Sequência exata de Bloch-Wigner e K-teoria algébrica

David Martín Carbajal Ordinola

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

David Martín Carbajal Ordinola

Sequência exata de Bloch-Wigner e K-teoria algébrica

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Behrooz Mirzaii

USP – São Carlos
Outubro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ordinola, David Martín Carbajal
OC263s Sequência exata de Bloch-Wigner e K-teoria algébrica / David Martín Carbajal Ordinola; orientador Behrooz Mirzaii. - São Carlos - SP, 2016.
111 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Sequência exata de Bloch-Wigner. 2. K-grupos de Quillen. 3. K-teoria algébrica. 4. Sequências espectrais.. I. Mirzaii, Behrooz, orient. II. Título.

David Martín Carbajal Ordinola

The Bloch-Wigner exact sequence and algebraic K-theory

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Behrooz Mirzaii

USP – São Carlos
October, 2016

Dedico este trabalho:

- *a Deus, pela fé que me mantém vivo e fiel à vida honesta de trabalho e de estudo;*
- *à minha vó Alvina Quepuy M., por sua paciência, por seu amor e por valorizar meu esforço; estarei eternamente grato;*
- *à minha familia que soube entender a minha ausência nos muitos momentos desde que ingressei no mestrado no exterior até a conclusão desta dissertação;*
- *a todos os professores do ICMC que me apoiaram e acreditaram em mim durante o mestrado e no momento de escrever a dissertação;*
- *ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC), por acreditar no meu profissionalismo e trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação contou com a disponibilidade, apoio e colaboração de um grupo de pessoas, e para elas o meu reconhecimento nesta página, sobretudo por me incentivarem a ultrapassar constrangimentos nesta fase difícil da minha vida.

Manifesto a minha gratidão ao Professor Doutor Behrooz Mirzaii, orientador desta dissertação, por sua paciência e confiança demonstrada desde nosso primeiro encontro, pelas críticas, conselhos e, sobretudo pelo estímulo e ajuda na concretização desta dissertação.

Agradeço em particular a todos os meus professores do mestrado, cujos ensinamentos me permitiram conduzir esta dissertação, proporcionando-me experiências muito significativas, pois dispensaram parte de seu tempo para responder minhas dúvidas.

Agradeço a minha família que me faz acreditar todos os dias que vale a pena estudar no exterior, investindo muito tempo nesta árdua tarefa e assim oferecer o melhor de mim. Eles constituem minha razão de querer ser sempre melhor.

Finalmente, agradeço aos meus amigos peruanos e brasileiros que me ajudaram a cumprir com sucesso o mestrado e ofereceram sempre seu apoio ao longo destes dois anos.

David Martín Carbajal Ordinola

"It is not knowledge, but the act of learning, not possession but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment. When I have clarified and exhausted a subject, then I turn away from it, in order to go into darkness again..."

(Johann Carl Friedrich Gauss)

RESUMO

DAVID M. CARBAJAL ORDINOLA. **Sequência exata de Bloch-Wigner e K-teoria algébrica**. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

A K-teoria algébrica é um ramo da álgebra que associa para cada anel com unidade R, uma sequência de grupos abelianos chamados os $n-$ésimos $K-$grupos de R. Em 1970, Daniel Quillen dá uma definição geral dos $K-$grupos de um anel qualquer R a partir da $+$-construção do espaço classificante $BGL(R)$. Por outro lado, considerando R um anel comutativo, obtém-se também a definição dos $K-$grupos de Milnor $K_n^M(R)$.

Usando o produto dos $K-$grupos de Quillen e Milnor e suas estruturas anti-comutativas, definimos o seguinte homomorfismo

$$\tau_n : K_n^M(R) \to K_n(R).$$

Mostraremos nesta dissertação que se R é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $R/\mathfrak{m}$ é um corpo infinito, então esse homomorfismo é um isomorfismo para $0 \leq n \leq 2$. Em geral τ_n nem sempre é injetor ou sobrejetor. Por exemplo quando $n = 3$, sabe-se que τ_3 não é sobrejetor e definimos a parte indecomponível de $K_3(R)$ como sendo o grupo

$$K_3^{\text{ind}}(R) := \text{coker}\left(K_3^M(R) \xrightarrow{\tau_3} K_3(R)\right).$$

Usando alguns resultados de homologia dos grupos lineares, nesta dissertação mostraremos a existência da sequência exata de Bloch-Wigner para corpos infinitos. Esta sequência dá uma descrição explícita da parte indecomponível do terceiro $K-$grupo de um corpo infinito.

Teorema (Sequência exata de Bloch-Wigner)**.** Seja F um corpo infinito e seja $\mathfrak{p}(F)$ o grupo de pre-Bloch de F, isto é, o grupo quociente do grupo abeliano livre gerado pelos símbolos $[a]$, $a \in F^\times - \{1\}$, pelo subgrupo gerado por elementos da forma

$$[a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-b}\right]$$

com $a, b \in F^\times - \{1\}$, $a \neq b$. Então temos a sequência exata

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^{\sim} \to K_3^{\text{ind}}(F) \to \mathfrak{p}(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma \to K_2(F) \to 0$$

onde $(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma := (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)/\langle a \otimes b + b \otimes a \mid a, b \in F^\times \rangle$ e $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^{\sim}$ é a única extensão não trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ se $\text{char}(F) \neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito e é $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ caso contrário. O homomorfismo $\mathfrak{p}(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma$ é definido por $[a] \mapsto a \otimes (1-a)$.

O estudo da sequência exata de Bloch-Wigner é justificada pela relação entre o segundo e terceiro $K-$grupo de um corpo F.

Palavras-chave: Sequência exata de Bloch-Wigner, K-grupos de Quillen, K-teoria algébrica, Sequências espectrais..

ABSTRACT

DAVID M. CARBAJAL ORDINOLA. **Sequência exata de Bloch-Wigner e K-teoria algébrica**. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The algebraic K-theory is a branch of algebra that associates to any ring with unit R a sequence of abelian groups called n-th K-groups of R. In 1970, Daniel Quillen gave a general definition of K-groups of any ring R using the $+$-construction of the classifying space $BGL(R)$. On the other hand, if we consider a commutative ring R, we can define the Milnor's K-groups, $K_n^M(R)$, of R.

Using the product of the Quillen and Milnor's K-groups and their anti-commutative structure, we define a natural homomorphism

$$\tau_n : K_n^M(R) \to K_n(R).$$

In this dissertation, we show that if R is a local ring with maximal ideal $\mathfrak{m}$ such that $R/\mathfrak{m}$ is infinite, then this map is an isomorphism for $0 \le n \le 2$. But in general τ_n is not injective nor is surjective. For example when $n = 3$, we know that τ_3 is not surjective and define the indecomposable part of $K_3(R)$ as the group

$$K_3^{\text{ind}}(R) := \text{coker}\left(K_3^M(R) \xrightarrow{\tau_3} K_3(R)\right).$$

Using some results about the homology of linear groups, in this dissertation we will prove the Bloch-Wigner exact sequence over infinite fields. This exact sequence gives us a precise description of the indecomposable part of the third K-group of an infinite field.

THEOREM (Bloch-Wigner exact sequence)**.** Let F be an infinite field and let $\mathfrak{p}(F)$ be the pre-Bloch group of F, that is, the quotient group of the free abelian group generated by symbols $[a]$, $a \in F^\times - \{1\}$, by the subgroup generated by the elements of the form

$$[a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-b}\right]$$

with $a, b \in F^\times - \{1\}$, $a \neq b$. Then we have the exact sequence

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^\sim \to K_3^{\text{ind}}(F) \to \mathfrak{p}(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma \to K_2(F) \to 0$$

where $(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma := (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)/\langle a \otimes b + b \otimes a \mid a, b \in F^\times\rangle$ and $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^\sim$ is the unique non trivial extension of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ by $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ if $\text{char}(F) \neq 2$ and $\mu_{2^\infty}(F)$ is finite and is $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ otherwise. The homomorphism $\mathfrak{p}(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma$ is defined by $[a] \mapsto a \otimes (1-a)$.

As it is shown, the study of the Bloch-Wigner exact sequence is also justified by the relation between the second and third K-group of a field F.

Key-words: Bloch-Wigner exact sequence, Quillen's K-groups, Algebraic K-theory, Spectral sequences..

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo da sequência exata de Bloch-Wigner é justificada pelo estudo do segundo e terceiro K-grupos de um anel local. A sequência exata de Bloch-Wigner aparece em diferentes áreas da matemática, como a teoria dos números, a geometria hiperbólica em dimensão três, a K-teoria algébrica, etc.

A K-teoria algébrica é um ramo da álgebra que generaliza o estudo da álgebra linear, associando para cada anel com unidade R uma sequência de grupos abelianos $K_n(R)$ chamados os n-ésimos K-grupos de R.

Estes grupos foram definidos por Daniel Quillen em 1970 a partir da introdução da $+-$construção do espaço classificante $BGL(R)$. Sabe-se que estes grupos têm um produto com estrutura anti-comutativa.

Nesta dissertação, vamos provar que se R é um anel local com corpo residual infinito, então

$$K_2(R) \simeq \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a \otimes (1-a) : a \in R^\times - \{1\} \rangle}.$$

Isto é uma generalização de Van der Kallen [13] do teorema de Matsumoto que dá uma presentação do segundo K-grupo de um corpo. Generalizando essas ideias, Milnor define novos K-grupos, agora chamados $K-$grupos de Milnor. Assim para qualquer anel comutativo R e para todo $n \geq 0$, agora podemos definir os K-grupos de Milnor $K_n^M(R)$ e definir neles um produto também com estrutura anti-comutativa.

Usando o produto dos K-grupos de Quillen e Milnor e suas estruturas anti-comutativas, definimos de maneira indutiva um homomorfismo

$$\tau_n : K_n^M(R) \to K_n(R).$$

Nesta dissertação estudaremos estes homomorfismos para $0 \leq n \leq 3$. Se R for um anel local com corpo residual infinito, demonstraremos que τ_n é um isomorfismo para $0 \leq n \leq 2$. Mas em geral este homomorfismo nem sempre é injetor ou sobrejetor. No caso $n = 3$ estudaremos o grupo

$$K_3^{\text{ind}}(F) := \text{coker}\left(K_3^M(F) \to K_3(F)\right),$$

chamado a parte indecomponível de $K_3(F)$, onde F é um corpo infinito.

A sequência exata de Bloch-Wigner dá uma descrição explícita da parte indecomponível do terceiro K-grupo de um corpo infinito F. Na forma original, demonstrada por Bloch e Wigner separadamente, o resultado garante a existência de uma sequência exata para um corpo algebricamente fechado k de característica zero, da forma

$$0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to K_3^{\text{ind}}(k) \to \mathfrak{p}(k) \to k^\times \wedge k^\times \to K_2(k) \to 0,$$

onde $\mathfrak{p}(k)$ é o grupo pré-Bloch de k que é o grupo quociente do grupo abeliano livre com base nos símbolos $[a]$, $a \in k^\times - \{1\}$, pelo subgrupo gerado pelos elementos da forma

$$[a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-b}\right],$$

onde $a, b \in k^\times - \{1\}$.

Em 1991, A. A. Suslin [12] generalizou esta sequência exata sobre qualquer corpo infinito, mostrando que para qualquer corpo infinito F temos a sequência de Bloch-Wigner na forma

$$0 \to \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^\sim \to K_3^{\text{ind}}(F) \to \mathfrak{p}(F) \to \left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)_\sigma \to K_2(F) \to 0,$$

onde $(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma := F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times / \langle a \otimes b + b \otimes a \mid a, b \in F^\times \rangle$, e $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^\sim$ é a única extensão não trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ se $\text{char}(F) \neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito e

$$\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))^\sim := \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$$

caso contrário.

O objetivo principal desta dissertação é apresentar uma prova deste resultado obtido por Suslin, e realizamos isso com estudo da homologia do grupo linear geral.

No primeiro capítulo definiremos as principais ferramentas da álgebra homológica usadas nesta dissertação, como os complexos de cadeias, a homologia de um grupo e as sequências espectrais.

No capítulo 2 definimos e estudamos os K-grupos $K_0(R)$, $K_1(R)$ e $K_2(R)$, quando R for um anel local. Como resultado principal deste capítulo mostraremos o teorema de Van der Kallen-Matsumoto [Teorema 2.2] que prova que $K_2(R) \simeq K_2^M(R)$, quando R for um anel local com corpo residual infinito. Para fazer isso, introduziremos e estudaremos a sequência espectral

$$E^1_{p,q} = H_q(GL_2(R), C_p(R^2)) \Rightarrow H_{p+q}(GL_2(R)),$$

onde $C_p(R^2)$ é o grupo abeliano livre gerado pelas $(p+1)$-uplas $(\langle v_0\rangle,\ldots\langle v_p\rangle)$ tal que para todo $i\neq j$, $R^2=\langle v_i,v_j\rangle$.

No capítulo 3, após uma breve introdução de algumas construções sobre espaços topológicos; especialmente os $CW-$complexos, os grupos de homotopia e a $+-$construção de um espaço; daremos as definições dos K-groups $K_n(R)$ e $K_n^M(R)$ e estudaremos seus produtos e suas estruturas anti-comutativas. Além disso, construiremos indutivamente o homomorfismo natural $\tau_n : K_n^M(R)\to K_n(R)$. Especialmente daremos uma descrição do grupo $K_3^{\text{ind}}(R)$ [Corolário 3.2] em termos da terceira homologia do grupo linear especial $SL(R)$, quando R for um anel local com corpo residual infinito.

No capítulo 4, estudaremos primeiro a terceira homologia dos grupos GL_2 e GL_3, e usando os resultados obtidos nesta parte mostraremos o teorema principal desta dissertação que garante a existência da sequência exata de Bloch-Wigner [Teorema 4.4] para o corpo infinito.

CAPÍTULO

1

HOMOLOGIA DE GRUPOS

Nesse capítulo falamos sobre à álgebra homológica, conceitos fundamentais e toda a nomenclatura necessária para os capítulos subsequentes. Iniciamos com a definição de homologia de complexos e suas propriedades. Depois partimos para algumas noções como a homologia de grupos e damos alguns exemplos. Apresentaremos também as noções mais importantes das sequências espectrais, que é a ferramenta algébrica de maior relevância nesse trabalho, e finalmente alguns resultados da homologia dos grupos lineares.

1.1 Complexos de cadeias

Seja R um anel (não necessariamente comutativo) com unidade. Um complexo de cadeias de R-módulos (à direita ou à esquerda) $(C_\bullet, d_\bullet)$ é uma sequência de R-módulos (à direita ou à esquerda) $C_\bullet = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e uma família de R-homomorfismos $d_\bullet = \{d_n : C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, tais que a composição de quaisquer dois morfismos consecutivos é zero, isto é, para cada n

$$d_n \circ d_{n+1} = 0.$$

É fácil verificar que Im $d_{n+1} \subseteq$ Ker d_n. Denotamos o complexo de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$ também por

$$C_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots .$$

Definimos o $n-$ésimo grupo de homologia do complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ como o quociente

$$H_n(C_\bullet) := \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n+1}}.$$

Se $H_n(C_\bullet) = 0$ para todo n, então dizemos que o complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ é exato.

Exemplo 1.1. Considere R e S anéis com unidade.

1) Para um R-módulo M, definimos o complexo $(M_\bullet, d_\bullet)$ como sendo $M_n = 0$ para todo $n \neq 0$ e $M_0 = M$. Definimos também os R-homomorfismos do complexo como sendo $d_n = 0$

para todo n, e denotamos o complexo $(M_\bullet, d_\bullet)$ como

$$M_\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Em particular, é usual considerar o complexo de cadeia nulo como $0 := (0_\bullet, 0_\bullet)$.

2) Seja $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de cadeias de R-módulos e seja $F : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_S\mathrm{Mod}$ um funtor da categoria de R-módulos na categoria de S-módulos. Então $(F(C_\bullet), F(d_\bullet))$ definido como

$$F(C_\bullet)_n := F(C_n), \qquad F(d_\bullet)_n := F(d_n) : F(C_n) \to F(C_{n-1}),$$

é um complexo de cadeias de S-módulos.

Um complexo de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$ é dito não negativo, se $C_n = 0$ para todo $n < 0$ e escreve-se

$$C_\bullet : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

Sejam $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de cadeias de R-módulos. Um morfismo de complexos $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ é uma família de R-homomorfismos $\{\alpha_n : C_n \to C'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\alpha_{n-1} \circ d_n = d'_n \circ \alpha_n$, isto é para todo $n \in \mathbb{Z}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \\ C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Assim, um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ induz para cada $n \in \mathbb{Z}$ um homomorfismo

$$\alpha_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet), \qquad x + \mathrm{Im}\, d_{n+1} \longmapsto \alpha_n(x) + \mathrm{Im}\, d'_{n+1}, \qquad x \in \mathrm{Ker}\, d_n.$$

Se $\beta_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C''_\bullet, d''_\bullet)$ é outro morfismo de complexos, então $(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$. Em particular o morfismo identidade $id_{C_\bullet} : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$ induz a identidade nos grupos de homologia

$$id_* = id_{H_n(C_\bullet)} : H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet).$$

Considere agora $(C_\bullet, d_\bullet), (C'_\bullet, d'_\bullet)$ e $(C''_\bullet, d''_\bullet)$ complexos de cadeias de R-módulos. Uma sequência curta de complexos é formada por morfismos de complexos de cadeias

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} C''_\bullet \longrightarrow 0,$$

tais que $\beta_n \circ \alpha_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta sequência curta é dita exata se para todo n a sequência curta de R-módulos

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\beta_n} C''_n \longrightarrow 0$$

é exata. Agora, estabeleceremos a existência da sequência exata longa de homologia associada a uma sequência exata curta de complexos de cadeias.

TEOREMA 1.1. *Seja* $0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\alpha_\bullet} C_\bullet \xrightarrow{\beta_\bullet} C''_\bullet \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de complexos de cadeias de R-módulos. Então existe uma sequência exata longa de grupos de homologia*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_{n+1}(C'_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_{n+1}(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_{n+1}(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\beta_*} H_n(C''_\bullet) \to \cdots .$$

Os homomorfismos δ são chamados homomorfismos conectantes ou de fronteira. A sequência longa anterior é natural, no sentido que se o seguinte diagrama de sequências exatas curtas de complexos de cadeias de R-módulos é comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_\bullet \arrow[r, "\alpha_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r, "\beta_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] & D_\bullet \arrow[r, "\phi_\bullet"] & D''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

então o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(C_\bullet) \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "g_*"] & H_{n+1}(C''_\bullet) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h_*"] & H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(D_\bullet) \arrow[r, "\phi_*"] & H_{n+1}(D''_\bullet) \arrow[r, "\delta'"] & H_n(D'_\bullet) \arrow[r, "\varphi_*"] & H_n(D_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} .$$

Demonstração. Veja-se [14, Teorema 4.2.4]. □

Sejam $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ morfismos de complexos de cadeias de R-módulos. Dizemos que $\alpha_\bullet$ é homotópica (algebricamente) a $\beta_\bullet$ se para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe um homomorfismo $s_n : C_n \to C'_{n+1}$ tal que

$$\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n.$$

Dizemos que $\alpha_\bullet$ é homotopicamente nula se $\alpha_\bullet$ é homotópica ao morfismo nulo

$$0 := 0_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet), \qquad x \longmapsto 0.$$

EXEMPLO 1.2. Seja $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de cadeias. Se a identidade $id_{C_\bullet} : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$ é homotopicamente nula, então para cada $n \in \mathbb{Z}$ existe um homomorfismo $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tal que para todo $x \in \operatorname{Ker} d_n$

$$x = id_{C_n}(x) = d_{n+1}(s_n(x)) + s_{n-1}(d_n(x)) = d_{n+1}(s_n(x)) \in \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Portanto, o complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ é exato.

A seguinte proposição estabelece que dois morfismos de complexos homotópicos induzem o mesmo homomorfismo entre os grupos de homologia.

PROPOSIÇÃO 1.1. *Sejam $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ morfismos de complexos de cadeias de R-módulos. Se $\alpha_\bullet$ é homotópica a $\beta_\bullet$, então*

$$\alpha_* = \beta_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet).$$

Demonstração. Veja-se [14, Teorema 4.3.3]. □

EXEMPLO 1.3. Sejam $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ morfismos de complexos de cadeias de R-módulos e seja $F : {}_R\text{Mod} \to {}_S\text{Mod}$ um funtor. Então

$$F(\alpha_\bullet), F(\beta_\bullet) : (F(C_\bullet), F(d_\bullet)) \to (F(C'_\bullet), F(d'_\bullet)),$$

são morfismos de complexos de cadeias de S-módulos. Se $\alpha_\bullet$ é homotópica a $\beta_\bullet$ e F é um funtor aditivo, isto é para todo R-módulo M e N, a aplicação

$$F : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_S(F(M), F(N)), \qquad f \to F(f),$$

é um homomorfismo de grupos abelianos, então $F(\alpha_\bullet)$ é homotópica a $F(\beta_\bullet)$.

O seguinte lema permite estender uma certa família de $R-$homomorfismos para um morfismo de complexo de cadeias de forma única, a menos de homotopia algébrica.

LEMA 1.1. *Sejam $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de cadeias de R-módulos. Seja $r \in \mathbb{Z}$ e considere $\{\alpha_n : C_n \to C'_n\}_{n \le r}$ uma família de R-homomorfismos tais que $d'_n \circ \alpha_n = \alpha_{n-1} \circ d_n$ para todo $n \le r$. Se C_n é um R-módulo projetivo para todo $n > r$ e $H_n(C'_\bullet) = 0$ para todo $n \ge r$, então a família de R-homomorfismos α_n é estendida para um morfismo de complexos de cadeias de R-módulos $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ e $\alpha_\bullet$ é única a menos de homotopia, isto é qualquer duas extensões da família $\{\alpha_n\}_{n \le r}$ são homotópicas.*

Demonstração. Veja-se [1, Lema 7.4, Ch. I]. □

Agora estudaremos complexos de cadeias associados a um R-módulo dado. Seja M um R-módulo. Uma resolução de M é uma sequência exata da forma

$$C_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M : \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

Se para todo $n \ge 0$, C_n é um R-módulo projetivo, então $C_\bullet \to M$ é dita uma resolução projetiva de M sobre R. Se para todo $n \ge 0$, C_n é um R-módulo livre (ou plano), então $C_\bullet \to M$ é dita uma resolução livre (ou plana) de M sobre R.
O seguinte lema garante a existência de resoluções projetivas para cada $R-$módulo e o teorema a seguir as relaciona de forma única, a menos de homotopia.

LEMA 1.2. *Todo R-módulo M tem uma resolução livre, e logo também tem uma resolução projetiva e uma resolução plana.*

Demonstração. Veja-se [15, Lema 2.2.5]. □

TEOREMA 1.2. *Sejam $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ e $F'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} M$ resolucões projetivas do R-módulo M. Então existe um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (F_\bullet, d_\bullet) \to (F'_\bullet, d'_\bullet)$ tal que $\varepsilon' \circ \alpha_\bullet = \varepsilon$. O morfismo de complexos $\alpha_\bullet$ é único a menos de homotopia.*

Demonstração. Veja-se [1, Teorema 7.5, Ch. I]. □

Um morfismo de complexos de cadeias $\alpha_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ é dito uma equivalência homotópica se existe um morfismo de complexos $\beta_\bullet : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$ tal que

i) $\beta_\bullet \circ \alpha_\bullet$ é homotópica a $id_{C_\bullet} : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C_\bullet, d_\bullet)$,

ii) $\alpha_\bullet \circ \beta_\bullet$ é homotópica a $id_{C'_\bullet} : (C'_\bullet, d'_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$.

Por outro lado, se $\alpha_* : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$ é um isomorfismo para todo n, então $\alpha_\bullet$ é dita uma equivalência fraca. É fácil ver que toda equivalência homotópica é uma equivalência fraca.

TEOREMA 1.3. *Sejam $F_\bullet \to M$ e $F'_\bullet \to M$ resoluções projetivas (à direita) do $R-$módulo M. Então existe um morfismo de complexos $\alpha_\bullet : (F_\bullet, d_\bullet) \to (F'_\bullet, d'_\bullet)$ tal que para qualquer R-módulo à esquerda N o morfismo*

$$\alpha_\bullet \otimes id_M : F_\bullet \otimes_R N \to F'_\bullet \otimes_R N.$$

é uma equivalência fraca. Em particular, $H_n(F_\bullet \otimes_R N) \cong H_n(F'_\bullet \otimes_R N)$ para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Veja-se [1, Teorema 8.6, Ch. I]. □

Seja $F_\bullet \to M$ uma resolução projetiva do R-módulo à direita M. Definimos para qualquer R-módulo à esquerda N e para todo $n \geq 0$, o $R-$módulo

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n\left(F_\bullet \otimes_R N\right).$$

Pelo Teorema (1.3), o $R-$módulo $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ é independente da escolha da resolucão projetiva de M. Os seguintes exemplos mostram as propriedades mais úteis da definição anterior.

EXEMPLO 1.4. Se M e N são $R-$módulos (à direita e à esquerda respetivamente), então é fácil ver que $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N$.

EXEMPLO 1.5. Seja M um $R-$módulo à direita e seja $\{N_i\}_{i \in I}$ uma família de R-módulos à esquerda. Então para todo $n \geq 0$

$$\mathrm{Tor}_n^R\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^R\left(M, N_i\right).$$

Mais geralmente, se $\{N_i\}_{i \in I}$ é uma família de R-módulos à esquerda tais que I é um sistema direto, então para qualquer R-módulo à direita M e para todo $n \geq 0$ temos

$$\mathrm{Tor}_n^R\left(M, \varinjlim N_i\right) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_n^R(M, N_i).$$

EXEMPLO 1.6. Seja A um grupo abeliano. Definimos o subgrupo de torção de A como sendo

$$tA := \{a \in A : \text{ existe } n > 0 \text{ tal que } na = 0\}.$$

Dizemos que A é um grupo de torção se $A = tA$ e dizemos que A é livre de torção se $tA = 0$. Não é difícil verificar que $t(A/tA) = 0$, logo A/tA é livre de torção.

Sejam A e B grupos abelianos. Dado que todo grupo abeliano é imagem homomorfica de um grupo abeliano livre obtemos uma resolução projetiva $F_\bullet \to A$ tal que $F_n = 0$ para todo $n \geq 2$, então $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$ para $n \geq 2$. Além disso se A e B são grupos abelianos finitamente gerados $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \cong (tA) \otimes_{\mathbb{Z}} (tB)$ é um grupo de torção (veja-se [14, Corolário 6.3.16]).

De forma análoga ao caso dos grupos de homologia de uma sequência exata de complexos, estabeleceremos agora a existência de sequências exatas longas dos R-módulos $Tor_n^R(-,-)$ associadas respetivamente a sequências exatas curtas de R-módulos.

TEOREMA 1.4. *Seja* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de R-módulos. Então para qualquer R-módulo M, existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to Tor_{n+1}^R(M,N'') \xrightarrow{\delta} Tor_n^R(M,N') \xrightarrow{\alpha_*} Tor_n^R(M,N) \xrightarrow{\beta_*} Tor_n^R(M,N'') \xrightarrow{\delta} Tor_{n-1}^R(M,N') \to \cdots .$$

Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\beta'} M'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata curta de R-módulos. Então para qualquer R-módulo N, existe uma sequência exata longa*

$$\cdots \to Tor_{n+1}^R(M'',N) \xrightarrow{\delta} Tor_n^R(M',N) \xrightarrow{\alpha'_*} Tor_n^R(M,N) \xrightarrow{\beta'_*} Tor_n^R(M'',N) \xrightarrow{\delta} Tor_{n-1}^R(M',N) \to \cdots .$$

Demonstração. Veja-se [9, Teorema 6.21]. □

Com uso destas sequências exatas longas obtemos a seguinte propriedade que permite estudar melhor o grupo de torsão $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ quando A e B são grupos abelianos.

LEMA 1.3. *Se A e B são grupos abelianos, então* $Tor_1^{\mathbb{Z}}(A,B) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}}(tA,tB)$.

Demonstração. Veja-se [4, Capítulo 5, Seção 6]. □

Os seguintes teoremas ao final desta seção serão muito importantes nas seguintes seções, assim como nos próximos capítulos.

TEOREMA 1.5 (Fórmula de Künneth)**.** *Seja* $(P_\bullet, d_\bullet)$ *um complexo de cadeias de R-módulos planos tais que para todo n,* $d_n(P_n) \subset P_{n-1}$ *é um R-módulo plano. Então para todo n e para todo R-módulo M, existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow H_n(P_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(P_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow Tor_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), M) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Veja-se [15, Teorema 3.6.1]. □

TEOREMA 1.6 (Teorema dos Coeficientes Universais)**.** *Seja* $(P_\bullet, d_\bullet)$ *um complexo de cadeias de* $\mathbb{Z}$*-módulos livres. Então para cada n e cada* $\mathbb{Z}$*-módulo M, a fórmula de Künneth cinde e obtemos uma decomposição (não canônica)*

$$H_n(P_\bullet \otimes M) \cong (H_n(P_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(P_\bullet), M).$$

Demonstração. Veja-se [15, Teorema 3.6.2]. □

Sejam $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de R-módulos e considere os R-módulos

$$\left(C_\bullet \otimes C'_\bullet\right)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q, \tag{1.1}$$

e os R-homomorfismos

$$\partial_n : \left(C_\bullet \otimes C'_\bullet\right)_n \longrightarrow \left(C_\bullet \otimes C'_\bullet\right)_{n-1}, \qquad x \otimes y \longmapsto d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d'_q(y),$$

onde $p+q=n$, $x \in C_p$, $y \in C'_q$. Claramente $\partial_{n-1} \circ \partial_n(x \otimes y) = 0$ e portanto $(C_\bullet \otimes C'_\bullet, \partial_\bullet)$ é um complexo de R-módulos, chamado complexo produto de $C_\bullet$ e $C'_\bullet$. Além disso, se $d_p(x) = 0$ e $d'_q(y) = 0$, então $\partial_n(x \otimes y) = d_p(x) \otimes y + (-1)^p x \otimes d'_q(y) = 0$. Assim temos um homomorfismo bem definido

$$H_p(C_\bullet) \otimes H_q(C'_\bullet) \longrightarrow H_{p+q}(C_\bullet \otimes C'_\bullet), \qquad \left(x + \text{Im } d_{p+1}\right) \otimes \left(y + \text{Im } d'_{q+1}\right) \longmapsto x \otimes y + \text{Im } \partial_{n+1},$$

onde $x \in \text{Ker } d_p$, $y \in \text{Ker } d'_q$.

TEOREMA 1.7. *Sejam $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de cadeias de R-módulos (à direita e à esquerda respetivamente). Se P_n e $d_n(P_n)$ são R-módulos planos para todo n, então existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(P_\bullet) \otimes_R H_q(Q_\bullet) \longrightarrow H_n(P_\bullet \otimes Q_\bullet) \longrightarrow \bigoplus_{p'+q'=n-1} Tor_1^R(H_{p'}(P_\bullet), H_{q'}(Q_\bullet)) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Veja-se [15, Teorema 3.6.3]. □

COROLÁRIO 1.1 (Fórmula de Künneth para complexos)**.** *Sejam $(P_\bullet, d_\bullet)$ e $(Q_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de cadeias de $\mathbb{Z}-$módulos com P_n um $\mathbb{Z}$-módulo livre para cada n. Então obtemos a decomposição (não canônica)*

$$H_n(P_\bullet \otimes Q_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} H_p(P_\bullet) \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(Q_\bullet)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{p'+q'=n-1} Tor_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{p'}(P_\bullet), H_{q'}(Q_\bullet)\right)\right).$$

Demonstração. O resultado segue do Teorema (1.7) e do fato que os $\mathbb{Z}-$submódulos de $\mathbb{Z}-$módulos livres são livres. □

1.2 Homologia de Grupos

Seja G um grupo (multiplicativo). O anel de grupo de G, denotado $\mathbb{Z}G$, é o $\mathbb{Z}-$módulo livre gerado pelos elementos de G

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z} \cdot g,$$

junto com a multiplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G. \\ \left(\sum n_i g_i, \sum n_j g_j\right) &\longmapsto \sum n_i n_j g_i g_j. \end{aligned}$$

Definimos um G-módulo à esquerda como sendo um grupo abeliano A junto com uma ação de G sobre A tal que

$$g \cdot (a+b) = g \cdot a + g \cdot b.$$

Se A é um G-módulo, então temos um homomorfismo de grupos

$$\sigma : G \longrightarrow \operatorname{Aut} A, \quad g \longmapsto \sigma_g \in \operatorname{End} A,$$

onde $\sigma_g : A \to A$, $g \mapsto g \cdot a$. Portanto existe uma única extensão $\overline{\sigma} : \mathbb{Z}G \to \operatorname{End} A$, $\sigma\left(\sum n_g g\right) = \sum n_g \sigma_g$ isto é, A é um $\mathbb{Z}G$-módulo. É claro que todo $\mathbb{Z}G-$módulo é um G-módulo. Assim, $\mathbb{Z}G$-módulos e G-módulos significaram o mesmo. Se A é um G-módulo à esquerda, podemos definir uma estrutura de G-módulo à direita fazendo uso da ação: $a \cdot g := g^{-1} \cdot a$. Definimos um G-módulo trivial como sendo um grupo abeliano A, onde G age trivialmente sobre A, isto é para todo $g \in G$ e para todo $a \in A$, $g \cdot a = a$. **Para a maior parte dos resultados que vamos mostrar nesse trabalho, consideraremos sempre $\mathbb{Z}$ como um G-módulo trivial.**

Para qualquer grupo G, definimos o homomorfismo de augmentação (de G) como sendo o homomorfismo de anéis

$$\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum n_i g_i \longmapsto \sum n_i.$$

Assim também definimos o ideal aumentado como sendo $I_G := \ker \varepsilon$. Note que $\{g-1 : g \in G\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de I_G. Por outro lado, definimos o grupo de coinvariantes do G-módulo M como sendo o grupo abeliano

$$M_G := M/I_G M.$$

Na verdade, $I_G M$ é o submódulo de M gerado pelos elementos da forma $g \cdot m - m$, onde $g \in G$, $m \in M$. Note que M_G é o maior G-módulo quociente de M onde G age trivialmente. É fácil verificar que

$$M_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}.$$

Por exemplo, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong \frac{\mathbb{Z}G}{I_G} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \cong M/I_G M = M_G$.

Um G-homomorfismo $f : M \to M'$ de $G-$módulos é um homomorfismo de grupos abelianos que respeita as ações, isto é f é um homomorfismo de grupos abelianos tal que para todo $g \in G$ e para todo $m \in M$,

$$f(g \cdot m) = g \cdot f(m).$$

Definimos o funtor $-_G$ que leva a categoria dos G-módulos para a categoria dos grupos abelianos

$$\begin{aligned} -_G : {}_G\mathrm{Mod} &\longrightarrow \mathfrak{Ab}, \\ M &\longmapsto M_G, \\ (f : M \to M') &\longmapsto f_G : M_G \to M'_G, \end{aligned}$$

onde $f_G(\overline{m}) = \overline{f(m)}$. Note que f_G está bem definida pois $f(g\cdot m - m) = g\cdot f(m) - f(m)$.

Com estas ferramentas definimos a homologia de un grupo. Considere G um grupo e M um G-módulo. Para $n \geq 0$, definimos o n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M como

$$H_n(G,M) := \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = H_n\left(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} M\right) = H_n((P_\bullet)_G),$$

onde $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Usaremos em diante a notação

$$M \otimes_G N := M \otimes_{\mathbb{Z}G} N.$$

Não é difícil verificar que $M \otimes_G N \cong N \otimes_G M$. Desta maneira, escrevemos

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M).$$

No caso quando $M = \mathbb{Z}$ dizemos que $H_n(G,\mathbb{Z})$ é o n-ésimo grupo de homologia integral de G e escrevemos

$$H_n(G) := H_n(G,\mathbb{Z}) = H_n(Q_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}),$$

onde $Q_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Pelo Exemplo (1.4) temos que

$$H_0(G,M) = \mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \cong \mathbb{Z} \otimes_G M \cong M_G.$$

Em particular, $H_0(G) \cong \mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$ pois $\mathbb{Z}$ é um G-módulo trivial. Usando o Teorema (1.4) e a definição anterior, para cada sequência exata curta de G-módulos temos associada uma sequência exata longa nos grupos de homologia de G com coeficientes nos G-módulos em questão.

TEOREMA 1.8. *Seja* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de G-módulos. Então existe uma sequência exata longa natural de grupos de homologia*

$$\cdots \to H_{n+1}(G,M'') \xrightarrow{\delta} H_n(G,M') \xrightarrow{\alpha_*} H_n(G,M) \xrightarrow{\beta_*} H_n(G,M'') \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(G,M') \to \cdots \quad .$$

Os seguintes exemplos que introduzimos serão usados nos próximos capítulos para simplificar os cálculos.

EXEMPLO 1.7. Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de G-módulos. Então pelo Exemplo (1.5) temos

$$H_n\left(G, \bigoplus_{i\in I} M_i\right) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}\left(\mathbb{Z}, \bigoplus_{i\in I} M_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M_i) = \bigoplus_{i\in I} H_n(G,M_i)$$

PROPOSIÇÃO 1.2. *Seja* $\{G_i\}_{i\in I}$ *uma família de grupos tais que I é um sistema direito e seja* $G := \varinjlim G_i$. *Então para qualquer G-módulo M e para qualquer* $n \geq 0$ *temos*

$$H_n(G,M) \cong \varinjlim H_n(G_i,M).$$

Demonstração. Veja-se [1, pág. 121]. □

EXEMPLO 1.8. Seja $G=\{1\}$, então um G-módulo é sempre trivial e portanto $M_G=M$. Se $P_\bullet\to\mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G, então $(P_\bullet)_G=P_\bullet$. Logo

$$H_n(G,M)\cong\begin{cases} M & \text{se } n=0,\\ 0 & \text{se } n\neq 0.\end{cases}$$

EXEMPLO 1.9. Se M é um G-módulo projetivo, então para todo $n\geq 1$, $Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M)=0$. Portanto

$$H_n(G,M)\cong\begin{cases} M_G & \text{se } n=0,\\ 0 & \text{se } n\neq 0.\end{cases}$$

Em particular

$$H_n(G,\mathbb{Z}G)\cong\begin{cases} (\mathbb{Z}G)_G & \text{se } n=0,\\ 0 & \text{se } n\neq 0.\end{cases} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n=0,\\ 0 & \text{se } n\neq 0.\end{cases}$$

EXEMPLO 1.10. Se M é um G-módulo trivial, então $H_0(G,M)=M$. Em particular, se $M=\mathbb{Z}$, então a sequência exata $0\longrightarrow I_G\longrightarrow\mathbb{Z}G\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$ gera a sequência exata longa

$$\cdots\longrightarrow H_1(G,\mathbb{Z}G)\longrightarrow H_1(G)\longrightarrow H_0(G,I_G)\longrightarrow H_0(G,\mathbb{Z}G)\longrightarrow H_0(G)\longrightarrow 0.$$

Agora pelo Exemplo (1.9)

$$H_1(G,\mathbb{Z}G)=0,\qquad H_0(G,\mathbb{Z}G)=\mathbb{Z}G\otimes_G\mathbb{Z}=\mathbb{Z}.$$

Por outro lado, $H_0(G)\cong\mathbb{Z}$ e

$$H_0(G,I_G)=I_G\otimes_G\mathbb{Z}=I_G\otimes_G\left(\frac{\mathbb{Z}G}{I_G}\right)\cong\frac{I_G}{I_G^2}.$$

É fácil verificar que

$$\varphi:\frac{G}{[G,G]}\to\frac{I_G}{I_G^2},\qquad\qquad \varphi(g[G,G])=(g-1)I_G^2,$$

é um isomorfismo, onde $[G,G]$ é o subgrupo comutador de G. Portanto

$$H_0(G,I_G)\cong\frac{G}{[G,G]}.$$

Desta maneira temos a sequência exata

$$0\longrightarrow H_1(G)\longrightarrow\frac{G}{[G,G]}\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\varepsilon_*}\mathbb{Z}\longrightarrow 0.$$

Mas

$$\begin{aligned} \varepsilon_*:\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}G\otimes_G\mathbb{Z} &\longrightarrow\mathbb{Z}\otimes_G\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}\\ (n\mapsto 1\otimes_G n) &\longmapsto (1\otimes_G n\mapsto n)\end{aligned}$$

é o homomorfismo identidade. Portanto

$$H_1(G)\cong\frac{G}{[G,G]}.\tag{1.2}$$

EXEMPLO 1.11. Seja G o grupo cíclico de ordem n com gerador t. Como $\{1,t,\ldots,t^{n-1}\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base para $\mathbb{Z}$G, temos

$$\mathbb{Z}G \cong \frac{\mathbb{Z}[x]}{\langle x^n - 1\rangle}.$$

Considere $N = 1+t+t^2+\cdots+t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. Não é difícil verificar que

$$\begin{array}{llllll} P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}: & \cdots \to \mathbb{Z}G & \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G & \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G & \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0 \\ & g & \longmapsto N\cdot g & \qquad\qquad g & \longmapsto (t-1)\cdot g & \end{array} \tag{1.3}$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G. Tensorizando a resolução (1.3) por $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, obtemos a sequência

$$P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}: \qquad \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Na verdade, $n:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ e $0:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ são induzidas por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}G\otimes_G \mathbb{Z} & \xrightarrow{N\otimes id_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z}G\otimes_G\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}, \\ (m\mapsto 1\otimes_G m) & \longmapsto & (N\otimes_G m \mapsto m+\cdots+m = nm) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}G\otimes_G \mathbb{Z} & \xrightarrow{(t-1)\otimes id_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z}G\otimes_G\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}. \\ (m\mapsto 1\otimes_G m) & \longmapsto & ((t-1)\otimes_G m \mapsto m-m = 0) \end{array}$$

Portanto

$$H_k(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k=0, \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{se } k \text{ é impar}, \\ 0 & \text{se } k \text{ é par}. \end{cases}$$

Em geral, tensorizando a resolução (1.3) por um G-módulo M, obtemos a sequência

$$P_\bullet \otimes_G M: \qquad \cdots \longrightarrow M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{(t-1)} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{(t-1)} M \longrightarrow 0,$$

onde os homomorfismos $N: M\to M$ e $t-1: M\to M$ são induzidas por

$$\begin{array}{rcl} M \cong \mathbb{Z}G\otimes_G M & \xrightarrow{N\otimes id_M} & \mathbb{Z}G\otimes_G M \cong M, \\ (m\mapsto 1\otimes_G m) & \longmapsto & (N\otimes_G m \mapsto N\cdot m) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} M \cong \mathbb{Z}G\otimes_G M & \xrightarrow{(t-1)\otimes id_M} & \mathbb{Z}G\otimes_G M \cong M. \\ (m\mapsto 1\otimes_G m) & \longmapsto & ((t-1)\otimes_G m \mapsto tm-m) \end{array}$$

Logo

$$H_k(G,M) \cong \begin{cases} M_G & \text{se } k=0, \\ \dfrac{\text{Ker } (t-1)}{\text{Im } N} & \text{se } k \text{ é ímpar}, \\ \dfrac{\text{Ker } N}{\text{Im } (t-1)} & \text{se } k \text{ é par}. \end{cases}$$

Se M é um G-módulo e se

$$M^G := \{m \in M : g \cdot m = m \text{ para todo } g \in G\},$$

é fácil verificar que $M^G = \text{Ker }(t-1)$. Portanto

$$H_k(G,M) \cong \begin{cases} M_G & \text{se } k = 0, \\ \dfrac{M^G}{\text{Im } N} & \text{se } k \text{ é ímpar}, \\ \text{Ker }\left(N : M_G \to M^G\right) & \text{se } k \text{ é par}. \end{cases}$$

Exemplo 1.12. Seja G o grupo cíclico infinito com gerador t. O conjunto $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base para $\mathbb{Z}G$. Assim

$$\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[x, x^{-1}].$$

Não é difícil demonstrar que

$$\begin{array}{llcl} P'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} : & 0 \longrightarrow \mathbb{Z}G & \xrightarrow{t-1} & \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \\ & \qquad\quad g & \longmapsto & (t-1) \cdot g \end{array}$$

é uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre G. Aplicando o funtor $- \otimes_G \mathbb{Z}$, obtemos a sequência

$$P'_\bullet \otimes_G \mathbb{Z} : \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

portanto

$$H_n(G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1, \\ 0 & \text{se } n \neq 0, 1. \end{cases}$$

Exemplo 1.13. Seja X um conjunto e seja G um grupo livre com base X. Note que todo elemento $g \in G$ pode ser escrito como uma palavra reduzida nos símbolos $\{x, x^{-1} : x \in X\}$. Definimos assim os subconjuntos $G(x)$ e $G(x^{-1})$ como sendo todos os elementos $g \in G$ tais que a palavra reduzida que representa g termina em x ou x^{-1}, respetivamente. Note que $G - \{1\}$ é a união disjunta dos conjuntos $G(x)$ e $G(x^{-1})$ sobre todos os $x \in X$. Logo

$$\begin{aligned} \text{se } gx \in G(x), \text{ então} \quad & (gx - 1) = g(x-1) + (g-1), \\ \text{se } gx^{-1} \in G(x^{-1}), \text{ então} \quad & (gx^{-1} - 1) = -(gx^{-1})(x-1) + (g-1). \end{aligned}$$

Fazendo indução no comprimento das palavras, reescrevemos a $\mathbb{Z}-$base $\{g - 1 : g \neq 1\} \subseteq I_G$ em termos do conjunto $\{g(x-1) : g \in G, x \in X\}$. Logo $\{g(x-1) : g \in G, x \in X\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de I_G e portanto $\{x - 1 : x \in X\}$ é uma $\mathbb{Z}G$-base de I_G. Isto implica que I_G é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre e temos $I_G \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G(x-1)$. Logo

$$0 \longrightarrow I_G \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G, onde $i : I_G \to \mathbb{Z}G$ é a inclusão. Aplicando o funtor $-\otimes_G \mathbb{Z}$ temos a sequência

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow I_G \otimes_G \mathbb{Z} &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}G \otimes_G \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ g(x-1)\otimes n &\longmapsto \quad g(x-1)\otimes n = 0. \end{aligned}$$

Logo

$$H_0(G) = \mathbb{Z}, \qquad H_1(G) = I_G \otimes_G \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}, \qquad H_n(G) = 0 \quad \text{sempre que } n > 1. \tag{1.4}$$

EXEMPLO 1.14. Seja M um G-módulo trivial e seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G. Então

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M) = H_n\left((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right).$$

Como $P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}-$módulos livres, usando o Teorema (1.6) temos

$$\begin{aligned} H_n(G,M) &\cong H_n\left((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right) \cong \left(H_n(P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} M\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}), M\right) \\ &\cong H_n(G) \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_{n-1}(G), M\right). \end{aligned}$$

Em particular se $n = 1$, então

$$\begin{aligned} H_1(G,M) &\cong H_1(G) \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_0(G), M) = \left(G/\left[G,G\right] \otimes_{\mathbb{Z}} M\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, M) \\ &= G/\left[G,G\right] \otimes_{\mathbb{Z}} M. \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.15. O exemplo que segue irá ser usado no Capítulo 4 para calcular os termos de uma sequência espectral importante.
Seja $\Sigma_2 = \langle \sigma \rangle$ o grupo simétrico de ordem 2 e seja A um grupo abeliano multiplicativo. O grupo Σ_2 age sobre $A \oplus A$ e sobre $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \times (A \oplus A) &\longrightarrow A \oplus A \\ (\sigma, (a,b)) &\longmapsto \sigma(a,b) = (b,a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \times (A \otimes_{\mathbb{Z}} A) &\longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ (\sigma, (a \otimes b)) &\longmapsto \sigma(a \otimes b) = -b \otimes a. \end{aligned}$$

Aqui nós mostraremos

1) $H_n(\Sigma_2, A \oplus A) \cong \begin{cases} A & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$

2) $H_n(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong \begin{cases} (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\Sigma_2} & \text{se } n = 0, \\ H_n\left(\Sigma_2,\ {}_{2^\infty}A \otimes_{\mathbb{Z}}\ {}_{2^\infty}A\right) & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ \langle \overline{a \otimes a} \in (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\Sigma_2} : a \in A \rangle & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$

onde ${}_{2^\infty}A := \{a \in A : \text{ existe } n \in \mathbb{N}, \text{ tal que } 2^n a = 0\}$.

De fato, como

$$\sigma(a,b) - (a,b) = \left(a^{-1}b, (a^{-1}b)^{-1}\right),$$

temos $(A \oplus A)_{\Sigma_2} \cong A$ e $(A \oplus A)^{\Sigma_2} = \{(a,a) : a \in A\}$. Considere o homomorfismo

$$N : A \oplus A \longrightarrow A \oplus A, \qquad (a,b) \longmapsto (a,b) + \sigma(a,b) = (ab, ab).$$

Note que $\operatorname{Im} N = \{(a,a) : a \in A\} = (A \oplus A)^{\Sigma_2}$, $\operatorname{Ker} N = \{(a, a^{-1}) : a \in A\}$. Então temos um homomorfismo bem definido

$$\overline{N} : (A \oplus A)_{\Sigma_2} \longrightarrow (A \oplus A)^{\Sigma_2}, \qquad \overline{(a,b)} \longmapsto (ab, ab).$$

Dado que $(a,1) - \sigma(a,1) = (a, a^{-1})$, então

$$\operatorname{Ker} \overline{N} = 0, \qquad \operatorname{Im} \overline{N} = (A \oplus A)^{\Sigma_2}.$$

Portanto pelo Exemplo (1.11)

$$H_n(\Sigma_2, A \oplus A) = \begin{cases} A & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \neq 0. \end{cases}$$

Para calcular $H_n(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A)$ note que pelo Exemplo (1.11): $H_p(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong \dfrac{(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)^{\Sigma_2}}{(1+\sigma)(A \otimes_{\mathbb{Z}} A)}$ se p é ímpar, e $H_p(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) \cong \operatorname{Ker} \overline{N'}$ se p é par e $p \geq 2$, onde $\overline{N'} : (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)_{\Sigma_2} \to (A \otimes_{\mathbb{Z}} A)^{\Sigma_2}$, $\overline{a \otimes b} \mapsto a \otimes b - b \otimes a$.

Suponha agora que $A = A_1 \oplus A_2$. Então

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong (A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1) \oplus (A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \oplus A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1) \oplus (A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2).$$

A ação de Σ_2 sobre $A \otimes_{\mathbb{Z}} A$ induz uma ação de Σ_2 sobre $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \oplus A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ como segue

$$\sigma(a_1 \otimes a_2, b_2 \otimes b_1) = -(b_1 \otimes b_2, a_2 \otimes a_1).$$

Pode-se mostrar que para $n > 1$, $H_n(\Sigma_2, A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \oplus A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_1) = 0$, portanto pelo Exemplo (1.7)

$$H_n(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) = H_n(\Sigma_2, A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2) \oplus H_n(A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} A_2).$$

Agora se $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, então por indução temos

$$H_k(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_k(\Sigma_2, A_i \otimes_{\mathbb{Z}} A_i).$$

Mais geralmente se $\{A_j\}_{j \in J}$ é uma família de subgrupos finitamente gerados de A tais que J é um sistema direto e $A \cong \varinjlim A_j$, então $A \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong \varinjlim (A_j \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)$, e pelo Exemplo (1.5)

$$H_k(\Sigma_2, A \otimes_{\mathbb{Z}} A) = \operatorname{Tor}_k^{\mathbb{Z}\Sigma_2}(\mathbb{Z}, \varinjlim (A_j \otimes_{\mathbb{Z}} A_j)) \cong \varinjlim \operatorname{Tor}_k^{\mathbb{Z}\Sigma_2}(\mathbb{Z}, A_j \otimes_{\mathbb{Z}} A_j) = \varinjlim H_k(\Sigma_2, A_j \otimes_{\mathbb{Z}} A_j).$$

Portanto é suficiente assumir que A é finitamente gerado. Por outro lado, pelo teorema estrutural dos grupos abelianos finitamente gerados, basta assumir que A é um grupo cíclico.

- Se $A \cong \mathbb{Z}$, então

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})^{\Sigma_2} &= \{n(1\otimes 1) : n(1\otimes 1) = -n(1\otimes 1), n\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{n(1\otimes 1) : 2n(1\otimes 1) = 0\}\\ &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})_{\Sigma_2} &= \{\overline{n\otimes m} : n,m\in\mathbb{Z}\} = \{nm\left(\overline{1\otimes 1}\right) : n,m\in\mathbb{Z}\}\\ &= \langle\ \overline{1\otimes 1}\rangle.\end{aligned}$$

Portanto

$$H_n(\Sigma_2,\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \begin{cases}0 & \text{se } n \text{ é impar,}\\ \langle\ \overline{1\otimes 1}\rangle & \text{se } n \text{ é par ou } n=0.\end{cases}$$

- Seja $A \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ e seja $n = 2^{r_0}p_1^{r_1}\cdots p_m^{r_m}$ com p_i primos, $p_i > 2$, $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Pela decomposição usual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ como sendo a soma direta $\mathbb{Z}/2^{r_0}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/p_m^{r_m}\mathbb{Z}$, é suficiente então assumir que $n = p^r$. Note que nosso caso, a k-ésima homologia $H_k(G,-)$ é anulado por $|G| = 2$. Agora se p é um primo ímpar, como $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ não tem 2-torção, então $H_k(\Sigma_2,\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ também não tem 2-torção. Assim

$$H_k(\Sigma_2,\mathbb{Z}/p^r\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/p^r) = 0.$$

Por outro lado, se $n = 2^r$, então a afirmação é clara. Portanto

$$H_n(\Sigma_2,A\otimes_{\mathbb{Z}}A) \cong \begin{cases}(A\otimes_{\mathbb{Z}}A)_{\Sigma_2} & \text{se } n=0,\\ H_n(\Sigma_2,\ {}_{2^\infty}A\otimes_{\mathbb{Z}}\ {}_{2^\infty}A) & \text{se } n \text{ é ímpar,}\\ \langle\ \overline{a\otimes a}\in(A\otimes_{\mathbb{Z}}A)_{\Sigma_2} : a\in A\rangle & \text{se } n \text{ é par .}\end{cases}$$

A seguir, apresentamos algumas construções importantes de resoluções livres de $\mathbb{Z}$ sobre qualquer grupo, utilizadas mais diante.

- Seja $G^{(n)}$ o produto cartesiano de n cópias do grupo G. Seja $C_n(G)$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre $G^{(n+1)}$ junto com a ação de G dada por

$$g\cdot(g_0,g_1,\ldots,g_n) := (gg_0,gg_1,\ldots,gg_n)\,.$$

$C_n(G)$ é um $G-$módulo livre com base $(1,g_1,g_1g_2,\ldots,g_1g_2\ldots g_n)$, $g_i\in G$. É claro que $C_0(G)\cong\mathbb{Z}G$, via o isomorfismo $n_{g_0}(g_0)\mapsto n_{g_0}g_0$. Considere para todo $n\geq 1$ os homomorfismos $\delta_n : C_n(G)\to C_{n-1}(G)$ definidos como sendo

$$\delta_n\,(g_0,\ldots,g_n) := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,g_{i-1},g_{i+1},\ldots,g_n).$$

O complexo

$$C_\bullet(G)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}: \qquad \cdots\to C_n(G)\xrightarrow{\delta_n}C_{n-1}(G)\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1(G)\xrightarrow{\delta_1}C_0(G)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0,$$

é uma resolução livre de $G-$módulos e é chamada resolução padrão de $\mathbb{Z}$ sobre G. Note que $\varepsilon : C_0(G)\to\mathbb{Z}$ é o homomorfismo de augmentação, $\varepsilon(n_g(g)) = n_g$.

- Agora vamos introduzir a notação barra:

$$[g_1|g_2|\dots|g_n], \qquad g_i \in G-\{1\}.$$

Além disso, suponha que $[g_1|g_2|\dots|g_n]=0$, sempre que $g_i=1$ para algum i entre 1 e n. Considere $B_n(G)$ como o G-módulo livre gerado por todos os símbolos $[g_1|g_2|\dots|g_n]$ com $g_i\in G-\{1\}$. Para $n\geq 1$, definimos os homomorfismos $d_n : B_n(G)\to B_{n-1}(G)$, como

$$d_n\left([g_1|\dots|g_n]\right) := g_1[g_2|\dots|g_n]+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n]+(-1)^n[g_1|,\dots,|g_{n-1}].$$

Note que $B_0(G)$ é o G-módulo livre com gerador $[\,]$, que é isomorfo a $\mathbb{Z}G$. Portanto o complexo de cadeias de G-módulos

$$B_\bullet(G)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}: \qquad \cdots\longrightarrow B_n(G)\xrightarrow{d_n}B_{n-1}(G)\to\cdots\to B_1(G)\xrightarrow{d_1}B_0(G)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0,$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G chamada resolução barra de G [15, Capítulo 6, Seção 5], onde $\varepsilon : B_0(G)\to\mathbb{Z}$ é o homomorfismo de augmentação.

Podemos verificar que o homomorfismo

$$\begin{aligned} C_n(G) &\xrightarrow{\theta_n} B_n(G)\\ (g_0,\dots,g_n) &\longmapsto [g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|\cdots|g_{n-1}^{-1}g_n] \end{aligned}$$

dá-nos um morfismo de complexoss $\theta_\bullet : C_\bullet(G)\to B_\bullet(G)$. Note que

$$\theta_n(1,g_1,g_1g_2,\cdots,g_1\dots g_n)=[g_1|g_2|\cdots|g_n].$$

Assim, se M é um G-módulo, então

$$H_n(G,M)\cong H_n(C_\bullet(G)\otimes_G M)\cong H_n(B_\bullet(G)\otimes_G M).$$

Exemplo 1.16. Seja G um grupo abeliano e considere $B_\bullet(G)\to\mathbb{Z}$ a resolução barra de $\mathbb{Z}$ sobre G. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} G\times G &\longrightarrow B_2(G)\otimes_G\mathbb{Z}.\\ (g_1,g_2) &\longmapsto [g_1|g_2]\otimes 1-[g_2|g_1]\otimes 1 \end{aligned}$$

Como $(d_2\otimes id_{\mathbb{Z}})\left([g_1|g_2]\otimes 1-[g_2|g_1]\otimes 1\right)=0$, temos assim um homomorfismo bem definido

$$\begin{aligned} G\times G &\longrightarrow H_2(G)\\ (g_1,g_2) &\longmapsto \overline{[g_1|g_2]\otimes 1}-\overline{[g_2|g_1]\otimes 1} \end{aligned}$$

Esta aplicação é bilinear alternante, logo induz um único homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbf{c}:\textstyle\bigwedge_{\mathbb{Z}}^2 G &\longrightarrow H_2(G)\\ g_1\wedge g_2 &\longmapsto \mathbf{c}(g_1,g_2):=\overline{[g_1|g_2]\otimes 1}-\overline{[g_2|g_1]\otimes 1}. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $g_1, g_2, h_1 \in G$ temos as seguintes propriedades

$$\mathbf{c}(g_1h_1, g_2) = \mathbf{c}(g_1, g_2) + \mathbf{c}(h_1, g_2), \qquad \mathbf{c}(g_2, g_1) = -\mathbf{c}(g_1, g_2).$$

Além disso, segundo [1, Teorema 6.4 Ch. V], o homomorfismo $\mathbf{c}$ induz o isomorfismo

$$H_2(G) \cong \bigwedge\nolimits_{\mathbb{Z}}^2 G.$$

OBSERVAÇÃO 1.1. Em geral, para um grupo qualquer G definimos

$$\mathbf{c}(g_1, g_2, \ldots, g_n) := \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \text{sign }(\sigma)\overline{[g_{\sigma(1)}|g_{\sigma(2)}|\ldots|g_{\sigma(n)}]\otimes 1} \in H_n(G),$$

onde $g_i \in G$ é tal que $g_ig_j = g_jg_i$ para todo $j \neq i$ e Σ_n é o grupo simétrico de grau n. É fácil verificar que na verdade $\mathbf{c}(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in H_n(G)$, como foi obtido para $n = 2$ no Exemplo (1.16). Se $A = \langle g_1, g_2 \ldots, g_n\rangle$, não é difícil verificar que o homomorfismo

$$\begin{aligned} \bigwedge\nolimits^n A &\longrightarrow H_n(G), \\ a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\longmapsto \mathbf{c}(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

está bem definido e é multilinear. Portanto esses elementos satisfazem as seguintes propriedades

- Se $h_1 \in G$ comuta com os elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, então

$$\mathbf{c}(g_1h_1, g_2, \ldots, g_n) = \mathbf{c}(g_1, g_2, \ldots, g_n) + \mathbf{c}(h_1, g_2, \ldots, g_n).$$

- Para cada $\sigma \in \Sigma_n$

$$\mathbf{c}(g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \ldots, g_{\sigma(n)}) = \text{sign }(\sigma)\mathbf{c}(g_1, g_2, \ldots, g_n).$$

- Sejam G e H grupos. Então o produto cup (Proposição 1.3) de $\mathbf{c}(g_1, \ldots, g_n) \in H_n(G)$ e $\mathbf{c}(h_1, \ldots, h_m) \in H_m(H)$ é dado por

$$\mathbf{c}(g_1, \ldots, g_n) \cup \mathbf{c}(h_1, \ldots, h_m) = \mathbf{c}\left((g_1, 1), \ldots, (g_n, 1), (1, h_1), \ldots, (1, h_m)\right).$$

Usamos mais diante no Capítulo 4 esses elementos e suas propriedades.

Agora estudaremos os homomorfismos induzidos nos grupos de homologia pelos homomorfismos entre grupos. Sejam G e G' grupos multiplicativos e sejam M e M' quaisquer G-módulo e G'-módulo respetivamente. Um morfismo $(\alpha, f) : (G,M) \to (G',M')$ está formado por um homomorfismo de grupos $\alpha : G \to G'$ e um homomorfismo de grupos abelianos $f : M \to M'$ tal que para todo $g \in G$ e para todo $m \in M$,

$$f(g\cdot m) = \alpha(g)\cdot f(m).$$

Considere agora $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ e $P'_\bullet \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{Z}$ resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ sobre G e G' respetivamente. Dado que existe uma extensão de α para um homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G'$, então $P'_\bullet$ é um complexo de cadeias de G-módulos e pelo Lema (1.1) existe um morfismo de complexos de cadeias, único a menos de homotopia, $\tau_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ compatível com α, isto é para todo $g \in G$ e para todo $x \in P_n$

$$\tau_n(g \cdot x) = \alpha(g) \cdot \tau_n(x),$$

que satisfaz $\varepsilon' \circ \tau_0 = \varepsilon$. Tensorizando com M, obtemos um morfismo de complexos de cadeias

$$\tau_\bullet \otimes_G f : P_\bullet \otimes_G M \to P'_\bullet \otimes_{G'} M'.$$

Desta forma temos induzido para cada $n \geq 0$ um homomorfismo entre os $n-$ésimos grupos de homologia

$$(\alpha, f)_* : H_n(G,M) \longrightarrow H_n(G',M'), \qquad \overline{z_n} \longmapsto \overline{(\tau_n \otimes f)(z_n)}.$$

Se $H \subseteq G$ é um subgrupo de G e M é um G-módulo, o homomorfismo natural $H_n(H,M) \to H_n(G,M)$ induzido pela inclusão $(H,M) \to (G,M)$, é chamado o homomorfismo correstrição, denotado por

$$cor_G^H : H_n(H,M) \to H_n(G,M).$$

Seja $H \subseteq G$ um subgrupo de G e seja E um conjunto de representantes das classes à direita Hg. Para qualquer $g \in E$, seja $\mathbb{Z}(Hg)$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre com base indexada por elementos na classe à direita Hg. Então $\mathbb{Z}(Hg)$ é um H-módulo usando $h' \cdot \sum a_h h_g = \sum a_h h' h_g$ e portanto $\mathbb{Z}H \cong \mathbb{Z}(Hg)$ (como H-módulos) via o homomorfismo $h \mapsto hg$. Segue-se

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} \mathbb{Z}(Hg) \cong \bigoplus_{g \in E} \mathbb{Z}H, \tag{1.5}$$

assim, $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre com base indexada em E. Agora, se $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G, dado que $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo livre, então $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre H. Logo para todo $n \geq 0$ e todo $G-$módulo M

$$H_n(G,M) = H_n(P_\bullet \otimes_G M), \qquad H_n(H,M) = H_n(P_\bullet \otimes_H M). \tag{1.6}$$

Exemplo 1.17. Seja $H \subseteq G$ subgrupo de G e seja $\theta : G/H \to G$ qualquer seção (como aplicação de conjuntos) da aplicação $\pi : G \to G/H$ definida por $g \mapsto gH$. Sejam $C_\bullet(H) \to \mathbb{Z}$, $C_\bullet(G) \to \mathbb{Z}$ resoluções padrão de $\mathbb{Z}$ sobre H e G respetivamente. Para todo $g \in G$, definimos

$$\overline{g} := (\theta(\pi(g)))^{-1} g \in H.$$

A aplicação

$$\begin{aligned} C_n(G) &\longrightarrow C_n(H) \\ (g_0, g_1, \dots, g_n) &\longmapsto (\overline{g_0}, \overline{g_1}, \dots, \overline{g_n}) \end{aligned}$$

induz um morfismo de complexos de cadeias $(C_\bullet(G), \delta_\bullet) \to (C_\bullet(H), \delta'_\bullet)$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ o homomorfismo $H_n(H) = H_n(C_\bullet(G) \otimes_H \mathbb{Z}) \to H_n(C_\bullet(H) \otimes_H \mathbb{Z}) = H_n(H)$ coincide com a identidade $id_{H_n(H)}$, sendo esta a inversa do homomorfismo induzido pela inclusão $i_\bullet : C_\bullet(H) \to C_\bullet(G)$

$$H_n(H) = H_n(C_\bullet(H) \otimes_H \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_* = id_{H_n(H)}} H_n(C_\bullet(G) \otimes_H \mathbb{Z}) = H_n(H).$$

Exemplo 1.18. Seja $H \subseteq G$ subgrupo de G e M um G-módulo. Fixe $g_0 \in G$ e considere o homomorfismo de grupos

$$\alpha_{g_0} : H \longrightarrow g_0 H g_0^{-1}, \qquad h \longmapsto g_0 h g_0^{-1},$$

e o homomorfismo de grupos abelianos

$$f_{g_0} : M \longrightarrow M, \qquad m \longmapsto g_0 \cdot m.$$

Seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre G e seja $(\tau_{g_0})_n : P_n \to P_n$ dada por $(\tau_{g_0})_n(x) = g_0 \cdot x$. Como para todo $h \in H$ e para todo $x \in M$

$$(\tau_{g_0})_n(h \cdot x) = g_0 \cdot (h \cdot x) = \left(g_0 h g_0^{-1}\right) \cdot (g_0 \cdot x) = \alpha_{g_0}(h) \cdot \tau_n(x),$$

temos o morfismo

$$\begin{aligned} (\tau_{g_0})_\bullet \otimes_H f_{g_0} : P_\bullet \otimes_H M &\longrightarrow P_\bullet \otimes_{g_0 H g_0^{-1}} M. \\ x \otimes m &\longmapsto g_0 \cdot x \otimes g_0 \cdot m = g_0 \cdot (x \otimes m) \end{aligned}$$

Logo, para todo $n \geq 0$,

$$(\alpha_{g_0}, f_{g_0})_* : H_n(H, M) \longrightarrow H_n(g_0 H g_0^{-1}, M), \qquad \overline{z_n} \longmapsto \overline{g_0 \cdot (z_n)}.$$

Em particular, se $g_0 \in H$ então para todo $\overline{z_n} \in H_n(H, M)$, temos $(\alpha_{g_0}, f_{g_0})_*(\overline{z_n}) = \overline{z_n}$, portanto

$$(\alpha_{g_0}, f_{g_0})_* = id_{H_n(H,M)}.$$

Assim, se H é um subgrupo normal de G, então a ação por conjugação de G sobre (H, M) definida por

$$G \times (H, M) \longrightarrow (H, M), \qquad (g_0, (h, m)) \longmapsto (g_0 h g_0^{-1}, g_0 \cdot m)$$

induz, para todo $n \geq 0$, uma ação de G/H sobre $H_n(H, M)$ dada por

$$G/H \times H_n(H, M) \longrightarrow H_n(H, M), \qquad (\overline{g_0}, x) \longmapsto (\alpha_{g_0}, f_{g_0})(x).$$

Logo, para cada $n \geq 0$, $H_n(H, M)$ é um G/H-módulo.

Exemplo 1.19. Seja R um anel com unidade. Definimos o grupo linear geral de ordem n, denotado $GL_n(R)$, como o grupo de matrizes invertíveis de ordem $n \times n$ com coeficientes no anel R. Em particular, $R^\times \cong GL_1(R)$. Se R é comutativo, definimos o subgrupo especial linear de ordem n, como sendo $SL_n(R) :=$ Ker det_n onde $det_n : GL_n(R) \longrightarrow R^\times$ é o homomorfismo determinante. Note que para cada $n \geq 1$, o homomorfismo determinante tem uma seção dada por

$$\begin{aligned} \phi_n : R^\times &\longrightarrow GL_n(R). \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, identificando cada matriz invertível A de ordem $n \times n$ com a matriz $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de ordem $(n+1) \times (n+1)$, obtemos uma inclusão $GL_n(R) \to GL_{n+1}(R)$. A união da cadeia

$$R^\times = GL_1(R) \subset GL_2(R) \subset \cdots \subset GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R) \subset \cdots$$

é chamada o grupo linear geral de R

$$GL(R) := \bigcup_{n \geq 1} GL_n(R).$$

Igualmente, definimos $SL(R)$ como a união dos grupos $SL_n(R)$ e estendemos o homomorfismo determinante det_n para o homomorfismo $det : GL(R) \to R^\times$. Assim $SL(R) = \operatorname{Ker} det$ e $GL(R)$ é o produto semidireto $SL(R) \rtimes R^\times$. Pelo Exemplo (1.18), para cada $n \geq 1$ temos uma ação de $R^\times$ sobre $H_n(SL(R))$ induzida pela conjugação

$$SL(R) \longrightarrow SL(R), \qquad A \longmapsto x \cdot A \cdot x^{-1} = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde $x \in R^\times$. Se $A \in SL(R)$, então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $A \in SL_n(R)$. Logo para cada $x \in R^\times$ definimos

$$x_n := \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(R).$$

Então

$$x_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} x_n & 0 \\ \hline 0 & x_n^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & x_n \end{array}\right), \qquad x_{2n}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & x_n^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x_n^{-1} & 0 \\ \hline 0 & x_n \end{array}\right)$$

Assim

$$\begin{aligned} x \cdot A \cdot x^{-1} &= \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= x_{2n} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) x_{2n}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} x_n & 0 \\ \hline 0 & x_n^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} x_n & 0 \\ \hline 0 & x_n^{-1} \end{array}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Isto implica que a ação induzida por $x \in R^\times$ é a mesma que a ação induzida por $\left(\begin{array}{c|c} x_n & 0 \\ \hline 0 & x_n^{-1} \end{array}\right) \in SL(R)$. Portanto para cada $n \geq 1$, $R^\times$ age trivialmente sobre $H_n(SL(R))$.

Lema 1.4 (Lema de Shapiro). *Seja $H \subseteq G$ subgrupo de G e seja M um H-módulo. Então*

$$H_n(H, M) \cong H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_H M),$$

onde o isomorfismo é induzido por $(inc, \alpha) : (H, M) \to (G, \mathbb{Z}G \otimes_H M)$, $\alpha(m) = 1 \otimes m$.

Demonstração. Seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Usando o isomorfismo $P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_H M) \cong P_\bullet \otimes_H M$, temos

$$H_n(G, \mathbb{Z}G \otimes_H M) \cong H_n(P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_H M)) \cong H_n(P_\bullet \otimes_H M) \cong H_n(H, M).$$

□

Se G e H são dois grupos, então temos os homomorfismos de anéis

$$\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H], \qquad \sum_{g \in G} n_g g \longmapsto \sum_{g \in G} n_g (g, 1),$$

$$\mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H], \qquad \sum_{h \in H} n_h h \longmapsto \sum_{h \in H} n_h (1, h),$$

que induzem o homomorfismo de anéis

$$\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H \longrightarrow \mathbb{Z}[G \times H].$$

Como os dois anéis tem a $G \times H$ como $\mathbb{Z}$-base, então

$$\mathbb{Z}[G \times H] \cong \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H.$$

Assim, se $P_\bullet$ e $Q_\bullet$ são complexos de cadeias de $\mathbb{Z}G$-módulos e $\mathbb{Z}H$-módulos, respetivamente, então

$$\begin{aligned} P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet &\cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}H \otimes_H Q_\bullet) \cong P_\bullet \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H) \otimes_H Q_\bullet \\ &\cong P_\bullet \otimes_G (Q_\bullet \otimes_H (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}H)) \cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z}[G \times H]). \end{aligned}$$

Logo

$$(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet) \otimes_{G \times H} \mathbb{Z} \cong [(P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z}[G \times H])] \otimes_{G \times H} \mathbb{Z} \cong (P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z}). \tag{1.7}$$

Em particular, se $P_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre G e $Q_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre H, então pelo Corolário (1.1) o complexo $P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $G \times H$ e temos

$$H_n(G \times H) \cong H_n((P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet) \otimes_{G \times H} \mathbb{Z}) = H_n((P_\bullet \otimes_G \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (Q_\bullet \otimes_H \mathbb{Z})).$$

Dado que cada $P_n \otimes_G \mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre, então pelo Corolário (1.1) temos o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 1.3 (Fórmula de Künneth para Homología de grupos)**.** *Para todos os grupos G e H, existe uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(G) \otimes H_q(H) \xrightarrow{\cup} H_n(G \times H) \longrightarrow \bigoplus_{p'+q'=n-1} Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{p'}(G), H_{q'}(H)) \longrightarrow 0,$$

que cinde. O homomorfismo $\cup : H_p(G) \otimes H_q(H) \to H_{p+q}(G \times H)$ é chamado o produto cup.

EXEMPLO 1.20. Sejam G e H grupos (multiplicativos).

- Se $n = 1$, então

$$\begin{aligned} H_1(G \times H) &\cong (H_0(G) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(H) \bigoplus H_1(G) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(H)) \bigoplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_0(G), H_0(H)) \\ &\cong H_1(G) \bigoplus H_1(H). \end{aligned}$$

- Se $n = 2$, então $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, H_1(H)) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(G), \mathbb{Z}) = 0$, logo

$$H_2(G \times H) \cong H_2(G) \oplus (H_1(G) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(H)) \oplus H_2(H).$$

Em particular, se A é um grupo abeliano

$$H_2(A \times A) \cong H_2(A) \oplus H_2(A) \oplus (A \otimes_{\mathbb{Z}} A). \tag{1.8}$$

Seja F um corpo e considere $\mu(F) := \varinjlim \mu_n(F)$, onde $\mu_n(F) = \{\xi \in F^\times : \xi^n = 1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é um grupo cíclico finito. O seguinte lema dá-nos uma descrição da terceira homologia do grupo $F^\times \times F^\times$ usando a terceira homologia do grupo $\mu(F) \times \mu(F)$, isto está muito relacionado com os cálculos que faremos no Capítulo 4 para demonstrar nosso teorema principal.

LEMA 1.5. *Seja F um corpo. Então pela fórmula de Künneth temos uma decomposição canônica*

$$H_3(F^\times \times F^\times) \cong \left(\bigoplus_{i+j=3} H_i(F^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} H_j(F^\times) \right) \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(F^\times, F^\times),$$

onde o homomorfismo que cinde $Tor_1^{\mathbb{Z}}(F^\times, F^\times) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \to H_3(F^\times \times F^\times)$ está definido por $\langle \xi, n, \xi \rangle \mapsto \chi(\xi)$, onde $\mu_n(F) = \langle \xi \rangle$, $\xi^n = 1$, $\langle \xi, n, \xi \rangle \in Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F), \mu_n(F))$ é a imagem de ξ via o isomorfismo $\mu_n(F) \cong Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F), \mu_n(F))$ e

$$\begin{aligned} \chi(\xi) := \quad & \sum_{i=1}^{n} \big([(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)] \\ & + [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)] + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)] \big). \end{aligned}$$

Demonstração. Como $\mu(F) = \varinjlim \mu_n(F)$, pela Proposição (1.2) e pelo Exemplo (1.11)

$$H_2(\mu(F)) = H_2 \left(\varinjlim \mu_n(F) \right) = \varinjlim H_2 (\mu_n(F)) = 0.$$

Então pela Fórmula de Künneth (1.3) sobre $H_3(\mu(F) \times \mu(F))$ temos a seguinte sequência exata que cinde

$$0 \longrightarrow H_3(\mu(F)) \oplus H_3(\mu(F)) \xrightarrow{\alpha} H_3(\mu(F) \times \mu(F)) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \longrightarrow 0. \tag{1.9}$$

Aqui $\alpha : H_3(\mu(F)) \oplus H_3(\mu(F)) \to H_3(\mu(F) \times \mu(F))$ está definido como $\alpha = H_3(i_1) + H_3(i_2)$, onde $i_j : \mu(F) \to \mu(F) \times \mu(F)$ é a inclusão usual de $\mu(F)$ na $j-$ésima posição de $\mu(F) \times \mu(F)$. Agora considere as projeções

$$\begin{aligned} \beta_1 : \mu(F) \times \mu(F) &\longrightarrow \mu(F), \\ (\xi, \tau) &\longmapsto \xi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_2 : \mu(F) \times \mu(F) &\longrightarrow \mu(F), \\ (\xi, \tau) &\longmapsto \tau \end{aligned}$$

Se $\beta = H_3(\beta_1) \oplus H_3(\beta_2)$, onde

$$H_3(\beta_1) : H_3(\mu(F) \times \mu(F)) \longrightarrow H_3(\mu(F)), \quad H_3(\beta_2) : H_3(\mu(F) \times \mu(F)) \longrightarrow H_3(\mu(F)),$$

então $\beta \circ \alpha = id_{H_3(\mu(F)) \oplus H_3(\mu(F))}$. Assim, a sequência exata (1.9) cinde e temos a decomposição canônica

$$H_3(\mu(F) \times \mu(F)) \cong H_3(\mu(F)) \oplus H_3(\mu(F)) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)).$$

Por outro lado, seja $B_\bullet(\mu(F))$ a resolução barra de $\mathbb{Z}$ sobre $\mu(F)$. Como $\mu(F) \cong t(F^\times)$ e

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F), \mu_n(F)),$$

os elementos de $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(F^\times), H_1(F^\times)) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F^\times, F^\times)$ são da forma $\langle \xi, n, \xi \rangle := \langle [\xi], n, [\xi] \rangle$, onde $\xi \in \mu_n(F)$, isto é $\xi^n = 1$ e $[\xi] \in H_1(F^\times) \cong F^\times$. Note que o homomorfismo

$$\begin{aligned} \partial_2 : B_2(\mu(F))_{\mu(F)} &\longrightarrow B_1(\mu(F))_{\mu(F)}, \\ \sum_{i=1}^{n} [\xi, \xi^i] &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} [\xi^i] - \sum_{i=1}^{n} [\xi^i] + \sum_{i=1}^{n} [\xi] = n[\xi] \end{aligned}$$

assim, segundo [4, Proposição 10.6, Capítulo 5] obtemos um homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(\mu(F)), H_1(\mu(F))) &\longrightarrow H_3\left(B_\bullet(\mu(F))_{\mu(F)} \otimes B_\bullet(\mu(F))_{\mu(F)}\right), \\ \langle [\xi], n, [\xi] \rangle &\longmapsto [\xi] \otimes \sum_{i=1}^{n} [\xi | \xi^i] + \sum_{i=1}^{n} [\xi | \xi^i] \otimes [\xi] \end{aligned}$$

que cinde a sequência (1.9). Agora pelo isomorfismo (1.7)

$$B_\bullet(\mu(F))_{\mu(F)} \otimes_{\mathbb{Z}} B_\bullet(\mu(F))_{\mu(F)} \overset{\psi}{\cong} (B_\bullet(\mu(F)) \otimes_{\mathbb{Z}} B_\bullet(\mu(F)))_{\mu(F) \times \mu(F)},$$

temos

$$\begin{aligned} \psi\left([\xi] \otimes \sum_{i=1}^{n} [\xi | \xi^i]\right) &= \sum_{i=1}^{n} [(\xi,1)]\,[(1,\xi)|(1,\xi^i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)], \\ \psi\left(\sum_{i=1}^{n} [\xi | \xi^i] \otimes [\xi]\right) &= \sum_{i=1}^{n} [(\xi,1)|(\xi^i,1)]\,[(1,\xi)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)] + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)]. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(\mu(F)), H_1(\mu(F))) &\longrightarrow H_3(\mu(F) \times \mu(F)), \\ \langle [\xi], n, [\xi] \rangle &\longmapsto \chi(\xi), \end{aligned}$$

cinde a sequência (1.9), onde

$$\begin{aligned} \chi(\xi) := \sum_{i=1}^{n} \big(&[(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)] \\ &+ [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)] + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)] \big). \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a fórmula de Künneth (1.3) sobre $H_3(F^\times \times F^\times)$ temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cup} H_3(F^\times \times F^\times) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(F^\times, F^\times\right) \longrightarrow 0,$$

onde $M := H_3(F^\times) \oplus H_3(F^\times) \oplus (F^\times \otimes H_2(F^\times)) \oplus (H_2(F^\times) \otimes F^\times) \subseteq H_3(F^\times \times F^\times)$. Esta sequência cinde usando o homomorfismo $\phi : \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \to H_3(\mu(F) \times \mu(F))$ definido anteriormente para a decomposição canônica de $H_3(\mu(F) \times \mu(F))$ e usando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_3(\mu(F)) \oplus H_3(\mu(F)) \arrow[r] \arrow[d] & H_3(\mu(F) \times \mu(F)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & H_3(F^\times \times F^\times) \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F^\times, F^\times) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

□

1.3 O grupo $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(B,A)$

Sejam A e B grupos abelianos. Uma extensão de B por A é uma sequência exata de grupos abelianos $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} C \xrightarrow{\sigma} B \longrightarrow 0$. Denotaremos esta sequência como $E = (\chi, \sigma)$. Um morfismo entre $E = (\chi, \sigma)$ e $E' = (\chi, \sigma')$ extensões de B por A é a terna $\Gamma = (\alpha, \beta, \gamma) : E \to E'$ de homomorfismos tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
E: \arrow[d, "\Gamma"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\alpha"] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
E': & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dizemos que $E = (\chi, \sigma)$ e $E' = (\chi', \sigma')$ são congruentes e denotamos $E \equiv E'$, se existe um morfismo $\Gamma = (id_A, \beta, id_B) : E \to E'$ tal que β é um isomorfismo. Esta relação definida entre extensões de B por A é uma relação de equivalencia e denotamos

$$[E] := \{E' : E' = (\chi', \sigma') \text{ é uma extensão de } B \text{ por } A \text{ tal que } E \equiv E'\}.$$

Dada uma extensão $E = (\chi, \sigma)$ de B por A e homomorfismos $f : A \to A'$, $g : B' \to B$, então existem extensões E' de B por A' e E'' de B' por A (definidas únicamente por f e g), e morfismos de extensões $\Gamma' : E \to E'$, e $\Gamma'' : E'' \to E$ tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
E: \arrow[d, "\Gamma'"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
E': & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\chi'"] & C' \arrow[r, "\sigma'"] & B \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
E'': \arrow[d, "\Gamma''"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi''"] \arrow[d, "1_A"] & C'' \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[d, "\beta"] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
E: & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] & C \arrow[r, "\sigma"] & B \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Denotaremos as extensões E' e E'' como sendo as composições da extensão E com f e g, isto é $E' = f \circ E$ e $E'' = E \circ g$. Agora dados A, B grupos abelianos, defina os homomorfismos

$$\nabla_A : A \oplus A \to A, \qquad \nabla_A(a_1, a_2) = a_1 + a_2,$$

$$\Delta_B : B \to B \oplus B, \qquad \Delta_B(b) = (b, b).$$

Dadas as seguintes extensões de B por A

$$E : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi} C_1 \xrightarrow{\sigma} B \longrightarrow 0,$$

$$E' : \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\chi'} C_2 \xrightarrow{\sigma'} B \longrightarrow 0,$$

definimos a soma direta de E e E' como sendo a extensão

$$E \oplus E' : \qquad 0 \longrightarrow A \oplus A \xrightarrow{\chi \oplus \chi'} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{\sigma \oplus \sigma'} B \oplus B \longrightarrow 0,$$

e definimos a soma nas classes de extensões $[E]$ e $[E']$ como sendo $[E] + [E'] := [E + E']$ onde $E + E' := \nabla_A \circ (E \oplus E') \circ \Delta_B$.

TEOREMA 1.9. *Sejam A e B grupos abelianos. Então o conjunto*

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(B,A) := \{[E] : E = (\chi, \sigma) \text{ é uma extensão de } B \text{ por } A\},$$

é um grupo abeliano junto com a soma sobre as classes de extensões e é chamado o o grupo de extensões de B por A.

Demonstração. Veja-se [4, Teorema 2.1, Capítulo 3]. □

OBSERVAÇÃO 1.2. Seja $E = (i, p)$ a extensão de B por A, onde i é a inclusão de A em $A \oplus B$ e p é a projeção de $A \oplus B$ sobre B. Esta extensão é chamada extensão trivial, e a classe dele é o elemento trivial de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B,A) : [0] = [E] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B,A)$. Uma extensão $E' = (\chi', \sigma')$ é dita que cinde se E' é congruente com a extensão trivial, equivalentemente E' é dita que cinde se σ' tem inversa a direita ou se χ' tem inversa a esquerda. Por outro lado, dada uma extensão $[E] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B,A)$ definimos uma nova extensão de B por A como sendo $E' := (-1_A) \circ E$, onde $-1_A(a) = -a$. Esta extensão E' satisfaz: $[E] + [E'] = [0] = [E'] + [E]$, logo E' é a extensão inversa de E em $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(B,A)$, denotado como $[E'] = -[E]$. Em diante denotaremos as classes de extensões de E simplesmente por E.

Seja $A = 2\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. É fácil verificar que $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Em geral temos o seguinte teorema.

TEOREMA 1.10. *Para qualquer grupo abeliano A, temos que*

$$Ext^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong A/nA,$$

onde $nA = \{na : a \in A\}$.

Demonstração. Veja-se [4, Proposição 1.1, Capítulo 3]. □

EXEMPLO 1.21. Em particular tem-se que

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } 2\nmid n \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } 2\mid n \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } 2\nmid n \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } 2\mid n \end{cases}.$$

Se $2 \mid n$, considere as seguintes sequências exatas

$$E: \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}/(2n)\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\alpha(\overline{j}) = \overline{2j}$ e $\beta(\overline{m}) = \overline{m}$ e

$$E': 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha'} \mathbb{Z}/(2n)\mathbb{Z} \xrightarrow{\beta'} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\alpha'(\overline{1}) = \overline{n}$, $\beta'(\overline{a}) = \overline{a}$. Então $E \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ e $E' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Dado que $2 \mid n$, então $\mathbb{Z}/(2n)\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Portanto E e E' são as únicas extensões não triviais de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ e de $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ respetivamente.

EXEMPLO 1.22. Seja F um corpo. Sabemos que

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F)) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu_n(F),\mu_n(F)) \cong \varinjlim \mu_n(F) = \mu(F).$$

Então $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mu(F))$. Dado que todo grupo abeliano de torção A pode ser decomposto na forma $\bigoplus_{p \text{ primo}} {}_{p^\infty}A$, onde ${}_{p^\infty}A = \{a \in A : \text{existe } r \text{ tal que } a^{p^r} = 1\}$, então pelo Teorema (1.10) temos

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mu(F)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mu_{2^\infty}(F)) \cong \frac{\mu_{2^\infty}(F)}{\mu^2_{2^\infty}(F)}.$$

Agora se char $(F) = 2$, então $\mu_{2^\infty}(F)$ é trivial. Por outro lado, se char $(F) \neq 2$ e se $\mu_{2^\infty}(F)$ é infinito, então para qualquer n temos que $\mu_{2^n}(F) \subseteq \mu_{2^{n+1}}(F)$, onde $\mu_{2^n}(F) = \langle \xi \rangle$ com $\xi \in F^\times$ uma 2^n-ésima raiz primitiva da unidade e $\mu_{2^{n+1}}(F) = \langle \eta \rangle$ com $\eta \in F^\times$ uma 2^{n+1}-ésima raiz primitiva da unidade. É claro que $\xi = \eta^2$, logo $\dfrac{\mu_{2^\infty}(F)}{\mu^2_{2^\infty}(F)} = 0$. Se char $(F) \neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito, então $\mu_{2^\infty}(F) = \mu_{2^n}(F)$ para algum inteiro n. Neste caso $\dfrac{\mu_{2^\infty}(F)}{\mu^2_{2^\infty}(F)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e portanto

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))) \cong \begin{cases} 0 & \text{se char } (F) = 2 \text{ ou se } \mu_{2^\infty}(F) \text{ for infinito,} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se char } (F) \neq 2 \text{ e } \mu_{2^\infty}(F) \text{ for finito.} \end{cases}$$

Definimos assim $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))^\sim$ como sendo a única extensão não trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))$ se char $(F) \neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ for finito. Caso contrário definimos $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))^\sim$ como sendo $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mu(F),\mu(F))$. Voltaremos nesse exemplo no final do Capítulo 4.

1.4 Sequências Espectrais

Uma sequência espectral começando em $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 0$ é uma família $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ de R-módulos com $r \geq a$, junto com R-homomorfismos

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1},$$

tais que $d^r_{p,q} \circ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$ e $E^{r+1}_{p,q} \cong \dfrac{\operatorname{Ker} d^r_{p,q}}{\operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1}}$.

Para cada $r \geq a$, a família $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ é chamada a r-ésima página ou folha da sequência espectral. Os homomorfismos $d^r_{p,q}$ são chamados as diferenciais da sequência espectral.

Exemplo 1.23. Seja $\{E^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ uma sequência espectral começando em 0. A folha zero $(r = 0)$ desta sequência espectral é

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^0_{0,2} \arrow[d, "d^0_{0,2}"] & E^0_{1,2} \arrow[d, "d^0_{1,2}"] & E^0_{2,2} \arrow[d, "d^0_{2,2}"] & \cdots \\
\cdots & E^0_{0,1} \arrow[d, "d^0_{0,1}"] & E^0_{1,1} \arrow[d, "d^0_{1,1}"] & E^0_{2,1} \arrow[d, "d^0_{2,1}"] & \cdots \\
\cdots & E^0_{0,0} & E^0_{1,0} & E^0_{2,0} & \cdots
\end{tikzcd}$$

A primeira folha $(r = 1)$ desta sequência espectral é

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^1_{0,2} \arrow[l, "d^1_{0,2}"'] & E^1_{1,2} \arrow[l, "d^1_{1,2}"'] & E^1_{2,2} \arrow[l, "d^1_{2,2}"'] & \arrow[l] \cdots \\
\cdots & E^1_{0,1} \arrow[l, "d^1_{0,1}"'] & E^1_{1,1} \arrow[l, "d^1_{1,1}"'] & E^1_{2,1} \arrow[l, "d^1_{2,1}"'] & \arrow[l] \cdots \\
\cdots & E^1_{0,0} \arrow[l, "d^1_{0,0}"'] & E^1_{1,0} \arrow[l, "d^1_{1,0}"'] & E^1_{2,0} \arrow[l, "d^1_{2,0}"'] & \arrow[l] \cdots
\end{tikzcd}$$

e a segunda folha $(r = 2)$ desta sequência espectral é

$$\begin{tikzcd}
\cdots & E^2_{0,3} & E^2_{1,3} & E^2_{2,3} & E^2_{3,3} & E^2_{4,3} & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,2} & E^2_{1,2} & E^2_{2,2} \arrow[ull, "d^2_{2,2}"] & E^2_{3,2} \arrow[ull, "d^2_{3,2}"] & E^2_{4,2} \arrow[ull, "d^2_{4,2}"] & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,1} & E^2_{1,1} & E^2_{2,1} \arrow[ull, "d^2_{2,1}"] & E^2_{3,1} \arrow[ull, "d^2_{3,1}"] & E^2_{4,1} \arrow[ull, "d^2_{4,1}"] & \cdots \\
\cdots & E^2_{0,0} & E^2_{1,0} & E^2_{2,0} \arrow[ull, "d^2_{2,0}"] & E^2_{3,0} \arrow[ull, "d^2_{3,0}"] & E^2_{4,0} \arrow[ull, "d^2_{4,0}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Uma sequência espectral é dita limitada se para cada $n \in \mathbb{Z}$ existem somente um número finito de termos $E^r_{p,q}$ diferentes de zero com $p+q=n$. Se assim for, então para cada p e q existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $E^r_{p,q} \cong E^{r+1}_{p,q}$ para todo $r \geq r_0$. Denotamos o termo estável por $E^\infty_{p,q}$. A partir de agora para referir a uma sequência espectral usamos somente a notação $E^r_{p,q}$.

Seja $H_\bullet = \{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma família de R-módulos. Dizemos que uma sequência espectral limitada $E^r_{p,q}$ (começando em $a \geq 0$) converge a $H_\bullet$ se para cada $n \in \mathbb{Z}$, existem $s,t \in \mathbb{Z}$ tais que H_n tem uma filtração da forma

$$0 = F_sH_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq F_tH_n = H_n,$$

tal que para todo p,q,

$$E^\infty_{p,q} \cong \frac{F_pH_{p+q}}{F_{p-1}H_{p+q}}.$$

No caso afirmativo, denotaremos esta sequência espectral como

$$E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}.$$

Exemplo 1.24. Seja $E^r_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ uma sequência espectral tal que $E^2_{p,q} = 0$ para todo $p \neq 0,1$. É fácil verificar que $E^\infty_{p,q} \cong E^2_{p,q}$ para todo p e q. Para cada n, a sequência espectral $E^r_{p,q}$ induz uma filtração de H_n da forma

$$0 = F_sH_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1}H_n \subseteq F_pH_n \subseteq F_{p+1}H_n \subseteq \cdots \subseteq F_tH_n = H_n$$

de modo que

$$E^\infty_{p,n-p} \cong \frac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n}.$$

Se $p<0$, então $E^\infty_{p,n-p} = 0$ e logo

$$0 = F_sH_n = \cdots = F_{p-1}H_n = F_pH_n = \cdots = F_{-1}H_n.$$

Se $p=0$, então

$$E^2_{0,2} \cong E^\infty_{0,n} \cong \frac{F_0H_n}{F_{-1}H_n} = F_0H_n.$$

Se $p>1$, então

$$F_1H_n = \cdots = F_{p-1}H_n = F_pH_n = \cdots = F_tH_n = H_n.$$

Se $p=1$, então

$$E^2_{1,n-1} \cong E^\infty_{1,n-1} \cong \frac{F_1H_n}{F_0H_n} = \frac{H_n}{E^2_{0,n}}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$ obtemos a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow E^2_{0,n} \longrightarrow H_n \longrightarrow E^2_{1,n-1} \longrightarrow 0.$$

EXEMPLO 1.25. Seja $E^r_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ tal que $E^2_{p,q} = 0$ para todo $q \neq 0,1$. É fácil verificar que

$$E^\infty_{p,q} \cong \begin{cases} \text{Ker } d^2_{p,0} & \text{se } q = 0, \\ \dfrac{E^2_{p,1}}{\text{Im } d^2_{p+2,0}} & \text{se } q = 1, \\ 0 & \text{se } q \neq 0,1. \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, H_n tem uma filtração da forma

$$0 = F_s H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq F_{p+1} H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t H_n = H_n$$

tal que

$$E^\infty_{n,n-p} \cong \frac{F_p H_n}{F_{p-1} H_n}.$$

Se $n < p$, então $E^\infty_{n,n-p} = 0$ e logo

$$F_n H_n = F_{n+1} H_n = \cdots = F_{p-1} H_n = F_p H_n = \cdots = F_t H_n = H_n.$$

Se $n = p$, então

$$\frac{F_n H_n}{F_{n-1} H_n} = \frac{H_n}{F_{n-1} H_n} \cong E^\infty_{n,0} \cong \text{Ker } d^2_{n,0}.$$

Se $n > p+1$, então

$$0 = F_s H_n = \cdots = F_{p-1} H_n = F_p H_n = \cdots = F_{n-2} H_n.$$

Se $n = p+1$, então

$$\frac{F_{n-1} H_n}{F_{n-2} H_n} = F_{n-1} H_n \cong E^\infty_{n-1,1} \cong \frac{E^2_{n-1,1}}{\text{Im } d^2_{n+1,0}}.$$

Obtemos assim para cada $n \in \mathbb{Z}$ a sequência exata

$$0 \to E^3_{n-1,1} \to H_n \to E^2_{n,0} \to E^2_{n-2,1} \to E^3_{n-2,1} \to 0.$$

Fazendo variar n e juntando as sequências obtemos a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \to H_{n-1} \to E^2_{n+1,0} \to E^2_{n-1,1} \to H_n \to E^2_{n,0} \to E^2_{n-2,1} \to H_{n-1} \to \cdots.$$

Uma sequência espectral tal que $E^r_{p,q} = 0$ para todo $p < 0$ ou $q < 0$ é chamada a sequência espectral do primeiro quadrante. Logo para cada $n \geq 0$, os termos $E^r_{p,q}$ diferentes de zero tais que $p+q = n$ são ao máximo $n+1$. Portanto esta sequência espectral é limitada. Então para $p,q \in \mathbb{Z}$ fixos, se $r_0 = \max\{p, q+1\} + 1$, então $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$.

EXEMPLO 1.26. Seja $E^r_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ uma sequência espectral do primeiro quadrante começando em a. Então para cada n, H_n tem uma filtração da forma

$$0 = F_{-1} H_n \subseteq F_0 H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1} H_n \subseteq F_n H_n = H_n,$$

tal que $E^\infty_{p,n-p} = \dfrac{F_p H_n}{F_{p-1} H_n}$. Note que $E^\infty_{0,n} \cong F_0 H_n$ é um quociente de $E^a_{0,n}$ e $E^\infty_{n,0} \cong \frac{H_n}{F_{n-1} H_n}$ é um submódulo de $E^a_{n,0}$. Os homomorfismos $E^a_{0,n} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,n}$ e $E^\infty_{n,0} \hookrightarrow E^a_{n,0}$ são chamados os homomorfismos bordos.

Sejam $E^r_{p,q}$ e $\mathscr{E}^r_{p,q}$ sequências espectrais com diferenciais $d^r_{p,q}$ e $\overline{d}^r_{p,q}$ respetivamente. Um morfismo entre estas sequências espectrais é uma família de aplicações $\{f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ tais que

i) para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f^r_{p-r,q+r-1} \circ d^r_{p,q} = \overline{d}^r_{p,q} \circ f^r_{p,q}$.

ii) para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f^{r+1}_{p,q}$ é dada por

$$\begin{aligned} f^{r+1}_{p,q} : E^{r+1}_{p,q} &\longrightarrow \mathscr{E}^{r+1}_{p,q}. \\ x + \operatorname{Im} d^r_{p+r,q-r+1} &\longmapsto f^r_{p,q}(x) + \operatorname{Im} \overline{d}^r_{p+r,q-r+1} \end{aligned}$$

Nas sequências espectrais limitadas com $E^\infty_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$, definimos

$$\begin{aligned} Z^\infty_{p,q} = Z^{r_0}_{p,q} &:= \operatorname{Ker} d^{r_0}_{p,q}, \\ B^\infty_{p,q} = B^{r_0}_{p,q} &:= \operatorname{Im} d^{r_0}_{p+r_0,q-r_0+1}. \end{aligned}$$

Seja $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ um morfismo de sequências espectrais limitadas. Suponha que para algum $r_0 \in \mathbb{N}$ fixo, $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}$ é um isomorfismo para todo $p,q \in \mathbb{Z}$. Então para $s \geq r_0$ temos que $f^s_{p,q} : E^s_{p,q} \to \mathscr{E}^s_{p,q}$ é um isomorfismo. Definimos para todo $p,q \in \mathbb{Z}$ o homomorfismo $f^\infty_{p,q} : E^\infty_{p,q} \to \mathscr{E}^\infty_{p,q}$ como sendo $f^\infty_{p,q}\left(x + B^\infty_{p,q}\right) = f^{r_0}_{p,q}(x) + \mathscr{B}^\infty_{p,q}$, onde $\mathscr{E}^\infty_{p,q} = \dfrac{\mathscr{Z}^\infty_{p,q}}{\mathscr{B}^\infty_{p,q}}$. Note que $f^\infty_{p,q}$ é um isomorfismo.

Sejam $E^a_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}$ e $\mathscr{E}^a_{p,q} \Longrightarrow H'_{p+q}$ sequências espectrais limitadas. Dizemos que uma família de homomorfismos $h_\bullet : H_\bullet \to H'_\bullet$ é compatível com um morfismo de sequências espectrais $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ se

i) para todo $p \in \mathbb{Z}$, $h_p(F_pH_n) \subseteq F'_pH'_n$,

ii) para todo $p,n \in \mathbb{Z}$, se $E^\infty_{p,n-p} \overset{\beta_{p,n-p}}{\cong} \dfrac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n}$ e $\mathscr{E}^\infty_{p,n-p} \overset{\beta'_{p,n-p}}{\cong} \dfrac{F'_pH'_n}{F'_{p-1}H'_n}$, então temos um morfismo bem definido $\overline{h}_p : \dfrac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n} \to \dfrac{F'_pH'_n}{F'_{p-1}H'_n}$ tal que

$$f^\infty_{p,n-p} \circ \beta_{p,n-p} = \beta'_{p,n-p} \circ \overline{h}_p.$$

Neste caso escrevemos

$$\begin{tikzcd} E^a_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f^a_{p+q}"] & H_{p+q} \arrow[d, "h_{p+q}"] \\ \mathscr{E}^a_{p,q} \arrow[r, Rightarrow] & H'_{p+q} \end{tikzcd}$$

TEOREMA 1.11 (Teorema da comparação de Sequências Espectrais)**.** *Sejam $E^a_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$ e $\mathscr{E}^a_{p,q} \Rightarrow H'_{p+q}$ sequências espectrais do primeiro quadrante. Suponha dada uma família $h_\bullet : H_\bullet \to H'_\bullet$ compatível com um morfismo de sequências espectrais $\{f_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$. Se $f^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}$ é um isomorfismo para $r \in \mathbb{N}$ fixo e para todo $p,q \in \mathbb{Z}$, então h_n é um isomorfismo, para todo n.*

Demonstração. Sabemos que H_n e H'_n têm filtrações

$$0 = F_{-1}H_n \subseteq F_0H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{n-1}H_n \subseteq F_nH_n = H_n,$$

$$0 = F'_{-1}H'_n \subseteq F'_0H'_n \subseteq \cdots \subseteq F'_{n-1}H'_n \subseteq F'_nH'_n = H'_n,$$

tais que $h_n(F_pH_n) \subseteq F'_pH'_n$ e

$$E^{\infty}_{p,n-p} \cong \frac{F_pH_n}{F_{p-1}H_n}, \quad \mathscr{E}^{\infty}_{p,n-p} \cong \frac{F'_pH'_n}{F'_{p-1}H'n}.$$

Como $f^r_{p,n-p}$ é um isomorfismo, $E^{\infty}_{p,n-p} \cong \mathscr{E}^{\infty}_{p,n-p}$. Temos assim o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E^{\infty}_{0,n} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & F_1H_n \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & E^{\infty}_{1,n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{E}^{\infty}_{0,n} \arrow[r] & F'_1H'_n \arrow[r] & \mathscr{E}^{\infty}_{1,n-1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Logo, pelo Lema da serpente, $F_1H_n \cong F'_1H'_n$. Fazendo o mesmo tratamento para

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_1H_n \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & F_2H_n \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & E^{\infty}_{2,n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F'_1H'_n \arrow[r] & F'_2H'_n \arrow[r] & \mathscr{E}^{\infty}_{2,n-2} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

temos que $F_2H_n \cong F'_2H'_n$. Continuando este processo obtemos $H_n = F_nH_n \cong F'_nH'_n = H'_n$. □

Uma filtração F sobre um complexo de cadeias $(C_\bullet, d_\bullet)$ é uma família de subcomplexos

$$\cdots \subseteq (F_{p-1}C_\bullet, d_\bullet) \subseteq (F_pC_\bullet, d_\bullet) \subseteq (F_{p+1}C_\bullet, d_\bullet) \subseteq \cdots \subseteq (C_\bullet, d_\bullet).$$

Dizemos que esta filtração de $(C_\bullet, d_\bullet)$ é limitada se para cada n, existem números inteiros $s \leq t$ tais que $F_sC_n = 0$ e $F_tC_n = 0$.

TEOREMA 1.12 (Teorema da Convergência Clásico). *Se a filtração do complexo $(C_\bullet, d_\bullet)$ é limitada, então existe uma sequência espetral limitada*

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{F_pC_\bullet}{F_{p-1}C_\bullet}\right) \Longrightarrow H_{p+q}(C_\bullet).$$

Além disso esta convergência é natural, isto é, se $f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$ é um morfismo de complexos com filtrações limitadas, então $f_* : H_*(C_\bullet) \to H_*(C'_\bullet)$ é compatível com o morfismo de sequências espectrais $E^r_{p,q} \to \mathscr{E}^r_{p,q}$ induzido por $f_\bullet$.

Demonstração. Veja-se [15, Teorema 5.5.1]. □

EXEMPLO 1.27. Dizemos que uma filtração F sobre $(C_\bullet, d_\bullet)$ é canonicamente limitada, se para todo n, $F_{-1}C_n = 0$ e $F_nC_n = C_n$. Esta filtração gera uma sequência espectral com $E^0_{p,q} := \dfrac{F_pC_{p+q}}{F_{p-1}C_{p+q}}$. Note que se $p<0$ ou $q<0$, então $E^0_{p,q} = 0$. Portanto temos uma sequência espectral do primeiro quadrante

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{F_pC_\bullet}{F_{p-1}C_\bullet}\right) \Longrightarrow H_{p+q}(C_\bullet).$$

Sejam $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ complexos de cadeias a esquerda de R-módulos. Considere $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ como sendo o complexo produto de $C_\bullet \otimes C'_\bullet$ definido em (1.1). Definamos as seguintes filtrações sobre $(D_\bullet, \partial_\bullet)$

$$\begin{aligned} {}^IF_nD_k &:= \bigoplus_{\substack{p+q=k\\ p\leq n}} C_p \otimes_R C'_q, \\ {}^{II}F_nD_k &:= \bigoplus_{\substack{p+q=k\\ q\leq n}} C_p \otimes_R C'_q. \end{aligned}$$

Claramente estas duas filtrações são canonicamente limitadas. Logo pelo Teorema (1.12) e pelo Exemplo (1.27) temos duas sequências espectrais no primeiro quadrante

$${}^IE^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{{}^IF_pD_\bullet}{{}^IF_{p-1}D_\bullet}\right) \Longrightarrow H_{p+q}(D_\bullet), \qquad {}^{II}E^1_{p,q} = H_{p+q}\left(\frac{{}^{II}F_pD_\bullet}{{}^{II}F_{p-1}D_\bullet}\right) \Longrightarrow H_{p+q}(D_\bullet),$$

onde

$${}^IE^0_{p,q} = \frac{{}^IF_pD_{p+q}}{{}^IF_{p-1}D_{p+q}} = \bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ i\leq p}} C_i \otimes_R C'{}_j \Big/ \bigoplus_{\substack{i'+j'=p+q\\ i'\leq p-1}} C_{i'} \otimes_R C'_{j'} = C_p \otimes_R C'_q, \tag{1.10}$$

$${}^{II}E^0_{p,q} = \frac{{}^{II}F_pD_{p+q}}{{}^{II}F_{p-1}D_{p+q}} = \bigoplus_{\substack{i+j=p+q\\ j\leq p}} C_i \otimes_R C'{}_j \Big/ \bigoplus_{\substack{i'+j'=p+q\\ j'\leq p-1}} C_{i'} \otimes_R C'_{j'} = C_q \otimes_R C'_p. \tag{1.11}$$

Note que ${}^IE^1_{p,q}$ é a homologia na $(p+q)$-ésima posição do complexo $\dfrac{{}^IF_pD_\bullet}{{}^IF_{p-1}D_\bullet}$, isto é, a homologia de

$$C_p \otimes_R C'_\bullet : \cdots \to C_p \otimes_R C'_{n-p} \to \cdots \to C_p \otimes_R C'_{p-q} \to \cdots \to C_p \otimes_R C'_{1-p} \to C_p \otimes_R C'{}_{-p} \to \cdots$$

na posição $p+q$. Assim, ${}^IE^1_{p,q} = H_q(C_p \otimes_R C'_\bullet)$ e os diferenciais são dados por

$${}^Id^1_{p,q} = H_q\left(d_p \otimes id_{C'_\bullet}\right) : H_q\left(C_p \otimes_R C'_\bullet\right) \to H_q\left(C_{p-1} \otimes_R C'_\bullet\right).$$

Analogamente, ${}^{II}E^1_{p,q} = H_q\left(C_\bullet \otimes_R C'_p\right)$ e

$${}^{II}d^1_{p,q} = H_q\left(id_{C_\bullet} \otimes d'_p\right) : H_q\left(C_\bullet \otimes_R C'_p\right) \to H_q\left(C_\bullet \otimes_R C'_{p-1}\right).$$

Reescrevemos esse resultado no seguinte teorema.

Teorema 1.13. *Se $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C'_\bullet, d'_\bullet)$ são complexos à esquerda de R-módulos, então temos as seguintes sequências espectrais*

$$\begin{aligned} {}^{I}E^1_{p,q} = H_q\left(C_p \otimes_R C'_\bullet\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(C_\bullet \otimes_R C'_\bullet), \\ {}^{II}E^1_{p,q} = H_q\left(C_\bullet \otimes_R C'_p\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(C_\bullet \otimes_R C'_\bullet), \end{aligned}$$

onde ${}^{I}d^1_{p,q} = H_q\left(d_p \otimes id_{C'_\bullet}\right)$ *e* ${}^{II}d^1_{p,q} = H_q\left(id_{C_\bullet} \otimes d'_p\right)$.

Seja G um grupo e seja $(C_\bullet, d_\bullet)$ um complexo de $G-$módulos. Para $n \geq 0$, definimos o $n-$ésimo grupo de homologia de G com coeficientes no complexo $C_\bullet$ como

$$H_n(G, C_\bullet) := H_n\left(P_\bullet \otimes_G C_\bullet\right),$$

onde $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Note que se M é um $G-$módulo, então

$$H_n(G, M_\bullet) = H_n(G, M),$$

onde $M_\bullet$ é definido como no Exemplo (1.1). Definimos o complexo augmentado de $(C_\bullet, d_\bullet)$ por M como

$$\cdots \to C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to M \to 0,$$

e denotamos na forma $C_\bullet \to M$.

Teorema 1.14. *Seja G um grupo e seja $C_\bullet \to M$ um complexo de G-módulos. Então existe uma sequência espectral no primeiro quadrante*

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Longrightarrow H_{p+q}(G, C_\bullet)$$

tal que $d^1_{p,q} = H_q(d_{p+1})$. Se o complexo $C_\bullet \to M$ é exato, então para todo n, $H_n(G, C_\bullet) \cong H_n(G, M)$. Portanto

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Longrightarrow H_{p+q}(G, M).$$

Demonstração. Seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Então pelo Teorema (1.13), temos duas sequências espectrais

$$\begin{aligned} {}^{I}E^1_{p,q} = H_q\left(P_p \otimes_G C_\bullet\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(P_\bullet \otimes_G C_\bullet) = H_{p+q}(G, C_\bullet), \\ {}^{II}E^1_{p,q} = H_q\left(P_\bullet \otimes_G C_p\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(P_\bullet \otimes_G C_\bullet) = H_{p+q}(G, C_\bullet). \end{aligned}$$

Pela definição de homologia de grupos

$${}^{II}E^1_{p,q} = H_q\left(P_\bullet \otimes_G C_p\right) = H_q(G, C_p).$$

Se $E^1_{p,q} := {}^{II}E^1_{p,q}$, então temos a sequência espectral

$$E^1_{p,q} = H_q(G, C_p) \Longrightarrow H_{p+q}(G, C_\bullet),$$

onde $d^1_{p,q} = H_q(d_{p+1})$. Agora, seja $C_\bullet \to M$ um complexo exato. Como P_p é projetivo, então o complexo $P_p \otimes_G C_\bullet \to P_p \otimes_G M$ é exato e logo

$$^IE^1_{p,q} = \begin{cases} P_p \otimes_G M & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Portanto

$$^IE^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(P_\bullet \otimes_G M) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} H_p(G,M) & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Pelo Exemplo (1.25), a sequência espectral $^IE^1_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(G,C_\bullet)$ implica que $H_n(G,C_\bullet) \cong H_n(G,M)$ para todo n. □

Seja G um grupo e H um subgrupo normal de G. Se M é um $G-$módulo, então M_H é um $H-$módulo trivial. Portanto M_H é um $G/H-$módulo. Agora, em $(M_H)_{G/H}$

$$gH(m+N) - (m+N) = (gm-m) + N$$

para todo $m \in M$ e para todo $g \in G$, onde N é o $H-$módulo gerado pelos elementos $hm-m$, $h \in H$. Logo, $(M_H)_{G/H} = M_G$.

Teorema 1.15 (Sequência Espectral de Lyndon/Hochschild-Serre). *Para todo subgrupo normal H do grupo G e todo G-módulo M, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante*

$$E^2_{p,q} = H_p\left(G/H, H_q(H,M)\right) \Longrightarrow H_{p+q}(G,M).$$

Além disso, esta convêrgencia é natural. Esta sequência espectral implica a sequência exata

$$H_2(G,M) \longrightarrow H_2(G/H,M_H) \longrightarrow H_1(G,M)_{G/H} \longrightarrow H_1(G,M) \longrightarrow H_1(G/H,M_H) \longrightarrow 0. \quad (1.12)$$

Demonstração. Seja $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G. Considere o complexo $C_\bullet$ de $G/H-$módulos definido por $C_p := P_p \otimes_H M \cong (P_p \otimes_{\mathbb{Z}} M)_H$. Seja $P'_\bullet \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre G/H. Pelo Teorema (1.13) temos duas sequências espectrais

$$\begin{aligned} ^IE^1_{p,q} = H_q\left(P'_p \otimes_{G/H} C_\bullet\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(G/H,C_\bullet), \\ ^{II}E^1_{p,q} = H_q\left(P'_\bullet \otimes_{G/H} C_p\right) &\Longrightarrow \quad H_{p+q}(G/H,C_\bullet), \end{aligned}$$

Como P'_p é um $G/H-$módulo projetivo, o funtor $P'_p \otimes_{G/H} -$ é exato. Logo

$$^IE^1_{p,q} = H_q\left(P'_p \otimes_{G/H} C_\bullet\right) \cong P'_p \otimes_{G/H} H_q(C_\bullet) \cong P'_p \otimes_{G/H} H_q(P_\bullet \otimes_H M) \cong P'_p \otimes_{G/H} H_q(H,M).$$

Tomando a homologia sobre p temos

$$^IE^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(H,M)) \Longrightarrow H_{p+q}(G/H,C_\bullet),$$

onde a ação de G/H é definida como no Exemplo (1.18). Agora na outra sequência espectral temos

$$^{II}E^1_{p,q} = \begin{cases} (C_p)_{G/H} & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Dado que $(C_p)_{G/H} = ((P_p \otimes M)_H)_{G/H} = (P_p \otimes M)_G = P_p \otimes_G M$, temos

$$^{II}E^2_{p,q} = \begin{cases} H_p(P_\bullet \otimes_G M) & \text{se } q = 0 \\ 0 & \text{se } q \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} H_p(G,M) & \text{se } q = 0, \\ 0 & \text{se } q \neq 0. \end{cases}$$

Pelo Exemplo (1.25), a sequência espectral $^{II}E^2_{p,q} \Longrightarrow H_{p+q}(G/H, C_\bullet)$ implica que $H_n(G/H, C_\bullet) \cong H_n(G,M)$ para todo n. Portanto se $E^2_{p,q} := {}^{I}E^2_{p,q}$, então

$$E^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(H,M)) \Longrightarrow H_{p+q}(G,M).$$

Agora essa sequência espectral induz uma filtração sobre $H_1(G,M)$ da forma

$$0 = F_{-1}H_1(G,M) \subseteq F_0H_1(G,M) \subseteq F_1H_1(G,M) = H_1(G,M),$$

tal que

$$E^\infty_{0,1} \cong \frac{F_0H_1(G,M)}{F_{-1}H_1(G,M)} = F_0H_1(G,M),$$
$$E^\infty_{1,0} \cong \frac{F_1H_1(G,M)}{F_0H_1(G,M)} = \frac{H_1(G,M)}{F_0H_1(G,M)}.$$

Assim temos a sequência exata

$$0 \to E^\infty_{0,1} \to H_1(G,M) \to E^\infty_{1,0} \to 0.$$

Por outro lado, é fácil verificar que $E^\infty_{1,0} = E^2_{1,0}$ e $E^\infty_{0,1} = E^3_{0,1} = \operatorname{coker} d^2_{2,0}$, obtendo assim sequência exata

$$0 \longrightarrow E^\infty_{2,0} \longrightarrow E^2_{2,0} \xrightarrow{d^2_{2,0}} E^2_{0,1} \longrightarrow E^\infty_{0,1} \longrightarrow 0.$$

Juntando as duas sequências e dado que $E^\infty_{2,0}$ é um quociente de $H_2(G,M)$, temos a sequência exata

$$H_2(G,M) \to H_2(G/H, H_0(H,M)) \to H_0(G/H, H_1(H,M)) \to H_1(G,M) \to H_1(G/H, H_0(H,M)) \to 0.$$

Portanto temos a sequência exata

$$H_2(G,M) \to H_2(G/H, M_H) \to H_1(H,M)_{G/H} \to H_1(G,M) \to H_1(G/H, M_H) \to 0.$$

□

EXEMPLO 1.28. Seja H um subgrupo normal de G tal que a seguinte sequência exata de grupos cinde

$$1 \to H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G/H \to 1,$$

onde $\alpha : G/H \to G$ é uma seção de g. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & G/H \arrow[r, "id_{G/H}"] \arrow[d, "\alpha"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "id_{G/H}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r, "f"] & G \arrow[r, "g"] & G/H \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

com linhas exatas. Pelo Teorema (1.15) temos um morfismo de sequências espectrais de Lyndon/Hochschild-Serre

$$\begin{tikzcd}
E^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(1,\mathbb{Z})) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "f^2_{p,q}"] & H_{p+q}(G/H,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\alpha_{p+q}"] \\
\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p(G/H, H_q(H,\mathbb{Z})) \arrow[r, Rightarrow] & H_{p+q}(G,\mathbb{Z}).
\end{tikzcd}$$

Como $H_q(1,\mathbb{Z}) = 0$ para todo $q \neq 0$ e $H_0(1,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, temos que $E^2_{p,q} = 0$ para todo $q \neq 0$ e $E^2_{p,0} = H_p(G/H)$. Note que a aplicação $H_0(1) \to H_0(H)$ é um isomorfismo, logo para $r \geq 2$, temos que $f^r_{p,0} : H_p(G/H) \to H_p(G/H)$ é um isomorfismo. Agora para $r \geq 2$ temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 = E^r_{p-r,r-1} \arrow[d, "f^r_{p-r,r-1}"] & E^r_{p,0} = H_p(G/H) \arrow[l, "\overline{d}^r_{p,0}=0"'] \arrow[d, "f^r_{p,0}", "\cong"'] \\
\mathscr{E}^r_{p-r,r-1} & \mathscr{E}^r_{p,0} = H_p(G/H) \arrow[l, "d^r_{p,0}"']
\end{tikzcd}$$

que implica que $d^r_{p,0} = 0$, para todo $r \geq 2$.

Exemplo 1.29. Seja R um anel comutativo com unidade e considere $SL(R)$ como foi definido no Exemplo (1.19). Lembremos que se A e B são subgrupos de um grupo G, definimos $[A,B]$ como o subgrupo gerado por todos os elementos da forma $[a,b] := aba^{-1}b^{-1}$, onde $a \in A$ e $b \in B$. Suponha que R satisfaz que $SL(R) = [SL(R), SL(R)]$. A sequência exata de grupos

$$1 \to SL(R) \xrightarrow{i} GL(R) \xrightarrow{det} R^\times \to 1,$$

cinde pelo homomorfismo

$$\phi : R^\times \longrightarrow GL(R), \qquad\qquad x \longmapsto diag(x,1,1,\cdots).$$

Agora pelo Teorema (1.15) obtemos a sequência espectral de Lyndon/Hochschild-Serre

$$\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p(R^\times, H_q(SL(R))) \Longrightarrow H_{p+q}(GL(R)).$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^2_{p,0} &= H_p(R^\times, H_0(SL(R))) \cong H_p(R^\times), \\
\mathscr{E}^2_{p,1} &= H_p(R^\times, H_1(SL(R))) \cong H_p(R^\times, 0) = 0,
\end{aligned}$$

pois pelo Exemplo (1.10), $H_1(SL(R)) = \frac{SL(R)}{[SL(R),\,SL(R)]} = 0$. Por outro lado, pelo Exemplo (1.19), a ação de $R^\times$ sobre $H_2(SL(R))$ é trivial, logo

$$\mathscr{E}^2_{0,2} = H_0(R^\times, H_2(SL(R))) \cong H_2(SL(R)).$$

Assim a segunda folha desta sequência espectral é da forma

$$\begin{tikzcd}
H_2(SL(R)) & \mathscr{E}^2_{1,2} & \mathscr{E}^2_{2,2} & \mathscr{E}^2_{3,2} & \cdots \\
0 & 0 & 0 \arrow[ull] & 0 \arrow[ull] & \cdots \\
\mathbb{Z} & H_1(R^\times) & H_2(R^\times) \arrow[ull] & H_3(R^\times) \arrow[ull] & \cdots
\end{tikzcd}$$

É fácil verificar que

$$\mathscr{E}^3_{p,0} = \frac{\text{Ker } d^2_{p,0}}{\text{Im } d^2_{p+2,-1}} = \mathscr{E}^2_{p,0}, \qquad \mathscr{E}^3_{p,1} = \frac{\text{Ker } d^2_{p,1}}{\text{Im } d^2_{p+2,0}} = 0,$$

e

$$\mathscr{E}^3_{0,2} \quad = \frac{\text{Ker } d^2_{0,2}}{\text{Im } d^2_{2,1}} = H_2(SL(R)).$$

Assim, a folha $E^3_{p,q}$ é da forma

$$\begin{tikzcd}
H_2(SL(R)) & \mathscr{E}^3_{1,2} & \mathscr{E}^3_{2,2} & \mathscr{E}^3_{3,2} & \mathscr{E}^3_{4,2} & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mathbb{Z} & H_1(R^\times) & H_2(R^\times) & H_3(R^\times) \arrow[uulll] & H_4(R^\times) \arrow[uulll] & \cdots
\end{tikzcd}$$

A sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ induz uma filtração sobre $H_1(GL(R))$ da forma

$$0 = F_{-1}H_1(GL(R)) \subseteq F_0H_1(GL(R)) \subseteq F_1H_1(GL(R)) = H_1(GL(R)),$$

de modo que

$$\mathscr{E}^\infty_{0,1} \cong F_0H_1(GL(R)), \qquad \mathscr{E}^\infty_{1,0} \cong \frac{H_1(GL(R))}{F_0H_1(GL(R))},$$

isto implica

$$H_1(R^\times) \cong H_1(GL(R)). \tag{1.13}$$

Note que pelo Exemplo (1.28), $d^3_{p,0} = 0$. Por outro lado, a sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ induz uma filtração sobre $H_2(GL(R))$ da forma

$$0 = F_{-1}H_2(GL(R)) \subseteq F_0H_2(GL(R)) \subseteq F_1H_2(GL(R)) \subseteq F_2H_2(GL(R)) = H_2(GL(R)),$$

de modo que

$$\mathscr{E}^{\infty}_{0,2} \cong F_0H_2(GL(R)), \qquad \mathscr{E}^{\infty}_{1,1} \cong \frac{F_1H_2(GL(R))}{F_0H_2(GL(R))}, \qquad \mathscr{E}^{\infty}_{2,0} \cong \frac{H_2(GL(R))}{F_1H_2(GL(R))}.$$

Como $\mathscr{E}^{\infty}_{0,2} \cong H_2(SL(R))$, $\mathscr{E}^{\infty}_{1,1} = 0$ e $\mathscr{E}^{\infty}_{2,0} \cong H_2(R^{\times})$, obtemos a sequência exata

$$0 \to H_2(SL(R)) \xrightarrow{i_*} H_2(GL(R)) \xrightarrow{det_* = cor^{R^{\times}}_{GL(R)}} H_2(R^{\times}) \to 0,$$

que cinde pelo homomorfismo induzido por $\phi : R^{\times} \to GL(R)$, pois $det_* \circ \phi_* = (det \circ \phi)_* = (id_{R^{\times}})_* = id_{H_2(R^{\times})}$. Portanto temos a decomposição

$$H_2(GL(R)) \cong \quad H_2(R^{\times}) \oplus H_2(SL(R)). \tag{1.14}$$

Além disso, a sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ induz uma filtração sobre $H_3(GL(R))$ da forma

$$0 = F_{-1}H_3(GL(R)) \subseteq F_0H_3(GL(R)) \subseteq F_1H_3(GL(R)) \subseteq F_2H_3(GL(R)) \subseteq H_3(GL(R)),$$

tal que

$$\mathscr{E}^{\infty}_{0,3} \cong F_0H_3(GL(R)), \quad \mathscr{E}^{\infty}_{1,2} \cong \frac{F_1H_3(GL(R))}{F_0H_3(GL(R))}, \quad \mathscr{E}^{\infty}_{2,1} \cong \frac{F_2H_3(GL(R))}{F_1H_3(GL(R))}, \quad \mathscr{E}^{\infty}_{3,0} \cong \frac{H_3(GL(R))}{F_2H_3(GL(R))}.$$

É fácil verificar que $\mathscr{E}^{\infty}_{0,3} \cong H_3(SL(R))$, $\mathscr{E}^{\infty}_{2,1} = 0$, e $\mathscr{E}^{\infty}_{3,0} \cong H_3(R^{\times})$. Agora pelo Exemplo (1.14), temos que $\mathscr{E}^{\infty}_{1,2} \cong H_1(R^{\times}, H_2(SL(R))) \cong R^{\times} \otimes H_2(SL(R))$, obtendo assim as sequências exatas

$$0 \longrightarrow H_3(SL(R)) \longrightarrow F_2H_3(GL(R)) \longrightarrow R^{\times} \otimes H_2(SL(R)) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow F_2H_3(GL(R)) \longrightarrow H_3(GL(R)) \xrightarrow{det_*} H_3(R^{\times}) \longrightarrow 0.$$

Como $H_3(GL(R)) \cong F_2H_3(GL(R)) \oplus H_3(R^{\times})$, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow H_3(SL(R)) \longrightarrow \frac{H_3(GL(R))}{H_3(R^{\times})} \longrightarrow R^{\times} \otimes H_2(SL(R)) \longrightarrow 0. \tag{1.15}$$

que cinde com uso do homomorfismo $\alpha_* : H_3(GL(R)) \to H_3(SL(R))$, onde $\alpha : GL(R) \to SL(R)$, $A \mapsto \begin{pmatrix} (\det A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Voltaremos nesse exemplo como parte da demonstração de nosso teorema principal no final do Capítulo 4.

1.5 Homologia dos grupos lineares

A continuação apresentaremos dois resultados muito importantes (sem demonstração) sobre homologia dos grupos lineares de ordem n.

PROPOSIÇÃO 1.4. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Seja G_m um subgrupo de $GL_m(R)$ e G_n um subgrupo de $GL_n(R)$ tais que $R^\times I_m \subseteq G_m$ ou $R^\times I_n \subseteq G_n$. Seja $M(R)$ um submódulo de $M_{m,n}(R)$, tal que $G_m M(R) = M(R) = M(R) G_n$. Se $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então a inclusão*

$$\begin{pmatrix} G_m & 0 \\ 0 & G_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} G_m & M(R) \\ 0 & G_n \end{pmatrix},$$

induz um isomorfismo de grupos

$$H_q\left(G_m \times G_n\right) \xrightarrow{\cong} H_q\left(\begin{pmatrix} G_m & M(R) \\ 0 & G_n \end{pmatrix}\right)$$

para todo $q \geq 0$.

Demonstração. Veja-se [11, Teorema 1.9]. □

EXEMPLO 1.30. Se $n = m = 1$ e se $M(R) = R$, então para todo $q \geq 0$ temos o isomorfismo

$$H_q(R^\times \times R^\times) \xrightarrow{\cong} H_q\left(\begin{pmatrix} R^\times & R \\ 0 & R^\times \end{pmatrix}\right).$$

TEOREMA 1.16 (Teorema de Estabilidade Homológica para $GL_n(R)$)**.** *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Se $R/\mathfrak{m}$ é um corpo infinito, então as inclusões*

$$GL_n(R) \longrightarrow GL_{n+1}(R), \qquad A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

induzem os isomorfismos

$$H_n(GL_n(R)) \xrightarrow{\cong} H_n(GL_{n+1}(R)) \xrightarrow{\cong} H_n(GL_{n+2}(R)) \xrightarrow{\cong} H_n(GL_{n+3}(R)) \xrightarrow{\cong} \cdots.$$

Em particular para todo n, $H_n(GL_n(R)) \xrightarrow{\cong} H_n(GL(R))$. Além disso a inclusão

$$i : R^\times \times GL_{n-1}(R) \longrightarrow GL_n(R), \qquad (a, A) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

induz o homomorfismo sobrejetor

$$H_n(R^\times \times GL_{n-1}(R)) \xrightarrow{i_* = H_n(i)} H_n(GL_n(R)).$$

Demonstração. Veja-se [7]. □

CAPÍTULO

2

K_2 DE ANÉIS E O TEOREMA DE MATSUMOTO

A K-teoria algébrica associa para qualquer anel R uma sequência de grupos abelianos $K_n(R)$ $n \geq 0$, chamados K-grupos de R. Neste capítulo estudaremos os K-grupos de ordem inferior de um anel comutativo com unidade R, a saber descreveremos os grupos $K_0(R)$, $K_1(R)$ e $K_2(R)$. Como resultado principal, demonstraremos o teorema de Van der Kallen-Matsumoto sobre a estrutura do grupo $K_2(R)$ onde R é um anel local com corpo residual infinito.

2.1 $K_0(R)$ e $K_1(R)$

Para começar lembremos que um monoide abeliano é um conjunto S munido com uma operação associativa e comutativa, denotada $+$, a qual tem elemento identidade $0 \in S$. Um exemplo de monoide abeliano é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ com a adição usual.

Agora, para cada monoide abeliano S associamos seu grupo completação, isto é um grupo abeliano G junto com um homomorfismo de monoides $\phi : S \to G$ tal que para qualquer grupo abeliano G' e qualquer homomorfismo de monoides $\alpha : S \to G'$ existe um único homomorfismo de grupos abelianos $\theta : G \to G'$ tal que $\theta \circ \phi = \alpha$. Por exemplo, o grupo completação de $\mathbb{N}$ é o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$ com a adição usual.

Para todo monoide abeliano S sempre podemos construir seu grupo completação como segue: Considere o grupo abeliano livre $\mathbb{Z}(S)$ gerado pelos símbolos $[s]$ com $s \in S$ e considere o grupo

$$G = \frac{\mathbb{Z}(S)}{\langle [s+s'] - [s] - [s'] : s, s' \in S \rangle},$$

e defina o homomorfismo de monoides $\phi : S \to G$ dado por $s \to [s]$. É fácil verificar que $\phi : S \to G$

satisfaz a propriedade universal dada anteriormente.

DEFINIÇÃO 2.1. *Seja R um anel com unidade. Definimos o K_0-grupo de R, denotado $K_0(R)$, como sendo o grupo completação de $\mathscr{P}(R)$*

$$K_0(R) := \frac{\mathbb{Z}(\mathscr{P}(R))}{\langle [P \oplus Q] - [P] - [Q] : P, Q \in \mathscr{P}(R) \rangle},$$

onde $\mathscr{P}(R)$ é o monoide abeliano formado pelas classes de isomorfismo de R-módulos projetivos finitamente gerados $[P]$ junto com a soma direta $\oplus$ de R-módulos.

Note que em $K_0(R)$ temos a igualdade $[P \oplus Q] = [P] + [Q]$ onde P e Q são R-módulos projetivos finitamente gerados. Assim, $[R^n] = [R \oplus R \oplus \cdots \oplus R] = n[R] \in K_0(R)$ e $n[R] = m[R]$ se e somente se $n = m$ [5, Lema 1.1]. Isto permite descrever todo elemento em $K_0(R)$ como sendo $[P] - n[R]$ para algum $R-$módulo projetivo P e algum $n \in \mathbb{N}$. Em geral, a descrição do grupo $K_0(R)$ é muito difícil, mas em alguns casos específicos temos uma melhor descrição.

Quando R é um anel comutativo, no monoide $\mathscr{P}(R)$ temos que $P \otimes_R Q \cong Q \otimes_R P$. Além disso, se P e Q são $R-$módulos projetivos finitamente gerados, então também $P \otimes_R Q$ é um $R-$módulo projetivo finitamente gerado. Portanto $K_0(R)$ também é um anel comutativo com multiplicação $[P].[Q] := [P \otimes_R Q]$ e $1_{K_0(R)} = [R]$.

EXEMPLO 2.1. Um $R-$módulo projetivo P é dito estavelmente livre se existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $P \oplus R^r \cong R^s$. Em $K_0(R)$ podemos dizer que esta caracterização é equivalente a dizer que $P = n[R]$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo se R é um anel local ou um domínio de ideais principais, então os R-módulos projetivos finitamente gerados são livres [8, Teorema 1.3.1, Teorema 1.3.11] e portanto estávelmente livres. Assim temos um homomorfismo de grupos abelianos

$$\varphi : K_0(R) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad [P] \longmapsto \text{rank}\,_R P$$

Dado que $\varphi([R]) = 1$, φ é sobrejetor. Se $\varphi([P]) = \varphi([Q])$, então $\text{rank}\,_R P = \text{rank}\,_R Q$. Assim $P \cong Q$, isto é $[P] = [Q]$, logo φ é um isomorfismo. Em consequência, se R é um anel local ou um domínio de ideais principais, então $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis e seja P um R-módulo projetivo finitamente gerado. Então existe um R-módulo Q tal que $P \oplus Q \cong R^n$ para algum inteiro n, logo

$$(P \otimes_R S) \oplus (Q \otimes_R S) = (P \oplus Q) \otimes_R S = R^n \otimes_R S = S^n.$$

Então o funtor

$$- \otimes_R S : {}_R Mod \to {}_S Mod \qquad P \longmapsto P \otimes_R S$$

induz um homomorfismo de monoides $\mathscr{P}(R) \to \mathscr{P}(S)$ e também induz um homomorfismo de grupos

$$\varphi_* : K_0(R) \longrightarrow K_0(S), \qquad [P] \longmapsto [P \otimes_R S].$$

Trivialmente $(id_R)_* = id_{K_0(R)}$. Além disso, se $\psi : S \to T$ é outro homomorfismo de anéis, então $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. Portanto $K_0(-)$ é um funtor da categoria de anéis na categoria de grupos abelianos. Assim, o homomorfismo natural de anéis $i : \mathbb{Z} \to R$, $n \to n.1$, induz um homomorfismo de grupos $i_* : \mathbb{Z} \to K_0(R)$, $n \mapsto n[R]$. Se R é um anel comutativo, o epimorfismo natural $\pi : R \to R/\mathfrak{m}$, $r \mapsto r + \mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal de R, induz um homomorfismo de anéis $\pi_* : K_0(R) \to K_0(R/\mathfrak{m}) \cong \mathbb{Z}$, $[P] \mapsto \dim_{R/\mathfrak{m}}(P/\mathfrak{m}P)$. Note que $\pi_*(n[R]) = \pi_*([R^n]) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(R^n/\mathfrak{m}R^n) = \dim_{R/\mathfrak{m}}(R/\mathfrak{m})^n = n$, logo $\pi_* \circ i_*(n) = \pi_*(n[R]) = n$. Defina o grupo quociente $SK_0(R) := K_0(R)/\mathbb{Z}[R]$ chamado o K_0-grupo reduzido de R e desta maneira temos que $K_0(R) \cong \mathbb{Z} \oplus SK_0(R)$.

DEFINIÇÃO 2.2. *Seja R um anel com unidade. Definimos o K_1-grupo de R, denotado $K_1(R)$, como sendo*

$$K_1(R) := \frac{GL(R)}{[GL(R), GL(R)]}.$$

Para todo $\lambda \in R$ e todo $i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leq i, j \leq n$ com $i \neq j$, definimos a matriz elementar $e^n_{i,j}(\lambda) \in GL_n(R)$ como sendo a matriz com 1 na diagonal, λ na posição (i, j) e 0 nos outros lugares. O subgrupo de $GL_n(R)$ gerado pelas matrizes elementares é denotado $E_n(R)$.

Pela inclusão $GL_n(R) \subset GL_{n+1}(R)$, temos que $E_n(R) \subset E_{n+1}(R)$. A união infinita dos subgrupos $E_n(R)$ é denotada por $E(R)$ e chamada o grupo de matrizes elementares

$$E(R) := \bigcup_{n \geq 1} E_n(R).$$

Note que quando R é comutativo, $E(R) \subset SL(R)$. Para $\lambda, \tau \in R$ temos

- se $i \neq j$, então $\quad e^n_{i,j}(\lambda) e^n_{i,j}(\tau) = e^n_{i,j}(\lambda + \tau)$,
- se $j \neq k$ e $i \neq l$, então $\quad e^n_{i,j}(\lambda) e^n_{k,l}(\tau) = e^n_{k,l}(\tau) e^n_{i,j}(\lambda)$,
- se $j = k$ e $i \neq l$, então $\quad \left[e^n_{i,j}(\lambda), e^n_{k,l}(\tau)\right] = e^n_{i,l}(\lambda\tau)$,
- se $j \neq k$ e $i = l$, então $\quad \left[e^n_{i,j}(\lambda), e^n_{k,l}(\tau)\right] = e^n_{k,j}(-\tau\lambda)$.

Portanto se $n \geq 3$, então $E_n(R) = [E_n(R), E_n(R)]$ e portanto $E(R) = [E(R), E(R)]$. Além disso, se $A \in GL_n(R)$ é uma matriz triangular superior (ou inferior) com 1 na diagonal, então $A \in E_n(R)$. Por exemplo para todo $B = (b_{ij}) \in GL_n(R)$

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \prod_{i,j=1}^{n} e^{2n}_{n+i,j}(b_{ij}) \in E_{2n}(R), \qquad \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \prod_{i,j=1}^{n} e^{2n}_{i,n+j}(b_{ij}) \in E_{2n}(R).$$

LEMA 2.1. *Se $A \in GL_n(R)$, então* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$.

Demonstração. Note que se $A \in GL_n(R)$, então

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A^{-1} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in E_{2n}(R).$$

Em particular, $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$. Portanto

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in E_{2n}(R).$$

□

PROPOSIÇÃO 2.1 (Lema de Whitehead)**.** *Para todo anel com unidade R*

$$E(R) = [E(R), E(R)] = [GL(R), GL(R)]. \tag{2.1}$$

Demonstração. Já vimos que $E(R) = [E(R), E(R)]$, logo $E(R) \subseteq [GL(R), GL(R)]$. Se $A, B \in GL_n(R)$, então pelo Lema (2.1)

$$\begin{pmatrix} ABA^{-1}B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & B^{-1}A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Portanto $[GL(R), GL(R)] \subseteq E(R)$. □

Se R é um anel comutativo e $n \geq 3$, então $E_n(R) = [E_n(R), E_n(R)] \subseteq [GL_n(R), GL_n(R)] \subseteq SL_n(R)$. Assim, $E(R) \subseteq SL(R)$. Mas em geral a inclusão anterior nem sempre é uma igualdade. Defina o grupo quociente

$$SK_1(R) := SL(R)/E(R),$$

chamado o K_1-grupo reduzido de R. Por outro lado, o homomorfismo determinante, $det : GL(R) \to R^\times$, induz uma sobrejeção $det_* : K_1(R) \to R^\times$, logo temos a sequência exata

$$1 \to SK_1(R) \to K_1(R) \to R^\times \to 1.$$

Utilizando uma seção dada pela composição $R^\times = GL_1(R) \to GL(R) \to K_1(R)$ temos a decomposição

$$K_1(R) \cong R^\times \oplus SK_1(R).$$

Um vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$ é dito unimodular se existe um vector $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ tal que $\sum_{j=1}^n x_j v_j = 1$. É fácil ver que $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$ é unimodular se e somente se $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = R$. Por exemplo, se $A = (a_{ij}) \in GL_n(R)$, usando o fato que $AA^{-1} = I_n$, temos que a $i-$ésima linha de A, $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, é unimodular para todo $1 \leq i \leq n$.

EXEMPLO 2.2. Seja R um domínio euclidiano com aplicação norma $|\ |: R \to \mathbb{N}$. Vamos demonstrar que para todo $n \geq 2$, $E_n(R) = SL_n(R)$. Claramente $E_n(R) \subseteq SL_n(R)$. Seja $A = (a_{ij}) \in SL_n(R)$ e seja $v = (a_{11}, \ldots, a_{n1}) \in R^n$ a primeira coluna de A. Dado que $A \in GL_n(R)$ então não todos os elementos da primeira coluna podem ser nulos, logo existe $a_{k1} \neq 0$ para algum $1 \leq k \leq n$. Escolha agora $a_{i1} \in R$ tal que $|a_{i1}| = \min\{|a_{11}|, \ldots, |a_{n1}|\}$. Se $|a_{i1}| = 1$, então pelo algoritmo euclidiano existem $q, r \in R$ tal que $1 = qa_{i1} + r$ com $0 \leq |r| < |a_{i1}| = 1$. Isto implica que $r = 0$ e portanto $a_{i1} \in R^\times$. Por outro lado, se $|a_{i1}| > 1$, então $a_{i1} \notin R^\times$ e $\langle a_{i1} \rangle \subsetneq R$. Logo existe $j \neq i$ tal que $a_{j1} \notin \langle a_{i1} \rangle$. Agora pelo algoritmo euclidiano existem $q_j, r_j \in R$ tal que $a_{j1} = q_j a_{i1} + r_j$ com $0 \leq |r_j| < |a_{i1}|$. Seja $A' := e^n_{ji}(-q_j)A \in SL_n(R)$, então $v' = (v'_1, \ldots, v'_n) = (a_{11}, \ldots, a_{i1}, \ldots, r_j, \ldots, a_{n1}) \in R^n$ é a primeira coluna de A'. Escolha novamente $v'_i \in R$ tal que $|v'_i| = \min\{|v'_1|, \ldots, |v'_n|\} < |a_{i1}|$. Se $|v'_i| = 1$ então $v'_i \in R^\times$ e se $|v'_i| > 1$ fazendo o mesmo tratamento acima, podemos encontrar uma matriz $E \in E_n(R)$ tal que a primeira coluna $(w_1, \ldots, w_n)$ de EA tem a propriedade que $\min\{|w_1|, \ldots, |w_n|\} < |v'_i|$. Com este método podemos achar $E \in E_n(R)$ tal que a primeira coluna de EA tenha um coeficiente a_{i1} em $R^\times$. Sem perda de generalidade podemos supor que $i = 1$, isto é $a_{11} \in R^\times$, caso contrário consideramos $A' = e^n_{1i}(1)e^n_{i1}(-1)e^n_{1i}(1)A$, com isto obtemos que $a'_{11} \in R^\times$. Assim, obtemos uma matriz em $SL_n(R)$ tal que a primeira coluna só tenha $a_{11} \in R^\times$ e $a_{i1} = 0$ se $i \neq 1$. Desta maneira podemos encontrar matrizes $E, E' \in E_n(R)$ tais que

$$EAE' = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

para algum $r \in R^\times$ e $B \in SL_{n-1}(R)$. Fazendo indução sobre n, basta demonstrar que $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \in E_2(R)$. Mas este é um caso especial do Lema (2.1). Portanto $SL_n(R) \subseteq E_n(R)$. Como consequência temos $SK_1(R) = 1$ e logo $K_1(R) \cong R^\times$. Em particular, $K_1(\mathbb{Z}) \cong \{-1, +1\}$ e $K_1(F[x]) \cong F^\times$, onde F é um corpo.

EXEMPLO 2.3. Seja R um anel comutativo local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Vamos demonstrar que $E_n(R) = SL_n(R)$ para todo $n \geq 2$. Claramente $E_n(R) \subseteq SL_n(R)$ e de forma análoga como foi feito na última parte do exemplo anterior, podemos demonstrar que $SL_n(R) \subseteq E_n(R)$. Em consequência temos $SK_1(R) = 1$ e portanto $K_1(R) \cong R^\times$.

Um homomorfismo de anéis $f: R \to S$ induz um homomorfismo de grupos $f_n : GL_n(R) \to GL_n(S)$, $(a_{ij}) \mapsto (f(a_{ij}))$ que induz um homomorfismo de grupos $f_\infty : GL(R) \to GL(S)$. É claro que $f_n(E_n(R)) \subseteq E_n(S)$ logo $f_\infty(E(R)) \subseteq E(S)$. Assim obtemos um homomorfimos induzido de grupos abelianos

$$K_1(f) : K_1(R) \to K_1(S), \qquad \overline{(a_{ij})} \mapsto \overline{f(a_{ij})}.$$

É fácil verificar que $K_1(-)$ é um funtor da categoria de anéis na categoria de grupos abelianos.

2.2 Extensões Universais

Seja G um grupo qualquer e seja A um grupo abeliano. Uma extensão central de G por A é um par (E,φ) onde E é um grupo, $\varphi : E \to G$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos tal que $A = \text{Ker } \varphi \subseteq Z(E)$, onde $Z(E)$ é o centro de E. Normalmente denotamos esta extensão por

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

Uma extensão central (E,φ) de G por A cinde se existe um homomorfismo $s : G \to E$ tal que $\varphi \circ s = id_G$. Uma extensão central (E,φ) de G por A é dita universal se para qualquer outra extensão central (E',φ') de G por algum grupo abeliano A', existe um único homomorfismo $h : E \to E'$ tal que $\varphi' \circ h = \varphi$. Sejam $(E,\varphi),(E',\varphi')$ extensões centrais universais de G por A e A' respetivamente. Então existem homomorfismos $h : E \to E'$ e $h' : E' \to E$ tais que $\varphi' \circ h = \varphi$ e $\varphi \circ h' = \varphi'$. Portanto, $E \cong E'$ e $A \cong A'$.

Dizemos que um grupo G é perfeito se $G = [G,G]$.

Lema 2.2. *Sejam (E,φ) e (E',φ') extensões centrais de G por A e A'. Se E é perfeito, então só existe no máximo um homomorfismo de $h : E \to E'$ tal que $\varphi' \circ h = \varphi$.*

Demonstração. Considere $h_1,h_2 : E \to E'$ homomorfismos tais que $\varphi' \circ h_1 = \varphi' \circ h_2 = \varphi$. Se $x,y \in E$, então

$$\begin{aligned} \varphi'\left(h_1(x)h_2(x)^{-1}\right) &= \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = 1, \\ \varphi'\left(h_1(y)h_2(y)^{-1}\right) &= \varphi(y)\varphi(y)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Logo existem $z,z' \in A' \subseteq Z(E')$ tais que $h_1(x) = h_2(x)z$, $h_1(y) = h_2(y)z'$. Assim

$$h_1\left(xyx^{-1}y^{-1}\right) = h_1(x)h_1(y)h_1(x)^{-1}h_1(y)^{-1} = h_2(x)h_2(y)h_2(x)^{-1}h_2(y)^{-1} = h_2(xyx^{-1}y^{-1}).$$

Dado que h_1 e h_2 coinciden em $[x,y]$ para todo $x,y \in E$ e já que E é perfeito, então $h_1 = h_2$. □

Lema 2.3. *Seja (E,φ) é uma extensão central de G por A. Se (E,φ) é universal, então E é perfeito.*

Demonstração. Suponha que E não é perfeito. Considere $A' = E/[E,E]$ e seja $\psi : E \to A'$ o homomorfismo quociente. É claro que os homomorfismos

$$\begin{aligned} h_1 : E \to G \times A', &\qquad x \longmapsto (\varphi(x),1), \\ h_2 : E \to G \times A', &\qquad x \longmapsto (\varphi(x),\psi(x)), \end{aligned}$$

são diferentes. Além disso, $(E' = G \times A',\varphi')$ é uma extensão central de G por A', onde φ' é a projeção de $G \times A'$ sobre G, satisfazendo $\varphi' \circ h_1 = \varphi' \circ h_2 = \varphi$. Portanto, (E,φ) não é universal. □

Lema 2.4. *Seja (E,φ) uma extensão central de G por A. Se G é perfeito, então o subgrupo comutador $E' = [E,E]$ é perfeito e $\varphi(E') = G$. Portanto, $(E',\varphi|_{E'})$ é uma extensão central de G por A.*

Demonstração. Se $g, g' \in G$, então existem $x, x' \in E$ tais que $\varphi(x) = g$ e $\varphi(x') = g'$. Assim

$$\varphi([x,x']) = \varphi(x)\varphi(x')\varphi(x)^{-1}\varphi(x')^{-1} = [g,g'].$$

Portanto $\varphi(E') = G$. Agora se $x \in E$ existe $x' \in E'$ tal que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Logo $x = x'z$ para algum $z \in \text{Ker } \varphi \subseteq Z(E)$. Sejam $x = x'z, y = y'w \in E$, onde $z, w \in \text{Ker } \varphi$. Então

$$[x,y] = [x'z, y'w] = [x', y'] \in [E', E'].$$

Portanto E' é perfeito. □

PROPOSIÇÃO 2.2. *Uma extensão central (E, φ) de G por A é universal se, e somente se, E é perfeito e toda extensão central de E cinde.*

Demonstração. Seja (E, φ) uma extensão central universal de G por A. Pelo Lema (2.3), E é perfeito. Seja (E'', ψ) uma extensão central de E por algum grupo abeliano A''. Defina $A' :=$ Ker $(\varphi \circ \psi)$. Se $x_0 \in A'$, então $\psi(x_0) \in A = \text{Ker } \varphi \subset Z(E)$. Assim o homomorfismo

$$h : E'' \longrightarrow E'', \qquad x \longmapsto x_0 x x_0^{-1},$$

satisfaz $\psi \circ h = \psi$. Se $X = [E'', E'']$, pelos Lemas (2.2) e (2.4) tem-se que $(X, \psi|_X)$ é uma extensão central de E e $h|_X$ é a identidade. Portanto x_0 comuta com os elementos de X, pois $x = h(x) = x_0 x x_0^{-1}$. Pelo Lema (2.4), se $x \in E''$, existem $x' \in X$ e $z \in \text{Ker } \psi \subseteq Z(E'')$ tais que $x = x'z$. Logo x_0 comuta também com os elementos de E''. Portanto $A' \subseteq Z(E'')$ e $(E'', \varphi \circ \psi)$ é uma extensão central de G por A'. Dado que (E, φ) é universal existe um único homomorfismo $s : E \to E''$ tal que $\varphi = (\varphi \circ \psi) \circ s = \varphi \circ (\psi \circ s)$. Assim pelo Lema (2.2), $\psi \circ s = id_E$ e logo (E'', ψ) cinde. Recíprocamente, seja (E', φ') uma extensão central de G por A e seja $E'' = \{(x,y) : \varphi(x) = \varphi'(y)\} \subset E \times E'$. Considere a projecão $\pi_1 : E'' \to E$, $(x,y) \mapsto x$. Note que (E'', π_1) é uma extensão central de E, logo existe um homomorfismo $s : E \to E''$ tal que $\pi_1 \circ s = id_E$. Considere agora a projeção $\pi_2 : E'' \to E'$, $(x,y) \mapsto y$ e defina $h : E \to E'$ como sendo $h = \pi_2 \circ s$. Se $x \in E$ e $s(x) = (x', y')$, então $\varphi(x') = \varphi'(y')$ e $x = \pi_1(s(x)) = \pi_1(x', y') = x'$. Portanto

$$(\varphi' \circ h)(x) = \varphi'(\pi_2(s(x))) = \varphi'(\pi_2(x', y')) = \varphi'(y') = \varphi(x') = \varphi(x).$$

Pelo Lema (2.2) e dado que E é perfeito, temos que (E, φ) é universal. □

PROPOSIÇÃO 2.3. *Um grupo G admite uma extensão central universal se, e somente se, G é perfeito.*

Demonstração. Seja (E, φ) uma extensão central universal de G por algum grupo abeliano A. Pela Proposição (2.2), E é perfeito e dado que $\varphi(E) = G$, então

$$[G,G] = [\varphi(E), \varphi(E)] = \varphi([E,E]) = \varphi(E) = G.$$

Logo, G é perfeito. Recíprocamente, suponha que G é perfeito e escolha um grupo livre F e um homomorfismo sobrejetor $\phi : F \to G$ e seja $R = \text{Ker } \phi$. Note que $[R,F]$ é normal em F. Logo temos um homomorfismo sobrejetor $\varphi : F/[R,F] \to G \cong F/R$. Claramente, $(F/[R,F], \varphi)$ é uma extensão central de G por Ker φ. Note que $[F/[R,F], F/[R,F]] = [F,F]/[R,F]$ e pelo Lema (2.4), $([F,F]/[R,F], \varphi|_{[F,F]/[R,F]})$ é uma extensão central de G por Ker φ, onde $[F,F]/[R,F]$ é perfeito. Seja (X,ψ) uma extensão central de G por algum grupo abeliano A'. Dado que F é um grupo livre, existe um homomorfismo $h : F \to X$ tal que $\psi \circ h = \phi$. Dado que (X,ψ) é uma extensão central, então $h([R,F]) = 1$. Logo temos um homomorfismo $h' : F/[R,F] \to X$ tal que $\psi \circ h' = \varphi$. Restringindo $h'|_{[F,F]/[R,F]}$ obtemos um homomorfismo $[F,F]/[R,F] \to G$ que satisfaz as condições do Lema (2.2) e é único. Portanto a extensão $([F,F]/[R,F], \varphi|_{[F,F]/[R,F]})$ é universal. $\square$

Na demonstração anterior, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \varphi|_{[F,F]/[R,F]} \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\varphi} G \to 1.$$

Note que Ker $\varphi|_{[F,F]/[R,F]} = (R \cap [F,F])/[R,F]$. Note também que $(R/[R,R])_G = R/[R,F]$. Agora aplicando o Teorema (1.15), sobre a sequência exata

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\phi} G \longrightarrow 1,$$

obtemos a sequência exata

$$H_2(F) \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow H_1(R)_G \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow H_1(G) \longrightarrow 0.$$

Já que G é perfeito, por (1.2) temos $H_1(G) = G/[G,G] = 0$. Dado que F é livre, por (1.4) temos que $H_2(F) = 0$. Assim temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow R/[R,F] \longrightarrow F/[F,F] \longrightarrow 0.$$

Portanto

$$H_2(G) \cong \text{Ker } (R/[R,F] \to F/[F,F]) = (R \cap [F,F])/[R,F].$$

Assim obtemos a sequência exata que define a extensão central universal

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

LEMA 2.5. *Seja G um grupo perfeito. Então $H_2(G) = 0$ se, e somente se, toda extensão central de G cinde.*

Demonstração. Dado que G é perfeito, então temos a extensão central universal

$$0 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow [F,F]/[R,F] \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1,$$

onde $1 \to R \to F \to G \to 1$ é uma presentação de G. Se $H_2(G) = 0$, então a extensão central universal está dada pela sequência exata $1 \to 1 \to G \xrightarrow{id_G} G \to 1$. Seja (E, φ) uma extensão central de G. Então existe um homomorfismo $h : G \to E$ tal que $\varphi \circ h = id_G$, logo (E, φ) cinde. Recíprocamente, suponha que toda extensão central de G cinde. Seja (E, φ) uma extensão central de G. Então existe um homomorfismo $s : G \to E$ tal que $\varphi \circ s = id_G$. Logo a extensão central de G dada por

$$1 \to 1 \to G \xrightarrow{id_G} G \to 1$$

é universal. Portanto $H_2(G) = 0$. $\square$

COROLÁRIO 2.1. *Seja G um grupo perfeito. Então uma extensão central (E, φ) de G é universal se, e somente se, $H_1(E) = H_2(E) = 0$.*

Demonstração. Seja (E, φ) uma extensão central de G. Pela Proposição (2.2), (E, φ) é universal se, e somente se, E é perfeito e toda extensão central de E cinde. Note que E é perfeito se, e somente se, $H_1(E) = 0$ e pelo Lema (2.5), $H_2(E) = 0$ se, e somente se toda extensão central de E cinde. O resultado segue de forma direita. $\square$

2.3 $K_2(R)$

Com estas ferramentas já definidas, começaremos o estudo do K_2-grupo do anel R. Para $n \geq 3$, defina o $n-$ésimo grupo Steinberg do anel R, denotado $St_n(R)$, como sendo o grupo livre gerado pelos símbolos $x^n_{ij}(\lambda)$ com $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ e $\lambda \in R$, satisfazendo as relações de Steinberg

- $x^n_{ij}(\lambda)x^n_{ij}(\tau) = x^n_{ij}(\lambda + \tau)$, se $i \neq j$,
- $[x^n_{ij}(\lambda),\, x^n_{kl}(\tau)] = \begin{cases} 1 & \text{se } j \neq k \text{ e } i \neq l \\ x^n_{il}(\lambda\tau) & \text{se } j = k \text{ e } i \neq l \\ x^n_{kj}(-\tau\lambda) & \text{se } j \neq k \text{ e } i = l \end{cases}$

Dado que as matrizes elementares $e^n_{i,j}(\lambda) \in E_n(R)$ satisfazem as relações anteriores, então existe um homomorfismo sobrejetor $\phi_n : St_n(R) \to E_n(R)$ definido por $x^n_{ij}(\lambda) \mapsto e^n_{i,j}(\lambda)$. As relações de Steinberg para $n+1$ contêm as relações de Steinberg para n, assim existe um homomorfismo $St_n(R) \to St_{n+1}(R)$ definido por $x^n_{ij}(\lambda) \mapsto x^{n+1}_{ij}(\lambda)$. Definimos o grupo Steinberg do anel R como sendo

$$St(R) := \varinjlim St_n(R),$$

induzindo assim um morfismo sobrejetor $\phi : St(R) \to E(R)$. Note que pelas relações de Steinberg, $St(R)$ é um grupo perfeito.

DEFINIÇÃO 2.3. *Seja R um anel com unidade. Definimos o K_2-grupo de R, denotado por $K_2(R)$, como sendo*

$$K_2(R) := Ker\ (\phi : St(R) \to E(R)).$$

Temos assim a sequência exata

$$1 \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow St(R) \xrightarrow{\phi} E(R) \longrightarrow 1.$$

Agora se $\alpha : R \to S$ é um homomorfismo de anéis, então temos um homomorfismo de grupos

$$\alpha' : St(R) \longrightarrow St(S), \qquad x^n_{ij}(\lambda) \longmapsto x^n_{ij}(\alpha(\lambda)).$$

É claro que $\alpha'(K_2(R)) \subseteq K_2(S)$. Então restringindo o homomorfismo anterior a $K_2(R)$ obtemos um homomorfismo de grupos bem definido $K_2(\alpha) : K_2(R) \to K_2(S)$. É fácil verificar que $K_2(-)$ é um funtor da categoria de anéis na categoria de grupos.

PROPOSIÇÃO 2.4. *Seja R um anel. Então $K_2(R) = Z(St(R))$.*

Demonstração. Se $A \in Z(E(R))$, então existe $n > 0$ tal que $A \in E_n(R)$. Assim, em $E_{2n}(R)$ temos

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Logo, $A = I$ e portanto $Z(E(R)) = 1$. Se $B \in Z(St(R))$, então $\phi(B) \in Z(E(R)) = 1$. Assim, temos que $B \in K_2(R)$. Por outro lado, fixe $m > 0$ e defina os subgrupos abelianos de $St(R)$,

$$A_m := \langle x^n_{im}(\lambda) : i \neq m, \lambda \in R, n > 0 \rangle,$$

$$B_m := \langle x^n_{mj}(\lambda) : j \neq m, \lambda \in R, n > 0 \rangle.$$

Se $p \neq q$ e $n > 0$, então

$$\begin{aligned} x^n_{pq}(\lambda) &\in A_m \quad &&\text{se } q = m, \\ x^n_{pq}(\lambda) &\in B_m \quad &&\text{se } p = m, \\ x^n_{pq}(\lambda) = [x^n_{pm}(\lambda), x^n_{mq}(1)] &\in [A_m, B_m] \quad &&\text{se } p \neq m, q \neq m. \end{aligned}$$

Note que ϕ restringida a A_m e B_m é injetora. Agora pelas relações de Steinberg, temos que

- se $p \neq m$ e $n > 0$, então

$$x^n_{pq}(\lambda)x^n_{im}(\tau)\left(x^n_{pq}(\lambda)\right)^{-1} = \begin{cases} x^n_{im}(\tau) & \text{se } q \neq i \\ x^n_{pm}(\lambda\tau)x^n_{im}(\tau) & \text{se } q = i, \end{cases}$$

- se $q \neq m$ e $n > 0$, então

$$x^n_{pq}(\lambda)x^n_{mj}(\tau)\left(x^n_{pq}(\lambda)\right)^{-1} = \begin{cases} x^n_{mj}(\tau) & \text{se } p \neq j \\ x^n_{mq}(-\tau\lambda)x^n_{mj}(\tau) & \text{se } p = j. \end{cases}$$

Portanto para $p \neq m$, $q \neq m$ e $n > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} x^n_{pq}(\lambda)A_m\left(x^n_{pq}(\lambda)\right)^{-1} &\subseteq A_m, \\ x^n_{pq}(\lambda)B_m\left(x^n_{pq}(\lambda)\right)^{-1} &\subseteq B_m. \end{aligned}$$

Agora, seja $x \in K_2(R)$ e seja

$$x = \prod_{l=1}^{s} x^n_{i_l j_l}(\lambda_l), \qquad \text{onde} \qquad \prod_{l=1}^{s} e^n_{i_l, j_l}(\lambda_l) = 1 \quad \text{em } E(R).$$

Se $N > i_l, j_l$, para todo $1 \leq l \leq s$, então para todo $\alpha \in A_N$ e $\beta \in B_N$ temos que $x\alpha x^{-1} \in A_N$ e $x\beta x^{-1} \in B_N$. Logo

$$\phi(x\alpha x^{-1}) = \phi(\alpha), \qquad \phi(x\beta x^{-1}) = \phi(\beta).$$

Dado que $\phi|_{A_N}$ e $\varphi|_{B_N}$ são injetoras, $x \in Z(A_N)$ e $x \in Z(B_N)$. Portanto $x \in Z(St(R))$. □

Assim, $K_2(R)$ é um grupo abeliano. É fácil ver que $K_2(-)$ é um funtor da categoria de anéis na categoria de grupos abelianos.

Proposição 2.5. *Seja R um anel com unidade. Então $(St(R), \phi)$ é uma extensão central universal de $E(R)$ por $K_2(R)$.*

Demonstração. Pela Proposição (2.2), é suficiente provar que toda extensão central de $St(R)$ cinde. Seja (E, ψ) uma extensão central de $St(R)$. Definimos o homomorfismo

$$s : St(R) \longrightarrow E, \qquad x^n_{ij}(\lambda) \longmapsto \left[\psi^{-1}\left(x^n_{ik}(1)\right), \psi^{-1}\left(x^n_{kj}(\lambda)\right)\right]$$

para algum $k \neq i, j$. Notemos que se i, j, k, l são distintos e $\lambda, \tau \in R$, então

$$\left[\psi^{-1}\left(x^n_{ik}(\lambda)\right), \psi^{-1}\left(x^n_{kj}(\tau)\right)\right] = \left[\psi^{-1}\left(x^n_{il}(\lambda)\right), \psi^{-1}\left(x^n_{lj}(\tau)\right)\right].$$

Logo s é independente da escolha de k. Note que se $x, y \in St(R)$ e $p, p', q, q' \in E$ tais que $\psi(p) = \psi(p') = x$ e $\psi(q) = \psi(q') = y$, então $[p, q] = [p', q']$. Logo tem sentido definir $\left[\psi^{-1}(x), \psi^{-1}(y)\right]$. Note que $s(x^n_{ij}(\lambda))$ satisfaz as relacões de Steinberg e $s(x^n_{ij}(\lambda)) \in \psi^{-1}\left(x^n_{ij}(\lambda)\right)$. Portanto $(\psi \circ s) = id_{St(R)}$ e portanto (E, ψ) cinde. □

Temos assim a sequência exata que define a extensão central universal de $E(R)$ por $K_2(R)$

$$1 \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow St(R) \xrightarrow{\phi} E(R) \longrightarrow 1.$$

Pela Proposição (2.1) temos que $E(R)$ é perfeito e pelo Corolário (2.1) temos que

$$H_1(St(R)) = 0, \quad H_2(St(R)) = 0. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Seja R um anel com unidade. Então $K_2(R) \cong H_2(E(R))$.*

Demonstração. A sequência exata

$$1 \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow St(R) \xrightarrow{\phi} E(R) \longrightarrow 1$$

induz a sequência espectral de Lyndon/Hochschild-Serre

$$E^2_{p,q} = H_p\left(E(R), H_q(K_2(R))\right) \Longrightarrow H_{p+q}(St(R)).$$

Como $K_2(R)$ é o centro de $St(R)$, $E(R)$ age trivialmente sobre $H_q(K_2(R))$. Calculamos alguns elementos da sequência espectral:

- Se $q = 0$, então
$$E^2_{p,0} = H_p(E(R), H_0(K_2(R))) = H_p(E(R)).$$
- Se $p = 1$, então pelo Exemplo 1.14 e do fato que $E(R)$ é perfeito, temos
$$E^2_{1,q} \quad = H_1(E(R), H_q(K_2(R))) = H_1(E(R)) \otimes H_q(K_2(R)) = 0.$$
- Se $p = 0$ e $q = 1$, então
$$E^2_{0,1} = H_0(E(R), H_1(K_2(R))) = H_0(E(R), K_2(R)) = K_2(R).$$

Então a segunda folha desta sequência espectral é dada por

$$\begin{tikzcd}
K_2(R) & 0 & * & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & H_2(E(R)) \arrow[ull, "d^2_{2,0}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Assim $E^\infty_{0,1} = E^3_{0,1} = \operatorname{Coker} d^2_{2,0}$ e $E^\infty_{2,0} \cong E^3_{2,0} = \operatorname{Ker} d^2_{2,0}$. Considere as filtrações

$$0 = F_{-1}H_1(St(R)) \subseteq F_0H_1(St(R)) \subseteq F_1H_1(St(R)) = H_1(St(R)),$$

$$0 = F_{-1}H_2(St(R)) \subseteq F_0H_2(St(R)) \subseteq F_1H_2(St(R)) \subseteq F_2H_2(St(R)) = H_2(St(R)),$$

induzidas pela sequência espectral $E^2_{p,q}$. Como $H_1(St(R)) = H_2(St(R)) = 0$, $E^\infty_{0,1} = E^\infty_{2,0} = 0$. Assim $E^3_{0,1} = E^3_{2,0} = 0$ e logo $d^2_{2,0} : H_2(E(R)) \to K_2(R)$ é um isomorfismo. Portanto $K_2(R) \cong H_2(E(R))$. $\square$

2.4 Sequência Espectral Principal

Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Para $n \geq 0$ seja

$$X_n := \{(\langle v_0\rangle, \ldots, \langle v_n\rangle) : v_i \in R^2, 0 \neq \overline{v_i} \in R/\mathfrak{m} \text{ e } \langle \overline{v_i}\rangle \neq \langle \overline{v_j}\rangle, \text{ se } i \neq j\}.$$

onde $\langle v_i \rangle := Rv_i$. Definimos para $n \geq 0$ os $\mathbb{Z}$-módulos livres $C_n(R^2) := \mathbb{Z}(X_n)$ e defina os homomorfismos

$$\partial_0 : C_0(R^2) \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad \sum_j m_j \left(\langle v_0^j \rangle \right) \longmapsto \sum_j m_j,$$

e para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(R^2) &\longrightarrow C_{n-1}(R^2), \\ \sum_j m_j \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) &\longmapsto \sum_j m_j \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j \rangle}, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) \right), \end{aligned}$$

onde

$$\left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j \rangle}, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) = \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_{k-1}^j \rangle, \langle v_{k+1}^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right).$$

LEMA 2.6. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Então a sequência*

$$C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z} : \qquad \cdots \to C_{n+1}(R^2) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(R^2) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(R^2) \to \cdots \to C_0(R^2) \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \to 0,$$

é um complexo de cadeias. Além disso, se $R/\mathfrak{m}$ for infinito, então $C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z}$ é exato.

Demonstração. Dado que $\partial_0(\langle v_0^j \rangle) = 1$, então ∂_0 é sobrejetor. Além disso

$$\partial_0 \circ \partial_1 \left(\langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle \right) = \partial_0 \left(\langle v_1 \rangle - \langle v_0 \rangle \right) = 1 - 1 = 0.$$

Assim, $\operatorname{Im} \partial_1 \subset \operatorname{Ker} \partial_0$. Agora para $n \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1} \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) &= \partial_n \left(\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial_n \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \\ &= (-1)^{j+k} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k \rangle}, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \\ &\quad -(-1)^{j+k} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \widehat{\langle v_k \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \\ &= (-1)^{j+k} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k \rangle}, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \\ &\quad -(-1)^{j+k} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\langle v_0 \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_j \rangle}, \ldots, \widehat{\langle v_k \rangle}, \ldots, \langle v_{n+1} \rangle \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim para $n \geq 1$, $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_n$. Portanto $C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias. Seja $R/\mathfrak{m}$ um corpo infinito e seja $x = \sum_j m_j \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) \in C_n(R^2)$ tal que $\partial_n(x) = 0$, isto é,

$$\sum_j m_j \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j \rangle}, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) \right) = 0.$$

Como $R/\mathfrak{m}$ é infinito, existe $w \in R^2$ tal que $\langle \overline{w} \rangle \neq \langle \overline{v_i}^j \rangle$, para todo $i = 0, \ldots, n$ e para todo j. Se

$$y = (-1)^{n+1} \sum_j m_j \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle, \langle w \rangle \right) \in C_{n+1}(R^2),$$

então

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(y) \quad &= (-1)^{n+1} \sum_j m_j \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j \rangle}, \ldots, \langle v_n^j \rangle, \langle w \rangle \right) \right) \\
&+ (-1)^{n+1} \sum_j m_j (-1)^{n+1} \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) \\
&= (-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \sum_j m_j \left(\langle v_0^j \rangle, \ldots, \langle v_n^j \rangle \right) \\
&= x \in \operatorname{Im} \partial_{n+1}.
\end{aligned}$$

Portanto, $C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z}$ é um complexo exato. $\square$

Seja G um grupo agindo sobre o conjunto X. Definimos a órbita e o subgrupo estabilizador de $x \in X$ como sendo

$$\begin{aligned}
o(x) &:= \quad \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq X, \\
G_x &:= \quad \{g : g \cdot x = x\} \subseteq G.
\end{aligned}$$

Dizemos que um subconjunto T de X é um conjunto de representantes das órbitas de X se T corta cada órbita da ação de G em um único ponto. Assim podemos escrever X como uma reunião disjunta das órbitas dos elementos de T, isto é

$$X = \bigsqcup_{x \in T} o(x).$$

LEMA 2.7. *Seja G um grupo agindo sobre o conjunto X e seja T um conjunto de representantes das órbitas de X. Então*

$$\mathbb{Z}X \cong \bigoplus_{x \in T} (\mathbb{Z}G \otimes_{G_x} \mathbb{Z}).$$

Demonstração. Considere o G-homomorfismo

$$\begin{aligned}
\phi : \bigoplus_{x \in T} (\mathbb{Z}G \otimes_{G_x} \mathbb{Z}) \quad &\longrightarrow \mathbb{Z}X, \\
\left(\sum_{g_x \in G} n_{g_x} g_x \otimes m_x \right)_{x \in T} \quad &\longmapsto \sum_{x \in T} \left(\sum_{g_x \in G} (m_x n_{g_x}) \cdot (g_x x) \right).
\end{aligned}$$

Seja $y' = \sum_{y \in X} n_y y \in \mathbb{Z}X$. Então para todo $y \in X$, existe $g_y \in G$ e um único $x_y \in T$ tal que $g_y x_y = y$. Definimos a aplicação ϕ como sendo

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{Z}X \quad &\longrightarrow \bigoplus_{x \in T} (\mathbb{Z}G \otimes_{G_x} \mathbb{Z}), \\
y' \quad &\longmapsto (g_y \otimes n_y)_{x \in T}.
\end{aligned}$$

Suponha que existem $g_y, g'_y \in G$ tais que $g_y x_y = y = g'_y x_y$. Então $g_y^{-1} g'_y \in G_{x_y}$ e portanto

$$g'_y \otimes n_y = \left(g_y g_y^{-1} \right) g'_y \otimes n_y = g_y \left(g_y^{-1} g'_y \right) \otimes n_y = g_y \otimes g_y^{-1} g'_y \cdot n_y = g_y \otimes n_y.$$

Logo a aplicação anterior é um G-homomorfismo bem definido e é a inversa de ϕ. $\square$

EXEMPLO 2.4. Definimos para todo $n \geq 0$, uma ação do grupo $GL_2(R)$ sobre X_n como segue

$$A \cdot (\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_n \rangle) := (\langle Av_0 \rangle, \ldots, \langle Av_n \rangle),$$

onde $A \in GL_2(R)$ e $(\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_n \rangle) \in X_n$. Assim

$$C_n(R^2) = \mathbb{Z}X_n \cong \bigoplus_{x \in T_n} \left(\mathbb{Z}GL_2(R) \otimes_{(GL_2(R))_x} \mathbb{Z} \right),$$

onde T_n é um conjunto de representantes das órbitas da ação de $GL_2(R)$ sobre X_n. Portanto, se $R/\mathfrak{m}$ for um corpo infinito, então $C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z}$ é um complexo exato de $GL_2(R)-$módulos.

PROPOSIÇÃO 2.6. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Então existe uma sequência espectral do primeiro quadrante*

$$E^1_{p,q} = H_q \left(GL_2(R), C_p(R^2) \right) \Longrightarrow H_{p+q} \left(GL_2(R), C_\bullet(R^2) \right).$$

Se $R/\mathfrak{m}$ for infinito, então

$$E^1_{p,q} = H_q \left(GL_2(R), C_p(R^2) \right) \Longrightarrow H_{p+q} \left(GL_2(R) \right). \tag{2.3}$$

Demonstração. Segue-se do Teorema (1.14), aplicado para o complexo $C_\bullet(R^2) \to \mathbb{Z}$. □

2.5 O teorema de Van der Kallen-Matsumoto

Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $R/\mathfrak{m}$ é um corpo infinito. Primero vamos demonstrar que o grupo $GL_2(R)$ age transitivamente sobre X_n para $n = 0, 1, 2$.

Seja $n = 0$ e seja $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$ tal que $\overline{v} \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos supor $\overline{v_1} \neq 0$. Então é suficiente provar que existe $A_0 \in GL_2(R)$ tal que $A_0 \cdot (\langle e_1 \rangle) = (\langle v \rangle)$, onde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se $A_0 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ v_2 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(R)$, então

$$A_0 \cdot (\langle e_1 \rangle) = (\langle A_0 e_1 \rangle) = (\langle v \rangle).$$

Seja $n = 1$ e seja $(\langle v \rangle, \langle w \rangle) \in X_1$, onde $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Então é suficiente provar que existe $A_1 \in GL_2(R)$ tal que

$$A_1 \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle) = (\langle v \rangle, \langle w \rangle),$$

onde $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considere $A_1 = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$. Como $\langle \overline{v} \rangle \neq \langle \overline{w} \rangle$, então $A_1 \in GL_2(R)$ e temos que

$$A_1 \cdot (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle) = (\langle A_1 e_1 \rangle, \langle A_1 e_2 \rangle) = (\langle v \rangle, \langle w \rangle).$$

Se $(\langle v_0\rangle,\langle v_1\rangle,\langle v_2\rangle)\in X_2$, então é suficiente provar que existe $A_2\in GL_2(R)$ tal que

$$A_2\cdot(\langle v_0\rangle,\langle v_1\rangle,\langle v_2\rangle)=(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_1+e_2\rangle).$$

Dado que $\{v_0,v_1\}$ é uma base para R^2, existe $a\in R^\times$ tal que $v_2=v_0+av_1$. Se $A_2=\begin{pmatrix} v_0^1 & av_1^1\\ v_0^2 & av_1^2\end{pmatrix}\in GL_2(R)$, onde $v_0=\begin{pmatrix} v_0^1\\ v_0^2\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix} v_1^1\\ v_1^2\end{pmatrix}$, então $A_2\cdot(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_1+e_2\rangle)=(\langle v_0\rangle,\langle v_1\rangle,\langle v_2\rangle)$.

Para facilitar nossos cálculos, sejam

$$x_0:=(\langle e_1\rangle)\in X_0,\qquad x_1:=(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle)\in X_1,\qquad x_2:=(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_1+e_2\rangle)\in X_2.$$

Agora é fácil verificar que para o caso $n=3$ e $n=4$ temos

$$X_3=\bigsqcup_{a\in A} o(x_a),\qquad X_4=\bigsqcup_{(a,b)\in B} o(x_{a,b}),$$

onde $x_a:=(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_1+e_2\rangle,\langle e_1+ae_2\rangle)$, $x_{a,b}:=(\langle e_1\rangle,\langle e_2\rangle,\langle e_1+e_2\rangle,\langle e_1+ae_2\rangle,\langle e_1+be_2\rangle)$, $A:=\{a\in R: a,1-a\in R^\times\}$ e $B:=\{(a,b)\in R^2: a,1-a,b,1-b,a-b\in R^\times\}$.

Agora pelo Lema (2.7), temos

$$\begin{aligned}
C_0(R^2) &\cong \mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_{x_0}}\mathbb{Z},\\
C_1(R^2) &\cong \mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_{x_1}}\mathbb{Z},\\
C_2(R^2) &\cong \mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_{x_2}}\mathbb{Z},\\
C_3(R^2) &\cong \bigoplus_{a\in A}\left(\mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_{x_a}}\mathbb{Z}\right),\\
C_4(R^2) &= \bigoplus_{(a,b)\in B}\left(\mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_{x_{a,b}}}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos, obtemos os seguintes subgrupos estabilizadores de $x_0,x_1,x_2,x_a,x_{a,b}$:

$$\begin{aligned}
(GL_2(R))_{x_0} &= B_2:=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}: a,c\in R^\times, b\in R\right\},\\
(GL_2(R))_{x_1} &= T_2:=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}: a,b\in R^\times\right\}\cong R^\times\times R^\times,\\
(GL_2(R))_{x_2} &= R^\times I_2\cong R^\times,\\
(GL_2(R))_{x_a} &= R^\times I_2\cong R^\times,\\
(GL_2(R))_{x_{a,b}} &= R^\times I_2\cong R^\times.
\end{aligned}$$

Logo pelo Lema de Shapiro (1.4) e o Exemplo(1.7) temos

$$\begin{aligned}
H_q\left(GL_2(R),C_p(R^2)\right) &= H_q\left(GL_2(R),\bigoplus_{x\in T_p}\left(\mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_x}\mathbb{Z}\right)\right)\\
&= \bigoplus_{x\in T_p} H_q\left(GL_2(R),\mathbb{Z}GL_2(R)\otimes_{(GL_2(R))_x}\mathbb{Z}\right)\\
&= \bigoplus_{x\in T_p} H_q\left((GL_2(R))_x\right),
\end{aligned}$$

onde T_p é o conjunto de representantes das órbitas da ação de $GL_2(R)$ sobre X_p e $(GL_2(R))_x$ é o subgrupo estabilizador de $x \in T_p$. Então temos

$$H_q(GL_2(R), C_p(R^2)) = \begin{cases} H_q(B_2), & p=0, \\ H_q(T_2), & p=1, \\ H_q(R^\times), & p=2, \\ \bigoplus_{a\in A} H_q(R^\times)[a], & p=3, \\ \bigoplus_{(a,b)\in B} H_q(R^\times)[a,b], & p=4, \end{cases}$$

onde $B_2 = \begin{pmatrix} R^\times & R \\ 0 & R^\times \end{pmatrix}$ e $T_2 = \begin{pmatrix} R^\times & 0 \\ 0 & R^\times \end{pmatrix} \cong R^\times \times R^\times$. Defina

$$Q(R) := \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}[a], \qquad R(R) := \bigoplus_{(a,b)\in B} \mathbb{Z}[a,b]. \tag{2.4}$$

Agora pela Proposição (1.4), $H_i(T_2) \cong H_i(B_2)$. Assim a primeira folha da sequência dada na Proposição (2.6) está dada por

$$\begin{tikzcd} H_2(T_2) & H_2(T_2) \arrow[l, "d^1_{1,2}"'] & H_2(R^\times) \arrow[l, "d^1_{2,2}"'] & E^1_{3,2} \arrow[l, "d^1_{3,2}"'] & * \arrow[l] & \cdots \\ R^\times \times R^\times & R^\times \times R^\times \arrow[l, "d^1_{1,1}"'] & R^\times \arrow[l, "d^1_{2,1}"'] & E^1_{3,1} \arrow[l, "d^1_{3,1}"'] & * \arrow[l] & \cdots \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \arrow[l, "d^1_{1,0}"'] & \mathbb{Z} \arrow[l, "d^1_{2,0}"'] & Q(R) \arrow[l, "d^1_{3,0}"'] & R(R) \arrow[l, "d^1_{4,0}"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

EXEMPLO 2.5. Estudaremos os diferenciais $d^1_{p,q}$ para $p = 1,2,3$ e 4. Para isto, considere a resolução padrão $C_\bullet(GL_2(R)) \to \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $GL_2(R)$.

- $d^1_{1,q} : H_q(T_2) \to H_q(T_2) \cong H_q(B_2)$: Note que

$$\begin{aligned} E^1_{0,q} &= H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_0(R^2)) = H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{B_2} \mathbb{Z}) \\ &\cong H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}) \cong H_q(T_2), \\ E^1_{1,q} &= H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_1(R^2)) = H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}) \cong H_q(T_2). \end{aligned}$$

  Usando o diagrama

$$\begin{tikzcd} x \otimes x_1 & C_q(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_1(R^2) \arrow[r, "id_{C_q} \otimes \partial_1"] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_0(R^2) \arrow[d, "\cong"'] & x \otimes x_0 \arrow[d, mapsto] \\ x \otimes 1 \arrow[u, mapsto] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, dashed] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z} & x \otimes 1 \end{tikzcd}$$

  obtemos que

$$\begin{aligned} C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z} &\longrightarrow C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}, \\ x \otimes 1 &\longmapsto (\omega x - x) \otimes 1 = \omega x \otimes 1 - x \otimes 1 \end{aligned}$$

onde $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Portanto pelo Exemplo (1.18) tomando $g_0 = \omega$, temos

$$d^1_{1,q} = H_q(\alpha_\omega) - H_q(id_{T_2}),$$

com $\alpha_\omega : T_2 \to T_2 \subseteq B_2$ definida como sendo $\alpha_\omega(a,b) = \omega \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \omega^{-1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = (b,a)$.

- $d^1_{2,q} : H_q(R^\times) \to H_q(T_2)$: Note que

$$E^1_{2,q} = H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_2(R^2)) = H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{R^\times I_2} \mathbb{Z}) \cong H_q(R^\times).$$

Usando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
x \otimes x_2 & C_q(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_2(R^2) \arrow[r, "id_{C_q} \otimes \partial_2"] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_1(R^2) \arrow[d, "\cong"'] & x \otimes x_1 \arrow[d, mapsto] \\
x \otimes 1 \arrow[u, mapsto] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{R^\times I_2} \mathbb{Z} \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r, dashed] & C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z} & x \otimes 1
\end{tikzcd}$$

obtemos que

$$\begin{aligned} C_q(GL_2(R)) \otimes_{R^\times I_2} \mathbb{Z} &\longrightarrow C_q(GL_2(R)) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}, \\ x \otimes 1 &\longmapsto (B' \cdot x - B'' \cdot x + I_2 x) \otimes 1 \end{aligned}$$

onde $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pelo Exemplo (1.18)

$$d^1_{2,q} = H_q(\alpha_{B'}) - H_q(\alpha_{B''}) + H_q(\alpha_{I_2}),$$

onde $\alpha_{B'}, \alpha_{B''}, \alpha_{I_2} : R^\times \to T_2$ são definidas como $\alpha_{B'}(a) = B' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (B')^{-1} = aI_2 = (a,a)$, $\alpha_{B''}(a) = B'' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (B'')^{-1} = aI_2 = (a,a)$, $\alpha_{I_2}(a) = aI_2 = (a,a)$. Portanto

$$d^1_{2,q} = H_q(\Delta) - H_q(\Delta) + H_q(\Delta) = H_q(\Delta),$$

onde $\Delta : R^\times \to T_2$ definida como $\Delta(a) = (a,a)$. É claro que $d^1_{2,q}$ é injetora.

- $d^1_{3,q} : \bigoplus_{a \in A} H_q(R^\times)[a] \to H_q(R^\times)$: Seja $a \in R^\times$ tal que $1 - a \in R^\times$. Note que

$$\begin{aligned} E^1_{3,q} &= H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_3(R^2)) = \bigoplus_{a \in A} H_q(C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{R^\times I_2} \mathbb{Z})[a] \\ &\cong \bigoplus_{a \in A} H_q(R^\times)[a]. \end{aligned}$$

Usando o diagrama

$$\begin{tikzcd} x\otimes x_a & C_q(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_3(R^2) \arrow[r, "id_{C_q}\otimes\partial_3"] & C_q(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_2(R^2) \arrow[d, "\cong"] & x\otimes x_2 \arrow[d, mapsto] \\ x\otimes 1 \arrow[u, mapsto] & \bigoplus_{a\in A} C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, dashed] & C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z} & x\otimes 1 \end{tikzcd}$$

obtemos o homomorfismo

$$\begin{aligned} C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z} &\longrightarrow C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z}, \\ x_a\otimes 1 &\longmapsto (A_a\cdot x - B_a\cdot x + C_a\cdot x - x)\otimes 1 \end{aligned}$$

onde $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$, $B_a = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $C_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Pelo Exemplo (1.18)

$$d^1_{3,q} = H_q(\alpha_{A_a}) - H_q(\alpha_{B_a}) + H_q(\alpha_{C_a}) - H_q(\alpha_{id_{R^\times I_2}}),$$

onde $\alpha_{A_a}, \alpha_{B_a}, \alpha_{C_a} : R^\times \to R^\times$ são definidas como $\alpha_{A_a}(x) = A_a \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} A_a^{-1} = xI_2 = x$, $\alpha_{B_a}(x) = B_a \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} (B_a)^{-1} = xI_2 = x$, $\alpha_{C_a}(x) = C_a \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} (C_a)^{-1} = xI_2 = x$. Assim

$$d^1_{3,q} = H_q(id_{R^\times I_2}) - H_q(id_{R^\times I_2}) + H_q(id_{R^\times I_2}) - H_q(id_{R^\times I_2}) = 0.$$

Portanto, $d^1_{3,q} = 0$.

- $\bigoplus_{(a,b)\in B} H_q(R^\times)[a,b] \to \bigoplus_{a\in A} H_q(R^\times)[a]$: Note que

$$\begin{aligned} E^1_{4,q} &= H_q(C_\bullet(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_4(R^2)) = \bigoplus_{(a,b)\in B} H_q(C_\bullet(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z})[a,b], \\ &= \bigoplus_{(a,b)\in B} H_q(R^\times)[a,b], \end{aligned}$$

e $d^1_{4,q}$ é induzido pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} y_{a,b}\otimes x_{a,b} & C_q(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_4(R^2) \arrow[r, "id_{C_q}\otimes\partial_4"] & C_q(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_3(R^2) \arrow[d, "\cong"] & y_a\otimes x_a \arrow[d, mapsto] \\ y_{a,b}\otimes 1 \arrow[u, mapsto] & \bigoplus_{(a,b)\in B} C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, dashed] & \bigoplus_{a\in A} C_q(GL_2(R))\otimes_{R^\times I_2}\mathbb{Z} & y_a\otimes 1 \end{tikzcd}$$

Agora por cálculo direto, temos

$$y_{a,b}\otimes x_{a,b} \longmapsto y_{a,b}\otimes\left(A_{a,b}\cdot x_{\frac{1-a}{1-b}} - B_{a,b}\cdot x_{\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}} + C_{a,b}\cdot x_{\frac{b}{a}} - x_b + x_a\right),$$

onde

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1-b}{1-a} \\ -(1-b) & \frac{1-b}{1-a} \end{pmatrix}, \qquad B_{a,b} = \begin{pmatrix} 1-b & -\frac{1-b}{1-a^{-1}} \\ 0 & -\frac{1-b}{1-a^{-1}} \end{pmatrix}, \qquad C_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$[a,b] \longmapsto \left[\frac{1-a}{1-b}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{b}{a}\right] - [b] + [a].$$

Em particular

$$d^1_{1,0} = 0, \quad d^1_{2,0} = id_{\mathbb{Z}}, \quad d^1_{3,0} = 0,$$

$$d^1_{4,0}([a,b]) = [a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-b}\right],$$

e

$$\begin{aligned} d^1_{1,1} : R^\times \times R^\times &\longrightarrow R^\times \times R^\times, \\ (a,b) &\longmapsto (ba^{-1}, ab^{-1}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d^1_{2,1} : R^\times &\longrightarrow R^\times \times R^\times, \\ a &\longmapsto (a,a) \end{aligned} \quad d^1_{3,1} = 0.$$

Usando o isomorfismo $H_2(R^\times) \oplus H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times) \cong H_2(T_2)$, temos

$$\begin{aligned} H_2(R^\times) &\longrightarrow H_2(T_2), \\ \mathbf{c}(a,a') &\longmapsto \mathbf{c}((a,1),(a',1)) \end{aligned} \quad \begin{aligned} H_2(R^\times) &\longrightarrow H_2(T_2), \\ \mathbf{c}(b,b') &\longmapsto \mathbf{c}((1,b),(1,b')) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cup : H_2(R^\times) &\longrightarrow H_2(T_2). \\ a \otimes b &\longmapsto a \cup b := \mathbf{c}((a,1),(1,b)) \end{aligned}$$

Agora é fácil verificar que

$$d^1_{1,2} : H_2(R^\times) \oplus H_2(R^\times) \oplus \left(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times\right) \longrightarrow H_2(R^\times) \oplus H_2(R^\times) \oplus \left(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times\right)$$

é dado por

$$d^1_{1,2}(x,y,a\otimes b) = (y-x, x-y, -a\otimes b - b\otimes a).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d^1_{2,2} : H_2(R^\times) &\longrightarrow H_2(T_2) = H_2(R^\times) \oplus H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times), \\ \mathbf{c}(a,b) &= \mathbf{c}((a,a),(b,b)). \end{aligned}$$

Definimos o pre-grupo de Bloch do anel R, denotado $\mathfrak{p}(R)$, como o módulo quociente de $Q(R)$ por o submódulo gerado pelos elementos da forma $[a] - [b] + \left[\frac{b}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-b}\right]$, onde $a, 1-a, b, 1-b, a-b \in R^\times$. Considere agora o homomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma : R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times &\longrightarrow R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times, \\ a \otimes b &\longmapsto -b \otimes a \end{aligned}$$

e defina os seguintes módulos

$$
\begin{aligned}
(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)^\sigma &:= \{a\otimes b : \sigma(a\otimes b) = a\otimes b\},\\
(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma &:= \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle \sigma(a\otimes b)-(a\otimes b) : a,b\in R^\times\rangle} = \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a\otimes b + b\otimes a : a,b\in R^\times\rangle}\\
H_2(T_2)^\sigma &:= \{(x,x,a\otimes b) : x\in H_2(R^\times), \sigma(a\otimes b) = a\otimes b\},\\
H_2(T_2)_\sigma &:= \frac{H_2(R^\times)\oplus H_2(R^\times)\oplus R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle (x,-x,-a\otimes b - b\otimes a) : x\in H_2(R^\times), a,b,\in R^\times\rangle} \cong H_2(R^\times)\oplus (R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma .
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

O elemento de $\mathfrak{p}(R)$ representado por $[a]$ será denotado novamente por $[a]$ e o elemento de $(R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma$ representado por $a\otimes b$ será denotado por $a\otimes b$. Logo a segunda e terceira folha da sequência espectral dada na Proposição (2.6) são da forma

$$
\begin{tikzcd}
H_2(R^\times)\oplus (R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma & (R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)^\sigma & 0 & * & \cdots \\
R^\times & 0 & 0 \arrow[ull, "d^2_{2,1}=0"'] & * \arrow[ull, "d^2_{3,1}"'] & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & 0 \arrow[ull, "d^2_{2,0}=0"'] & \mathfrak{p}(R) \arrow[ull, "d^2_{3,0}=0"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H_2(R^\times)\oplus (R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma & \dfrac{(R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)^\sigma}{\operatorname{Im} d^2_{3,1}} & 0 & * & \cdots \\
R^\times & 0 & 0 & * & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & 0 & \mathfrak{p}(R) \arrow[uulll, "d^3_{3,0}"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Lema 2.8. *O diferencial $d^3_{3,0} : \mathfrak{p}(R) \to H_2(R^\times)\oplus (R^\times\otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma$ é dado por*

$$d^3_{3,0}([a]) = (a\wedge(1-a), -a\otimes(1-a)).$$

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C_2(GL_2(R))\otimes C_0(R^2) & C_2(GL_2(R))\otimes C_1(R^2) \arrow[l, "id_{C_2}\otimes\partial_1"'] \arrow[d, "\delta_2\otimes id_{C_1}"'] & & \\
 & C_1(GL_2(R))\otimes C_1(R^2) & C_1(GL_2(R))\otimes C_2(R^2) \arrow[l, "id_{C_1}\otimes\partial_2"'] \arrow[d, "\delta_1\otimes id_{C_2}"'] & \\
 & & C_0(GL_2(R))\otimes C_2(R^2) & C_0(GL_2(R))\otimes C_3(R^2). \arrow[l, "id_{C_0}\otimes\partial_3"']
\end{tikzcd}
$$

O elemento $[a]\in\mathfrak{p}(R)$ é representado pelo elemento $(1)\otimes x_a \in C_0(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_3(R^2)$. Pelo diagrama, o elemento $(1)\otimes x_a\in C_0(GL_2(R))\otimes_{GL_2(R)} C_3(R^2)$ vai para o elemento

$$[(g_1)-(g_2)+(g_3)-(1)]\otimes x_2,$$

onde $g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Note que o elemento

$$y_a := [(g_2, g_1) - (g_3, 1)] \in C_1(GL_2(R)),$$

satisfaz

$$\delta_1 \otimes id_{C_2}(y_a \otimes x_2) = [(g_1) - (g_2) + (g_3) - (1)] \otimes x_2.$$

Agora dado que

$$(a^{-1} g_2^2 g_3^2, g_1 g_2) = (g_3 g_2, g_3 g_1) \begin{pmatrix} a^{-1}(1-a) & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

se

$$\begin{aligned} z_a := \quad & (g_3 g_1, g_2, g_1) - (g_3 g_2, g_3 g_1, g_2) - (a^{-1} g_2^2 g_3^2, g_2^2, g_1 g_2) \\ & + (a^{-3} g_2^2 g_3^2, a^{-2} g_2^2, 1) - (a^{-3} g_2^2 g_3^2, a^{-1} g_3^2, 1) \\ & + (g_1^2 g_3^{-1}, a^{-1} g_1^2, 1) - (g_1^2 g_3^{-1}, a g_3^{-1}, 1) + (g_3, a^{-1} g_3^2, 1) \end{aligned}$$

então temos $\delta_2 \otimes id_{C_1}(z_a \otimes x_1) = id_{C_1} \otimes \partial_2(y_a \otimes x_2)$. Logo o elemento $z_a \otimes x_1$ vai para o elemento $(z_a \omega - z_a) \otimes x_0 \in C_2(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_0(R^2)$, onde $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Note que $(z_a \omega - z_a) \otimes x_0$ é um representante do elemento $d^3_{3,0}([a])$. Vamos estudar esse elemento e para isso seja $s : GL_2(R)/B_2 \to GL_2(R)$ uma seção da projeção canônica $\pi : GL_2(R) \to GL_2(R)/B_2$, definida como sendo

$$s(gB_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \cdot (\langle e_1 \rangle) = (\langle e_1 \rangle), \\ \omega & \text{se } g \cdot (\langle e_1 \rangle) = (\langle e_2 \rangle), \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} & \text{se } g \cdot (\langle e_1 \rangle) = (\langle e_1 + x e_2 \rangle). \end{cases}$$

Para cada $g \in GL_2(R)$, defina

$$\overline{g} := (s \circ \pi(g))^{-1} g.$$

Logo temos um homomorfismo de complexos de cadeias como foi dado no Exemplo (1.17)

$$\begin{aligned} \phi_\bullet : C_\bullet(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_0(R^2) & \longrightarrow C_\bullet(B_2) \otimes_{B_2} \mathbb{Z} \\ (g_0, g_1, \ldots, g_n) \otimes x_0 & \longmapsto (\overline{g_0}, \overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n}) \otimes 1 \end{aligned}$$

que induz o isomorfismo

$$H_2(GL_2(R), C_0(R^2)) = H_2(C_2(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(R)} C_0(R^2)) \xrightarrow{\phi_*} H_2(C_2(B_2) \otimes_{B_2} \mathbb{Z}) = H_2(B_2).$$

Considere o isomorfismo $H_2(B_2) \xrightarrow{\alpha_*} H_2(T_2)$ induzido pelo homomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha : B_2 & \longrightarrow T_2. \\ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} & \longmapsto (a, b). \end{aligned}$$

Usando o isomorfismo $H_2(T_2) = H_2(C_\bullet(T_2) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_2(B_\bullet(T_2) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}) = H_2(T_2)$, induzido pelo morfismo

$$\begin{aligned} \theta_\bullet : C_\bullet(T_2) &\longrightarrow B_\bullet(T_2), \\ (g_0, g_1, \ldots, g_n) &\longmapsto [g_0 g_1^{-1} | \cdots | g_{n-1} g_n^{-1}] \end{aligned}$$

temos que o isomorfismo $H_2(GL_2(R), C_0(R^2)) \cong H_2(T_2)$ é induzido por

$$C_2(GL_2(R)) \otimes_{GL_2(F)} C_0(R^2) \xrightarrow{\theta_2 \circ \alpha_2 \circ \phi_2} B_2(T_2) \otimes_{T_2} \mathbb{Z}.$$

Com uma cálculo direto (e um pouco complicado) podemos ver que esta aplicação leva $(z_a \omega - z_a) \otimes x_0$ no elemento $u_a \otimes 1$, onde

$$\begin{aligned} u_a = \quad & +[(a^{-1}, a)|(a, 1)] - [(-a, a^{-1})|(-1, a)] \\ & +[(-a^{-1}, a^2)|(-a, a^{-1})] - [(a, 1)|(a^{-1}, a)] \\ & +[(a^{-1}, a)|(-1, a)] - [(a, a^{-1})|(1, a)] \\ & +[(a, a^{-1})|(a^{-1}, -a^{-1}(1-a)^2)] - [(a^{-1}, a)|(a^{-2}(1-a)^2, 1)] \\ & -[(a^{-1}, -a^{-1}(1-a)^2)|(a, a^{-1})] + [(a^{-2}(1-a)^2, 1)|(a^{-1}, a)] \\ & +[(1, a)|(a^{-1}, -a^{-1}(1-a)^2)] - [(a, 1)|(-a^{-1}(1-a), -a^{-1}(1-a))] \\ & -[(a^{-1}, -a^{-1}(1-a)^2)|(1, a)] + [(-a^{-1}(1-a), -a^{-1}(1-a))|(a, 1)] \\ & +[(1, a)|(a, a^{-1})] - [(a, 1)|(a^{-1}, a)]. \end{aligned}$$

Nas homologias temos que $d^3_{3,0} : \mathfrak{p}(R) \to H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma$ leva $[a]$ no elemento

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}\left((-1, a), (-a, a^{-1})\right) + 2\mathbf{c}\left((a^{-1}, a), (a, 1)\right) \\ & +\mathbf{c}\left((1, a), (a, a^{-1})\right) + \mathbf{c}\left((a^{-2}(1-a)^2, 1), (a^{-1}, a)\right) \\ & +\mathbf{c}\left((a, 1), (a^{-1}, -a^{-1}(1-a)^2)\right) + \mathbf{c}\left((-a^{-1}(1-a), -a^{-1}(1-a)), (a, 1)\right), \end{aligned}$$

que é igual ao elemento $\mathbf{c}\left((a, 1), (1-a, (1-a)^{-1})\right)$. Portanto

$$\begin{aligned} d^3_{3,0} : E^3_{3,0} \cong \mathfrak{p}(R) &\longrightarrow E^3_{0,2} = H_2(T_2)_\sigma \cong \textstyle\bigwedge^2_{\mathbb{Z}} R^\times \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma \\ [a] &\longmapsto \mathbf{c}\left((a, 1), (1-a, (1-a)^{-1})\right) = (a \wedge (1-a), -a \otimes (1-a)) \end{aligned}$$

□

O Lema (2.8) implica que

$$E^4_{0,2} = \frac{H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma}{\operatorname{Im} d^3_{3,0}} = \frac{H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma}{\langle (a \wedge (1-a), -a \otimes (1-a)) : a, 1-a \in R^\times \rangle}.$$

A sequência espectral dada na Proposição (2.6) dá-nos uma filtração de $H_2(GL_2(R))$

$$0 = F_{-1}H_2(GL_2(R)) \subseteq F_0 H_2(GL_2(R)) \subseteq F_1 H_2(GL_2(R)) \subseteq F_2 H_2(GL_2(R)) = H_2(GL_2(R)),$$

tal que

$$\begin{aligned} E^4_{0,2} \cong E^\infty_{0,2} &\cong F_0 H_2(GL_2(R)), \\ E^3_{1,1} \cong E^\infty_{1,1} &\cong \frac{F_1 H_2(GL_2(R))}{F_0 H_2(GL_2(R))}, \\ E^3_{2,0} \cong E^\infty_{2,0} &\cong \frac{H_2(GL_2(R))}{F_1 H_2(GL_2(R))}. \end{aligned}$$

Como $E^3_{1,1} = E^3_{2,0} = 0$, temos que $F_0H_2(GL_2(R)) = F_1H_2(GL_2(R)) = H_2(GL_2(R))$ e portanto

$$H_2(GL_2(R)) \cong E^\infty_{0,2} \cong \frac{H_2(R^\times) \oplus (R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma}{\langle (a \wedge (1-a), -a \otimes (1-a)) : a, 1-a \in R^\times \rangle} \tag{2.6}$$

COROLÁRIO 2.2. *O homomorfismo $H_2(T_2) \to H_2(GL_2(R))$, induzido por $T_2 \hookrightarrow GL_2(R)$ é sobrejetor.*

Demonstração. Como $E^\infty_{0,2}$ é quociente de $H_2(T_2)$, o isomorfismo (2.6) implica que $H_2(T_2) \to H_2(GL_2(R))$ é sobrejetor. □

COROLÁRIO 2.3. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e seja $T_3 := \{diag(a,b,c) \in GL_3(R) : a,b,c \in R^\times\}$. Se $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então as inclusões*

$$\begin{array}{rcl} inc_1 : T_3 & \longrightarrow & GL_3(R), \\ (a,b,c) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} inc : GL_2 & \longrightarrow & GL_3(R), \\ A & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

induzem o homomorfismo sobrejetor

$$H_3(T_3) \oplus H_3(GL_2(R)) \twoheadrightarrow H_3(GL_3(R)).$$

Demonstração. Pela fórmula de Künneth (Proposição 1.3), $H_3(R^\times \times GL_2(R)) \cong H_3(GL_2(R)) \oplus M$, onde

$$M \cong H_3(R^\times) \oplus \left(H_2(R^\times) \otimes H_1(GL_2(R))\right) \oplus \left(H_1(R^\times) \otimes H_2(GL_2(R))\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_1(R^\times), H_1(GL_2(R))\right).$$

Como pelo Teorema de Estabilidade (1.16), $H_1(GL_1(R)) \cong H_1(GL_2(R))$ e com uso do Lema (1.5), é fácil verificar que esta decomposição é canônica. Note que

$$\begin{aligned} H_3(T_3) &= H_3(R^\times \times T_2) \\ &= H_3(R^\times) \oplus (H_2(R^\times) \otimes H_1(T_2)) \oplus (H_1(R^\times) \otimes H_2(T_2)) \oplus H_3(T_2) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_1(R^\times), H_1(T_2)). \end{aligned}$$

Como $H_1(GL_1(R)) \cong H_1(GL_2(R))$, temos

$$H_2(R^\times) \otimes H_1(GL_2(R)) \cong H_2(R^\times) \otimes H_1(R^\times) \subseteq (inc_1)_*(H_3(T_3)),$$

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_1(R^\times), H_1(GL_2(R))\right) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(H_1(R^\times), H_1(R^\times)\right) \subseteq (inc_1)_*(H_3(T_3)).$$

Além disso pelo Corolário (2.2), o homomorfismo $H_1(F^\times) \otimes H_2(T_2) \to H_1(F^\times) \otimes H_2(GL_2(F))$ é sobrejetor. Dado o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_1(F^\times) \otimes H_2(T_2) & \longrightarrow & H_1(F^\times) \otimes H_2(GL_2(F)) \subseteq H_3(F^\times \times GL_2(F)) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ H_3(T_3) & \longrightarrow & H_3(GL_3(F)) \end{array}$$

temos que $i_*\left(H_1(R^\times) \otimes H_2(GL_2(R))\right) \subseteq (inc_1)_*(H_3(T_3))$. Portanto $i_*(M) \subseteq (inc_1)_*(H_3(T_3))$ e o resultado segue do Teorema de Estabilidade (1.16). □

TEOREMA 2.2 (Teorema de Van der Kallen-Matsumoto)**.** *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $R/\mathfrak{m}$ é um corpo infinito. Então*

$$K_2(R) \cong K_2^M(R)$$

onde $K_2^M(R)$ é o grupo abeliano aditivo gerado pelos símbolos $\{a,b\}$ com $a,b \in R^\times$ satisfazendo para todo $a,a_1,a_2,b,b_1,b_2,c,1-c \in R^\times$

$$\{a_1a_2,b\} = \{a_1,b\}+\{a_2,b\}, \quad \{a,b_1b_2\} = \{a,b_1\}+\{a,b_2\}, \quad \{c,1-c\} = 0, \quad \{a,b\} = -\{b,a\}.$$

Demonstração. Pelo Exemplo (2.3) temos que $E(R) = [SL(R),SL(R)] = SL(R)$. Agora pela decomposição (1.14) e o Teorema (2.1) temos

$$H_2(GL(R)) = H_2(R^\times)\oplus H_2(SL(R)) = H_2(R^\times)\oplus H_2(E(R)) = H_2(R^\times)\oplus K_2(R). \tag{2.7}$$

É fácil verificar que

$$K_2^M(R) \cong \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a\otimes(1-a), b\otimes c + c\otimes b : a,1-a,b,c \in R^\times\rangle}$$

Considere a sequência espectral que estudamos no Exemplo (2.5). Definimos os seguintes homomorfismos

$$\begin{aligned} f : H_2(R^\times) &\longrightarrow E^\infty_{0,2}, & g : E^\infty_{0,2} &\longrightarrow K_2^M(R),\\ x &\longmapsto (x,0) & (x,a\otimes b) &\longmapsto -\{a,b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha : E^\infty_{0,2} &\longrightarrow H_2(R^\times), & \beta : K_2^M(R) &\longrightarrow E^\infty_{0,2}.\\ (x,a\otimes b) &\longmapsto x + a\wedge b & \{a,b\} &\longmapsto (a\wedge b, -a\otimes b) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{gathered} \alpha\circ f = id_{H_2(R^\times)}, \qquad f\circ\alpha+\beta\circ g = id_{E^\infty_{0,2}}, \qquad g\circ\beta = id_{K_2^M(R)},\\ g\circ f = 0, \qquad \alpha\circ\beta = 0, \end{gathered}$$

obtemos assim uma sequência exata que cinde

$$0 \longrightarrow H_2(R^\times) \xrightarrow{f} E^\infty_{0,2} \xrightarrow{g} K_2^M(R) \longrightarrow 0.$$

Logo segue a seguinte decomposição

$$H_2(GL_2(R)) = E^\infty_{0,2} \cong H_2(R^\times)\oplus K_2^M(R). \tag{2.8}$$

Finalmente o resultado é dado pelo Teorema de Estabilidade (1.16) para $GL_2(R)$

$$H_2(GL_2(R)) \cong H_2(GL(R))$$

junto com as decomposições feitas em (2.7) e (2.8). $\square$

OBSERVAÇÃO 2.1. Detalharemos o homomorfismo $\beta : K_2^M(R) \to E_{0,2}^{\infty} \cong H_2(GL(R))$. Para isto note que

$$
\begin{aligned}
\beta(\{a,b\}) &= (a \wedge b, -a \otimes b) = \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1), \mathrm{diag}(b,b^{-1})\big) \in H_2(GL_2(R)) \\
&= \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1,1), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big) \in H_2(GL(R)) \\
&= \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big) + \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(1,1,a), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big) \\
&= \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big) + \mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,1,a), \mathrm{diag}(b,1,1)) \\
&\quad -\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,1,a), \mathrm{diag}(1,b,1)) \\
&= \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big) \in H_2(SL(R))
\end{aligned}
$$

Portanto o isomorfismo

$$K_2^M(R) \longrightarrow K_2(R) = H_2(SL(R)) \tag{2.9}$$

é dado por $\{a,b\} \mapsto \mathbf{c}\big(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}), \mathrm{diag}(b,b^{-1},1)\big)$. Isto também prova que o isomorfismo obtido na demonstração do Teorema anterior (2.8) leva $K_2^M(R)$ no K_2-grupo do anel R.

OBSERVAÇÃO 2.2. No próximo capítulo no Lema (3.1), demonstraremos que na verdade

$$K_2^M(R) \cong \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a \otimes (1-a) : a, 1-a \in R^\times \rangle}$$

quando R for um anel local com corpo residual infinito.

CAPÍTULO

3

K-TEORIA ALGÉBRICA DE ANÉIS

Neste capítulo primeiro apresentamos algumas definições importantes da topologia algébrica como os CW-complexos, os grupos de homologia e os grupos de homotopia de espaços topológicos, o espaço classificante de um grupo, etc. Depois definimos a $+-$construção de um espaço topológico e usamos isso para definir e estudar os K-grupos de anéis. No final, definimos os K-grupos de Milnor e comparamos eles com os K-grupos de anéis locais.

3.1 CW-complexos

Sejam X,Y espaços topológicos, A um subespaço fechado de X e seja $\varphi : A \to Y$ uma aplicação contínua. Definimos o espaço adjunto de X e Y com respeito a f, denotado $Y \cup_\varphi X$, como sendo $Y \cup_\varphi X := (Y \bigsqcup X)/\sim$, onde $Y \bigsqcup X$ é a união disjunta de X e Y e "$\sim$" é uma relação de equivalência sobre $Y \bigsqcup X$ tal que $a \sim f(a)$ para todo $a \in A$. O espaço adjunto forma parte do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \cup_\varphi X \end{tikzcd}$$

e contém Y como subespaço fechado com aplicação injetiva $Y \to Y \cup_\varphi X$, $y \to \bar{y}$ e Y tem complementar homeomorfo a $X - A$. Desta maneira, uma aplicação contínua $Y \cup_\varphi X \to Z$ é decomposta como uma aplicação contínua $h : Y \to Z$ e uma extensão $g : X \to Z$ da composta $h \circ \varphi : A \to Z$.

Seja X um espaço topológico. Seja $n \geq 1$ e seja $\varphi = \bigsqcup_{\alpha \in \mathscr{A}} \varphi_\alpha : \bigsqcup_{\alpha \in \mathscr{A}} S_\alpha^{n-1} \to X$ uma aplicação contínua, onde $\bigsqcup_{\alpha \in \mathscr{A}} S_\alpha^{n-1}$ é a união disjunta de esferas de dimensão $n-1$, $S_\alpha^{n-1} \subseteq D_\alpha^n$, $\alpha \in \mathscr{A}$ e D_α^n é o disco unitário $n-$dimensional. Definimos a $n-$ésima extensão celular de X com aplicação de colagem φ e aplicação característica Φ como sendo o espaço adjunto $X \cup_\varphi (\bigsqcup_\alpha D_\alpha^n)$. A

$n-$ésima extensão celular de X forma parte do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} S^{n-1}_{\alpha} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} D^{n}_{\alpha} \arrow[r, "\Phi"] & X\cup_{\varphi}\left(\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} D^{n}_{\alpha}\right).
\end{tikzcd}$$

Note que a $n-$ésima extensão celular contém o espaço X como subespaço fechado e contém como subespaços $n-$células abertas $e^n_\alpha := \Phi\left(D^n_\alpha - S^{n-1}_\alpha\right)$, $\alpha\in\mathscr{A}$ entendidas como $n-$ésimas bolas abertas. Note que

$$\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} e^n_\alpha = \left(X\cup_{\varphi}\left(\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} D^n_\alpha\right)\right) - X,$$

isto é, as $n-$células abertas são as componentes conexas do complementar do espaço X. Em 1949 J.H.C. Whitehead introduziu a definição dos espaços $CW-$complexos de forma indutiva. Um espaço $CW-$complexo é um espaço topológico X junto com uma filtração ascendente de subespaços

$$\emptyset = X^{-1}\subseteq X^0\subseteq X^1\subseteq\cdots\subseteq X^{n-1}\subseteq X^n\subseteq\cdots\subseteq X=\bigcup_{n=-1}^{\infty} X^n$$

tais que

i) o subespaço X^0 é um espaço topológico discreto,

ii) para todo $n\geq 1$, X^n é homeomorfo à uma $n-$ésima extensão celular de X^{n-1},

iii) a topologia de X é coherente com a filtração anterior, isto é um subconjunto $U\subseteq X$ é aberto (ou fechado resp.) em X se e somente se $U\cap X^n$ é aberto (ou fechado resp.) em X^n para todo n.

Note-se que o segundo item implica que para todo $n\geq 1$ existem aplicações colagem $\varphi_\alpha : S^{n-1}\to X^{n-1}$ e aplicações característica $\Phi_\alpha : D^n\to X^n$, para todo $\alpha\in\mathscr{A}_n$, tais que

- $X^n\cong X^{n-1}\bigcup_{\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}}\varphi_\alpha}\left(\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}} D^n_\alpha\right)$ e X^{n-1} é um subespaço topológico fechado de X^n para todo n,
- o complementar de X^{n-1} em X^n está dado por

$$X^n - X^{n-1} = \bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}_n}\Phi_\alpha\left(\operatorname{Int} D^n\right),$$

  onde $\Phi_\alpha(\operatorname{Int} D^n)$ são as $n-$ésimas células abertas de X.

Desta maneira o $CW-$complexo (como conjunto) pode ser expressado como a união disjunta

$$X=\bigcup_{n=-1}^{\infty} X^n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left(X^n - X^{n-1}\right) = \bigsqcup_{n=0}^{\infty}\bigsqcup_{\alpha\in\mathscr{A}_n}\Phi_\alpha(\operatorname{Int} D^n).$$

O objectivo do terceiro item da definição é munir a união de todos os espaços X^n com a maior topologia de X que torna todas as inclusões $X^n \to X$ aplicações contínuas.

Dizemos que um CW-complexo X é de dimensão finita se $X = X^n$ para algum n. Caso contrário dizemos que X é de dimensão infinita.

EXEMPLO 3.1. Os pontos da $n-$ésima esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tem coordenadas da forma (x,u) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$. Sejam $D^n_{\pm}$ as imagens dos mergulhos $D^n \to S^n$, $x \mapsto \left(x, \pm\sqrt{1-|x|^2}\right)$. Então

$$S^n = S^{n-1} \cup D^n_+ \cup D^n_- = S^{n-1} \cup_{\left(\mathrm{Id}_{S^{n-1}} \bigsqcup \mathrm{Id}_{S^{n-1}}\right)} \left(D^n \bigsqcup D^n\right),$$

isto é, S^n é obtida de S^{n-1} colando duas n-células. Portanto indutivamente, a esfera infinita S^∞

$$S^\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} S^n$$

é um $CW-$complexo de dimensão infinita

$$\emptyset = S^{-1} \subset S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \cdots \subset S^{n-1} \subset S^n \subset \cdots \subset S^\infty.$$

Note que um subespaço $A \subset S^\infty$ é fechado se e somente se $A \cap S^n$ é um subespaço fechado de S^n para todo $n \geq 0$.

EXEMPLO 3.2. O $n-$ésimo espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é definido como sendo o espaço de todas as retas em $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pelo origem. Cada uma destas retas é determinada por um único vetor em $\mathbb{R}^{n+1}$, a menos de multiplicação por escalares. Logo $\mathbb{R}P^n$ pode ser entendido como o espaço quociente do espaço $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência $v \sim \lambda v$ para escalares $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Restringindo v para vetores de comprimento 1, entendemos $\mathbb{R}P^n$ como o espaço quociente $S^n/(v \sim -v)$ com aplicação quociente $\pi_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$. Isto é equivalente a dizer que $\mathbb{R}P^n$ é o espaço quociente de um hemisfério de D^n com pontos antipodais de ∂D^n identificados. Agora dado que $\partial D^n = S^{n-1}$ com pontos antipodais identificados é $\mathbb{R}P^{n-1}$, temos que $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula com aplicação de colagem $\pi_{n-1} : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\pi_{n-1}} D^n.$$

Portanto, $\mathbb{R}P^n$ é um CW-complexo de dimensão n com uma célula em cada dimensão entre 0 e n. Em particular, $\mathbb{R}P^0 \cong *$ e $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. A união infinita $\mathbb{R}P^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}P^n$ é um espaço CW-complexo de dimensão infinita com uma célula em cada dimensão.

Pode-se provar que todo CW-complexo é um espaco topológico normal (em particular é um espaço Hausdorff) [2, Proposição A.3]. Além disso, qualquer subespaço compacto num CW-complexo X está contido em X^n para algum $n \geq 0$ [2, Proposição A.1]. Também mostra-se que os CW-complexos são localmente contráteis e portanto localmente conexos por caminhos [2, Proposição A.4]. Consequentemente as definições de conexidade e conexidade por caminhos coincidem sobre os CW-complexos. Além disso, uma aplicação $f : X \to Y$ entre CW-complexos é dita celular se respeita a filtração, isto é $f(X^n) \subseteq Y^n$ para todo $n \geq 0$.

Um subcomplexo de um $CW-$complexo é um subespaço fechado que é união de células abertas. Note que o fecho das $n-$células abertas $e^n_\alpha := \Phi(\text{Int } D^n)$ está dado por $\overline{e^n_\alpha} = \Phi(D^n)$. Uma aplicação $f : X \to Y$ onde X é um CW-complexo, é contínua se e somente se $f|_{\overline{e^n_\alpha}}$ são contínuas para todas as $n-$células abertas e^n_α, $\alpha \in \mathscr{A}$ [2, Apêndice pág. 523]. Isto justifica o nome destes espaços já que o nome CW representa as duas propriedades mais importantes dos $CW-$complexos, a saber C : Closure-finiteness (ou fechamento finito) devido a que o fecho de cada célula aberta intercepta somente um número finito de outras células abertas; e W : Weak topology (ou topologia fraca) devido a que um conjunto é fechado se, e somente se, intercepta o fecho de cada célula aberta num conjunto fechado.

Um espaço topológico X é dito gerado por uma coleção de subespaços X_α se $X = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} X_\alpha$ e qualquer conjunto $A \subseteq X$ é fechado em X se, e somente se, $A \cap X_\alpha$ é fechado em X_α para cada $\alpha \in \mathscr{A}$. Desta forma, um CW-complexo é gerado pela coleção dos subespaços $\overline{e^n_\alpha}$ de todas suas $n-$células abertas e^n_α. Como X também é gerado por seus subespaços X^n isto implica que X é gerado por seus subespaços compactos, isto é todo CW-complexo é compactamente gerado [2, Apêndice pág. 523].

Seja A um espaço topológico. Um espaço $CW-$complexo relativo a A é um espaço topológico X junto com uma filtração ascendente de subespaços

$$A = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^{n-1} \subset X^n \subset \cdots \subset X = \bigcup_{n=-1}^{\infty} X^n$$

tais que

i) o subespaço X^0 é a união de A e um espaço topológico discreto,

ii) para todo $n \geq 1$, X^n é homeomorfo à $n-$ésima extensão celular de X^{n-1},

iii) a topologia de X é coherente com a filtração anterior, isto é, um subconjunto $U \subseteq X$ é aberto (ou fechado resp.) em X se e somente se $U \cap X^n$ é aberto (ou fechado resp.) em X^n para todo n.

Denotaremos o $CW-$complexos X relativo a A como sendo o par (X,A). Note que se A é um subcomplexo de um $CW-$complexo X, então A é um $CW-$complexo com decomposição $A^n = A \cap X^n$. Além disso, o par (X,A) é um espaço CW- complexo relativo a A, e o espaço quociente X/A é um espaço $CW-$complexo [2, Capítulo 0, pág. 8].

Na continuação apresentamos algumas ferramentas da topologia algébrica que usaremos neste capítulo. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma função contínua (chamada homotopia) $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. No caso afirmativo escrevemos $f \simeq g$. Seja $A \subseteq X$ um subespaç topológico de X e seja $F : X \times [0,1] \to Y$ uma homotopia entre funções contínuas $f, g : X \to Y$. Se $f|_A = g|_A = F|_{A\times[0,1]}$, então dizemos que F é uma homotopia relativa à A e escrevemos $f \simeq_A g$. Dizemos que o espaço X é contrátil se $id_X \simeq c$, onde $c : X \to X$ é alguma função constante $c(x) = x_0$, para todo $x \in X$. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é dita uma equivalência homotópica se existe uma aplicação contínua $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq id_Y$ e $g \circ f \simeq id_X$. Neste caso os espaços são chamados homotópicamente equivalentes ou que têm o mesmo tipo de homotopia e são denotamos por $X \simeq Y$.

Um $p-$simplexo Δ_p em $\mathbb{R}^{p+1}$ para $p \geq 0$ é o subconjunto

$$\Delta_p := \left\{ (t_0, t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^{p} t_i = 1,\ 0 \leq t_i \leq 1,\ i = 0, 1, \ldots, p \right\}$$

Dado um espaço topológico X, um p-simplexo singular em X é uma função $\phi : \Delta_p \to X$. Para um inteiro $0 \leq i \leq p$, definimos a $i-$ésima face de ϕ, denotada $d_i\phi$, como sendo o $(p-1)$-simplexo singular em X dado por $d_i\phi(t_0, \ldots, t_{p-1}) = \phi(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{p-1})$. Denotamos por $S_n(X)$ o grupo abeliano livre cuja base é o conjunto de todos os $n-$simplexos singulares em X. Definimos a aplicação bordo $\partial_n : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ como sendo o homomorfismo definido por $\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$. É fácil verificar que $(S_\bullet(X), \partial_\bullet)$

$$S_\bullet(X) : \qquad \cdots \to S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0, \tag{3.1}$$

é um complexo de cadeias. Definimos o $n-$ésimo grupo de homologia singular de X com coeficientes em $\mathbb{Z}$, denotado $H_n(X, \mathbb{Z})$, como sendo

$$H_n(X, \mathbb{Z}) := H_n\left(S_\bullet(X)\right).$$

EXEMPLO 3.3. Se $X \neq \emptyset$ e é conexo por caminhos, então $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Para $n > 0$, usando a sequência de Mayer-Vietoris [2, Exemplo 2.46], podemos mostrar que $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e $H_k(S^n, \mathbb{Z}) = 0$ para $k \neq n$ e $k \neq 0$.

PROPOSIÇÃO 3.1. *Seja X um espaço topológico. Se $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ são as componentes conexas por caminho de X, então para todo $n \geq 0$,*

$$H_n(X, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \mathbb{Z}).$$

Demonstração. Veja-se [2, Proposição 2.6] □

Se (X, A) é um par de espaços topológicos com $A \subseteq X$, então $S_\bullet(A)$ é um subcomplexo de $S_\bullet(X)$. Além disso, dado que $\partial_n(S_n(A)) \subseteq S_{n-1}(A)$, definimos para todo $n \geq 0$ o grupo quociente

$$S_n(X, A) := \frac{S_n(X)}{S_n(A)}.$$

É fácil verificar que $(S_\bullet(X,A),\overline{\partial}_\bullet)$ é um complexo de cadeias e definimos o $n-$ésimo grupo de homologia singular de X relativo de A como sendo

$$H_n(X,A,\mathbb{Z}) := H_n(S_\bullet(X,A)).$$

Note que $H_n(X,\mathbb{Z}) = H_n(X,\emptyset,\mathbb{Z})$.

EXEMPLO 3.4. Seja $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$ o disco unitário de dimensão n. Segundo [2, Exemplo 2.17], temos

$$H_i(D^n,\partial D^n,\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = n \\ 0 & \text{se } i \neq n. \end{cases}$$

Seja G um grupo abeliano e seja (X,A) um par de espaços topológicos. Para todo $n \geq 0$, definimos

$$S_n(X,A,G) := S_n(X,A) \otimes_{\mathbb{Z}} G$$

e

$$\partial'_n := \partial_n \otimes id_G.$$

Claramente $(S_\bullet(X,A,G),\partial'_\bullet)$ é um complexo de cadeias e definimos a homologia singular de X relativa de A com coeficientes em G como sendo

$$H_n(X,A,G) := H_n(S_\bullet(X,A,G)).$$

Seja X um espaço topológico e seja $x_0 \in X$ (chamado ponto base). Para $n \geq 1$, definimos o $n-$ésimo grupo de homotopia de X respeito ao ponto base x_0, denotado $\pi_n(X,x_0)$, como sendo o grupo de todas as classes de homotopia $f : I^n \to X$ tal que $f(\partial I^n) = x_0$, onde $I^n = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ e ∂I^n é o bordo de I^n, com a operação soma $+$ definida sobre as classes de homotopia como sendo $[f]+[g] := [h] \in \pi_n(X,x_0)$, onde

$$h(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \begin{cases} f(2x_1,x_2,\ldots,x_n) & \text{se } x_1 \in [0,\frac{1}{2}], \\ g(2x_1-1,x_2,\ldots,x_n) & \text{se } x_1 \in [\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

para todo $[f],[g] \in \pi_n(X,x_0)$. Para $n = 0$, consideramos $\pi_0(X,x_0)$ como sendo o conjunto das componentes conexas por caminhos do espaço X. Quando o ponto base x_0 é conhecido denotamos $\pi_n(X,x_0)$ simplesmente por $\pi_n(X)$. Não é difícil demonstrar que $\pi_n(X,x_0)$ são grupos abelianos para $n \geq 2$ [2, Capítulo 4].

Um espaço X é dito 0-conexo se é conexo por caminhos, é dito 1-conexo se é conexo por caminhos e $\pi_1(X,x_0) = 0$ para qualquer ponto $x_0 \in X$. Em geral, X é dito n-conexo se é conexo por caminhos e $\pi_j(X,x_0) = 0$ para todo $j \leq n$ e para todo $x_0 \in X$. Pode-se provar que se X é um CW-complexo com células somente de dimensão maior ou igual a n $(n \geq 1)$, então X é $(n-1)$-conexo e o homomorfismo induzido pela inclusão $\pi_n(X^k) \to \pi_n(X)$ é sobrejetivo se $k = n$ e é um isomorfismo se $k > n$ [8, Teorema 5.1.10, Corolário 5.1.11].

EXEMPLO 3.5. Dado que a esfera unitária de dimensão n, $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, como $CW-$complexo tem uma estrutura celular formada por duas células: e^0 e e^n. Então S^n é $(n-1)$-conexo e portanto $\pi_j(S^n) = 0$ para todo $j < n$.

Em seguida, apresentaremos os teoremas mais importantes dos espaços $CW-$complexos que permitem a definição do espaço classificante.

TEOREMA 3.1 (Whitehead)**.** *Um espaço $CW-$complexo X é contrátil se e somente se X é conexo e $\pi_n(X,x_0) = 0$ para todo n e para quaisquer $x_0 \in X$. Uma aplicação $f : X \to Y$ entre espaços $CW-$complexos é uma equivalência homotópica se e somente se f induz um isomorfismo $\pi_n(X,x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, f(x_0))$ para todo $x_0 \in X$ e para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Veja-se [8, Teorema 5.1.13]. □

Seja X um espaço topológico e seja $x_0 \in X$ um ponto base. Então para todo $n \geq 1$ existe um homomorfismo natural

$$h_n : \pi_n(X,x_0) \to H_n(X,\mathbb{Z})$$

definido como segue: Se $f : I^n \to X$ é um representante de uma classe de homotopía $[f] \in \pi_n(X,x_0)$, então f induz uma aplicação $S^n = \dfrac{I^n}{\partial I^n} \to X$ e portanto uma aplicação $f_n : H_n(S^n,\mathbb{Z}) \to H_n(X,\mathbb{Z})$. Dado que $H_n(S^n,\mathbb{Z})$ é um grupo cíclico infinito (Exemplo 3.5), para cada $n \geq 1$ definimos $h_n(f) := f_n([S^n])$, onde $[S^n]$ é o gerador do grupo $H_n(S^n,\mathbb{Z})$. Os homomorfismos h_n são chamados homomorfismos de Hurewicz. Pode-se provar que h_n de fato é um homomorfismo de grupos [2, Proposição 4.36].

TEOREMA 3.2 (The Hurewicz Theorem)**.** *Se X é $n-$conexo para $n \geq 1$, então o homomorfismo de Hurewicz induz um isomorfismo $\pi_{n+1}(X,x_0) \to H_{n+1}(X,\mathbb{Z})$ e $H_j(X,\mathbb{Z}) = 0$ para todo $0 \leq j \leq n$.*

Demonstração. Veja-se [2, Teorema 4.37]. □

EXEMPLO 3.6. Pelo Exemplo (3.5), a esfera unitaria S^n é $(n-1)$-conexo. Então para $n \geq 2$ temos que $\pi_n(S^n) \cong H_n(S^n,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Seja G um grupo agindo sobre o espaço X. Dizemos que G age livre e descontinua propriamente sobre X se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G - \{1\}$.

TEOREMA 3.3. *Seja G um grupo. Então existe um CW-complexo contrátil X_G tal que G age livre e celularmente sobre X_G (isto é a ação de G mapeia homeomorficamente cada célula numa outra célula, portanto G age descontinua propriamente) e X_G/G é um CW-complexo. Em particular, a aplicação quociente $p : X_G \to X_G/G$ é um recobrimento.*

Demonstração. Veja-se [8, Teorema 5.1.15]. □

O seguinte teorema mostra que X_G/G é único ao menos de homotopia.

TEOREMA 3.4. *Seja G um grupo e sejam X_1, X_2 espaços topológicos Hausdorff contráteis tais que G age livre e descontinua propriamente sobre X_1 e X_2. Se X_1/G e X_2/G são espaços para-compactos, (isto é são espaços Hausdorff tais que toda cobertura aberta admite um refinamento aberto localmente finito) então X_1/G e X_2/G são homotópicamente equivalentes.*

Demonstração. Veja-se [8, Teorema 5.1.5]. □

Note que em particular os espaços CW-complexos são paracompactos [2, Proposição 4G.2].

DEFINIÇÃO 3.1 (Espaço Classificante)**.** *Seja G um grupo. O espaço $BG := X_G/G$ é chamado o espaço classificante de G, e é único ao menos de homotopia.*

Se $EG := X_G$, então a aplicação quociente $p : EG \to BG$ é um recobrimento. Como EG é contrátil [2, Proposição 4.1], temos que

$$\pi_n(BG, p(x_0)) = \pi_n(EG, x_0) = 0,$$

para todo $n \geq 2$. Além disso,

$$G \cong \frac{\pi_1(BG, p(x_0))}{p_*(\pi_1(EG, x_0))} = \pi_1(BG, p(x_0)),$$

[2, Proposição 1.40]. Assim

$$\pi_n(BG) = \pi_n(BG, p(x_0)) \cong \begin{cases} G & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Reciprocamente, se X' é um $CW-$complexo conexo tal que $\pi_1(X', x'_0) = G$ e para $n > 1$ $\pi_n(X', x'_0) = 0$ em algum ponto base $x'_0 \in X$, então o espaço de recobrimento universal de X' tem todos seus grupos de homotopia triviais e portanto é contrátil. Assim X' é um espaço classificante de G.

O seguinte teorema garante que a homologia singular do espaço classificante de um grupo G não difiere da homologia integral de G.

TEOREMA 3.5. *Se M é um $G-$módulo trivial, então existe um isomorfismo natural entre $H_\bullet(G, M)$ e $H_\bullet(BG, M)$. Em particular para todo $n \geq 0$, $H_n(G) \cong H_n(BG, \mathbb{Z})$.*

Demonstração. Veja-se [8, Teorema 5.1.27]. □

A construção do espaço classificante dá um funtor $B(-)$ da categoria dos grupos na categoria dos espaços topológicos. Então todo homomorfismo $\alpha : G \to H$, dá-nos uma aplicação contínua $B\alpha : BG \to BH$.

3.2 A $+$-construção

Seja X um espaço topológico. Um sistema local de coeficientes sobre X consiste da seguinte informação

(i) para cada $x \in X$ temos um grupo G_x dado,

(ii) para cada $\alpha : [0,1] \to X$ com $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$, temos um isomorfismo $\alpha^* : G_x \to G_y$ que depende únicamente da classe de homotopia de α que une x e y.

(iii) sejam $\alpha_1, \alpha_2 : [0,1] \to X$ caminhos que unem x com y e y com z, respetivamente. Se $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ é a concatenação dos caminhos α_1 e α_2 unindo x com z, então

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2)^* = \alpha_2^* \circ \alpha_1^* : G_x \to G_z$$

Se X é um espaço conexo por caminhos com ponto base $x_0 \in X$, então as condições anteriores são equivalentes a ter um grupo G e uma ação de $\pi_1(X,x_0)$ sobre G. Em geral, para qualquer espaço X e qualquer inteiro $n \geq 1$, a aplicação $x \mapsto \pi_n(X,x)$ é um sistema local de coeficientes sobre X [10, Apêndice A.13].

Desejamos agora definir grupos de homologias $H_\bullet(X;G)$ para o espaço topológico X (tal que X tem espaço de recobrimento universal) relativo ao sistema local de coeficientes G sobre X e ao ponto base $x_0 \in X$. Desejamos que esta homologia satisfaça uma propriedade similar à Proposição (3.1), isto é se $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ são as componentes conexas por caminho de X, então para todo $n \geq 0$

$$H_n(X;G) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha; G|_{X_\alpha}).$$

Assim sem perda de generalidade, podemos supor que X é conexo por caminhos e $p : \tilde{X} \to X$ é um espaço de recobrimento universal de X com grupo fundamental $\Pi = \pi_1(X,x_0)$. Logo X é o quociente de $\tilde{X}$ pela ação livre de Π sobre $\tilde{X}$. Note que a ação de Π sobre $\tilde{X}$ induz uma ação de Π sobre o grupo $S_n(\tilde{X})$ para todo $n \geq 0$. Assim o complexo $(S_\bullet(\tilde{X}), \partial_\bullet)$ (3.1) é um complexo de cadeias de $\Pi-$módulos livres [2, Capítulo 3, Seção H]. Se G é um sistema local de coeficientes sobre X e $G_0 := G_{x_0}$, definimos o grupo de homologia do espaço X sobre o sistema local de coeficientes G como sendo

$$H_n(X,A;G) := H_n(G_0 \otimes_\Pi S_\bullet(\tilde{X})).$$

Na continuação definimos a $+$-construção de um espaço X. Isso vai permitir-nos introduzir a definição dos K-grupos de anéis dada por Daniel Quillen.

Teorema 3.6 (+-construção)**.** *Seja X um espaço topológico conexo e seja $N \subseteq \pi_1(X)$ um subgrupo normal e perfeito de $\pi_1(X)$. Então existe um CW-complexo X^+, chamado a $+$-construção de X relativo a N, tal que X^+ contém X e a inclusão $i : X \longrightarrow X^+$ satisfaz as seguintes condições*

1) *$\pi_1(X^+) \cong \pi_1(X)/N$ e o homomorfismo $i_* : \pi_1(X) \to \pi_1(X^+)$ é a aplicacão quociente $\pi_1(X) \to \pi_1(X)/N$.*

2) *A inclusão i induz um isomorfismo $H_n(X;i^*(G)) \to H_n(X^+;G)$ para todo $n \geq 0$ e para quaisquer sistema local de coeficientes G sobre X^+.*

3) *Se $f : X \to Y$ é uma aplição contínua entre espaços topológicos conexos tais que $f_*(N)$ é trivial em $\pi_1(Y)$, então existe uma aplicação contínua $f^+ : X^+ \to Y$, única a menos de homotopia, tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X^+ \arrow[d, dashed, "f^+"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

Em particular, pela segunda condição temos que

$$H_n(X,\mathbb{Z}) \cong H_n(X^+,\mathbb{Z}), \tag{3.2}$$

para todo $n \geq 0$, isto é X e X^+ não diferem homologicamente. Também pela terceira condição, X^+ é único ao menos de homotopia.

Exemplo 3.7. Seja R um anel com unidade e seja $X = BGL(R)$, o espaço classificante do grupo linear geral infinito $GL(R)$. Pela Proposição (2.1), o subgrupo de matrizes elementares $N = E(R)$ é um subgrupo normal e perfeito de $GL(R) = \pi_1(BGL(R))$. Então temos garantido a existência da $+$-construção do espaço $BGL(R)$ relativa a $E(R)$, denotada $BGL(R)^+$. Portanto para todo $n \geq 0$

$$H_n(BGL(R)^+,\mathbb{Z}) \cong H_n(BGL(R),\mathbb{Z}) \cong H_n(GL(R)). \tag{3.3}$$

Além disso, se Z é o espaço de recobrimento de X tal que $\pi_1(Z) = N$, então Z^+ é, a menos de homotopia, o espaço de recobrimento de X^+. Isto implica que o espaço de recobrimento de $BGL(R)^+$ é $BE(R)^+$, onde estas construções são tomadas relativas ao subgrupo $E(R)$.

Exemplo 3.8. Considere $G = GL(R) \times GL(R)$. É fácil verificar que $BG \cong BGL(R) \times BGL(R)$ usando a caracterização dada depois da definição do espaço classificante. Por outro lado, dado que $E := E(R) \times E(R)$ é um subgrupo normal e perfeito do grupo fundamental $\pi_1(BG) = G$, pelas propriedades do espaço classificante $BGL(R)^+$ temos que a $+$-construção de BG relativo a E coincide com $BGL(R)^+ \times BGL(R)^+$ a menos de homotopia.

3.3 K-teoria de Quillen e Milnor

Definição 3.2. *Seja R um anel com unidade. Para $n \geq 1$, o $n-$ésimo $K-$grupo do anel R é o $n-$ésimo grupo de homotopia da $+$-construção do espaço clasificante $BGL(R)$ relativo ao grupo $E(R)$, isto é*

$$K_n(R) := \pi_n\left(BGL(R)^+\right).$$

Usando a definição de X^+, se $n = 1$, então

$$K_1(R) := \pi_1\left(BGL(R)^+\right) \cong \frac{\pi_1(BGL(R))}{E(R)} = GL(R)/E(R).$$

Dado que $BE(R)^+$ é um espaço de recobrimento de $BGL(R)^+$, então

$$\pi_n\left(BGL(R)^+\right) \cong \pi_n\left(BE(R)^+\right),$$

para todo $n \geq 2$. Por outro lado, dado que $BE(R)^+$ é $1-$conexo então pelo Teorema de Hurewicz (3.2)

$$\pi_2\left(BE(R)^+\right) \cong H_2(BE(R)^+).$$

Devido a (3.2) temos que homologicamente $BE(R)$ e $BE(R)^+$ não diferem, isto é $H_2\left(BE(R)^+\right) \cong H_2(BE(R))$. Então por (3.3) obtemos

$$K_2(R) := \pi_2\left(BGL(R)^+\right) \cong H_2(BE(R)) \cong H_2(E(R)).$$

Portanto os novos grupos $K_1(R)$ e $K_2(R)$ coincidem com os antigos grupos $K_1(R)$ e $K_2(R)$ descritos no Capítulo 2. Se $St(R)$ é o grupo Steinberg do anel R, definido no Capítulo 2, então para $n = 3$ temos o seguinte resultado.

TEOREMA 3.7 (Loday). *Seja R um anel com unidade. Então*

$$K_3(R) = \pi_3(BGL(R)^+) \cong H_3(St(R)).$$

Demonstração. Veja-se [3, Teorema 1.4.2]. □

Como $BGL(R)^+$ é conexo por caminhos, $\pi_0(BGL(R)^+)$ é trivial. Logo para incluir $K_0(R)$ na definição dos $K-$grupos, temos que modificar o espaço dado na Definição (3.2).

DEFINIÇÃO 3.3 (Quillen). *Seja R um anel com unidade e considere M como sendo um espaço topológico discreto dado. Para $n \geq 0$, o n-ésimo K-grupo do anel R é definido como sendo o $n-$ésimo grupo de homotopia do espaço $BGL(R)^+ \times K_0(R)$, onde $BGL(R)^+$ é construído relativo ao grupo $E(R)$, isto é*

$$K_n(R) := \pi_n\left(BGL(R)^+ \times K_0(R)\right).$$

Desta maneira, $K_0(R) := \pi_0(BGL(R)^+ \times M) \cong M$ e para $n \geq 1$ temos que $K_n(R) := \pi_n(BGL(R)^+ \times K_0(R)) \cong \pi_n(BGL(R)^+)$, recuperando assim a primeira definição.

PROPOSIÇÃO 3.2 (Quillen, Gersten). *Seja R um anel com unidade. Então para $i \geq 2$ temos $K_i(R) \cong \pi_i(BE(R)^+)$, e para $i \geq 3$, $K_i(R) \cong \pi_i(BSt(R)^+)$.*

Demonstração. Veja-se [8, Teorema 5.2.7]. □

Note que para $n \geq 2$, $H_n(BE(R)^+) \cong H_n(E(R))$ e $H_n(BGL(R)^+) \cong H_n(GL(R))$, e usando o Teorema de Hurewicz, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_n(BE(R)^+) \cong K_n(R) = \pi_n(BGL(R)^+) \arrow[r, "h_n^{GL(R)}"] \arrow[dr, "h_n^{E(R)}"] & H_n(GL(R)) \\ & H_n(E(R)). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Para os níveis inferiores pela Proposição (2.1) e o Teorema (2.1), temos os seguintes isomorfismos

$$K_1(R) \overset{h_1^{GL(R)}}{\cong} H_1(GL(R)), \qquad K_2(R) \overset{h_2^{E(R)}}{\cong} H_2(E(R)).$$

Mas para o caso $n = 3$, temos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.3. *O homomorfismo $h_3^{E(R)} : K_3(R) \to H_3(E(R))$ é sobrejetor.*

Demonstração. O resultado segue-se ao estudar a sequência espectral

$$E^2_{p,q} = H_p(E(R), H_q(K_2(R))) \Rightarrow H_{p+q}(St(R)),$$

e usando os resultados obtidos em (2.2) e (2.1), isto é $H_1(St(R)) = H_2(St(R)) = 0$ e $H_1(E(R)) = \frac{E(R)}{[E(R),E(R)]} = 0$. □

DEFINIÇÃO 3.4. *Seja R um anel comutativo com unidade. Para $n \geq 1$, definimos o n-ésimo K-grupo de Milnor, denotado $K_n^M(R)$, como o grupo abeliano aditivo gerado pelos símbolos $\{a_1, \ldots, a_n\}$ com $a_i \in R^\times$ para $i = 1, \ldots, n$ satisfazendo as seguintes relações*

i) Para todo $1 \leq i \leq n$, $\{a_1, \ldots, a_i a_i', \ldots, a_n\} = \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n\} + \{a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n\}$.

ii) Se existem i, j $(i \neq j)$ tais que $a_i + a_j = 0$ ou $a_i + a_j = 1$, então $\{a_1, \ldots, a_n\} = 0$.

Além disso definimos $K_0^M(R) := \mathbb{Z}$.

Vejamos os níveis inferiores dos K-grupos de Milnor.

- Seja $n = 1$: $K_1^M(R)$ é o grupo abeliano gerado por todos os símbolos $\{a\}$ com $a \in R^\times$ satisfazendo

  $$\{ab\} = \{a\} + \{b\}, \qquad \{1\} = 0.$$

  Isto implica que $\{a^{-1}\} = -\{a\}$. Portanto o homomorfismo de grupos abelianos

  $$\begin{aligned} \varphi : K_1^M(R) &\longrightarrow R^\times \\ \{a\} &\longmapsto a \end{aligned}$$

  induz o isomorfismo $K_1^M(R) \cong R^\times$.

- Seja $n=2$: $K_2^M(R)$ é o grupo abeliano gerado por todos os símbolos $\{a,b\}$ com $a,b\in R^\times$ tal que para todo $a,1-a,a_1,a_2,b,b_1,b_2\in R^\times$,

$$\begin{aligned}\{a_1a_2,b\} &= \{a_1,b\}+\{a_2,b\},\\ \{a,b_1b_2\} &= \{a,b_1\}+\{a,b_2\},\\ \{a,1-a\} &= 0,\\ \{a,-a\} &= 0.\end{aligned}$$

  Se $a\in R^\times$, é fácil ver que $\{a,1\}=\{1,a\}=0$. Logo

$$\{a^{-1},b\}=-\{a,b\}, \qquad \{a,b^{-1}\}=-\{a,b\}.$$

  Portanto o homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned}\varphi : K_2^M(R) &\longrightarrow \frac{R^\times\otimes_{\mathbb{Z}}R^\times}{\langle a\otimes(1-a), b\otimes(-b) : a,b,1-a\in R^\times\rangle},\\ \{a,b\} &\longmapsto \overline{a\otimes b}\end{aligned}$$

  é um isomorfismo.

- Seja $n=3$: Seguindo o mesmo tratamento pode-se mostrar

$$K_3^M(R)\cong \frac{R^\times\otimes_{\mathbb{Z}}R^\times\otimes_{\mathbb{Z}}R^\times}{\langle a_1\otimes a_2\otimes a_3 : a_i\in R^\times, a_i+a_j=0 \text{ ou } a_i+a_j=1 \text{ para algum } i,j (i\neq j)\rangle}.$$

LEMA 3.1. *Seja R um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Se o corpo residual $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então*

$$K_2^M(R)\cong \frac{R^\times\otimes_{\mathbb{Z}}R^\times}{\langle a\otimes(1-a) : a,1-a\in R^\times\rangle}.$$

Em particular, $K_n^M(R)\cong(\bigotimes_{\mathbb{Z}}^n R^\times)/S$, onde S é o subgrupo gerado pelos elementos $a_1\otimes\cdots\otimes a_n$ tais que existem i,j com $i\neq j$ e $a_i+a_j=1$.

Demonstração. Seja $\{a,b\}' := \overline{a\otimes b}\in(R^\times\otimes_{\mathbb{Z}}R^\times)/\langle a\otimes(1-a) : a,1-a\in R^\times\rangle$. É suficiente demonstrar que $\{a,-a\}'=0$ para todo $a\in R^\times$. Seja $a\in R^\times$ tal que $1-a\in R^\times$. Dado que $-a=(1-a)/(1-a^{-1})$, então

$$\{a,-a\}'=\{a,(1-a)(1-a^{-1})^{-1}\}'=\{a,1-a\}'-\{a,(1-a^{-1})\}'=\{a^{-1},1-a^{-1}\}'=0.$$

Se $a,b\in R^\times$ são tais que $1-a,1-b,1-ab\in R^\times$, então pelo resultado anterior

$$\{a,b\}'+\{b,a\}'=\{ab,-ab\}'-\{a,-a\}'-\{b,-b\}'=0.$$

Se $a,b\in R^\times$ são tais que $1-a\in R^\times$ e dado que $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então existe $t\in R$ tal que $t,1-t,1-ta,1-tb,1-tab\in R^\times$. Então pelo resultado anterior, temos

$$\{a,b\}'+\{b,a\}'=\{a,tb\}'+\{tb,a\}'-\{a,t\}'-\{t,a\}'=0.$$

Se $a,b \in R^{\times}$ e dado que $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então existe $s \in R$ tal que $s, 1-s, 1-as \in R^{\times}$. Pelo anterior, temos

$$\{a,b\}' + \{b,a\}' = \{as,b\}' + \{b,as\}' - \{a,s\}' - \{s,a\}' = 0.$$

Finalmente, se $a \in R^{\times}$ e dado que $R/\mathfrak{m}$ é infinito, então existe $v \in R$ tal que $v, 1-v, 1-av \in R^{\times}$. Portanto

$$\{a,-a\}' = \{av,-av\}' - \{v,-v\}' - \{a,v\}' - \{v,a\}' = 0.$$

□

Em particular, se R é um anel local com corpo residual infinito, então

$$K_3^M(R) \cong \frac{R^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} R^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} R^{\times}}{\langle a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 : a_i \in R^{\times}, \text{ existem } i, j (i \neq j) \text{ tais que } a_i + a_j = 1 \rangle}.$$

Assim, se R é um anel local pelos Exemplos (2.1), (2.3) e o Teorema (2.2), os K-grupos de Quillen e os K-grupos de Milnor de R coinciden para $n = 0, 1$ e 2;

$$\begin{aligned} K_0^M(R) &\cong K_0(R) \cong \mathbb{Z}, \\ K_1^M(R) &\cong K_1(R) \cong R^{\times}, \\ K_2^M(R) &\cong K_2(R) \cong \frac{R^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} R^{\times}}{\langle a \otimes (1-a) : a, 1-a \in R^{\times} \rangle}. \end{aligned}$$

Definimos o homomorfismo produto entre os $K-$grupos de Milnor da seguinte forma

$$\begin{aligned} K_m^M(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^M(R) &\longrightarrow K_{m+n}^M(R). \\ \{a_1, \ldots, a_m\} \otimes \{b_1, \ldots, b_n\} &\longmapsto \{a_1, \ldots, a_m\} \centerdot \{b_1, \ldots, b_n\} := \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\} \end{aligned}$$

Como para todo $a_1, \ldots, a_n \in R^{\times}$,

$$\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n\} = -\{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n\} \in K_n^M(R),$$

o produto definido anteriormente é anti-comutativo, isto é

$$\{a_1, \ldots, a_m\} \centerdot \{b_1, \ldots, b_n\} = (-1)^{nm} \{b_1, \ldots, b_n\} \centerdot \{a_1, \ldots, a_m\} \in K_{m+n}^M(R)$$

3.4 O produto nos K-grupos de Quillen

Nosso objetivo nesta seção é dar um produto aos $K-$grupos de Quillen que também seja anti-comutativo e estabelecer uma relação entre os $K-$grupos de Quillen e os $K-$grupos de Milnor.

Um espaço topológico X com ponto base $x_0 \in X$ é dito $H-$espaço se existe uma função contínua, chamada multiplicação, $\mu : X \times X \to X$ tal que $\mu(x_0, x_0) = x_0$ e as aplicações

$$q_1 : X \to X, \quad x \mapsto \mu(x, x_0), \qquad q_2 : X \to X, \quad x \mapsto \mu(x_0, x)$$

são homotópicas a identidade, isto é $q_1 \simeq_{\{x_0\}} id_X$ e $q_2 \simeq_{\{x_0\}} id_X$. Além disso um H-espaço X é dito um H-grupo se a multiplicação μ é associativa a menos de homotopia, isto é $\mu \circ (\mu \times id_X) \simeq_{\{(x_0,x_0,x_0)\}} \mu \circ (id_X \times \mu)$ e se existe uma aplicação contínua $\eta : X \to X$ com $\eta(x_0) = x_0$ tal que $\mu \circ (\eta, id_X) \simeq_{\{x_0\}} c_{x_0}$ e $\mu \circ (id_X, \eta) \simeq_{\{x_0\}} c_{x_0}$. onde $c_{x_0}(x) = x_0$ para todo $x \in X$.

Se X é um $H-$espaço e se a aplicação $t : X \times X \to X \times X$, $(x,x') \mapsto (x',x)$ tem a propriedade $\mu \circ t \simeq \mu$, então dizemos que a multiplicação μ é homotopicamente comutativa. Por exemplo, se R é um anel qualquer e se o homomorfismo $\mu' : GL(R) \times GL(R) \to GL(R)$ é definido como segue

$$\mu'\big((a_{ij}),(b_{ij})\big) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \not\equiv j \mod 2, \\ a_{\frac{i+1}{2},\frac{j+1}{2}} & \text{se } i \equiv j \equiv 1 \mod 2, \\ b_{\frac{i}{2},\frac{j}{2}} & \text{se } i \equiv j \equiv 0 \mod 2, \end{cases}$$

tomando $\mu : BGL(R)^+ \times BGL(R)^+ \to BGL(R)^+$ como sendo a aplicação contínua induzida por $B\mu' : BGL(R) \times BGL(R) \to BGL(R)$ prova-se que $BGL(R)^+$ é um $H-$grupo com a multiplicação μ homotópicamente comutativa [3, Teorema 1.2.6], onde $x_0 = I_{GL(R)}$ e $I_{GL(R)}$ é a identidade de $GL(R)$.

Dados os espaços com ponto base (X,x_0) e (Y,y_0), definimos o espaço topológico $X \wedge Y$ como sendo o quociente $(X \times Y)/X \vee Y$, onde $X \vee Y := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$. Denotamos $x_0 \wedge y_0 \in X \wedge Y$ como sendo a imagem de (x_0,y_0) e escolhamos $x_0 \wedge y_0$ como ponto base de $X \wedge Y$.
Dadas aplicações contínuas $f : I^n \to X$ e $g : I^m \to Y$. Se $f(\partial I^n) = x_0$ e $g(\partial I^m) = y_0$, então o produto $f \times g : I^{m+n} \to X \times Y$ leva $\partial I^{m+n} = (\partial I^n \times I^m) \cup (I^n \times \partial I^m)$ para $X \vee Y$. Logo $f \times g$ induz uma aplicação contínua $f \wedge g : I^{m+n} \to X \wedge Y$ tal que $(f \wedge g)(\partial I^{m+n}) = x_0 \wedge y_0$. Portanto $f \wedge g$ representa uma classe no $(m+n)-$ésimo grupo de homotopia de $X \wedge Y$. Pode-se provar que a aplicação

$$\pi_n(X,x_0) \times \pi_m(Y,y_0) \longrightarrow \pi_{m+n}(X \wedge Y, x_0 \wedge y_0), \qquad ([f],[g]) \mapsto [f \wedge g]$$

está bem definida e é bilinear para todo $n,m \geq 1$ [2, Apêndice A.7]. Assim, dado um espaço (X,x_0) e uma aplicação contínua $(X \wedge X, x_0 \wedge x_0) \to (X,x_0)$ temos um produto bilinear induzido

$$\star' : \pi_n(X,x_0) \times \pi_m(X,x_0) \to \pi_{n+m}(X,x_0),$$

que satisfaz

$$x \star' y = (-1)^{nm} y \star' x \in \pi_{m+n}(X,x_0)$$

para todo $x \in \pi_n(X,x_0)$ e para todo $y \in \pi_m(X,x_0)$.

Sejam R e S dois anéis com unidade e sejam $A = (a_{ij}) \in GL_m(R)$ e $B \in GL_n(S)$. Usando o isomorfismo de $R \otimes_{\mathbb{Z}} S-$módulos $\gamma : R^m \otimes_{\mathbb{Z}} S^n \to (R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^{mn}$ junto com o produto tensorial de matrizes, definimos

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B. \end{pmatrix} \in GL_{mn}(R \otimes_{\mathbb{Z}} S).$$

Claramente

$$GL_m(R) \times GL_n(S) \to GL_{mn}(R \otimes_{\mathbb{Z}} S), \qquad (A,B) \mapsto A \otimes B,$$

é um homomorfismo de grupos e induz um homomorfismo $GL(R) \times GL(S) \to GL(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)$ que leva $E(R) \times E(S)$ para $E(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)$. Logo temos uma aplicação contínua induzida [3, Proposição 2.1.6]

$$\gamma^{R,S} : BGL(R)^+ \times BGL(S)^+ \to BGL(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^+.$$

De acordo com [3, Proposição 2.1.8], temos uma aplicação contínua

$$\tilde{\gamma}^{R,S} : BGL(R)^+ \wedge BGL(S)^+ \to BGL(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^+$$

associativa, comutativa, única a menos de homotopia e que faz comutar o seguinte diagrama a menos de homotopia,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] BGL(R)^+ \times BGL(S)^+ \arrow[rr] \arrow[dr, "\gamma^{R,S}"'] & & BGL(R)^+ \wedge BGL(S)^+. \arrow[dl, "\tilde{\gamma}^{R,S}"] \\ & BGL(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^+ & \end{tikzcd}$$

Pelo resultado anterior, para $n, m \geq 1$, a aplicação contínua $\tilde{\gamma}^{R,S}$ permite definir uma aplicação bilinear associativa [3, Teorema 2.1.11]

$$\begin{aligned} \star' : \pi_n(BGL(R)^+) \times \pi_m(BGL(S)^+) &\longrightarrow \pi_{n+m}(BGL(R \otimes_{\mathbb{Z}} S)^+). \\ ([f],[f']) &\longmapsto [f] \star' [f'] := [\tilde{\gamma}^{R,S} \circ (f \wedge f')] \end{aligned}$$

Se R for comutativo, o homomorfismo $\alpha : R \otimes_{\mathbb{Z}} R \to R$, $a \otimes b \mapsto ab$ induz uma aplicação bilinear associativa dada pela composição

$$K_n(R) \times K_m(R) \xrightarrow{\star'} K_{n+m}(R \otimes_{\mathbb{Z}} R) \xrightarrow{\alpha_*} K_{n+m}(R),$$

tal que para todo $x \in K_n(R)$ e para todo $y \in K_m(R)$ tem-se que $x \star y = (-1)^{nm} y \star x \in K_{n+m}(R)$, onde $\star = \alpha_* \circ \star'$. Portanto temos o seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Se R é um anel comutativo, então temos uma multiplicação anti-comutativa associativa entre os $K-$grupos de Quillen denotada por*

$$\star : K_n(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_m(R) \to K_{n+m}(R).$$

Em particular, para todo $x \in K_n(R)$ e $y \in K_m(R)$, temos $x \star y = (-1)^{nm} y \star x$.

Agora usando as estruturas multiplicativas dos $K-$grupos de Quillen e de Milnor, de maneira indutiva, podemos estabelecer um homomorfismo nestes grupos da seguinte maneira.

PROPOSIÇÃO 3.4. *Seja R um anel local comutativo com corpo residual infinito. Então para todo $n \geq 1$ temos uma aplicação natural*

$$\tau_n : K_n^M(R) \to K_n(R)$$

Demonstração. Para $n = 1$, seja $\tau_1 : K_1^M(R) \to K_1(R)$ sendo definida para todo $a \in R^\times$ como $\tau_1(\{a\}) = \mathbf{c}(a) \in H_1(R^\times)$. Pelo Exemplo (1.29) temos que $H_1(R^\times) \cong H_1(GL(R))$ (1.13) e portanto τ_1 esta bem definida. É fácil ver que τ_1 é um isomorfismo. O homomorfismo $\tau_2 : K_2^M(R) \to K_2(R)$ foi construído no Teorema de Van der Kallen-Matsumoto (2.2) e está dado por

$$\tau_2(\{a,b\}) = \mathbf{c}\left(\operatorname{diag}(a,1,a^{-1}), \operatorname{diag}(b,b^{-1},1)\right).$$

Agora suponha por indução que já temos definida a aplicação $\tau_n : K_n^M(R) \to K_n(R)$. Definimos o homomorfismo $\tau_{n+1} : K_{n+1}^M(R) \to K_{n+1}(R)$ como sendo

$$\tau_{n+1}(\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\}) := \tau_1(\{a_1\}) \star \tau_n(\{a_2,\ldots,a_{n+1}\}).$$

Pela multiplicação anti-comutativa sobre os $K-$grupos de Milnor e Quillen, é fácil verificar que esta aplicação está bem definida. Logo o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
K_1^M(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^M(R) \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\tau_1 \otimes \tau_n"'] & K_{n+1}^M(R) \arrow[d, "\tau_{n+1}"] \\
K_1(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n(R) \arrow[r, "\star"] & K_{n+1}(R).
\end{tikzcd}$$

□

TEOREMA 3.9 (Suslin)**.** *Se R é um anel com unidade, então o núcleo do homomorfismo*

$$h_3^{E(R)} : K_3(R) \to H_3(E(R))$$

coincide com a imagem do homomorfismo

$$K_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(R) \to K_3(R).$$

Portanto temos a sequência exata

$$K_1(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(R) \to K_3(R) \xrightarrow{h_3^{E(R)}} H_3(E(R)) \to 0. \tag{3.4}$$

Em particular, o núcleo de $h_3^{E(R)}$ é 2-torção.

Demonstração. Veja-se [12, Lema 5.2]. □

Com isto descreveremos agora o homomorfismo da composição

$$K_n^M(R) \xrightarrow{\tau_n} K_n(R) \quad \xrightarrow{h_n^{GL(R)}} \quad H_n(GL(R)),$$

quando R for um anel local com corpo residual infinito.

PROPOSIÇÃO 3.5 (Suslin)**.** *Seja R um anel local com corpo residual infinito. Se $x \in K_m(R)$ e $y \in K_n(R)$, então*

$$h_{m+n}^{GL(R)}(x \star y) = (\psi_{m,n})_* \left(h_m^{GL(R)}(x) \times h_n^{GL(R)}(y)\right) - mn\left(h_m^{GL(R)}(x) \cup h_n^{GL(R)}(y)\right),$$

onde $\psi_{m,n} : GL_m(R) \times GL_n(R) \to GL_{mn}(R)$ é o produto tensorial de matrizes e o produto cup é induzido por

$$GL_m(R) \times GL_n(R) \to GL_{m+n}(R), \qquad (A,B) \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Veja-se [11, Lema 4.2]. □

COROLÁRIO 3.1. *Seja R é um anel local com corpo residual infinito. Então o homomorfismo*

$$l_n := h_n^{GL(R)} \circ \tau_n : K_n^M(R) \to H_n(GL(R)) \cong H_n(GL_n(R))$$

é dado por

$$l_n(\{a_1, \ldots, a_n\}) = [a_1, \ldots, a_n] := \mathbf{c}\,(A_{1,n}, \ldots, A_{n,n}) \in H_n(GL(R)),$$

onde $A_{1,n} := diag(a_1, I_{n-1}) \in GL_n(R)$ e para $i \geq 2$, $A_{i,n} := diag(a_i, \ldots, a_i, a_i^{-(i-1)}, I_{n-i}) \in SL_n(R)$.

Demonstração. Usaremos indução sobre n. No caso $n = 1$, temos $K_1(R) \cong K_1^M(R) = R^\times$, logo $l_1(\{a\}) = \mathbf{c}(a) = [a]$, $a \in R^\times$ e o resultado é válido. Suponha por indução sobre $n-1$ que $l_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) = [a_1, \ldots, a_{n-1}]$. Como $\psi_{n-1,1} : GL_{n-1}(R) \times GL_1(R) \to GL_{n-1}(R)$ é dado por $(A,a) \mapsto aA$, pela Proposição (3.5) temos

$$\begin{aligned} l_n(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \;& h_n^{GL(R)}(\tau_n(\{a_1, \ldots a_n\})) \\ = \;& h_n^{GL(R)}(\tau_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) \star \tau_1(a_n)) \\ = \;& (\psi_{n-1,1})_* (h_{n-1}(\tau_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\})) \times h_1(\tau_1(\{a_n\}))) \\ & -(n-1)h_{n-1}(\tau_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\})) \cup h_1(\tau_1(\{a_n\})) \\ = \;& (\psi_{n-1,1})_* (l_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) \times l_1(\{a_n\})) \\ & -(n-1)l_{n-1}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) \cup l_1(\{a_n\}) \\ = \;& (\psi_{n-1,1})_* (\mathbf{c}(A_{1,n-1}, \ldots, A_{n-1,n-1}) \times \mathbf{c}(a_n)) \\ & -(n-1)\mathbf{c}(A_{1,n-1}, \ldots, A_{n-1,n-1}) \cup \mathbf{c}(a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_n(\{a_1,\ldots,a_n\}) = \;& \mathbf{c}(A_{1,n-1},\ldots,A_{n-1,n-1},a_nI_{n-1}) \\
& -(n-1)\mathbf{c}(A_{1,n},\ldots,A_{n-1,n},\mathrm{diag}(I_{n-1},a_n)) \\
= \;& \mathbf{c}(A_{1,n},\ldots,A_{n-1,n},\mathrm{diag}(a_nI_{n-1},1)) \\
& +\mathbf{c}(A_{1,n},\ldots,A_{n-1,n},\mathrm{diag}(I_{n-1},a_n^{-(n-1)})) \\
= \;& \mathbf{c}(A_{1,n},\ldots,A_{n-1,n},\mathrm{diag}(a_nI_{n-1},a_n^{-(n-1)})) \\
= \;& \mathbf{c}(A_{1,n},\ldots,A_{n,n}) \\
= \;& [a_1,\ldots,a_n] \in H_n(GL_n(R)) \cong H_n(GL(R))
\end{aligned}$$

□

OBSERVAÇÃO 3.1. Para $i \geq 2$ defina $A'_{i,n} := \mathrm{diag}(A_{i,n},1) \in SL_{n+1}(R)$, pelo Teorema de Estabilidade Homológica para $GL_n(R)$ (1.16), em $H_n(GL_n(R))$ temos

$$\begin{aligned}
[a_1,\ldots,a_n] = \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a_1,I_{n-1},1),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}) \in H_n(GL_{n+1}(R)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a_1,I_{n-1},a_1^{-1}),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}) + \mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,I_{n-1},a_1),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a_1,I_{n-1},a_1^{-1}),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
& +\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,I_{n-1},a_1),\mathrm{diag}(a_2,1,I_{n-1}),A'_{3,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
& -\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,I_{n-1},a_1),\mathrm{diag}(1,a_2,I_{n-1}),A'_{3,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a_1,I_{n-1},a_1^{-1}),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
& +\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,I_{n-1},a_1),\mathrm{diag}(a_2,1,I_{n-1}),A'_{3,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
& -\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,I_{n-1},a_1),\mathrm{diag}(a_2,1,I_{n-1}),A'_{3,n},\ldots,A'_{n,n}) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a_1,I_{n-1},a_1^{-1}),A'_{2,n},\ldots,A'_{n,n}).
\end{aligned}$$

Logo $[a_1,\ldots,a_n] \in H_n(SL(R))$. Em particular para $a,b,c \in R^\times$ temos

$$[a,b] = \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1)) \in H_2(SL(R))$$

$$\begin{aligned}
[a,b,c] = \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,1,a^{-1}),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1),\mathrm{diag}(c,c,c^{-2},1)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,1,a^{-1},1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(c,c,c^{-2},1,1)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1},1,1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(c,c,c^{-2},1,1)) \\
& +\mathbf{c}(\mathrm{diag}(1,1,a,a^{-1},1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(c,c,c^{-2},1,1)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1},1,1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(c,c,c^{-2},1,1)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1},1,1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(c,1,c^{-1},1,1)) \\
& +\mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1},1,1),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1,1,1),\mathrm{diag}(1,c,c^{-1},1,1)) \\
= \;& \mathbf{c}(\mathrm{diag}(a,1,a^{-1}),\mathrm{diag}(b,b^{-1},1),\mathrm{diag}(c,1,c^{-1})) \in H_3(SL(R))
\end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 3.5. *Seja R um anel local comutativo. Definimos o grupo*

$$K_3^{ind}(R) := coker\,\left(K_3^M(R) \xrightarrow{\tau_3} K_3(R)\right)$$

chamado a parte indecomponível do terceiro $K-$grupo de R.

COROLÁRIO 3.2. *Se R é um anel local comutativo com corpo residual infinito, então $h_3^{SL(R)}$: $K_3(R) \to H_3(SL(R))$ induz um isomorfismo $K_3^{ind}(R) \cong H_3(SL(R))/T$, onde T é o subgrupo gerado pelos elementos $[a,b,c]$ com $a,b,c \in R^\times$.*

Demonstração. Pelo Corolário (3.1), temos um homomorfismo bem definido

$$\overline{h}_3^{SL(R)} : K_3^{\mathrm{ind}}(R) \to H_3(SL(R))/T, \qquad x + \mathrm{Im}\ \tau_3 \longmapsto h_3^{SL(R)}(x) + T.$$

Dado que $h_3^{SL(R)} : K_3(R) \to H_3(SL(R))$ é sobrejetor, temos que $\overline{h}_3^{SL(R)}$ também é sobrejetor. Considere o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
K_1^M(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(R) \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\tau_1 \otimes \tau_2"', "\cong"] & K_3^M(R) \arrow[d, "\tau_3"'] \arrow[dr, "l_3"] & & \\
K_1(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K_2(R) \arrow[r, "\star"] & K_3(R) \arrow[r, "h_3^{SL(R)}"] & H_3(SL(R)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Usando a sequência exata (3.4), temos que $\mathrm{Ker}\ h_3^{SL(R)} \subseteq \mathrm{Im}\ l_3$. Agora se $x + \mathrm{Im}\ \tau_3 \in \mathrm{Ker}\ \overline{h}_3^{SL(R)}$, então $h_3^{SL(R)}(x) \in T$ e existe $\{a,b,c\} \in K_3^M(R)$ tal que $h_3^{SL(R)}(x) = h_3^{SL(R)}(\tau_3(\{a,b,c\}))$, logo $x \in \mathrm{Im}\ \tau_3$. Portanto $\overline{h}_3^{SL(R)}$ é injetor e $K_3^{\mathrm{ind}}(R) \cong H_3(SL(R))/T$. $\square$

CAPÍTULO

4

K_3 DE CORPOS E O TEOREMA DE BLOCH-WIGNER

Como resultado principal neste capítulo vamos demonstrar a existência da sequência exata de Bloch-Wigner para corpos infinitos e para isso precisaremos dos cálculos feitos no Capítulo 1 e 2 e a caracterização obtida no Corolário (3.2).

4.1 Terceira homologia de GL_2 e o grupo de Bloch

Seja R um anel comutativo com unidade. Seja $Q(R)$ o $\mathbb{Z}-$módulo livre com base nos símbolos $[a]$, onde $a, 1-a \in R^\times$ e seja $(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma$ o quociente de $R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times$ pelo subgrupo gerado por elementos da forma $a\otimes b + b\otimes a$, com $a, b \in R^\times$. Considere o homomorfismo

$$\lambda' : Q(R) \longrightarrow R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times, \qquad [a] \longmapsto a\otimes(1-a).$$

Seja $\mathfrak{p}(R)$ o pré-grupo de Bloch de R, isto é o quociente de $Q(R)$ pelo submódulo gerado pelos elementos da forma $[a]-[b]+\left[\frac{b}{a}\right]-\left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right]+\left[\frac{1-a}{1-b}\right]$. Por cálculos diretos podemos ver que

$$\lambda'\left([a]-[b]+\left[\frac{b}{a}\right]-\left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right]+\left[\frac{1-a}{1-b}\right]\right) = a\otimes\left(\frac{1-a}{1-b}\right)+\left(\frac{1-a}{1-b}\right)\otimes a.$$

Então temos um homomorfismo induzido bem definido

$$\lambda : \mathfrak{p}(R) \longrightarrow \left(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times\right)_\sigma, \qquad [a] \longmapsto a\otimes(1-a).$$

Note que o elemento representado por $a\otimes b$ em $(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times)_\sigma$ será denotado novamente por $a\otimes b$.

DEFINIÇÃO 4.1. *Definimos o grupo de Bloch de um anel comutativo R, denotado por $B(R)$, como sendo*

$$B(R) := Ker\left(\mathfrak{p}(R) \xrightarrow{\lambda} \left(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times\right)_\sigma\right).$$

Se R é um anel local com corpo residual infinito, então pelo Teorema de Van der Kallen-Matsumoto (2.2) e o Lema (3.1) temos

$$K_2(R) \cong K_2^M(R) = \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a \otimes (1-a) : a, 1-a \in R^\times \rangle}.$$

Observe que

$$\text{coker }(\lambda) = \frac{R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times}{\langle a \otimes (1-a), b \otimes c + c \otimes b : a, 1-a, b, c \in R^\times \rangle} \cong K_2^M(R).$$

Portanto temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow B(R) \longrightarrow \mathfrak{p}(R) \xrightarrow{\lambda} \left(R^\times \otimes_{\mathbb{Z}} R^\times\right)_\sigma \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Neste capítulo sempre assumiremos que F é um corpo infinito e usaremos os resultados dos capítulos anteriores em forma particular para F. Agora consideremos a sequência espectral (2.3) que introduzimos e estudamos no Capítulo 2.

$$E^1_{p,q} = H_q\left(GL_2(F), C_p(F^2)\right) \Longrightarrow H_{p+q}\left(GL_2(F)\right). \tag{4.2}$$

Esta sequência espectral induz uma filtração de $H_3(GL_2(F))$

$$0 \subseteq F_0H_3(GL_2(F)) \subseteq F_1H_3(GL_2(F)) \subseteq F_2H_3(GL_2(F)) \subseteq H_3(GL_2(F)),$$

tal que

$$\begin{aligned} E^\infty_{0,3} &\cong F_0H_3(GL_2(F)), \\ E^\infty_{1,2} &\cong \frac{F_1H_3(GL_2(F))}{F_0H_3(GL_2(F))}, \\ E^\infty_{2,1} &\cong \frac{F_2H_3(GL_2(F))}{F_1H_3(GL_2(F))}, \\ E^\infty_{3,0} &\cong \frac{H_3(GL_2(F))}{F_2H_3(GL_2(F))}. \end{aligned}$$

Note que pelo Lema (2.8), $E^\infty_{3,0} = \text{Ker } d^3_{3,0} = B(F)$. Assim obtemos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow F_2H_3(GL_2(F)) \longrightarrow H_3(GL_2(F)) \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0. \tag{4.3}$$

Dado que $E^3_{2,1} = 0$ temos que $F_1H_3(GL_2(F)) = F_2H_3(GL_2(F))$. Além disso temos o homomorfismo sobrejetor

$$H_3(T_2) \twoheadrightarrow E^\infty_{0,3} \cong F_0H_3(GL_2(F)) \subseteq H_3(GL_2(F)),$$

que implica

$$F_0H_3(GL_2(F)) = \text{ Im } \left(H_3(T_2) \longrightarrow H_3(GL_2(F))\right), \tag{4.4}$$

Desejamos estudar o homomorfismo

$$H_2(T_2)^\sigma \twoheadrightarrow E^2_{1,2} = (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)^\sigma \twoheadrightarrow E^\infty_{1,2} = \frac{F_1H_3(GL_2(F))}{F_0H_3(GL_2(F))} \subseteq \frac{H_3(GL_2(F))}{H_3(T_2)}.$$

Seja G um grupo, $g \in G$ e seja M um $G-$módulo. Considere o automomorfismo de complexos de cadeias

$$\begin{aligned} \tau_g : B_\bullet(G) \otimes_G M &\longrightarrow B_\bullet(G) \otimes_G M, \\ [g_1|g_2|\cdots|g_n] \otimes m &\longmapsto \left[gg_1g^{-1}|gg_2g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes gm \end{aligned} \tag{4.5}$$

e para cada $n \geq 0$ considere o homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi_g : B_n(G) \otimes_G M &\longrightarrow B_{n+1}(G) \otimes_G M, \\ [g_1|g_2|\cdots|g_n] \otimes m &\longmapsto \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \left[g_1|\cdots|g_j|g^{-1}|gg_{j+1}g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes m. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que se $n = 0$, então

$$(d_1 \otimes id) \circ \varphi_g([\,] \otimes m) = (g^{-1}[\,] - [\,]) \otimes m = [\,] \otimes gm - [\,] \otimes m = (\tau_g - id)([\,] \otimes m),$$

e se $n \geq 1$, então

$$\begin{aligned} ((d_{n+1} \otimes id) \circ \varphi_g)([g_1|\cdots|g_n] \otimes m) = \;& (d_{n+1} \otimes id)\big(\left[g^{-1}|gg_1g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes m \\ & - \left[g_1|g^{-1}|gg_2g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes m + \cdots \\ & + (-1)^n \left[g_1|g_2|\cdots|g_n|g^{-1}\right] \otimes m\big) \\ = \;& g^{-1}\left[gg_1g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes m \\ & - [g_1|\cdots|g_n] \otimes m - \varphi_g\,(g_1\,[g_2|\cdots|g_n] \otimes m \\ & - [g_1g_2|\cdots|g_n] \otimes m + [g_1|g_2g_3|\cdots|g_n] \otimes m + \cdots + \\ & + (-1)^{n-1}[g_1|g_2|\cdots|g_{n-1}g_n] \otimes m \\ & + (-1)^n [g_1|\cdots|g_{n-1}] \otimes m) \\ = \;& \left[gg_1g^{-1}|\cdots|gg_ng^{-1}\right] \otimes gm - [g_1|\cdots|g_n] \otimes m \\ & - (\varphi_g \circ (d_n \otimes id))([g_1|\cdots|g_n] \otimes m). \end{aligned}$$

Logo

$$((d_{n+1} \otimes id) \circ \varphi_g + \varphi_g \circ (d_n \otimes id))([g_1|\cdots|g_n] \otimes m) = (\tau_g - id)([g_1|\cdots g_n] \otimes m).$$

Portanto, τ_g é homotópica ao morfismo de complexos identidade.

Lema 4.1. *Seja $u \in H_2(T_2)^\sigma$ e seja $h \in B_2(GL_2(F))_{T_2}$ um ciclo representante para u. Considere $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(F)$ e seja $b \in B_3(GL_2(F))_{T_2}$ tal que $\tau_\omega(h) - h = d_3(b)$. Então a imagem de u pelo homomorfismo*

$$H_2(T_2)^\sigma \longrightarrow \frac{F_2H_3(GL_2(F))}{H_3(T_2)} \subseteq \frac{H_3(GL_2(F))}{H_3(T_2)}$$

coincide com a classe do ciclo $b - \varphi_\omega(h)$.

Demonstração. Seja $B_\bullet(GL_2(F)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ a resolução barra de $\mathbb{Z}$ sobre $GL_2(F)$. Então a sequência espectral (2.3) coincide com a sequência espectral induzida pelo complexo duplo dado por $B_\bullet(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_\bullet(F^2)$. Note que o morfismo de augmentação $B_\bullet(GL_2(F)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$

induz uma equivalência fraca $B_\bullet(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_\bullet(F^2) \longrightarrow B_\bullet(GL_2(F))_{GL_2(F)}$. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
B_3(GL_2(F))_{GL_2(F)} & \xleftarrow{\varepsilon} & B_3(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_0(F^2) & & \\
& & \downarrow{\scriptstyle d_3\otimes id} & & \\
& & B_2(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_0(F^2) & \xleftarrow{id\otimes\partial_1} & B_2(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_1(F^2).
\end{array}$$

Se $h = [g_1|g_2] - [g_2|g_1]$ para algum par $g_1, g_2 \in GL_2(F)$, então $h \otimes (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle)$ representa u em $B_2(GL_2(F)) \otimes_{GL_2(F)} C_1(F^2)$. Temos

$$\begin{aligned}
\varphi_\omega(h) = {} & \varphi_\omega[g_1|g_2] - \varphi_\omega[g_2|g_1] \\
= {} & \left[\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}\right] - \left[g_1|\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}\right] + \left[g_1|g_2|\omega^{-1}\right] \\
& - \left[\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}\right] + \left[g_2|\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}\right] - \left[g_2|g_1|\omega^{-1}\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d_3(\varphi_\omega(h)) = {} & d_3\left(\left[\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}\right] - \left[g_1|\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}\right] + \left[g_1|g_2|\omega^{-1}\right]\right) \\
& - d_3\left(\left[\omega^{-1}|\omega g_2\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}\right] - \left[g_2|\omega^{-1}|\omega g_1\omega^{-1}\right] + \left[g_2|g_1|\omega^{-1}\right]\right) \\
= {} & \omega^{-1}\tau_\omega(h) - h.
\end{aligned}$$

Assim

$$(d_3 \otimes id)(b \otimes (\langle e_2\rangle) - \varphi_\omega(h) \otimes (\langle e_1\rangle)) = h \otimes (\langle e_2\rangle) - h \otimes (\langle e_1\rangle) = (id \otimes \partial_1)(h \otimes (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle)).$$

Note que

$$\varepsilon(b \otimes (\langle e_2\rangle) - \varphi_\omega(h) \otimes (\langle e_1\rangle)) = b - \varphi_\omega(h)$$

representa a imagem de u em $B_3(GL_2(F))_{GL_2(F)}$. Então a classe do ciclo $b - \varphi_\omega(h)$ representa a imagem de u em $H_3(GL_2(F)) = H_3\left(B_\bullet(GL_2(F))_{GL_2(F)}\right)$. □

4.2 Terceira homologia de GM_2

Seja $GM_2(F)$ o subgrupo das matrizes monomiais de $GL_2(F)$, isto é

$$GM_2(F) := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b' \\ a' & 0 \end{pmatrix} : a, b, a', b' \in F^\times \right\} \subseteq GL_2(F).$$

Considerando $\Sigma_2 \cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, então $GM_2(F) \cong T_2 \rtimes \Sigma_2$. A sequência exata

$$1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow GM_2(F) \longrightarrow \Sigma_2 \longrightarrow 1$$

dá-nos a sequência espectral de Lyndon/Hochschild-Serre

$$\mathscr{E}^2_{p,q} = H_p\left(\Sigma_2, H_q(T_2)\right) \Longrightarrow H_{p+q}(GM_2(F)). \tag{4.7}$$

Calculamos algumos termos desta sequência espectral. Pelo Exemplo (1.11),

$$\mathscr{E}^2_{p,0} = H_p\left(\Sigma_2, H_0(T_2)\right) = H_p\left(\Sigma_2\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } p = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se } p \text{ é impar}, \\ 0 & \text{se } p \text{ é par}. \end{cases}$$

e pelo Exemplo (1.15),

$$\mathscr{E}^2_{p,1} = H_p\left(\Sigma_2, H_1(T_2)\right) = H_p\left(\Sigma_2, F^\times \oplus F^\times\right) \cong \begin{cases} F^\times, & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

Pelo isomorfismo (1.8) e pelos Exemplos (1.7) e (1.15), temos

$$\begin{aligned} \mathscr{E}^2_{p,2} = {} & H_p\left(\Sigma_2, H_2(T_2)\right) = H_p\left(\Sigma_2, H_2(F^\times) \oplus H_2(F^\times) \oplus (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)\right) \\ = {} & H_p\left(\Sigma_2, H_2(F^\times) \oplus H_2(F^\times)\right) \oplus H_p(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) \\ = {} & H_p(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) = \begin{cases} (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_{\Sigma_2} & \text{se } p = 0, \\ H_p(\Sigma_2, \mu_{2^\infty}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{2^\infty}(F)) & \text{se } p \text{ é impar}, \\ \langle\, \overline{r \otimes r} \in (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_{\Sigma_2} : r \in F^\times \rangle & \text{se } p \text{ é par}. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que na notação das definições (2.5)

$$\left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)_\sigma = \frac{F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times}{\langle a \otimes b - \sigma(a \otimes b) : a, b \in F^\times \rangle} = \left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)_{\Sigma_2},$$

$$\left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)^\sigma = \{a \otimes b : \sigma(a \otimes b) = a \otimes b\} = \left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)^{\Sigma_2}.$$

Denotaremos $\mathscr{E}^2_{0,3} = H_3(T_2)_{\Sigma_2}$ como $H_3(T_2)_\sigma$. Então a segunda folha da sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ é dada por

$$\begin{tikzcd}
H_3(T_2)_\sigma & * & * & * & * \\
(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma & H_1(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) & H_2(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) \arrow[ull, "d^2_{2,2}"'] & * & * \\
F^\times & 0 & 0 \arrow[ull, "d^2_{2,1}=0"'] & 0 \arrow[ull, "d^2_{3,1}=0"'] & 0 \arrow[ull, "d^2_{4,1}=0"'] \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 \arrow[ull, "d^2_{2,0}=0"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[ull, "d^2_{3,0}=0"'] & 0
\end{tikzcd}$$

LEMA 4.2. *Na sequência espectral anterior, o diferencial $d^2_{2,2} : H_2(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) \to H_3(T_2)_\sigma$ é trivial.*

Demonstração. A sequência espectral coincide com a sequência induzida pelo complexo duplo $B_\bullet(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_\bullet(GM_2(F))_{T_2}$. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_3(GM_2(F))_{T_2} & B_1(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_3(GM_2(F))_{T_2} \arrow[l] \arrow[d, "id\otimes d_3"'] & \\
& B_1(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_2(GM_2(F))_{T_2} & B_2(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_2(GM_2(F))_{T_2}. \arrow[l, "d_2\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

Pelo Exemplo (1.15), $H_2(\Sigma_2, F^\times\otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) = \langle \overline{a\otimes a} \in (F^\times\otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_{\Sigma_2} : r\in F^\times\rangle$. Sabemos que usando o homomorfismo $F^\times\otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \xrightarrow{\cup} H_2(T_2)$, temos $a\otimes a \longmapsto a\cup a := c\,(\mathrm{diag}(a,1),\mathrm{diag}(1,a))$. Se $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Sigma_2$, então

$$(id\otimes d_3)\left(-[\omega]\otimes \varphi'_\omega(a\cup a)\right) = \omega[\omega]\otimes(a\cup a) + [\omega]\otimes(a\cup a) = (d_2\otimes id)\,([\omega]\otimes(a\cup a)),$$

onde $\varphi'_\omega : B_2(GM_2(F))_{T_2} \longrightarrow B_3(GM_2(F))_{T_2}$ é definido de igual maneira que o homomorfismo (4.6). Agora

$$\begin{aligned}(d_1\otimes id)\,(-[\omega]\otimes\varphi'_\omega(a\cup a)) = {} & [\,]\otimes\varphi'_\omega(a\cup a) - \omega[\,]\otimes\varphi'_\omega(a\cup a) \in B_0(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_3(GM_2(F))_{T_2} \\ = {} & \varphi'_\omega(a\cup a) - \omega\cdot\varphi'_\omega(a\cup a) \in B_3(GM_2(F))_{T_2}.\end{aligned}$$

Assim, $d^2_{2,2}(\overline{a\otimes a}) = \overline{\varphi'_\omega(a\cup a) - \omega\cdot\varphi'_\omega(a\cup a)} = \overline{0} \in H_3(T_2)_\sigma$. □

Portanto, a terceira folha da sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ é dada por

$$\begin{tikzcd}
H_3(T_2)_\sigma & * & * & * & * \\
(F^\times\otimes F^\times)_\sigma & H_1(\Sigma_2, F^\times\otimes F^\times) & H_2(\Sigma_2, F^\times\otimes F^\times) & * & * \\
F^\times & 0 & 0 & 0 \arrow[uulll, "d^3_{3,2}=0"'] & 0 \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[uulll, "d^3_{3,0}"'] & 0 \arrow[uulll, "d^3_{4,0}=0"']
\end{tikzcd}$$

Já que o homomorfismo $GM_2(F)\to\Sigma_2$ cinde com a inclusão $\Sigma_2 \xrightarrow{i} GM_2(F)$, então pelo Exemplo (1.28) temos que $d^3_{3,0} = 0$. A sequência espectral $\mathscr{E}^2_{p,q}$ induz uma filtração de $H_3(GM_2(F))$

$$0 = F'_{-1}H_3(GM_2(F)) \subseteq F'_0H_3(GM_2(F)) \subseteq F'_1H_3(GM_2(F)) \subseteq F'_2H_3(GM_2(F)) \subseteq H_3(GM_2(F)),$$

tal que

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^\infty_{0,3} &= F'_0H_3(GM_2(F)),\\
\mathscr{E}^\infty_{1,2} &= \frac{F'_1H_3(GM_2(F))}{F'_0H_3(GM_2(F))},\\
\mathscr{E}^\infty_{2,1} &= \frac{F'_2H_3(GM_2(F))}{F'_1H_3(GM_2(F))},\\
\mathscr{E}^\infty_{3,0} &= \frac{H_3(GM_2(F))}{F'_2H_3(GM_2(F))}.
\end{aligned}$$

Agora é fácil verificar que

$$\begin{aligned} F'_2H_3(GM_2(F)) = & \; F'_1H_3(GM_2(F)), \\ H_3(T_2)_\sigma = & \; F'_0H_3(GM_2(F)), \\ H_1(\Sigma_2, F^\times \otimes F^\times) = & \; \frac{F'_2H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)_{\Sigma_2}}, \\ H_3(\Sigma_2) = \mathbb{Z}/2 = & \; \frac{H_3(GM_2(F))}{F'_2H_3(GM_2(F))}. \end{aligned}$$

Assim temos as seguintes sequência exatas

$$0 \longrightarrow H_3(T_2)_\sigma \longrightarrow F'_2H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_1(\Sigma_2, F^\times \otimes F^\times) \longrightarrow 0, \tag{4.8}$$

$$0 \longrightarrow F'_2H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_3(\Sigma_2) \longrightarrow 0. \tag{4.9}$$

Como (4.9) cinde pela inclusão $\Sigma_2 \xrightarrow{i} GM_2(F)$, obtemos a decomposição

$$H_3(GM_2(F)) \cong H_3(\Sigma_2) \oplus F'_2H_3(GM_2(F)). \tag{4.10}$$

Dado que $F'_0H_3(GM_2(F)) = \mathrm{Im}\,(H_3(T_2) \longrightarrow H_3(GM_2(F)))$, então pela igualdade (4.4) e pela comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} H_3(T_2) \arrow[r] \arrow[dr] & H_3(GL_2(F)) \\ & H_3(GM_2(F)) \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

temos um homomorfismo sobrejetor

$$H_3(T_2)_\sigma = F'_0H_3(GM_2(F)) \longrightarrow F_0H_3(GL_2(F)).$$

Agora podemos estudar o homomorfismo

$$H_2(T_2)^\sigma \twoheadrightarrow \mathscr{E}^2_{1,2} = H_1(\Sigma_2, H_2(T_2)) \twoheadrightarrow \mathscr{E}^\infty_{1,2} = \frac{F'_2H_3(GM_2(F))}{F'_0H_3(GM_2(F))} \subseteq \frac{H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$$

de forma similar ao Lema (4.1).

Lema 4.3. *Seja $u \in H_2(T_2)^\sigma$ e seja $h \in B_2(T_2)_{T_2}$ um ciclo representante para u. Considere em $GM_2(F)$ a matriz $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e seja $b \in B_3(T_2)_{T_2}$ tal que $\tau'_\omega(h) - h = d_3(b)$, onde*

$$\tau'_\omega : B_2(GM_2(F))_{T_2} \to B_2(GM_2(F))_{T_2}$$

é o automorfismo induzido por ω. Então a imagem de u pelo homomorfismo

$$H_2(T_2)^\sigma \longrightarrow \frac{H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$$

coincide com a classe do ciclo $b - \varphi'_\omega(h)$.

Demonstração. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B_3(GM_2(F))_{GM_2(F)} & \xleftarrow{\varepsilon'\otimes id} & B_0(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_3(GM_2(F))_{T_2} & \longleftarrow & B_1(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_3(GM_2(F))_{T_2} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes d_3} & & \downarrow \\ B_2(GM_2(F))_{GM_2(F)} & \longleftarrow & B_0(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_2(GM_2(F))_{T_2} & \xleftarrow{d_1\otimes id} & B_1(\Sigma_2)\otimes_{\Sigma_2} B_2(GM_2(F))_{T_2} \end{array}$$

Se $h=[g_1|g_2]-[g_2|g_1]$ para algums $g_1,g_2\in T_2$, então $\omega\otimes h$ representa u e temos

$$(id\otimes d_3)(\omega[\,]\otimes b-[\,]\otimes\varphi'_\omega(h))=\omega[\,]\otimes h-[\,]\otimes h=(d_1\otimes id)([\omega]\otimes h).$$

Agora tem-se $\varepsilon'\otimes id\,(\omega[\,]\otimes b-[\,]\otimes\varphi'_\omega(h))$ representa a imagem de u em $\dfrac{F'_2H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$. Mas

$$(\varepsilon'\otimes id)(\omega[\,]\otimes b-[\,]\otimes\varphi'_\omega(h))=b-\varphi'_\omega(h)\in B_3(GM_2(F))_{GM_2(F)}.$$

Então $b-\varphi'_\omega(h)$ representa a imagem de u em $\dfrac{H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$. □

TEOREMA 4.1. *Seja F um corpo infinito. Então temos a sequência exata*

$$H_3(GM_2(F))\to H_3(GL_2(F))\to B(F)\to 0. \tag{4.12}$$

Demonstração. Pelo Lema (4.3) temos que $\dfrac{F'_2H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}=\mathrm{Im}\left(H_2(T_2)^\sigma\to\frac{H_3GM_2(F)}{H_3(T_2)}\right)$ e pelos Lemas (4.1), (4.3) e considerando o homomorfismo induzido pela inclusão $GM_2(F)\to GL_2(F)$, obtemos um homomorfismo sobrejetor

$$F'_2H_3(GM_2(F))\longrightarrow F_2H_3(GL_2(F)).$$

Com isto, usando a sequência exata (4.3), obtemos a sequência exata

$$F'_2H_3(GM_2(F))\longrightarrow H_3(GL_2(F))\longrightarrow B(F)\longrightarrow 0.$$

Por outro lado, considerando o homomorfismo

$$\begin{aligned} i_*:H_3(\Sigma_2)=H_3(B_\bullet(\Sigma_2)_{\Sigma_2}) &\longrightarrow H_3(GL_2(F))=H_3(B_\bullet(GL_2(F))_{GL_2(F)}),\\ [\omega|\omega|\omega] &\longmapsto [\omega|\omega|\omega] \end{aligned}$$

induzido pela inclusão $\Sigma_2\xrightarrow{i}GL_2(F)$, onde $\omega=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ e o automorfismo (4.5)

$$\begin{aligned} (\tau_A)_\bullet:B_\bullet(GL_2(F))_{GL_2(F)} &\longrightarrow B_\bullet(GL_2(F))_{GL_2(F)},\\ [g_1|\cdots|g_n] &\longmapsto \left[Ag_1A^{-1}|\cdots|Ag_nA^{-1}\right] \end{aligned}$$

onde $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\in GL_2(F)$, temos em particular

$$\tau_A([\omega|\omega|\omega])=\left[A\omega A^{-1}|A\omega A^{-1}|A\omega A^{-1}\right]=[A'|A'|A'],$$

onde $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in B_2$. Usando o isomorfismo do Exemplo (1.30) tem-se que $H_3(B_2) \cong H_3(T_2)$. Isto implica que $\mathrm{Im}\ (H_3(B_2) \to H_3(GL_2(F))) = \mathrm{Im}\ (H_3(T_2) \to H_3(GL_2(F)))$. Então

$\mathrm{Im}\left(H_3(\Sigma_2) \xrightarrow{i_*} H_3(GL_2(F))\right) \subseteq \mathrm{Im}\ (H_3(T_2) \to H_3(GL_2(F))) \subseteq \mathrm{Im}\ (F_2'H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_3(GL_2(F)))$.

Logo, pela decomposição (4.10) obtemos a sequência exata

$$H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_3(GL_2(F)) \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0.$$

□

Pelo Lema (1.5), temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cup} H_3(T_2) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\left(F^\times, F^\times\right) \longrightarrow 0, \tag{4.13}$$

que cinde canonicamente, onde

$$M := H_3(F^\times) \oplus H_3(F^\times) \oplus \left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(F^\times)\right) \oplus \left(H_2(F^\times) \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right) \subseteq H_3(T_2).$$

Agora pelo Lema (1.3), $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F^\times, F^\times) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$, lembrando que

$$\mu(F) = \{a \in F :\ \text{existe } n \text{ tal que } a^n = 1\}.$$

Aplicando o funtor $-_{\Sigma_2}$ sobre a sequência (4.13) obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow M_{\Sigma_2} \longrightarrow H_3(T_2)_\sigma \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))_{\Sigma_2} \longrightarrow 0, \tag{4.14}$$

e usando o Lema da serpente sobre o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{\Sigma_2} \arrow[r] \arrow[d] & H_3(T_2)_\sigma \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))_{\Sigma_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_2'H_3(GM_2(F)) \arrow[r] & F_2'H_3(GM_2(F)) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

obtemos a seguinte sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))_{\Sigma_2} \longrightarrow \frac{F_2'H_3(GM_2(F))}{M} \longrightarrow \frac{F_2'H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)} \longrightarrow 0. \tag{4.15}$$

Definimos o quociente

$$T_F := \frac{F_2'H_3(GM_2(F))}{M}. \tag{4.16}$$

Dado que $H_1(\Sigma_2, F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) = \dfrac{F_2'H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$, então pelo Exemplo (1.15) temos a sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))_{\Sigma_2} \longrightarrow T_F \longrightarrow H_1(\Sigma_2, \mu_{2^\infty}(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{2^\infty}(F)) \longrightarrow 0.$$

Agora pela sequência (4.8) e usando a sequência (4.14) temos a injetividade no lado esquerdo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))_{\Sigma_2} \longrightarrow T_F \longrightarrow H_1(\Sigma_2, \mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) \longrightarrow 0.$$

Note também que pelo Exemplo (1.5)

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))_{\Sigma_2} = \varinjlim \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F),\mu_n(F))_{\Sigma_2} \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F),\mu_n(F)) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F)),$$

pois Σ_2 age trivialmente sobre $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu_n(F),\mu_n(F)) \cong \mu_n(F)$. Por outro lado, se $a\otimes b \in \mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)$, então existe n inteiro tal que $a^{2^n}=b^{2^n}=1$, isto é, $a,b\in\langle\xi\rangle$, onde $\xi\in F^\times$ é uma 2^n-raiz primitiva da unidade. Como

$$a\otimes b = \xi^k \otimes \xi^l = kl\,(\xi\otimes\xi)\,,$$

para alguns inteiros k e l, então $\sigma(a\otimes b) = -kl\,(\xi\otimes\xi) = -a\otimes b$. Assim pelo Exemplo (1.15)

$$H_1(\Sigma_2, \mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) = {}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F))\,.$$

Portanto obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F)) \longrightarrow T_F \longrightarrow {}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) \longrightarrow 0. \tag{4.17}$$

Pelo Exemplo (1.22) se char $(F)=2$, então ${}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F))=0$. Seja $\mu_{2^\infty}(F)$ infinito. Então $\mu_{2^n}(F)\subseteq\mu_{2^{n+1}}(F)=\langle\eta\rangle$ com $\eta\in F^\times$ uma 2^{n+1}-ésima raiz primitiva da unidade e $\xi=\eta^2$ e logo

$$a\otimes b = kl(\xi\otimes\xi) = kl(\eta^2\otimes\eta^2) = 2kl(2\eta\otimes\eta) = 0,$$

obtendo assim

$${}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) = 0.$$

Agora se char $(F)\neq 2$ e se $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito, então $\mu_{2^\infty}(F)=\mu_{2^n}(F)$ para algum inteiro n. Considere m um inteiro tal que $2^n=2m$, então

$${}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) = \{0,(-1)\otimes\xi\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

onde $-1=\xi^m$. Portanto

$${}_2(\mu_{2^\infty}(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mu_{2^\infty}(F)) \cong \begin{cases} 0 & \text{se char } (F)=2 \text{ ou se } \mu_{2^\infty}(F) \text{ for infinito,}\\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{se char } (F)\neq 2 \text{ e } \mu_{2^\infty}(F) \text{ for finito.}\end{cases}$$

LEMA 4.4. *Seja F um corpo infinito tal que char $(F)\neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito. Então a sequência exata*

$$0 \longrightarrow Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F)) \longrightarrow T_F \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

não cinde e T_F é a única extensão não trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))$.

Demonstração. A sequência (4.17) é dada por

$$0 \longrightarrow \frac{H_3(T_2)}{M} \longrightarrow \frac{F_2'H_3(GM_2(F))}{M} \longrightarrow \frac{F_2'H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)} \longrightarrow 0.$$

Seja $\mu_{2^\infty}(F) = \mu_n(F) = \langle \xi \rangle$ e seja $\xi^m = -1$, onde $n = 2m = 2^r$. Se $B_\bullet(GM_2(F))$ é a resolução barra de $\mathbb{Z}$ sobre $GM_2(F)$, então a imagem de $(-1) \otimes \xi$ em $H_2(T_2)^\sigma$ será representada pelo ciclo $h := [(-1,1)|(1,\xi)] - [(1,\xi)|(-1,1)] \in B_2(T_2)_{T_2}$. Considere o automorfismo (4.5), $\tau'_\omega : B_2(GM_2(F))_{T_2} \to B_3(GM_2(F))_{T_2}$ onde $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. É claro que

$$\tau'_\omega(h) = [(1,-1)|(\xi,1)] - [(\xi,1)|(1,-1)].$$

Por outro lado, se $b \in B_3(T_2)_{T_2}$,

$$\begin{aligned} b := \ & [(1,-1)|(1,-1)|(\xi,1)] - [(1,-1)|(\xi,1)|(1,-1)] + [(\xi,1)|(1,-1)|(1,-1)] \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} \big(\big[(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)\big] - \big[(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)\big] + \big[(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)\big] \\ & + \big[(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)\big] - \big[(1,\xi)|(1,\xi)|(\xi^i,1)\big] + \big[(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)\big] \big). \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} d_3(b) = \ & \tau'_\omega(h) - h + [(-1,1)|(1,\xi)] - [(1,\xi)|(-1,1)] + [(1,-1)|(\xi,1)] - [(\xi,1)|(1,-1)] \\ & + \sum_{i=1}^{m-1} d_3 \big(\big[(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)\big] - \big[(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)\big] + \big[(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)\big] \\ & + \big[(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)\big] - \big[(1,\xi)|(1,\xi)|(\xi^i,1)\big] + \big[(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)\big] \big) \\ = \ & \tau'_\omega(h) - h. \end{aligned}$$

Agora pelo Lema (4.3), o ciclo $b - \varphi'_\omega(h)$ é a imagem de $(-1) \otimes \xi$ em $\dfrac{F_2'H_3(GM_2(F))}{H_3(T_2)}$. Note que

$$\begin{aligned} \varphi'_\omega(h) = \ & [\omega|(1,-1)|(\xi,1)] - [(-1,1)|\omega|(\xi,1)] + [(-1,1)|(1,\xi)|\omega] \\ & - [\omega|(\xi,1)|(1,-1)] + [(1,\xi)|\omega|(1,-1)] - [(1,\xi)|(-1,1)|\omega]. \end{aligned}$$

Para provar que a sequência exata não cinde é suficiente provar que

$$2\overline{(b - \varphi'_\omega(h))} = \overline{\chi(\xi)} \in F_2'H_3(GM_2(F)) \subseteq H_3(GM_2(F)),$$

onde pelo Lema (1.5), $\chi(\xi)$ é a imagem de $\langle \xi, n, \xi \rangle \in \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F))$ via a inclusão $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F), \mu(F)) \cong H_3(T_2)/M \hookrightarrow F_2'H_3(GM_2(F))/M$. Se consideramos os seguintes elementos em $B_4(GM_2(F))_{GM_2(F)}$

$$\begin{aligned} a_\xi := \ & [\omega|(1,-1)|(1,-1)|(\xi,1)] - [\omega|(1,-1)|(\xi,1)|(1,-1)] + [(-1,1)|\omega|(\xi,1)|(1,-1)] \\ & - [(-1,1)|(1,\xi)|\omega|(1,-1)] + [(-1,1)|(1,\xi)|(-1,1)|\omega] - [(1,\xi)|\omega|(1,-1)|(1,-1)] \\ & + [\omega|(\xi,1)|(1,-1)|(1,-1)] - [(-1,1)|\omega|(1,-1)|(\xi,1)] + [(1,\xi)|(-1,1)|\omega|(1,-1)] \\ & - [(1,\xi)|(-1,1)|(-1,1)|\omega] + [(-1,1)|(-1,1)|\omega|(\xi,1)] - [(-1,1)|(-1,1)|(1,\xi)|\omega], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_\xi := & \sum_{i=1}^{m-1}\big([(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)|(1,-1)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)|(1,-1)] \\
& - [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(1,-1)|(\xi,1)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)|(1,-1)] \\
& + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)|(-1,1)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)|(-1,1)] \\
& - [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(-1,1)|(1,\xi)] + [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)|(-1,1)]\big),
\end{aligned}
$$

então temos

$$
\begin{aligned}
d_4\left(a_\xi\right) = \; & b - 2\varphi'_\omega(h)) + [(-1,1)|(1,\xi)|(-1,1)] - [(-1,1)|(-1,1)|(1,\xi)] - [(1,\xi)|(-1,1)|(-1,1)] \\
& - \sum_{i=1}^{m-1}\big([(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)] \\
& [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)] + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)]\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_4\left(b_\xi\right) = \; & b - \chi(\xi) - [(-1,1)|(1,\xi)|(-1,1)] + [(-1,1)|(-1,1)|(1,\xi)] + [(1,\xi)|(-1,1)|(-1,1)] \\
& + \sum_{i=1}^{m-1}\big([(\xi,1)|(1,\xi)|(1,\xi^i)] - [(1,\xi)|(\xi,1)|(1,\xi^i)] + [(1,\xi)|(1,\xi^i)|(\xi,1)] \\
& [(\xi,1)|(\xi^i,1)|(1,\xi)] - [(\xi,1)|(1,\xi)|(\xi^i,1)] + [(1,\xi)|(\xi,1)|(\xi^i,1)]\big),
\end{aligned}
$$

Logo $d_4\left(a_\xi + b_\xi\right) + \chi(\xi) = 2\left(b - \varphi'_\omega(h)\right)$, isto é, $2\overline{(b - \varphi'_\omega(h)))} = \overline{\chi(\xi)} \in F'_2H_3(GM_2(F))$. Portanto a sequência (4.17) não cinde e pelo Exemplo (1.22), é a única a menos de isomorfismo.

$\square$

4.3 Terceira homologia de GL_3 de um corpo

Seja F um corpo. Para $n \geq 0$ seja X_n o conjunto de todas as $(n+1)-$uplas $(\langle v_0\rangle, \ldots, \langle v_n\rangle)$ tais que cada $\min\{n,3\}$ vetores de $v_0, \ldots, v_n \in F^3$ são linearmente independentes. Seja $C_n(F^3) := \mathbb{Z}X_n$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por X_n. Considere o homomorfismo

$$
\begin{aligned}
\varepsilon : C_0(F^3) & \longrightarrow \mathbb{Z}, \\
\sum_j m_j\left(\langle v_0^j\rangle\right) & \longmapsto \sum_j m_j
\end{aligned}
$$

e para $n \geq 1$, os homomorfismos

$$
\begin{aligned}
\partial_n : C_n(F^3) & \longrightarrow C_{n-1}(F^3), \\
\sum_j m_j\left(\langle v_0^j\rangle, \ldots, \langle v_n^j\rangle\right) & \longmapsto \sum_j m_j\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\langle v_0^j\rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j\rangle}, \ldots, \langle v_n^j\rangle\right)\right),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\left(\langle v_0^j\rangle, \ldots, \widehat{\langle v_k^j\rangle}, \ldots, \langle v_n^j\rangle\right) = \left(\langle v_0^j\rangle, \ldots, \langle v_{k-1}^j\rangle, \langle v_{k+1}^j\rangle, \ldots, \langle v_n^j\rangle\right).
$$

LEMA 4.5. *A sequência*

$$
C_\bullet(F^3) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} : \qquad \cdots \to C_n(F^3) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(F^3) \to \cdots \to C_0(F^3) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0,
$$

é um complexo de cadeias. Além disso, se F for infinito, então o complexo $C_\bullet(F^3) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ é exato.

Demonstração. De forma análoga ao Lema (2.6). □

Definimos para todo $n \geq 0$, uma ação do grupo $GL_3(F)$ sobre X_n como segue,

$$A \cdot (\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_n \rangle) := (\langle Av_0 \rangle, \ldots, \langle Av_n \rangle),$$

onde $A \in GL_3(F)$, $(\langle v_0 \rangle, \ldots, \langle v_n \rangle) \in X_n$. Logo

$$C_n(F^3) = \mathbb{Z}X_n \cong \bigoplus_{x \in T_n} \left(\mathbb{Z}GL_3(F) \otimes_{(GL_3(F))_x} \mathbb{Z} \right),$$

onde T_n é um conjunto de representantes das órbitas da ação de $GL_3(F)$ sobre X_n e $(GL_3(F))_x$ é o subgrupo estabilizador de $x \in T_n$. É fácil verificar que o grupo $GL_3(F)$ age transitivamente sobre X_n para $n = 0,1,2,3$. Sejam

$$\begin{aligned}
x_0 &:= (\langle e_1 \rangle) \in X_0 \text{ com } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
x_1 &:= (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle) \in X_1 \text{ com } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
x_2 &:= (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle) \in X_2 \text{ com } e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
x_3 &:= (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_3 \rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle) \in X_3.
\end{aligned}$$

Então para $0 \leq i \leq 3$, $X_i = o(x_i)$. Note que para o caso $n = 4$ e $n = 5$ facilmente podemos mostrar que

$$X_4 = \coprod_{\substack{a,x \in F^\times - \{1\} \\ a \neq x}} o(x_{a,x}), \qquad X_5 = \coprod_{\substack{a,b,x,y \in F^\times - \{1\} \\ a \neq x,\, b \neq y,\, a \neq b,\, x \neq y,\, ay \neq bx}} o(x_{a,b,x,y}),$$

onde

$$x_{a,x} = (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle, \langle e_1 + ae_2 + xe_3 \rangle, \langle e_3 \rangle) \in X_4,$$

$$x_{a,b,x,y} = (\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle, \langle e_1 + ae_2 + xe_3 \rangle, \langle e_1 + be_2 + ye_3 \rangle, \langle e_3 \rangle) \in X_5.$$

Portanto para $0 \leq n \leq 3$, $C_n(F^3)_{GL_3(F)} \cong \mathbb{Z}$. Para $n = 4$, temos

$$C_4(F^3)_{GL_3(F)} \cong \bigoplus_{\substack{a,x \in F^\times - \{1\} \\ a \neq x}} \mathbb{Z} \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}$ representa a órbita de $x_{a,x}$ e para $n = 5$, temos

$$C_5(F^3)_{GL_3(F)} \cong \bigoplus_{\substack{a,b,x,y \in F^\times - \{1\} \\ a \neq x,\, b \neq y,\, a \neq b,\, x \neq y,\, ay \neq bx}} \mathbb{Z} \begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}$ representa a órbita de $x_{a,b,x,y}$.

Por outro lado, defina o complexo $C^a_\bullet(F^3)$ de $GL_3(F)-$módulos como sendo, para cada $n \geq 0$, $C^a_n(F^3) := C_n(F^3)$ e defina para $n \geq 1$ os $GL_3(F)-$homomorfismos $\partial^a_n : C^a_n(F^3) \to C^a_{n-1}(F^3)$ como sendo

$$\begin{aligned} \partial^a_n : C^a_n(F^3) &\longrightarrow C^a_{n-1}(F^3), \\ (\langle v_0\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\langle v_0\rangle, \dots, \widehat{\langle v_i\rangle}, \dots, \langle v_n\rangle \right). \end{aligned}$$

LEMA 4.6. *A sequência:*

$$C^a_\bullet(F^3): \qquad \cdots \to C^a_n(F^3) \xrightarrow{\partial^a_n} C^a_{n-1}(F^3) \to \cdots \to C^a_1(F^3) \xrightarrow{\partial^a_1} C^a_0(F^3) \to 0,$$

é um complexo de cadeias. Além disso, se F for infinito, então o complexo $C^a_\bullet(F^3)$ é exato.

Demonstração. De forma análoga ao Lema (2.6). □

Defina para $n \geq 1$ os $GL_3(F)$-homomorfismos

$$\begin{aligned} \gamma_n : C_n(F^3) &\longrightarrow C^a_n(F^3), \\ (\langle v_0\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kn} (\langle v_k\rangle, \langle v_{k+1}\rangle, \dots, \langle v_{k+n}\rangle), \end{aligned}$$

onde cada $k+i$ é considerado módulo $n+1$. Note que para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned} (\partial^a_n \circ \gamma_n)(\langle v_0\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) = {} & \partial^a_n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{kn} (\langle v_k\rangle, \dots, \langle v_{k+n}\rangle) \right) \\ = {} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kn} \partial^a_n (\langle v_k\rangle, \dots, \langle v_{k+n}\rangle) \\ = {} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kn} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \left(\widehat{\langle v_{k+i}\rangle}, \dots, \langle v_{k+n}\rangle \right) \\ = {} & \gamma_{n-1}(\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) - \gamma_{n-1}(\langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) + \cdots \\ & + (-1)^n \gamma_{n-1}(\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \dots, \langle v_{n-2}\rangle, \langle v_{n-1}\rangle) \\ = {} & \gamma_{n-1}((\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) - (\langle v_0\rangle, \langle v_2\rangle, \dots, \langle v_n\rangle) + \cdots \\ & + (-1)^n (\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \dots, \langle v_{n-1}\rangle)) \\ = {} & \gamma_{n-1}(\partial_n(\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \dots, \langle v_n\rangle)) = (\gamma_{n-1} \circ \partial_n)(\langle v_0\rangle, \dots, \langle v_n\rangle). \end{aligned}$$

Portanto temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial_4"] & C_3(F^3) \arrow[r, "\partial_3"] \arrow[d, "\gamma_3"] & C_2(F^3) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & C_1(F^3) \arrow[d, "\gamma_1"] \\ \cdots \arrow[r, "\partial^a_4"] & C^a_3(F^3) \arrow[r, "\partial^a_3"] & C^a_2(F^3) \arrow[r, "\partial^a_2"] & C^a_1(F^3). \end{tikzcd}$$

Considere $D_\bullet(F^3)$ o mapping cone do complexo $C^a_\bullet(F^3)$, isto é $D_\bullet(F^3)$ é complexo de cadeias feito dos seguintes $GL_3(F)$-módulos

$$D_n(F^3) := 0, \text{ se } n < -1 \qquad D_{-1}(F^3) := \mathbb{Z}, \qquad D_0(F^3) := C^a_1(F^3),$$

e para $n \geq 1$,

$$D_n(F^3) := C_n(F^3) \oplus C^a_{n+1}(F^3).$$

junto com os $GL_3(F)$-homomorfismos definidos como segue

$$\begin{aligned} \varepsilon_D : D_0(F^3) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ \sum_i n_i(\langle v^i_0\rangle, \langle v^i_1\rangle) &\longmapsto \sum_i n_i, \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \gamma_1 + \partial^a_2 : D_1(F^3) \to D_0(F^3),$$

e para $n \geq 2$,

$$\delta_n := \begin{bmatrix} -\partial_n & 0 \\ \gamma_n & \partial^a_{n+1} \end{bmatrix} : D_n(F^3) \to D_{n-1}(F^3),$$

Obtendo assim a sequência de $GL_3(F)$-módulos

$$D_\bullet(F^3) \xrightarrow{\varepsilon_D} \mathbb{Z} : \qquad \cdots \to D_n(F^3) \xrightarrow{\delta_n} D_{n-1}(F^3) \to \cdots \to D_1(F^3) \xrightarrow{\delta_1} D_0(F^3) \xrightarrow{\varepsilon_D} \mathbb{Z} \to 0.$$

LEMA 4.7. *A sequência $D_\bullet(F^3) \xrightarrow{\varepsilon_D} \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias de $GL_3(F)-$módulos. Se F for infinito, então $D_\bullet(F^3) \xrightarrow{\varepsilon_D} \mathbb{Z}$ é exato.*

Demonstração. É fácil verificar que $D_\bullet(F^3) \to \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias. Suponha que F for infinito. Seja $x = \sum_i n_i(\langle v^i_0\rangle, \langle v^i_1\rangle) \in C^a_1(F^3)$ tal que $\sum_i n_i = 0$. Como F é infinito, existe $w \in F^3 - \{0\}$ tal que $\langle w\rangle \neq \langle v^i_1\rangle$, para todo i. Se $z = \sum_i n_i \left(\langle w\rangle, \langle v^i_1\rangle\right) \in C_1(F^3)$, então $\partial^a_1(\gamma_1(z) - x) = 0$. Assim, existe $z' \in C^a_2(F^3)$ tal que $x = \gamma_1(z) + \partial^a_2(z') = \delta_1(z, z') \in \operatorname{Im}\delta_1$. Seja $n \geq 1$ e seja $(x, x') \in D_n(F^3)$ tal que $\delta_n(x, x') = (0, 0)$. Como $C_\bullet(F^3) \to \mathbb{Z}$ é exato (4.5), existe $y \in C_{n+1}(F^3)$ tal que $-\partial_{n+1}(y) = x$. Como $\gamma_n(x) + \partial^a_n(x') = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \;& \gamma_n(x) + \partial^a_{n+1}(x') = -\gamma_n(\partial_{n+1}(y)) + \partial^a_{n+1}(x') \\ = \;& \partial^a_{n+1}(x') - \partial^a_{n+1}(\gamma_{n+1}(y)) \\ = \;& \partial^a_{n+1}(x' - \gamma_{n+1}(y)). \end{aligned}$$

Portanto existe $y' \in C^a_{n+2}(F^3)$ tal que $\partial^a_{n+2}(y') = x' - \gamma_{n+1}(y)$, pois $C^a_\bullet(F^3) \to \mathbb{Z}$ é exato (4.6). Agora temos

$$\delta_{n+1}(y, y') = (-\partial_{n+1}(y), \gamma_{n+1}(y) + \partial^a_{n+2}(y')) = (x, x') \in \operatorname{Im}\delta_{n+1},$$

que implica que $D_\bullet(F^3) \to \mathbb{Z}$ é exato. □

Lembremos que

$$\begin{aligned}
D_0(F^3)_{GL_3(F)} &= C_1(F^3)_{GL_3(F)} \cong \mathbb{Z},\\
D_1(F^3)_{GL_3(F)} &= C_1(F^3)_{GL_3(F)} \oplus C_2^a(F^3)_{GL_3(F)} \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\\
D_2(F^3)_{GL_3(F)} &= C_2(F^3)_{GL_3(F)} \oplus C_3^a(F^3)_{GL_3(F)} \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\\
D_3(F^3)_{GL_3(F)} &= C_3(F^3)_{GL_3(F)} \oplus C_4^a(F^3)_{GL_3(F)} \cong \mathbb{Z}\oplus \left(\bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}\right),
\end{aligned}$$

e

$$D_4(F^3)_{GL_3(F)} = C_4(F^3)_{GL_3(F)} \oplus C_5^a(F^3)_{GL_3(F)} \cong \left(\bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{a,b,x,y\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x,\, b\neq y\\ a\neq b,\, x\neq y\\ ay\neq bx}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a & b\\ x & y\end{bmatrix}\right).$$

Fazendo os cálculos, o complexo $D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}$ é dado por

$$D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)} : \cdots \to D_4(F^3)_{GL_3(F)} \xrightarrow{\overline{\delta_4}} D_3(F^3)_{GL_3(F)} \xrightarrow{\overline{\delta_3}} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\overline{\delta_2}} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\overline{\delta_1}} \mathbb{Z} \to 0,$$

com os diferenciais

$$\overline{\delta_1} = 0, \qquad \overline{\delta_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}, \qquad \overline{\delta_3} = 0, \qquad \overline{\delta_4} = \begin{bmatrix} -\overline{\partial_4} & 0\\ \overline{\gamma_4} & \overline{\partial_5^a}\end{bmatrix},$$

onde

$$\overline{\partial_4} : \bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix} \to \mathbb{Z}$$

é dado por $\overline{\partial_4}\left(\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}\right) = 1$,

$$\overline{\gamma_4} : \bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix} \to \bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}$$

é dado por

$$\overline{\gamma_4}\left(\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{x-a}{x}\\ \frac{x-a}{x-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^{-1}\\ \frac{x-a}{x(1-a)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x-a}\\ a^{-1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x(1-a)}{x-a}\\ \frac{x}{x-a}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}$$

e

$$\overline{\partial_5^a} : \bigoplus_{\substack{a,b,x,y\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x,\, b\neq y\\ a\neq b,\, x\neq y\\ ay\neq bx}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a & b\\ x & y\end{bmatrix} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{a,x\in F^\times-\{1\}\\ a\neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a\\ x\end{bmatrix}$$

é dado por

$$\overline{\partial_5^a}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ x & y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1-a}{1-b} \\ \frac{(1-y)(1-a)}{(1-x)(1-b)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}} \\ \frac{(1-a)(y-b)}{(1-b)(x-a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{a} \\ \frac{y}{x} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}.$$

Seja $B_\bullet(GL_3(F)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ a resolução barra de $\mathbb{Z}$ sobre $GL_3(F)$. Pelo Teorema (1.2), existe um morfismo de complexos $(B_\bullet(GL_3(F)), d_\bullet) \xrightarrow{\theta_\bullet} (D_\bullet(F^3), \delta_\bullet)$, único a menos de homotopia, que induz o homomorfismo

$$\theta : H_3(GL_3(F)) = H_3\left(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_3(F)}\right) \longrightarrow H_3\left(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}\right). \tag{4.18}$$

Com uso do seguinte lema vamos a descrever o homomorfismo

$$\theta : H_3(GL_3(F)) \longrightarrow H_3\left(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}\right) = \text{ coker}\left(D_4(F^3)_{GL_3(F)} \xrightarrow{\overline{\delta_4}} D_3(F^3)_{GL_3(F)}\right).$$

LEMA 4.8. *Para todo $a, x \in F^\times - \{1\}$, em $\mathfrak{p}(F)$ temos $[a]+[1-a] = [x]+[1-x]$. Em particular, o elemento $c_F := [a]+[1-a] \in B(F)$ é independente da escolha de $a \in F^\times - \{1\}$.*

Demonstração. Seja $a \neq x$, então em $\mathfrak{p}(F)$, temos

$$[a]-[x]+\left[\frac{x}{a}\right]-\left[\frac{1-a^{-1}}{1-x^{-1}}\right]+\left[\frac{1-a}{1-x}\right]=0,$$

$$[1-x]-[1-a]+\left[\frac{x}{a}\right]-\left[\frac{1-a^{-1}}{1-x^{-1}}\right]+\left[\frac{1-a}{1-x}\right]=0.$$

Substraindo obtemos: $[x]+[1-x] = [a]+[1-a]$. □

Defina assim o homomorfismo

$$\rho : \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{\substack{a,x\, \in F^\times - \{1\} \\ a \neq x}} \mathbb{Z}\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix} \longrightarrow \mathfrak{p}(F),$$

como sendo

$$\rho(1) = 2c_F, \qquad \rho\left(\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}\right) = [a].$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
\rho \circ \overline{\delta_4}\left(\begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}\right) &= \rho\left(-1 + \begin{bmatrix} \frac{x-a}{x} \\ \frac{x-a}{x-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^{-1} \\ \frac{x-a}{x(1-a)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x-1}{x-a} \\ a^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x(1-a)}{x-a} \\ \frac{x}{x-a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ x \end{bmatrix}\right) \\
&= -2c_F + \left[\frac{x-a}{x}\right] + \left[x^{-1}\right] + \left[\frac{x-1}{x-a}\right] + \left[\frac{x(1-a)}{x-a}\right] + [a] \\
&= -2c_F + c_F - \left[\frac{a}{x}\right] + \left[x^{-1}\right] + c_F - \left[\frac{1-a}{x-a}\right] + \left[\frac{x(1-a)}{x-a}\right] + [a] \\
&= [a] - \left[\frac{a}{x}\right] + \left[x^{-1}\right] - \left[\frac{1-a}{x-a}\right] + \left[\frac{x(1-a)}{x-a}\right] \\
&= [a] - \left[ax^{-1}\right] + \left[\frac{ax^{-1}}{a}\right] - \left[\frac{1-a^{-1}}{1-(ax^{-1})^{-1}}\right] + \left[\frac{1-a}{1-ax^{-1}}\right] = 0 \in \mathfrak{p}(F).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\rho\circ\overline{\delta_4}\left(\begin{bmatrix}a & b\\ x & y\end{bmatrix}\right) &= \rho\left(\left[\frac{\frac{1-a}{1-b}}{\frac{(1-y)(1-a)}{(1-x)(1-b)}}\right]-\left[\frac{\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}}{\frac{(1-a)(y-b)}{(1-b)(x-a)}}\right]+\left[\frac{\frac{b}{a}}{\frac{y}{x}}\right]-\begin{bmatrix}b\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a\\ x\end{bmatrix}\right)\\ &= \left[\frac{1-a}{1-b}\right]-\left[\frac{1-a^{-1}}{1-b^{-1}}\right]+\left[\frac{b}{a}\right]-[b]+[a]=0\in\mathfrak{p}(F).\end{aligned}$$

Portanto ρ induz um homomorfismo bem definido $H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)})\xrightarrow{\rho'}\mathfrak{p}(F)$. Denotemos por $\overline{\rho}$ a composição do homomorfismo ρ' com o homorfismo (4.18)

$$\overline{\rho}=\rho'\circ\theta : H_3(GL_3(F))\longrightarrow\mathfrak{p}(F). \tag{4.19}$$

Por outro lado, pelo Exemplo (2.4) temos a sequência exata $C_\bullet(F^2)\to\mathbb{Z}$ de $GL_2(F)$-módulos tal que $C_\bullet(F^2)_{GL_2(F)}$ tem a forma

$$\cdots\longrightarrow R(F)\xrightarrow{d^1_{4,0}} Q(F)\xrightarrow{d^1_{3,0}=0}\mathbb{Z}\xrightarrow{d^1_{2,0}=id_{\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}\xrightarrow{d^1_{1,0}=0}\mathbb{Z},$$

e portanto $\mathfrak{p}(F)=H_3(C_\bullet(F^2)_{GL_2(F)})$. Pelo Teorema (1.3), existe um morfismo de complexos de cadeias, único a menos de homotopia, $\alpha_\bullet : (B_\bullet(GL_3(F)),d_\bullet)\to(C_\bullet(F^2),\partial_\bullet)$ tal que $\alpha_\bullet\otimes id_{\mathbb{Z}} : B_\bullet(GL_3(F))_{GL_2(F)}\to C_\bullet(F^2)_{GL_2(F)}$ é uma equivalência fraca e temos assim o homomorfismo:

$$\varphi : H_3(GL_2(F))=H_3(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_2(F)})\longrightarrow H_3(C_\bullet(F^2)_{GL_2(F)})=\mathfrak{p}(F). \tag{4.20}$$

Logo a sequência (4.12) é dada por

$$H_3(GM_2(F))\to H_3(GL_2(F))\xrightarrow{\varphi} B(F)\to 0. \tag{4.21}$$

Proposição 4.1. *Seja F um corpo infinito. Então o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} H_3(GL_2(F)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "inc_*"'] & \mathfrak{p}(F) \\ H_3(GL_3(F)) \arrow[ur, "\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.22}$$

onde $inc : GL_2(F)\to GL_3(F)$ é dada por $A\mapsto\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e φ foi construida em (4.20).

Demonstração. Para $n\geq 0$ defina $C^b_n(F^3)$ como sendo o subgrupo de $C^a_{n+1}(F^3)$ gerado por todos os elementos da forma $(\langle v_0\rangle,\langle v_1\rangle,\ldots,\langle v_{n-1}\rangle,\langle e_3\rangle)$. Para $n\geq 1$,

$$\partial^a_{n+1}(\langle v_0\rangle,\ldots,\langle v_{n-1}\rangle,\langle e_3\rangle)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\langle v_0\rangle,\ldots,\widehat{\langle v_i\rangle},\ldots,\langle v_{n-1}\rangle,\langle e_3\rangle\right)\in C^b_{n-1}(F^3),$$

logo temos $\partial^a_{n+1}(C^b_n(F^3))\subseteq C^b_{n-1}(F^3)$. Para $n\geq 1$, seja $\partial^b_n:=\partial^a_{n+1}|_{C^b_n(F^3)} : C^b_n(F^3)\to C^b_{n-1}(F^3)$, e sejam $C^b_{-1}(F^3)=\mathbb{Z}$ e $\partial^b_0:=\varepsilon_D|_{C^b_0(F^3)}$. Além disso, note que $C^b_n(F^3)\subseteq D^b_n(F^3)$ para todo n. Para $n\geq 0$, vamos a definir uma ação de $GL_2(F)$ sobre $C^b_n(F^3)$ como

$$\begin{aligned}A\cdot(\langle v_0\rangle,\ldots,\langle v_n\rangle,\langle e_3\rangle) &:= A'\cdot(\langle v_0\rangle,\ldots,\langle v_n\rangle,\langle e_3\rangle)\\ A\cdot(\langle v_0\rangle,\ldots,\langle v_n\rangle,\langle e_3\rangle) &:= (\langle A'v_0\rangle,\ldots,\langle A'v_n\rangle,\langle A'e_3\rangle)=(\langle A'v_0\rangle,\ldots,\langle A'v_n\rangle,\langle e_3\rangle)\in C^b_n(F^3).\end{aligned}$$

onde $A \in GL_2(F)$ e $A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(F)$. Obtemos assim um $GL_2(F)-$subcomplexo de $D_\bullet(F^3) \to \mathbb{Z}$,

$$C_\bullet^b(F^3) \to \mathbb{Z} : \cdots \to C_n^b(F^3) \xrightarrow{\partial_n^b} C_{n-1}^b(F^3) \longrightarrow \cdots \to C_1^b(F^3) \xrightarrow{\partial_1^b} C_0^b(F^3) \xrightarrow{\partial_0^b} \mathbb{Z} \to 0.$$

De forma similiar aos Lemas (4.6) e (4.7), podemos provar que $C_\bullet^b(F^3) \to \mathbb{Z}$ é exata. Como $B_\bullet(GL_3(F)) \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $GL_2(F)$, então existe um morfismo de complexos, único a menos de homotopia, $(B_\bullet(GL_3), d_\bullet) \to (C_\bullet^b(F^3), \partial_\bullet^b)$. Logo temos a composição dos homomorfismos

$$H_3(GL_2(F)) = H_3(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_2(F)}) \longrightarrow H_3(C_\bullet^b(F^3)_{GL_2(F)}) \longrightarrow H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}). \quad (4.23)$$

Considerando o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_3(GL_2(F)) = H_3(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_2(F)}) \arrow[r] \arrow[d, "inc_*"] & H_3(C_\bullet^b(F^3)_{GL_2(F)}) \arrow[d] \\ H_3(GL_3(F)) = H_3(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_3(F)}) \arrow[r] & H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}), \end{tikzcd}$$

a composição dos homomorfismos

$$H_3(GL_2(F)) \longrightarrow H_3(GL_3(F)) \longrightarrow H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}) \xrightarrow{\rho} \mathfrak{p}(F),$$

pode ser escrita como sendo

$$H_3(GL_2(F)) \longrightarrow H_3(C_\bullet^b(F^3)_{GL_2(F)}) \longrightarrow H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}) \xrightarrow{\rho} \mathfrak{p}(F). \quad (4.24)$$

É fácil verificar que φ coincide com a composição (4.24). Por outro lado, a projeção $\pi : F^3 \to F^2$ dada por $\pi(a,b,c) = (a,b)$ induz um $GL_2(F)-$morfismo de complexos $\pi_\bullet : C_\bullet^b(F^3) \to C_\bullet(F^2)$ dado por

$$\pi_n(\langle v_0\rangle, \ldots, \langle v_n\rangle, \langle e_3\rangle) = (\langle \pi(v_0)\rangle, \ldots, \langle \pi(v_n)\rangle).$$

É fácil verificar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} H_3(GL_2(F)) = H_3(B_\bullet(GL_3(F))_{GL_2(F)}) \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & H_3(C_\bullet^b(F^3)_{GL_2(F)}) \arrow[d, "(\overline{\pi_3})_*"] \\ & H_3(C_\bullet(F^2)_{GL_2(F)}) = \mathfrak{p}(F) \end{tikzcd}$$

é comutativo. Considere agora o diagrama

$$\begin{tikzcd} C_3^b(F^3)_{GL_2(F)} \arrow[r, "\overline{\pi_3}"] \arrow[d] & C_3(F^2)_{GL_2(F)} \arrow[d] \\ D_3(F^3)_{GL_2(F)} \arrow[r] & \mathfrak{p}(F). \end{tikzcd}$$

Se $x = (\langle v_0\rangle, \langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \langle v_3\rangle, \langle e_3\rangle) \in C_3^b(F^3)$, então existe $A \in GL_2(F)$ tal que

$$A \cdot (\langle e_1 + re_3\rangle, \langle e_2 + se_3\rangle, \langle e_1 + e_2 + te_3\rangle, \langle e_1 + ae_2 + ue_3\rangle, \langle e_3\rangle) = x,$$

onde $a \in F^\times - \{1\}$, $r, s, t, u \in F$. Considere

$$x' = (\langle e_1 + re_3\rangle, \langle e_2 + se_3\rangle, \langle e_1 + e_2 + te_3\rangle, \langle e_1 + ae_2 + ue_3\rangle, \langle e_3\rangle) \in C_3^b(F^3)$$

e note que

$$\pi_3\left(x'\right) = (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_1 + e_2\rangle, \langle e_1 + ae_2\rangle) \in C_3(F^2).$$

Isto implica que a órbita do elemento x em $C_3^b(F^2)_{GL_2(F)}$ vai para o elemento $[a] \in \mathfrak{p}(F)$. Como existe $A' \in GL_3(F)$ tal que

$$A' \cdot (\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle, \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle, \langle e_1 + ae_2 + we_3\rangle, \langle e_3\rangle) = x',$$

para algum $w \in F^\times - \{1\}$, $a \neq w$, a imagem da órbita de x em $D_3(F^3)_{GL_3(F)}$ coincide com a órbita do elemento $\begin{bmatrix} a \\ w \end{bmatrix}$. Aplicando o homomorfismo ρ neste elemento temos que órbita de x em $D_3(F^3)_{GL_2(F)}$ vai para o elemento $[a] \in \mathfrak{p}(F)$. Portanto obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_3(C_\bullet^b(F^3)_{GL_2(F)}) \arrow[r, "(\overline{\pi_3})_*"] \arrow[d] & \mathfrak{p}(F). \\ H_3(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}) \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Portanto o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} H_3(GL_2(F)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "inc_*"'] & \mathfrak{p}(F). \\ H_3(GL_3(F)) \arrow[ur, "\overline{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

□

4.4 A sequência exata de Bloch-Wigner

TEOREMA 4.2 (Suslin). *Seja F um corpo infinito. Então temos a seguinte sequência exata*

$$H_3(GM_2(F)) \oplus H_3(T_3) \longrightarrow H_3(GL_3(F)) \xrightarrow{\overline{\rho}} B(F) \to 0.$$

Demonstração. O homomorfismo de augmentação $\varepsilon_D : D_0(F^3) \to \mathbb{Z}$, da resolução $D_\bullet(F^3)$, tem uma seção T_3-equivariante dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow D_0(F^3), \\ n &\longmapsto n(\langle e_1\rangle, \langle e_2\rangle), \end{aligned}$$

onde $T_3 := \{\mathrm{diag}(a,b,c) \in GL_3(F) : a,b,c \in F^\times\} \cong F^\times \times F^\times \times F^\times$. As sequências exatas

$$0 \to \mathrm{Im}\ \partial_1 \to D_0(F^3) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Im}\ \partial_2 \to D_1(F^3) \to \mathrm{Im}\ \partial_1 \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{Im}\ \partial_3 \to D_2(F^3) \to \mathrm{Im}\ \partial_2 \to 0,$$

implicam os homomorfismos conectantes

$$H_3(T_3) \to H_2(T_3, \mathrm{Im}\ \delta_1) \to H_1(T_3, \mathrm{Im}\ \delta_2) \to H_0(T_3, \mathrm{Im}\ \delta_3).$$

Como a primera sequência cinde, $H_3(T_3) \to H_2(T_3, \mathrm{Im}\ \partial_1)$ é trivial. Agora considerando o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} H_3(T_3) \arrow[r, "0"] \arrow[d] & H_0(T_3, \mathrm{Im}\ \delta_3) \arrow[d] \\ H_3(GL_3(F)) \arrow[r] & H_0(GL_3(F), \mathrm{Im}\ \delta_3) \end{tikzcd}$$

e usando o fato que $H_0(GL_3(F), \mathrm{Im}\ \delta_3) = \dfrac{\mathrm{Ker}\ \overline{\delta_3}}{\mathrm{Im}\ \overline{\delta_4}} = H_3\left(D_\bullet(F^3)_{GL_3(F)}\right)$, então obtemos

$$(inc_1)_*(H_3(T_3)) \subseteq \mathrm{Ker}\ \overline{\rho},$$

onde $inc_1 : T_3 \to GL_3(F)$ é a inclusão de T_3 em $GL_3(F)$. Agora, seja $x \in H_3(GL_3(F))$. Então existem $y \in H_3(T_3)$, $z \in H_3(GL_2(F))$ tais que

$$x = (inc_1)_*(y) + inc_*(z).$$

Como a imagem de $H_3(T_3)$ está contido no Ker $\overline{\rho}$, temos

$$\overline{\rho}(x) = \overline{\rho}\,(inc_*(z)) = \overline{\rho} \circ inc_*(z) = \varphi(z) \in B(F).$$

Isto junto com a sequência (4.21) prova a exatidão em $B(F)$. Seja agora $x \in H_3(GL_3(F))$ tal que $\overline{\rho}(x) = 0$. Então existem $y \in H_3(T_3)$, $z \in H_3(GL_2(F))$ tais que $x = (inc_1)_*(y) + inc_*(z)$. Logo $0 = \overline{\rho}(x) = \overline{\rho} \circ inc_*(z) = \varphi(z)$. Agora pela sequência (4.21) existe $z' \in H_3(GM_2(F))$ tal que $z' \mapsto z$. Isto prova a exatidão em $H_3(GL_3(F))$. □

O homomorfismo $\nu : GL(R) \to SL(R)$ dado por $A \mapsto \begin{pmatrix} \det(A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, induz um homomorfismo $\nu_* : H_n(GL(R)) \to H_n(SL(R))$ tal que a composição

$$H_n(SL(R)) \xrightarrow{i_*} H_n(GL(R)) \xrightarrow{\nu_*} H_n(SL(R)),$$

é o homomorfismo identidade, onde $i : SL(R) \to GL(R)$ é a inclusão de $SL(R)$ em $GL(R)$. Assim o homomorfismo natural $H_n(SL(R)) \xrightarrow{i_*} H_n(GL(R))$ é sempre uma injeção que cinde. Com esta última observação temos as ferramentas necessárias para apresentar nosso teorema principal.

TEOREMA 4.3 (Suslin-Bloch-Wigner). *Seja F um corpo infinito. Então existe uma sequência exata*

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim} \longrightarrow K_3^{ind}(F) \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0. \tag{4.25}$$

Demonstração. Pela Fórmula de Künneth, $H_3(T_3) \cong M' \oplus (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)$, onde M' é formado por somandos de $H_3(T_2 \times 1)$, $H_3(F^\times \times 1 \times F^\times)$ e $H_3(1 \times T_2)$. Considere os automorfismos de $H_3(GL_3(F))$ induzidos por conjugação pelas matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ como foi feito em (4.5). Note que em particular para $a_i, b_i \in F^\times$, em $B_3(GL_3(F))$ temos

$$\tau_{A_1}\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\right]\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\tau_{A_2}\left(\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\right].$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Im } (H_3(F^\times \times 1 \times F^\times) \to H_3(GL_3(F))) &= \text{Im } (H_3(T_2) \to H_3(GL_3(F)))\,, \\ \text{Im } (H_3(1 \times F^\times \times F^\times) \to H_3(GL_3(F))) &= \text{Im } (H_3(T_2) \to H_3(GL_3(F)))\,. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\text{Im } \big(M' \to H_3(GL_3(F))\big) = \text{Im } (H_3(T_2) \to H_3(GL_3(F)))\,.$$

Assim,

$$\text{Im } (H_3(T_3) \to H_3(GL_3(F))) = \text{Im } \big(H_3(T_2) \oplus \big(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\big) \to H_3(GL_3(F))\big)\,,$$

obtendo pelo Teorema (4.2) a sequência exata

$$H_3(GM_2(F)) \oplus \big(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\big) \longrightarrow H_3(GL_3(F)) \xrightarrow{\overline{\rho}} B(F) \to 0.$$

Agora da decomposição (4.10) e do Teorema (4.2), implica-se a seguinte sequência exata

$$F_2'H_3(GM_2(F)) \longrightarrow H_3(GL_3(F))/N \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0, \tag{4.26}$$

onde $N := \text{Im } ((F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times) \to H_3(GL_3(F)))$. Pelo Lema (1.5), temos a decomposição canônica $H_3(T_2) \cong M \oplus \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))$. Pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "="] \arrow[d] & M \arrow[d, "j"] & & \\ F_2'H_3(GM_2(F)) \arrow[r] & H_3(GL_3(F))/N \arrow[r] & B(F) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

obtemos a sequência exata

$$T_F \longrightarrow \frac{H_3(GL_3(F))}{j(M)+N} \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0, \tag{4.27}$$

onde nos já estudamos T_F no Capítulo 1 no Exemplo (1.22). Como pelo Lema (4.4) $T_F \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim}$ e pelo Teorema de Estabilidade (1.16) $H_3(GL_3(F)) \cong H_3(GL(F))$, obtemos a sequência exata

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim} \longrightarrow \frac{H_3(GL(F))}{j(M)+N} \longrightarrow B(F) \longrightarrow 0.$$

Por outro lado, dado que $H_2(SL(F)) \cong K_2^M(F)$ (2.9) e pela sequência (1.15) obtemos a seguinte sequência exata que cinde

$$0 \longrightarrow F^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F) \xrightarrow{\eta} \frac{H_3(GL(F))}{H_3(F^{\times})} \xrightarrow{\nu_*} H_3(SL(F)) \longrightarrow 0,$$

onde ν_* é induzido pelo morfismo $\nu : GL(F) \to SL(F)$, $A \mapsto \mathrm{diag}(\det(A)^{-1}, A)$ enquanto o homomorfismo restante $\eta : F^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F) \longrightarrow \dfrac{H_3(GL(F))}{H_3(F^{\times})}$ é definido como sendo a composta

$$F^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F) \longrightarrow H_1(F^{\times}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(GL_2(F)) \longrightarrow H_3(F^{\times} \times GL_2(F)) \twoheadrightarrow H_3(GL_3(F)) \cong H_3(GL(F))$$

$$x \otimes \{y,z\} \longmapsto x \otimes \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(y,1), \mathrm{diag}(z,z^{-1})\right) \longmapsto \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(1,y,1), \mathrm{diag}(1,z,z^{-1})\right)$$

Notemos que para $x,y,z \in F^{\times}$,

$$\begin{aligned}
\nu_*\left(\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1), \mathrm{diag}(1,y), \mathrm{diag}(1,z)\right)\right) &= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x^{-1},x,1), \mathrm{diag}(y^{-1},1,y), \mathrm{diag}(z^{-1},1,z)\right) \\
&= -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1}), \mathrm{diag}(z,1,z^{-1})\right) \\
&= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(y,1,y^{-1}), \mathrm{diag}(x,x^{-1},1), \mathrm{diag}(z,1,z^{-1})\right) \\
&= [y,x,z],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_*\left(\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(y,1,1), \mathrm{diag}(1,1,z)\right)\right) &= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x^{-1},x,1,1), \mathrm{diag}(y^{-1},y,1,1), \mathrm{diag}(z^{-1},1,1,z)\right) \\
&= -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1,1), \mathrm{diag}(y,y^{-1},1,1), \mathrm{diag}(z,1,1,z^{-1})\right) \\
&= -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,x^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1), \mathrm{diag}(z,1,1,z^{-1})\right) \\
&= -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,x^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1), \mathrm{diag}(z,z^{-1},1,1)\right) \\
&\quad -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,x^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1), \mathrm{diag}(1,z,1,z^{-1})\right) \\
&= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,x^{-1},1), \mathrm{diag}(z,z^{-1},1,1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1)\right) \\
&= [x,z,y],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_*\left(\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(1,y,1), \mathrm{diag}(1,1,z)\right)\right) &= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x^{-1},x,1,1), \mathrm{diag}(y^{-1},1,y,1), \mathrm{diag}(z^{-1},1,1,z)\right) \\
&= -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1,1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1), \mathrm{diag}(z,1,1,z^{-1})\right) \\
&= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1,1), \mathrm{diag}(z,1,z^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1)\right) \\
&\quad +\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1,1), \mathrm{diag}(1,1,z,z^{-1}), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1)\right) \\
&= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,x^{-1},1,1), \mathrm{diag}(z,1,z^{-1},1), \mathrm{diag}(y,1,y^{-1},1)\right) \\
&= [x,z,y],
\end{aligned}$$

isto é, $\nu_*(j(M)+N) \subseteq T$, onde $T = \langle [a,b,c] : a,b,c \in F^{\times} \rangle$. Assim obtemos um homomorfismo sobrejetor $\overline{\nu_*} : \dfrac{H_3(GL(F))}{j(M)+N} \to \dfrac{H_3(SL(F))}{T} \cong K_3^{ind}(F)$, onde o último isomorfismo é dado pelo Corolário (3.2). Agora, dado que

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(1,y,1), \mathrm{diag}(1,z,z^{-1})\right) &= \mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(1,y,1), \mathrm{diag}(1,z,1)\right) \\
&\quad -\mathbf{c}\left(\mathrm{diag}(x,1,1), \mathrm{diag}(1,y,1), \mathrm{diag}(1,1,z)\right),
\end{aligned}$$

temos

$$\mathrm{Ker}\ \nu_* = \mathrm{Im}\ \eta = \eta\left(F^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F)\right) \subseteq j(M)+N,$$

Portanto usando o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \dfrac{j(M)+N}{H_3(F^\times)} \arrow[r, "\nu_*"] \arrow[d] & \nu_*(j(M)+N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K_2^M(F) \arrow[r, "\eta"] & \dfrac{H_3(GL(F))}{H_3(F^\times)} \arrow[r, "\nu_*"] & H_3(SL(F)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

temos o isomorfismo, $\dfrac{H_3(GL(F))}{j(M)+N} \cong K_3^{ind}(F)$ e obtemos a sequência exata (4.25). □

Como resultado final, juntando as sequências exatas (4.1) e (4.25), apresentamos a sequência exata de Bloch-Wigner na forma geral.

TEOREMA 4.4 (Bloch-Wigner). *Seja F um corpo infinito. Então temos a sequência exata*

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim} \longrightarrow K_3^{ind}(F) \longrightarrow \mathfrak{p}(F) \xrightarrow{\lambda} \left(F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times\right)_\sigma \longrightarrow K_2(F) \longrightarrow 0, \tag{4.28}$$

onde o homomorfismo $\mathfrak{p}(F) \to (F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times)_\sigma$ é dado por $[a] \mapsto a \otimes (1-a)$, e $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim}$ é a única extensão não trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ por $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))$ se $char(F) \neq 2$ e $\mu_{2^\infty}(F)$ é finito, e $Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim} := Tor_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))$ caso contrário.

OBSERVAÇÃO 4.1. Pode-se provar que o homomorfismo

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mu(F),\mu(F))^{\sim} \longrightarrow K_3^{ind}(F)$$

é injetor. Mas a demonstração deste fato é difícil e precisamos mostrar alguns resultados adicionais da K-teoria algébrica. Pode-se notar também que se F tem um número finito de elementos, existem já alguns resultados parciais para a obtenção de uma sequência exata de Bloch-Wigner para o corpo F (veja-se [6]).

EXEMPLO 4.1. A sequência original para (4.28), demonstrada por Bloch e Wigner separadamente, garante a existência de uma sequência exata da forma

$$0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H_3(SL_2(\mathbb{C})) \to \mathfrak{p}(\mathbb{C}) \to \bigwedge{}^2_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times \to K_2(\mathbb{C}) \to 0,$$

onde $\mathfrak{p}(\mathbb{C})$ é o grupo pré-Bloch de $\mathbb{C}$, logo $H_3(SL_2(\mathbb{C})) \cong K_3^{ind}(\mathbb{C})$, isto é obtemos uma descrição da parte indecomponível do terceiro K-grupo de $\mathbb{C}$. Pode-se generalizar esta sequência para corpos k algebricamente fechados e de característica zero, obtendo a sequência exata da forma

$$0 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to K_3^{ind}(k) \to \mathfrak{p}(k) \to k^\times \wedge k^\times \to K_2(k) \to 0.$$

REFERÊNCIAS

1 Brown, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982. (Graduate Texts in Mathematics, 87). Citado 4 vezes nas páginas 4, 5, 9 e 17.

2 Hatcher, A. **Algebraic Topology**. United States of America: Cambridge University Press, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75 e 81.

3 Loday,
École Normale Supérieure, v. 9, p. 309–377, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 77, 81 e 82.

4 Mac Lane, S. **Homology**. Gottingen: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1963. (Classics in Mathematics, 114). Citado 4 vezes nas páginas 6, 23, 25 e 26.

5 Milnor J. **Introduction to Algebraic K-Theory**. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1971. (Annals of Mathematics Studies, 72). Citado na página 42.

6 Mirzaii, B. Mokari, Fatemeh. Y. A Bloch-Wigner theorem over rings with many units II. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 219, p. 5078–5096, 2015. Citado na página 110.

7 Nesterenko, Y. P.; Suslin, A. A. Homology of the general linear group over a local ring and Milnor's K-theory. **Mathematics of the USSR-Izvestiya**, v. 34, p. 121–145, 1990. Citado na página 39.

8 Rosenberg, J. **Algebraic K-Theory and its applications**. New York: Springer-Verlag, 1994. (Graduate Texts in Mathematics, 147). Citado 5 vezes nas páginas 42, 72, 73, 74 e 77.

9 Rotman, J. J. **An introduction to homological algebra**. Urbana, Illinois: Academic Press, INC, 1979. Citado na página 6.

10 Srinivas, V. **Algebraic K-Theory**. Birkhauser, Boston: Progress in Mathematics, 90, 1996. Citado na página 75.

11 Suslin, A. A. Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor's K-theory. **Proc. Steklov Inst. Math**, p. 207–225, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 84.

12 ____. K_3 of a field and the Bloch group. **Proc. Steklov Inst. Math**, p. 217–239, 1991. Citado 2 vezes nas páginas ii e 83.

13 Van der Kallen, W. The K_2 of rings with many units. **Annales scientifiques de l' École Normale Supérieure**, v. 10, p. 473–515, 1977. Citado na página i.

14 Vermani, L. R. **An elementary approach to homological algebra**. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 3, 4 e 6.

15 Weibel, C. A. **An Introduction to Homological Algebra**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1994. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38). Citado 5 vezes nas páginas 4, 6, 7, 16 e 31.