0$. Destas conclusões, segue que

$$a_m + a_{m-1} = 0. \tag{4.22}$$

Comparando (4.21) e (4.22), chegamos a uma contradição. Isto mostra a existência de um terceiro ponto de equilíbrio para a equação (4.19). $\square$

A Propriedade de Continuação nos permite intuir que a Equação de Morse é preservada por perturbações contínuas (no sentido da Definição 3.3.1) do semifluxo. O ponto crucial para a validade deste fato é mostrar a estabilidade das decomposições de Morse por perturbações contínuas do semifluxo. Este fato foi demonstrado em [3].

Referências Bibliográficas

- [1] E. Artin e H. Braun. *An introduction to algebraic topology*, Charles E. Merrill Publishing Comp., Columbus, Ohio, 1969.
- [2] N.P. Bhatia e O. Hajek. *Local Semi-Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 90. Springer Verlag Berlin-New York, 1969.
- [3] M.C. Carbinatto e K.P. Rybakowski. *Morse decompositions in the absence of uniqueness*. II. Topol. Methods Nonlinear Anal. 22 (2003), no. 1, 15-51.
- [4] C.C. Conley. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. In *CBMS*. AMS, Providence, RI, 1978.
- [5] S.R. Dunbar, K.P. Rybakowski e K. Schmitt. *Persistence in models of predator-prey populations with diffusion*, Journal os differential equations, Vol. 65, No1, 1986.
- [6] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*, Iley-Interscience, N.Y., 1969.
- [7] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Publ. Co., Menlo Park, CA, 1984.
- [8] J.R. Munkres. *Topology, a First Course*, Prentice Hall, 1975.
- [9] K.P. Rybakowski. *On the homotopy index for infinite-dimensional semiflows*, Trans. Amer. Math. Soc., **269** (1982), 351-382.

- [10] K.P. Rybakowski. *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1987.
- [11] K.P. Rybakowski. *Irreducible invariant and asymptotically linear functional differential equations*, Sezione Scientifica, Bolletino U.M.I., (6) **3-B** (1984).
- [12] K.P. Rybakowski e E. Zehnder. *A Morse equation in Conley's index theory for semiflows on metric spaces.*, Ergodic Theory Dynam. Systems 5 (1985), no. 1, 123-143.
- [13] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.
- [14] E. Spanier. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966; Springer-Verlag, 1982.
- [15] R.M. Switzer. *Algebraic Topology-Homotopy and Homology*, Springer Verlag, New York, 1975.