A ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS
COM SÍMBOLO ANALÍTICO E SUAS APLICAÇÕES À
FÍSICA-MATEMÁTICA

Mirian Percia Mendes

Orientador: *Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro*

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para a obten
ção do Título de Mestre em Matemática.

SÃO CARLOS - S.P.
1988

A meus
pais..

- A G R A D E C I M E N T O S -

- Ao Prof. Dr. Hermano de Souza Ribeiro pela orientação segura e sempre presente que contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.
- Aos professores do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos e do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos.
- Ao excelente trabalho de datilografia realizado pela Secretaria de Trabalhos Científicos do ICMSC - USP.
- Finalmente, aos amigos e colegas de graduação e pós-graduação pelo companheirismo e apoio constantes.

Í N D I C E

INTRODUÇÃO	i
CAP. ZERO - PRELIMINARES	
0.1 - Espaços de Funções	ii
0.2 - Definições	iv
0.3 - Teoremas	v
CAP. I - O ESPAÇO DE FUNÇÕES TESTES $H^\infty[S(\lambda, R)]$	
I.1 - Definição do Espaço de Funções Testes $H^\infty[S(\lambda, R)]$	1
I.2 - Descrição das Funções Testes em $H^\infty[S(R)]$	4
I.3 - A Noção de Convergência de Elementos em $H^\infty[S(R)]$	11
I.4 - Invariância de $H^\infty[S(R)]$ em Relação aos Operadores Diferenciais Parciais Linea <u>r</u> res de Ordem Infinita e de Coeficientes Complexos Constantes com S <u>í</u> mbolos Anal <u>i</u> ticos em $S(R)$	16
CAP. II - O ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ DE $H^\infty[S(\lambda, R)]$	
II.1 - Definição do Espaço das Funções Generali <u>z</u> zadas $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ de $H^\infty[S(\lambda, R)]$	21
II.2 - A Transformação de Fourier no Espaço das Funções Generalizadas $H^{-\infty}[S(R)]$	23
II.3 - Invariância de $H^{-\infty}[S(R)]$ em Relação aos Operadores Diferenciais Parciais Linea <u>r</u> res de Ordem Infinita e de Coeficientes Complexos Constantes com S <u>í</u> mbolos Anal <u>i</u> ticos em $S(R)$	24

II.4 - Invariância de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ em Relação aos Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Ordem Infinita e de Coeficientes Complexos Constantes $A(D)$ com Símbolos Analíticos em $S(-\lambda, R)$	26
II.5 - Descrição das Funções Generalizadas de $H^{-\infty}[S(R)]$	26
II.6 - Descrição das Funções Generalizadas de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$	30
CAP. III - O ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^{\infty}(G)$ E O ESPAÇO ASSOCIADO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}(G)$	
III.1 - Definição do Espaço das Funções Testes $H^{\infty}(G)$	34
III.2 - Descrição dos Elementos do Espaço das Funções Testes $H^{\infty}(G)$	35
III.3 - Invariância do Espaço das Funções Testes $H^{\infty}(G)$ em Relação aos Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Ordem Infinita e de Coeficientes Complexos Constantes com Símbolos Analíticos em G	36
III.4 - O Espaço das Funções Generalizadas $H^{-\infty}(G)$ Associado ao Espaço das Funções Testes $H^{\infty}(G)$	38
III.5 - Invariância de $H^{-\infty}(G)$ em Relação aos Operadores Diferenciais Parciais Lineares de Ordem Infinita e de Coeficientes Complexos Constantes $A(D)$ com Símbolos Analíticos em $-G$	39
III.6 - Descrição das Funções Generalizadas de $H^{-\infty}(G)$	39
CAP. IV - A ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO - DIFERENCIAIS COM SÍMBOLO ANALÍTICO EM UM SUBCONJUNTO NÃO VAZIO, ABERTO DO $\mathbb{R}^n$	
IV.1 - Descrição da Álgebra dos Operadores Pseudo-Diferenciais com Símbolo Analítico em um Aberto, Não Vazio do $\mathbb{R}^n$	42

IV.2 - Aplicações da Álgebra dos Operadores Pseudo-Diferenciais com Símbolos Analíticos em um Subconjunto Não Vazio, Aberto do $\mathbb{R}^n$ a Problemas de Existência e Unicidade	45
IV.3 - A Teoria Dual da Álgebra dos Operadores Pseudo-Diferenciais com Símbolo Analítico em um Aberto, Não Vazio do $\mathbb{R}^n$	48
CAP. V - O PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$ NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTE $H^\infty(G)$ E NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}(G)$	
V.1 - O Problema de Cauchy de Ordem $m \geq 1$ no Espaço das Funções Teste $H^\infty(G)$	50
V.2 - O Problema de Cauchy de Ordem $m \geq 1$ no Espaço das Funções Generalizadas $H^\infty(-G)'$	54
V.3 - Existência da Solução Fundamental do Problema de Cauchy de Ordem $m \geq 1$	58
V.4 - O Problema de Cauchy de Ordem $m \geq 1$ no Plano com Aplicações Especiais à Equação das Ondas e do Calor	60
V.5 - Aplicações	68
CAP. VI - PROBLEMAS DE FRONTEIRA	
VI.1 - Um Problema de Fronteira Bidimensional em uma Faixa Vertical do Plano	73
VI.2 - O Problema de Dirichlet da Equação de Laplace Bidimensional na Bola Unitária	77
VI.3 - O Problema de Dirichlet para a Equação de Laplace em um Semiplano	80
APÊNDICES	
APÊNDICE DO CAPÍTULO I	83
APÊNDICE DO CAPÍTULO III	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

I N T R O D U Ç Ã O

Esta dissertação tem como objetivo principal aplicar resultados teóricos para obter fórmulas explícitas de soluções de vários problemas de Cauchy e de contorno envolvendo equações diferenciais parciais da física-matemática. Para tanto, tivemos que desenvolver gradualmente toda uma teoria, presente em toda a dissertação, do capítulo zero ao capítulo VI, como pode ser observado. Para que esse desenvolvimento se efetivasse, lançamos mão dos artigos do YU. A. DUBINSKII, em quem nos baseamos desde o começo do trabalho.

CAPÍTULO ZERO

PRELIMINARES

0.1 - ESPAÇOS DE FUNÇÕES

$C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ - espaço vetorial complexo constituído pelas funções definidas em $\mathbb{R}^n$ com valores complexos que são infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$.

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ - subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído pelas funções de suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ (o suporte de uma função f definida em $\mathbb{R}^n$, assumindo valores complexos é o conjunto dado por $\overline{\mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{0\})}$ (fecho em $\mathbb{R}^n$)).

$L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ - espaço vetorial complexo constituído pelas funções f definidas em $\mathbb{R}^n$ assumindo valores complexos com a propriedade adicional de a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx$$

ser finita (Se uma função f faz parte desse espaço, dizemos que é quadrado integrável sobre o $\mathbb{R}^n$).

$L_{\text{comp}}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ - subespaço vetorial de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ consti

$$p_N(f) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq N}} (1 + |x|^2)^N |\partial^\alpha f(x)|$$

é um número real finito ($\alpha \in \mathbb{N}^n$).

$D(\mathbb{R}^n)$ - espaço vetorial complexo $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com a noção de convergência dada por $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$ em $D(\mathbb{R}^n)$ se e só se $\exists$ um compacto K em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo:

- i. para cada $j = 1, 2, \dots$, $\text{supp } f_j \subset K$
- ii. para cada multi-índice α ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \partial^\alpha f_j(x) = \partial^\alpha f(x)$$

uniformemente para x em $\mathbb{R}^n$.

$S(\mathbb{R}^n)$ - espaço vetorial complexo das funções rapidamente decrescentes no infinito junto com suas derivadas parciais e tendo a seguinte noção de convergência

$$f_j \rightarrow f \quad \text{em} \quad S(\mathbb{R}^n)$$

se e só se

para cada $N = 0, 1, \dots$

$$p_N(f_j - f) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \quad \text{quando} \quad j \rightarrow \infty$$

OBSERVAÇÕES:

1. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$
2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é denso em $S(\mathbb{R}^n)$
3. $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$
4. Para maiores informações sobre o par $(L_{\text{comp}}^2, L_{\text{loc}}^2)$ ver [28].

0.2 - DEFINIÇÕES

DEFINIÇÃO 0.2.1 :

Uma função f definida em um aberto do $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^m$ é analítica real se e só se f é igual a sua série de Taylor numa vizinhança de cada ponto desse aberto.

DEFINIÇÃO 0.2.2 :

Uma função $f(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, definida em um aberto de $\mathbb{C}^n$ é holomorfa se e só se f é de classe C^1 e valem as condições de Cauchy-Riemann em cada variável de $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 0.2.3 :

Uma função inteira $f(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ é do tipo exponencial menor ou igual a R onde $R = (R_1, \dots, R_n)$ se para cada $\epsilon > 0$,

$$|f(z)| \leq C \exp[(R_1 + \epsilon)|z_1| + \dots + (R_n + \epsilon)|z_n|]$$

0.3 - TEOREMAS

TEOREMA 0.3.1 (Paley-Wiener) :

Seja $f(z)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, uma função inteira do tipo exponencial $\leq R$. Suponhamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Então a transformada de Fourier Ff de f é um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $Ff = 0$ q.t.p. no complementar de $\overline{S(R)} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_k| \leq R_k \text{ para cada } k = 1, \dots, n\}$ onde $R = (R_1, \dots, R_n)$. (ver [15], pág. 145).

CAPÍTULO I

O ESPAÇO DE FUNÇÕES TESTES $H^\infty[S(\lambda, R)]$

I.1 - DEFINIÇÃO DO ESPAÇO DE FUNÇÕES TESTES $H^\infty[S(\lambda, R)]$

Para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ e para cada $R = (R_1, \dots, R_n)$ com $0 < R_k \leq +\infty$, $k = 1, \dots, n$, consideremos $S(\lambda, R)$, o n -paralelepípedo aberto com centro em λ , definido por

$$S(\lambda, R) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_k - \lambda_k| < R_k, k = 1, \dots, n \}$$

Quando $\lambda = 0$, $S(0, R)$ é indicado por $S(R)$.

No caso de $S(\lambda, R) = \mathbb{R}^n$, isto é, $R_1 = \dots = R_n = +\infty$, $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ quadrado integráveis sobre $\mathbb{R}^n$ com a propriedade adicional de que para cada função analítica real em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$ da forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} p_\alpha x^{2\alpha}; \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p_\alpha \geq 0$$

a integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x) |Ff(x)|^2 dx$$

é finita, onde Ff indica a transformada de Fourier de f .

No caso de $S(\lambda, R) \subseteq \mathbb{R}^n$, isto é, no caso de que para algum $k \in \{1, \dots, n\}$, $R_k < +\infty$, $H^\infty[S(\lambda, R)]$ é o conjunto de todas as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ quadrado integráveis sobre $\mathbb{R}^n$ com as seguintes propriedades adicionais:

i. a transformada de Fourier Ff de f é uma função nula quase toda parte no subconjunto complementar de $S(\lambda, R)$ em $\mathbb{R}^n$ (neste trabalho, a frase: o suporte de Ff está inteiramente contido em $S(\lambda, R)$ é sinônima da expressão anterior);

ii. Para cada função analítica real em todos os pontos de $S(R)$ da forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} p_\alpha x^{2\alpha} ; \quad x \in S(R) , \quad p_\alpha \geq 0$$

a integral

$$\int_{S(\lambda, R)} p(x-\lambda) |Ff(x)|^2 dx$$

é finita.

A caracterização dos elementos de $H^\infty[S(\lambda, R)]$ é reduzido à caracterização dos elementos de $H^\infty[S(R)]$ em vista da seguinte relação simbólica

$$H^\infty[S(\lambda, R)] = \exp(i \lambda x) H^\infty[S(R)]$$

cujo significado preciso é

$$f \in H^\infty[S(\lambda, R)] \iff \exp(-i \lambda \cdot) f \in H^\infty[S(R)]$$

a qual é uma consequência simples da definição de transformada de Fourier e das definições dadas.

Antes de passarmos à descrição dos elementos do subespaço

vetorial complexo $H^\infty[S(R)]$ do $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, vamos considerar alguns exemplos.

EXEMPLO I.1.1 :

Para cada $a > 0$, a função $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(ax)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ a & , \quad x = 0 \end{cases}$$

que é restrição de uma função complexa holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}$, é um elemento de $H^\infty[(-r,r)]$ desde que $r > a$ pois

$$(Ff_a)(x) = \begin{cases} (\pi/2)^{1/2} & , \quad x \in (-a,a) \\ 0 & , \quad x \notin (-a,a) \end{cases}$$

EXEMPLO I.1.2 :

Para cada $a > 0$, a função $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{\exp(iax) - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ ia & , \quad x = 0 \end{cases}$$

que é restrição de uma função complexa holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}$, é um elemento de $H^\infty[(-r,r)]$ desde que $r > a$ pois

$$(Ff_a)(x) = \begin{cases} (2\pi)^{1/2} i & , \quad x \in (0,a) \\ 0 & , \quad x \notin (0,a) \end{cases}$$

EXEMPLO I.1.3 :

Para cada $a > 0$, a função $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\frac{ax}{2})}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

que $\bar{e}$ restrição de uma função complexa holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}$, $\bar{e}$ é um elemento de $H^\infty[(-r,r)]$ desde que $r > a$ pois

$$(Ff_a)(x) = \begin{cases} -(2\pi)^{1/2} i & , \quad x \in (0,a) \\ (2\pi)^{1/2} i & , \quad x \in (-a,0) \\ 0 & , \quad x \notin (-a,a) \end{cases}$$

Em geral, notamos que se a transformada de Fourier $Ff \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ for tal que o suporte de Ff é um subconjunto compacto K do $\mathbb{R}^n$ então $f \in H^\infty[S(R)]$ desde que $K \subset S(R)$.

I.2 - DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES TESTES EM $H^\infty[S(R)]$

O teorema abaixo fornece uma primeira descrição dos elementos de $H^\infty[S(R)]$.

TEOREMA I.2.1 :

Uma condição necessária e suficiente para que f quadrado integrável sobre $\mathbb{R}^n$, seja um elemento de $H^\infty[S(R)]$ com $R = (R_1, \dots, R_n)$ é que: para cada $k = 1, \dots, n$, exista $r_k \in (0, R_k)$ tal que o suporte da transformada de Fourier Ff esteja contido no paralelepípedo aberto n -dimensional $S(r)$ onde $r = (r_1, \dots, r_n)$.

PROVA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE

O último parágrafo da seção anterior constitui a prova da condição suficiente.

PROVA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Com a consideração da não existência de números reais $r_k \in (0, R_k)$ para cada $k = 1, \dots, n$ com a propriedade de que o suporte da transformada de Fourier Ff de f está contido em $S(r)$ onde $r = (r_1, \dots, r_n)$, podemos construir uma seqüência crescente de paralelepípedos n -dimensionais $S(R_j)$ com $j = 0, 1, \dots$ de modo que a integral

$$\int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} |Ff(x)|^2 dx$$

é igual a um número real c_j estritamente positivo.

A nossa estratégia é a construção de uma função especial analítica real em todos os pontos de $S(R)$ da forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} p_{\alpha} x^{2\alpha} ; \quad x \in S(R) , \quad p_{\alpha} \geq 0$$

com a propriedade de que a integral

$$\int_{S(R)} p(x) |Ff(x)|^2 dx$$

é infinita, o que garante que f não é um elemento de $H^{\infty}[S(R)]$ e que portanto demonstra o teorema em questão.

Para tanto, definimos inicialmente

$$p_0(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m_0} \frac{x^{2\alpha}}{R_0^{2\alpha}} ; \quad x \in R^n$$

onde $m_0 \in \mathbb{N}$ é escolhido de maneira que $c_0 p_0(\tilde{R}_0) \geq 1$ e $\tilde{R}_0 \in \mathbb{R}^n$ é tal que sua única coordenada não nula é a menor coordenada de R_0 e,

$$p_1(x) = \sum_{|\alpha| = m_0+1}^{m_1} \frac{x^{2\alpha}}{R_1^{2\alpha}} ; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde $m_1 \in \mathbb{N}$ ($m_1 > m_0$) é escolhido de maneira que $c_1 p_1(\tilde{R}_1) \geq 1$ ($\tilde{R}_1$ é obtido de maneira análoga a $\tilde{R}_0$).

Por indução, definimos para cada $j = 2, 3, \dots$ uma função polinomial p_j em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$p_j(x) = \sum_{|\alpha| = m_{j-1}+1}^{m_j} \frac{x^{2\alpha}}{R_j^{2\alpha}} , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

onde $m_j \in \mathbb{N}$ ($m_j > m_{j-1}$) é escolhido de modo que a desigualdade $c_j p_j(\tilde{R}_j) \geq 1$ é válida ($\tilde{R}_j$ é obtido de maneira análoga a $\tilde{R}_0$). Então

$$p(x) = p_0(x) + p_1(x) + \dots ; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

é a função procurada pois a integral abaixo é infinita. De fato,

$$\begin{aligned} & \int_{S(R)} p(x) |Ff(x)|^2 dx = \\ &= \int_{S(R_0)} p(x) |Ff(x)|^2 dx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p(x) |Ff(x)|^2 dx \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p_j(x) |Ff(x)|^2 dx \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p_j(\tilde{R}_j) |Ff(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j p_j(\tilde{R}_j) = +\infty . \end{aligned}$$

Nos exemplos da seção anterior, todos os elementos de $H^\infty[S(R)]$ eram funções restrições de funções complexas holomorfas em todos os pontos de $S(R)$. O próximo resultado comprova que toda função teste em $H^\infty[S(R)]$ é desta forma.

TEOREMA I.2.2 :

Uma condição necessária e suficiente para que uma função f , quadrado integrável sobre $\mathbb{R}^n$, seja um elemento de $H^\infty[S(R)]$ com $R = (R_1, \dots, R_n)$ é que: f seja restrição de uma função F complexa holomorfa definida sobre $\mathbb{C}^n$ satisfazendo

$$|F(z)| \leq C \exp[r_1|y_1| + \dots + r_n|y_n|]$$

onde para cada $k = 1, \dots, n$, $r_k \in (0, R_k)$, $C > 0$ e $z = (z_1, \dots, z_n) = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

PROVA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Consideremos $f \in H^\infty[S(R)]$. Pelo teorema anterior, para cada $k = 1, \dots, n$ existe $r_k \in (0, R_k)$ de tal modo que o paralelepípedo n -dimensional $S(r)$ com $r = (r_1, \dots, r_n)$ contém o suporte da transformada de Fourier Ff de f . Pelo fato de que $Ff \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$,

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S(r)} \exp(ixy) Ff(y) dy ; \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos para $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ onde $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$F(z) = (2\pi)^{-n/2} \int_{S(r)} \exp[i(x+iy)u] Ff(u) du.$$

A função F é uma função complexa holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}^n$ cuja restrição a $\mathbb{R}^n$ é f . Além disso, se $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{S(r)} \exp(-yu) |Ff(u)| du \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \exp[r_1|y_1| + \dots + r_n|y_n|] \int_{S(r)} |Ff(u)| du \\ &\leq C \exp[r_1|y_1| + \dots + r_n|y_n|] \end{aligned}$$

$$\text{com } C = (2\pi)^{-n/2} \int_{S(r)} |Ff(u)| \, du .$$

PROVA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE

A condição suficiente é consequência da versão clássica do Teorema de Paley-Wiener encontrada no Capítulo 0 .

Observação: Com esse resultado , pelos exemplos da seção anterior, verifica-se que a invariância de $H^\infty[S(R)]$ em relação a transformada de Fourier não ocorre , isto é , o fato de $f \in H^\infty[S(R)]$ não implica que $Ff \in H^\infty[S(R)]$.

COROLÁRIO I.2.1 :

Consideremos $f \in H^\infty[S(R)]$ e $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^n$. Então a função f_{z_0} , translação de f por z_0 , definida por

$$f_{z_0}(x) = f(x - z_0) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

também é um elemento de $H^\infty[S(R)]$.

PROVA

Com a notação do teorema anterior, f é restrição a $\mathbb{R}^n$ de uma função complexa F holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}^n$ satisfazendo: se $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$,

$$|F(z)| \leq C \exp[r_1|y_1| + \dots + r_n|y_n|]$$

A função f_{z_0} é restrição a $\mathbb{R}^n$ da função complexa F_{z_0} definida por $F_{z_0}(z) = F(z - z_0)$, $z \in \mathbb{C}^n$ que é holomorfa em todos os pontos de $\mathbb{C}^n$ e que satisfaz a desigualdade: se $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$,

$$|F_{z_0}(z)| \leq C \exp[r_1|y_{01}| + \dots + r_n|y_{0n}|] \cdot \exp[r_1|y_1| + \dots + r_n|y_n|]$$

onde $y_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Isto demonstra que $f_{z_0} \in H^\infty[S(R)]$.

O próximo teorema encerra a descrição de $H^\infty[S(R)]$.

TEOREMA I.2.3 :

$H^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço vetorial denso no espaço vetorial complexo $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

PROVA

Consideremos $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Para cada $j = 1, 2, \dots$, definimos $f_j = F^{-1} g_j$ onde $g_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e a sequência $(g_j)_{j=1,2,\dots}$ é tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_j(x) - Ff(x)|^2 dx = 0$$

(Isto decorre da densidade de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$). Então para cada $j = 1, 2, \dots$, $f_j \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |Ff_j(x) - Ff(x)|^2 dx = 0$$

o que prova o teorema.

A QUESTÃO DA DENSIDADE DE $H^\infty[S(R)]$ QUANDO $S(R) \subsetneq \mathbb{R}^n$

No caso de $S(R) \subsetneq \mathbb{R}^n$ com $R = (R_1, \dots, R_n)$ e $0 < R_k < \infty$ para cada $k = 1, \dots, n$, $H^\infty[S(R)]$ é um subespaço vetorial denso no subespaço vetorial do $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído pelas fun

ções f , restrições a $\mathbb{R}^n$ de funções F complexas holomorfas em todos os pontos do $\mathbb{C}^n$ do seguinte tipo exponencial: se $z = x + iy = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$|F(z)| \leq C \exp[R_1|y_1| + \dots + R_n|y_n|]$$

com $C > 0$. De fato, se f for como acima, definimos para cada $j = 1, 2, 3, \dots$

$$f_j(x) = f[(1 - \frac{1}{j})x] \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Como para cada $j = 1, 2, \dots$, f_j é restrição a $\mathbb{R}^n$ da função complexa F_j definida por

$$F_j(z) = F[(1 - \frac{1}{j})z] \quad , \quad z \in \mathbb{C}^n$$

que é holomorfa em todos os pontos do $\mathbb{C}^n$ e que satisfaz a desigualdade: se $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$,

$$|F_j(z)| \leq C \exp[(1 - \frac{1}{j}) R_1 |y_1| + \dots + (1 - \frac{1}{j}) R_n |y_n|] .$$

Então pelo Teorema I.2.2, $f_j \in H^\infty[S(R)]$ e

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f[(1 - \frac{1}{j})x] - f(x)|^2 dx = 0$$

pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue ([20], pág.81).

No caso em que $S(R) \subsetneq \mathbb{R}^n$ com $R = (R_1, \dots, R_n)$ e $R_k = +\infty$ para algum $k = 1, \dots, n$, $H^\infty[S(R)]$ é um subespaço vetorial denso no subespaço vetorial do $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ constituído pelas funções f restrições a $\mathbb{R}^n$ de funções F complexas holomorfas em todos os pontos do $\mathbb{C}^n$ do seguinte tipo exponencial: se $z = x + iy = (x_1, \dots, x_n) + i(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$|F(z)| \leq C \exp[\hat{R}_1|y_1| + \dots + \hat{R}_n|y_n|]$$

onde $C > 0$ e para cada $k = 1, \dots, n$, $\hat{R}_k = R_k$ quando $R_k < +\infty$ e $\hat{R}_k = 0$ quando $R_k = +\infty$. A idéia da demonstração para esta situação será mostrada abaixo no caso particular em que $S(R) \subseteq \mathbb{R}^2$ com $R = (R_1, R_2)$, $R_1 = +\infty$ e $R_2 < +\infty$. Consideremos $f \in L^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ onde f é restrição a $\mathbb{R}^2$ de uma função F complexa holomorfa em todos os pontos do $\mathbb{C}^2$ do seguinte tipo exponencial: se $(z_1, z_2) = (x_1, x_2) + i(y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$|F(z_1, z_2)| \leq C \exp[R_2 |y_2|]$$

com $C > 0$. Definimos para cada $j = 1, 2, \dots$,

$$f_j(x_1, x_2) = f[(1 - \frac{1}{j})x_1, (1 - \frac{1}{j})x_2], \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

a qual é restrição a $\mathbb{R}^2$ da função F_j dada por

$$F_j(z_1, z_2) = F[(1 - \frac{1}{j})z_1, (1 - \frac{1}{j})z_2], \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

que é uma função complexa holomorfa em todos os pontos do $\mathbb{C}^2$.

Da desigualdade

$$|F_j(z_1, z_2)| \leq C \exp[(1 - \frac{1}{j}) R_2 |y_2|] \exp[j |y_1|]$$

segue pelo Teorema I.2.2 que $f_j \in H^\infty[S(R)]$ e, como no caso anterior,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |f_j(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)|^2 dx = 0$$

I.3 - A NOÇÃO DE CONVERGÊNCIA DE ELEMENTOS EM $H^\infty[S(R)]$

A fim de precisarmos o conceito de convergência de uma seqüência de elementos em $H^\infty[S(R)]$, vamos considerar a topologia vetorial em $H^\infty[S(R)]$ dada pelo próximo teorema, cuja de

monstração é consequência imediata dos resultados contidos em [21], pág. 24 .

TEOREMA I.3.1 :

Para cada função analítica real em todos os pontos de $S(R)$ da forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} p_{\alpha} x^{2\alpha} ; \quad x \in S(R) , \quad p_{\alpha} \geq 0$$

definimos

$$N(\cdot; p) : H^{\infty}[S(R)] \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$N(f; p) = \left[\int_{\mathbb{R}^n} p(x) |Ff(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

Então

- a. $N(\cdot; p)$ é uma seminorma sobre $H^{\infty}[S(R)]$
- b. A família $N(\cdot; p)$ com p descrita acima, é uma família separante de seminormas, a qual induz canonicamente uma topologia vetorial de Hausdorff em $H^{\infty}[S(R)]$ ($H^{\infty}[S(R)]$ munido com tal topologia é um espaço vetorial complexo topológico localmente convexo).
- c. O conceito de convergência de uma seqüência de elementos em $H^{\infty}[S(R)]$ equipado com a topologia induzida pela família de seminormas $N(\cdot; p)$ é assim caracterizado: a seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$ de elementos de $H^{\infty}[S(R)]$ é convergente a $f \in H^{\infty}[S(R)] \iff$ para cada seminorma $N(\cdot; p)$ da família em questão,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} N(f_j - f; p) = 0$$

Uma caracterização mais simples da noção de convergência de uma seqüência de elementos em $H^\infty[S(R)]$ é mostrada no próximo teorema.

TEOREMA I.3.2 :

Uma condição necessária e suficiente para uma seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$ de elementos de $H^\infty[S(R)]$ com $R = (R_1, \dots, R_n)$ ser convergente a um elemento $f \in H^\infty[S(R)]$ é que: para cada $k = 1, \dots, n$, existe $r_k \in (0, R_k)$ de tal forma que

a. para cada $j = 1, 2, \dots$ o suporte da transformada de Fourier Ff_j de f_j está contido no paralelepípedo n -dimensional aberto $S(r)$ onde $r = (r_1, \dots, r_n)$;

$$b. \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S(R)} |Ff_j(x) - Ff(x)|^2 dx = 0$$

PROVA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

A parte b. da tese em questão está contida na hipótese.

Suponhamos sem perda de generalidade que $f \equiv 0$ e que a parte a. da tese não é válida. Isto significa que podemos construir uma seqüência crescente de n -paralelepípedos abertos $(S(R_j))_{j=1,2,\dots}$ convergente a $S(R)$ e uma subseqüência $(f_{s_j})_{j=1,2,\dots}$ da seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$ elementos de $H^\infty[S(R)]$ de tal forma que a integral

$$\int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} |Ff_{s_j}(x)|^2 dx$$

é um número real c_j estritamente positivo. Se p for a função especialmente construída na demonstração do Teorema I.2.1, temos

$$\begin{aligned} \int_{S(R)} p(x) |Ff_{s_j}(x)|^2 dx &\geq \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p_j(x) |Ff_{s_j}(x)|^2 dx \geq \\ &\geq p_j(R_j) \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} |Ff_{s_j}(x)|^2 dx \geq \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

o que implica que a seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$ de $H^\infty[S(R)]$ não é convergente para $f = 0$.

PROVA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE

Necessitamos mostrar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} N(f_j - f; p) = 0$$

onde $N(\cdot; p)$ é uma seminorma da família de seminormas que induzem a topologia considerada de $H^\infty[S(R)]$. O limite em questão é nulo quando lembramos que a função p ; por ser contínua em todos os pontos do subconjunto compacto $\overline{S(r)}$, fecho do n -paralelepípedo aberto $S(r)$ inteiramente contido em $S(R)$, é uma função limitada sobre $S(r)$.

TEOREMA I.3.3 :

O espaço vetorial complexo topológico $H^\infty[S(R)]$ é seqüencialmente completo.

PROVA

Consideremos $(f_j)_{j=1,2,\dots}$ uma seqüência de Cauchy contida em $H^\infty[S(R)]$. Isto quer dizer que para cada seminorma $N(\cdot; p)$ da família considerada para a topologia de $H^\infty[S(R)]$,

a seqüência de números reais $(N(f_j; p))_{j=1,2,\dots}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Temos que demonstrar a existência de um elemento f em $H^\infty[S(R)]$ que é o limite da seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$. Considerando, em particular, $p(x) = 1, x \in \mathbb{R}^n$, vemos que a seqüência em questão é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Como $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é completo, existe f em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S(R)} |f_j(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S(R)} |Ff_j(x) - Ff(x)|^2 dx = 0$$

Para concluirmos que f é o limite em $H^\infty[S(R)]$ da seqüência $(f_j)_{j=1,2,\dots}$, resta apenas saber da existência de um n-paralelepípedo aberto $S(r)$ inteiramente contido em $S(R)$ que contenha os suportes das transformadas de Fourier Ff_j de f_j quando $j = 1, 2, \dots$. A não existência de tal paralelepípedo implicaria que, com a mesma notação do teorema anterior,

$$\begin{aligned} & \int_{S(R)} p(x) |Ff_{s_j} - Ff_{s_{j_0}}(x)|^2 dx \geq \\ & \geq \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p(x) |Ff_{s_j}(x) - Ff_{s_{j_0}}(x)|^2 dx \geq \\ & \geq \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} p(x) |Ff_{s_j}(x)|^2 dx \geq 1 \end{aligned}$$

quando tomamos o cuidado de escolher $j_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que a intersecção de $S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)$ com o suporte de $Ff_{s_{j_0}}$ seja vazio, o que é uma contradição. (Aqui, convém observar que a transformada de Fourier de $H^\infty[S(R)]$ em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é contínua).

I.4 - INVARIÂNCIA DE $H^\infty[S(R)]$ EM RELAÇÃO AOS OPERADORES
DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE ORDEM INFINITA
E DE COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES
COM SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM $S(R)$

Para cada $k = 1, \dots, n$, seja $D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$ e para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, seja $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Consideremos a classe de operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita com coeficientes complexos constantes dada por

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha D^\alpha, \quad A_\alpha \in \mathbb{C}$$

cujo símbolo definido por

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha x^\alpha, \quad x \in S(R)$$

é uma função analítica em todos os pontos de $S(R)$.

A classe dos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita inclui os operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes de ordem finita.

A invariância de $H^\infty[S(R)]$ em relação aos operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes de ordem finita, isto é, o fato de $f \in H^\infty[S(R)]$ implicar que $A_N(D)f \in H^\infty[S(R)]$, onde $A_N(D) = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha D^\alpha$, é facilmente comprovada a partir da relação

$$F[A_N(D)f](x) = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha x^\alpha Ff(x)$$

Para tratarmos da invariância de $H^\infty[S(R)]$ em relação aos

operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita $A(D)$ com símbolos analíticos A em $S(R)$, devemos ter o cuidado de precisar o significado de $A(D)f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha} D^{\alpha} f$ quando $f \in H^{\infty}[S(R)]$ que é o seguinte: $A(D)f$ é o limite em $H^{\infty}[S(R)]$ da seqüência $(A_N(D)f)_{N=0,1,\dots}$ de elementos de $H^{\infty}[S(R)]$ ou, em outras palavras, $A(D)f$ é a função de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ cuja transformada de Fourier é a função g de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ que tem suporte contido em $S(R)$ e que é definida sobre $S(R)$ por

$$g(x) = A(x) Ff(x), \quad x \in S(R)$$

isto é,

$$F[A(D)f](x) = A(x) (Ff)(x), \quad x \in S(R)$$

Observação: O fato de $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(D)f = F^{-1}g$ em $H^{\infty}[S(R)]$ é consequência do Teorema I.3.2.

Vamos agora ao resultado principal desta seção.

TEOREMA I.4.1 (*invariância de $H^{\infty}[S(R)]$ em relação aos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita com coeficientes complexos constantes e símbolos analíticos em $S(R)$*):

Consideremos A uma função analítica em todos os pontos do n -paralelepípedo aberto $S(R)$. Então o operador

$$A(D) : H^{\infty}[S(R)] \rightarrow H^{\infty}[S(R)]$$

acima definido é um operador linear contínuo sobre $H^{\infty}[S(R)]$.

PROVA

Para verificar a continuidade do operador linear $A(D)$

sobre $H^\infty[S(R)]$, basta para cada f em $H^\infty[S(R)]$, provar uma desigualdade do tipo

$$N(A(D)f; p) \leq C_1 N(f; q_1) + \dots + C_s N(f; q_s)$$

onde

$$q_k(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} q_{\alpha k} x^{2\alpha}; \quad x \in S(R), \quad q_{\alpha k} \geq 0, \quad k = 1, \dots, s$$

é real analítica em todos os pontos de $S(R)$.

COROLÁRIO I.4.1 :

Consideremos A uma função analítica em todos os pontos de $S(\lambda, R)$ com

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha(\lambda)(x-\lambda)^\alpha, \quad x \in S(\lambda, R), \quad A_\alpha(\lambda) \in \mathbb{C}$$

Então $H^\infty[S(\lambda, R)]$ é invariante em relação aos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita, da forma

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha(\lambda)(D - \lambda I)^\alpha$$

Além disso, $A(D)$ é um operador linear contínuo sobre $H^\infty[S(\lambda, R)]$.

EXEMPLO I.4.1 :

Para cada $t \in \mathbb{R}$ e para cada $b \in \mathbb{C}$ com $|b| = 1$, consideremos a função $A_b(\cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$A_b(x, t) = \exp(-b t x^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-b t x^2)^j}{j!}$$

A função $A_b(\cdot, t)$ é função símbolo do operador diferencial parcial linear de ordem infinita $A_b(D, t) : H^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow H^\infty(\mathbb{R})$ que é

indicado simbolicamente por $\exp(-b t D^2)$ com $D = -i \frac{d}{dx}$. Afirmamos que se $f \in H^\infty(\mathbb{R})$ então

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [A_b(D,t)f](x) = \\ &= [\exp(-b t D^2)f](x) = \\ &= \begin{cases} (4 \pi b t)^{-1/2} \int_{-i\sqrt{b}}^{i\sqrt{b}} \exp\left[\frac{-s^2}{4bt}\right] f(x-s) ds, & t < 0 \\ f(x) & , \quad t = 0 \\ (4 \pi b t)^{-1/2} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \exp\left[\frac{-s^2}{4bt}\right] f(x-s) ds, & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

onde para $t < 0$, a curva de integração é a reta do plano complexo determinada pelos pontos $-i\sqrt{b}$ e $i\sqrt{b}$ e, para $t > 0$, a curva de integração é a reta do plano complexo determinada pelos pontos $-\sqrt{b}$ e $\sqrt{b}$. De fato, para $t > 0$ e $f \in H^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &(4 \pi b t)^{-1/2} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \exp\left[\frac{-s^2}{4bt}\right] f(x-s) ds = \\ &= (4 \pi b t)^{-1/2} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \exp\left[\frac{-s^2}{4bt}\right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (-s)^j ds = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x) \pi^{-1/2} (-4bt)^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) s^j ds = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(2j)}(x)}{j!} (bt)^j = [\exp(-b t D^2)f](x) \end{aligned}$$

lembrando que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-s^2) s^j ds = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!} \pi^{-1/2} (4bt)^m \Gamma(m+\frac{1}{2}), & j = 2m \\ 0 & , \quad j = 2m+1 \end{cases}$$

já que

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)! \pi^{1/2}}{2^{2m-1} (m-1)!} .$$

O caso $t < 0$ é feito de modo análogo. Quando $t = 0$, basta mostrar que nos pontos de continuidade x_0 da função $f(x)$, $u(x,t) \rightarrow f(x_0)$ se $t \rightarrow 0$ e $x \rightarrow x_0$ ([27], pág. 199).

Finalizando, podemos concluir que

$$(4 \pi b t)^{-1/2} \int_{-\sqrt{b} \operatorname{sign} t}^{\sqrt{b} \operatorname{sign} t} \exp\left[-\frac{s^2}{4bt}\right] f(x-s) ds = u(x,t) .$$

C A P Í T U L O I I

O ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ DE $H^{\infty}[S(\lambda, R)]$

II.1 - DEFINIÇÃO DO ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS

$$H^{-\infty}[S(\lambda, R)] \text{ DE } H^{\infty}[S(\lambda, R)]$$

Para cada $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e para cada $R = (R_1, \dots, R_n)$ com $0 < R_k \leq +\infty$, $k = 1, \dots, n$, o espaço das funções generalizadas $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$, do espaço das funções testes $H^{\infty}[S(\lambda, R)]$, é constituído de todos os funcionais lineares contínuos definidos sobre $H^{\infty}[S(\lambda, R)]$.

Quando $\lambda = 0 \in \mathbb{R}^n$, $H^{-\infty}[S(0, R)]$ é indicado simplesmente por $H^{-\infty}[S(R)]$ o que está em concordância com o símbolo $H^{\infty}[S(R)]$ adotado para o espaço das funções testes correspondente.

Também por simplicidade, estabeleceremos neste capítulo, as propriedades para o desenvolvimento do trabalho para $H^{-\infty}[S(R)]$. A adaptação dos resultados a $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ com $\lambda \neq 0$ não apresentará grandes dificuldades.

Sendo assim, $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ se e somente se

a. T é linear, isto é,

$$T(af + bg) = a T(f) + b T(g)$$

$\forall f, g \in H^\infty[S(R)]$; $a, b \in \mathbb{C}$

b. T é contínuo, ou seja, para seminormas $N(f; p_1), \dots, N(f; p_s)$ da família de seminormas que define a topologia vetorial de $H^\infty[S(R)]$, a desigualdade

$$|T(f)| \leq C_1 N(f; p_1) + \dots + C_s N(f; p_s)$$

com $C_1, \dots, C_s > 0$ e $s \geq 1$ é válida.

Antes de passarmos a caracterização das funções generalizadas de $H^{-\infty}[S(R)]$, colocamos um primeiro exemplo.

EXEMPLO II.1.1 :

Para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, está associada uma função generalizada T_h em $H^{-\infty}[S(R)]$, a qual é dada por: se $f \in H^\infty[S(R)]$,

$$T_h(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x) dx$$

De fato, as desigualdades abaixo, válidas para $f \in H^\infty[S(R)]$, mostram que T_h está bem definida e é contínua (a linearidade de T_h é evidente) pois

$$\begin{aligned} |T_h(f)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |h(x)| dx \leq \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Ff(x)|^2 dx \right]^{1/2} \end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\leq C N(f; p)$$

com $C^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^2 dx$ e $p(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Este exemplo, permite dizer que toda função $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é com um pequeno abuso de linguagem, uma função generalizada de $H^{-\infty}[S(R)]$.

A partir da próxima seção, o valor de $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ em $f \in H^{\infty}[S(R)]$ será indicado ora por $T(f)$ ora por $\langle T, f \rangle$.

II.2 - A TRANSFORMAÇÃO DE FOURIER NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}[S(R)]$

O conceito da transformada de Fourier é estendido ao espaço das funções generalizadas $H^{-\infty}[S(R)]$ naturalmente.

A transformada de Fourier FT de $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ é o funcional linear definido sobre $L^2_{\text{comp}}[S(R); \mathbb{C}]$ pela fórmula

$$\langle FT, Fg \rangle = \langle T, g \rangle, \quad \forall Fg \in L^2_{\text{comp}}[S(R); \mathbb{C}] \quad \text{onde} \quad Fg(x) = Fg(-x)$$

(notemos que: $g \in H^{\infty}[S(R)]$). Como o funcional FT assim definido sobre $L^2_{\text{comp}}[S(R); \mathbb{C}]$ é contínuo, FT é identificado com um elemento $\hat{T}$ de $L^2_{\text{loc}}[S(R); \mathbb{C}]$, pela dualidade existente entre $L^2_{\text{comp}}[S(R); \mathbb{C}]$ e $L^2_{\text{loc}}[S(R); \mathbb{C}]$, ou seja, para cada $g \in L^2_{\text{comp}}[S(R); \mathbb{C}]$,

$$\langle FT, g \rangle = \int_{S(R)} \hat{T}(x) g(x) dx.$$

Os valores de $\hat{T}$ sobre $S(R)$ são univocamente determinados pela relação acima. Os valores de $\hat{T}$ sobre o subconjunto complementar de $S(R)$ em $\mathbb{R}^n$ são irrelevantes, mas, por conveniência, assumiremos que $\hat{T}(x) = 0$ para $x \notin S(R)$. Esta identi

cação estará presente no principal teorema da seção II.5.

II.3 - INVARIÂNCIA DE $H^{-\infty}[S(R)]$ EM RELAÇÃO AOS OPERADORES
DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE ORDEM INFINITA
E DE COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES COM
SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM $S(R)$

Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ($n \geq 1$), a derivada generalizada $D^\alpha T$ de $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ é o funcional linear definido sobre $H^\infty[S(R)]$ pela fórmula

$$\langle D^\alpha T, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha f \rangle ; \quad f \in H^\infty[S(R)]$$

onde $D^\alpha f = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f$. Como o funcional assim de

finido é contínuo sobre $H^\infty[S(R)]$, $D^\alpha T \in H^{-\infty}[S(R)]$ (Utilizamos o fato: $f \in H^\infty[S(R)]$ implica $D^\alpha f \in H^\infty[S(R)]$).

Por linearidade, para cada função polinomial A_N com coeficientes complexos constantes dada por

$$A_N(x) = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha x^\alpha ; \quad x \in \mathbb{R}^n ,$$

$A_N(D)T = \sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha D^\alpha T$, com $T \in H^{-\infty}[S(R)]$, indica a função generalizada de $H^{-\infty}[S(R)]$ que atua sobre $H^\infty[S(R)]$ pela fórmula: se $f \in H^\infty[S(R)]$,

$$\langle A_N(D)T, f \rangle = \langle T, A_N(-D)f \rangle$$

$$\text{onde } A_N(-D)f = \sum_{|\alpha|=0}^N (-1)^{|\alpha|} A_\alpha D^\alpha f .$$

O importante é que podemos também dar significado ao sîm

bolo

$$A(D)T = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha} D^{\alpha}T, \quad A_{\alpha} \in \mathbb{C}$$

quando $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ com a condição de que

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha} x^{\alpha}; \quad x \in S(R)$$

seja uma função analítica em todos os pontos de $S(R)$. A notação $A(D)T$, com $T \in H^{-\infty}[S(R)]$, indica a função generalizada de $H^{-\infty}[S(R)]$ que atua sobre $H^{\infty}[S(R)]$ do seguinte modo: se $f \in H^{\infty}[S(R)]$,

$$\langle A(D)T, f \rangle = \langle T, A(-D)f \rangle$$

onde $A(-D)f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} A_{\alpha} D^{\alpha}f \in H^{\infty}[S(R)]$, pelo teorema da invariância I.4.1. Observamos que a continuidade de $A(D)T$ sobre $H^{\infty}[S(R)]$ é consequência da continuidade de T sobre $H^{\infty}[S(R)]$ e da continuidade de $A(-D): H^{\infty}[S(R)] \rightarrow H^{\infty}[S(R)]$.

EXEMPLO II.3.1 :

Para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ ($n \geq 1$), a função generalizada $T_{h,a}$ de $H^{-\infty}[S(R)]$ (denominada translação complexa por a da função generalizada T_h de $H^{-\infty}[S(R)]$ associada a h) é definida como

$$T_{h,a} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(ia)^{\alpha}}{\alpha!} D^{\alpha} T_h$$

tendo em vista que a função

$$\exp(iax) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(iax)^{\alpha}}{\alpha!}; \quad x \in \mathbb{R}^n$$

é analítica em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$. A atuação de $T_{h,a}$ sobre $H^\infty[S(R)]$ é a seguinte: se $f \in H^\infty[S(R)]$,

$$\begin{aligned} \langle T_{h,a}, f \rangle &= \langle T_h, \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-ia)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(x-a) dx \end{aligned}$$

*II.4 - INVARIÂNCIA DE $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ EM RELAÇÃO AOS OPERADORES
DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE ORDEM INFINITA
E DE COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES $A(D)$
COM SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM $S(-\lambda, R)$*

Com raciocínio análogo ao usado na seção anterior, conclui-se que $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ é invariante em relação ao operador $A(D)$ desde que a função símbolo de $A(-D)$, dada por $x \in S(\lambda, R) \mapsto A(-x) \in \mathbb{C}$ seja analítica. Convém observar também que $A(D)T$ com $T \in H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ indica a função generalizada de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ que age sobre $H^\infty[S(\lambda, R)]$ do seguinte modo:

$$\langle A(D)T, f \rangle = \langle T, A(-D)f \rangle$$

para cada $f \in H^\infty[S(\lambda, R)]$.

II.5 - DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE $H^{-\infty}[S(R)]$

Para descrevermos as funções generalizadas de $H^{-\infty}[S(R)]$, precisamos do seguinte lema

LEMA II.5.1 :

Consideremos $g \in L^2_{loc}[S(R); \mathbb{C}]$. Então existe uma função A analítica real estritamente positiva em todos os pontos de $S(R)$ com a propriedade de que a função quociente f de g por A , isto é, $f(x) = g(x) / A(x)$, $x \in S(R)$ é um elemento de $L^2[S(R); \mathbb{C}]$.

PROVA

A função A é da forma

$$A(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x) ; \quad x \in S(R)$$

onde

$$A_0(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{m_0} (x / R_0)^{2\alpha}$$

e m_0 é um número natural escolhido de tal forma que o número real

$$[A_0(R_0)]^{-2} \int_{S(R_1) \setminus S(R_0)} |g(x)|^2 dx$$

é menor ou igual a 1 ,

para cada $j = 1, 2, \dots$,

$$A_j(x) = \sum_{|\alpha|=m_{j-1}+1}^{m_j} (x / R_j)^{2\alpha}$$

e m_j é um número natural escolhido de modo que o número real

$$[A_j(R_j)]^{-2} \int_{S(R_{j+1}) \setminus S(R_j)} |g(x)|^2 dx$$

é menor ou igual a $(j+1)^{-2}$

$$S(R_0) \subset S(R_1) \subset \dots ; \quad \bigcup_{j=0}^{\infty} S(R_j) = S(R) .$$

A conclusão de que $\int_{S(R)} |f(x)|^2 dx$ é finita, onde f é como no enunciado do lema, é uma consequência imediata da definição de A .

Usando a dualidade existente entre o espaço $L^2_{loc}[S(R); \mathbb{C}]$ e o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre $L^2_{comp}[S(R); \mathbb{C}]$, pode-se verificar o seguinte lema:

LEMA II.5.2 :

A transformada de Fourier F de $H^{-\infty}[S(R)]$ em $L^2_{loc}[S(R); \mathbb{C}]$ é injetora.

TEOREMA II.5.1 (da caracterização das funções generalizadas de $H^{-\infty}[S(R)]$) :

Toda função generalizada $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ é da forma

$$T = A(-D)T_h$$

onde

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha} D^{2\alpha}$$

é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função símbolo A dada por

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha} x^{2\alpha}; \quad x \in S(R)$$

é analítica em todos os pontos de $S(R)$.

T_h é a função generalizada de $H^{-\infty}[S(R)]$ associada a $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ onde h tem a propriedade de que o suporte da transformada de Fourier Fh de h está inteiramente contido em $S(R)$.

PROVA

Pela seção II.2, a transformada de Fourier FT de $T \in H^{-\infty}[S(R)]$ é identificada com o elemento $\hat{T} \in L^2_{loc}[\mathbb{R}^n; \mathbb{C}]$. Pelo Lema II.5.1, existe uma função A nas condições do enunciado deste teorema de modo que a função g definida como

$$g(x) = \begin{cases} \hat{T}(x) / A(x) & , \quad x \in S(R) \\ 0 & , \quad x \notin S(R) \end{cases}$$

é um elemento de $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Considerando a função $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ tal que $Fh(-x) = g(x)$ então

$$\begin{aligned} \langle FT, f \rangle &= \int_{S(R)} \hat{T}(x) f(x) dx = \\ &= \int_{S(R)} A(x) g(x) f(x) dx = \int_{S(R)} Fh(-x) A(x) f(x) dx = \\ &= \int_{S(R)} F^{-1}h(x) F^{-1}[A(D)Ff](x) dx = \\ &= \int_{S(R)} h(y) A(D)Ff(y) dy = \langle T_h, A(D)Ff \rangle = \\ &= \langle A(-D)T_h, Ff \rangle = \langle F[A(-D)T_h], f \rangle \end{aligned}$$

para toda função f em $L^2_{comp}[S(R); \mathbb{C}]$. Assim, $FT = F[A(-D)T_h]$ e pelo Lema II.5.2, verifica-se o teorema.

Agora, sem maiores dificuldades, prova-se o teorema da se

ção seguinte:

II.6 - DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$

TEOREMA II.6.1 (da caracterização das funções generalizadas de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$) :

Toda função generalizada $T \in H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ é da forma

$$T = A(-D)T_h$$

onde

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha}(\lambda) (D - \lambda I)^{\alpha}$$

é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função símbolo

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha}(\lambda) (x - \lambda)^{\alpha}$$

é analítica em todos os pontos de $S(\lambda, R)$;

T_h é a função generalizada de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ associada a $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ onde h tem a propriedade de que o suporte da transformada de Fourier Fh de h está inteiramente contido em $S(-\lambda, R)$.

EXEMPLO II.6.1 :

A função delta de Dirac, indicada por δ , é definida sobre $H^{\infty}[S(R)]$ por

$$\langle \delta, f \rangle = f(0)$$

para cada $f \in H^\infty[S(R)]$. Para verificar que $\hat{T}$ é uma função generalizada, vamos usar o Teorema II.5.1. Seja $\hat{T} = (2\pi)^{-n/2}$. Então $\hat{T} \in L^2_{loc}[S(R); \mathbb{C}]$ e daí, pelo Lema II.5.1, existe $A(x)$ real analítica em $S(R)$ tal que $\hat{T}(x) = A(x) g(x)$ com $g \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Considerando $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com $Fh(-x) = g(x)$, pelo mesmo raciocínio do Teorema II.5.1,

$$\int_{S(R)} \hat{T}(x) f(x) dx = \langle F[A(-D)T_h], f \rangle$$

para cada $f \in L^2_{comp}[S(R); \mathbb{C}]$. Além disso, como $\hat{T} \in L^2_{loc}[S(R); \mathbb{C}]$, identifica-se este com um elemento $\tilde{T} \in (L^2_{comp}[S(R); \mathbb{C}])'$ e assim, $\tilde{T} = F[A(-D)T_h]$. Logo, $A(-D)T_h \in H^{-\infty}[S(R)]$. Resta verificar agora que $\delta = A(-D)T_h$. Mas isso ocorre pois

$$\begin{aligned} \langle F[A(-D)T_h], \psi \rangle &= \langle \hat{T}, \psi \rangle = \int_{S(R)} (2\pi)^{-n/2} \psi(x) dx = [F\psi](0) = \langle \delta, F\psi \rangle = \\ &= \langle F\delta, F^\vee(F\psi) \rangle = \langle F\delta, \psi \rangle \end{aligned}$$

para cada $\psi \in L^2_{comp}[S(R); \mathbb{C}]$.

EXEMPLO II.6.2 :

Para cada $0 \neq a \in \mathbb{C}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos a função generalizada de $H^{-\infty}[(-R, R)]$, $R > 0$:

$$E_a(t, x) = \exp(-a t D^2) \delta(x)$$

onde $D^2 = -\frac{d^2}{dx^2}$ e $\delta(x)$ é outra notação mais enfática da função delta de Dirac.

O valor do funcional $E_a(t, x)$ em $f \in H^\infty[(-R, R)]$ é

$$\begin{aligned} \langle E_a(t, x), f(x) \rangle &= \langle \delta(x), \exp(-a t D^2) f(x) \rangle \\ &= (4\pi at)^{-1/2} \int_{-\sqrt{a \operatorname{sign} t} \infty}^{\sqrt{a \operatorname{sign} t} \infty} \exp\left[\frac{-s^2}{4at}\right] f(-s) ds \end{aligned}$$

conforme o Exemplo I.4.1 .

Para $a = 0$, $E_0(t,x)$ é definido como sendo $\delta(x)$.

EXEMPLO II.6.3 :

Para cada $0 \neq a \in \mathbb{C}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, consideremos a função generalizada de $H^{-\infty}[-R,R]$, $R > 0$ definida simbolicamente por

$$F_a(t,x) = \frac{\text{sh}[a t \frac{d}{dx}]}{a \frac{d}{dx}} \delta(x)$$

cujo significado é

$$F_a(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} \delta(x)$$

onde $\delta(x)$ é a função delta de Dirac . O valor do funcional $F_a(t,x)$ em $f \in H^{\infty}((-R,R))$ é dado simbolicamente por

$$\langle F_a(t,x) , f(x) \rangle = \langle \delta(x) , \frac{\exp(at \frac{d}{dx}) - \exp(-at \frac{d}{dx})}{2a \frac{d}{dx}} f(x) \rangle$$

cujo significado é

$$\begin{aligned} & \langle \delta(x) , \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} f(x) \rangle = \\ & = \sum_{j=0}^{\infty} a^{2j} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!} f^{(2j)}(0) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} f(z) dz \end{aligned}$$

Para $a = 0$, $F_0(t,x)$ é definido como sendo $\delta(x)$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$, definimos a expressão

$$\langle Y(x+z_0), f(x) \rangle = \int_0^{+\infty} f(x-z_0) dx$$

para todas as funções f de modo que o segundo membro tenha sentido. Com esta definição para $0 \neq a \in \mathbb{C}$,

$$\langle F_a(t, x), f(x) \rangle = \frac{1}{2a} \langle Y(x+at), f(x) \rangle - \frac{1}{2a} \langle Y(x-at), f(x) \rangle$$

De fato, considerando

$$L(t, a) = \{x + it(\operatorname{Im} a) : x \geq t \operatorname{Re} a\}$$

$$U \{ (1-s)at - sat : 0 \leq s \leq 1 \}$$

$$U \{ x - it(\operatorname{Im} a) : x \geq -t \operatorname{Re} a \}$$

temos que

$$\int_{L(t, a)} f(z) dz = 0$$

que é equivalente à soma das seguintes três integrais

$$\int_{+\infty}^0 f(x+at) dx + \int_{at}^{-at} f(z) dz + \int_0^{+\infty} f(x-at) dx = 0$$

ou

$$\int_{-at}^{at} f(z) dz = \int_0^{+\infty} f(x-at) dx - \int_0^{+\infty} f(x+at) dx$$

C A P Í T U L O III

O ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^\infty(G)$ E O ESPAÇO ASSOCIADO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}(G)$

III.1 - DEFINIÇÃO DO ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^\infty(G)$

O espaço das funções testes $H^\infty(G)$, onde G é um subconjunto aberto, não vazio do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), coincidirá com $H^\infty[S(\lambda, R)]$ quando $G = S(\lambda, R)$ e será definido de modo a ter a mesma propriedade de invariância em relação a operadores diferenciais parciais lineares de ordem finita ou infinita com coeficientes complexos constantes com símbolos analíticos em todos os pontos de G . Sendo assim, definimos

$$H^\infty(G) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : f = \sum_{\lambda \in G} f_\lambda, f_\lambda \in H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]\}$$

onde ressaltamos que a somatória é efetuada sobre todos os subconjuntos finitos de elementos de G e, além disso, quando escrevemos que $f = \sum_{\lambda \in G} f_\lambda \in H^\infty(G)$ com $f_\lambda \in H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]$ temos em mente que $S(\lambda, R_\lambda) \subset G$.

III.2 - DESCRIÇÃO DOS ELEMENTOS DO ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^\infty(G)$

A descrição das funções testes de $H^\infty(G)$ é feita através da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

TEOREMA III.2.1 (da caracterização das funções testes de $H^\infty(G)$):

O espaço das funções testes $H^\infty(G)$, onde G é um subconjunto aberto, não vazio do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), é constituído por todas as funções $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ cuja transformada de Fourier Ff tem suporte compacto inteiramente contido em G .

PROVA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Se $f = \sum_{\lambda \in G} f_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ com $f_\lambda \in H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]$ e $S(\lambda, R_\lambda) \subset G$, onde a somatória é finita, é evidente que o suporte da transformada de Fourier Ff é compacto e está inteiramente contido em G , uma vez que, para cada $\lambda \in G$ constante na somatória, o suporte da transformada de Fourier Ff_λ de f_λ é compacto e está inteiramente contido em $S(\lambda, R_\lambda) \subset G$.

PROVA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE

Consideremos $f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ cuja transformada de Fourier Ff tem suporte contido em um subconjunto compacto K inteiramente contido em G . Então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in G$ e subconjuntos Lebesgue mensuráveis dois a dois disjuntos $K_1, \dots, K_N$ com as duas propriedades abaixo:

$$1. \quad K = \bigcup_{j=1}^N K_j$$

$$2. \quad \text{para cada } j = 1, \dots, N, \quad K_j \subset S(\lambda_j, R_j) \subset G \text{ onde } S(\lambda_j, R_j)$$

é um n -paralelepípedo aberto com centro em λ_j e todos de comprimento $2R_{j1}, \dots, 2R_{jn}$.

Portanto,

$$Ff = \left(\sum_{j=1}^N X_{K_j} \right) Ff = \sum_{j=1}^N (X_{K_j} Ff)$$

onde para cada $j = 1, \dots, N$, X_{K_j} é a função característica do subconjunto K_j e

$$f = \sum_{j=1}^N f_{\lambda_j}$$

onde para cada $j = 1, \dots, N$, $Ff_{\lambda_j} = X_{K_j} Ff$. Como para cada $j = 1, \dots, N$, $f_{\lambda_j} \in H^\infty[S(\lambda_j, R_j)]$, o teorema está provado.

III.3 - INVARIÂNCIA DO ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^\infty(G)$ EM RELAÇÃO AOS OPERADORES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE ORDEM INFINITA E DE COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES COM SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM G

Consideremos G um subconjunto aberto, não vazio do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) e A uma função analítica em todos os pontos de G , com valores complexos. Antes de definirmos o sentido de $A(D)f$ com $f \in H^\infty(G)$, façamos a seguinte consideração preliminar: se $f \in H^\infty[S(\lambda_1, R_1)] \cap H^\infty[S(\lambda_2, R_2)]$ com $S(\lambda_1, R_1) \subset G$ e $S(\lambda_2, R_2) \subset G$, o símbolo $A(D)f$, considerando f em $H^\infty[S(\lambda_1, R_1)]$, é um elemento de $H^\infty[S(\lambda_1, R_1)]$ e, considerando f em $H^\infty[S(\lambda_2, R_2)]$, é um elemento de $H^\infty[S(\lambda_2, R_2)]$, isto é, se

for a expansão de Taylor de A em $\lambda_1 \in G$,

$$A(D)f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha}(\lambda_1) (D-\lambda_1)^{\alpha} f \in H^{\infty}[S(\lambda_1, R_1)]$$

e se

$$A(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha}(\lambda_2) (x-\lambda_2)^{\alpha}$$

for a expansão de Taylor de A em $\lambda_2 \in G$,

$$A(D)f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{\alpha}(\lambda_2) (D-\lambda_2)^{\alpha} f \in H^{\infty}[S(\lambda_2, R_2)]$$

mas felizmente não há ambigüidade no símbolo $A(D)f$ pensado em $H^{\infty}[S(\lambda_1, R_1)]$ ou em $H^{\infty}[S(\lambda_2, R_2)]$ uma vez que as transformadas de Fourier das duas funções consideradas acima são iguais a função produto de A pela transformada de Fourier Ff de f .

Após estas considerações preliminares, definimos sem ambigüidade $A(D)f$ com $f \in H^{\infty}(G)$ - desde que A seja uma função analítica em todos os pontos de G , com valores complexos - da seguinte maneira: se $f = \sum_{\lambda \in G} f_{\lambda} \in H^{\infty}(G)$, onde a somatória é finita e para cada $\lambda \in G$ constante da somatória, $f_{\lambda} \in H^{\infty}[S(\lambda, R_{\lambda})]$ com $S(\lambda, R_{\lambda}) \subset G$,

$$A(D)f = \sum_{\lambda \in G} A(D)f_{\lambda}$$

onde $A(D)f_{\lambda} \in H^{\infty}[S(\lambda, R_{\lambda})]$. O símbolo $A(D)f$ assim definido não é ambíguo pois independe da representação de f escrita como somatória. Além disso, pela própria definição, temos que $A(D)f \in H^{\infty}(G)$ quando $f \in H^{\infty}(G)$, o que, em outros termos, é a invariância de $H^{\infty}(G)$ em relação aos operadores diferenciais

parciais lineares de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes cujos símbolos são analíticos em todos os pontos de G .

Como foi observado no Capítulo I, convém lembrar que a classe dos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita, inclui os operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes complexos constantes de ordem finita.

A título de complemento, devemos acrescentar que o operador linear $A(D) : H^\infty(G) \rightarrow H^\infty(G)$ agora definido é seqüencialmente contínuo, desde que a noção de convergência em $H^\infty(G)$ seja a seguinte:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j = f$$

em $H^\infty(G)$ se e somente se existe uma representação única, isto é, existe um subconjunto finito e fixo F de G tal que

$$f_j - f = \sum_{\lambda \in F} f_{j\lambda}$$

com $f_{j\lambda} \in H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]$, $j = 1, 2, \dots$ e $S(\lambda, R_\lambda) \subset G$ para cada $\lambda \in F$. Ainda mais, para cada $\lambda \in F$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{j\lambda} = 0$$

em $H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]$.

III.4 - O ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^{-\infty}(G)$ ASSOCIADO AO ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTES $H^\infty(G)$

O espaço das funções generalizadas $H^{-\infty}(G)$ associado ao

espaço das funções testes $H^\infty(G)$ onde G é um subconjunto não vazio, aberto do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), é constituído por todos os funcionais lineares contínuos definidos sobre $H^\infty(G)$.

III.5 - INVARIÂNCIA DE $H^{-\infty}(G)$ EM RELAÇÃO AOS OPERADORES
DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE ORDEM INFINITA
E DE COEFICIENTES COMPLEXOS CONSTANTES
 $A(D)$ COM SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM $-G$

Para a descrição dos elementos de $H^{-\infty}(G)$, é necessário definirmos a atuação de um operador diferencial parcial linear de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes $A(D)$ onde a função símbolo associada, dada por $x \in G \mapsto A(-x) \in \mathbb{C}$ é analítica. Desse modo, se $T \in H^{-\infty}(G)$,

$$\langle A(D)T, f \rangle = \langle T, A(-D)f \rangle$$

para cada $f \in H^\infty(G)$. Como o funcional assim definido é linear contínuo sobre $H^\infty(G)$ (ver apêndice do cap. III), conclui-se que $A(D)T \in H^{-\infty}(G)$. Isto mostra que $H^{-\infty}(G)$ também é invariante em relação aos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes.

III.6 - DESCRIÇÃO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS DE $H^{-\infty}(G)$

Passaremos a descrição das funções generalizadas de $H^{-\infty}(G)$ pelo resultado abaixo:

TEOREMA III.6.1 (da caracterização dos elementos de $H^{-\infty}(G)$) :

O espaço das funções generalizadas $H^{-\infty}(G)$ associado ao espaço das funções testes $H^{\infty}(G)$, é constituído por todos os funcionais lineares contínuos T , definidos sobre $H^{\infty}(G)$ da forma

$$T = A(-D) T_h$$

onde

$h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é tal que o suporte da transformada de Fourier Fh de h está inteiramente contido em $-G = \{-\lambda; \lambda \in G\}$.

T_h é o funcional linear contínuo sobre $H^{\infty}(G)$ correspondente a $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, isto é, se $f \in H^{\infty}(G)$,

$$\langle T_h, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x) dx$$

$A(-D)$ é o operador diferencial parcial linear de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes cuja função símbolo, $x \in G \mapsto A(x) \in \mathbb{C}$ é analítica em todos os pontos de G .

PROVA

Primeiramente, se T for da forma estabelecida no enunciado do teorema,

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \langle A(-D) T_h, f \rangle = \langle T_h, A(D)f \rangle = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [A(D)f](x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} F[A(D)f](x) Fh(-x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} A(x) Ff(x) Fh(-x) dx = \int_G A(x) Ff(x) Fh(-x) dx, \end{aligned}$$

$$\forall f \in H^{\infty}(G)$$

(Lembramos que o suporte da transformada de Fourier Ff de f

é compacto e está inteiramente contido em G , uma vez que $f \in H^\infty(G)$ e que portanto, os valores de Fh nos pontos que estão no subconjunto complementar de G em $\mathbb{R}^n$ são irrelevantes). Concluimos que o funcional T assim definido é linear e contínuo sobre $H^\infty(G)$ o que implica que $T \in H^{-\infty}(G)$ (ver apêndice do cap. III).

Em segundo lugar, para mostramos que toda $T \in H^{-\infty}(G)$ tem a forma estabelecida no teorema, lembramos que se $S(\lambda, R) \subset G$ então $T \in H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$. Como $T \in H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$,

$$T = A(-D)T_h = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} A_\alpha(\lambda) (D+\lambda I)^\alpha T_h$$

para alguma função A analítica em todos os pontos de $S(\lambda, R)$ e para alguma $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ cuja transformada de Fourier Fh tem suporte inteiramente contido em $S(-\lambda, R)$. A função procurada, analítica em todos os pontos de G , é aquela que em cada $S(\lambda, R)$ coincide com A . Note que pela seção III.3, nossa função está bem definida.

CAPÍTULO IV

A ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS COM SÍMBOLO ANALÍTICO EM UM SUBCONJUNTO NÃO VAZIO, ABERTO DO $\mathbb{R}^n$

IV.1 - DESCRIÇÃO DA ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS COM SÍMBOLO ANALÍTICO EM UM ABERTO, NÃO VAZIO DO $\mathbb{R}^n$

A ação de um operador diferencial parcial linear de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes $A(D)$ - cuja função símbolo A é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto G do $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) - em uma função teste f de $H^\infty(G)$ é expressa em termos da transformada de Fourier do seguinte modo:

$$[A(D)f](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix \cdot y) A(y) [Ff](y) dy$$

Esta fórmula mostra que $A(D)$ é um operador pseudo-diferencial usual definido sobre o espaço das funções testes $H^\infty(G)$ satisfazendo a propriedade de a função símbolo A , associada a $A(D)$, ser analítica em todos os pontos de G .

Em virtude de f ser um elemento de $H^\infty(G)$, o suporte de Ff é um subconjunto compacto inteiramente contido em G e

então a verificação da fórmula acima pode ser feita da seguinte maneira:

$$A(D)f = F^{-1}[F[A(D)f]] = F^{-1}[A(Ff)]$$

o que é equivalente a

$$[A(D)f](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i x y) A(y) (Ff)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ou ainda,

$$[A(D)f](x) = (2\pi)^{-n/2} \int_G \exp(i x y) A(y) (Ff)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

A álgebra dos operadores pseudo-diferenciais com símbolo analítico em G , indicada por $A(G)$, é constituída pelos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita com coeficientes complexos constantes $A(D)$, cuja função símbolo A é analítica em todos os pontos de G e que além disso, são operadores pseudo-diferenciais usuais atuando em funções testes de $H^\infty(G)$, com as operações usuais de

1. adição: $A(D) + B(D) = (A + B)(D)$
2. subtração: $A(D) - B(D) = (A - B)(D)$
3. multiplicação por constante complexa: $\alpha.A(D) = (\alpha A)(D)$
4. composição: $A(D) \circ B(D) = (A \circ B)(D)$

Em face dessas relações facilmente verificáveis, existe um isomorfismo canônico entre $A(G)$ e a álgebra $\mathcal{A}(G)$ das funções analíticas em todos os pontos de G com as operações usuais de adição e de multiplicação; a saber, o isomorfismo que a cada operador pseudo-diferencial $A(D)$ em $A(G)$ associa a função sim

bolo correspondente A pertencente a $H(G)$.

Como corolário do exposto, podemos concluir que se em particular, a função A e a função recíproca $1/A$ forem analíticas em todos os pontos de G então o operador pseudo-diferencial $A(D)$, correspondente a A , que atua sobre $H^\infty(G)$, será um operador linear inversível, cujo inverso $[A(D)]^{-1}$ tem como função símbolo a função recíproca $1/A$ de A .

Pelo motivo de $A(D)^{-1}$, quando existir, ter função símbolo $1/A$, adotaremos o procedimento conveniente e prático de indicar $[A(D)]^{-1}$ por $1/A(D)$.

Os exemplos seguintes reforçarão a notação agora introduzida.

EXEMPLO IV.1.1 :

O operador de Laplace n -dimensional Δ_n tem como função símbolo a função dada por $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow -|x|^2 \in \mathbb{R}$. O operador pseudo-diferencial Δ_n atuando sobre $H^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ - ou sobre $H^\infty(G)$ desde que $0 \notin G$ e G é um subconjunto aberto, não vazio do $\mathbb{R}^n$ - é um operador linear inversível e seu inverso $1/\Delta_n$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita sobre $H^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ por ter a função símbolo definida por $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow -|x|^{-2} \in \mathbb{R}$.

O operador pseudo-diferencial $(I - \Delta_n)^{1/2}$ atuando sobre $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou sobre $H^\infty(G)$ onde G é um subconjunto não vazio, aberto do $\mathbb{R}^n$), é um operador linear inversível sobre $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ou sobre $H^\infty(G)$) pelo fato de a função símbolo de $(I - \Delta_n)^{1/2}$ dada por $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow (1 + |x|^2)^{1/2}$ além de ser analítica em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$, ter a propriedade de que sua função re

cíproca $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow (1 + |x|^2)^{-1/2}$ também é analítica em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$. Note que o mesmo é válido para o operador pseudo-diferencial $(I - w^2 \Delta_n)^{1/2}$ com $w \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO IV.1.2 :

O operador pseudo-diferencial $|D|$ atuando sobre $H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é o correspondente da função módulo, que é uma função analítica em todos os pontos de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Além disso, $|D|$ é um operador linear inversível sobre $H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ cujo operador inverso $1/|D|$ é o correspondente à função $x \rightarrow |x|^{-1}$ com $x \neq 0$. A atuação de $|D|$ sobre $H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ fica simplificada quando decompos $f \in H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ como soma das seguintes duas parcelas ortogonais, segundo o produto interno de $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $f = f_+ + f_-$ onde

$$(Ff_+)(x) = \begin{cases} (Ff)(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (Ff_-)(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ (Ff)(x), & x < 0 \end{cases}$$

Assim, $|D|f = Df_+ - Df_-$.

IV.2 - APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS
COM SÍMBOLOS ANALÍTICOS EM UM SUBCONJUNTO NÃO VAZIO,
ABERTO DO $\mathbb{R}^n$ A PROBLEMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

As primeiras aplicações da álgebra dos operadores pseudo-diferenciais com símbolos analíticos em um subconjunto não vazio, aberto do $\mathbb{R}^n$ descritas no parágrafo anterior, serão baseadas no seguinte teorema que é evidente pelas colocações já feitas neste capítulo.

TEOREMA IV.2.1 :

A equação $A(D)u = f$ com $f \in H^\infty(G)$, onde $A(D)$ é um operador pseudo-diferencial cuja função símbolo A é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto G do $\mathbb{R}^n$, tem uma única solução em $H^\infty(G)$ desde que a função A não se anule em ponto algum de G . Nestas condições, a única solução da equação $A(D)u = f$ é $u = (I/A(D))f$.

EXEMPLO IV.2.1 :

A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ COM PARÂMETRO COMPLEXO

$$\Delta_n u + w^2 u = f, \quad 0 \neq w \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1$$

O símbolo do operador de Helmholtz

$$\Delta_n + w^2 = -[D_{x_1}^2 + \dots + D_{x_n}^2] + w^2$$

é a função

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow -(x_1^2 + \dots + x_n^2) + w^2 = -|x|^2 + w^2$$

1º caso : $\text{Im } w \neq 0$

Quando a parte imaginária de w é diferente de zero, o símbolo do operador de Helmholtz é uma função analítica e não nula em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema anterior, a equação de Helmholtz para cada $f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$, tem uma única solução u em $H^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$u = [I/(\Delta_n + w^2)]f$$

ou

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i x y) \frac{Ff(y)}{-|y|^2 + w^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

2º caso : $\text{Im } w = 0$

Quando w é um número real não nulo, o símbolo do operador de Helmholtz é uma função analítica e não nula em todos os pontos do subconjunto aberto $G = \{ x \in \mathbb{R}^n ; |x|^2 \neq w^2 \}$. Pelo teorema anterior, para cada $f \in H^\infty(G)$, isto é, para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n ; \mathbb{C})$ cuja transformada de Fourier tem suporte inteiramente contido em G (e que, portanto, é nula em todos os pontos da esfera n -dimensional de centro na origem e raio $|w|$), a equação de Helmholtz tem uma única solução u em $H^\infty(G)$ (portanto com as mesmas propriedades de f) dada por

$$u = (I / \Delta_n + w^2) f$$

ou

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_G \exp(i x y) \frac{Ff(y)}{-|y|^2 + w^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

EXEMPLO IV.2.2 :

A EQUAÇÃO $u(x+1) + u(x-1) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

A equação $u(x+1) + u(x-1) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ é escrita como a seguinte equação diferencial linear ordinária de ordem infinita com coeficientes reais

$$2 \operatorname{ch} \left(\frac{d}{dx} \right) u = f$$

pois pela fórmula de Taylor,

$$u(x \pm 1) = u(x) \pm u'(x) + \frac{u''(x)}{2!} \pm \frac{u'''(x)}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}$$

O símbolo do operador pseudo-diferencial $2 \operatorname{ch} \left(\frac{d}{dx} \right)$ é a

função $x \in \mathbb{R} \rightarrow 2 \operatorname{ch}(ix)$, a qual é analítica em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e diferente de zero em todos os pontos do subconjunto aberto $G = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$. Pelo teorema anterior, para cada $f \in H^\infty(G)$, a equação

$$2 \operatorname{ch} \left(\frac{d}{dx} \right) u = f$$

tem uma única solução em $H^\infty(G)$, a saber

$$u = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{d}{dx} \right) \right] f.$$

Em particular, quando o suporte da transformada de Fourier de f estiver inteiramente contido no intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} E_{2j} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} \right) h(x)$$

onde $\{ E_{2j} ; j = 0, 1, \dots \}$ é o conjunto dos números de Euler.

IV.3 - A TEORIA DUAL DA ÁLGEBRA DOS OPERADORES PSEUDO-DIFERENCIAIS COM SÍMBOLO ANALÍTICO EM UM ABERTO, NÃO VAZIO DO $\mathbb{R}^n$

O teorema abaixo, é análogo ao Teorema IV.2.1.

TEOREMA IV.3.1 :

A equação $A(D)u = T$ com $T \in H^{-\infty}(G)$, onde $A(D)$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função símbolo A é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto $-G$ do $\mathbb{R}^n$, tem uma única solução em $H^{-\infty}(G)$ desde que

a função A não se anule em ponto algum de $-G$. Nestas condições, a única solução da equação $A(D)u = T$ é $u = (I / A(D))T$.

COROLÁRIO IV.3.1 (da existência de uma solução fundamental em $H^{-\infty}(G)$):

Com a hipótese de A ser uma função analítica em todos os pontos de um aberto não vazio do $\mathbb{R}^n$ que não se anula em ponto algum de $-G$, existe uma única solução fundamental E de $A(D)$ em $H^{-\infty}(G)$, a saber: $E = [I / A(D)] \delta$ onde δ é a função (generalizada) delta de Dirac.

EXEMPLO IV.3.1:

A equação $2 \operatorname{ch} \left(\frac{d}{dx} \right) u = T$ com $T \in H^{-\infty}(G)$ onde $G = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ tem uma única solução em $H^{-\infty}(G)$, dada por

$$u = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{d}{dx} \right) \right] T$$

CAPÍTULO V

O PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$ NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES
TESTE $H^\infty(G)$ E NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^\infty(-G)$

V.1 - O PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$ NO
ESPAÇO DAS FUNÇÕES TESTE $H^\infty(G)$

Consideremos o problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$ em
 $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x) ; t \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ com $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial t^m} u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} u &= f \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, x) &= g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \tag{V.1.1}$$

onde, para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $A_k(t, D)$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes, cuja função símbolo $A_k(t, \cdot)$ é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto G do $\mathbb{R}^n$ e tal que todos os coeficientes de $A_k(t, D)$ são funções contínuas de t .

A fim de enunciar o resultado principal desta seção, necessitamos da seguinte notação: para cada $\ell = 1, 2, \dots, C^\ell(\mathbb{R}, H^\infty(G))$

indica o espaço vetorial complexo constituído por todas as funções u definidas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com valores complexos com a propriedade de que para cada $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot)$ é um elemento de $H^\infty(G)$ e, além disso, a função u juntamente com as ℓ -primeiras derivadas parciais de u em relação a t são funções contínuas em t ; a notação $C^0(\mathbb{R}, H^\infty(G))$ indica o espaço vetorial complexo constituído por todas as funções u definidas em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com valores complexos, contínuas na primeira variável t , com a propriedade adicional de que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $u(t, \cdot)$ é um elemento de $H^\infty(G)$.

TEOREMA V.1.1 (do tipo do Teorema de Cauchy-Kowalewski):

Com as hipóteses:

- i. para cada $k = 0, \dots, m-1$, $g_k \in H^\infty(G)$
- ii. $f \in C^0(\mathbb{R}, H^\infty(G))$,

o problema de Cauchy (V.1.1) de ordem $m \geq 1$ tem uma única solução $u \in C^m(\mathbb{R}, H^\infty(G))$.

PROVA

1º caso: $f(t, x) = 0$, $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

A construção da solução do problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} u = 0 \quad (V.1.2)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, x) = g_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

com $g_0, g_1, \dots, g_{m-1} \in H^\infty(G)$ é feita, em primeiro lugar, aplicando a transformação parcial de Fourier na variável x ao problema acima, para a obtenção do seguinte problema de Cauchy de mesma ordem m

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial t^m} v + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, x) \frac{\partial^k}{\partial t^k} v &= 0 \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} v(0, x) &= F_x g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (V.1.3)$$

onde v é a transformada de Fourier na variável x de u e onde, para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$, $F_x g_k$ é a transformada de Fourier na variável x de g_k . Em segundo lugar, para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$, indicamos por $U_j: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a única solução do problema de Cauchy abaixo, isto é, a única função com as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial t^m} U_j(t, x) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, x) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U_j(t, x) &= 0 \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} U_j(0, x) &= \delta_{jk}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

onde δ_{jk} é o símbolo de Kronecker ($\delta_{jj} = 1$ e $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$). A existência e a unicidade da função U_j para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$ é garantida pela teoria clássica das equações diferenciais ordinárias ([16], pág. 20). Uma solução para o problema de Cauchy (V.1.2) é dada então por

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j(x)$$

A fórmula tem significado pois para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$,

$g_j \in H^\infty(G)$ e $U_j(t,D)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, é um operador pseudo-diferencial cujo símbolo $U_j(t, \cdot)$ é uma função analítica em todos os pontos de G pelo teorema da dependência analítica sobre um parâmetro de solução de equações diferenciais ordinárias ([17], pág. 44). A unicidade de tal solução deriva da unicidade de solução do problema (V.1.3) pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias ([16], pág. 20). O fato de u assim definida ser um elemento de $C^m(\mathbb{R}, H^\infty(G))$ é consequência imediata da definição de u .

Isto encerra a prova do primeiro caso.

2º caso: f não é identicamente nula.

Neste caso, consideramos primeiramente a função $U(t,s,x)$ que é a única solução do seguinte problema de Cauchy, isto é, U é a única função com as propriedades

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} U(t,s,x) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t,D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U(t,s,x) = 0$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} U(0,s,x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-2$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} U(0,s,x) = f(s,x)$$

onde s é um número real arbitrário compreendido entre 0 e t . A existência e unicidade de U é consequência do primeiro caso. Uma solução do problema de Cauchy (V.1.1) com condições iniciais homogêneas, isto é, com $g_0 = g_1 = \dots = g_{m-1} = 0$ é dada por

$$u_0(t,x) = \int_0^t U(t-s,s,x) ds.$$

Uma solução do problema de Cauchy (V.1.1) é obtida então como soma de u_0 com a solução do problema de Cauchy (V.1.2) considerada no primeiro caso. A unicidade de tal solução decorre do primeiro caso de maneira óbvia. Isto termina a prova do teorema.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: O teorema ora provado, também é válido para sistemas de equações de ordem arbitrária e finita. A prova permanece a mesma.

V.2 - O PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$ NO ESPAÇO DAS FUNÇÕES GENERALIZADAS $H^\infty(-G)'$

Consideremos o problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x) ; t \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ com $n \geq 1$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} u = f$$

(V.2.1)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, x) = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

onde, para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $A_k(t, D)$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função símbolo $A_k(t, \cdot)$ é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto G do $\mathbb{R}^n$ e tal que todos os coeficientes de $A_k(t, D)$ são funções contínuas de t .

A fim de enunciar o resultado principal desta seção, necessitamos da notação $C^\ell(\mathbb{R}, H^\infty(-G)')$ para $\ell = 0, 1, 2, \dots$, a qual é definida de maneira análoga a da seção anterior, recordan

do que $H^\infty(-G)'$ é o espaço vetorial complexo constituído por todos os funcionais lineares contínuos definidos sobre $H^\infty(-G)$.

TEOREMA V.2.1 (Teorema dual do tipo do Teorema de Cauchy-Kowalewski) :

Com as hipóteses

- i. para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$, $g_k \in H^\infty(-G)'$
- ii. $f \in C^0(\mathbb{R}, H^\infty(-G)')$

o problema de Cauchy (V.2.1) de ordem $m \geq 1$ tem uma única solução generalizada $u \in C^m(\mathbb{R}, H^\infty(-G)')$ no sentido de que: para cada função teste $\psi \in H^\infty(-G)$,

$$i. \quad \left\langle \frac{\partial^m}{\partial t^m} u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} u, \psi \right\rangle = \langle f, \psi \rangle$$

- ii. para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$\left\langle \frac{d^k}{dt^k} u(t, \cdot), \psi \right\rangle \Big|_{t=0} = \langle g_k, \psi \rangle$$

Além disso, a solução generalizada u é dada pelas mesmas fórmulas do Teorema (V.1.1).

PROVA

1º caso: $f \equiv 0 \in H^\infty(-G)'$

Temos que provar que a mesma fórmula dada no Teorema (V.1.1) define uma solução generalizada no sentido exposto no enunciado do problema de Cauchy (V.1.2), isto é, temos que mostrar que

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j$$

onde, para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$, $U_j(t, D)$ definido na demonstração do Teorema (V.1.1), é uma solução generalizada do problema de Cauchy (V.1.2). Para tanto, necessitamos colocar a seguinte afirmação de fácil verificação: se para cada $\psi \in H^\infty(G)$, a função

$$u(t, x) = U(t, D) \psi(x)$$

for solução da equação homogênea

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} u + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} u = 0$$

então para cada $\psi \in H^\infty(-G)$, a função

$$v(t, x) = U(t, -D) \psi(x)$$

será solução da equação homogênea

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} v + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, -D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} v = 0.$$

Verificação que $u = \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j$ satisfaz a condição i. da tese do teorema. Para cada $\psi \in H^\infty(-G)$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial^m}{\partial t^m} \left[\sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j \right] + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j \right], \psi \right\rangle = \\ & = \sum_{j=0}^{m-1} \left\langle \frac{\partial^m}{\partial t^m} U_j(t, D) g_j + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U_j(t, D) g_j, \psi \right\rangle = \\ & = \sum_{j=0}^{m-1} \left\langle g_j, \frac{\partial^m}{\partial t^m} U_j(t, -D) \psi + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, -D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} U_j(t, -D) \psi \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

em virtude da afirmação anterior e da definição de $U_j(t, D)$.

Verificação que $u = \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t, D) g_j$ satisfaz a condição

ii. da tese do teorema. Pela própria definição de $U_j(t,D)$, para cada $j = 0,1,\dots,m-1$, temos

$$\frac{d^k}{dt^k} U_j(0,D) = \delta_{kj} I_{H^\infty(G)}, \quad k = 0,1,\dots,m-1$$

onde δ_{kj} é o símbolo de Kröneckner. Conseqüentemente,

$$\frac{d^k}{dt^k} U_j(0,-D) = \delta_{kj} I_{H^\infty(G)}, \quad k = 0,1,\dots,m-1$$

Portanto, para cada $\psi \in H^\infty(-G)$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d^k}{dt^k} U_j(t,D) g_j, \psi \right\rangle \Big|_{t=0} = \\ & = \left\langle g_j, \frac{d^k}{dt^k} U_j(t,-D) \psi \right\rangle \Big|_{t=0} = \\ & = \left\langle g_j, \delta_{kj} \psi \right\rangle, \quad k,j = 0,1,\dots,m-1 \end{aligned}$$

o que implica que

$$\left\langle \frac{d^k}{dt^k} \sum_{j=0}^{m-1} U_j(t,D) g_j, \psi \right\rangle \Big|_{t=0} = \left\langle g_k, \psi \right\rangle$$

para cada $k = 0,1,\dots,m-1$ e para cada $\psi \in H^\infty(-G)$.

Unicidade da solução generalizada do problema de Cauchy (V.1.2).

De acordo com os resultados do capítulo III, todo elemento u em $H^\infty(-G)'$ pode ser colocado na forma

$$u = A(D) T_h$$

onde $A(D)$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função s̄im

bolo A é analítica em todos os pontos de G e onde $h \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ é tal que o suporte da transformada de Fourier Fh de h está inteiramente contido em G . Em consequência, a transformada de Fourier Fu de u é uma função localmente quadrado integrável sobre G dada por $(Fu)(x) = A(x) (Fh)(x)$, $x \in G$. Assim, se $u \in C^m(\mathbb{R}, H^\infty(-G)')$ for solução do problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$, (V.1.2) no sentido generalizado então a transformada parcial de Fourier $F_x u$ de u em relação a variável x será uma solução do problema de Cauchy abaixo, isto é, $F_x u$ tem as propriedades

$$\frac{d^m}{dt^m} (F_x u) + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, x) \frac{d^k}{dt^k} F_x u = 0$$

$$\frac{d^k}{dt^k} F_x u(0, x) = F_x g_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Como a função com as propriedades acima, é única pela teoria clássica de equações diferenciais ordinárias ([16], pág. 20), o mesmo acontece com a solução generalizada do problema de Cauchy.

2º caso: $f \neq 0 \in H^\infty(-G)'$

Cópia com as modificações necessárias do teorema V.1.1.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: O teorema provado acima permanece válido para sistemas de equação de ordem arbitrária e finita. A prova permanece a mesma.

V.3 - EXISTÊNCIA DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$

DEFINIÇÃO V.3.1 :

A solução fundamental para o problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$ relativo ao operador diferencial

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

onde para cada $k = 0, 1, \dots, m-1$ e para cada $t \in \mathbb{R}$, $A_k(t, D)$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes cuja função símbolo $A_k(t, \cdot)$ é uma função analítica em todos os pontos de um subconjunto não vazio, aberto G do $\mathbb{R}^n$ e tal que todos os coeficientes de $A_k(t, D)$ são funções contínuas de t , E é uma solução do problema de Cauchy abaixo, no sentido generalizado, explicitado no enunciado do Teorema V.2.1

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} E + \sum_{k=0}^{m-1} A_k(t, D) \frac{\partial^k}{\partial t^k} E = 0 \quad (V.3.1)$$

$$E(0, \cdot) = \frac{d}{dt} E(0, \cdot) = \dots = \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} E(0, \cdot) = 0$$

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} E(0, \cdot) = \delta, \quad \delta \text{ é a função (generalizada) delta de Dirac.}$$

TEOREMA V.3.1 (da existência da solução fundamental no espaço das funções generalizadas $H^\infty(-G)'$):

Para cada $m = 1, 2, \dots$, existe uma única solução fundamental do problema de Cauchy (V.3.1) de ordem m no espaço das funções generalizadas $H^\infty(-G)'$.

PROVA

Consequência do Teorema (V.2.1).

V.4 - O PROBLEMA DE CAUCHY DE ORDEM $m \geq 1$ NO
PLANO COM APLICAÇÕES ESPECIAIS ÀS
EQUAÇÕES DAS ONDAS E DO CALOR

O objetivo desta seção é explicitar a solução do problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$ em duas variáveis e aplicar as fórmulas obtidas especialmente para as equações das ondas e do calor.

Consideremos o seguinte problema de Cauchy de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^2 = \{(t,x) ; t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$

$$\sum_{k=0}^m A_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} D^{m-k} u = 0, \quad 0 \neq A_m, A_{m-1}, \dots, A_0 \in \mathbb{C} \quad (V.4.1)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(0, \cdot) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

Para resolver este problema, como nas demonstrações dos Teoremas V.1.1 e V.2.1, consideramos para cada $j=0,1,\dots,m-1$, a função $U_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ com as propriedades

$$\sum_{k=0}^m A_k x^{m-k} \frac{d^k}{dt^k} U_j(t,x) = 0$$

$$\frac{d^k}{dt^k} U_j(0,x) = \delta_{kj}$$

onde δ_{kj} é o símbolo de Krönecker para $k = 0, \dots, m-1$.

1º caso: O polinômio característico

$$p_m(\lambda, x) = \sum_{k=0}^m A_k x^{m-k} \lambda^k$$

tem raízes simples $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Em virtude da homogeneidade do polinômio característico $p_m(\lambda, x)$, para cada $k = 1, \dots, m$

$$\lambda_k = w_k x$$

onde $w_1, \dots, w_m$ são as raízes do polinômio $p_m(\lambda, 1)$. Neste caso, para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$U_j(t, x) = \sum_{k=1}^m \frac{V_{j+1,k}}{V x^j} \exp(t w_k x)$$

onde $V = V(w_1, \dots, w_m)$ é o determinante de Vandermonde cuja segunda linha é constituído pelos números complexos $w_1, \dots, w_m$ e para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$ e para cada $k = 1, \dots, m$, $V_{j+1,k}$ é o cofator do determinante de Vandermonde V correspondente a posição $(j+1, k)$. À primeira vista, para cada $t \in \mathbb{R}$, com exceção de U_0 , as demais funções $U_1, \dots, U_{m-1}$ não aparentam ser analíticas no ponto $x = 0$, mas graças às identidades

$$\sum_{k=1}^m w_k^s V_{j+1,k} = 0$$

válidas para $s = 0, 1, \dots, m-1$, concluímos a analiticidade de $U_1, \dots, U_{m-1}$ em todos os pontos de $\mathbb{R}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$, faz sentido definir para $j = 0, 1, \dots, m-1$,

$$U_j(t, D) = \sum_{k=1}^m \frac{V_{j+1,k}}{V D^j} \exp(t w_k D)$$

que são operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita com coeficientes complexos que podem atuar no espaço das funções testes $H^\infty(\mathbb{R})$ ou no espaço das funções generalizadas $H^{-\infty}(\mathbb{R})$.

CONCLUSÕES:

I) Solução do problema de Cauchy (V.1.2) de ordem $m \geq 1$ em

$\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$ pertencente a $C^m(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}))$:

$$u(t, \cdot) = \sum_{j,k=0}^{m-1} \frac{V_{j+1,k+1}}{V D^j} \exp(t w_{k+1} D) g_j$$

ou

$$u(t, x) = \frac{1}{V} \sum_{k=0}^{m-1} V_{1,k+1} g_0(x - i t w_{k+1}) + \\ + \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} V_{j+1,k+1} \int_0^{x - i t w_{k+1}} (x - i t w_{k+1} - s)^{j-1} g_j(s) ds$$

desde que para cada $g \in H^\infty(\mathbb{R})$,

$$[\exp(t w_{k+1} D) g](x) = g(x - i w_{k+1} t)$$

pelo fato de g ser analítica em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

II) Solução generalizada do problema de Cauchy (V.2.2) de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$ pertencente a $C^m(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$:

$$u(t, \cdot) = \sum_{j,k=0}^{m-1} \frac{V_{j+1,k+1}}{V D^j} \exp(t w_{k+1} D) g_j$$

2º caso: O polinômio característico

$$p_m(\lambda, x) = \sum_{k=0}^m A_k x^{m-k} \lambda^k$$

tem raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ com multiplicidades $m_1, \dots, m_p$ respectivamente onde $m_1 + \dots + m_p = m$. Com raciocínio análogo ao 1º caso, para cada $k = 1, \dots, p$,

$$\lambda_k = w_k x$$

onde $w_1, \dots, w_p$ são as raízes do polinômio $p_m(\lambda, 1)$. Neste caso,

para cada $j = 0, 1, \dots, m-1$

$$U_j(t, x) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{\ell=0}^{m_k-1} t^\ell \right) \frac{V_{j+1,k}}{V x^j} \exp(t w_k x) .$$

Seguindo os mesmos passos do 1º caso, chega-se as conclusões a baixo.

CONCLUSÕES:

I) Solução do problema de Cauchy (V.1.2) de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$ pertencente a $C^m(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}))$:

$$u(t, \cdot) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{\ell=0}^{m_k-1} t^\ell \right) \frac{V_{j+1,k+1}}{V D^j} \exp(t w_{k+1} D) g_j$$

II) Solução generalizada do problema de Cauchy (V.2.2) de ordem $m \geq 1$ em $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$ pertencente a $C^m(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$:

$$u(t, \cdot) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{\ell=0}^{m_k-1} t^\ell \right) \frac{V_{j+1,k+1}}{V D^j} \exp(t w_{k+1} D) g_j$$

V.5 - APLICAÇÕES

APLICAÇÃO V.5.1 :

Consideremos o seguinte problema de Cauchy de ordem dois em $\mathbb{R}^2 = \{(t, x); t, x \in \mathbb{R}\}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad a \in \mathbb{C} \quad |a| = 1$$

(V.5.1)

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

onde $f, g \in H^\infty(\mathbb{R})$. A fim de obter a fórmula da solução do problema acima, que é dada pelas fórmulas da seção V.1, precisamos antes determinar a função $U_0(t, x)$ tal que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_0(t, x) + a^2 x^2 U_0(t, x) = 0$$

$$U_0(0, x) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial t} U_0(0, x) = 0$$

e a função $U_1(t, x)$ tal que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U_1(t, x) + a^2 x^2 U_1(t, x) = 0$$

$$U_1(0, x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} U_1(0, x) = 1$$

Como o polinômio característico $p_2(\lambda, x) = \lambda^2 + a^2 x^2$ tem como raízes $\pm i a x$,

$$U_0(t, x) = \frac{1}{2} [\exp(iatx) + \exp(-iatx)] = \text{ch}(iatx)$$

e

$$U_1(t, x) = \frac{1}{2iax} [\exp(iatx) - \exp(-iatx)] = \frac{\text{sh}(iatx)}{iax}$$

Pela fórmula da seção V.1, como $f, g \in H^\infty(\mathbb{R})$, a solução u do problema de Cauchy (V.5.1), pertencente a $C^2(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}))$ é

$$u(t, x) = [\text{ch}(iatD) f](x) + \left[\frac{\text{sh}(iatD)}{iaD} g \right](x)$$

ou

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds$$

lembrando que para $\psi \in H^\infty(\mathbb{R})$,

$$[\exp(\pm iat D) \psi] (x) = \psi(x \pm at)$$

e que

$$\left[\frac{\operatorname{sh}(iat D)}{iaD} \psi \right] (x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

A última fórmula para u , é a conhecida fórmula de D'Alembert das equações da onda unidimensional clássica válida para $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $g \in C^3$. Em particular, para $a = i$, obtemos a solução do problema de Cauchy para o laplaciano bidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(0, x) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$$

$$u(t, x) = \frac{f(x+it) + f(x-it)}{2} + \frac{1}{2i} \int_{x-it}^{x+it} g(s) ds$$

válida para $f, g \in H^\infty(\mathbb{R})$.

APLICAÇÃO V.5.2 (solução fundamental do problema de Cauchy de ordem dois para a equação $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $a \in \mathbb{C}$ e $|a| = 1$):

A solução fundamental E do problema de Cauchy de ordem dois pertencente a $C^2(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$, lembrando que $H^{-\infty}(\mathbb{R}) = H^\infty(\mathbb{R})'$, é, por definição, a solução do problema

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = 0$$

$$E(0, \cdot) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} E(0, \cdot) = \delta$$

onde δ é a função (generalizada) delta de Dirac, e, é dada por

$$E(t,x) = \frac{\text{sh}(at \frac{d}{dx})}{a \frac{d}{dx}} \delta(x) .$$

em virtude dos cálculos contidos na aplicação anterior e da fórmula da seção V.2 . Pelo exemplo II.6.3, a restrição de E ao subespaço vetorial de $H^\infty(\mathbb{R})$ constituído das funções de decaimento rápido no infinito é dada por

$$E(t,x) = \frac{1}{2a} [Y(x+at) - Y(x-at)]$$

onde $Y(x \pm at)$ são as funções translação complexa da função de Heaviside Y . Em particular, para $a = i$,

$$E(t,x) = \frac{1}{2i} [Y(x+it) - Y(x-it)]$$

é a solução fundamental do problema de Cauchy para a equação de Laplace bidimensional pertencente a $C^2(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$

APLICAÇÃO V.5.3

Consideremos o seguinte problema de Cauchy de ordem um em $\mathbb{R}^2 = \{ (t,x) ; t,x \in \mathbb{R} \}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 , \quad a \in \mathbb{C} , \quad |a| = 1 \quad (V.5.2)$$

$$u(0,x) = f(x) , \quad f \in H^\infty(\mathbb{R})$$

A fim de obter a fórmula da solução do problema acima, que é dada pela fórmula da seção V.1 , precisamos determinar antes a função $U_0(t,x)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} U_0(t,x) + a x^2 U_0(t,x) = 0$$

$$U_0(0, x) = 1$$

Como o polinômio característico $p_1(\lambda, x) = \lambda + ax^2$ tem como única raiz $-ax^2$,

$$U_0(t, x) = \exp(-atx^2)$$

Pela fórmula da seção V.1, como $f \in H^\infty(\mathbb{R})$, a solução u do problema de Cauchy (V.5.2), pertencente a $C^1(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}))$ é

$$\begin{aligned} u(t, x) &= [\exp(-atD^2)f](x) = \\ &= [\exp(at \frac{d^2}{dx^2})f](x) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(at)^j}{j!} \frac{d^{2j}}{dx^{2j}} f(x) \end{aligned}$$

APLICAÇÃO V.5.4 (solução fundamental do problema de Cauchy de ordem um para a equação $\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$) :

A solução fundamental E do problema de Cauchy de ordem um pertencente a $C^1(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$, lembrando que $H^{-\infty}(\mathbb{R}) = H^\infty(\mathbb{R})'$, é, por definição a solução do problema

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

$$E(0, \cdot) = \delta$$

onde δ é a função (generalizada) delta de Dirac; e é dada por

$$E(t, x) = \exp\left(at \frac{d^2}{dx^2}\right) \delta(x)$$

em virtude dos cálculos contidos na aplicação anterior e da fôr

mula da seção V.2 .

APLICAÇÃO V.5.5 :

Consideremos o seguinte problema de Cauchy de ordem um em $\mathbb{R}^{n+1} = \{ (t, x) ; t \in \mathbb{R} , x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \}$ com $n \geq 1$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x+a) = 0 , \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad (V.5.3)$$

$$u(0, x) = f(x) , \quad f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Lembrando que para $u \in C^1(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}^n))$

$$u(t, x+a) = \left[\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} a^\alpha D^\alpha u \right] (t, x) = A_0(D) u(t, x)$$

onde a função símbolo de $A_0(D)$ é

$$A_0(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} a^\alpha x^\alpha = \exp(iax)$$

que é uma função analítica em todos os pontos do $\mathbb{R}^n$, o problema de Cauchy toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} u + A_0(D)u = 0 \quad (V.5.4)$$

$$u(0, x) = f(x) , \quad f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$$

A fim de obter a fórmula da solução do problema V.5.4 , necessitamos determinar uma função $U_0(t, x)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial t} U_0(t, x) + A_0(x) U_0(t, x) = 0$$

$$U_0(0, x) = 1$$

Como o polinômio característico $p_1(\lambda, x) = \lambda + A_0(x)$ tem como única raiz $-A_0(x)$,

$$U_0(t, x) = \exp[-t A_0(x)].$$

Pela fórmula da seção V.1, como $f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$, a solução u do problema de Cauchy (V.5.4), pertencente a $C^1(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}^n))$ é

$$u(t, x) = (\exp[-t A_0(D)] f)(x)$$

ou

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} \exp\left[j a \frac{d}{dx}\right] f(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} f(x + ja) \end{aligned}$$

lembrando que para $f \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$[\exp(j a \frac{d}{dx}) f](x) = f(x + ja) \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

APLICAÇÃO V.5.6 (solução fundamental do problema de Cauchy de ordem um em $\mathbb{R}^{n+1}$ para a equação $\frac{\partial}{\partial t} + A_0(D)$,

$$A_0(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} a^\alpha D^\alpha, \quad a \in \mathbb{R}^n):$$

A solução fundamental E do problema de Cauchy de ordem um, pertencente a $C^2(\mathbb{R}, H^{-\infty}(\mathbb{R}))$, lembrando que $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = H^\infty(\mathbb{R}^n)'$, é, por definição a solução do problema

$$\frac{\partial E}{\partial t} + A_0(D) E = 0$$

$$E(0, \cdot) = \delta$$

onde δ é a função (generalizada) delta de Dirac; e, é dada por

$$E(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} \delta(x + ja)$$

em virtude dos cálculos contidos na aplicação anterior e da fórmula da seção V.2 .

APLICAÇÃO V.5.7 :

Consideremos o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^4 = \{ (t, x) ; t \in \mathbb{R} , x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \}$

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c}{w} \sqrt{I - w^2 \Delta_3} u$$

$$u(0, \cdot) = f , f \in H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^3)$$

onde Δ_3 é o operador de Laplace tridimensional. Definindo $A(D) = \sqrt{I - w^2 \Delta_3}$, em vista de a função $A(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + w^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$ ser analítica em todos os pontos do $\mathbb{R}^3$, o símbolo $A(D) = \sqrt{I - w^2 \Delta_3}$ é um operador diferencial parcial linear de ordem infinita com coeficientes complexos constantes que pode atuar tanto em $H^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ quanto em $H^{-\infty}(\mathbb{R}^3) = H^{\infty}(\mathbb{R}^3)'$. O problema proposto assume então a forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{iw} A(D)u = 0$$

$$u(0, \cdot) = f , f \in H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^3)$$

cujas única solução em $C^1(\mathbb{R}, H^{\pm\infty}(\mathbb{R}^3))$ é dada por

$$u(t, \cdot) = \exp \left[\frac{ct}{w} \sqrt{I - w^2 \Delta_3} \right] f$$

pelo mesmo raciocínio das aplicações anteriores.

A próxima aplicação nos faz ver que o método desenvolvido até agora não é tão rigoroso. Na realidade ele é bem amplo e para verificar esse fato basta utilizá-lo e ver que o mesmo faz sentido em algumas situações, além de nos fornecer o resultado desejado. Vamos dar como condição inicial uma função polinomial e daí, obter a solução desejada, isto é, uma função polinomial

APLICAÇÃO V.5.8 :

Consideremos o seguinte problema de Cauchy de ordem um em $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x) ; t \in \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ com $n \geq 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(D)u = 0$$

(V.5.5)

$$u(0, x) = P(x)$$

onde $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ é um operador diferencial linear de ordem m , homogêneo com coeficientes constantes complexos e P é uma função polinomial em n variáveis. Com os mesmos passos da aplicação V.5.5, concluímos que a única solução u do problema de Cauchy (V.5.5), pertencente a $C^1(\mathbb{R}, H^\infty(\mathbb{R}^n))$ é

$$u(t, x) = (\exp[t A(D)] P)(x) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A(D)^j P \right](x)$$

onde a somatória em questão é finita em virtude de P ser uma função polinomial. A conclusão desejada é a seguinte: quando a condição inicial de um problema de Cauchy de ordem um para a equação $\frac{\partial}{\partial t} + A(D)$, $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ for uma função polinomial, a solução do problema também é uma função polinomial em am

bas as variáveis t e x . Analogamente quando a condição inicial for uma função da forma $\exp(ibx)P(x)$ com $b \in \mathbb{R}^n$, então é de se esperar que a solução do problema tenha a forma $u(t,x) = \exp[A(b)t + ibx]Q(t,x)$, onde Q é uma função polinomial nas variáveis t e x .

CAPÍTULO VI

PROBLEMAS DE FRONTEIRA

O capítulo em questão mostra a utilidade da teoria desenvolvida no tratamento de problemas de fronteira.

VI.1 - UM PROBLEMA DE FRONTEIRA BIDIMENSIONAL EM UMA FAIXA VERTICAL DO PLANO

Consideremos o seguinte problema de fronteira na faixa vertical $F = \{(t,x) ; -1/2 < t < 1/2 , x \in \mathbb{R}\}$ do plano $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad a \in \mathbb{C}, \quad |a| = 1 \\ u(1/2, x) = f(x) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(-1/2, x) = g(x) \end{array} \right.$$

onde $f, g \in H^\infty(\mathbb{R})$.

A correspondência $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} = D \longleftrightarrow x$ enfatizada no capítulo anterior, motiva a consideração dos dois problemas de fronteira a seguir

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_0(t,x) - a^2 x^2 U_0(t,x) = 0 \\ U_0(\frac{1}{2}, x) = 1 ; \quad \frac{\partial}{\partial t} U_0(-\frac{1}{2}, x) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_1(t,x) - a^2 x^2 U_1(t,x) = 0 \\ U_1(\frac{1}{2}, x) = 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial t} U_1(-\frac{1}{2}, x) = 1 \end{array} \right.$$

cujas soluções são respectivamente dadas por

$$U_0(t,x) = \frac{\text{ch} [a(t + \frac{1}{2})x]}{\text{ch} [ax]}$$

e

$$U_1(t,x) = \frac{\text{sh} [a(t - \frac{1}{2})x]}{ax \text{ch} [ax]}$$

em virtude do polinômio característico das últimas equações ser $p_2(\lambda, x) = \lambda^2 - a^2 x^2$.

A solução do problema de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) - a^2 x^2 U(t,x) = 0 \\ U(\frac{1}{2}, x) = Ff(x) , \quad \frac{\partial U}{\partial t}(-\frac{1}{2}, x) = Fg(x) \end{array} \right.$$

onde Ff e Fg indicam as transformadas de Fourier de f e g ; obtido do problema original pela aplicação da transformação de Fourier parcial em relação a variável x , é então

$$U(t,x) = U_0(t,x) Ff(x) + U_1(t,x) Fg(x)$$

o que indica que

$$\begin{aligned}
 u_a(t,x) &= [U_0(t,D)f](x) + [U_1(t,D)g](x) = \\
 &= [\frac{\operatorname{ch} [a(t + \frac{1}{2}) D]}{\operatorname{ch} [aD]} f](x) + [\frac{\operatorname{sh} [a(t - \frac{1}{2}) D]}{aD \operatorname{ch} [aD]} g](x) \\
 &= [\operatorname{ch} [a(t + \frac{1}{2}) D F]](x) + [\frac{\operatorname{sh} [a(t - \frac{1}{2}) D]}{a D} G](x)
 \end{aligned}$$

desde que

$$\operatorname{ch} [aD] F = f$$

e

$$\operatorname{ch} [aD] G = g$$

A fórmula para u_a tem significado pois para cada $t \in \mathbb{R}$, as funções símbolo de $\operatorname{ch} [a(t + \frac{1}{2}) D]$ e de $\frac{\operatorname{sh} [a(t - \frac{1}{2}) D]}{a D}$, dadas respectivamente por $x \mapsto \operatorname{ch} [a(t + \frac{1}{2}) x]$ e $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} [a(t - \frac{1}{2}) x]}{a x}$, são analíticas em todos os pontos de $\mathbb{R}$.

Resta saber se as equações para F e para G tem solução, isto é, se existem funções F e G com

$$\operatorname{ch} [aD] F = f$$

e

$$\operatorname{ch} [aD] G = g.$$

A resposta para esta questão, depende do comportamento da função símbolo de $\operatorname{ch} [aD]$ que é dada por $x \mapsto \operatorname{ch} [ax] = \cos [i a x]$ que, por sua vez, é dependente de a .

1º caso: A parte real de a é diferente de zero.

A função $x \mapsto \sec [i a x]$ é definida e é analítica em todos os pontos de $\mathbb{R}$, o que implica que dados f, g em $H^\infty(\mathbb{R})$, existem únicas F e G em $H^\infty(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$\text{ch} [a D] F = f ; \quad \text{ch} [a D] G = g$$

pelo Teorema IV.2.1. Portanto, a única solução do problema de fronteira inicial é u_a que é um elemento de $H^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2º caso: A parte real de a é nula.

A função $x \mapsto \sec [i a x]$ é definida e é analítica em todos os pontos de $G = \mathbb{R} \setminus \{ (\frac{\pi}{2} + k\pi) / i a ; k \in \mathbb{Z} \}$. Assim, se f e g são elementos de $H^\infty(G)$ então existem únicas F e G em $H^\infty(G)$ satisfazendo

$$\text{ch} [a D] F = f ; \quad \text{ch} [a D] G = g$$

pelo Teorema IV.2.1. Em particular, para $a = i$, temos um problema de Dirichlet para a equação das ondas unidimensional em uma faixa vertical F do $\mathbb{R}^2$ cuja única solução é dada por u_i , correspondente a $a = i$, desde que as transformadas de Fourier de f e de g tenham suporte compacto inteiramente contido em $G = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$.

VI.2 - O PROBLEMA DE DIRICHLET DA EQUAÇÃO DE LAPLACE
BIDIMENSIONAL NA BOLA UNITÁRIA

Consideremos o problema clássico de Dirichlet na bola unitária para a equação de Laplace bidimensional

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ; \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) = f(x,y) ; \quad x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

onde f é uma função contínua em todos os pontos da circunferência unitária. Este problema em coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 , \quad 0 < r < 1 \\ u|_{r=1} = f(\theta) ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right.$$

onde $u(r, \theta)$ é uma função desconhecida e $f(\theta)$ é o valor de $u(1, \theta)$ dado a priori com a propriedade de que f é uma função 2π -periódica em θ . A correspondência $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \longleftrightarrow \theta$ leva a considerar o seguinte problema

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \theta) - \frac{\theta^2}{r^2} u(r, \theta) = 0 ; \quad 0 < r < 1$$

ou

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r, \theta) + r \frac{\partial}{\partial r} U(r, \theta) - \theta^2 U(r, \theta) = 0, \quad 0 < r < 1$$

sujeito às condições

$$U(1, \theta) = 1$$

$$|U(0, \theta)| < +\infty.$$

A mudança de variável independente $r = \exp(s)$ na última condição, conduz ao problema:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - \theta^2 V = 0$$

$$V(0, \theta) = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} V(s, \theta) \text{ é finito,}$$

cuja solução é $V(s, \theta) = \exp(s |\theta|)$. Em consequência, $U(r, \theta) = V(\ln r, \theta) = \exp(\ln r |\theta|) = r^{|\theta|}$.

A solução do problema

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\theta^2}{r^2} U = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$U(1, \theta) = Ff(\theta)$$

obtido do problema original pela aplicação da transformação de Fourier parcial em relação a variável θ é então

$$U(r, \theta) = r^{|\theta|} \cdot Ff(\theta).$$

A solução formal do problema de Dirichlet clássico na bola unitária para a equação de Laplace em coordenadas polares é

$$u(r, \theta) = [U(r, D)f](\theta) =$$

$$= [r |D| f] (\theta)$$

$$= (\exp [|D| \ln r] f) (\theta)$$

$$= [\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\ln r)^j}{j!} |D|^j f] (\theta)$$

Com o mesmo raciocínio do exemplo II.1.1., toda função limitada em $\mathbb{R}^n$ define um funcional linear contínuo sobre $H^\infty[S(\lambda, R)]$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, e portanto, pode ser encarada como um elemento de $H^{-\infty}[S(\lambda, R)]$ e, em consequência, como um elemento de $H^{-\infty}(G)$, onde G é um aberto não vazio do $\mathbb{R}^n$. Em particular, podemos pensar que para cada $n \in \mathbb{Z}$, a função $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $f_n(\theta) = \exp(in\theta)$ induz o elemento T_{f_n} de $H^{-\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Assim, para cada $n = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \langle FT_{f_n}, g \rangle &= \langle T_{f_n}, F(F_g^V) \rangle = \langle FT_{f_n}, Fg \rangle = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \exp(in\theta) Fg(\theta) d\theta = \\ &= (2\pi)^{1/2} g(n) = \langle (2\pi)^{1/2} \delta_n, g \rangle \end{aligned}$$

$$\forall g \in L_{\text{comp}}^2 [\mathbb{R} \setminus \{0\} ; \mathbb{C}] \quad \text{e daí,} \quad FT_{f_n} = (2\pi)^{1/2} \delta_n.$$

$$\text{Por convenção } T_{f_0} = (2\pi)^{1/2} \delta.$$

Considerando o operador $A(D) = r |D|$, temos para $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \langle A(D) T_{f_n}, \psi \rangle &= \langle T_{f_n}, A(-D)\psi \rangle = \langle FT_{f_n}, F[A(-D)\psi]^V \rangle = \\ &= (2\pi)^{1/2} r |n| F\psi(-n) \end{aligned}$$

para cada $\psi \in H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e mais,

$$\begin{aligned} \langle r |n| T_{f_n}, \psi \rangle &= r |n| \langle FT_{f_n}, F\psi^V \rangle = \\ &= (2\pi)^{1/2} r |n| F\psi(-n). \end{aligned}$$

Logo,

$$r^{|D|} T_{f_n} = r^{|n|} T_{f_n}$$

com esta última igualdade, se

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\theta)$$

então

$$u(r, \theta) = r^{|D|} f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n r^{|n|} \exp(in\theta)$$

pois $r^{|D|} : H^{-\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow H^{-\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é sequencialmente contínuo considerando em $H^{-\infty}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a topologia fraca (ver [21]) e com algum cálculo, chegamos a fórmula de Poisson

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)} f(\alpha) d\alpha$$

(ver [14], pág. 251).

VI.3 - O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE LAPLACE EM UM SEMIPLANO

Consideremos o problema clássico de Dirichlet para a equação de Laplace bidimensional no semiplano dado por $\{(t, x) ; t > 0\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ |u(t, x)| < \infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

onde $f \in H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

A correspondência $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} = D \leftrightarrow x$ leva a considerar o seguinte problema

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, x) - x^2 = 0$$

sujeito as condições

$$U(0, x) = Ff(x)$$

$$|U(t, x)| < \infty \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

onde Ff indica a transformação de Fourier parcial em relação a variável x , cuja solução é dada por

$$U(t, x) = \exp(-t|x|) Ff(x)$$

já que o polinômio característico da equação é $p_2(\lambda, x) = \lambda^2 - x^2$.

Isso indica que

$$u(t, x) = [U(t, D) f](x) = [\exp(-t|D|) f](x)$$

ou ainda formalmente,

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-t)^j}{j!} |D|^j f(x)$$

Como o símbolo do operador $\exp(-t|D|)$, que é $\exp(-t|x|)$, não é analítico em $x = 0$, pelo raciocínio do exemplo IV.1.2, a ação deste operador sobre $f \in H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ é determinada por

$$[\exp(-t|D|) f](x) = [\exp(-tD) f_+](x) + [\exp(tD) f_-](x)$$

ou ainda,

$$[\exp(-t|D|) f](x) = f_+(x + it) + f_-(x - it)$$

jã que para cada $g \in H^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$[\exp(tD)g](x) = g(x - it) .$$

Assim,

$$u(t,x) = f_+(x+it) + f_-(x-it) .$$

Usando a fórmula de Cauchy, provamos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(x-st)}}{1+s^2} ds = \pi e^{i\xi(x+it)} \quad \text{e fazendo a mudança de variã}$$

veis $y = x - st$, chegamos que

$$e^{i\xi(x+it)} = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi y}}{t^2 + (x-y)^2} dy \quad \text{e daí, pela definição de}$$

$$f_+, \text{ temos } f_+(x+it) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_+(y)}{t^2 + (x-y)^2} dy . \quad \text{Analogamen}$$

$$\text{te, vamos ter que } f_-(x-it) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_-(y)}{t^2 + (x-y)^2} dy , \text{ uma vez}$$

$$\text{que } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(x-st)}}{1+s^2} ds = \pi e^{i\xi(x-it)} . \quad \text{Logo}$$

$$u(t,x) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{t^2 + (x-y)^2} dy .$$

APÊNDICES

APÊNDICE DO CAPÍTULO I

Com relação a continuidade do operador linear $A(D)$ sobre $H^\infty[S(R)]$, como foi afirmado no Teorema I.4.1, basta para cada f em $H^\infty[S(R)]$ provar uma desigualdade do tipo

$$N(A(D)f;p) \leq C_1 N(f;q_1) + \dots + C_s N(f;q_s)$$

onde

$$q_k(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} q_{\alpha k} x^{2\alpha} ; \quad x \in S(R) , \quad q_{\alpha k} \geq 0 , \quad k = 1, \dots, s$$

é real analítica em todos os pontos de $S(R)$.

Um esboço disso, será feito no caso $n = 2$.

Com a finalidade de simplificar a notação, vamos considerar $(x_1, x_2) = (x, y)$.

A seguinte integral deverá ser analisada

$$\int_{S(R)} p(x,y) |A(x,y)|^2 |Ff(x,y)|^2 dx dy$$

Seja $h(x,y) = |A(x,y)|^2$.

Como

$$\begin{aligned}
 h(x,y) &= \frac{h(x,y) + h(-x,y)}{2} + \frac{h(x,y) - h(-x,y)}{2} = \\
 &= \frac{h(x,y) + h(-x,y) + h(x,-y) + h(-x,-y)}{4} + \\
 &+ \frac{h(x,y) + h(-x,y) - h(x,-y) - h(-x,-y)}{4} + \\
 &+ \frac{h(x,y) - h(-x,y) + h(x,-y) - h(-x,-y)}{4} + \\
 &+ \frac{h(x,y) - h(-x,y) - h(x,-y) + h(-x,-y)}{4}
 \end{aligned}$$

e a função da primeira parcela da soma acima é par em x e em y ; a da segunda par em x e ímpar em y ; a da terceira, ímpar em x e par em y e a da quarta, ímpar em x e em y , vamos chamá-las de h_{pp} , h_{pi} , h_{ip} e h_{ii} respectivamente. Assim, a integral inicial fica

$$\begin{aligned}
 &\int_{S(R)} p(x,y) |h(x,y)| |Ff(x,y)|^2 dx dy \leq \\
 &\leq \int_{S(R)} p(x,y) |h_{pp}(x,y)| |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\
 &+ \int_{S(R)} p(x,y) |h_{pi}(x,y)| |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\
 &+ \int_{S(R)} p(x,y) |h_{ip}(x,y)| |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\
 &+ \int_{S(R)} p(x,y) |h_{ii}(x,y)| |Ff(x,y)|^2 dx dy .
 \end{aligned}$$

A primeira integral é finita já que $f \in H^\infty[S(R)]$.

Passando agora a análise da segunda integral, temos

$$\int_{S(R)} p(x,y) \sum_{i,j=0}^{\infty} |b_{ij}| |x^i| |y^j| |Ff(x,y)|^2 dx dy$$

uma vez que

$$|h_{pi}(x,y)| \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} |b_{ij}| |x^i| |y^j|$$

e então

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{S(R)} p(x,y) |b_{ij}| |x^i| |y^j| |Ff(x,y)|^2 dx dy = \\ & = \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{S(R) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |y| \leq 1\}} p(x,y) |b_{ij}| |x^i| |y^j| |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\ & + \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{S(R) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |y| > 1\}} p(x,y) |b_{ij}| |x^i| |y^j| |Ff(x,y)|^2 dx dy \leq \\ & \leq \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{S(R)} p(x,y) |b_{ij}| |x^i| |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\ & + \sum_{i,j=0}^{\infty} \int_{S(R)} p(x,y) |b_{ij}| |x|^i |y|^{j+1} |Ff(x,y)|^2 dx dy = \\ & = \int_{S(R)} p(x,y) \sum_{i,j=0}^{\infty} |b_{ij}| x^i |Ff(x,y)|^2 dx dy + \\ & + \int_{S(R)} p(x,y) \sum_{i,j=0}^{\infty} |b_{ij}| x^i y^{j+1} |Ff(x,y)|^2 dx dy < \infty \end{aligned}$$

pois $f \in H^{\infty}[S(R)]$. Mesmo raciocínio vale para as demais integrais.

APÊNDICE DO CAPÍTULO III

Este apêndice tem como objetivo colocar uma topologia em $H^\infty(G)$, onde G é um subconjunto não vazio e aberto do $\mathbb{R}^n$, de modo que a noção de convergência dada por esta topologia, seja a mesma que a da seção III.3. Para isso, é necessário a noção de topologias indutivas e como um caso particular desta; a soma direta localmente convexa, será a topologia procurada.

TOPOLOGIAS INDUTIVAS

Sejam X , $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ espaços vetoriais sobre o corpo K e $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de aplicações lineares de X_λ em X . Consideremos, para cada $\lambda \in \Lambda$, uma topologia localmente convexa τ_λ sobre X_λ . A topologia indutiva sobre X com relação a família $((X_\lambda, \tau_\lambda), g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é a topologia localmente convexa mais fina em que cada aplicação $g_\lambda : X_\lambda \rightarrow X$ é contínua ($\forall \lambda \in \Lambda$). Para ver que esta topologia está bem definida veja [21], pág. 54.

O resultado abaixo é de grande importância pois com ele podemos concluir que $A(D)T : H^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua para cada $T \in H^{-\infty}(G)$ e daí, segue a invariância de $H^{-\infty}(G)$ em relação aos operadores diferenciais parciais lineares de ordem infinita e de coeficientes complexos constantes $A(D)$ com símbolo analítico em $-G$.

PROPOSIÇÃO:

Uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação linear $f: X \rightarrow Y$ onde Y é um espaço localmente convexo e X está munido de uma topologia indutiva seja contínua é que para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $f \circ g_\lambda$ seja contínua.

PROVA

Ver [21], pág. 54.

SOMA DIRETA LOCALMENTE CONVEXA

Se $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ for uma família de espaços vetoriais sobre o corpo K , a soma direta algébrica $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ será definida como sendo o subespaço de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ em que os elementos $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ terão a propriedade que somente um número finito de projeções $p_\lambda(x) = x_\lambda$ são diferentes de zero.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, consideremos g_λ a inclusão de X_λ em $\bigoplus_{\mu \in \Lambda} X_\mu$. A soma direta localmente convexa da família $(X_\lambda, \tau_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços localmente convexos é definida como sendo $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ com a topologia indutiva em relação a família $((X_\lambda, \tau_\lambda), g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Um último resultado a respeito de soma direta localmente convexa faz-se necessário.

PROPOSIÇÃO:

Uma seqüência $(x_j)_j$ em $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ converge para

$x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ se, e somente se, para cada $\lambda \in \Lambda$,
 $x_{j\lambda} \rightarrow x_\lambda$ em X_λ onde $x_j = (x_{j\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$, $\forall j = 1, 2, \dots$.

PROVA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA

Decorre do fato de que para cada $\lambda \in \Lambda$, a projeção
 $p_\lambda : \bigoplus_{\mu \in \Lambda} X_\mu \rightarrow X_\lambda$ é contínua (ver [21], pág. 55).

PROVA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE

Decorre do fato de que para cada $\lambda \in \Lambda$, a inclusão g_λ
é contínua.

Considerando para cada $\lambda \in G$, onde G é um aberto não
vazio do $\mathbb{R}^n$, $X_\lambda = H^\infty[S(\lambda, R_\lambda)]$ com $S(\lambda, R_\lambda) \subset G$ e $X = H^\infty(G)$,
o objetivo deste apêndice no trabalho foi alcançado. Para ver
isto, basta aplicar a definição de $H^\infty(G)$ e os resultados aqui
apresentados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ADAMS, R.A - Sobolev spaces, Academic Press, 1975.
- [2] CHAZARAIN, J. e PIRIOU, A. - Introduction to the theory of linear partial differential equations, North Holland, 1982.
- [3] CODDINGTON, E.A. e LEVINSON, N. - Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill Book Company, inc., 1955.
- [4] DIEUDONNE, J. - Foundations of modern analysis, Academic Press, 1960.
- [5] DUBINSKII, YU.A. - The algebra of pseudodifferential operators with analytic symbols and its applications to mathematical physics, Uspekhi Mat. Nauk, 1982.
- [6] _____ - The algebra of differential operators of infinite order and pseudodifferential equations with analytic symbols, Dokl. Akad. Nauk, 1982.
- [7] _____ - The Cauchy problem for partial differential equations with complex variables, Dokl. Akad. Nauk, 1982.
- [8] _____ - The theory of the Cauchy problem for partial differential equations, Dokl. Akad. Nauk, 1981.
- [9] _____ - A method of solution of partial differential equations, Dokl. Akad. Nauk, 1981.

- [10] DUBINSKII, YU.A. - Non-triviality of Sobolev spaces of infinite order in the case of the whole Euclidean space and the torus , Mat. Sb , 1976.
- [11] _____ - Sobolev spaces of infinite order on the torus and some questions in the theory of periodic solutions of differential equations, Dokl. Akad. Nauk, 1975.
- [12] _____ - Sobolev spaces of infinite order and the behavior of solutions of some boundary value problems with unbounded increase of the order of the equation, Mat. Sbornik, 1975.
- [13] _____ - Certain differential operator equations of arbitrary order, Math. Sb, 1973.
- [14] FIGUEIREDO, D.G. - Análise de Fourier e equações diferenciais parciais, Ed. Edgard Blücher. Ltda, 1977.
- [15] FRIEDMAN, A. - Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, 1963.
- [16] HALE, J.K. - Ordinary differential equations , Wiley - Interscience , 1969.
- [17] LEFSCHETZ, S. - Differential equations: geometric theory, Interscience publishers, inc., 1957.
- [18] PENNISI, L.L. - Elements of complex variables , Holt, Rinehart and Winston, inc., 1963.
- [19] REED, M. e SIMON, B. - Functional analysis , methods of modern mathematical physics, vol.I, Academic Press, 1980.
- [20] ROYDEN, H.L. - Real analysis, 2ª ed., The Macmillan Company, 1971.
- [21] RUDIN, N. - Functional analysis , McGraw - Hill Company, 1973.
- [22] SAFF, E.B. e SNIDER, A.D. - Fundamentals of complex analysis for mathematics, science and engineering, Prentice Hall, inc., 1976.

- [23] SCHAEFER, H.H. - Topological vector spaces, Springer Verlag, 3rd ed., 1971.
- [24] STAKGOLD, I. - Green's functions and boundary value problems, J. Wiley, 1979.
- [25] TAYLOR, M.E. - Pseudodifferential operators, Princeton, 1981.
- [26] TREVES, F. - Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Plenum Press, 1980.
- [27] TYCHONOV, A.N. e SAMARSKI, A.A. - Partial differential equations of mathematical physics, vol.I, Holden-day, Inc., 1964.
- [28] WILANSKI, A. - Modern methods in topological vector spaces, Mc Graw - Hill, 1978.