EQUAÇÃO DE DIFERENÇA COM RETARDAMENTO
DEPENDENDO DO TEMPO:
CASO MATRICIAL

Lizete M. Crnkowise Fernandes Garcia

ORIENTADOR. Prof. Dr. Cerino Ewerton de Avellar

Dissertação apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de São Car-
los, da Universidade de São Paulo,
para a obtenção do Título de Mestre
em Matemática.

SÃO CARLOS

1988

A José Paulo, aos meus pais:
Catharina e Francisco e à
tia Cota.

D E D I C O

AGRADECIMENTOS

Ao meu Orientador, Prof. Dr. Cerino Ewerton de Avellar, pela assistência e atenção dadas durante a realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática, da Universidade Federal de São Carlos e do ICMSC-USP-São Carlos.

A minha família, pelo incentivo que me deram durante todos esses anos.

Ao meu marido, José Paulo, pelo constante apoio.

A Sandra Lúcia de Oliveira, por sua eficiência na confecção deste trabalho.

Este trabalho foi
parcialmente fi-
nanciado pelo
CNPq e PICD.

SUMMARY

On this work we study stability properties of a system of Difference Equations
$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k x(t-r_k),$$
 $x \in \mathbb{R}^n$, A_k , $n \times n$ constant matrices, $r_k > 0$, in the case that we allow the delays r_k to vary in time.

The main result we obtained is that if the above system is stable and the matrices A_k satisfy a commutative condition $A_k A_j^* = A_j^* A_k$, $j, k = 1, 2, \dots, n$, then the system

$$x(t) = \sum_{k=1}^N A_k x(t-r_k(t))$$
 is also stable.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO I	
Definições e Resultados Básicos	04
1. Vetores, Matrizes e Normas	04
2. Operadores de Diferença	10
2.1. Operadores de Diferença	
Autonomos	12
3. Medidas de não compacidade em $C([-r, \infty), p(t))$	24
CAPÍTULO II	
Equações de Diferença com Retardamento Dependendo do Tempo: Caso Matricial	28
BIBLIOGRAFIA	37

INTRODUÇÃO

Uma classe importante das equações diferenciais funcionais são as chamadas "equações diferenciais do tipo neutro" que são, a grosso modo, equações cuja função incôgnita e suas derivadas, dependem não só do instante presente como também do passado.

Um modelo simples para tais equações é do tipo

$$(1) \quad \dot{x}(t) - c \dot{x}(t-r) = a x(t) + b x(t-r) + f(t)$$

onde a , b , c e r são constantes, $r > 0$, $c \neq 0$ e f uma função real contínua.

Para uma equação do tipo (1), o conceito de solução e o apropriado espaço de condições iniciais fica, em geral difícil de se descrever (ver Hale [08], capítulo 1). Uma maneira de contornar esse problema foi iniciada com Hale e Meyer [09] e consiste em reescrever a equação (1) na forma

$$(2) \quad \frac{d}{dt} [x(t) - c x(t-r)] = a x(t) + b x(t-r) + f(t)$$

desenvolvendo uma teoria para as chamadas "equações diferenciais de diferença, do tipo neutro" que de uma maneira geral se escreve

$$(3) \quad \frac{d}{dt} D x_t = f(t, x_t)$$

onde D , chamado "operador de diferença", é um operador linear, contínuo que será precisamente definido no capítulo I do nosso trabalho.

No estudo da teoria de estabilidade e comportamento assintótico das soluções dessas equações diferenciais de diferença, do tipo neutro, a maior dificuldade reside no estudo das propriedades da "equação de diferença" associada

$$(4) \quad Dx_t = 0$$

Nos últimos anos, muitos autores, Cruz e Hale [05], Henry [10], Silkowski [13], Melvin [11], Avellar e Hale [01], Siqueira [12], Ferreira [06], tem se preocupado com o estudo das equações de diferença do tipo

$$(5) \quad x(t) - \sum_{k=1}^N A_k x(t-r_k) = 0$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, A_k , $k = 1, 2, \dots, N$, são matrizes $n \times n$ e $0 < r_k \leq r$.

Muitos problemas surgem ao se tentar estudar a estabilidade das soluções de um sistema do tipo (5), quando permitimos variações nos coeficientes A_k e nos retardamentos r_k que, em geral, são parâmetros que não são conhecidos precisamente.

Melvin [11] estabeleceu uma condição necessária e suficiente para se garantir "estabilidade nos retardamentos" de (5), no caso escalar. Silkowski [13] estendeu esse resultado para o caso matricial, conforme veremos no capítulo I.

Ultimamente tem-se estudado o problema de estabilidade de equações de diferença da forma

$$(6) \quad x(t) - \sum_{k=1}^N A_k(t) x(t-r_k(t)) = 0$$

onde os coeficientes $A_k(t)$ e os retardamentos $r_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, são funções do tempo.

Siqueira [12], em sua dissertação de mestrado, resolveu o problema para o caso escalar $A_k(t) \in \mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}$.

O objetivo de nosso trabalho é estudar a estabilidade das soluções de (5) no caso matricial com os retardamentos variando no tempo. Utilizaremos, basicamente, a mesma técnica usada por Siqueira [12], introduzindo uma condição de comutatividade nos coeficientes A_k .

CAPÍTULO I

Definições e Resultados Básicos

Neste capítulo faremos uma revisão e resumo de alguns tópicos que são fundamentais para o desenvolvimento do nosso trabalho [14].

1. Vetores, Matrizes e Normas

Seja E^n o espaço vetorial complexo de dimensão n dos vetores colunas x , denotados por

$$x = \text{col } (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

seu transposto $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e seu transposto conjugado $x^* = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Seja $x = \text{col } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, indicaremos por

$$\|x\| = (x^*x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

a norma Euclidiana de x .

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz complexa $n \times n$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus autovalores. Indicaremos por

$$\gamma(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

o raio espectral da matriz A .

Geometricamente, o raio espectral de A , representa, no plano complexo, o raio do menor disco $|z| \leq R$ com centro na origem, que contém todos os autovalores de A .

Definição 1.1. Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz complexa $n \times n$, a norma espectral de A é definida por

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

A norma espectral assim definida, goza de todas as propriedades usuais da norma Euclídiana de um vetor x , isto é,

- i) $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, α escalar
- iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- iv) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Além disso,

- v) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in E^n$
- vi) Existe $y \in E^n$, $y \neq 0$, tal que

$$\|Ay\| = \|A\| \cdot \|y\|$$

Os conceitos de norma espectral e raio espectral estão relacionados pela seguinte:

Proposição 1.1. Para toda matriz quadrada A temos

$$\|A\| \geq \gamma(A)$$

Prova:

Seja λ um autovalor de A e seja $x \neq 0$ um autovetor associado a λ , isto é, $Ax = \lambda x$ então,

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

o que implica $\|A\| \geq |\lambda|$, qualquer que seja o autovalor de A , o que conclui a demonstração.

Consideraremos agora as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

denotam, respectivamente a matriz, $n \times n$, $A = [a_{ij}]$; sua transposta $A^T = [a_{ji}]$ e sua transposta conjugada $A^* = [\bar{a}_{ji}]$, então o produto A^*A é ainda uma matriz $n \times n$ e a norma espectral de A pode ser expressa em termos do raio espectral de A^*A de acordo com o seguinte:

Teorema 1.1. Para toda matriz quadrada A , temos

$$\|A\| = [\gamma(A^*A)]^{1/2}$$

Prova:

Como $(A^*A)^* = A^*A$, o que implica A^*A hermitiana e, desde que $x^*A^*Ax = (Ax)^*(Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$, $\forall x \in E^n$,

A^*A é positiva definida.

Seja $\{v_i\}_{i=1}^n$ um conjunto ortogonal de autovetores de A^*A , isto é, $A^*A v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$,
 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, $v_i^* v_j = 0$ para $i \neq j$ e
 $v_i^* v_j = 1$ para $i = j$.

Para todo $x \in E^n$, $x \neq 0$, podemos escrever

$$x = \sum_{i=1}^n c_i v_i, \text{ então}$$

$$\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^2 = \frac{x^* A^* A x}{x^* x} = \frac{\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \lambda_i}{\sum_{j=1}^n |c_j|^2} \quad \text{o que implica}$$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^2 \leq \lambda_n.$$

$$\text{Mas, para } x = v_n \text{ temos } \frac{\|A v_n\|}{\|v_n\|} = \lambda_n.$$

Logo,

$$\|A\|^2 = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)^2 = \lambda_n = \gamma(A^*A).$$

Portanto,

$$\|A\| = [\gamma(A^*A)]^{1/2}$$

Lema 1.1. Seja A uma matriz hermitiana, $n \times n$, isto é, $A = A^*$, então $\|A\| = \gamma(A)$.

De fato,

$$\|A\|^2 = \gamma(A^*A) = \gamma(A^2)$$

Fazendo $B = A^2$, notamos que B é hermitiana. Logo, A e B são normais, isto é, $AA^* = A^*A$ e $BB^* = B^*B$.

Então, A e B podem ser escritas na forma $A = U^*DU$ e $B = U^*D^2U$, onde U é unitária e D é diagonal.

Se $F(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ denota o conjunto de autovalores de D , então $F(D^2) = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2\}$ denotará o conjunto de autovalores de D^2 .

Temos que

$$\gamma(D^2) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i^2| = |\lambda_k^2| = |\lambda_k|^2 = \gamma^2(D) \quad \text{o que implica em}$$

$$\gamma(A^2) = \gamma^2(A).$$

$$\text{Logo, } \|A\| = \gamma(A)$$

Um outro caso particular interessante é dado pelo:

Corolário 1.1. Seja A uma matriz normal $n \times n$ isto é, $AA^* = A^*A$. Se $\|A\|$ é a norma espectral de A , então $\|A\| = \gamma(A)$.

Entretanto, esse fato não é verdadeiro em geral.

Daremos um exemplo em que $\|A\| > \gamma(A)$.

Exemplo 1.1.

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ cujos autovalores

são $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, o que implica $\gamma(A) = \frac{1}{2}$

Por outro lado, os autovalores de $A^*A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 5/4 \end{bmatrix}$

são:

$$\lambda_1 = (3+2\sqrt{2})/4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = (3-2\sqrt{2})/4.$$

$$\text{Portanto, } \gamma(A^*A) = (3+2\sqrt{2})/4.$$

Assim,

$$\|A\| = [\gamma(A^*A)]^{1/2} = [(3+2\sqrt{2})/4]^{1/2} > \frac{1}{2} = \gamma(A) \quad \text{ou seja,}$$

$$\|A\| = \gamma(A).$$

2. Operadores de Diferença

Neste parágrafo, relataremos definições e propriedades relacionadas com os chamados operadores de diferença. Maiores detalhes podem ser encontrados em Hale [08] capítulo 12.

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial normado n -dimensional, com norma $|\cdot|$, $r > 0$ um número real dado.

Denotamos por $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas do intervalo $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com $\|\phi\|$, $\phi \in C$, definida por $\|\phi\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$.

Se x é uma função contínua $x: [\sigma-r, \sigma+a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ então para cada t , $\sigma \leq t < \sigma+a$, $x_t \in C$ é definida por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$.

Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$ e seja $D: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador contínuo $D(t, \phi)$, linear em ϕ . Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe uma matriz $\eta(t, \theta)$, $n \times n$, de variação limitada em $\theta \in [-r, 0]$ tal que

$$D(t, \phi) = \int_{-r}^0 [d_{\theta} \eta(t, \theta)] \phi(\theta)$$

onde estamos subentendendo que estendemos a definição de $\eta(t, \theta)$ para $\theta \in \mathbb{R}$, colocando

$$\eta(t, \theta) = \eta(t, -r) \quad \text{para} \quad \theta \leq -r$$

$$\eta(t, \theta) = \eta(t, 0) \quad \text{para} \quad \theta \geq 0$$

Dizemos que $D(t, \phi)$ é atômico no zero, sobre Ω ,

se:

(i) A matriz $A(t) = \eta(t, 0^+) - \eta(t, 0^-)$ é contínua e inversível para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Existe uma função escalar, $\gamma(t, s)$, contínua em $t \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, com $\gamma(t, 0) = 0$ tal que

$$\left| \int_{-s}^{0^-} [d_\theta \eta(t, \theta)] \phi(\theta) - A(t) \phi(0) \right| \leq \gamma(t, s) \|\phi\|$$

Exemplo 1.2.

Se $D\phi = \phi(0)$ para todo ϕ , então D é atômico no zero.

Exemplo 1.3.

Se $D\phi = \phi(0) + B\phi(-r)$, onde $r > 0$ e B é uma matriz constante $n \times n$, então D é atômico no zero.

Consideremos a "equação de diferença" homogênea

$$(1.1) \quad \begin{cases} D(t, x_t) = 0, & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $D(t, \phi)$ linear e atômico no zero.

Definimos solução de (1.1) como sendo função contínua $x \in C([-r, a), \mathbb{R}^n)$, $a \leq +\infty$ tal que $(t, x_t) \in \Omega$ para $0 \leq t < a$, $D(t, x_t) = 0$, $0 \leq t < a$ e $x_0 = \phi$.

Assim, para que essa definição faça sentido, temos que restringir o espaço de condições iniciais tomando

$$C_D = \{\phi \in C : D(0, \phi) = 0\}$$

2.1. Operadores de Diferença Autônomos

Seja $D: C \rightarrow \mathbb{R}^n$, linear, contínuo e atômico no zero, representado pela integral de Stieltjes:

$$D\phi = \phi(0) - \int_{-r}^0 [d\mu(\theta)] \phi(\theta)$$

onde μ é uma matriz de variação limitada que se anula no zero, contínua pela esquerda em $[-r, 0]$ e $\text{var}_{[-\epsilon, 0]} \mu \rightarrow 0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

No que se segue, faremos uma restrição adicional em D , supondo que μ não possua parte singular, isto é, que existam uma matriz $n \times n$ integrável A e matrizes constantes A_k , $n \times n$, tal que

$$(1.2) \quad D\phi = D_0\phi + \int_{-r}^0 A(\theta) \phi(\theta) d\theta$$

$$(1.3) \quad D_0\phi = \phi(0) - \sum_{k=1}^N A_k \phi(-r_k)$$

onde $0 < r_k \leq r$ e $\int_{-r}^0 |A(\theta)| d\theta < \infty$

Consideremos a equação de diferença autônoma

$$(1.4) \quad \begin{cases} Dx_t = 0, & t \geq 0 \\ x_0 = \phi, & \phi \in C_D \end{cases}$$

Tal equação define um semigrupo de operadores lineares, fortemente contínuos, $T_D(t): C_D \rightarrow C_D$, $t \geq 0$, onde $T_D(t) \phi = x_t(\phi)$, $t \geq 0$, $\phi \in C_D$ e $x_t(\phi)$ a solução de (1.4). Seja a_D a ordem do semigrupo $T_D(t)$, isto é,

$$a_D = \inf \{a \in \mathbb{R}: \exists k = k(a): \|T_D(t)\| \leq k e^{at}, t \geq 0\}.$$

Henry [09], mostrou que

$$a_D = \sup \{\operatorname{Re} \lambda : \det \Delta_D(\lambda) = 0\} \quad \text{onde}$$

$$\Delta_D(\lambda) = I - \sum_{k=1}^N A_k e^{-\lambda r_k} - \int_{-r}^0 e^{\lambda \theta} A(\theta) d\theta$$

Definição 1.2. Suponhamos $D: C \rightarrow \mathbb{R}^n$, linear, contínuo, atômico no zero. O operador D é dito estável se a solução nula da equação de diferença homogênea

$$(1.5) \quad \begin{cases} Dx_t = 0, & t \geq 0 \\ x_0 = \phi, & \phi \in C_D \end{cases}$$

for uniformemente assintoticamente estável, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|\phi\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x_t(\phi)\| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$, e existe $\delta_0 > 0$ tal que $\|\phi\| < \delta_0 \Rightarrow x(t, \phi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, onde $x(t, \phi)$ é a solução de (1.5).

Teorema 1.2. (Henry) As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) D é estável
- (ii) $a_D < 0$
- (iii) Existe $\delta > 0$ tal que todas as soluções da equação característica associada a (1.5),

$$\det \left[I - \sum_{k=1}^N A_k e^{-\lambda r_k} - \int_{-r}^0 e^{\lambda \theta} A(\theta) d\theta \right] = 0$$

satisfazem $\operatorname{Re} \lambda \leq -\delta$

Exemplo 1.4.

O operador $D\phi = \phi(0) - A\phi(-r)$, onde A é uma matriz $n \times n$, tal que todos os seus autovalores tem módulo menor que 1; é estável.

De fato,

A equação característica

$$\det [I - A e^{-\lambda r}] = 0$$

é equivalente a $\det [\rho I - A] = 0$, onde $\rho = e^{\lambda r}$. Assim,

$|\rho| < 1$ implica $|e^{\lambda r}| = e^{\operatorname{Re} \lambda} < 1 \iff \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta < 0$, para algum $\delta > 0$.

Exemplo 1.5.

O operador $D\phi = \phi(0) + \frac{1}{2} \phi(-1) + \frac{1}{2} \phi(-2)$, é estável.

De fato,

A equação característica

$$2e^{2\lambda} + e^{\lambda} + 1 = 0 \implies |e^{\lambda}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies$$

$$\implies \operatorname{Re} \lambda = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} < 0.$$

Analisaremos agora, como a variação nos parâmetros do operador $D\phi$, podem afetar sua estabilidade. Para tanto, vamos nos ater aos operadores de diferença do tipo

$$(1.6) \quad D_0 \phi = \phi(0) - \sum_{k=1}^N A_k \phi(-r_k)$$

A_k : matrizes constantes $n \times n$, $0 < r_k \leq r$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Nas aplicações, os A_k 's e os r_k 's são parâmetros que nem sempre são conhecidos precisamente. É importante, portanto, verificar qual o efeito de pequenas variações nesses parâmetros, sobre a estabilidade do operador.

Com relação a variações nos coeficientes A_k 's, o problema é simples, desde que a parte real das raízes da equação característica

$$\det \left[I - \sum_{k=1}^N A_k e^{-\lambda r_k} \right] = 0$$

variem continuamente com os A_k 's, conforme mostram Avellar e Hale [01]. De acordo com o item (iii) do Teorema 1.2., pequenas variações nos A_k 's não destroem a estabilidade de D_0 .

O problema da variação nos retardamentos r_k 's é mais delicado, como mostra o seguinte exemplo devido a Melvin.

Exemplo 1.6. Consideremos a equação

$$x(t) = -\frac{1}{2} x(t-1) - \frac{1}{2} x(t-2), \text{ que é estável.}$$

Consideremos agora a equação

$$x(t) = -\frac{1}{2} x(t-1 + \frac{1}{2n+3}) - \frac{1}{2} x(t-2)$$

É fácil verificar que $x(t) = \sin(2n+3) \frac{\pi}{2} t$ é solução desta equação e esta função não tende a zero, quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, o operador

$$D\phi = \phi(0) + \frac{1}{2} \phi(-1 + \frac{1}{2n+3}) + \frac{1}{2} \phi(-2)$$

não é estável, embora, para n suficientemente grande, $1 - \frac{1}{2n+3}$ fique arbitrariamente próximo de 1.

Esse fato justifica as definições que daremos a seguir.

Utilizaremos a notação, $D(r, A)$, para evidenciar a dependência dos retardamentos r_k e dos coeficientes A_k na

representação de D_0 . Escreveremos

$$(1.7) \quad D(r, A)\phi = \phi(0) - \sum_{k=1}^N A_k \phi(-r_k)$$

com $r = (r_1, r_2, \dots, r_N)$, $A = (A_1, A_2, \dots, A_N)$, A_k e r_k definidos anteriormente.

Indicaremos por $(\mathbb{R}^+)^N$, o produto cartesiano de $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ por si mesmo N -vezes.

Definição 1.3. O operador $D(r, A)$ é dito estável localmente nos retardamentos, se existe uma vizinhança aberta de r , $I(r) \subseteq (\mathbb{R}^+)^N$ tal que $D(s, A)$ é estável para todo $s \in I(r)$.

Definição 1.4. O operador $D(r, A)$ é dito estável globalmente nos retardamentos se for estável para cada $r \in (\mathbb{R}^+)^N$. Nesse caso, diremos também que $D(r, A)$ é fortemente estável.

Teorema 1.3. (Silkowski) As seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Para algum r fixado, $r \in (\mathbb{R}^+)^N$ $r = (r_1, \dots, r_N)$ com $r_k > 0$, racionalmente independentes, $D(r, A)$ é estável.

$$(ii) \gamma_0(A) = \sup \left\{ \gamma \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{i\theta_k} \right) : \theta_k \in [0, 2\pi], k=1, 2, \dots, N \right\} < 1$$

onde $\gamma(B)$ denota o raio espectral de uma matriz B .

(iii) $D(r, A)$ é estável localmente nos retardamentos, relativamente a uma família de retardamentos.

(iv) $D(r, A)$ é estável globalmente nos retardamentos.

O resultado abaixo é devido à Melvin.

Corolário 1.1.

Se cada A_k é escalar então $D(r, A)$ é estável localmente nos retardamentos, se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^N |A_k| < 1$$

Exemplo 1.7. Consideremos a equação

$$x(t) = \frac{1}{2} x(t-1) + \frac{1}{3} x(t-2)$$

O operador $D\phi = \phi(0) - \frac{1}{2} \phi(-1) - \frac{1}{3} \phi(-2)$ é estável localmente nos retardamentos.

De fato,

Exemplo 1.8. Consideremos a equação

$$x(t) = A x(t-r) + B x(t-s), \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$

O operador

$D\phi = \phi(0) - A \phi(-r) - B \phi(-s)$ é estável globalmente nos retardamentos.

De fato,

$$A + B e^{i\theta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha e^{i\theta} \\ -\alpha e^{i\theta} & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$C = A + B e^{i\theta} - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & \alpha e^{i\theta} \\ -\alpha e^{i\theta} & -\alpha - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det C &= (\alpha - \lambda)(-\alpha - \lambda) + \alpha^2 e^{2i\theta} = -\alpha^2 + \lambda^2 + \alpha^2 e^{2i\theta} = \\ &= \lambda^2 - \alpha^2(1 - e^{2i\theta}) \end{aligned}$$

$$\det C = 0 \iff \lambda = \pm \alpha \sqrt{1 - e^{2i\theta}}$$

Queremos o supremo de $|\lambda(\theta)|$, para $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\lambda^2(\theta) = \alpha^2 [(1 - \cos 2\theta) - i \sin 2\theta]$$

$$\begin{aligned} |\lambda^2(\theta)| &= \sqrt{\alpha^4 [(1 - \cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta]} = \sqrt{\alpha^4 (2 - 2\cos 2\theta)} = \\ &= \alpha^2 \sqrt{2 - 2\cos 2\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, para } \theta \in [0, 2\pi], \quad \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\lambda(\theta)|^2 = 2\alpha^2$$

$$\therefore \gamma_0(A, B) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |\lambda(\theta)| = \alpha \sqrt{2}$$

Como $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos $\gamma_0(A, B) < 1$, e pelo Teorema (1.3), vemos que o operador $D\phi$ é estável globalmente nos retardamentos.

O seguinte resultado em relação a estabilidade de operadores D com os retardamentos r_k 's e os coeficientes a_k 's dependendo do tempo, no caso escalar, é devido a Siqueira [12].

Teorema 1.4. Consideremos o sistema

$$(1.8) \quad \begin{cases} z(t) = \sum_{k=1}^N a_k z(t-r_k); & t \geq 0 \\ z(t) = \psi(t); & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $z(t) \in \mathbb{R}$, a_k e r_k , $k=1, \dots, N$, constantes reais,

$0 < r_k \leq r$, que vamos supor estável globalmente nos retardamentos, isto é $\sum_{k=1}^N |a_k| < 1$, e consideremos o sistema perturbado:

$$(1.9) \quad \begin{cases} y(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) y(t-r_k(t)); & t \geq 0 \\ y(t) = \psi(t); & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $r_k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ são funções reais contínuas tais que $r_k(0) = r_k$, $r_k(t) \leq t + r_k$, $\forall t \in [0, \infty)$, $k=1, 2, \dots, N$; $a_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais contínuas, tais que $a_k(0) = a_k$, $k=1, 2, \dots, N$ e $\sup_{t \geq 0} \{ \sum_{k=1}^N |a_k(t)| \} < 1$.

Seja

$$r(t) = \begin{cases} \max_{1 \leq k \leq N} \{r_k(t)\}, & t \geq 0 \\ r = \max_{1 \leq k \leq N} \{r_k\}, & -r \leq t < 0 \end{cases}$$

tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - r(t)) = +\infty$.

Então, para todo $\psi \in C_D$, o sistema (1.9) tem uma única solução y com $y(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Ainda na dissertação de Siqueira [12], encontramos o seguinte contra-exemplo do caso matricial.

Exemplo 1.9. Seja o sistema

$$(1.10) \quad \begin{cases} x(t) = Ax(t-r) + Bx(t-s), & t \geq 0 \\ x(t) = \psi(t), & -a \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, A e B matrizes constantes, 2×2 ,

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ -2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$r > 0$, $s > 0$, $a = \max \{r, s\}$.

O operador $D(r,s)$ dado por $D(r,s)\phi = \phi(0) - A\phi(-r) - B\phi(-s)$ é estável globalmente nos retardamentos, conforme mostramos no exemplo 1.8.

Tomando $r = r(t)$, $s = s(t)$ funções contínuas, periódicas de período 3 tal que

$$r(0) = 1, \quad r(1) = 3, \quad r(2) = 3$$

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 1, \quad s(2) = 1 \text{ e a condição}$$

inicial, $\psi : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi \in C_{D(r,s)}$, com

$$\psi(-1) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \psi(-2) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Siqueira [12], mostrou que para o sistema

$$(1.11) \quad \begin{cases} x(t) = A x(t-r(t)) + B x(t-s(t)), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t); & t \in [-2, 0] \end{cases}$$

existe uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que se $x(t)$ é solução de (1.11), $x(t_n) \not\rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, isto é, o sistema (1.11) não é estável.

No nosso trabalho, daremos uma condição suficiente para se preservar a estabilidade no caso matricial, com os retardamentos dependendo do tempo. A idéia foi generalizar o trabalho de Siqueira [12], que utiliza o Teorema do Ponto Fixo de Darbo [03], e a técnica do Teorema de Banãs [03].

3. Medidas de não compacidade em $C([-r, \infty), p(t))$, [03], [04]

Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Para um dado conjunto X de E , denotaremos por $\bar{X}$, o fecho de X e por $\text{co}X$, a envoltória convexa de X .

Sejam:

m_E : a família de todos os subconjuntos limitados e não vazios de E .

R_E : a família de todos os subconjuntos relativamente compactos e não vazios de E .

Se B é uma dada família de conjuntos, então:

B^c : é a subfamília de todos os conjuntos fechados de B .

Medida de não compacidade

Uma função $\mu : m_E \rightarrow [0, \infty)$ será chamada uma medida de não compacidade se satisfaz as seguintes condições:

(i) A família

$$B = \{X \in m_E : \mu(X) = 0\} \text{ é não vazia e } B \subset R_E.$$

(ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$

(iii) $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$

(iv) $\mu(\overline{\text{co}X}) = \mu(X)$

$$(v) \quad \mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y), \text{ para todo } \lambda \in [0,1]$$

$$(vi) \quad \text{Se } X_n \in m_E^C, \quad X_{n+1} \subset X_n, \quad n=1,2,\dots, \text{ e se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(X_n) = 0, \text{ então, o conjunto}$$

$$X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$$

A família B na condição (i) é chamada o núcleo da medida μ e será denotada por $\ker \mu$.

Temos que $(\ker \mu)^C$ forma um conjunto fechado em m_E^C , com relação à topologia gerada pela distância de Hausdorff, E mais, a função μ é contínua (e mesmo lipschitziana) com relação à distância de Hausdorff.

Se a medida de não compacidade μ satisfaz em adição, as seguintes duas condições:

$$(vii) \quad \mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y), \quad \forall X, Y \in E$$

$$(viii) \quad \mu(\lambda X) = |\lambda| \mu(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall X \in E$$

será chamada de uma medida sublinear de não compacidade, também conhecida como medida de Kuratowski.

Seja $p(t)$, uma função contínua e definida no intervalo $[-r, \infty)$ com valores reais positivos, $r \in \mathbb{R}$.

Denotaremos: $C([-r, \infty), p(t)) = C_p$ o conjunto de todas as funções contínuas definidas no intervalo $[-r, \infty)$, tais que

$$\sup \{ |x(t)| p(t) : t \geq -r \} < \infty$$

Temos que C_p é um espaço de Banach com relação a norma:

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|p(t) : t \geq -r\}$$

Agora, para um arbitrário $x \in C_p$, $x \in m_{C_p}$, $\Gamma > 0$, $\epsilon > 0$, denotaremos:

$$\omega^\Gamma(x, \epsilon) = \sup\{|x(t)p(t) - x(s)p(s)| : t, s \in [-r, \Gamma], |t-s| \leq \epsilon\}$$

$$\omega^\Gamma(X, \epsilon) = \sup\{\omega^\Gamma(x, \epsilon) : x \in X\}$$

$$\omega_o^\Gamma(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \omega^\Gamma(X, \epsilon)$$

$$\omega_o(X) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \omega_o^\Gamma(X)$$

$$a(X) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \{\sup\{|x(t)|p(t) : t \geq \Gamma\}\}$$

$$b(X) = \lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} \{\sup\{|x(t)p(t) - x(s)p(s)| : t, s \geq \Gamma\}\}$$

Para todo conjunto $X \in m_{C_p}$, denotaremos:

$$\mu_o(X) = \omega_o(X) + a(X)$$

$$\mu(X) = \omega_o(X) + b(X)$$

Estas funções $\mu_o(X)$ e $\mu(X)$ são medidas sublineares de não compacidade no espaço C_p .

O $\ker \mu_o$ é a família de todos os conjuntos limitados, consistindo de funções equicontínuas em cada inter-

valo compacto e que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)p(t) = 0$, uniformemente com relação a $x \in X$, e $\ker \mu$ é a família de todos os conjuntos limitados consistindo de funções equicontínuas em cada intervalo compacto e tal que

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \{ \sup [|x(t)p(t) - x(s)p(s)| : t, s \geq \Gamma] \} = 0, \quad \text{uniformemente}$$

com relação a $x \in X$.

Seja, $M \subset E$, conjunto não vazio e μ : medida de não compacidade em E .

Contração com relação a μ .

Uma transformação contínua $T: M \rightarrow E$, é uma contração com relação a μ (chamada μ -contração) se:

$$X \subset M, \quad X \in m_E, \quad \text{então} \quad TX \in m_E \quad \text{e}$$

$$\mu(TX) \leq K\mu(X), \quad \text{onde} \quad K \in [0,1)$$

Enunciaremos agora a versão modificada do Teorema do Ponto Fixo de Darbo, que utilizaremos.

Teorema 1.5. Seja C um subconjunto não vazio, limitado, convexo e fechado de um espaço de Banach E .

Seja $T: C \rightarrow C$, uma μ -contração.

Então, T tem no mínimo um ponto fixo em C e o conjunto $\text{Fix } T = \{x \in C: Tx = x\}$ pertence a $\ker \mu$.

CAPÍTULO II

Equações de Diferença com Retardamento Dependendo do Tempo:
Caso Matricial.

Com a notação do capítulo anterior, consideremos o sistema:

$$(2.1) \quad \begin{cases} z(t) = \sum_{k=1}^N A_k z(t-r_k) ; & t \geq 0 \\ z(t) = \phi(t) & ; \quad -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $z(t) \in \mathbb{R}^n$, A_k matrizes reais $n \times n$, $k = 1, 2, \dots, N$, $0 < r_k \leq r$, que vamos supor estável globalmente nos retardamentos, isto é,

$$\gamma_0(A) = \sup_{\theta_k \in [0, 2\pi]} \gamma \left(\sum_{k=1}^N A_k e^{i\theta_k} \right) < 1.$$

Associado ao sistema (2.1) temos o operador de diferença

$$D(r, A)\phi = \phi(0) - \sum_{k=1}^N A_k \phi(-r_k)$$

$$\text{Tomando a norma } \|D(r, A)\| = \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^N A_k x_k \right\|, \text{ sa-}$$

bemos que se $\|D(r, A)\| < 1$, o sistema (2.1) é estável globalmente nos retardamentos.

Sabemos também que, no caso escalar, o sistema (2.1) é estável globalmente nos retardamentos se, e somente, se

$$\sum_{k=1}^N \|A_k\| < 1, \text{ isto é, } \|D(r, A)\| < 1. \text{ Entretanto, no caso}$$

matricial, podemos ter (2.1) estável globalmente nos retardamentos, sem que $\|D(r,A)\|$ seja menor que 1. Esse fato pode ser comprovado pelo seguinte exemplo devido a Paul Massat e que aparece em Ferreira [06].

Exemplo 2.1. Considere a equação de diferença.

$$(2.2) \quad x(t) = A x(t-r) + B x(t-s)$$

que com $A = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 \\ -2/3 & 0 \end{bmatrix}$, é

uniformemente estável globalmente nos retardamentos conforme mostramos no exemplo 1.8.

Por outro lado, observamos que com a norma usual do

$$\mathbb{R}^2, \text{ temos } \left\| A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 4/3 > 1$$

ou seja $\|D(r,A)\| > 1$. Na verdade podemos verificar nesse exemplo que, qualquer outra norma equivalente em $\mathbb{R}^2$ que se tome, temos $\|D(r,A)\| > 1$, o que implica dizer que a condição $\|D(r,A)\| < 1$ não é condição necessária para estabilidade.

Quando permitimos os retardamentos r e s variar com o tempo, entretanto, a situação não é tão simples. Siqueira [12] mostrou que a equação

$$(2.3) \quad x(t) = A x(t-r(t)) + B x(t-s(t))$$

com $r(t)$ e $s(t)$ periódicas (ver exemplo 1.9, do capítulo I)

possui uma solução que não tende a zero quando t tende a infinito.

Ferreira [06] demonstrou o teorema seguinte cuja prova incluiremos em nosso trabalho para maior clareza.

Teorema 2.1: Se $A_j A_k^T = A_k^T A_j$ para $j, k = 1, 2, \dots, N$, então o sistema (2.1) é uniformemente assintoticamente estável globalmente nos retardamentos, se, e somente se, para a norma

$$\|D(r, A)\| = \sup_{0 \leq \theta_k \leq 2\pi} \left\| \sum_{k=1}^N A_k e^{i\theta_k} \right\|$$

tivermos $\|D(r, A)\| < 1$.

Demonstração:

Seja $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) \in [0, 2\pi]^N$, e seja

$$B(\theta) = \sum_{k=1}^N A_k e^{i\theta_k}. \text{ A condição de comutatividade das matri-}$$

zes A_k implica que, para cada $\theta \in [0, 2\pi]^N$ a matriz $B(\theta)$ é normal então, pelo Lema 1.1 do capítulo I, $\|B(\theta)\| = \gamma(B(\theta))$, onde $\|\cdot\|$ é a norma espectral e $\gamma(\cdot)$ é o raio espectral. Portanto, pelo Teorema 1.3 do capítulo I, concluímos a demonstração.

Vamos agora, utilizando a condição de comutatividade das matrizes A_k demonstrar o resultado principal do nosso trabalho.

Consideremos o sistema

$$(2.4) \quad \begin{cases} y(t) = \sum_{k=1}^N A_k y(t-r_k(t)) ; & t \geq 0 \\ y(t) = \psi(t) ; & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

onde $r_k: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ são funções contínuas $r_k(0) = r_k$; $r_k(t) \leq t+r_k$, $\forall t \in [0, \infty)$, $k=1, 2, \dots, N$, r_k e A_k como definidos no sistema (2.1), com $A_k A_j^T = A_j^T A_k$ para todo $j, k=1, 2, \dots, N$.

Vamos definir

$$r(t) = \begin{cases} \max \{r_k(t)\} & ; \quad t \geq 0 \\ r = \max_{1 \leq k \leq N} \{r_k\} & ; \quad -r \leq t < 0 \end{cases}$$

Teorema 2.2. Suponhamos $A_k, r_k(t)$; $k=1, 2, \dots, N$ e $r(t)$ como acima e suponhamos ainda que $\lim_{t \rightarrow \infty} (t-r(t)) = +\infty$. En-

tão, para todo $\psi \in C_D = \{\psi \in C: \psi(0) = \sum_{k=1}^N A_k \psi(-r_k)\}$, o sistema (2.4) tem uma única solução y com $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova:

Existência e Unicidade:

Seja $M = \{y \in C_H([-r, \infty), \mathbb{R}^n): y(t) = \psi(t), -r \leq t \leq 0\}$ on-

de $C_H([-r, \infty), \mathbb{R}^n) = \{y \in C([-r, \infty), \mathbb{R}^n) : \|y\| \leq H\}$, e seja F uma transformação definida em M , dada por:

$$\begin{cases} (Fy)(t) = \sum_{k=1}^N A_k y(t-r_k(t)) ; & t \geq 0 \\ (Fy)(t) = y(t) ; & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

F é uma contração, pois

$$\begin{aligned} |(Fy_1)(t) - (Fy_2)(t)| &= \left| \sum_{k=1}^N A_k y_1(t-r_k(t)) - \sum_{k=1}^N A_k y_2(t-r_k(t)) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^N A_k [y_1 - y_2](t-r_k(t)) \right| \leq \|D(r, A)\| \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, (2.4) tem solução única.

Estabilidade:

Façamos a seguinte mudança de variável:

$$y(t) = x(t) \exp(t-r(t)), \text{ onde } \exp(\theta) = e^\theta.$$

Assim,

$$y(t-r_k(t)) = x(t-r_k(t)) \exp[t-r_k(t) - r(t-r_k(t))],$$

e o sistema (2.4) é equivalente a

$$(2.5) \quad \begin{cases} x(t) = \sum_{k=1}^N A_k \exp[r(t)-r_k(t)-r(t-r_k(t))] x(t-r_k(t)); & t \geq 0 \\ x(t) = e^{r(0)-t} \psi(t); & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Seja $C_p = C([-r, \infty), p(t))$ com $p(t) = \exp(t-r(t))$.

Seja $\tilde{M} = \{x \in C_p : x(t) = e^{r(0)-t} \psi(t); -r \leq t \leq 0\}$
e seja F a transformação contínua em $\tilde{M}$, definida por:

$$\begin{cases} (Fx)(t) = \sum_{k=1}^N A_k \exp[r(t)-r_k(t)-r(t-r_k(t))] x(t-r_k(t)); & t \geq 0 \\ (Fx)(t) = x(t); & -r \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Para todo $x \in \tilde{M}$ e $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| \exp(t-r(t)) &= \\ &= \left| \sum_{k=1}^N A_k \exp[t-r_k(t)-r(t-r_k(t))] x(t-r_k(t)) \right| \leq \\ &\leq \|D(r, A)\| \|x\| \end{aligned}$$

Como $\|D(r, A)\| < 1$ e $(Fx)(t) = x(t); -r \leq t \leq 0$
tem-se

$$\|Fx\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in \tilde{M}.$$

Logo, F aplica $\tilde{M}$ em si mesmo e leva a bola $K = K(0, \delta)$ nela mesmo, $\forall \delta \in (0, \infty)$.

Agora, $\forall x, y \in K$ $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (Fy)(t)| \exp(t-r(t)) &= \\ &= \left| \sum_{k=1}^N A_k \exp[r(t)-r_k(t)-r(t-r_k(t))] (x-y)(t-r_k(t)) \exp(t-r(t)) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^N A_k \exp(\Psi(t)) x(t-r_k(t)) - \sum_{k=1}^N A_k \exp(\Psi(s)) x(s-r_k(s)) \right| = \\
&= \left| \sum_{k=1}^N A_k \left[\exp(\Psi(t)) x(t-r_k(t)) - \exp(\Psi(s)) x(s-r_k(s)) \right] \right| \leq \\
&\leq \|D(r,A)\| \sup\{|\exp(t-r(t))x(t) - \exp(s-r(s))x(s)| : t,s \in (0,\Gamma), |t-s| \leq \tau\} \\
&\text{com } \tau = \sup\{|(t-r_k(t)) - (s-r_k(s))|, t,s \in (0,\Gamma), |t-s| \leq \varepsilon\}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_0^\Gamma(FX) \leq \|D(r,A)\| \omega_0^\Gamma(X), \quad \forall X \in K: \text{fixo}.$$

Portanto,

$$(2.8) \quad \omega_0(FX) \leq \|D(r,A)\| \omega_0(X), \quad \forall X \in K: \text{fixo}.$$

Combinando (2.7) e (2.8), temos:

$$\mu_0(FX) \leq \|D(r,A)\| \mu_0(X), \quad \forall X \in K: \text{fixo}.$$

Assim, temos que F é μ_0 -contração, e pelo Teorema 1.5 do capítulo I, o sistema (2.5) tem um ponto fixo $x \in C_p$, com:

$$(2.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)p(t) = 0, \quad \text{e como}$$

$$x(t) = \exp[-(t-r(t))] y(t), \quad \text{tem-se}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp[-(t-r(t))] y(t) \exp(t-r(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Portanto, usando (2.9), tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, onde y é a solução do sistema (2.4).

Bibliografia

- [01] AVELLAR, C.E. & HALE, J.K. On the zeros of exponential polynomials. J. Math. Anal. Appl. 73(1980), 434-452.
- [02] AVELLAR, C.E. Effects of the Delay in Differential Difference Equations, Thesis, Brown University, June, 1979.
- [03] BANÁS, J.; HAJNOSZ, A. & WEDRYCHOWICZ, C. On Existence and asymptotic behavior of solutions of some functional equations. Funkcial. Ekvac 25(1982), 257-267.
- [04] BANÁS, J.; & GOEBEL, K. Measures of Noncompactness in Banach Spaces. Marcel Dekker, Inc., 1980.
- [05] CRUZ, M.A. & HALE, J.K. Stability of functional differential equations of neutral type. J. Differential Equ. 7(1970), 334-355.
- [06] FERREIRA, J.M. Effects of commensurable delays in the stability of difference equations. Royal Society of Edinburgh 100 A, 191-199, (1985).
- [07] HALE, J.K. A class of neutral equations with the fixed-point property. Proc. Nac. Acad. Sci., USA. 67(1970), 136-137.

- [08] HALE, J.K. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, (1977).
- [09] HALE, J.K. & MEYER, K.R. A class of functional equations of neutral type. Men. Amer. Math. Soc., 76(1967).
- [10] HENRY, D. Linear autonomous neutral functional differential equations. J. Differential Eqs. 15(1974), 106-128.
- [11] MELVIN, W.R. Stability properties of functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. 48(1974), 749-763.
- [12] SIQUEIRA, S.A. Equação de Diferença com Retardamento Dependendo do Tempo. Dissertação, ICMSC-USP, 1984.
- [13] SILKOWSKI, R.A. Star-Shaped regions of Stability in hereditary systems. Ph. D. Thesis, Brow University, Providence, R.I., June 1976.
- [14] VARGA, R.S. Matrix Iterative Analysis Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1962.