Data de Depósito... 05/08/99

Assinatura:.....

O Índice de Conley Discreto e o Par de Matrizes de Conexão¹

Pedro Carlos Elias Ribeiro Junior

Orientadora: Maria do Carmo Carbinatto

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação,
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de
"Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Agosto de 1999

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq e da FAPESP.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à todas as pessoas que me apoiaram durante todo este período da minha vida acadêmica, principalmente à minha família que sempre foi muito compreensiva nas horas de maiores tensões e à minha querida orientadora Maria do Carmo Carbinatto que sempre esteve ao meu lado buscando realizar o melhor trabalho possível e causou em mim um amadurecimento acadêmico notável.

Agradeço também aos meus orientadores de graduação, Prof. Dr. Herminio Cassago Jr. e Profa. Dra. Sandra Maria Semenssato de Godoy, os quais me introduziram ao caminho da pesquisa acadêmica e fizeram com que eu descobrisse a beleza da Matemática.

Agradeço aos órgãos CNPq e FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual eu não poderia dedicar-me integralmente aos estudos.

Gostaria de agradecer a todos os professores do Departamento de Matemática que me proporcionaram grandes conhecimentos durante os cursos de Graduação e Mestrado e aos funcionários, pela infra estrutura encontrada.

Abstract

The goal of this work is to present the connection matrix pairs for discrete Conley index.

The first part of this manuscript consists of introducing the basic concepts and results of the Conley index theory for continuous maps defined on a locally compact metric space.

We devote the second part of the work to discuss partially ordered Morse decompositions of isolated invariant sets for continuous maps and introduce the concept of connection matrix pairs. We prove the existence of such pairs for attractor-repeller decompositions of an isolated invariant set and finish with some results that illustrate how connection matrix pairs may imply the existence of connecting orbits between Morse sets.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar pares de matrizes de conexão para o índice de Conley discreto.

Na primeira parte do texto introduzimos os conceitos e resultados básicos da Teoria do Índice de Conley para aplicações contínuas definidas em espaço métrico localmente compacto.

Dedicamos a segunda parte deste trabalho para discutir decomposições de Morse parcialmente ordenadas de conjuntos invariantes isolados para aplicações contínuas e introduzir o conceito de pares de matrizes de conexão. Provamos sua existência para decomposições atratoras-repulsoras de um conjunto invariante isolado e finalizamos com alguns resultados que ilustram como os pares de matrizes de conexão podem implicar a existência de órbitas de conexão entre conjuntos de Morse.

Sumário

Introdução	1
1 O Índice de Conley Cohomológico para Aplicações Contínuas	3
1.1 Conjunto Invariante Isolado e Par-Índice	3
1.2 Existência de Par-índice	8
1.3 A Redução de Leray	14
1.4 O Índice de Conley Cohomológico (Mrozek)	20
1.5 Propriedades do Índice	21
1.6 Ponto Fixo e Ponto Periódico Hiperbólico	24
2 Decomposição Atratora-repulsora	39
2.1 Par Atrator-repulsor	39
2.2 Trio-índice para uma Decomposição Atratora-repulsora	45
3 Decomposição de Morse e Par de Matrizes de Conexão	59
3.1 Decomposição de Morse e Filtração Índice	59
3.2 Pares de Matrizes de Conexão	64
4 De volta à Decomposição Atratora-repulsora	72
4.1 Pares de Matrizes de Conexão para o Par Atrator-Repulsor	72

4.2 Detectando Órbitas de Conexão	75
Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

1.1	O par-índice (N, L)	7
1.2	Representação do par-índice (N', L')	14
1.3	A Ferradura de Smale.	34
1.4	Um par-índice para a Ferradura de Smale.	35
1.5	A G -Ferradura.	36
1.6	Um par-índice para a G -Ferradura.	37
2.1	Um par atrator-repulsor.	56
2.2	Um par-índice para S	58

Introdução

A teoria do Índice de Conley para fluxos contínuos foi introduzida por Charles C. Conley e em [2], pode ser encontrado os fundamentos das idéias desenvolvidas por ele. O índice de Conley para sistemas dinâmicos contínuos associa, para cada conjunto invariante isolado, o tipo homotópico de um espaço pontuado. Muitas vezes, um conjunto invariante isolado pode ser decomposto em conjuntos menores, chamados conjuntos de Morse, e uma ordem parcial pode ser imposta sobre estes conjuntos. Em [5], Franzosa estendeu a teoria do Índice de Conley para decomposições de Morse parcialmente ordenadas de um conjunto invariante isolado e apresentou o conceito de matrizes de conexão. Uma das motivações para tal trabalho foi o desejo de obter informações a respeito a estrutura de conjuntos definidos por uma decomposição a partir do conhecimento de índices de conjuntos menores dessa decomposição. Muitas aplicações dos objetos definidos por Franzosa podem ser encontrados na literatura, porém não as mencionaremos aqui.

Paralelamente à teoria para sistemas dinâmicos contínuos, existem os sistemas dinâmicos discretos. Naturalmente, surge a questão da generalização da teoria de índice para este caso. A descrição da teoria do índice para o caso discreto representa a primeira parte deste trabalho. Por causa da ausência de certas propriedades que os sistemas dinâmicos contínuos possuem, o índice discreto apresenta uma definição mais complicada. De fato, o índice toma a forma de um módulo graduado e um isomorfismo distinguido. Apresentação dos elementos preliminares da teoria que faremos é baseada em Mrozek [6].

Tendo sido colocado os aspectos básicos da teoria, iniciamos o ponto central deste trabalho que é a construção do conceito de par de matrizes de conexão apresentado por Richeson em [10]. Sua definição representa a versão discreta das matrizes de conexão definidas por Franzosa. A definição apresentada toma a forma de par de matrizes: uma tendo a forma de um operador cobordo e outra um automorfismo

de cocadeia. Como o índice discreto é mais complicado que o contínuo podemos esperar que o conceito de matrizes de conexão seja um pouco mais elaborado.

Todo este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro é dedicado em apresentar o Índice de Conley Cohomológico Discreto definido por Mrozek [6]. Para tanto definimos objetos tais como os conjuntos invariantes isolados e associados a eles, os pares-índices. Uma preocupação natural é quanto a existência de um par-índice associado a um conjunto invariante isolado e apresentamos uma prova da existência de par-índice; finalmente, temos a construção do Índice de Conley Cohomológico. Destacamos também algumas propriedades que o índice apresenta. Terminamos o capítulo apresentando o cálculo do índice para alguns exemplos.

No capítulo 2, apresentamos o conceito de decomposição atratora-repulsora para um conjunto invariante isolado. Ela representa um caso particular da decomposição de Morse, conceito que é definido no Capítulo 3. Também, no Capítulo 3 definimos o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado. No último capítulo, provamos a existência de par de matrizes de conexão para uma decomposição atratora-repulsora e encerramos com resultados que mostram como matrizes de conexão podem implicar a existência de órbitas de conexão em sistemas dinâmicos discretos.

Capítulo 1

O Índice de Conley Cohomológico para Aplicações Contínuas

Neste capítulo apresentamos a Teoria do Índice de Conley para sistemas dinâmicos discretos. Na Seção 1.1 encontra-se a descrição das definições básicas que serão utilizadas em todo o trabalho. Um dos conceitos importantes no qual a teoria está baseada é o de par-índice. Uma demonstração da existência de par-índice é o tópico da Seção 1.2. A construção do Índice de Conley Cohomológico para aplicações contínuas é feito nas Seções 1.3 e 1.4. As propriedades básicas são listadas na Seção 1.5. Finalmente, na Seção 1.6, fazemos o cálculo do índice para alguns exemplos.

1.1 Conjunto Invariante Isolado e Par-Índice

Nesta seção apresentaremos as definições básicas da teoria do Índice de Conley. A notação é baseada em [1]. Em todo texto X representará um espaço métrico localmente compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Também, serão usadas as notações: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ para representar o conjunto dos números naturais, dos inteiros e dos inteiros positivos, respectivamente. As notações $\text{cl}(A)$ e $\text{Int}(A)$ são reservadas para o fecho e o interior de um conjunto A .

Os subconjuntos de interesse no estudo de sistemas dinâmicos são os conjuntos invariantes. Sua definição é dada a seguir.

Definição 1.1. Dizemos que $S \subset X$ é um conjunto invariante se $f(S) = S$.

Definição 1.2. *Seja $N \subset X$. Definimos três subconjuntos de N :*

1. $\text{Inv}^-(N, f) := \{x \in N \mid \exists \{x_n\}_{n=0}^\infty \subset N \text{ tal que } x_{n+1} = f(x_n) \text{ e } x_0 = x\},$
2. $\text{Inv}^+(N, f) := \{x \in N \mid \exists \{x_n\}_{n=0}^\infty \subset N \text{ tal que } x_{n+1} = f(x_n) \text{ e } x_0 = x\},$
3. $\text{Inv}(N, f) := \{x \in N \mid \exists \{x_n\}_{n=0}^\infty \subset N \text{ tal que } x_{n+1} = f(x_n) \text{ e } x_0 = x\}.$

Ilustramos as definições acima com um exemplo simples.

Exemplo 1.3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear dada por $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Considere $N = [-2, 2] \times [-2, 2]$. A aplicação f é um homeomorfismo e $f^{-1}(x, y) = (\frac{1}{2}x, 2y) = (2^{-1}x, (\frac{1}{2})^{-1}y)$. Mais ainda, se $n \in \mathbb{Z}$, então $f^n(x, y) = (2^n x, \frac{1}{2^n} y)$. Note que $\|f^n(x, y)\| = \sqrt{2^{2n}x^2 + 2^{-2n}y^2}$. Com isso, é fácil ver que se $x \neq 0$,

$$\|f^n(x, y)\| \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.1)$$

Se $y \neq 0$,

$$\|f^{-n}(x, y)\| \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Vamos calcular $\text{Inv}(N, f)$, $\text{Inv}^-(N, f)$ e $\text{Inv}^+(N, f)$.

Se $(z, 0) \in [-2, 2] \times \{0\}$, então a sequência $z_n = f^{-n}(z, 0)$ é tal que $\{z_n\}_{n=0}^\infty$ está inteiramente contida em N . Por (1.1), concluímos que $\text{Inv}^-(N, f) = [-2, 2] \times \{0\}$. Analogamente, $\text{Inv}^+(N, f) = \{0\} \times [-2, 2]$. Por (1.1) e (1.2), para todo $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$, temos que, ou $f^{-n}(z_1, z_2) \rightarrow \infty$, ou $f^n(z_1, z_2) \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $\text{Inv}(N, f) = \{(0, 0)\}$. ■

Os próximos três resultados apresentam propriedades dos conjuntos definidos acima.

Proposição 1.4. *O conjunto $\text{Inv}(N, f)$ é invariante.*

DEMONSTRAÇÃO. Tome $x \in \text{Inv}(N, f)$. Logo, existe sequência $\{x_n\}_{n=0}^\infty \subset N$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Considere a sequência $\{y_n\}_{n=0}^\infty \subset N$ dada por $y_n = x_{n+1}$. Portanto,

$$f(y_n) = f(x_{n+1}) = x_{n+2} = y_{n+1} \text{ e } y_0 = x_1 = f(x).$$

Logo, $f(x) \in \text{Inv}(N, f)$. Ou seja, $f(\text{Inv}(N, f)) \subset \text{Inv}(N, f)$.

Agora considere $y \in \text{Inv}(N, f)$. Logo, existe sequência $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N$ tal que $f(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = y$. Portanto, $y = f(y_{-1})$. Resta mostrar que $y_{-1} \in \text{Inv}(N, f)$. Para isto basta considerar a sequência $\{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N$ dada por $z_n = y_{n-1}$. Portanto, $f(z_n) = f(y_{n-1}) = y_n = z_{n+1}$ e $x_0 = y_{-1}$. Logo, $y_{-1} \in \text{Inv}(N, f)$. O que implica que $y \in f(\text{Inv}(N, f))$. E concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.5. *O conjunto $\text{Inv}(N, f)$ é maximal, isto é, se $Y \subset N$ é um conjunto invariante, então $Y \subset \text{Inv}(N, f)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in Y$. Como Y é um conjunto invariante temos que $f^n(x) \in Y$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^n(x) \in N$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$, defina $x_n := f^n(x)$. Assim,

$$f(x_n) = f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) = x_{n+1}.$$

Além disso, existe $\bar{x} \in Y \subset N$ tal que $f(\bar{x}) = x$. Defina $x_{-1} := \bar{x}$. Então, existe $x_{-1} \in N$ tal que $f(x_{-1}) = x$. Um simples argumento de indução nos permite construir $x_{-n} \in N$, com $n = -1, -2, \dots$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$. A sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N$ é tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Portanto, $x \in \text{Inv}(N, f)$. $\square$

Em vista das Proposições 1.4 e 1.5, dado $N \subset X$, o conjunto $\text{Inv}(N, f)$ é chamado de *conjunto invariante maximal*.

Observação 1.6. 1. Os conjuntos $\text{Inv}(N, f) = \text{Inv}^-(N, f) \cap \text{Inv}^+(N, f)$ também são invariantes.

2. Usaremos a notação mais simplificada $\text{Inv}(N)$ ao invés de $\text{Inv}(N, f)$ quando isto não causar confusão com relação a que aplicação f estamos considerando. $\blacksquare$

Proposição 1.7. *Se $N \subset X$ é compacto, então os conjuntos $\text{Inv}^-(N)$, $\text{Inv}^+(N)$ e $\text{Inv}(N)$ são subconjuntos fechados de N . Em particular, são compactos.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente mostraremos que $\text{Inv}(N)$ é um conjunto fechado. Considere $x \in \text{cl}(\text{Inv}(N))$. Logo, existe uma sequência $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \text{Inv}(N)$ tal que $y_n \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$. Fixe $m \in \mathbb{Z}^+$. Como f^m é uma aplicação contínua, temos

que $f^m(y_n) \rightarrow f^m(x)$, quando $n \rightarrow \infty$. Como $y_n \in \text{Inv}(N)$, então $f^m(y_n) \in N$. Portanto, $f^m(x) \in N$. Defina $x_m := f^m(x)$.

Mostraremos que existe x_m , com $m = -1, -2, \dots$ tal que $f(x_m) = x_{m+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n \in \text{Inv}(N)$. Logo, existe uma sequência $\{z_{-1}^n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N$ tal que $f(z_{-1}^n) = y_n$. A sequência $\{z_{-1}^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ está contida em N . Logo, existe uma subsequência $\{z_{-1}^{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ convergente. Seja $\bar{z}$ o limite desta subsequência. A continuidade da aplicação f e a unicidade de limites implicam que $f(\bar{z}) = x$. Defina $x_{-1} := \bar{z}$. Utilizando indução produzimos uma sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ com as propriedades desejadas.

Assim, $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ é uma sequência em N tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Portanto, $x \in \text{Inv}(N)$. Sendo $\text{Inv}(N)$ um subconjunto fechado de N , temos que $\text{Inv}(N)$ é um conjunto compacto.

Analogamente, provamos as mesmas propriedades para $\text{Inv}^-(N)$ e $\text{Inv}^+(N)$. $\square$

A seguir apresentaremos o primeiro ingrediente importante na teoria do Índice de Conley.

Definição 1.8. Dizemos que $S \subset X$ é um conjunto invariante isolado se existe $N \subset X$ compacto tal que $S = \text{Inv}(N) \subset \text{Int}(N)$. O conjunto N é chamado vizinhança isolante de S .

Usando a Proposição 1.7 concluímos que todo conjunto invariante isolado é um conjunto compacto.

A cada conjunto invariante isolado é associado um par de conjuntos compactos. Esse par é o segundo elemento fundamental da teoria do Índice de Conley e sua definição é dada a seguir.

Definição 1.9. Seja S um conjunto invariante isolado. Um par de subconjuntos compactos (N, L) é um par-índice para S com relação a f se satisfaz às seguintes condições:

1. $S = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L)) \subset \text{Int}(N \setminus L)$,
2. $f(L) \cap N \subset L$,

3. $f(N \setminus L) \subset N$.

Observação 1.10. 1. A condição 2 de par-índice é equivalente a dizer que L é *positivamente invariante* com relação a N .

2. Se (N, L) é um par-índice para o conjunto invariante isolado S tal que

$$\text{cl}(N \setminus L) \cap \text{cl}(f(L) \setminus N) = \emptyset,$$

então é *chamado de par-índice regular*. ■

Exemplo 1.11. Tome f e N como no Exemplo 1.3. Assim, temos que $S = \text{Inv}(N) = \{(0, 0)\} \subset \text{Int}(N)$. Logo, N é vizinhança isolante para $\{(0, 0)\}$. Considere o conjunto $L = ([-2, -1] \times [-2, 2]) \cup ([1, 2] \times [-2, 2])$. A representação geométrica do par (N, L) é dada na Figura 1.1.

Figura 1.1: O par-índice (N, L) .

Vamos mostrar que (N, L) é um par-índice para S . Note que $\text{cl}(N \setminus L) = [-1, 1] \times [-2, 2]$. Desta maneira, temos $\{(0, 0)\} = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L)) \subset \text{Int}(N)$.

Para mostrar que L é positivamente invariante com relação a N devemos calcular $f(L) \cap N$. Temos que, $f(L) \cap N = (\{-2\} \times [-1, 1]) \cup (\{2\} \times [-1, 1]) \subset N$.

Finalmente, $N \setminus L = (-1, 1) \times [-2, 2]$. Logo, $f(N \setminus L) = (-2, 2) \times [-1, 1]$. E este está contido em N . Portanto, o par (N, L) é um par-índice para $\{(0, 0)\}$.

Mais ainda, verifica-se que $\text{cl}(N \setminus L) \cap \text{cl}(f(L) \setminus N) = \emptyset$. Portanto, o par (N, L) é um par-índice regular para $\{(0, 0)\}$. ■

A proposição abaixo apresenta uma caracterização alternativa para a propriedade 3 da definição de par-índice.

Proposição 1.12. *Seja (N, L) um par de subconjuntos de X . Então $f(N \setminus L) \subset N$, se, e somente se, para todo $x \in N$ tal que $f(x) \notin N$, implica $x \in L$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in N$ tal que $f(x) \notin N$ e suponha que $x \notin L$. Logo, $x \in N \setminus L$. Portanto, $f(x) \in N$, o que é uma contradição.

Para finalizar a demonstração, seja $x \in N$ tal que $x \notin L$. Queremos mostrar que $f(x) \in N$. Suponha que $f(x) \notin N$. Logo, x deve ser um elemento de L , o que é uma contradição. □

Observação 1.13. Em vista da proposição acima, o conjunto L é comumente chamado *conjunto de saída*. ■

1.2 Existência de Par-índice

Dado um conjunto invariante isolado S a pergunta que se faz é como construir um par-índice para S . O objetivo desta seção é apresentar o teorema da existência de par-índice provado por Franks e Richeson [4]. Iniciamos esta seção definindo o conjunto saída imediato.

Definição 1.14. *Seja N vizinhança isolante para o conjunto invariante isolado S . O conjunto $N^- := N \setminus f^{-1}(\text{Int}(N))$ é chamado de conjunto saída imediato.*

Observação 1.15. Note que $N^- = \{x \in N \mid f(x) \notin \text{Int}(N)\}$.

Definição 1.16. *Sejam S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança isolante. Se*

$$N \cap f(N) \cap f^{-1}(N) \subset \text{Int}(N),$$

então N é chamado bloco isolante.

Nem toda vizinhança isolante é um bloco isolante. De fato

Exemplo 1.17. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y, 2x)$. Seja $N = [-2, 2] \times [-1, 1]$. Note que $\text{Inv}(N) = \{(0, 0)\}$. Logo, N é uma vizinhança isolante para $\{(0, 0)\}$. Temos que $f^{-1}(z, w) = (w/2, z)$ é a inversa da aplicação f . Note que o ponto $(0, 1)$ está na fronteira de N e pertence a intersecção $N \cap f(N) \cap f^{-1}(N)$. Portanto, $N \cap f(N) \cap f^{-1}(N) \not\subset \text{Int}(N)$. Ou seja, N não é bloco isolante. ■

A existência de bloco isolante implica na existência de par-índice regular.

Proposição 1.18. *Sejam S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança isolante. Se N for um bloco isolante, então (N, N^-) é par-índice regular para S .*

DEMONSTRAÇÃO. Devemos mostrar que as condições 1, 2, e 3 da Definição 1.9 e a condição apresentada na Observação 1.10 estão satisfeitas.

Mostremos que $S = \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus N^-))$. Como $N \setminus N^- \subset N$, temos que $\text{cl}(N \setminus N^-) \subset N$. Logo,

$$\text{Inv}(\text{cl}(N \setminus N^-)) \subset \text{Inv}(N) = S.$$

Seja $x \in S$. Como N é vizinhança isolante para S , temos que $f(x) \in \text{Int}(N)$. Logo, $x \notin N^-$. Portanto, $S \subset N \setminus N^-$. O que implica

$$S \subset \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus N^-)).$$

Seja $x \in S$. Logo, existe $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subset N$. Como $f(x) \in \text{Int}(N)$, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon_0) \subset N$. A continuidade de f implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon_0)$. Defina

$$r := \min\{\delta, r_1\}.$$

Temos que

$$B(x, r) \subset N.$$

Além disso, se

$$y \in B(x, r),$$

então

$$f(y) \in f(B(x, r)) \subset B(f(x), \varepsilon_0).$$

Portanto, para todo $y \in B(x, r)$, temos que $f(y) \in \text{Int}(N)$. Logo, $y \notin N^-$. Assim,

$$B(x, r) \subset N \setminus N^-.$$

Com isso, a condição 1 da Definição 1.9 está verificada.

Passemos à prova da condição 2 para o par (N, N^-) . Seja $y \in f(N^-) \cap N$, e suponha que $y \notin N^-$. Logo, $y = f(x)$ com $x \in N^-$ e $f(y) \in \text{Int}(N)$. Como N é bloco isolante, temos que $y \in \text{Int}(N)$. Portanto, $x \in f^{-1}(\text{Int}(N))$, o que é uma contradição. Ou seja, $f(N^-) \cap N \subset N^-$. A condição 3 da Definição 1.9 também é facilmente demonstrada e deixamos os detalhes para o leitor.

Para encerrar a demonstração, mostremos que

$$\text{cl}(N \setminus N^-) \cap \text{cl}(f(N^-) \setminus N) = \emptyset. \quad (1.3)$$

Suponha que existe $y \in \text{cl}(N \setminus N^-) \cap \text{cl}(f(N^-) \setminus N)$. Vamos mostrar que isto implica que $y \in N \cap f^{-1}(N) \cap f(N)$. De fato, como $y \in \text{cl}(N \setminus N^-)$, existe uma sequência $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset N \setminus N^-$ tal que $y_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Como N é compacto, temos que $y \in N$.

Como $y_n \in N \setminus N^-$, temos que $f(y_n) \in \text{Int}(N)$. A continuidade de f e a compacidade de N implicam que $f(y) \in N$. Por (1.3), temos que $y \in \text{cl}(f(N^-) \setminus N)$. Portanto, existe uma sequência $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset f(N^-) \setminus N$ tal que $z_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $w_n \in N^-$ tal que $z_n = f(w_n)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\{w_n\}$ é uma sequência convergente em N . Seja w seu limite. A continuidade da aplicação f implica que $f(w) = y$. Portanto, $y \in f(N)$.

Como N é bloco isolante, segue que $y \in \text{Int}(N)$. Por outro lado, como a sequência $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida acima converge para y , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in \text{Int}(N)$, para todo $n \geq n_0$. Porém, $z_n \in f(N^-) \setminus N$. Este fato gera uma contradição. Assim, a intersecção dos conjuntos em (1.3) deve ser vazia. $\square$

Em vista da proposição acima, torna-se importante saber como determinar ou até mesmo como construir blocos isolantes. A sequência de definições e resultados a seguir implicará na existência de blocos isolantes.

Definição 1.19. *Sejam S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança iso-*

lante. Para cada $\varepsilon > 0$, o conjunto

$$C_\varepsilon(N, S) := \{x \in N \mid \exists \{x_k\}_{-k}^k \subset N, \text{ com } x_{-k}, x_k \in S, x_0 = x \\ \text{ e } \text{dist}(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon \text{ para todo } n = -k, \dots, k-1\}$$

é chamado vizinhança ε -cadeia de S em relação a N .

Definição 1.20. *Sejam S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança isolante. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos*

$$\text{Inv}^m(N) := \{x \in N \mid \exists \{x_n\}_{n=-m}^{-m} \subset N \text{ com } f(x_n) = x_{n+1} \\ \text{ para } n = -m, -m+1, \dots, m-1 \text{ e } x_0 = x\}.$$

O lema enunciado a seguir nos ajudará na demonstração de existência de ε -cadeias.

Lema 1.21. *Sejam S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança isolante. Para toda V vizinhança de S em N , existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Inv}^{m_0} \subset V$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que para todo $m \in \mathbb{N}$ tenhamos $\text{Inv}^m(N) \not\subset V$. Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_m \in \text{Inv}^m(N)$ tal que $x_m \notin V$. Como V é vizinhança de S em N , temos que $x_m \in N$. Tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $x_m \rightarrow x$, quando $n \rightarrow \infty$, com $x \in N$.

Note que para todo $k \leq m$, temos que $f^k(x_m) \in N$. Devido a continuidade da aplicação f e a compacidade de N , podemos concluir que $f^k(x) \in N$, para todo $k \leq m$. Defina $x_k := f^k(x)$.

Como $x_m \in \text{Inv}^m(N)$, temos que existe uma sequência $\{z_j^m\}_{j=-m}^m \subset N$ tal que $f(z_j^m) = z_{j+1}^m$, para $j = -m, -m+1, \dots, m-1$ e $z_0^m = x_m$. Considerando a sequência $\{z_{-1}^m\}_{m=0}^\infty \subset N$, tomando uma subsequência, se necessário, podemos supor que $z_{-1}^m \rightarrow x_{-1}$, com $x_{-1} \in N$. A continuidade da aplicação f e unicidade de limites nos garante que $f(x_{-1}) = x$. Procedendo de maneira análoga, encontramos uma sequência $\{w_n\}_{n=-\infty}^\infty \subset N$ tal que $f(w_n) = w_{n+1}$ e $w_0 = x$. Portanto, $x \in S \subset V$, o que é uma contradição. $\square$

A proposição a seguir é o resultado que nos garante a existência de ε -cadeias.

Proposição 1.22. *Seja S um conjunto invariante isolado e N sua vizinhança isolante. Para qualquer vizinhança V de S em N , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $C_{\varepsilon_0}(N, S) \subset V$.*

DEMONSTRAÇÃO. Tome $V \subset N$ uma vizinhança tal que $S \subset V$. Pelo lema anterior, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Inv}^{m_0}(N) \subset V$.

Suponha que para todo $\varepsilon > 0$, existe $x(\varepsilon) \in C_\varepsilon(N, S)$ tal que $x \notin V$. Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe uma sequência

$$\{x_n(\varepsilon)\}_{n=-m(\varepsilon)}^{m(\varepsilon)} \subset N, \text{ com } x_0(\varepsilon) = x(\varepsilon), \quad x_{-m(\varepsilon)}, \quad x_{m(\varepsilon)} \in S$$

$$\text{e } \text{dist}(f(x_n(\varepsilon)), x_{n+1}(\varepsilon)) < \varepsilon, \text{ para } n = -m(\varepsilon), -m(\varepsilon) + 1, \dots, m(\varepsilon) - 1.$$

Note que se $m(\varepsilon) \neq m_0$, truncamos ou estendemos a sequência de maneira adequada de modo que a sequência $\{x_n(\varepsilon)\}_{n=-m_0}^{m_0} \subset N$ satisfaça às condições: $x_0(\varepsilon) = x(\varepsilon)$, $x_{-m_0}(\varepsilon), x_{m_0}(\varepsilon) \in S$ e $\text{dist}(f(x_n(\varepsilon)), x_{n+1}(\varepsilon)) < \varepsilon$, com $n = -m_0, -m_0 + 1, \dots, m_0 - 1$.

Escolha uma sequência $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i \rightarrow 0$, quando $i \rightarrow \infty$. Como para cada $n = -m_0, \dots, m_0$ e para cada $i \in \mathbb{N}$ temos que $x_n(\varepsilon_i) \in N$, a compacidade de N nos garante que podemos assumir que a sequência $\{x_n(\varepsilon_i)\}_{i=1}^\infty$ converge para um elemento de N . Seja x_n o limite desta sequência. Facilmente conclui-se que $f(x_n) = x_{n+1}$, para todo $n = -m_0, \dots, m_0$. Portanto, $x \in \text{Inv}^{m_0}(N) \subset V$. O que é uma contradição. $\square$

Finalmente temos a existência de par-índice regular para um conjunto invariante isolado.

Proposição 1.23. *Toda vizinhança isolante de um conjunto invariante isolado contém um bloco isolante. Em particular, se N é uma vizinhança isolante para S , então, para qualquer $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\text{cl}(C_\varepsilon(N, S))$ é um bloco isolante.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja V vizinhança de S em N . Tome $\varepsilon_0 > 0$ como na Proposição 1.22. Logo, $C_{\varepsilon_0}(N, S) \subset V$. Defina $B := \text{cl}(C_{\varepsilon_0}(N, S))$. Suponha que B não seja bloco isolante, ou seja, existe $y \in B \cap f(B) \cap f^{-1}(B)$ tal que $y \notin B$. Como $y \in f(B)$, existe $x \in B$ tal que $y = f(x)$. Portanto, $y \in f^{-1}(B)$ e $f^2(x) \in B$.

Como f é uma aplicação contínua em X , existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x, y) < \delta$, então $\text{dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon_0$. Como $x \in B$, existe $\bar{x} \in C_{\varepsilon_0}(N, S)$ tal que $\text{dist}(x, \bar{x}) < \delta$.

Além disso, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=-k}^k \subset N$ tal que $x_0 = \bar{x}$, $x_{-k}, x_k \in S$ e $\text{dist}(f(x_n), f(x_{n+1})) < \varepsilon_0$, para $n = -k, -k+1, \dots, k-1$.

Também temos que $f^2(x) \in B$. Como anteriormente, existe $\bar{y} \in C_{\varepsilon_0}(N, S)$ tal que $\text{dist}(f^2(x), \bar{y}) < \varepsilon_0$ e existe uma sequência $\{y_n\}_{n=-m}^m \subset N$ tal que $y_0 = \bar{y}$, $y_{-m}, y_m \in S$ e $\text{dist}(f(y_n), f(y_{n+1})) < \varepsilon_0$, para $n = -m, -m+1, \dots, m-1$. Considere a sequência

$$x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0, f(x), y_0, \dots, y_m.$$

Defina $r := \max\{k, m\}$. É fácil ver que podemos estender a sequência acima a fim de obter uma sequência $\{z_n\}_{n=-r-1}^{r+1} \subset N$, onde

$$z_{-1} = x_0, z_{-2} = x_{-1}, \dots, z_{-r-1} = x_{-r}, z_0 = f(x), z_1 = y_0, \dots, z_{r+1} = y_r.$$

Note que $\text{dist}(f(z_n), z_{n+1}) < \varepsilon_0$, para $n = -r-1, \dots, r$. Ainda, $z_{-r-1}, z_r \in S$ e $z_0 = f(x)$. Logo, $y = f(x) \in C_{\varepsilon_0}(N, S)$. O que é uma contradição. $\square$

Dado um conjunto invariante isolado S estamos interessados em definir um invariante para S baseado em um par-índice associado a S . Para o caso de fluxos contínuos o tipo homotópico do par-índice consiste em um invariante (Conley [2]). Para o caso de sistemas dinâmicos discretos, o tipo homotópico do par-índice (e portanto, a teoria de homologia ou cohomologia) não representa um invariante. O exemplo abaixo ilustra este fato.

Exemplo 1.24. Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$. Mostramos no Exemplo 1.11 que (N, L) é par-índice para $S = \{(0, 0)\}$. Na Figura 1.1 temos uma representação geométrica do par (N, L) . Agora considere o par $N' = ([-2, 2] \times [-2, 2]) \cup ([-1, 1] \times [3, 4])$ e $L' = L$. (Ver Figura 1.2). Então o par (N', L') também é par-índice para S .

Mas o tipo homotópico do espaço topológico pontuado $(N \setminus L, [L])$ é diferente do tipo homotópico de $(N' \setminus L', [L'])$. E, é claro que este fato também acarreta que os grupos de cohomologia relativa $H^*(N, L)$ e $H^*(N', L')$ são distintos. De fato,

$$H^q(N, L) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Porém no caso do par (N', L') temos que

$$H^q(N', L') = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Figura 1.2: Representação do par-índice (N', L') .

ou seja, $H^*(N \setminus L, [L])$ ou $H^*(N, L)$ não define um invariante para S . ■

A construção do Índice de Conley que apresentaremos na seção 1.4 é devido a Mrozek [6]. Na próxima seção descreveremos a Redução de Leray que foi a ferramenta utilizada por Mrozek para sua construção do invariante.

1.3 A Redução de Leray

Nesta seção descrevemos a Redução de Leray e destacamos algumas propriedades que são importantes na construção do Índice de Conley Cohomológico e na demonstração das propriedades desse invariante.

Iniciamos definindo a categoria dos *Endomorfismos*, que será denotada por $\mathcal{E}$. Um objeto desta categoria é um par (F, f) , onde F é um módulo sobre um anel e $f : F \rightarrow F$ é um endomorfismo.

Dados dois objetos (F, f) e (E, e) em $\mathcal{E}$, um *morfismo* entre (F, f) e (E, e) é uma aplicação $\varphi : F \rightarrow E$ tal que $\varphi \circ f = e \circ \varphi$.

Definição 1.25. *Sejam F um módulo sobre um anel e $f : F \rightarrow F$ um endomorfs-*

mo. O núcleo generalizado de f é dado por

$$\text{gker}(f) := \{x \in F \mid f^n(x) = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}.$$

É fácil ver que

Lema 1.26. *Sejam F um módulo, $f : F \rightarrow F$ um endomorfismo e $n \in \mathbb{N}$. Se $x \in \ker(f^n)$, então para toda $m \geq n$, temos que $x \in \ker(f^m)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in \ker(f^n)$. Logo, $f^n(x) = 0$. Como m é um inteiro positivo maior ou igual a n , existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Assim

$$f^m(x) = f^p(f^n(x)) = f^p(0) = 0.$$

Logo, $x \in \ker(f^m)$. □

Como $f(\text{gker}(f)) \subset \text{gker}(f)$, faz sentido definir a aplicação induzida f'

$$f' : (F/\text{gker}(f)) \rightarrow (F/\text{gker}(f)),$$

dada por $f'([x]) = [f(x)]$. Utilizaremos a notação $LM(F, f)$ para denotar o par $(f/\text{gker}(f), f')$. Note que $LM(F, f)$ é um objeto de $\mathcal{E}$.

Observação 1.27. Observe que f' é um monomorfismo. ■

Se φ é um morfismo entre (E, e) e (F, f) , verifica-se facilmente que $\varphi(\text{gker}(e)) \subset \text{gker}(f)$. Assim faz sentido definir a aplicação $\varphi' : (E/\text{gker}(e)) \rightarrow (F/\text{gker}(f))$ dada por $\varphi'([x]) = [\varphi(x)]$. A aplicação φ' faz o diagrama a seguir comutar.

$$\begin{array}{ccc} \text{gim}(e) & \xrightarrow{e'} & \text{gim}(e) \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \text{gim}(f) & \xrightarrow{f'} & \text{gim}(f). \end{array}$$

Denotaremos φ' por $LM(\varphi)$. Observe que $LM(\varphi)$ é um morfismo entre $LM(F, f)$ e $LM(E, e)$. Também, $LM(\varphi)$ é um monomorfismo.

Definição 1.28. *Sejam F um módulo sobre um anel e $f : F \rightarrow F$ um monomorfismo. O conjunto*

$$\text{gim}(f) := \{x \in F \mid \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset F \text{ tal que } f^n(x_n) = x \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

é chamado imagem generalizada de f .

Como $f(\text{gim}(f)) \subset \text{gim}(f)$, faz sentido considerar a aplicação

$$f'' : \text{gim}(f) \rightarrow \text{gim}(f),$$

dada por $f''(x) = f(x)$. Notemos que f'' é um monomorfismo e que também será um epimorfismo, sendo então um isomorfismo. Vamos denotar o par $(\text{gim}(f), f'')$ por $LI(F, f)$. Observe que, novamente, esta construção produz um objeto em $\mathcal{E}$.

Suponha que $\varphi : (E, e) \rightarrow (F, f)$ seja um morfismo entre (E, e) e (F, f) , com e e f monomorfismos. Podemos assim definir a aplicação $\varphi'' : \text{gim}(e) \rightarrow \text{gim}(f)$, dada por $\varphi''(x) = \varphi(x)$. Além disso, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{gim}(e) & \xrightarrow{e''} & \text{gim}(e) \\ \varphi'' \downarrow & & \downarrow \varphi'' \\ \text{gim}(f) & \xrightarrow{f''} & \text{gim}(f). \end{array}$$

Portanto, φ'' é um morfismo entre $LI(F, f)$ e $LI(E, e)$. Iremos denotá-lo por $LI(\varphi)$.

Dado (F, f) um objeto em $\mathcal{E}$, o par $\mathcal{L}(F, f) := LI(LM(F, f))$ é chamado a *Redução de Leray* de (F, f) . Se φ é um morfismo entre (F, f) e (E, e) , denotamos por $\mathcal{L}(\varphi)$ o morfismo $LI(LM(\varphi))$.

Esta é a ferramenta que usaremos para a construção do Índice de Conley Cohomológico Discreto. Encerraremos a seção demonstrando algumas propriedades da Redução de Leray.

Proposição 1.29. *Sejam E e F módulos sobre um anel e $e : E \rightarrow E$ e $f : F \rightarrow F$ isomorfismos. Então $\mathcal{L}(E, e) = (E, e)$. Se φ é um morfismo entre (E, e) e (F, f) , então $\mathcal{L}(\varphi) = \varphi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como e e f são isomorfismos, temos que

$$\text{gker}(e) = E, \text{gker}(f) = F, \text{gim}(e) = E \text{ e } \text{gim}(f) = F.$$

Logo,

$$\text{gim}(E/\text{gker}(e)) = E \text{ e } \text{gim}(F/\text{gker}(f)) = F.$$

Assim, ao aplicarmos a Redução de Leray, obtemos que $e''(x) = e(x)$ e $f''(x) = f(x)$. Logo, a aplicação φ'' é φ . Assim, $\mathcal{L}(\varphi) = \varphi$. $\square$

A seguir vamos demonstrar como a Redução de Leray se comporta com relação ao produto cartesiano.

Definição 1.30. *Sejam (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$. Definimos o produto cartesiano $E \times F$, como o natural e o endomorfismo $(e \times f) : E \times F \rightarrow E \times F$, dada por $(e \times f)(x, y) = (e(x), f(y))$.*

Observação 1.31. *Sejam $e : E \rightarrow E$ e $f : F \rightarrow F$ dois endomorfismos de módulos, então $(e \times f)^n = (e^n, f^n)$.* $\blacksquare$

A fim de facilitar a demonstração da Proposição 1.34 enunciamos alguns lemas auxiliares.

Lema 1.32. *Sejam (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$. Então*

1. $\text{gker}(e \times f) = \text{gker}(e) \times \text{gker}(f)$,
2. $E \times F / \text{gker}(e \times f) = E / \text{gker}(e) \times F / \text{gker}(f)$,
3. $(e \times f)' = e' \times f'$ e
4. $LM(E \times F, e \times f) = LM(E, e) \times LM(F, f)$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $z = (x, y)$, com $x \in E$ e $y \in F$, tal que $z \in \text{gker}(e \times f)$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(e \times f)^{n_0}(z) = 0$. Ou seja, $(e^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) = (0, 0)$. Temos que $x \in \text{gker}(e)$ e $y \in \text{gker}(f)$. Portanto, $z = (x, y) \in \text{gker}(e) \times \text{gker}(f)$.

Agora tome $(x, y) \in \text{gker}(e) \times \text{gker}(f)$. Logo, existem n_1 e n_2 , tais que $e^{n_1}(x) = 0$ e $f^{n_2}(y) = 0$. Usando o Lema 1.26, verifica-se facilmente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(e^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) = (e, f)^{n_0}(x, y) = (0, 0)$. Ou seja, $(x, y) \in \text{gker}(e \times f)$.

Para a verificação do item 2, considere $[z] = [(x, y)]$, com $x \in E$ e $y \in F$ tal que $[z] \in (E \times F)/\text{gker}(e \times f)$. Se $w \in [z]$, então $w = (x, y) + \bar{w}$, com $\bar{w} \in \text{gker}(e \times f)$. Pelo primeiro item, temos que $\bar{w} = (w_1, w_2)$, com $w_1 \in \text{gker}(e)$ e $w_2 \in \text{gker}(f)$. Assim

$$w = (x, y) + (w_1, w_2) \in [x] \times [y] \in E/\text{gker}(e) \times F/\text{gker}(f).$$

De modo análogo prova-se a outra inclusão. Para provar 3, notemos que os itens anteriores nos garantem que a aplicação $(e \times f)' : E/\text{gker}(e) \times F/\text{gker}(f) \rightarrow E/\text{gker}(e) \times F/\text{gker}(f)$, é dada por $(e \times f)'(x, y) = [e(x), f(y)]$. Ou seja,

$$(e \times f)' = e' \times f'.$$

A demonstração do último item do lema é uma questão da aplicação dos itens anteriores. $\square$

Lema 1.33. *Sejam (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$. Então*

1. $\text{gim}(e \times f) = \text{gim}(e) \times \text{gim}(f)$,
2. $(e \times f)'' = e'' \times f''$ e
3. $LI(E \times F, e \times f) = LI(E, e) \times LI(F, f)$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração deste lema utiliza argumentos similares aos do Lema 1.32. $\square$

Proposição 1.34. *Sejam E e F módulos sobre um anel, $e : E \rightarrow E$ e $f : F \rightarrow F$ endomorfismos. Então,*

$$\mathcal{L}((E, e) \times (F, f)) = \mathcal{L}(E, e) \times \mathcal{L}(F, f).$$

DEMONSTRAÇÃO. Aplicando o Lema 1.32 e em seguida o Lema 1.33, obtemos o resultado desejado. $\square$

Proposição 1.35. *Seja $\mathbb{O}$ um objeto em $\mathcal{E}$, onde $E = \{0\}$ e o endomorfismo é o nulo. Então $\mathcal{L}(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Este resultado tem demonstração trivial. $\square$

Definição 1.36. *Sejam (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$, φ um morfismo entre (E, e) e (F, f) e ψ um morfismo entre (F, f) e (E, e) . Diremos que os objetos (E, e) e (F, f) são ligados pelos morfismos φ e ψ se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e} & E \\ \varphi \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow \varphi \\ F & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

é comutativo.

Dados (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$ ligados pelos morfismos φ e ψ , temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, e) & \xrightarrow{\mathcal{L}(e)} & \mathcal{L}(E, e) \\ \mathcal{L}(\varphi) \downarrow & \nearrow \mathcal{L}(\psi) & \downarrow \mathcal{L}(\varphi) \\ \mathcal{L}(F, f) & \xrightarrow{\mathcal{L}(f)} & \mathcal{L}(F, f) \end{array}$$

também é comutativo.

Proposição 1.37. *Sejam (E, e) e (F, f) dois objetos em $\mathcal{E}$, ligados pelos morfismos φ e ψ . Então $\mathcal{L}(\varphi)$ e $\mathcal{L}(\psi)$ são isomorfismos. Em particular, $\mathcal{L}(E, e)$ e $\mathcal{L}(F, f)$ são isomorfos.*

A demonstração desta proposição poder ser encontrada em Mrozek [6]. Iremos finalizar com o resultado que diz que a Redução de Leray é exata. Mais precisamente.

Proposição 1.38. *Seja $(E_1, e_1) \rightarrow (E_2, e_2) \rightarrow (E_3, e_3)$ uma sequência exata. Então $\mathcal{L}(E_1, e_1) \rightarrow \mathcal{L}(E_2, e_2) \rightarrow \mathcal{L}(E_3, e_3)$ é uma sequência exata.*

1.4 O Índice de Conley Cohomológico (Mrozek)

Finalmente chegamos a descrição da construção do Índice de Conley Cohomológico apresentado por Mrozek. A exposição a seguir é baseada em [1].

Recordemos que S representa um conjunto invariante isolado e (N, L) um par-índice para S .

Lema 1.39. *Se (N, L) é um par-índice para um conjunto invariante isolado S , então*

1. $(N, L) \subset (N \cup f(L), L \cup f(L)).$

2. *A inclusão*

$$i : (N, L) \hookrightarrow (N \cup f(L), L \cup f(L))$$

induz um isomorfismo na cohomologia de Alexander-Spainer.

DEMONSTRAÇÃO. A inclusão em (1) é facilmente provada. A afirmativa em (2) decorre da propriedade da excisão forte da teoria de cohomologia. Ver [6], Teorema 5 do capítulo 6.5 para mais detalhes. $\square$

Agora considere a aplicação dada por

$$f_{NL}^\# = f^\# \circ (i_{NL}^\#)^{-1} : C^*(N, L) \rightarrow C^*(N, L),$$

onde

$$f^\# : C^*(N \cup f(L), L \cup f(L)) \rightarrow C^*(N, L)$$

é a induzida cohomológica da f no nível de cocadeia. Passando à cohomologia obtemos a aplicação

$$f_{NL}^* : H^*(N, L) \rightarrow H^*(N, L),$$

que é chamada *aplicação índice*.

Assim temos o seguinte par $(H^*(N, L), f_{NL}^*)$ é um objeto em $\mathcal{E}$ e estamos em condições de aplicar a Redução de Leray neste par.

O próximo resultado é um ponto importante da teoria, pois mostra que a Redução de Leray aplicada ao par $(H^*(N, L), f_{NL}^*)$ produz um objeto em $\mathcal{E}$ que independe da escolha do par-índice.

Teorema 1.40. *Sejam (N, L) e (N', L') pares-índices para um conjunto invariante isolado S . Então $\mathcal{L}(H^*(N, L), f_{NL}^*)$ e $\mathcal{L}(H^*(N', L'), f_{N'L'}^*)$ são objetos isomorfos em $\mathcal{E}$.*

Observação 1.41. Não apresentaremos a prova do teorema anterior. Ela faz uso do Proposição 1.37 e os detalhes podem ser encontrados em Mrozek [6].

Definição 1.42. *Sejam S um conjunto invariante isolado com relação a aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ e (N, L) um par-índice para S . O par*

$$\text{Con}^*(S) := \mathcal{L}(H^*(N, L), f_{NL}^*)$$

é o chamado índice de Conley cohomológico discreto para S .

Observação 1.43. Portanto o índice de Conley cohomológico para S consiste de um módulo graduado e um isomorfismo distinguido. Na literatura, este módulo é representado por $CH^*(S, f)$ e o isomorfismo por $\chi^*(S, f)$. Assim,

$$\text{Con}^*(S) = (CH^*(S, f), \chi^*(S, f)).$$

■

1.5 Propriedades do Índice

Três propriedades caracterizam o índice de Conley e as descrevemos a seguir. Ao invés de apresentar suas demonstrações iremos ilustrar uma aplicação das mesmas. Isso será feito no Exemplo 1.47. Em Mrozek [6] encontram-se os detalhes das provas dessas propriedades.

Proposição 1.44. (Propriedade de Wazewski) *Se $\text{Con}^*(S) \neq \mathbb{O}$, então $S \neq \emptyset$.*

DEMONSTRAÇÃO. Para a demonstração basta usar a Proposição 1.35. □

Para a prova da Propriedade de Aditividade que enunciamos a seguir faz-se uso da Proposição 1.34.

Proposição 1.45. (Propriedade de Aditividade) *Suponha que $S_1 \cup S_2$ seja um conjunto invariante isolado, onde S_1 e S_2 são conjuntos invariantes isolados disjuntos. Então $CH^*(S)$ é isomorfo a $CH^*(S_1) \times CH^*(S_2)$ e $\chi^*(S)$ é conjugada a $\chi^*(S_1) \times \chi^*(S_2)$.*

Em geral, escrevemos as conclusões da Propriedade de Aditividade de modo mais resumido. A saber, $\text{Con}^*(S) = \text{Con}^*(S_1) \times \text{Con}^*(S_2)$. Finalmente, a terceira propriedade do índice:

Proposição 1.46. (Propriedade da Homotopia) *Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $f : \Lambda \times X \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que para cada $\lambda \in \Lambda$*

$$\begin{aligned} f_\lambda : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto f(\lambda, x), \end{aligned}$$

seja uma aplicação contínua e N seja vizinhança isolante com relação a f_λ , para todo $\lambda \in \Lambda$. Então $\text{Con}^(\text{Inv}(N, f_\lambda))$ não depende de λ .*

Encerramos a seção com uma aplicação das Propriedades de Aditividade e Homotopia. Os detalhes deste exemplo são adaptações de um exemplo apresentado por Conley em [2].

Exemplo 1.47. Seja $f_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de aplicações contínuas dada por

$$f_s(x_1, y_1) = (x_1, y_1) + s(y_1, x_1^2 - 1),$$

onde com $s \in [0, \varepsilon]$, com $0 < \varepsilon < 1/2$. Note que se $s = 0$, f_0 é a aplicação identidade. Se $s \in (0, \varepsilon]$, f_s possui dois pontos fixos: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Queremos saber se para $s \in (0, \varepsilon]$ há alguma outra órbita invariante para f_s . Para isso, faremos a seguinte mudança de variável

$$x = s^2 x_1 \text{ e } y = s^3 y_1.$$

A nova expressão de f_s tem a forma

$$f_s(x, y) = (x, y) + (y, x^2 - s^4). \quad (1.4)$$

Além disso, é fácil ver que as novas coordenadas dos pontos fixos de f_s são

$$(-s^2, 0) \text{ e } (s^2, 0).$$

Observe que fazendo $s = 0$ na expressão em (1.4) não teremos a aplicação identidade. Utilizando f_s nas coordenadas x e y , nosso objetivo é mostrar que para todo $s \in [0, \varepsilon]$

$$\text{Inv}(N, f_s) \neq \{(-s^2, 0), (s^2, 0)\},$$

onde $N = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$. Primeiramente, mostremos que para $s \in [0, \varepsilon]$, N é uma vizinhança isolante para f_s . É fácil ver que para todo $x \in [-1/2, 1/2]$ e $y \in [-1/2, 1/2]$, temos que $f(x, 1/2) \notin N$ e $f(1/2, y) \notin N$. Um cálculo um tanto tedioso, porém simples, permite concluir que para cada (x, y) pertencente à fronteira de N , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x, y) \notin N$. Logo, se $s \in [0, \varepsilon]$, então N é vizinhança isolante para $\text{Inv}(N, f_s)$.

Para calcular $\text{Con}^*(\text{Inv}(N, f_s))$ construímos uma nova família de aplicações contínuas. Seja $g_s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g_s(x, y) = (x, y) + (y, x^2 + s^4),$$

onde $s \in [0, \varepsilon]$. Através de um raciocínio recursivo verifica-se que $g_s^n = (\varphi^n, \psi^n)$ é uma aplicação cuja a segunda coordenada apresenta como forma geral

$$\psi^n(u) = \sum_{j=1}^{n-1} (\varphi^j(u))^2 + \psi(u) + (n-1)s^4.$$

Desta maneira, fica fácil ver que para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ e para todo $s \in (0, \varepsilon]$, temos que $\|g_s^n(x, y)\| \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$. O mesmo é válido para $s = 0$. Portanto, o conjunto compacto N definido acima é vizinhança isolante para $\text{Inv}(N, g_s)$ e para todo $s \in [0, \varepsilon]$, $\text{Con}^*(\text{Inv}(N, g_s))$ é trivial. Como $f_0 = g_0$, temos que $\text{Con}(\text{Inv}(N, f_0))$ também é trivial. Definindo a aplicação contínua $F : \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(s, u) = f_s(u)$, estamos nas condições da Propriedade de Homotopia. Logo, para todo $s \in (0, \varepsilon]$, $\text{Con}(\text{Inv}(N, f_s))$ é trivial.

Para finalizar, suponha que $\text{Inv}(N, f_s) = \{(-s^2, 0), (s^2, 0)\}$. Pela Propriedade de Aditividade, temos que

$$\text{Con}(\text{Inv}(N, f_s)) = \text{Con}(\{(-s^2, 0)\}) \times \text{Con}(\{(s^2, 0)\}), \quad (1.5)$$

Porém é fácil ver que $(-s^2, 0)$ e $(s^2, 0)$ são pontos fixos hiperbólicos de f_s (Definição 1.50). Logo, pelo Teorema 1.59, o lado direito de igualdade em (1.5) não é trivial. Portanto, para cada $s \in (0, \varepsilon]$, existe no conjunto N uma órbita limitada de f_s distinta dos pontos fixos. ■

1.6 Ponto Fixo e Ponto Periódico Hiperbólico

Nesta seção faremos o cálculo do índice de Conley para ponto fixo hiperbólico e ponto periódico hiperbólico de um difeomorfismo de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^n$.

O exemplo que segue tem o intuito de preparar o leitor para a demonstração do Teorema 1.59, pois é um caso particular do teorema.

Exemplo 1.48. Seja f a aplicação linear definida no Exemplo 1.3. Iremos calcular o índice de Conley do conjunto invariante isolado $S = \{(0, 0)\}$. Para isto utilizaremos o par-índice (N, L) definido no Exemplo 1.11. Note que a matriz de f na base canônica de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos por E^u o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por $(1, 0)$ e E^s o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado por $(0, 1)$. Note que E^s e E^u são isomorfos a $\mathbb{R}$. Temos a decomposição $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$. Assim, $f|_{E^u}$ tem um autovalor com módulo maior do que 1. Já $f|_{E^s}$ tem um autovalor com módulo menor do que 1. Por esta razão dizemos que E^u é uma direção onde f é uma expansão e E^s é uma direção onde f é uma contração. Sabemos que

$$H^q(N, L) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resta calcular a aplicação índice. Note que precisamos nos preocupar somente com o caso $q = 1$. Como $H^1(N, L) \cong \mathbb{Q}$, representaremos por φ o gerador de $H^1(N, L)$, onde $\varphi : H_1(N, L) \rightarrow \mathbb{Q}$ é uma aplicação linear. Sendo $H_1(N, L) \cong \mathbb{Q}$, tomamos u como seu gerador. A teoria de cohomologia nos mostra que $f_{NL}^*(\varphi(u)) = \varphi(u)$. Ou seja, $f_{NL}^* = \text{Id}$. Logo,

$$\text{Con}^q(\{(0, 0)\}) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E o exemplo está concluído. ■

Iniciamos apresentando as definições relativas ao conceito de ponto fixo hiperbólico.

Definição 1.49. Uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de hiperbólica se, A é um isomorfismo e nenhum auto-valor de A tem módulo igual a um.

Definição 1.50. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 . Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo hiperbólico se, $f(x) = x$ e $Df(x)$ é uma aplicação linear hiperbólica.*

Observação 1.51. O ponto 0 é um ponto fixo hiperbólico para uma aplicação linear hiperbólica de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. ■

Definição 1.52. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 e x um ponto fixo hiperbólico de f . Denotaremos por k o número de auto-valores de $Df(x)$ com módulo menor que 1, e denotaremos por l o número de auto-valores reais de $Df(x)$ menores que -1. O par (k, l) é chamado índice de Morse do ponto x .*

Os Lemas 1.53, 1.54 e 1.56 serão utilizados para o cálculo do Índice de Conley para um ponto fixo hiperbólico de aplicações lineares hiperbólicas. Suas demonstrações podem ser encontradas em Palis e Melo [8].

Lema 1.53. *Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear hiperbólica. Então existe uma decomposição $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ tal que E^s e E^u são subespaços invariantes por A e os autovalores de $A^s = A|_{E^s}$ e $A^u = A|_{E^u}$ são os autovalores de A com módulo menor que um e maior que um, respectivamente.*

Lema 1.54. *Seja A uma aplicação linear hiperbólica. Então existe uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A^s\| < 1$ e $\|(A^u)^{-1}\| < 1$.*

Observação 1.55. O Lema 1.54 implica que A^s é uma contração e A^u é uma expansão. ■

Lema 1.56. *Se A é uma aplicação linear hiperbólica e $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ é a decomposição definida no Lema 1.53, então $\{A^n x\}_{n=0}^{\infty}$ converge para a origem se $x \in E^s$ e $n \rightarrow \infty$ e $\{A^{-n} x\}_{n=0}^{\infty}$ converge para a origem se $x \in E^u$ e $n \rightarrow \infty$.*

No próximo lema, $\text{sgn}(u)$ representa

$$\text{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } u > 0, \\ -1, & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

Lema 1.57. *Seja $h : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por*

$$h(u, t) = tu + (1 - t) \text{sgn}(u) \exp(\text{sgn}(|u| - 1) \ln 2).$$

A função h possui as seguintes propriedades:

1. se $|u| > 1$, então $|h(u, t)| > 1$, para todo $t \in [0, 1]$ e
2. se $|u| < 1$, então $|h(u, t)| < 1$, para todo $t \in [0, 1]$.

DEMONSTRAÇÃO. Para demonstrarmos 1, seja $u \in \mathbb{R}$ tal que $u > 1$. Logo, $\text{sgn}(u) = 1$ e $\text{sgn}(|u| - 1) = 1$. Assim a expressão para $h(u, t)$ se torna

$$h(u, t) = tu + 2(1 - t).$$

Consideremos o caso $u > 2$. Então

$$h(u, t) = (u - 2)t + 2 > 2, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Se $1 < u < 2$, então

$$h(u, t) = (u - 2)t + 2 > u > 1, \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Agora suponha que u é um número real tal que $u < -1$. Faremos o mesmo tipo de análise para este caso. Note que $\text{sgn}(u) = -1$ e $\text{sgn}(|u| - 1) = 1$. Logo, a expressão para $h(u, t)$ se torna

$$h(u, t) = tu - 2(1 - t).$$

É fácil ver que

$$h(u, t) = tu + 2t - 2 < -t + 2t - 2 = t - 2.$$

Logo,

$$h(u, t) < -1, \text{ para todo } 0 < t < 1.$$

Para (2), utiliza-se um raciocínio análogo. □

Apresentamos o cálculo do Índice de Conley para o ponto fixo de uma aplicação linear hiperbólica. A seguir $\mathbb{G}$ denotará um grupo abeliano.

Proposição 1.58. *Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear hiperbólica. Então $\{0\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$\text{Con}^q(\{0\}) = \begin{cases} (\mathbb{G}, (-1)^l \text{Id}), & \text{se } q \neq k, \\ 0, & \text{se } q = k \end{cases}$$

onde (k, l) é o índice de Morse de 0.

DEMONSTRAÇÃO. Segue do Lema 1.53 que $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em dois subespaços invariantes E^u e E^s . Note que $\dim E^u = k$ e $\dim E^s = n - k$. Logo, E^u é isomorfo a $\mathbb{R}^k$ e E^s é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-k}$. Para simplificar a notação da demonstração utilizaremos $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$ para representar E^u e E^s , respectivamente.

Pelo Lema 1.56, temos que $S = \{0\}$ é o único conjunto invariante para A . Além disso, S é um conjunto invariante isolado.

Vamos provar o caso em que A seja diagonalizável. Assim tomamos uma base de $\mathbb{R}^n$ tal que a matriz de A nesta base tenha a forma bloco diagonal, com blocos unidimensionais $[\lambda_i]$ correspondentes aos autovalores reais, e blocos bidimensionais correspondentes aos autovalores complexos, os quais tomamos na forma

$$\begin{bmatrix} r_j \cos \varphi_j & r_j \sin \varphi_j \\ -r_j \sin \varphi_j & r_j \cos \varphi_j \end{bmatrix}$$

correspondente ao par de autovalores $r_j \exp(i\varphi_j)$ e $r_j \exp(-i\varphi_j)$. Para cada $t \in [0, 1]$, defina a aplicação A_t , de maneira que A_t tenha a mesma forma bloco diagonal de A , cujo os blocos correspondentes aos autovalores reais têm a forma

$$[h(\lambda_j, t)]$$

e os blocos bidimensionais correspondentes aos autovalores complexos têm a forma

$$h(r_j, t) \begin{bmatrix} \cos t\varphi_j & \sin t\varphi_j \\ -\sin t\varphi_j & \cos t\varphi_j \end{bmatrix},$$

onde $h(u, t)$ é a função definida no Lema 1.57, ou seja,

$$h(u, t) = tu + (1 - t) \operatorname{sgn}(u) \exp(\operatorname{sgn}(|u| - 1) \ln 2).$$

Pelo Lema 1.57 concluímos que para cada $0 \leq t \leq 1$, $\{0\}$ é um conjunto invariante isolado. Mais ainda, é um ponto fixo hiperbólico com índice de Morse (k, l) . Note que $A_1 = A$. Se $t = 0$, um cálculo simples mostra que a matriz da aplicação A_0 assume a forma bloco diagonal, com os valores 2, -2, 1/2, -1/2 na sua diagonal. Em particular, A_0 restrita a $\mathbb{R}^k$ possui a forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 2 & & & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & & & \\ \cdot & & & 2 & & & & \\ \cdot & & & & -2 & & & \\ \cdot & & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & & & -2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

com $k - l$ inteiros positivos e l inteiros negativos. Sejam

$$N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid \|x\| \leq 2 \text{ e } \|y\| \leq 2\} \text{ e}$$

$$L := \{x \in N \mid 2 \leq \|x\| \leq 1\}.$$

A demonstração de que (N, L) é um par-índice invariante $\{0\}$ segue os mesmos passos realizados no Exemplo 1.11. Resta calcular o índice de Conley para $S = \{0\}$. Para isto, sejam

$$B^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\} \text{ e } S^{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\}$$

e defina as aplicações

$$d : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (B^k, S^{k-1}) \text{ e } \alpha : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (N, L),$$

dadas por

$$\begin{aligned} d(x_1, x_1, \dots, x_k) &= (x_1, x_2, \dots, x_{k-l}, -x_{k-l+1}, \dots, -x_k), \\ \alpha(x) &= (x, 0). \end{aligned}$$

Note que a aplicação dada pela composição $i_{NL} \circ \alpha \circ d$ é homotópica à aplicação dada pela composição $\alpha \circ A_{NL}$, onde a homotopia é dada por

$$H((x_1, \dots, x_k), t) = (2(1-t)x_1, \dots, 2(1-t)x_{k-l}, -2(1-t)x_{k-l+1}, \dots, -2(1-t)x_k).$$

Logo, o diagrama a seguir é homotopicamente comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} (N, L) & \xrightarrow{A_{NL}} & (N \cup A(L), L \cup A(L)) & \xleftarrow{i_{NL}} & (N, L) \\ \uparrow \alpha & & & & \uparrow \alpha \\ (B^k, S^{k-1}) & \xrightarrow{d} & & & (B^k, S^{k-1}). \end{array}$$

Consequentemente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^*(N, L) & \xrightarrow{A_{NL}^*} & H^*(N, L) \\
\alpha^* \downarrow & & \downarrow \alpha^* \\
H^*(B^k, S^{k-1}) & \xleftarrow{d^*} & H^*(B^k, S^{k-1})
\end{array}$$

também comutativo. Usando a propriedade da excisão forte da cohomologia de Alexander-Spanier conclui-se que α^* é um isomorfismo. Assim

$$\text{Con}(\{0\}) = \mathcal{L}(H_{NL}^*, A_{NL}^*) = \mathcal{L}(H(B^k, S^{k-1}), d^*) = (H^*(B^k, S^{k-1}), d^*),$$

pois d^* é um isomorfismo. Utilizando os Teorema 3.18 e 45.8 em [7] temos que $(H^*(B^k, S^{k-1}), d^*)$ possui exatamente os valores desejados. Agora basta aplicar a Propriedade de Homotopia e obtemos o resultado para o caso em que A é diagonalizável.

Para o caso geral, tome em $\mathbb{R}^n$ uma base de modo que A esteja na sua forma canônica de Jordan real. Logo, esta matriz terá blocos da forma

$$\begin{bmatrix}
\lambda_i & & & & \\
1 & \lambda_i & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & 1 & \lambda_i
\end{bmatrix} \quad (1.6)$$

correspondentes aos autovalores reais, e blocos da forma

$$\begin{bmatrix}
M_i & & & & \\
I & M_i & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & \ddots & \\
& & & & I & M_i
\end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

onde

$$M_i = \begin{bmatrix} r_j \cos \varphi_j & r_j \sin \varphi_j \\ -r_j \sin \varphi_j & r_j \cos \varphi_j \end{bmatrix} \text{ e } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

correspondentes aos autovalores complexos. Para cada $t \in [0, 1]$, defina a aplicação linear A_t , de maneira que A_t tenha a mesma forma bloco diagonal de A , cujo os

blocos correspondentes aos autovalores reais têm a mesma ordem dos blocos reais de A , sendo que os números λ_i são trocados por $h(\lambda_i, t)$. Os blocos correspondentes aos autovalores complexos têm a mesma ordem dos blocos complexos de A , sendo que a matriz M_j é substituída por

$$h(r_j, t) \begin{bmatrix} \cos t\varphi_j & \operatorname{sen} t\varphi_j \\ -\operatorname{sen} t\varphi_j & \cos t\varphi_j \end{bmatrix}$$

e a matriz I , por $\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$.

Note que a matriz A_0 está nas condições do caso anterior. Como anteriormente, podemos aplicar a Propriedade de Homotopia e, portanto, obtemos o resultado desejado. $\square$

Finalmente apresentamos o cálculo do Índice de Conley para um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo de classe C^1 .

Teorema 1.59. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 e x um ponto fixo hiperbólico de f . Então $S = \{x\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$\operatorname{Con}^q(\{x\}) = \begin{cases} (\mathbb{G}, (-1)^l \operatorname{Id}), & \text{se } q \neq k, \\ 0, & \text{se } q = k \end{cases}$$

onde (k, l) é o índice de Morse de x .

DEMONSTRAÇÃO. Podemos supor sem perda de generalidade que $x = 0$. Note que já sabemos calcular o Índice de Conley do ponto fixo hiperbólico de $A = Df(0)$. Assim, nosso objetivo é utilizar a Propriedade de Homotopia para concluir o resultado. Logo, necessitamos de um meio de relacionar f com $Df(0)$. Essa relação é a essência do Teorema de Hartman-Grobman (ver [8]).

Pelo Teorema de Hartman-Grobman, temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe U_ε , uma vizinhança de 0 tal que para todo $x \in U_\varepsilon$,

$$f(x) = Ax + r(x), \text{ com } \|r\| < \varepsilon.$$

Seja $\Lambda \in [0, 1]$. Defina a família de aplicações

$$f_\lambda(x) := Ax + \lambda r(x).$$

Note que $H(x, \lambda) = f_\lambda(x)$ define uma homotopia entre as aplicações A e f . Pela Proposição 1.58, sabemos calcular $\text{Con}^*(\{0\}, A)$. Para utilizar a Propriedade de Homotopia devemos encontrar um conjunto compacto $N \subset \mathbb{R}^n$ tal que N é uma vizinhança isolante para f_λ , para todo $\lambda \in [0, 1]$. Inicialmente, para cada $\lambda \in [0, 1]$, vamos determinar uma vizinhança isolante N_λ .

Para cada $\lambda \in [0, 1]$, o Teorema de Hartman-Grobman implica que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\lambda) > 0$ tal que

$$f_\lambda(x) = Ax + \lambda r(x) \text{ com } \|r\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in B(0, \delta(\lambda)),$$

e ainda, existe um homeomorfismo $h_\lambda : B(0, \delta(\lambda)) \rightarrow B(0, \delta(\lambda))$ tal que

$$A \circ h_\lambda = h_\lambda \circ f_\lambda.$$

Tomemos $N_\lambda := \text{cl}(B(0, \delta(\lambda)/2))$ e $0 \in N_\lambda$. Além disso, para cada $\lambda \in [0, 1]$, temos que $f_\lambda(0) = 0$. Ou seja, 0 é um ponto fixo para f_λ . Logo, $\{0\} \subset \text{Inv}(N_\lambda, f_\lambda)$. Por outro lado, seja $x \in \text{Inv}(N_\lambda, f_\lambda)$. Logo, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^\infty \subset N_\lambda$ tal que $f_\lambda(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Assim, $f_\lambda^n(x) \in N_\lambda$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Note também que $A(h_\lambda(0)) = h_\lambda(f_\lambda(0)) = h_\lambda(0) = 0$. Mas como A possui um único ponto fixo, temos que $h_\lambda(0) = 0$. Logo, $0 \in h_\lambda(N_\lambda)$. Sendo h_λ um homeomorfismo temos que $h_\lambda(N_\lambda)$ é um conjunto compacto. Um fato de fácil verificação é que

$$A^n \circ h_\lambda = h_\lambda \circ f_\lambda^n \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Como $f_\lambda^n(x) \in N_\lambda$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que

$$A^n(h_\lambda(x)) \in h_\lambda(N_\lambda) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

isto é,

$$h_\lambda(x) \in \text{Inv}(h_\lambda(N_\lambda), A) = \{0\}.$$

Como h_λ é homeomorfismo, temos que $x = 0$. Logo, $\text{Inv}(N_\lambda, f_\lambda) = \{0\}$. Portanto,

$$\text{Inv}(N_\lambda, f_\lambda) \subset \text{Int}(N_\lambda) \text{ para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Um argumento de compacidade nos permite encontrar $\delta > 0$ tal que N_δ é vizinhança isolante para $\text{Inv}(N_\delta, f_\lambda)$ e $\text{Inv}(N_\delta, f_\lambda) = \{0\}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Como $f_1 = f$ e $f_0 = A$ segue da Propriedade de Homotopia que

$$\text{Con}(\text{Inv}(N_\delta, f)) = \text{Con}(\text{Inv}(N_\delta, A)).$$

E a demonstração está concluída. $\square$

Passemos a definição de ponto periódico hiperbólico.

Definição 1.60. *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 . Um ponto x é um ponto periódico hiperbólico de período minimal d se x for um ponto fixo hiperbólico para f^d e se $i < d$, então $f^i(x) = f^j(x)$, para algum $j = 1, 2, \dots, d-1$.*

Teorema 1.61. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^1 e $x \in \mathbb{R}^n$ um ponto periódico de período minimal d de f . Suponha que (k, l) seja o índice de Morse de x , com relação a f^d . Então $S = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{d-1}(x)\}$ é um conjunto invariante isolado e*

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} (\mathbb{G}^d, D) & \text{se } q = k, \\ 0, & \text{se } q \neq k, \end{cases}$$

onde $D : \mathbb{G}^d \rightarrow \mathbb{G}^d$ está definida em uma base $B = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_d\}$ de $\mathbb{G}^d$, por $D(e_i) = e_{i+1}$, para $i = 1, 2, \dots, d-1$ e $D(e_d) = (-1)^l e_1$.

DEMONSTRAÇÃO. Como x é um ponto fixo hiperbólico segundo f^d , existe N uma vizinhança isolante para o conjunto $\{x\}$ segundo f^d . Ou seja, existe $N \subset X$ compacto tal que $\{x\} = \text{Inv}(N, f^d)$. Denotemos por (N, L) um par-índice para o conjunto invariante isolado $\{x\}$. Para cada $i = 1, 2, \dots, d-1$, defina

$$x^i := f^i(x), \quad N^i := f^i(N) \text{ e } L^i := f^i(L).$$

O conjunto N é escolhido de tal modo que podemos supor que $N^i \cap N^j = \emptyset$, se $i \neq j$ e $f(N^i) \cap N^j = \emptyset$, se $j \neq (i+1) \bmod d$.

Note que $f^d(x^i) = f^d(f^i(x)) = f^i(x) = x^i$, e mais $Df^d(x^i) = Df^d(x)$. Ou seja, x^i é ponto fixo hiperbólico segundo f^d , com índice de Morse (k, l) , para cada $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$.

Como, para cada $i = 1, 2, \dots, d-1$, f^i é um homeomorfismo, temos que N^i e L^i são conjuntos compactos. Vamos mostrar que (N^i, L^i) é par-índice para $\{x^i\}$ com relação a f^d .

Temos que $\text{Inv}(N^i, f^d) = \{x^i\}$. De fato, se $y \in \text{Inv}(N^i, f^d)$, existe sequência $\{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N^i$ tal que $f^d(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = y$. Logo, $y_n \in f^i(N)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, para todo $n \in \mathbb{Z}$, temos que $y_n = f^i(z_n)$, para algum $z_n \in N$. Portanto,

$z_n = f^{-i}(y_n) \in N$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. E mais, $f^d(z_n) = f^d(f^{-i}(y_n)) = f^{-i}(f^d(y_n)) = f^{-i}(y_{n+1}) = z_{n+1}$ e $z_0 = f^{-i}(y)$. Desta maneira, temos que $f^{-i}(y) \in \text{Inv}(N, f^d)$. Como $\text{Inv}(N, f^d) = \{x\}$, então $y = f^i(x)$. Logo, $y = x^i$. Agora, note que a sequência $\{x_n^i\}_{-\infty}^{\infty}$ tal que $x_n^i = x^i$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, está inteiramente contida em N^i , com $f^d(x_n^i) = x^i = x_{n+1}^i$ e $x_0^i = x^i$. Portanto, $x^i \in \text{Inv}(N^i, f^d)$. Então, $\text{Inv}(N^i, f^d) = \{x^i\}$.

Como $\text{cl}(N^i \setminus L^i) \subset N^i$, temos que $\text{Inv}(\text{cl}(N^i \setminus L^i), f^d) \subset \text{Inv}(N^i, f^d) = \{x^i\}$. Como no parágrafo anterior, mostra-se que $\{x^i\} \subset \text{Inv}(\text{cl}(N^i \setminus L^i), f^d)$. Portanto, $\text{Inv}(\text{cl}(N^i \setminus L^i), f^d) = \{x^i\}$.

Como $x \in \text{Int}(N \setminus L)$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset N \setminus L$. Sendo f^i um homeomorfismo, temos que $f^i(B(x, r)) = B(f^i(x), r^i)$, para algum $r^i > 0$. Assim, $B(f^i(x), r^i) \subset f^i(N \setminus L) \subset f^i(N) \setminus f^i(L)$. Logo, $y = f^i(x) \in \text{Int}(N^i \setminus L^i)$. Isto conclui a verificação do primeiro item da Definição 1.9.

Agora, como $f^d(L) \cap N \subset L$ e f^i é um homeomorfismo, segue que, $f^i(f^d(L)) \cap N \subset f^i(L)$. Ou seja, $f^d(f^i(L)) \cap f^i(N) = f^d(L^i) \cap N^i \subset L^i$. O que conclui o item dois da definição de par-índice.

Para conferirmos o item restante, basta notar que $N^i \setminus L^i \subset f^i(N \setminus L)$. Logo, $f^d(N^i \setminus L^i) \subset f^d(f^i(N \setminus L)) \subset L^i$.

Desta maneira, segue claramente que

$$M := \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} N^i$$

é vizinhança isolante para $\{x^0, x^1, \dots, x^{d-1}\}$ com relação a f . Além disso, definindo

$$Q := \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} L^i,$$

temos que, (M, Q) é um par-índice para $\text{Inv}(M, f)$. Pela construção do par (M, Q) , segue que

$$H^q(M, Q) = H^q(N^0, L^0) \times H^q(N^1, L^1) \times \dots \times H^q(N^{d-1}, L^{d-1}).$$

Logo,

$$H^q(M, Q) = \begin{cases} \mathbb{G}^d, & \text{se } q = k. \\ 0, & \text{se } q \neq k \end{cases}$$

Para finalizar a demonstração, resta determinar a aplicação índice f_{MQ}^* . Para isso escolha α^{d-1} um gerador de $H^k(N^{d-1}, L^{d-1})$. Por recorrência defina a sequência de geradores de $H^k(N^i, L^i)$ dada por $\alpha^{i-1} = f_{NL}^*(\alpha^i)$, para $i = 0, 1, \dots, d-1$. Seja $u^i := (0, 0, \dots, \alpha^i, \dots, 0) \in H_{NL}^*$. Então a sequência $\{u^i\}_{0 \leq i \leq d-1}$ forma uma base para $H^q(M, Q)$. Verifica-se facilmente que

$$f_{MQ}^*(u^i) = u^{i+1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, d-1.$$

Para $u^0 = (\alpha^0, 0, \dots, 0)$, temos que

$$f_{MQ}^*(u^0) = (f_{MQ}^d)^*(0, 0, \dots, (f_{NL}^d)^*(\alpha^{d-1})) = (0, 0, \dots, (-1)^l \alpha^{d-1}) = (-1)^l u^{d-1}.$$

Logo, f_{MQ}^* é um isomorfismo. Para concluir a prova defina $D := f_{MQ}^*$. $\square$

Finalizamos o capítulo com o cálculo do índice para a Ferradura de Smale e a G -Ferradura. Utilizamos $\mathbb{Q}$, conjunto dos números racionais, para o cálculo dos grupos de cohomologia.

Exemplo 1.62. Sejam $X = S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua que aplica dois retângulos R_0 e R_1 linearmente sobre Q_0 e Q_1 , como mostra a Figura 1.3.

Figura 1.3: A Ferradura de Smale.

Para maiores detalhes sobre a construção da aplicação f em X ver Palis e Melo [8]. Esta aplicação é chamada de Ferradura de Smale. Estamos interessados em determinar o índice de Conley para $\text{Inv}(N)$, onde N é o quadrado $ABCD$. A

descrição da dinâmica de f em N é bem conhecida e pode ser encontrada em [8]. Para o cálculo do índice de Conley de $\text{Inv}(N)$ precisamos de um par-índice. Na Figura 1.4 encontra-se uma representação geométrica de um par-índice para $\text{Inv}(N)$.

Figura 1.4: Um par-índice para a Ferradura de Smale.

Para mostrar que (N, L) é de fato um par-índice para $\text{Inv}(N, f)$, seja $x \in \text{Inv}(N)$ e suponha que $x \in (\text{cl}(N \setminus L))^c$. Desta maneira são necessárias apenas duas iterações de f para que saia de N , isto é, $f^2(x) \notin N$. O que é uma contradição. Logo, $x \in \text{cl}(N \setminus L)$. Repetindo os mesmos argumentos para x_n tal que $f(x_n) = x_{n+1}$, $x_0 = x$ concluímos o mesmo. Logo, a sequência $\{x_n\}$ está inteiramente contida em N . Portanto, $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L))$. É claro que $\text{Inv}(\text{cl}(N \setminus L)) \subset \text{Inv}(N)$. Resta mostrar que $\text{Inv}(N) \subset \text{Int}(N)$. Tome $x \in \text{Inv}(N)$. Logo, existe $x_{-1} \in \text{cl}(N \setminus L)$ tal que $f(x_{-1}) = x$. Portanto, $x \in N \cap f(N)$. Mas se x está na fronteira de $N \cap f(N)$, então $f(x) \notin N$, ou seja, $f^2(x_{-1}) \notin N$. As outras propriedades de par-índice são de fácil verificação.

Temos que

$$H^q(N, L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Novamente, para o cálculo do índice de Conley, basta considerar $q = 1$. Na Figura 1.4, α e β denotam representantes dos geradores de $H_1(N, L)$. Temos que a aplicação induzida pode ser apresentada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um cálculo simples mostra que $(f_{NL}^*(H^1(N, L)))^2$ é a matriz nula. Portanto,

$$\frac{H^1(N, L)}{\text{gker}(f_{NL}^*(H^1(N, L)))} \cong 0.$$

E assim, a aplicação induzida no nível 1 também é nula. Ou seja, $\text{Con}^*(\text{Inv}(N))$ é trivial. ■

No próximo exemplo faremos uma pequena modificação no exemplo anterior.

Exemplo 1.63. Seja X como no Exemplo 1.62 e $f : X \rightarrow X$, uma aplicação contínua que aplica dois retângulos R_0 e R_1 linearmente sobre Q_0 e Q_1 , como mostra a Figura 1.5. Esta aplicação é chamada *G-Ferradura*.

Figura 1.5: A *G-Ferradura*.

De maneira completamente análoga ao do Exemplo 1.62, mostra-se que o par (N, L) , representado geometricamente na Figura 1.6, é um par-índice para $\text{Inv}(N)$.

Figura 1.6: Um par-índice para a G -Ferradura.

Como anteriormente,

$$H^q(N, L) = \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Também aqui representaremos a aplicação-índice na forma matricial. Para os níveis $q \neq 1$, temos que a aplicação índice é nula. Já para o nível $q = 1$, temos que a aplicação índice é representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na Figura 1.6 temos denotados α e β , representantes dos geradores de $H_1(N, L)$. Como estamos trabalhando com espaços vetoriais, os cálculos para a obtenção do índice são extremamente simples. É fácil ver que $(f_{NL}^1)^n = 2^{n-1} f_{NL}^1$. Logo, $\text{gker}(f_{NL}^1) = \ker(f_{NL}^1)$. Portanto, $\text{gker}(f_{NL}^1)$ é gerado por $(1, -1)$. Tomando $\{(1, 0), (-1, 1)\}$ como uma base para $H^1(N, L)$, temos que

$$\frac{H^1(N, L)}{\text{gker}(f_{NL}^1)} \cong [(1, 0)].$$

Assim a aplicação $(f_{NL}^1)'$ assume a forma $(f_{NL}^1)' : [(1, 0)] \rightarrow [(1, 0)]$, dada por $(f_{NL}^1)'((1, 0)) = [(f_{NL}^1)(1, 0)]$. Mas $(f_{NL}^1)(1, 0) = (1, 1) = 2(1, 0) - 1(-1, 1)$. Logo, $[(f_{NL}^1)(1, 0)] = 2[(1, 0)]$, isto é, $(f_{NL}^1)' = 2 \text{Id}$. Portanto,

$$\text{Con}^q(\text{Inv}(N)) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, 2 \text{Id}), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste caso o índice não é trivial. ■

Capítulo 2

Decomposição Atratora-repulsora

Neste capítulo apresentaremos a decomposição atratora-repulsora para um conjunto invariante isolado. Ela representa um caso particular da decomposição de Morse. Iniciamos introduzindo o conceito de conjuntos limites. O principal resultado deste capítulo está na Seção 3.2. A partir da existência de trio-índice para uma decomposição atratora-repulsora, é construída uma sequência exata longa (Teorema 2.13). Esta representa uma ferramenta para determinar órbitas de conexão entre os conjuntos limites (Corolário 2.15).

2.1 Par Atrator-repulsor

Nesta seção apresentaremos o conceito de conjunto limite e demonstraremos algumas propriedades desse conjunto. Finalizamos com o conceito de decomposição atratora-repulsora para um conjunto invariante isolado. As provas dos resultados abaixo constituem a versão discreta dos resultados provados por Rybakowski [12] para o caso de semifluxos contínuos definidos em espaços métricos.

Recordemos que X denota um espaço métrico localmente compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua.

Definição 2.1. *Seja Y um subconjunto de X . O conjunto omega limite (w -limite) de Y é definido como*

$$\omega(Y) := \bigcap_{n>0} \text{cl} \left(\{f^k(x) \mid x \in Y \text{ e } k \geq n\} \right).$$

A próxima proposição apresenta algumas propriedades básicas de conjunto omega-limite.

Proposição 2.2. *As seguintes afirmativas são válidas:*

1. *Para todo $y \in X$, $y \in \omega(Y)$ se e somente se existem sequências $x_k \in Y$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que $n_k \rightarrow \infty$ e $f^{n_k}(x_k) \rightarrow y$ quando $k \rightarrow \infty$.*
2. *O conjunto $\omega(Y)$ é fechado e $f(\omega(Y)) \subset \omega(Y)$.*
3. *Se Y é um conjunto compacto e invariante, então $\omega(Y) \neq \emptyset$ e $\omega(Y)$ é um conjunto invariante.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja y um elemento em $\omega(Y)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que existe $y_k \in \{f^j(x) \mid x \in Y \text{ e } j \geq k\}$ tal que $\text{dist}(y_k, y) < \frac{1}{k}$. Portanto, existem $x_k \in Y$ e $n_k \geq k$ tais que $y_k = f^{n_k}(x_k)$.

Por outro lado, suponha que $y \in X$ seja tal que existem sequências $x_k \in Y$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que $n_k \rightarrow \infty$ e $f^{n_k}(x_k) \rightarrow y$ quando $k \rightarrow \infty$. Fixe $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de n) tal que $n_k \geq n$ para $k \geq k_0$. Portanto,

$$f^{n_k}(x_k) \in \{f^j(x) \mid x \in Y \text{ e } j \geq n\},$$

para todo $k \geq k_0$. Logo,

$$y \in \text{cl}(\{f^j(x) \mid x \in Y \text{ e } j \geq n\}),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, a afirmativa 1 está provada.

Seja $y \in \text{cl}(\omega(Y))$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\bar{y} \in \omega(Y)$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que para $k \geq k_0$ temos que

$$\text{dist}(\bar{y}, y) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \text{dist}(f^{n_k}(x_k), \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

onde $x_k \in U \cap S$ e $n_k \rightarrow \infty$. Portanto, $\text{dist}(f^{n_k}(x_k), y) < \varepsilon$, para todo $k \geq k_0$. Logo, $y \in \omega(Y)$. A segunda parte da afirmativa 2 é imediata.

Sendo Y invariante, temos que $f^n(y) \in Y$ para todo $y \in Y$ e $n \in \mathbb{N}$. A compacidade de Y implica que toda sequência em Y possui subsequência convergente. Esses fatos, implicam que $\omega(Y)$ é não vazio. Para mostrar a invariância de $\omega(Y)$,

basta verificar que $\omega(Y) \subset f(\omega(Y))$. Seja $y \in \omega(Y)$. Portanto, existem $x_k \in Y$ e $n_k \rightarrow \infty$ tais que $f^{n_k}(x_k) \rightarrow y$. Como $n_k \rightarrow \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k - 1 \geq 0$ para todo $k \geq k_0$. Logo, $f^{n_k-1}(x_k) \in Y$ para todo $k \geq k_0$. Além disso, existe uma subsequência de $f^{n_k-1}(x_k)$ convergente. Denote por x o limite dessa subsequência convergente. É fácil ver que $x \in \omega(Y)$ e $f(x) = y$. $\square$

No que segue S denotará um conjunto compacto e invariante de f e utilizaremos $\omega(x)$ para denotar o conjunto omega limite de $\{x\}$.

Definição 2.3. Um conjunto $A \subset S$ é um atrator em S se existe uma vizinhança U de A em X tal que

$$\omega(U \cap S) = A.$$

O conjunto $R := \{x \in S \mid \omega(x) \cap A = \emptyset\}$ é chamado o repulsor dual de A e o par (A, R) é chamado decomposição atratora-repulsora para o conjunto invariante S .

A proposição a seguir nos auxiliará na prova do principal teorema desta seção.

Proposição 2.4. Seja (A, R) um decomposição atratora-repulsora de S . Então as seguintes propriedades são válidas:

1. Se V é um conjunto aberto em X com $A \subset V$, então existe um número natural $n_0 = n_0(V)$ tal que $f^n(x) \in V$ para todo $x \in U \cap S$ e $n \geq n_0$.
2. Se B é um conjunto fechado e disjunta de A , então para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que se $x \in S$ com $f^n(x) \in B$ para algum $n \geq n_0$, então $\text{dist}(x, R) < \varepsilon$.

DEMONSTRAÇÃO. Para a prova de 1 suponha que a afirmativa não seja verdadeira. Portanto, existe um aberto V em X com $A \subset V$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k \in U \cap S$ e $n_k \geq k$ tais que $f^{n_k}(x_k) \notin V$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $f^{n_k}(x_k) \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$, com $y \in S \setminus V$. Portanto, $y \in \omega(U \cap S) = A$. Porém isso contradiz o fato que $y \notin V$.

Passemos à demonstração da afirmativa 2. Novamente, suponha que não seja verdadeira. Portanto, existem um conjunto fechado B e $\varepsilon_0 > 0$ com as seguintes propriedades: $B \cap A = \emptyset$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in S$ com

$$f^n(x_k) \in B, \text{ para todo } n \geq k \text{ e } \text{dist}(x_k, R) \geq \varepsilon_0. \quad (2.1)$$

Tomemos o conjunto aberto em X e $V = X \setminus B$. Portanto, $A \subset V$. Pela primeira parte desta proposição temos que existe um número natural $n_0 := n_0(V)$ tal que $f^n(x) \in V$ para todo $x \in U \cap S$ e $n \geq n_0$.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $x_k \rightarrow x$ e $x \in S$. A desigualdade em (2.1) implica que

$$\text{dist}(x, R) \geq \varepsilon_0.$$

Portanto, $x \notin R$. Ou seja, $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{j_0}(x) \in U \cap S$. Isso implica que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{j_0}(x_k) \in U \cap S$ para todo $k \geq k_0$. Portanto,

$$f^{n+j_0}(x_k) \in V \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e } k \geq k_0.$$

Seja $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência tal que $n_k \rightarrow \infty$. Portanto, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$, $\bar{k} \geq k_0$ tal que para todo $k \geq \bar{k}$ temos que $n_k \geq n_0 + j_0$ e $n_k \geq k$. Logo, se $k \geq \bar{k}$, concluímos

$$f^{n_k}(x_k) = f^{(n_k - j_0) + j_0}(x_k) \in V.$$

Por outro lado, $f^{n_k}(x_k) \in B$. Porém isso é uma contradição. $\square$

O teorema a seguir possui uma demonstração simples e é baseada nas definições e resultados acima. Ele nos dá uma caracterização do comportamento dos elementos de S em relação a uma decomposição atratora-repulsora.

Teorema 2.5. *Seja (A, R) uma decomposição atratora-repulsora de S . Então*

1. *Os conjuntos A e R são disjuntos, compactos e invariantes.*
2. *Se $y \in A$, então existe $y_n \in A$, com $n \in \mathbb{Z}$, tal que $f(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = y$.*
3. *Sejam $y \in S$ e $y_n \in S$, com $n \in \mathbb{Z}$, tais que $f(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = y$.*

(a) *Se $y \in R$, então $y_n \in R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(b) *Se $\omega(y) \cap R \neq \emptyset$, então $y_n \in R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(c) *Se existe sequência $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $n_k \rightarrow \infty$ e $y_{-n_k} \rightarrow \bar{y} \in A$, então $y_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(d) *Se $y \notin A \cup R$, então $\omega(y) \subset A$ e para toda sequência $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $n_k \rightarrow \infty$ e $y_{-n_k} \rightarrow \bar{y}$ temos que $\bar{y} \in R$.*

DEMONSTRAÇÃO. Desde que $x \in A$ temos que $\omega(x) \subset A$. Portanto, $A \cap R = \emptyset$. A demonstração da invariância de A é análoga à prova do item 3 da Proposição 2.2. Como para todo $x \in X$, $\omega(x) = \omega(f(x))$, temos que R é também um conjunto invariante. O item 2 da Proposição 2.2 implica que $A \subset S$ é fechado. Sendo S um conjunto compacto, temos que A é compacto.

Para encerrar a demonstração da afirmativa 1, mostraremos que R é um conjunto fechado. Seja $x_k \in R$ tal que $x_k \rightarrow x$ quando $k \rightarrow \infty$. Temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \notin U$. Caso contrário, existiriam $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f^{n_0}(x_k) \in U \cup S$ para todo $k \geq k_0$. O que implicaria

$$\omega(x_k) = \omega(f^{n_0}(x_k)) \subset \omega(U \cup S) = A,$$

para todo $k \geq k_0$. Porém isso contradiz a escolha da sequência x_k . Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \notin U$. Portanto, $x \in R$.

Suponha que $y \in A$. Se $n \geq 0$, defina $y_n := f^n(y)$. Pela invariância de A , temos que $y_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixe $j \in \mathbb{N}$ e sejam $n_k \in \mathbb{N}$ e $y_k \in U \cap S$ sequências tais que $n_k \rightarrow \infty$ e $f^{n_k}(y_k) \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$. Logo, existe $k_0^j \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq j$, para todo $k \geq k_0^j$. Como o conjunto S é compacto, sem perda de generalidade, podemos supor que

$$f^{n_k-j}(y_k) \rightarrow \bar{y}_j \in S,$$

quando $j \rightarrow \infty$. Logo, $\bar{y}_j \in A$ e $f^j(\bar{y}_j) = y$. Para encerrar a demonstração, defina $y_{-j} := \bar{y}_j$. Assim, concluímos a demonstração do segundo item do teorema.

Para a demonstração da afirmativa 3, sejam $y \in S$ e $y_n \in S$, com $n \in \mathbb{Z}$, tais que $f(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = y$.

Suponha que $y \in R$. Seja B uma vizinhança fechada de R tal que $B \cap A = \emptyset$. Portanto, $f^n(x) \in B$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 2.4 temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $x \in S$ e $f^n(x) \in B$ para algum $n \geq n_0$, então $\text{dist}(x, R) < \varepsilon$. Fixemos $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k - n \geq n_0$. Com isso

$$f^{k-n}(y_n) = f^k(y) \in B.$$

Logo, $\text{dist}(y_n, R) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Mas isso implica que $y_n \in R$. Portanto, (a) está provado.

A demonstração de (b) é análoga a de (a). De fato, suponha $\omega(y) \cap R \neq \emptyset$. Portanto, existe $n_k \in \mathbb{N}$ sequência convergindo para infinito tal que $f^{n_k}(y) \rightarrow \bar{y}$ e $\bar{y} \in R$.

Novamente, seja B uma vizinhança fechada de R tal que $B \cap A = \emptyset$. Portanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_k}(x) \in B$, para todo $n_k \geq k_0$. Pela Proposição 2.4 temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(x) \in B,$$

para todo $x \in S$ tal que $\text{dist}(x, R) < \varepsilon$ e $n \geq n_0$. Fixemos $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, existe n_k tal que $n_k \geq k_0$ e $n_k - n \geq n_0$. Com isso

$$f^{n_k-n}(y_n) = f^{n_k}(y) \in B.$$

Logo, $\text{dist}(y_n, R) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Novamente, isso implica que $y_n \in R$.

Passemos à demonstração de (c). Logo, suponha que existe $n_k \in \mathbb{N}$ sequência convergindo para infinito tal que $y_{-n_k} \rightarrow \bar{y}$ e $\bar{y} \in A$. Portanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_k} \in U \cap S$ para todo $n_k \geq k_0$.

Fixe $n \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que $y_n \in A$. Seja n_k tal que $n_k + n \geq 0$. Portanto, para todo n_k temos que

$$f^{n_k+n}(y_{-n_k}) = y_n.$$

Logo, $y_n \in \omega(U \cap S) = A$.

Finalmente, provemos (d). Suponha $y \notin A \cup R$. Seja $x \in \omega(y)$. Logo, $n_k \in \mathbb{N}$ sequência convergindo para infinito tal que $y_{n_k} \rightarrow x$.

Afirmamos que existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $y_{n_{k_0}} \in U \cap S$. Caso contrário, $y_{-n} \in S \setminus (S \cap U)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $B = S \setminus (S \cap U)$, a Proposição 2.4 implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\text{dist}(x, R) < \varepsilon$ para todo $x \in S$ e $n \geq n_0$ tal que $f^n(x) \in B$. Logo

$$\text{dist}(f^n(y_n), R) = \text{dist}(y, R) < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Mas isso implica que $y \in R$, o que é uma contradição.

Como $\omega(U \cap S) = A$ e A é um conjunto invariante, temos que $y = f^{n_{k_0}}(y_{n_{k_0}}) \in A$.

Para a segunda parte da afirmativa, seja $n_k \in \mathbb{N}$ sequência convergindo para infinito tal que $y_{-n_k} \rightarrow \bar{y}$. Queremos mostrar que $\bar{y} \in R$. Considere $B = \{y\}$. Pela Proposição 2.4 temos que, para todo $\varepsilon > 0$ existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\text{dist}(x, R) < \varepsilon$ para todo $x \in S$ e $n \geq n_0$ tal que $f^n(x) \in B$. Como $f^n(y_n) = y$, temos que $\text{dist}(y_n, R) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $\bar{y} \in R$. $\square$

O resultado anterior pode ser interpretado da seguinte forma. Se um conjunto compacto invariante possui uma decomposição atratora-repulsora, então uma das situações necessariamente ocorre para cada ponto do conjunto invariante: ou ele está no atrator, ou está no repulsor, ou sua órbita nasce no repulsor e morre no atrator. Essa visão intuitiva motiva a seguinte definição:

Definição 2.6. *Seja (A, R) uma decomposição atratora-repulsora de um conjunto compacto e invariante S . O conjunto $S \setminus (A \cup R)$ é chamado o conjunto das órbitas de conexão de S . Este conjunto será denotado por $C(A, R, S)$.*

Uma consequência trivial da definição acima está registrada a seguir.

Proposição 2.7. *Seja (A, R) uma decomposição atratora-repulsora de um conjunto compacto e invariante S . Então $S = A \cup R \cup C(A, R, S)$.*

2.2 Trio-índice para uma Decomposição Atratora-repulsora

Nesta seção vamos analisar uma decomposição atratora-repulsora de um conjunto invariante isolado sob o ponto de vista da Teoria do Índice de Conley. Assim, o conjunto invariante será sempre isolado. O primeiro resultado a ser demonstrado é a existência de trio-índice para uma decomposição atratora-repulsora. A partir da sequência exata longa construída na Proposição 2.13 concluímos o capítulo apresentando um resultado que ilustra como as informações sobre o índice podem garantir a existência de órbitas de conexão, isto é, o conjunto $C(R, A; S)$ ser não vazio. A exposição desta seção é baseada em Richeson [10].

Definição 2.8. *Seja (A, R) uma decomposição atratora-repulsora para o conjunto invariante isolado S . Um trio-índice para (A, R) é um trio de conjuntos compactos*

(N_2, N_1, N_0) tais que (N_2, N_0) , (N_2, N_1) e (N_1, N_0) são pares-índices para S , R e A , respectivamente.

Observação 2.9. Chamamos um trio-índice de trio-índice regular se os pares-índices (N_2, N_0) , (N_2, N_1) e (N_1, N_0) são regulares. ■

O lema apresentado a seguir nos auxiliará na prova da existência de trio-índice.

Lema 2.10. *Seja S um conjunto invariante isolado e (A, R) uma decomposição atratora-repulsora para S . Dado (N, L) um par-índice regular para S , existem um conjunto compacto $U \subset N$, com $A \subset \text{Int}(U)$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que se $x \in U$ e $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\} \subset N$, então $\text{dist}(f^i(x), R) > \varepsilon_0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que para todo $U \subset N$ compacto, com $A \subset \text{Int}(U)$ e para todo $\varepsilon > 0$, se x é um elemento de U tal que $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\} \subset N$, então existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\text{dist}(f^i(x), R) \leq \varepsilon$. Logo, existe uma sequência de conjuntos compactos $\{W_k\}_{k=0}^\infty$, com as seguintes propriedades:

$$W_1 \subset U \cap S,$$

$$W_k \supset W_{k+1},$$

$$A \subset \text{Int}(W_k), \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e}$$

$$\text{se } x \in W_k, \text{ então } \text{dist}(x, A) < \frac{1}{k}.$$

Além disso, determinamos $x_k \in W_k$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$f^{n_k}(x_k) \in N \text{ e } \text{dist}(f^{n_k}(x_k), R) \leq \frac{1}{k}.$$

Há dois casos a considerar. Primeiro, suponha que $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ seja uma sequência ilimitada, isto é, $n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Note que $x_k \in U \cap S$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $f^{n_k}(x_k) \in S$ e S é um conjunto compacto, existe uma subsequência $\{f^{n_{k_j}}(x_{k_j})\}_{j=0}^\infty$ tal que $f^{n_{k_j}}(x_{k_j}) \rightarrow y$, quando $k_j \rightarrow \infty$. Além disso, $y \in S$. Mas temos que $\text{dist}(f^{n_{k_j}}(x_{k_j}), R) \leq \frac{1}{k_j}$. O que implica que $\text{dist}(y, R) = 0$. Como R é um conjunto compacto, temos que $y \in R$. Por outro lado, $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset U \cap S$ é tal que $\text{dist}(f^{n_k}(x_k), y) \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Logo, $y \in \omega(U \cap S) = A$. O que é uma contradição.

Resta considerar o caso em que $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência limitada. Portanto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k = n_{k_0}$, para todo $k \geq k_0$. Como, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in S$ e S é um conjunto compacto, então existe uma subsequência $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $x_{k_j} \rightarrow x$, quando $k_j \rightarrow \infty$, e ainda mais $x \in S$. Recorde que a sequência $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ foi escolhida de tal forma que $\text{dist}(x_k, A) < \frac{1}{k}$. Concluimos que $\text{dist}(x, A) = 0$. Portanto, $x \in A$. Por outro lado, $\text{dist}(f^{n_0}(x), R) = 0$. Logo, $f^{n_0}(x) \in R$. O que nos leva, novamente, a uma contradição. $\square$

O resultado a seguir nos garante a existência de trio-índice para um conjunto invariante isolado.

Proposição 2.11. *Seja S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição atratora-repulsora. Então existe um trio-índice regular para (A, R) .*

DEMONSTRAÇÃO. Sendo S um conjunto invariante isolado, a Proposição 1.23 nos permite concluir que, dada V , uma vizinhança de S , existe $N \subset V$, bloco isolante tal que (N, N^-) é um par-índice regular para S . Defina

$$N_2 := N \text{ e } N_0 := N^-.$$

Devemos encontrar um conjunto compacto, N_1 tal que (N_2, N_1, N_0) satisfaz as condições da Definição 2.8.

Pelo lema anterior, existem $U \subset X$ compacto e $\varepsilon_0 > 0$, tais que $U \subset N_2$, $A \subset \text{Int}(U)$ e se $x \in \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\}$, então $\text{dist}(f^i(x), R) > \varepsilon_0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Considere o conjunto

$$Z := \{y \in N_2 \mid y = f^n(x) \text{ para algum } x \in U \text{ tal que } \{x, f(x), \dots, f^n(x)\} \subset N_2\}.$$

Defina

$$N_1 := N_0 \cup \text{cl}(Z).$$

Mostremos que (N_2, N_1, N_0) é um trio-índice regular para (A, R) .

(i) O par (N_2, N_1) é par-índice regular para R .

Seja $x \in R$. Logo, $x \in S$, ou seja, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \text{cl}(N_2 \setminus N_0)$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Em particular, $x \in \text{cl}(N_2 \setminus N_0)$, o que significa que existe uma sequência $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N_2 \setminus N_0$ tal que $y_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto,

para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $y_k \notin N_0$. Suponha que, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenhamos que $y_k \in \text{cl}(Z)$. Assim, existe uma sequência $\{z_j^k\}_{j=1}^\infty \subset Z$ tal que $z_j^k \rightarrow y_k$, quando $j \rightarrow \infty$. Mas, para cada $j, k \in \mathbb{N}$, temos que $\text{dist}(z_j^k, R) \geq \varepsilon_0$. Logo,

$$\text{dist}(y_k, R) \geq \varepsilon_0, \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Portanto,

$$\text{dist}(x, R) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Isto gera uma contradição, pois $x \in R$. O que implica que $y_k \notin \text{cl}(Z)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \in \text{cl}(N_2 \setminus N_1)$. Utilizando o mesmo argumento demonstramos que

$$x_n \in \text{cl}(N_2 \setminus N_1), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Ou seja, $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_1))$.

Resta mostrar que $\text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_1)) \subset R$ para concluirmos a verificação de parte do primeiro item da Definição 1.9. Para tanto, tome $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_1))$. Logo, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^\infty \subset \text{cl}(N_2 \setminus N_1)$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Em particular, $x \in \text{cl}(N_2 \setminus N_1)$. Portanto, existe uma sequência $\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset N_2 \setminus N_1$ tal que $y_i \rightarrow x$, quando $i \rightarrow \infty$. Ou seja, $y_i \in N_2$ e $y_i \notin N_1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como (A, R) é uma decomposição atratora-repulsora para S , há três possibilidades a serem consideradas:

- (a) $x \in A$,
- (b) $x \in R$ e
- (c) $x \in C(R, A; S)$.

Suponha que $x \in A$. Portanto, existe uma sequência $\{z_j\}_{j=0}^\infty \subset A$ tal que $z_j \rightarrow x$, quando $j \rightarrow \infty$. Mas $A \subset \text{Int}(U)$. Logo, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_j \in \text{Int}(U)$, para todo $j \geq j_0$. Portanto, $y_i \in Z$, para todo $i \geq i_0$. Ou seja, $y_i \in N_1$, para todo $i \geq i_0$. Isso implica que $x \in N_1$. Porém, isso é uma contradição.

Agora suponha que $x \notin R$. Então, $x \in C(R, A; S)$. Isto implica que $\omega(x) \subset A$. Tome $y \in \omega(x)$. Logo, existem sequências $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ e $\{f^{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ tais que $f^{n_k}(x) \rightarrow y$ e $n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Como $A \subset \text{Int}(U)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_k}(x) \in \text{Int}(U) \subset Z \subset N_1 \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Fixe $\bar{k} \geq k_0$. Então $f^{n\bar{k}}(x) \in \text{Int}(U)$. Por outro lado, $f^{n\bar{k}}(x) \in \text{cl}(N_2 \setminus N_1)$, pois $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_1))$. Logo, existe uma sequência $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset N_2 \setminus N_1$ tal que $z_i \rightarrow f^{n\bar{k}}(x)$, quando $i \rightarrow \infty$. Novamente, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_i \in \text{Int}(U) \subset N_1$, para todo $i \geq i_0$. O que é uma contradição, pois $\{z_i\}_{i=1}^\infty \subset N_2 \setminus N_1$. Portanto, $x \in R$.

Mostremos que $R = \text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_1)) \subset \text{Int}(N_2 \setminus N_1)$. Seja $x \in R$. Logo, $x \in S$. Como $x \in S \subset \text{Int}(N_2 \setminus N_0)$. Portanto, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x, r_0) \subset N_2 \setminus N_0$. Definimos

$$r := \min \left\{ \frac{r_0}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

e considere $y \in B(x, r)$. Portanto, $y \in B(x, r_0) \subset N_2 \setminus N_0$. Resta provar que $y \notin \text{cl}(Z)$. Suponha que $y \in \text{cl}(Z)$. Logo, existe uma sequência $\{y_k\}_{k=0}^\infty \subset Z$ tal que $y_k \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$. Utilizando argumentos análogos aos anteriormente, temos que $\text{dist}(y_k, R) > \varepsilon_0$. Logo, $\text{dist}(y, R) \geq \varepsilon_0$. Assim,

$$\varepsilon_0 < \text{dist}(y, R) \leq \text{dist}(y, x) < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2},$$

e isso é uma contradição. Portanto, $y \notin N_1$. Assim,

$$B(x, r) \subset N_2 \setminus N_1.$$

Desta maneira terminamos a verificação do item 1 da Definição 1.9.

Passemos a demonstração do item 2 da definição de par-índice. Primeiramente, destaquemos que

$$f(Z) \cap N_2 \subset Z. \quad (2.2)$$

De fato, tome $y \in Z$ tal que $f(y) \in N_2$. Então $y = f^n(x)$, com $x \in Z$. Ou seja, $x \in U$ e $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\} \subset N_2$. Logo, $f^{n+1}(x) = f(y) \in N_2$. Logo, $\{x, f(x), \dots, f^n(x), f^{n+1}(x)\} \subset N_2$. Portanto, $f(y) \in Z$.

Vamos usar (2.2) para mostrar que N_1 é positivamente invariante com relação a N_2 , isto é,

$$f(N_1) \cap N_2 \subset N_1.$$

Tome $y \in f(\text{cl}(Z))$. Então $y = f(z)$, com $z \in \text{cl}(Z)$. Logo, existe uma sequência $\{z_k\}_{k=0}^\infty \subset Z$ tal que $z_k \rightarrow z$, quando $k \rightarrow \infty$. Consideremos dois casos. Suponha que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_k) \in N_2$, para todo $k \geq k_0$. Usando (2.2), concluímos

que $f(z_k) \in Z$, para todo $k \geq k_0$. Como $y = f(z)$ é limite da sequência $\{f(z_k)\}_{k=0}^\infty$, temos que $y \in \text{cl}(Z)$. O que implica que $y \in N_1$.

Suponha que existe uma sequência $\{n_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_{n_k}) \notin N_2$. Temos que $f(z_{n_k}) \rightarrow f(z)$, quando $k \rightarrow \infty$, e $z_{n_k} \in N_2$, para todo n_k . Portanto,

$$z_{n_k} \in N_2 \text{ e } f(z_{n_k}) \notin N_2.$$

Como (N_2, N_0) é um par-índice para S , concluímos que

$$z_{n_k} \in N_0.$$

Como z é o limite da sequência $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ e N_0 é um conjunto compacto, temos que

$$z \in N_0.$$

Logo,

$$z \in N_0 \text{ e } f(z) \in N_2.$$

Novamente, o fato de (N_2, N_0) ser par-índice nos leva a concluir que $y \in N_1$. Portanto, em qualquer dos dois casos obtemos que $y \in N_1$.

Para a verificação do terceiro item da Definição 1.9, basta notar que

$$N_2 \setminus N_1 \subset N_2 \setminus N_0.$$

Logo,

$$f(N_2 \setminus N_1) \subset f(N_2 \setminus N_0) \subset N_2.$$

Resta provar que (N_2, N_1) é um par-índice regular. Principalmente note que

$$f(N_1) \setminus N_2 \subset f(N_0) \setminus N_2. \quad (2.3)$$

De fato, tome $x \in N_1 = N_0 \cup \text{cl}(Z)$. Então $f(x) \in f(N_0) \cup f(\text{cl}(Z))$. Suponha que $f(x) \in f(\text{cl}(Z))$. Então, existe $z \in Z$ tal que $f(x) = f(z)$. Logo, existe uma sequência $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset Z$ tal que $z_k \rightarrow z$. Portanto, $f(z_k) \rightarrow f(z)$, quando $k \rightarrow \infty$. Novamente dividiremos a demonstração em duas situações. Suponha que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(z_k) \in N_2$, para todo $k \geq k_0$. Por (2.2), temos que $f(z_k) \in Z$. Assim, $\{f(z_k)\}_{k=1}^\infty$ é uma sequência em Z tal que $f(z_k) \rightarrow f(z) = y$. Portanto, $y \in \text{cl}(Z) \subset N_2$. O que é uma contradição. Agora, nos resta a seguinte possibilidade: existem sequências $\{z_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset Z$ e $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ tais que

$$f(z_{n_k}) \notin N_2, \quad z_{n_k} \rightarrow z \text{ e } n_k \rightarrow \infty, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Como (N_2, N_0) é par-índice, $z_k \in N_2$ e $f(z_{n_k}) \notin N_2$, temos que $f(z_{n_k}) \in N_0$. Portanto, $z \in N_0$ e $f(z) \notin N_2$, ou seja, $y = f(z) \in f(N_0)$. Logo,

$$f(N_1) \subset f(N_0).$$

Com isso provamos a inclusão (2.3). Logo,

$$\text{cl}(N_2 \setminus N_1) \cap \text{cl}(f(N_1) \setminus N_2) \subset \text{cl}(N_2 \setminus N_0) \cap \text{cl}(f(N_0) \setminus N_2) = \emptyset.$$

Concluimos, assim, que (N_2, N_1) é par-índice regular para R .

(ii) O par (N_1, N_0) é par-índice regular para A .

Para a prova do primeiro item da definição de par-índice, tome $x \in A$. Logo, $x \in S = \text{Inv}(N_2 \setminus N_0)$. Portanto, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset N_2 \setminus N_0$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Em particular, $x \in N_2 \setminus N_0$. Desta forma, existe uma sequência $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N_2 \setminus N_0$ tal que $y_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Como A é um conjunto atrator, existe $U \subset X$ tal que $A \subset U$. Portanto, U é uma vizinhança para x . Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in U \subset N_1$, para todo $k \geq k_0$. Assim, $y_k \in N_1 \setminus N_0$, para todo $k \geq k_0$. Portanto,

$$x \in \text{cl}(N_1 \setminus N_0).$$

Usando o Teorema 2.5 item 2, temos que existe uma sequência $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset A$ tal que $f(y_n) = y_{n+1}$ e $y_0 = x$. Mas o argumento acima mostra que $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset N_1 \setminus N_0$. Portanto,

$$x \in \text{Inv}(\text{cl}(N_1 \setminus N_0)).$$

Seja $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N_1 \setminus N_0)) \subset \text{Inv}(\text{cl}(N_2 \setminus N_0)) = S$. Em particular, $x \in \text{cl}(N_1 \setminus N_0)$. Logo, existe uma sequência $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N_1 \setminus N_0$ tal que $y_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Como $x \in S$, há três possibilidades para o ponto x

$$(a) \ x \in A,$$

$$(b) \ x \in R \text{ e}$$

$$(c) \ x \in C(R, A; S).$$

Suponha que $x \in R$. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_k \in \text{Int}(N_2 \setminus N_1)$, para todo $k \geq k_0$. Ou seja, $y_k \notin N_1$, para todo $k \geq k_0$. O que é uma contradição.

Agora, suponha que $x \in C(R, A; S)$. Então $\omega(x) \subset A$. Como $x \in S$, existe sequência $\{x_{-n}\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ tal que $f(x_{-n}) = x_{-n+1}$ e $x_0 = x$. Como S é um conjunto

compacto, existe uma subsequência $\{x_{-n_k}\}$ tal que $x_{-n_k} \rightarrow \bar{y}$, quando $n \rightarrow \infty$. Pelo Teorema 2.5, item 3 (d) $\bar{y} \in R$. Logo, existe $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{-n_k} \in \text{Int}(N_2 \setminus N_1)$, para todo $n_k \geq n_{k_0}$. Fixe $n_k \geq n_{k_0}$. Então, $x_{-n_k} \in \text{Int}(N_2 \setminus N_1)$ e $x_{-n_k} \in \text{Inv}(\text{cl}(N_1 \setminus N_0))$. O que é uma contradição. Portanto, a única possibilidade é

$$x \in A.$$

Mostremos que $A = \text{Inv}(\text{cl}(N_1 \setminus N_0)) \subset \text{Int}(N_1 \setminus N_0)$. Com este intuito, tome $x \in A$. Como $A \subset \text{Int}(U) \subset Z$ e $x \in S$, então $x \in \text{Int}(N_2 \setminus N_0)$. Ou seja, existe $r_0 > 0$ tal que

$$x \in B(x, r_0) \cap \text{Int}(U) \subset \text{Int}(N_2 \setminus N_0) \cap Z \subset Z \setminus N_0 \subset N_1 \setminus N_0.$$

Defina $B := B(x, r_0) \cap \text{Int}(U)$. Note que B é um aberto tal que $x \in B$ e $B \subset N_1 \setminus N_0$.

A prova de que N_1 é positivamente invariante com relação a N_2 é análoga a prova feita em (i).

Para o terceiro item, primeiramente, note que

$$N_1 \setminus N_0 \subset \text{cl}(Z) \setminus N_0.$$

Tome $y \in f(N_1 \setminus N_0)$. Logo, $y = f(x)$, com $x \in N_1 \setminus N_0$. Portanto, $x \in \text{cl}(Z) \subset N_2$ e $x \notin N_0$. Logo, $x \in N_2 \setminus N_0$. Assim, $y = f(x) \in f(N_2 \setminus N_0) \subset N_2$. Ou seja, $y \in f(N_1) \cap N_2$. Mas, como (N_2, N_1) é par-índice para R , temos que $f(N_1) \cap N_2 \subset N_1$. Logo, $y \in N_1$. O que implica que N_0 é o conjunto saída para (N_1, N_0) .

Para encerrar a prova deste resultado verifiquemos a inclusão a seguir

$$f(N_0) \setminus N_1 \subset f(N_0) \setminus N_2. \quad (2.4)$$

Tome $y \in f(N_0) \setminus N_1$. Então existe $x \in N_0$ tal que $y = f(x)$. Suponha que $f(x) \in N_2$. Logo, $x \in N_0$ tal que $f(x) \in N_2$. Como (N_2, N_0) é par-índice para S , $f(x) \in N_0$. Portanto, segue que

$$y \in N_0 \cup \text{cl}(Z) = N_1.$$

O que gera uma contradição. Logo,

$$y \in f(N_0) \setminus N_2.$$

Decorre facilmente de (2.4) que (N_1, N_0) é par-índice regular para A . $\square$

Observação 2.12. Note que o trio-índice (N_2, N_1, N_0) definido na demonstração da Proposição 2.11 satisfaz: $N_0 \subset N_2$, $N_0 \subset N_1$ e $N_1 \subset N_2$. ■

A partir da existência de um trio-índice para uma decomposição atratora-repul-sora construiremos uma sequência longa envolvendo os índices de S , A e R . No que segue a cohomologia dos índices de Conley serão calculados usando coeficientes sobre um corpo.

Proposição 2.13. *Se (A, R) é uma decomposição atratora-repulsora para o conjunto invariante isolado S , obtem-se a seguinte sequência longa de espaços vetoriais e automorfismos*

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{k-1}} \text{Con}^k(R) \rightarrow \text{Con}^k(S) \rightarrow \text{Con}^k(A) \xrightarrow{\delta^k} \text{Con}^{k+1}(R) \rightarrow \cdots$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja (N_2, N_1, N_0) o um trio-índice regular para (A, R) construído na demonstração da Proposição 2.11. Para facilitar a exposição iremos usar a seguinte notação:

$$M_0^0 := N_0 \cup f(N_0),$$

$$M_1^0 := N_1 \cup f(N_0),$$

$$M_2^0 := N_2 \cup f(N_0) \text{ e}$$

$$M_2^1 := N_2 \cup f(N_1).$$

Assim, faz sentido definir as seguintes aplicações:

$$\iota : (N_1, N_0) \rightarrow (N_2, N_0), \text{ dada por } \iota(x) = x,$$

$$\rho : (N_2, N_0) \rightarrow (N_2, N_1), \text{ dada por } \rho(x) = x,$$

$$\tilde{\iota} : (M_1^0, M_0^0) \rightarrow (M_2^0, M_0^0), \text{ dada por } \tilde{\iota}(x) = x,$$

$$\tilde{\rho} : (M_2^0, M_0^0) \rightarrow (M_2^1, M_1^1), \text{ dada por } \tilde{\rho}(x) = x.$$

Deste modo, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
(N_1, N_0) & \xrightarrow{\iota} & (N_2, N_0) & \xrightarrow{\rho} & (N_2, N_1) \\
\downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
(M_1^0, M_0^0) & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & (M_2^0, M_0^0) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & (M_2^1, M_1^1) \\
\uparrow f & & \uparrow f & & \uparrow f \\
(N_1, N_0) & \xrightarrow{\iota} & (N_2, N_0) & \xrightarrow{\rho} & (N_2, N_1)
\end{array}$$

é comutativo, onde i denota aplicação inclusão. Passando ao nível de cocadeia, obtemos o seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^*(N_2, N_1) & \xrightarrow{\rho^\#} & C^*(N_2, N_0) & \xrightarrow{\iota^\#} & C^*(N_1, N_0) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow i_{N_2 N_1}^\# & & \uparrow i_{N_2 N_0}^\# & & \uparrow i_{N_1 N_0}^\# \\
0 & \longrightarrow & C^*(M_2^1, M_1^1) & \xrightarrow{\tilde{\rho}^\#} & C^*(M_2^0, M_0^0) & \xrightarrow{\tilde{\iota}^\#} & C^*(M_1^0, M_0^0) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f_{N_2 N_1}^\# & & \downarrow f_{N_2 N_0}^\# & & \downarrow f_{N_1 N_0}^\# \\
0 & \longrightarrow & C^*(N_2, N_1) & \xrightarrow{\rho^\#} & C^*(N_2, N_0) & \xrightarrow{\iota^\#} & C^*(N_1, N_0) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Como $i_{N_2 N_1}^\#$, $i_{N_1 N_0}^\#$ e $i_{N_2 N_0}^\#$ são isomorfismos e lembrando que $f_{N_2 N_1}^\# = f^\# \circ (i_{N_2 N_1}^\#)^{-1}$, $f_{N_1 N_0}^\# = f^\# \circ (i_{N_1 N_0}^\#)^{-1}$ e $f_{N_2 N_0}^\# = f^\# \circ (i_{N_2 N_0}^\#)^{-1}$, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^*(N_2, N_1) & \xrightarrow{\rho^\#} & C^*(N_2, N_0) & \xrightarrow{\iota^\#} & C^*(N_1, N_0) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f_{N_2 N_1}^\# & & \downarrow f_{N_2 N_0}^\# & & \downarrow f_{N_1 N_0}^\# \\
0 & \longrightarrow & C^*(N_2, N_1) & \xrightarrow{\rho^\#} & C^*(N_2, N_0) & \xrightarrow{\iota^\#} & C^*(N_1, N_0) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Passando ao nível de cohomologia e realizando a Redução de Leray obtemos novamente o digrama comutativo de seqüências exatas longas:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & CH^q(R) & \xrightarrow{\rho^q} & CH^q(S) & \xrightarrow{\iota^q} & CH^q(A) \xrightarrow{\delta^q} CH^{q+1}(R) \xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots \\
& & \downarrow \chi^q(R) & & \downarrow \chi^q(S) & & \downarrow \chi^q(A) \\
\cdots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & CH^q(R) & \xrightarrow{\rho^q} & CH^q(S) & \xrightarrow{\iota^q} & CH^q(A) \xrightarrow{\delta^q} CH^{q+1}(R) \xrightarrow{\delta^{q+1}} \cdots
\end{array}$$

De modo mais simplificado a sequência anterior será denotada por

$$\dots \xrightarrow{\delta^{k-1}} \text{Con}^k(R) \rightarrow \text{Con}^k(S) \rightarrow \text{Con}^k(A) \xrightarrow{\delta^k} \text{Con}^{k+1}(R) \rightarrow \dots$$

Com isso a demonstração está concluída. $\square$

A Propriedade de Aditividade nos fornece a seguinte informação sobre a aplicação δ^* do teorema anterior para o caso $S = A \cup R$.

Corolário 2.14. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição atratora-repulsora. Se $S = A \cup R$, então, para todo $q \in \mathbb{Z}$, $\delta^q = 0$, $CH^q(S) \cong CH^q(A) \times CH^q(R)$ e $\chi^q(S)$ é conjugada a $\chi^q(A) \times \chi^q(R)$.*

DEMONSTRAÇÃO. A Propriedade de Aditividade nos leva a concluir facilmente que, para todo $q \in \mathbb{Z}$, $\text{Con}^q(S) \cong \text{Con}^q(A) \times \text{Con}^q(R)$.

Mostremos que $\delta^q = 0$. Tome a sequência exata como na demonstração do teorema anterior

$$\dots \xrightarrow{\delta^{q-1}} \text{Con}^q(R) \xrightarrow{\rho^q} \text{Con}^q(S) \xrightarrow{\iota^q} \text{Con}^q(A) \xrightarrow{\delta^q} \text{Con}^{q+1}(R) \xrightarrow{\delta^{q+1}} \dots$$

Logo, $\text{Im}(\delta^q) = \ker(\rho^q)$. Como $\rho^\#$ é uma aplicação injetora, existe

$$\varphi^\# : C^*(N_2, N_0) \rightarrow C^*(N_2, N_1)$$

tal que, $\varphi^\#$ é uma inversa à esquerda para $\rho^\#$. Ou seja,

$$\varphi^\# \circ \rho^\# = \text{Id}_{N_2 N_1}.$$

Passando ao nível de cohomologia obtemos

$$\varphi^q \circ \rho^q = \text{Id}_R.$$

Logo, φ^q é uma aplicação sobrejetora e ρ^q é uma aplicação injetora. Portanto, $\ker(\rho^q) = \{0\}$. $\square$

O resultado que segue estabelece a contra positiva do corolário anterior.

Corolário 2.15. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição atratora-repulsora. Se $\delta^q \neq 0$, ou $CH^q(S)$ não é isomorfo a $CH^q(A) \times CH^q(R)$, ou a aplicação $\chi^q(S)$ não é conjugada a $\chi^q(A) \times \chi^q(R)$, então $S \neq A \cup R$. Em particular, $C(R, A; S) \neq \emptyset$.*

Finalizamos o capítulo ilustrando alguns dos conceitos vistos.

Exemplo 2.16. Sejam $X = S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua que aplica dois retângulos N_1 e N_2 como na Figura 2.1. Sejam $A = \text{Inv}(N_1)$,

Figura 2.1: Um par atrator-repulsor.

$R = \text{Inv}(N_2)$ e $S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$. Baseada na definição geométrica descrita na Figura 2.1, iremos justificar que (A, R) é uma decomposição atratora-repulsora para S . Mostremos que A é um atrator em S . Note que N_1 é uma vizinhança de A . Tome $x \in A = \text{Inv}(N_1)$, então existe uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset N_1 \cap S$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Tomando sequências $\{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ e $\{y_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N_1 \cap S$ tais que $n_k = k$ e $y_k = x_{-k}$, temos que $n_k \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$ e

$$f^{n_k}(y_k) = f^k(x_{-k}) = x.$$

Portanto,

$$x \in \omega(N_1 \cap S).$$

Agora, $\omega(N_1 \cap S) \subset N_1$ é um conjunto invariante. Logo, $\omega(N_1 \cap S) \subset A$. Portanto, A é um conjunto atrator.

Apresentamos, também, a prova de que R é um conjunto repulsor para S . Tome $x \in R = \text{Inv}(N_2)$ e suponha que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Seja $y \in \omega(x) \cap A$. Logo, $y \in A$. Como $y \in \omega(x)$, existem sequências $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ tais que $n_k \rightarrow \infty$ e $f^{n_k}(y_k) \rightarrow y$, quando $k \rightarrow \infty$. Como $x \in N_2$, então $f^{n_k}(x) \in N_2$, para todo n_k . Sendo N_2 um

conjunto compacto e y limite da sequência $\{f^{n_k}(x)\}$, temos que $y \in N_2$. O que é uma contradição. Para finalizar, tome $x \in S = \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$ e suponha que $\omega(x) \cap A = \emptyset$. Como $x \in \text{Inv}(N_1 \cup N_2)$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset N_1 \cup N_2$ tal que $f(x_n) = x_{n+1}$ e $x_0 = x$. Suponha que existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_{n_0} \in N_1$. Como $A = \omega(N_1 \cap S)$, então $x_{n_0} \in N_1 \cap S$. Ou seja, $\omega(x_{n_0}) \in \omega(N_1 \cap S)$. Logo, $\omega(x_{n_0}) \cap A \neq \emptyset$. Sendo $\omega(x) = \omega(x_{n_0})$, temos que $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$. Isto é uma contradição. Portanto, a sequência $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ está inteiramente contida em N_2 . O que significa que $x \in \text{Inv}(N_2)$.

Passemos agora ao cálculo do índice de Conley para A , R e S . É fácil ver que $N_1 \cap f(N_1) \cap f^{-1}(N_1) \subset \text{Int}(N_1)$. Logo, N_1 é bloco isolante. Seja L_1 o conjunto de saída imediato de N_1 , isto é, $L_1 := N_1^-$. Na Figura 2.2 temos a representação geométrica do par (N_1, L_1) . Procedendo como em exemplos anteriores, é fácil ver que

$$H^q(N_1, L_1) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$\text{Con}^q(A) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente,

$$\text{Con}^q(R) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Finalmente, voltemos nossa atenção para S . Note que $N_1 \cup N_2$ é bloco isolante para S . Tome $N = N_1 \cup N_2$ e $L = (N_1 \cup N_2)^-$. Logo, (N, L) é um par-índice para S . Na Figura 2.2, encontra-se uma representação para o par (N, L) . O conjunto L é a união de L_1 e L_2 .

Novamente temos que

$$H^q(N, L) = \begin{cases} \mathbb{Q}^3, & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um cálculo simples mostra que uma representação matricial para $(f_{NL}^1)'$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 2.2: Um par-índice para S .

Logo,

$$\text{Con}^q(S) = \begin{cases} \left(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste exemplo, há existência de órbitas de conexão. No final do próximo capítulo mostraremos resultados mais gerais que também implicam a existência de órbitas de conexão. ■

Capítulo 3

Decomposição de Morse e Par de Matrizes de Conexão

Neste capítulo, finalmente apresentaremos a definição de decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado e de par de matrizes de conexão associado a uma decomposição de Morse. Para esse fim, torna-se necessário o conceito de filtração índice que é apresentado na Seção 3.1. O par de matrizes de conexão é apresentado na Seção 3.2. As referências básicas deste capítulo são [9] e [10]. Novamente, a cohomologia dos índices de Conley serão calculados usando coeficientes sobre um corpo.

3.1 Decomposição de Morse e Filtração Índice

Nesta seção introduziremos uma relação de ordem parcial com o intuito de “ordenar” os conjuntos atratores e repulsores que um conjunto invariante isolado S pode apresentar.

Definição 3.1. *Seja $\mathcal{P}$ um conjunto finito. Dizemos que $<$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}$, se:*

1. $p < p$ nunca ocorre,
2. se p, q e $r \in \mathcal{P}$, são tais que $p < q$ e $q < r$, então $p < r$.

Observação 3.2. Se a relação estabelecida anteriormente satisfizer à seguinte condição: se $p \neq q$, então ou $p < q$, ou $q < p$, dizemos que $<$ é uma *relação de ordem*

total em $\mathcal{P}$. ■

Se $\mathcal{P}$ é um conjunto finito munido de uma ordem parcial $<$ temos condições de definir intervalos em $\mathcal{P}$.

Definição 3.3. *Sejam $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito e $<$ uma ordem parcial. Um subconjunto $I \subset \mathcal{P}$ é um intervalo em $\mathcal{P}$, se $p < r < q$, com $p, q \in I$, então $r \in I$.*

O conjunto dos intervalos em $\mathcal{P}$ é denotado por $\mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$. Muitas vezes usaremos a notação simplificada $\mathcal{I}$.

Definição 3.4. *Seja $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito munido de uma ordem parcial. Um intervalo $I \in \mathcal{I}$ é um intervalo atrator, se $r < q$, com $q \in I$ implicar $r \in I$.*

Denotamos o conjunto dos intervalos atratores em $(\mathcal{P}, <)$ por $\mathcal{A}(\mathcal{P}, <)$. O mesmo é denotado, de maneira simplificada, por $\mathcal{A}$.

Definição 3.5. *Uma coleção de intervalos em $\mathcal{P}$, $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ dois a dois disjuntos é uma n -upla adjacente em $\mathcal{P}$, se satisfaz:*

1. $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{n-1} \cup I_n \in \mathcal{I}$,
2. se $p \in I_i$ e $q \in I_j$, com $i < j$, então $q \not< p$.

A união $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ será denotada simplesmente por $I_1 I_2 \dots I_n$. Denota-se o conjunto das n -uplas adjacentes em $\mathcal{P}$ por $\mathcal{I}_n(\mathcal{P}, <)$. Ou apenas por $\mathcal{I}_n$.

Devidamente definidos ordem parcial em um conjunto finito $\mathcal{P}$, intervalos em $\mathcal{P}$, podemos definir decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S .

Definição 3.6. *Sejam S um conjunto invariante isolado, $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito parcialmente ordenado. Uma decomposição de Morse para S é uma coleção de conjuntos compactos invariantes isolados*

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}, <) := \{M_p \subset S \mid p \in \mathcal{P}\}$$

com a propriedade que se

$$x \in S \setminus \left(\bigcup_{p \in \mathcal{P}} M_p \right), \text{ então existem } p, q \in \mathcal{P} \text{ tais que } q < p \text{ e } x \in C(M_p, M_q; S),$$

onde

$$C(M_p, M_q; S) = \{x \in S \mid \text{existem } q < p \in I \text{ com a propriedade } \omega(x) \subset M_q \\ \text{e para toda sequência } \{n_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N} \text{ tal que } x_{-n_k} \rightarrow \bar{y}, \text{ então } \bar{y} \in M_p\}.$$

Os conjuntos M_p são chamados de *conjuntos de Morse*. Muitas vezes denotaremos uma decomposição de Morse para S de maneira curta por $\mathcal{M}$.

Exemplo 3.7. Um exemplo simples de uma decomposição de Morse é a decomposição atratora-repulsora de um conjunto invariante isolado. De fato, se (A, R) é uma decomposição atratora-repulsora de um conjunto invariante isolado, basta tomar $\mathcal{P} = \{1, 2\}$, com a relação $1 < 2$. chame $M_1 = A$ e $M_2 = R$. Então $\{M_1, M_2\}$ é uma decomposição de Morse para S . ■

Note que dado um conjunto finito $\mathcal{P}$ poderíamos definir em $\mathcal{P}$ duas ou mais relações de ordem parcial $<$ e $<'$, e desta maneira iríamos obter duas ou mais decomposições de Morse para um mesmo conjunto invariante isolado S .

Note também que dado uma coleção de conjuntos de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$, poderíamos dar a $\mathcal{P}$ uma ordem parcial diferente de modo que as propriedades da Definição 3.6 continuem sendo válidas. Além disso, f define uma ordem parcial sobre os conjuntos chamada *ordem f -definida*. Qualquer outra ordem parcial é uma extensão desta ordem f -definida e é chamada *admissível*.

Dado um intervalo $I \in \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$, iremos definir um conjunto invariante associado a I .

Definição 3.8. Sejam $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito parcialmente ordenado e $I \in \mathcal{I}$ um intervalo em $\mathcal{P}$. Definimos

$$M_I := \left(\bigcup_{p \in I} M_p \right) \cup \left(\bigcup_{p, q \in I} C(M_p, M_q; S) \right).$$

O conceito de filtração índice, apresentado a seguir, generaliza o conceito de trio-índice apresentado no capítulo anterior.

Definição 3.9. Sejam S um conjunto invariante isolado, $(\mathcal{P}, <)$ um conjunto finito parcialmente ordenado e $\mathcal{M}$ uma decomposição de Morse para S . Uma coleção de conjuntos compactos

$$\mathcal{N}(\mathcal{P}, <) := \{N(I) \mid I \in \mathcal{A}\},$$

é chamada de filtração índice regular para decomposição de Morse $\mathcal{M}$, se satisfaz:

1. para cada $I \in \mathcal{A}$, $(N(I), N(\emptyset))$ é um par-índice regular para M_I ,
2. para todo $I, J \in \mathcal{A}$, temos que $N(I) \cap N(J) = N(I \cap J)$ e $N(I) \cup N(J) = N(I \cup J)$.

Observação 3.10. Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S e $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ uma filtração índice para $\mathcal{M}$. Segue de condição 2 da Definição 3.9 que para todo $J \in \mathcal{A}$, $N(\emptyset) \subset N(J)$. ■

Uma filtração índice pode ser utilizada para determinar um par-índice para outros conjuntos invariantes isolados. Este resultado pode ser encontrado em Richeson [9].

Proposição 3.11. Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S e $\mathcal{N}(\mathcal{P}, <)$ filtração índice para $\mathcal{M}$. Considere $I, J \in \mathcal{I}$ dois intervalos atratores, tais que $J \subset I$. Então $(N(I), N(J))$ é um par-índice para $M_{I \setminus J}$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos de verificar as condições da Definição 1.9. Seja $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(J)))$. Em particular, $x \in \text{cl}(N(I) \setminus N(J))$. Logo, existe uma sequência $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N(I) \setminus N(J)$ tal que $x_k \rightarrow x$, quando $k \rightarrow \infty$. Então,

$$x \in M_I = \left(\bigcup_{p \in I} \right) \cup \left(\bigcup_{p, q \in I} C(M_p, M_q; M_I) \right).$$

Suponha que $x \in C(M_p, M_q; M_I)$, com $p, q \in I$ e $q < p$. Portanto, $\omega(x) \subset M_q$ e para toda sequência $\{n_j\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tal que $x_{-n_k} \rightarrow \bar{y}$. Pelo Teorema 2.5, temos que $\bar{y} \in M_p$. Suponha que $q \in J$. Como $x \in M_I$, então $x_{-n_j} \in M_I$ e existe uma subsequência $\{x_{n_{k_j}}\}$ de $\{x_{-n_j}\}$ que converge para $\bar{y} \in M_q$ tal que $x_{-n_{k_j}} \rightarrow \bar{y} \in M_q \subset \text{Int}(N(J) \setminus N(\emptyset))$. Logo, existe $n_{k_{j_0}} \in \mathbb{N}$ tal que $x_{-n_{k_{j_0}}} \in \text{Int}(N(J) \setminus N(\emptyset))$. Mas $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(J)))$. Isto gera uma contradição. Suponha que $\omega(x) \subset M_p$, com $p \in J$. Logo, $f^{n_k}(x) \rightarrow y \in M_p \subset \text{Int}(N(J) \setminus N(\emptyset))$. Como $f^{n_k}(x) \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(J)))$, obtemos uma contradição. Portanto, $q, p \in I \setminus J$.

Agora tome $x \in M_{I \setminus J}$. Como $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(\emptyset)))$, existe uma sequência $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \text{cl}(N(I) \setminus N(\emptyset))$ tal que $x_n \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(\emptyset)))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Suponha que $x \in N(J)$. Logo, $x \notin N(\emptyset)$, pois $(N(J), N(\emptyset))$ é par-índice para M_J .

Então, $f(x) \notin N(\emptyset)$, o que implica $f^2(x) \in N(J)$. Analogamente, $f^n(x) \in N(J)$ e $f^n(x) \notin N(\emptyset)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\omega(x) \in M_p$, para algum $p \in J$. O que é uma contradição. Logo, $x \notin N(J)$. Isto significa que $x \in N(I) \setminus N(J)$. Do mesmo modo mostra-se que $x_n \in N(I) \setminus N(J)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Resta mostrar que $\text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(J))) \subset \text{Int}(N(I) \setminus N(J))$. Tome $x \in \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(J))) \subset \text{Inv}(\text{cl}(N(I) \setminus N(\emptyset))) \subset \text{Int}(N(I) \setminus N(\emptyset))$. Pelo que foi feito anteriormente, temos que $x \notin N(J)$. Além disso, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset N(I) \setminus N(\emptyset)$. Note que $B(x, r) \cap (N(J))^c$ um aberto contendo x , tal que $B(x, r) \cap (N(J))^c \subset N(I) \setminus N(J)$. Portanto, $x \in \text{Int}(N(I) \setminus N(J))$. E temos concluído a verificação da primeira condição da Definição 1.9. Resta provar que $N(J)$ é positivamente invariante com relação a $N(I)$ e que $N(J)$ é o conjunto saída.

Seja $x \in N(J)$ tal que $f(x) \in N(I)$. Como $N(\emptyset) \subset N(J)$, consideremos dois casos. O primeiro é $x \in N(\emptyset)$. Como $(N(I), N(\emptyset))$ é par-índice para M_I , temos que $N(\emptyset)$ é positivamente invariante com relação a $N(I)$. Portanto, $f(x) \in N(\emptyset) \subset N(J)$. Sendo $(N(J), N(\emptyset))$ par-índice para M_J , temos que $f(N(J) \setminus N(\emptyset)) \subset N(\emptyset)$. Portanto, provamos que

$$f(N(J)) \cap N(I) \subset N(J).$$

Ou seja, $N(J)$ é positivamente invariante com relação a $N(I)$.

Para finalizar, seja $x \in N(I) \setminus N(J)$. Queremos mostrar que $f(x) \notin N(\emptyset)$. De fato, temos que $x \notin N(\emptyset)$. O resultado segue novamente do fato de que $(N(I), N(\emptyset))$ é par-índice para M_I . □

Como no caso de trio-índice, é possível mostrar que dado uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado, sempre existe uma filtração índice regular associado à decomposição de Morse. Não apresentaremos a demonstração do resultado pois segue as mesmas idéias da Proposição 2.11. Os detalhes desta prova podem ser encontrados em Richeson [10].

Teorema 3.12. *Seja S um conjunto invariante isolado e $\mathcal{M}$ sua decomposição de Morse. Então existe $\mathcal{N}$ uma filtração índice para $\mathcal{M}$.*

3.2 Pares de Matrizes de Conexão

A decomposição de Morse generaliza o conceito de decomposição atratora-repulsora para um conjunto invariante isolado. Portanto, uma pergunta que surge é qual seria o análogo do Teorema 2.13 para o caso de uma decomposição de Morse. O primeiro passo é “detectar” as decomposições atratoras-repulsoras de uma decomposição de Morse. O resultado a seguir apresenta este fato. Sua demonstração se encontra em Richeson [9].

Proposição 3.13. *Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S . Se $(I, J) \in \mathcal{I}_2$, então M_{IJ} é um conjunto invariante isolado e (M_I, M_J) é uma decomposição atratora-repulsora para M_{IJ} .*

Dado I um intervalo, vamos construir uma dupla adjacente especial. Para isto, se $I \in \mathcal{I}$, defina

$$Q_I := \{q \in \mathcal{P} \setminus I \mid p \not\prec q \text{ para todo } p \in I\}.$$

Proposição 3.14. *Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado $I \in \mathcal{I}(\mathcal{P}, <)$ e Q_I como anteriormente. Então $(Q_I, Q_I \cup I)$ é uma dupla adjacente e $Q_I, Q_I \cup I$ são intervalos atratores.*

DEMONSTRAÇÃO. Temos de verificar as condições da definição de dupla adjacente. Tome $q_1, q_2 \in Q_I$ e suponha que $r \in \mathcal{P}$ é tal que $q_1 < r < q_2$. Suponha que existe $p_0 \in I$ tal que $p_0 < r$. Logo, $p_0 < q_2$. O que é uma contradição. Portanto, para todo $p \in I$, temos que $p \not\prec r$. Assim, $r \in Q_I$. Isto nos mostra que Q_I é um intervalo em $\mathcal{P}$. É imediato que $Q_I \cap I = \emptyset$.

Para verificar que $Q_I \cup I$ é um intervalo em $\mathcal{P}$, tome $q_1, q_2 \in Q_I \cup I$. Aqui temos quatro casos a considerar:

- (a) q_1 e $q_2 \in Q_I$,
- (b) q_1 e $q_2 \in I$,
- (c) $q_1 \in Q_I$ e $q_2 \in I$
- (d) $q_1 \in I$ e $q_2 \in Q_I$.

Os casos (a) e (b) seguem facilmente do fato de que Q_I e I são intervalos. Já caso (c) exige uma consideração cuidadosa. Suponha que $r \notin Q_I$. Logo, existe $p_0 \in I$ tal

que $p_0 < r$ e $r < q_2$. Então, $r \in I$. Note que o último caso não ocorre. De fato, suponha que existe $r \in \mathcal{P}$ tal que $q_1 < r < q_2$. Portanto, $q_1 < q_2$. Isto gera uma contradição.

É trivial mostrar que a última condição para ser dupla adjacente é verificada. Ou seja, $(Q_I, I) \in \mathcal{I}_2$.

Resta mostrar que Q_I e $Q_I \cup I$ são intervalos atratores. Seja $r < q$, com $q \in Q_I$ e suponha que $r \notin Q_I$. Logo, existe $p_0 \in I$ tal que $p_0 < r$ e $p_0 < q$. O que é uma contradição. Segue que Q_I é um intervalo atrator.

Tomemos $r < q$, com $q \in Q_I \cup I$. Temos que considerar os casos:

$$q \in Q_I \text{ e } q \in I.$$

Se o primeiro caso ocorre, temos que $r \in Q_I$. Para o segundo caso, temos que, se $r \in Q_I$, então estamos no caso anterior. Se $r \notin Q_I$, então existe $p_0 \in I$ tal que $p_0 < r$ e $r < q$. Portanto, $r \in I$. $\square$

Utilizando a Proposição 3.11, temos o corolário a seguir.

Corolário 3.15. *Sejam $\mathcal{M}$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S e I, J intervalos em $\mathcal{I}$. Então $(N(Q_{IJ}IJ), N(Q_{II}I), N(Q_{IJ}))$ é um trio-índice para o par atrator-repulsor (M_I, M_J) .*

As próximas definições extraem as propriedades algébricas que a coleção

$$\{(CH^*(M_I), \chi^*(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

possui.

Definição 3.16. *Seja $\mathcal{M}$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S . Uma traça de complexos de cocadeias com endomorfismos é uma coleção*

$$\mathcal{C} := \{(C(I), \partial(I), c(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$$

de complexos de cocadeia e endomorfismos satisfazendo:

1. *para cada $I \in \mathcal{I}$, existem um complexo de cocadeia $C(I)$ e um endomorfismo de cocadeia $c(I) : C(I) \rightarrow C(I)$ de grau zero,*

2. para toda dupla adjacente (I, J) , existem aplicações $\iota := \iota(I, IJ)$ e $\rho := \rho(IJ, J)$ tais que a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow (C(J), c(J)) \xrightarrow{\rho} (C(IJ), c(IJ)) \xrightarrow{\iota} (C(I), c(I)) \longrightarrow 0$$

3. para todo trio adjacente (I, J, K) a seguinte trança de diagramas é comutativa.

Definição 3.17. *Seja $\mathcal{M}$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S . Uma trança de módulos graduados com endomorfismos é uma coleção $\mathcal{H} := \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ de módulos graduados e endomorfismos lineares tal que*

1. para cada $I \in \mathcal{I}$, existem um módulo graduado $H(I)$ e um endomorfismo linear $a(I) : H(I) \rightarrow H(I)$ de grau zero,
2. para toda dupla ndjacente (I, J) , existe uma sequência exata longa de módulos e endomorfismos

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} (H^n(J), a^n(J)) \xrightarrow{\rho^n} (H^n(IJ), a^n(IJ)) \xrightarrow{\iota^n} (H^n(I), a^n(I)) \xrightarrow{\delta^n} \dots,$$

3. para todo trio adjacente (I, J, K) a seguinte trança de diagramas é comutativa.

É imediato que

Proposição 3.18. *Seja $\mathcal{C}$ uma trança de complexos de cocadeias com endomorfismos. Passando ao nível de cohomologia obtemos uma trança de módulos graduados e endomorfismos, que denotamos por $\mathcal{HC}$.*

Proposição 3.19. *Seja S um conjunto invariante isolado e $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ sua decomposição Morse. Definimos*

$$\mathcal{C}(\mathcal{M}) := \{(\mathcal{LC}(M_I), \mathcal{L}f(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\},$$

e

$$\mathcal{H}(\mathcal{M}) := \{(CH^*(M_I), \chi^*(M_I)) \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

Então $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ é uma trança de complexos de cocadeias e endomorfismos e $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ é uma trança de módulos graduados e endomorfismos.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 3.15, dados I, J intervalos em $\mathcal{I}$, temos que $(N(Q), N(QI), N(QIJ)), (N(Q), N(QI), N(QIJK)), (N(Q), N(QIJ), N(QIJK))$

e $(N(QI), N(QIJ), N(QIJK))$ são trios-índices, onde $Q_{IJK} = Q$. Logo, pela Proposição 2.13, temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow (\mathcal{LC}^*(M_J), \mathcal{L}f(M_J)) \xrightarrow{\rho^\#} (\mathcal{LC}^*(M_{I,J}), \mathcal{L}f(M_{I,J})) \xrightarrow{L^\#} (\mathcal{LC}^*(M_I), \mathcal{L}f(M_I)) \rightarrow 0.$$

Passando ao nível de cohomologia, obtemos a seguinte sequência exata longa de espaços vetoriais e autohomomorfismos.

$$\dots \xrightarrow{\delta^{q-1}} \text{Con}^q(M_J) \xrightarrow{\rho^q} \text{Con}^q(M_{I,J}) \xrightarrow{L^q} \text{Con}^q(M_I) \xrightarrow{\delta^q} \text{Con}^{q+1}(M_J) \xrightarrow{\rho^{q+1}} \dots$$

É fácil ver que $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ e $\mathcal{H}(\mathcal{M})$, como definidos no enunciado da proposição satisfazem as condições das Definições 3.16 e 3.17, respectivamente. $\square$

A seguir definimos o conceito de homomorfismo entre duas tranças de módulos.

Definição 3.20. *Sejam $\mathcal{M}$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S , I intervalo em $\mathcal{I}$ e $\mathcal{H}(P) = \{(H(I), a(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{H}'(P) = \{(H'(I), a'(I)) \mid I \in \mathcal{I}\}$ duas tranças de módulos graduados e endomorfismos. Um homomorfismo entre tranças de módulos graduados, $\Psi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, é uma coleção de homomorfismos $\psi(I) : H(I) \rightarrow H'(I)$, definido para todo intervalo $I \in \mathcal{I}$, tal que para toda dupla adjacente (I, J) o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & (H^q(J), a^q(J)) & \longrightarrow & (H^q(IJ), a^q(IJ)) & \longrightarrow & (H^q(I), a^q(I)) \xrightarrow{\delta^q} \dots \\ & & \downarrow \psi(J) & & \downarrow \psi(IJ) & & \downarrow \psi(I) \\ \dots & \xrightarrow{\delta^{q-1}} & (H'^q(J), a'^q(J)) & \longrightarrow & (H'^q(IJ), a'^q(IJ)) & \longrightarrow & (H'^q(I), a'^q(I)) \xrightarrow{\delta^q} \dots \end{array}$$

é comutativo.

Observação 3.21. Se para cada $I \in \mathcal{I}$, da definição anterior, $\psi(I)$ for um isomorfismo, então dizemos que Ψ é um isomorfismo. $\blacksquare$

O resultado enunciado a seguir apresenta uma condição para que Ψ seja isomorfismo.

Proposição 3.22. *Suponha que $\Psi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$ seja um homomorfismo de tranças de módulos graduados tal que $\psi(p)$ seja isomorfismo para todo $p \in \mathcal{P}$. Então Ψ é um isomorfismo.*

DEMONSTRAÇÃO. Vamos usar indução sobre o número de elementos de $I \in \mathcal{I}$.

Suponha que $I = \{p\}$. Logo, por hipótese $\psi(p)$ é um isomorfismo. Suponha que o resultado seja válido para todo intervalo I com $m - 1$ elementos. Mostremos que o resultado é válido para um intervalo I com m elementos.

Se existe $\bar{p} \in I$ tal que $\bar{p} \not\prec q$ para todo $q \in I$, defina $\tilde{K} = I \setminus \{\bar{p}\}$. Neste caso é fácil verificar que $(\tilde{K}, \bar{I})$, onde $\bar{I} = \{\bar{p}\}$, é uma dupla adjacente. Caso contrário, isto é, se para cada $p \in I$ sempre existe $q_p \in I$ tal que $p < q_p$ ou $q_p < p$. Fixe $p_0 \in I$. Sem perda de generalidade podemos supor que $p_0 < q_{p_0}$. Defina

$$K_{p_0} := \{q \in I \mid p_0 < q\}.$$

Note que $K_{p_0} \neq \emptyset$ e $I = (I \setminus K_{p_0}) \cup K_{p_0}$. Agora tome $r_1, r_2 \in K_{p_0}$ e suponha que existe $r \in I$ tal que $r_1 < r < r_2$. Logo, $p_0 < r_1 < r < r_2$. Isto implica que $r \in K_{p_0}$, ou seja, que K_{p_0} é um intervalo. De modo análogo mostra-se que $I \setminus K_{p_0}$ é um intervalo. É claro que $(I \setminus K_{p_0}) \cap K_{p_0} = \emptyset$ e se $p \in K_{p_0}$ então $p \not\prec q$, para todo $q \in (I \setminus K_{p_0})$. Fazendo $\tilde{K} = (I \setminus K_{p_0})$ e $\bar{I} = K_{p_0}$, novamente temos que $(\tilde{K}, \bar{I})$ é uma dupla adjacente. Considerando o diagrama apresentado na Definição 3.20, obtemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{n-1}(\tilde{K}) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & H^n(\bar{I}) & \xrightarrow{\rho^n} & H^n(I) & \xrightarrow{\iota^n} & H^n(\tilde{K}) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & H^{n+1}(\bar{I}) \\ \downarrow \psi^{n-1}(\tilde{K}) & & \downarrow \psi^n(\bar{I}) & & \downarrow \psi^n(I) & & \downarrow \psi^n(\tilde{K}) & & \downarrow \psi^{n+1}(\bar{I}) \\ H^{n-1}(\tilde{K}) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & H^n(\bar{I}) & \xrightarrow{\rho^n} & H^n(I) & \xrightarrow{\iota^n} & H^n(\tilde{K}) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & H^{n+1}(\bar{I}). \end{array}$$

Pela hipótese de indução temos que $\psi(\tilde{K})$ e $\psi(\bar{I})$ são isomorfismos. Aplicando o Lema dos Cinco, obtemos que $\psi(I)$ é um isomorfismo. $\square$

A seguir apresentamos os preliminares para a introdução do conceito de par de matrizes de conexão.

Definição 3.23. *Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado S . Dado $I \in \mathcal{I}$, definimos $C\Delta(I) := \bigoplus_{p \in I} CH^*(M_p)$.*

Seja $\Delta : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ uma aplicação linear.

Observação 3.24. A aplicação Δ pode ser vista na forma de uma matriz $|\mathcal{P}| \times |\mathcal{P}|$,

$$\Delta = (\Delta_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}},$$

onde $\Delta_{pq} : CH^*(M_q) \rightarrow CH^*(M_p)$ é também uma aplicação linear. ■

Definição 3.25. Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S e $\Delta : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ a aplicação linear. Se $p < q$ implicar $\Delta_{pq} = 0$, diremos que esta é uma matriz triangular inferior. Mas, se $p \leq q$ implicar $\Delta_{pq} = 0$, dizemos que Δ é uma matriz triangular estritamente inferior. Se Δ for de grau um e $\Delta^2 = 0$, Δ é chamada operador cobordo.

Observação 3.26. Note que para cada $I \in \mathcal{I}$, podemos definir a aplicação

$$\Delta(I) := (\Delta_{pq})_{p,q \in I} : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I). \quad \blacksquare$$

O resultado a seguir nos apresenta condições sobre a aplicação Δ para que $(C(I), \Delta(I))$ seja um complexo de cocadeia.

Lema 3.27. Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S . Se Δ é um operador cobordo triangular estritamente inferior, então, para cada $I \in \mathcal{I}$, $\Delta(I)$ também a é. Em particular, $(C(I), \Delta(I))$ é um complexo de cocadeia.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $I \in \mathcal{I}$. Para mostrar que $\Delta(I)$ é triangular estritamente inferior, basta lembrar que se $p < q$ em I , então $p < q$ em $\mathcal{P}$. O que implica $\Delta_{pq} = 0$.

Resta mostrar que $(\Delta(I))^2 = 0$. Para tanto, basta lembrar que $(\Delta(I))^2$ é o produto das matrizes $(\Delta_{pq})_{p,q \in I}$. □

Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S e (I, J) uma dupla adjacente. Assim faz sentido pensar nas aplicações $\iota : M_I \rightarrow M_{IJ}$ inclusão canônica e $\rho : M_{IJ} \rightarrow M_J$, projeção canônica, e assim, obtemos as seguintes aplicações induzidas em nível de cohomologia

$$\iota^* : C\Delta(IJ) \rightarrow C\Delta(I) \text{ e } \rho^* : C\Delta(J) \rightarrow C\Delta(IJ).$$

Do mesmo modo que fizemos anteriormente, dado $d : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ uma aplicação de cocadeia que seja linear, triangular inferior de grau zero, podemos escrevê-la como uma matriz

$$d = (d_{pq})_{p,q \in \mathcal{P}},$$

onde $d_{pq} : CH^*(M_q) \rightarrow CH^*(M_p)$. E, novamente, para cada $I \in \mathcal{I}$, podemos definir

$$d(I) = (d_{pq})_{p,q \in I} : C\Delta(I) \rightarrow C\Delta(I).$$

Proposição 3.28. *Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S . Sejam $\Delta : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ um operador cobordo triangular estritamente inferior e $d : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ uma aplicação linear de cocadeia triangular inferior de grau zero. Então*

$$C\Delta(\mathcal{M}) := \{(C(I), \Delta(I), d(I)), \mid I \in \mathcal{I}\}$$

é uma trança de complexas de cocadeia e endomorfismos. Passando ao nível de cohomologia obtemos uma trança de módulos graduados e endomorfismos que será denotado por $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$.

Finalmente, estamos em condições de definir o par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse.

Definição 3.29. *Seja $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para o conjunto invariante isolado S . Sejam $\Delta : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ um operador cobordo triangular estritamente inferior e $d : C\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow C\Delta(\mathcal{P})$ uma aplicação linear de cocadeia triangular inferior de grau zero. O par de matrizes (Δ, d) é chamada par de matrizes de conexão para a decomposição de Morse $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ se a trança de módulos graduados e endomorfismos $\mathcal{H}\Delta(\mathcal{M})$ é isomorfa a trança de módulos graduados e endomorfismos $\mathcal{H}(\mathcal{M})$.*

Observação 3.30. Recorde que $\mathcal{H}(\mathcal{M})$ foi definido na Proposição 3.19. ■

Capítulo 4

De volta à Decomposição Atratora-repulsora

Ao final do Capítulo 3, somos levados a perguntar sobre a existência de um par de matrizes de conexão para uma decomposição de Morse de um conjunto invariante isolado. Neste capítulo apresentamos a construção de uma par de matrizes de conexão para uma decomposição atratora-repulsora. Na Seção 4.1, essa construção é descrita. Encerramos este trabalho listando algumas consequências do resultado principal deste capítulo, Teorema 4.2, e de resultados de capítulos anteriores cujo objetivo é ilustrar como o Índice de Conley, através do par de matrizes de conexão, resulta em alguma informação a respeito da dinâmica.

4.1 Pares de Matrizes de Conexão para o Par Atrator-Repulsor

Em [10], Richeson prova a existência de um par de matrizes de conexão para uma dada decomposição de Morse. Sua demonstração é de caráter puramente algébrico, utilizando resultados de Álgebra Linear e Homologia. Apresentamos aqui a demonstração para o caso de uma decomposição atratora-repulsora.

Como anteriormente, a cohomologia dos índices de Conley serão calculados usando coeficientes sobre um corpo.

Definição 4.1. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição*

atratora-repulsora. Seja $D^q = CH^q(A) \times CH^q(R)$ e considere a aplicação linear $\Delta^q : D^q \rightarrow D^q$ dada por

$$\Delta^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^q & 0 \end{pmatrix},$$

onde δ^q é a aplicação cobordo apresentada pela sequência exata longa da Proposição 2.13.

O resultado a seguir mostra que a aplicação linear Δ^q definida anteriormente é de fato o operador cobordo da Definição 3.29 e apresenta a aplicação linear d que faz com que (Δ, d) seja um par de matrizes de conexão para S .

Teorema 4.2. *Sejam (D, Δ) como na definição anterior. Então (D, Δ) é um complexo de cocadeia com $H^q(D) \cong CH^q(S)$. Além disso, existe uma aplicação de cocadeia $d : D \rightarrow D$ tal que sua induzida em nível de cohomologia, d^* , é conjugada a $\chi^*(S)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Primeiramente mostremos que (D, Δ) é um complexo de cocadeia. Note que

$$\Delta^{q-1} \circ \Delta^q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^{q-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, Δ é um operador cobordo. Temos que,

$$H^q(D) = \frac{\ker \Delta^q}{\operatorname{Im} \Delta^{q-1}}.$$

Mas $\ker \Delta^q \cong \ker \delta^q \times CH^q(R)$ e $\operatorname{Im} \Delta^{q-1} \cong \operatorname{Im} \delta^{q-1}$. Portanto,

$$H^q(D) \cong \frac{\ker \delta^q \times CH^q(R)}{\operatorname{Im} \Delta^{q-1}}.$$

Verifica-se facilmente que

$$\frac{\ker \delta^q \times CH^q(R)}{\operatorname{Im} \Delta^{q-1}} \text{ é isomorfo a } \ker \delta^q \times \frac{CH^q(R)}{\operatorname{Im} \delta^{q-1}}.$$

Pelo Teorema 2.13, temos que $\operatorname{Im} \rho^q \subset CH^q(S)$. Assim faz sentido fazer considerar o espaço quociente $CH^q(S)/\operatorname{Im} \rho^q$. É fácil ver que

$$\frac{CH^q(S)}{\operatorname{Im} \rho^q} \text{ é isomorfo a } \operatorname{Im} \iota^q.$$

Logo,

$$CH^q(S) \cong \text{Im } \rho^q \times \text{Im } \iota^q.$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$\text{Im } \rho^q \cong \frac{CH^q(R)}{\ker \rho^q}.$$

Como a sequência do Teorema 2.13 é exata, segue que

$$\text{Im } \rho^q \cong \frac{CH^q(R)}{\text{Im } \delta^{q-1}} \text{ e } \text{Im } \iota^q = \ker \delta^q.$$

Logo,

$$CH^q(S) \cong \frac{CH^q(R)}{\text{Im } \delta^{q-1}} \times \ker \delta^q \cong H^q(D).$$

E concluímos a primeira parte do teorema. Resta mostrar que existe uma aplicação $d : D \rightarrow D$ tal que sua induzida d^* é conjugada à $\chi^*(S)$.

Como $CH^q(S)$ é isomorfo a $\ker \delta^q \times \frac{CH^q(R)}{\text{Im } \delta^{q-1}}$, temos que $\chi^*(S)$ é conjugada à uma aplicação da forma

$$\begin{pmatrix} c^q & 0 \\ \overline{d_{RA}^q} & a^q \end{pmatrix},$$

onde c^q é a restrição de $\chi^q(A)$ a $\ker \delta^q$ e a^q é a aplicação sobre induzida por $\chi^q(R)$. O próximo passo é encontrar $d_{RA}^q : CH^q(A) \rightarrow CH^q(R)$ tal que induz $\overline{d_{RA}^q}$. Completando uma base de $\ker \delta^q$ para uma base de $CH^q(A)$ e utilizando $\overline{d_{RA}^q}$, um argumento simples de Álgebra Linear permite construir uma aplicação linear com a propriedade desejada.

Defina $d^q : D^q = CH^q(A) \times CH^q(R) \rightarrow CH^q(A) \times CH^q(R)$ por

$$\begin{pmatrix} \chi^q(A) & 0 \\ d_{RA}^q & \chi^q(R) \end{pmatrix}.$$

Também é simples demonstrar que d^q é uma aplicação de cocadeia, isto é,

$$d^{q+1} \circ \Delta^q = \Delta^q \circ d^q.$$

Além disso, d^* é conjugada à $\chi^*(S)$. □

4.2 Detectando Órbitas de Conexão

Como o par de matrizes de conexão implica a existência de órbitas de conexão? Usando o Teorema 4.2 e o Teorema 2.13, encerramos este trabalho com algumas situações em que é possível concluir a existência de órbitas de conexão e onde não é.

Corolário 4.3. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição atratora-repulsora. Se existe um número natural n tal que*

$$\text{Con}^q(A) = \begin{cases} (CH^q(A), \chi^q(A)), & q=n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

e

$$\text{Con}^q(R) = \begin{cases} (CH^q(R), \chi^q(R)), & q=n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

então $\delta^q = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$, $CH^q(S) = 0$, se $q \neq n$ e $CH^n(S) \cong CH^n(A) \times CH^n(R)$.

DEMONSTRAÇÃO. Em vista das hipóteses, a sequência exata longa da Proposição 2.13 torna-se

$$0 \xrightarrow{\delta^{n-1}} CH^n(R) \xrightarrow{\iota^{n-1}} CH^n(S) \xrightarrow{\rho^n} CH^n(A) \xrightarrow{\delta^n} CH^{n+1}(R) = 0$$

e

$$CH^{n+1}(R) = 0 \xrightarrow{\rho^{n+1}} CH^{n+1}(S) \xrightarrow{\iota^{n+1}} CH^{n+1}(A) = 0 \xrightarrow{\delta^{n+1}} 0.$$

A exatidão das sequências anteriores implica que $\text{Im } \iota^{n+1} = \ker \delta^{n+1}$. Mas $\delta^{n+1} = 0$. Portanto, $\text{Im } \iota^{n+1} = 0$. Por outro lado, $\ker \iota^{n+1} = \text{Im } \rho^{n+1}$. Como $\text{Im } \rho^{n+1} = 0$, temos que $\text{Im } \iota^{n+1} = 0$ e $\ker \iota^{n+1} = 0$. Sendo $\dim CH^{n+1}(S) = \dim \text{Im } \iota^{n+1} + \dim \ker \iota^{n+1}$, temos que $\dim CH^{n+1}(S) = 0$. Mas,

$$CH^n(S) \cong \ker \delta^n \times \frac{CH^n(R)}{\text{Im } \delta^{n-1}} \cong CH^n(A) \times CH^n(R),$$

pois $\text{Im } \delta^{n-1} = 0$. Para $q \neq n, n+1$, é imediato ver que $\delta^q = 0$ e $CH^q(S) = 0$. $\square$

Corolário 4.4. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) uma decomposição atratora-repulsora para S . Suponha que*

$$\text{Con}^q(A) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & q = 1, \\ 0, & q \neq 1, \end{cases}$$

e

$$\text{Con}^q(R) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & q = 1, \\ 0, & q \neq 1. \end{cases}$$

Se a aplicação d_{RA} é não nula, então $C(R, A; S) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo Corolário 4.3, $\delta^q = 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}$, $CH^q(S) = 0$, para todo $q \neq 1$ e $CH^1(S) = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Pelo Teorema 4.2, $\chi^*(S)$ é conjugada à

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ d_{RA} & \text{Id} \end{pmatrix},$$

onde $d_{RA} : CH^1(R) \rightarrow CH^1(A)$. Como $\dim CH^1(R) = \dim CH^1(A) = 1$ e $d_{RA} \neq 0$, temos que

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ d_{RA} & \text{Id} \end{pmatrix}$$

não é conjugada a

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix}.$$

Note que esta é a apresentação para $\chi^1(R) \times \chi^1(A)$. O resultado segue do Corolário 2.15. □

Observação 4.5. Se $d_{RA} = 0$ no corolário anterior, não temos garantias que $S = A \cup R$. ■

A conclusão do corolário anterior foi possível devido a especial escolha dos índices para $\text{Con}^*(A)$ e $\text{Con}^*(R)$. Fazendo uma simples mudança já não conseguimos a mesma conclusão. É o que vem a nos mostrar o exemplo a seguir.

Exemplo 4.6. Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) a decomposição atratora-repulsora para S tal que

$$\text{Con}^q(A) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, \text{Id}), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.1)$$

e

$$\text{Con}^q(R) = \begin{cases} (\mathbb{Q}, -\text{Id}), & \text{se } q = 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Procedendo como anteriormente, $\chi^*(S)$ será conjugada à

$$\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ d_{RA} & -\text{Id} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde $d_{RA} : CH^1(R) \rightarrow CH^1(A)$. Independente de quem é d_{RA} a matriz em (4.3) sempre é conjugada à $\chi^*(A) \times \chi^*(R)$.

É fácil construir exemplos onde os índices de A e R são como em (4.1) e (4.2), respectivamente e $C(R, A; S) \neq \emptyset$; e exemplos em que $\text{Con}^*(A)$, $\text{Con}^*(R)$ são novamente como acima, mas $S = A \cup R$. ■

No próximo resultado $\sigma(A)$ representa o conjunto dos autovalores de uma aplicação linear A .

Corolário 4.7. *Sejam S um conjunto invariante isolado e (A, R) sua decomposição atratora-repulsora. Suponha que para algum um número natural n*

$$\text{Con}^q(A) = \begin{cases} (CH^q(A), \chi^q(A)), & q = n, \\ 0, & q \neq n, \end{cases}$$

e

$$\text{Con}^q(R) = \begin{cases} (CH^q(R), \chi^q(R)), & q = n, \\ 0, & q \neq n. \end{cases}$$

Se $\sigma(\chi^n(S))$ não está contido na união disjunta de $\sigma(\chi^n(A))$ com $\sigma(\chi^n(R))$, então $C(R, A; S) \neq \emptyset$.

DEMONSTRAÇÃO. Nesta condições $\chi^n(S)$ não é conjugada a $\chi^n(A) \times \chi^n(R)$ e o resultado segue do Corolário 2.15. □

O resultado a seguir foi provado por Reineck [11] para o caso de fluxos contínuos. Apresentamos a prova para o caso de sistemas dinâmicos discretos.

Corolário 4.8. *Sejam $\mathcal{M}(\mathcal{P}, <)$ uma decomposição de Morse para um conjunto invariante isolado, e (Δ, d) um par de matrizes de conexão. Suponha $p, q \in \mathcal{P}$ tais que $p < q$ e $\{p, q\}$ seja um intervalo. Suponha ainda que a aplicação $\Delta_{pq} : CH^*(M_q) \rightarrow CH^*(M_p)$ seja não nula. Então existe conexão entre M_q e M_p .*

DEMONSTRAÇÃO. Note que a aplicação $\Delta(\{p, q\})$ é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta_{pq} & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\Delta_{pq} : CH^*(M_q) \rightarrow CH^*(M_p)$ é uma aplicação não nula. Verifica-se facilmente que $\ker \Delta(\{p, q\}) \cong CH^*(M_p)$ e $\text{Im } \Delta(\{p, q\}) \cong CH^*(M_p)$. Logo, $H^*(C\Delta(\{p, q\})) \cong$

0. Como (Δ, d) é um par de matrizes de conexão, então

$$CH^*(M_{\{p,q\}}) \cong 0.$$

Mas se $M_p = \emptyset$ ou $M_q = \emptyset$, então $\Delta_{pq} = 0$. Portanto, $M_p \neq \emptyset$ e $M_q \neq \emptyset$. Suponha que $M_{\{p,q\}} = M_p \cup M_q$. Notando que esta união é disjunta, usando o Corolário 2.14 juntamente com o Teorema 4.2, temos que $\Delta(\{p, q\}) = 0$. O que é uma contradição. Logo, $C(M_p, M_q, M_{\{p,q\}}) \neq \emptyset$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] L. Arnold, C. Jones, K. Mischaikow, G. Raugel, *Dynamical Systems Montecatini Terme 1994*, R. Johnson, ed., Lect. Notes Math. 1609, Springer 1995.
- [2] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., 38, AMS, Providence, 1978.
- [3] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1972.
- [4] J. Franks e D. Richeson, Shift equivalence and the Conley index, *Trans. AMS*, a aparecer.
- [5] R. Franzosa, The connection matrix theory for Morse decompositions, *Trans. AMS* **311**, (1989) 561-592.
- [6] M. Mrozek, Leray functor and cohomological Conley index for discrete dynamical systems, *Trans. AMS*, **318** (1990) 149-178.
- [7] J. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [8] J. Palis e W. de Melo, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, 1978.
- [9] D. Richeson, *Connection Matrix Pairs for the Discrete Conley Index*, tese de doutorado, Northwestern University, 1998.
- [10] D. Richeson, Connection matrix pairs for the discrete Conley index, *preprint*.
- [11] J. Reineck, The connection matrix in Morse-Smale flows, *Trans. AMS*, **322** (1990) 523-544.
- [12] K. P. Rybakowski, *The Homotopy Index and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, 1987.

- [13] E. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.