I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

UM INVARIANTE TOPOLÓGICO
PARA GERMES DE APLICAÇÕES
DIFERENCIÁVEIS C^∞ .

João Ribeiro Gonçalves Filho

Orientador: Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

UM INVARIANTE TOPOLÓGICO
PARA GERMES DE APLICAÇÕES
DIFERENCIÁVEIS C^∞ .

João Ribeiro Gonçalves Filho

Orientador: Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

1987

A natureza, aos trabalhadores que a transformam e ao privilégio de estar vivendo neste final de século, período de rápidas transformações e de grandes realizações.

A dívida de estar partilhando tudo isto com

Florângela, Mariana e Fernanda.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Wilson Maurício Tadini, meu orientador e amigo, pela orientação e confiança depositada em mim.

Aos amigos Hermes Antonio Pedroso, Angela Maria Sitta e Sebastião Antonio Izar, por me ouvirem em seminários, pelas discussões e sugestões, sem os quais este trabalho certamente não estaria concluído.

Ao amigo Valdeni Soliani Franco, pela correção na datilografia, mas, mais que isso, pelo apoio e incentivo que deu e que, tenho certeza, dará caso necessário.

Aos colegas do DME pela compreensão.

Ao Marcos Kazuyoshi Sassaka pela datilografia e ao Enéias Ramos de Oliveira pelo trabalho nos desenhos e gráficos.

A todos que de uma forma ou de outra contribuíram para a finalização deste trabalho.

Este trabalho só foi possível graças ao apoio da CAPES, CNPq, FAPESP, FINEP e FUEM.

UM INVARIANTE TOPOLÓGICO PARA
GERMES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS C^∞ .

João Ribeiro Gonçalves Filho

Adviser: Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini

A B S T R A C T

In this work we present a detailed version of the paper "A Topological Invariant for Stable Map Germs" due to James Damon and André Galligo.

In this paper, they prove that for C^∞ -stable map germs which are either of Σ_2 -type or of discrete algebra type (i.e. of some Σ_i -types with only a finite number of distinct Σ_i -types near-by) the dimension of the algebra associated to the map germ is a topological invariant.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho nos propusemos a explicar com detalhes, o artigo [01] da bibliografia. Para tal, registramos o conceito de estabilidade infinitesimal para germes $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ introduzida por John Mather e uma outra caracterização de V.I. Arnol'd que aparece em [10].

Apresentamos o Lema de Nakayama e o Teorema de Malgrange, com os quais provamos um Teorema técnico para verificar a estabilidade de um germe (aplicado ao conceito dado por Arnol'd). Através de exemplos foi mostrada a importância dos resultados desenvolvidos.

Em [01], o problema é: Quando $\delta(f)$ (= dimensão da álgebra associada $Q(f)$) é um invariante topológico?

Dado $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e $\tilde{f}$ uma representante de f definida num aberto U , seja $m(\tilde{f}) = \max\{m \in \mathbb{Z} / \forall \text{ vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U, \exists \text{ conjunto } W, o \in W \subset V \text{ e } y \in \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = m\}$.

Se não existir tal $m_1(\tilde{f})$, tomamos $m_1(\tilde{f}) = +\infty$. Temos que para qualquer outra representação $\tilde{f}_1$ de f , $m(\tilde{f}) = m(\tilde{f}_1)$.

Tomamos, então, $m(f)$ igual a este valor comum $m(\tilde{f})$.

Chamamos multiplicidade real de f a este valor $m(f)$.

Temos que $m(f)$ é um invariante topológico.

Passemos ao problema: Quando $m(f) = \delta(f)$?

Seja $I \subset M_n$, $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\xi_n}$ (respectivamente, $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}$), uma k -deformação de I é uma aplicação $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^r$ (respectivamente, $F \in (\mathbb{R}\{\underline{x}_{n+k}\})^r$) tal que $F(\underline{x}, o) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_r(\underline{x}))$.

Dizemos que uma k -deformação $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^r$ (respectivamente $F \in (\mathbb{R}\{\underline{x}_{n+k}\})^r$) tem q -zeros próximos de zero, que denotaremos por $q-o-o$, se dada uma vizinhança U de o em $\mathbb{R}^n$

e $\xi > 0$, existe t_0 em $\mathbb{R}^k$ com $||t_0|| < \xi$ e tal que $F(\underline{x}, t_0) = 0$ tem q soluções em U .

Mostramos que $\delta(I)$ é um limite superior para os zeros próximos de zero de qualquer deformação de I .

Temos que uma condição necessária e suficiente para $m(I) = \delta(I)$, é que exista uma deformação de I com $\delta(I)$ -o-o.

No caso de $n = 2$, temos que todo I tem uma deformação com $\delta(I)$ -o-o. Logo para todo germe estável do tipo Σ_2 , temos que $m(f) = \delta(f)$.

Devido a um resultado de Iarrobino, temos que para $n \geq 3$, existe I que não admite deformação com $\delta(I)$ -o-o.

Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ estável. Diremos que f é do Tipo de Álgebra Discreta se, existe um aberto σ contendo $j^{p+1}f(o)$ em $J^{p+1}(n, p)$, tal que, σ encontra apenas um número finito de K^{p+1} -órbitas do tipo Σ_i , onde f é do tipo Σ_i .

Em [o2], John Damon dá uma classificação dos germes do Tipo de Álgebra Discreta.

Para mostrarmos que para germes do Tipo de Álgebra Discreta também se verifica $m(f) = \delta(f)$, foram introduzidos os conceitos de torre na direção x_k para ideais, e, soluções na forma de A , condição (d) e condição (x_k) , para deformações de ideais.

A contribuição dada com este trabalho se distribui da seguinte maneira.

- (i) os resultados enunciados e demonstrados em [o1], foram refeitos de forma didática, inclusive com apresentação de exemplos.
- (ii) os resultados apenas enunciados, foram demonstrados (por exemplo: Teorema 2.3 página 77, Le

ma de Preparação Generalizado 2.6 página 84, Lema 1.1 página 108, Teorema 3,3.10 página 173).

(iii) alguns equívocos como: Definição de $m(f)$ página 53, Lema de divisão página 119, condição (d) página 133, foram reescritos corretamente.

(iv) a parte introdutória foi enriquecida além do necessário para os objetivos propostos.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

1. GERMES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS	1
- Lema de Nakayama	3
- Teorema de Malgrange	11
2. GERMES ESTÁVEIS	17
- Uma outra caracterização de estabilidade <u>infinite</u> simal	25
3. ÁLGEBRA ASSOCIADA	39
4. FORMA NORMAL PARA GERMES ESTÁVEIS	46
5. O INVARIANTE $m(f)$ (multiplicidade real)	53
- Para germes estáveis, $m(f)$ depende apenas de $Q(f)$..	57
- $m(I)$ e $\delta(I)$	62

CAPÍTULO II

1. DEFORMAÇÕES DE IDEAIS	63
- q - zeros próximos de zero	63
- Uma condição necessária e suficiente para que $m(f) =$ $\delta(f)$	73
2. ESCADAS E DEFORMAÇÕES DE IDEAIS M_2 -PRIMÁRIOS EM $\mathbb{R}\{x_1, x_2\}$	75
- Uma condição necessária e suficiente para que $N^k - E(I)$ seja finito	77
- Base canônica de um ideal	80
- Lema de preparação generalizado	84

- Polinômio de Weierstrass	87
- Para I M_2 -primário, existe deformação com $\delta(I)$ -zeros próximos de zero	97
- Para f estável do tipo Σ_2 , $\delta(f)$ é um invariante topológico	105

CAPÍTULO III

1. IDEAIS M_k -PRIMÁRIOS EM $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$	107
- As escadas E_i com fronteiras F_i	107
- Lema preparatório	108
- Base canônica na direção X_k	113
- Os ideais I_i	113
- Lema de divisão	119
- Relação entre os ideais I_i e as escadas E_i	123
- Condição (x_k)	128
- Soluções na forma de A	128
- Uma condição que garante $m(f) = \delta(f)$	130
- Condição (d)	133

CAPÍTULO IV

1. TORRES EM $\mathbb{R}\{\underline{x}_3\}$	137
- Condição em que I admite deformação com $\delta(I)$ -o-o .	137
- Para torres em $\mathbb{R}\{\underline{x}_3\}$ tem-se $m(I) = \delta(I)$	141
- Se I satisfaz a condição (x_3) , então I é equivalente a uma torre	144
2. TORRES EM $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$, $k \geq 3$	145
- Para torre em $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$, tem-se $m(I) = \delta(I)$	146
- Formas normais para ideais que satisfazem a condição (x_k)	146
- Ideais $J^{(k)}$	147

CAPÍTULO V

1. GRUPO K	157
2. GRUPO DE LIE E GRUPO ALGÉBRICO	158
3. GERMES SIMPLES E GERMES DO TIPO DE ÁLGEBRA DISCRETA .	159
- Germes estáveis do tipo Σ_1 são simples	159
- Nas "Boas Dimensões" todo germe estável é simples .	164
- 2- produto simétrico	165
- 2ª derivada intrínseca	167
- Teorema: Para f do Tipo de Álgebra Discreta, do tipo Σ_1 ou Σ_2 , tem-se $m(f) = \delta(f)$	168
- Teorema: Para f do Tipo de Álgebra Discreta, do tipo $\Sigma_{k;(j)}$, $j = 0,1$; $k \geq 3$, tem-se $m(f) = \delta(f)$...	169
- Modelos dos ideais de germes do Tipo de Álgebra Discreta do tipo $\Sigma_{3,(2)}$	170
- Teorema: Para f do Tipo de Álgebra Discreta do tipo $\Sigma_{3,(2)}$, tem-se $m(f) = \delta(f)$	173
BIBLIOGRAFIA	183

CAPÍTULO I

1. GERMES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS C^∞ .

1.1. **Definição:** Sejam S, T subconjuntos não vazios do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$ respectivamente, com S finito. Consideraremos $F_O^r = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, f \in C^r \text{ e } f(S) \subset T\}, r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Em F_O^r , definamos a relação: $f, g \in F_O^r, f \sim g$ se, e somente se, existe um aberto U do $\mathbb{R}^n$ contendo S , tal que $f/U = g/U$. Segue que " $\sim$ " é uma relação de equivalência em F_O^r .

Cada classe de equivalência será denominada "**germe de aplicação em S** ".

Denotaremos por $f: \mathbb{R}^n, S \rightarrow \mathbb{R}^p, T$ ou $f: (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, T)$.

Observações:

- (1) Se $T = \mathbb{R}^p$, denotaremos $f: \mathbb{R}^n, S \rightarrow \mathbb{R}^p$.
- (2) Se $p = 1, T = \mathbb{R}$ e $r = \infty$, denotaremos $F_O^\infty / \sim = C_S^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- (3) Se $S = \{o\}$ e $r = \infty$, denotaremos $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ ou $f: (\mathbb{R}^n, o) \rightarrow (\mathbb{R}^p, o)$ e $F_O^\infty / \sim = \xi_{n,p}$.
Portanto $\xi_{n,p} = \{f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o : f \in C^\infty\}$.
- (4) Se $S = \{o\}, p = 1, T = \mathbb{R}$ e $r = \infty$, denotaremos $F_O^\infty / \sim = C_O^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou $F_O^\infty / \sim = \xi_n$.
Portanto $\xi_n = \{f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f \in C^\infty\}$.

ξ_n tem estrutura de $\mathbb{R}$ -álgebra em relação às operações de adição e multiplicação de germes.

(5) A menos que possa causar confusão usaremos a mesma notação f , tanto para representar o germe, como um seu representante.

1.2. Definição: Chamamos M_n ao ideal de ξ_n que consiste de todos os germes de aplicações $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}, o$.

Temos que ξ_n é um anel local e que M_n é o seu ideal maximal.

De fato:

M_n é um ideal maximal, pois $\frac{\xi_n}{M_n} \cong \mathbb{R}$ como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial, dado por $f + M_n \mapsto f(o)$.

M_n é o único ideal maximal, pois se $f \notin M_n$, então $f(o) \neq o$ e portanto para qualquer representante $\tilde{f}$ de f , existe uma vizinhança da origem onde $\tilde{f}(x) \neq o$.

Segue que $\frac{1}{\tilde{f}}$ está definido, o que significa que f é uma unidade e não está contido em qualquer ideal próprio de ξ_n .

1.3. Definição: Seja S um anel comutativo e M, N ideais de S . Definimos $M.N$ o produto de M por N da seguinte maneira.

$$M.N = \{m_1 n_1 + m_2 n_2 + \dots + m_k n_k, m_1, \dots, m_k \in M \text{ e } n_1, \dots, n_k \in N\}$$

Observações:

Podemos considerar o produto de mais de dois fatores e em particular o produto de dois ou mais fatores iguais

$$M^\alpha = M \cdot M^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2.$$

1.4. Definição: Dizemos que um ideal I de ξ_n é M_n -primário se ele contém alguma potência do ideal maximal.

1.5. Definição: Seja $A^r = \{(h,k)/h:\mathbb{R}^n,o \rightarrow \mathbb{R}^n,o \text{ e } k:\mathbb{R}^p,o \rightarrow \mathbb{R}^p,o \text{ são germes de difeomorfismos } C^r\}$. (difeomorfismos C^0 são os homeomorfismos).

Logo, com relação à composição coordenada a coordenada, A^r tem estrutura de grupo. Temos que A^∞ atua sobre $\xi_{n,p}$ da seguinte maneira:

$$A^\infty \times \xi_{n,p} \rightarrow \xi_{n,p}$$

$$((h,k), f) \rightarrow g = (h,k) * f = k \circ f \circ h^{-1}$$

Dois elementos numa mesma A^∞ -órbita são ditos A^∞ -equivalentes ou localmente equivalente ou equivalentes.

Exemplo: Para $f,g.: \mathbb{R}^2,o \rightarrow \mathbb{R}^2,o$ dadas por $f(x,y) = (x^2 + y^2, xy)$ e $g(x,y) = (x^2, y^2)$ basta tomar $h,k:\mathbb{R}^2,o \rightarrow \mathbb{R}^2,o$ tais que $h^{-1}(x,y) = (x+y, x-y)$ e $k(x,y) = (\frac{1}{4}(x+2y), \frac{1}{4}(x+2y))$

Sejam $f,g \in \xi_{n,p}$, $h:\mathbb{R}^n,o \rightarrow \mathbb{R}^n,o$ e $k:\mathbb{R}^p,o \rightarrow \mathbb{R}^p,o$ germes de homeomorfismos, $((h,k) \in A^0)$ tais que, $f=k \circ g \circ h^{-1}$. Nestas condições diremos que f e g são topologicamente equivalentes.

1.6. Lema de Nakayama - Seja S um anel local, comutativo com unidade 1 , com ideal maximal M . Suponha que A é um S - módulo finitamente gerado.

Se $M.A = A$, então $A = 0$.

Prova:

Se $z \in M$, então $1+z$ é uma unidade. Do contrário, se $1+z \in M$, teremos $1 \in M$, que é um absurdo.

Sejam $a_1, \dots, a_n$ geradores de A . Então, por hipótese existem $z_{ij} \in M$ tais que $a_i = \sum_{j=1}^n z_{ij} a_j$.

Matricialmente, temos $a = Z a$ ou

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{onde}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ e } Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim, $(Z - I_n) a = 0$. Temos que $\det(Z - I_n)$ é o polinômio característico de Z para $t = 1$, e isto é igual a $(-1)^n +$ soma de produtos de elementos de Z .

Portanto $\det(Z - I_n) = (-1)^n + \bar{z}$, $\bar{z} \in M$.

Assim $\det(Z - I_n)$ é invertível, e assim $Z - I_n$ é invertível e

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e temos } A = 0$$

1.7. Corolário 1: Sejam S um anel comutativo com unidade, com um único ideal maximal M e A, B e C , S -módulos, com $A, B \subset C$ e A finitamente gerado. Se $A \subset B + M A$, então, $A \subset B$.

Prova:

Se $A \subset B + M A$, então, $A + B \subset B + M A$

$$\text{Logo, } \frac{A + B}{B} \subset \frac{B + M A}{B} \subset \frac{B + M(A + B)}{B}$$

Segue que $\frac{A}{A \cap B} \subset M \frac{A}{A \cap B}$

Portanto $\frac{A}{A \cap B} = 0$ e daí $A \subset B$.

1.8. Corolário 2: Sejam S um anel comutativo com unidade, com um único ideal maximal M e A um S -módulo finitamente gerado. Então $\frac{A}{MA}$ é um $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Além disso, sendo $e_1, \dots, e_k \in A$, então, $e_1, \dots, e_k$ geram A como S -módulo $\iff e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial.

Prova:

Sejam $s + M \in \frac{S}{M}$ e $a + MA \in \frac{A}{MA}$

Definimos $(s + M) \cdot (a + MA) = sa + MA$.

A definição é boa, pois:

$$(s + M) = (s' + M) \iff s - s' \in M$$

$$(a + MA) = (a' + MA) \iff a - a' \in MA$$

Temos que

$$sa - s'a = (s - s')a \in MA$$

$$s'a - s'a' = s'(a - a') \in MA$$

Logo, $sa - s'a' \in MA$. Portanto $sa + MA = s'a' + MA$.

(i) Se $e_1, \dots, e_k$ geram A como S -módulo, então, $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial.

De fato:

Seja $a + MA \in \frac{A}{MA}$. Como $e_1, \dots, e_k$ geram A como S -módulo, então, existem $s_1, \dots, s_k \in S$ tais que

$$a = s_1 e_1 + \dots + s_k e_k. \text{ Assim } a + MA = \sum_{i=1}^k s_i e_i + MA =$$

$$\sum_{i=1}^k (s_i e_i + MA) = \sum_{i=1}^k (s_i + M) \cdot (e_i + MA).$$

(ii) Se $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial, então, $e_1, \dots, e_k$ geram A como S -módulo.

De fato:

Temos que $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial.

Seja B o S -sub-módulo de A , gerado por $e_1, \dots, e_k$ ($B \subset A$).

Afirmamos que $A \subset B + MA$.

De fato:

Se $a \in A$, então, existem $s_1, \dots, s_k \in S$ tais que: $a + MA = \sum_{i=1}^k (s_i + M) \cdot (e_i + MA) = \left(\sum_{i=1}^k s_i e_i \right) + MA$. Então, $a - \sum_{i=1}^k s_i e_i \in MA$.

Logo, como $\sum_{i=1}^k s_i e_i \in B$, temos $a \in B + MA$. Pelo

corolário 1, $A \subset B$ e portanto $A = B$.

1.9. Corolário 3: Sejam S um anel local, comutativo com unidade, com ideal maximal M e A um S -módulo finitamente gerado. Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ um conjunto de geradores de A como S -módulo. Então, $\{e_1, \dots, e_k\}$ é minimal $\iff e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ é base de $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ -espaço vetorial.

Prova:

(i) Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ conjunto minimal de gera-

dores de A como S - módulo. Pelo corolário 2, $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ - espaço vetorial. Se $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ não é base de $\frac{A}{MA}$, podemos supor sem perda de generalidade que existe $p < k$ tal que $e_1 + MA, \dots, e_p + MA$ é base de $\frac{A}{MA}$. Novamente, pelo corolário 2, temos que $e_1, \dots, e_p$ são geradores de A como S - módulo, o que é absurdo, pois, $\{e_1, \dots, e_k\}$ é minimal.

(ii) Seja $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ base de $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ - espaço vetorial. Pelo corolário 2, $e_1, \dots, e_k$ geram A como S - módulo. Se $\{e_1, \dots, e_k\}$ não é minimal, podemos supor sem perda de generalidade que existe $p < k$ tal que $e_1, \dots, e_p$ geram A como S - módulo. Ainda pelo corolário 2, $e_1 + MA, \dots, e_p + MA$ geram $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ - espaço vetorial, o que é absurdo, pois $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ é base de $\frac{A}{MA}$.

1.10. Corolário 4: Seja S um anel local, comutativo com unidade e com ideal maximal M . Seja A um S - módulo finitamente gerado. Se $\{e_1, \dots, e_k\}$ e $\{f_1, \dots, f_s\}$ são conjuntos minimais de geradores de A como S - módulo, então, $k = s$.

Prova:

Temos pelo, corolário 3, que $e_1 + MA, \dots, e_k + MA$ e $f_1 + MA, \dots, f_s + MA$ são bases de $\frac{A}{MA}$ como $\frac{S}{M}$ - espaço vetorial e portanto $k = s$.

1.11. Corolário 5: Seja A um ξ_n - módulo finitamente gerado e $I \subsetneq A$ um ξ_n - submódulo de A com $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I} = k < \infty$.

Então, $M_n^k A \subset I$.

Prova:

Sejam $d_i = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^i A}$, $i = 1, \dots, k+1$

Temos $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{k+1} \leq k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I}$

Além disso $d_1 \neq 0$, pois $d_1 = 0 \iff \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n A} = 0$

$\iff A = I + M_n A$ e como A é finitamente gerado, pelo corolário 1, $A \subset I$, o que é absurdo.

Portanto $d_1, \dots, d_{k+1} \in \{1, 2, \dots, k\} \implies \exists i < j$ tal que $d_i = d_j$ com $i \in \{1, \dots, k\}$.

Assim $d_i \leq d_{i+1} \leq \dots \leq d_j = d_i \implies$
 $\implies d_i = d_{i+1} = \dots = d_{j-1} = d_j$ e

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^i A} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^{i+1} A}$$

Como $I + M_n^{i+1} A \subset I + M_n^i A$, concluímos que $I + M_n^{i+1} A = I + M_n^i A$ e podemos escrever que $M_n^i A \subset I + M_n^{i+1} A$ ou $M_n^i A \subset I + M_n^i (M_n^i A)$ e pelo corolário 1, $M_n^i A \subset I$ e como $M_n^k A \subset M_n^i A$, para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ concluímos que $M_n^k A \subset I$.

Observações:

Dados $f_1, f_2, \dots, f_k \in \xi_n$, denotaremos por $\langle f_1, \dots, f_k \rangle = \langle f_1, \dots, f_k \rangle_{\xi_n}$ o ideal de ξ_n gerado por $f_1, \dots, f_k$.

1.12. Corolário 6: Seja A um ξ_n - módulo finitamente gerado e $I \subsetneq A$ um ξ_n - submódulo de A com $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I} = k < \infty$.

Se $d_1 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n A}$, então, $M_n^{k+1-d_1} A \subset I$

Prova:

$$\text{Sejam } d_i = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^i A}$$

Temos $d_1 \neq 0$ e portanto

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_{k+2-d_1} \leq k = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I}$$

Portanto $d_1, \dots, d_{k+2-d_1} \in \{d_1, d_1 + 1, \dots, k\}$

$\Rightarrow \exists i < j$ tal que $d_i = d_j$ com $i \in \{1, \dots, k+1-d_1\}$

De $d_i \leq d_{i+1} \leq \dots \leq d_{j-1} \leq d_j = d_i$, concluímos

que $d_i = d_{i+1} = \dots = d_{j-1} = d_j$ e $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^i A} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n^{i+1} A}$,

donde $I + M_n^i A = I + M_n^{i+1} A \Rightarrow M_n^i A \subset I + M_n^{i+1} A \Rightarrow M_n^i A \subset I + M_n(M_n^i A)$ e pelo corolário 1, $M_n^i A \subset I$. Como $M_n^{k+1-d_1} A \subset M_n^i A$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, k+1-d_1\}$ concluímos que

$$M_n^{k+1-d_1} A \subset I$$

Observações:

A estimativa do corolário anterior é a melhor de um modo geral. Isto segue do exemplo abaixo:

Seja $A = \xi_2$ e $I = \langle x, y^{10} \rangle$.

Temos $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I} = 10$ e $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{I + M_n A} = 1$

Assim, pelo corolário 6, temos que

$M_n^{10+1-1} A = M_n^{10} A \subset I$. Por outro lado temos que

$$M_n^9 A \not\subset I.$$

1.13. **Corolário 7:** Seja $I \subset M_n$ um ideal de ξ_n . Se $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n}{I} = k < \infty$, então, I é finitamente gerado.

Prova:

Temos $I \subset M_n$ e assim $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Podemos afirmar que $J = I + M_n^k$ é finitamente gerado.

De fato.

$$\text{Temos } \dim_{\mathbb{R}} \frac{I + M_n^k}{M_n^k} = r < \infty$$

Sejam $f_1, \dots, f_r \in I$ tais que $[f_1], \dots, [f_r]$ é uma base de $\frac{I + M_n^k}{M_n^k}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

Seja $f_i = \bar{f}_i + \bar{\bar{f}}_i$ onde $\bar{f}_i = J^{k-1} f_i(0)$ e $i = 1, \dots, r$.

Cada $f_i \in J$. Seja agora $M_n^k = \langle h_1, \dots, h_\ell \rangle_{\xi_n} \subset J$.

Afirmamos que $f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_\ell$ geram J como ξ_n - módulo.

De fato:

Seja $g \in J$

$$g = \bar{g} + \bar{\bar{g}} \text{ com } \bar{g} = J^{k-1} g(0)$$

$$\bar{g} = \alpha_1 \bar{f}_1 + \dots + \alpha_r \bar{f}_r \quad (\alpha_i \in \mathbb{R})$$

$$g = \sum_{i=1}^r \alpha_i \bar{f}_i + \bar{\bar{g}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i - \sum \alpha_i \bar{\bar{f}} + \bar{\bar{g}}$$

Como $-\sum \alpha_i \bar{\bar{f}} + \bar{\bar{g}} \in M_n^k$, podemos escrever

$$g = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h_j, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_j \in \xi_n$$

Como pelo corolário 5, $M_n^k \subset I$, temos que $J = I$ e

portanto I é finitamente gerado.

Observações:

A recíproca não é verdadeira.

Sejam $I = M_n^\infty$ e $j = \langle \psi \rangle$, $I, J \subset \xi_n$

$$\text{com } \psi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -\frac{1}{e^{x_1^2 + \dots + x_n^2}}, & \text{se } \underline{x} \neq 0 \\ 0, & \text{se } \underline{x} = 0 \end{cases}$$

onde $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Temos que $I = M_n^\infty$ não é finitamente gerado.

De fato, $M_n^\infty = M_n \cdot M_n^\infty = \{0\} + M_n \cdot M_n^\infty$

Se M_n^∞ for finitamente gerado, temos pelo corolário 1 que $M_n^\infty = \{0\}$ o que é absurdo pois $\psi \in M_n^\infty$.

Temos então, J finitamente gerado com $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n}{J} = \infty$

e I não finitamente gerado com $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n}{I} = \infty$

Sejam $\psi: S_1 \rightarrow S_2$ um homomorfismo de anéis e B um S_2 - módulo. Então, B pode ser visto como um S_1 - módulo via ψ da seguinte maneira:

Se $s_1 \in S_1$ e $b \in B$, então, $s_1 \cdot b = \psi(s_1)b$.

Sejam $f: \mathbb{R}^{n,0} \rightarrow \mathbb{R}^{p,0}$ e $f^*: \xi_p \rightarrow \xi_n$

homomorfismo de anéis definido por $f^*(g) = g \circ f$. Diremos que f^* é o homomorfismo induzido por f .

1.14. Teorema 1 (Malgrange)

Seja A um ξ_n - módulo finitamente gerado.

Então, A é um ξ_p - módulo finitamente gerado via

f^* , se, e somente se, $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_p \cdot A} < \infty$.

Observações:

1. Se $A = \xi_n$, então, $M_p \cdot \xi_n = \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n}$,
onde $f = (f_1, \dots, f_p)$ ($M_p \cdot \xi_n$ via f^*)

Prova:

Seja $g \in M_p = \langle y_1, \dots, y_p \rangle_{\xi_n} \Rightarrow g =$

$$= \sum_{i=1}^p h_i y_i, h_i \in \xi_p$$

Seja $e_n \in \xi_n$.

$$\text{Assim } g \cdot e_n = (g \circ f) \cdot e_n = \left[\left(\sum_{i=1}^p h_i y_i \right) \circ f \right] e_n =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^p (h_i \circ f) f_i \right] e_n = \sum_{i=1}^p e_n (h_i \circ f) f_i \text{ pertence a}$$

$$\langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n}$$

Portanto $M_p \cdot \xi_n \subset \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n}$

Seja $g \in \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n} \Rightarrow g = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i, \alpha_i \in \xi_n$ e

$$g = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^p (y_i \circ f) \alpha_i \in M_p \cdot \xi_n.$$

Assim $\langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n} \subset M_p \cdot \xi_n$ e portanto temos a igualdade.

2. No Teorema de Malgrange a implicação:

$A \xi_p$ - módulo finitamente gerado $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_p \cdot A} < \infty \quad (\mathbb{R} \approx \frac{\xi_p}{M_p}) \text{ decorre imediatamente}$$

do corolário 2.

O que queremos observar é que a recíproca não é consequência do corolário 2.

A equivalência do corolário 2 já tem como hipótese que A é finitamente gerado.

1.15. Teorema 2: Seja A um ξ_n - módulo finitamente gerado. Então, $e_1, \dots, e_k$ geram A como ξ_p - módulo $\iff e_1 + M_n^{k+1} A, \dots, e_k + M_n^{k+1} A$ geram $\frac{A}{M_n^{k+1} A}$ como ξ_p - módulo.

Prova:

($\Rightarrow$) Temos que $e_1, \dots, e_k$ geram A como ξ_p - módulo.

Seja $a + M_n^{k+1} A \in \frac{A}{M_n^{k+1} A}$. Como $e_1, \dots, e_k$ geram

A como ξ_p - módulo, então, existem $s_1, \dots, s_k \in \xi_p$ tais que $a = s_1 e_1 + \dots + s_k e_k$.

$$a + M_n^{k+1} A = \sum_{i=1}^k s_i e_i + M_n^{k+1} A = \sum_{i=1}^k (s_i e_i + M_n^{k+1} A) = \sum_{i=1}^k s_i (e_i + M_n^{k+1} A).$$

($\Leftarrow$) Sabemos que $e_1 + M_n^{k+1} A, \dots, e_k + M_n^{k+1} A$ geram

$\frac{A}{M_n^{k+1} A}$ como ξ_p - módulo.

Pelo corolário 2, temos que

$$(e_1 + M_n^{k+1} A) + M_p \cdot \left(\frac{A}{M_n^{k+1} A} \right), \dots, (e_k + M_n^{k+1} A) + M_p \cdot \left(\frac{A}{M_n^{k+1} A} \right)$$

$$\text{geram } C = \frac{\frac{A}{(M_n^{k+1} A)}}{M_p \cdot \left(\frac{A}{M_n^{k+1} A} \right)} \text{ como } \frac{\xi_p}{M_p} \cong \mathbb{R} - \text{espaço vetorial.}$$

Afirmamos que $B \simeq C$ como $\mathbb{R}$ -espaço vetorial.

onde
$$B = \frac{A}{M_n^{k+1}A + M_p \cdot A}$$

De fato:

Seja
$$\psi: \frac{A}{M_n^{k+1}A} \longrightarrow \frac{A}{M_n^{k+1}A + M_p \cdot A}$$

$$a + M_n^{k+1}A \longmapsto a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)$$

A definição é boa pois

$$a + M_n^{k+1}A = a' + M_n^{k+1}A \iff a - a' \in M_n^{k+1}A \implies a - a' \in M_n^{k+1}A + M_p \cdot A$$

$$\implies a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A) = a' + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)$$

ψ é $\mathbb{R}$ -linear

$$\begin{aligned} [(a + tb) + M_n^{k+1}A] &= (a + tb) + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A) = \\ &= [a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)] + [tb + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)] = \\ &= [a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)] + t [b + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)] = \\ &= \psi(a + M_n^{k+1}A) + t \psi(b + M_n^{k+1}A) \end{aligned}$$

ψ é sobrejetora

Para todo $a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)$, tomamos $a + M_n^{k+1}A$

e temos
$$\psi(a + M_n^{k+1}A) = a + (M_n^{k+1}A + M_p \cdot A)$$

$$\text{Ker } \psi = M_p \cdot \left(\frac{A}{M_n^{k+1}A} \right)$$

$$\psi(a + M_n^{k+1}A) = M_n^{k+1}A + M_p \cdot A \iff a \in M_n^{k+1}A + M_p \cdot A \iff a = \sum s_i a_i +$$

$$+ \sum m_j \cdot a_j, m_j \in M_p, s_i \in M_n^{k+1}$$

$$\text{Portanto } a + M_n^{k+1}A = \sum (m_j \cdot a_j) + M_n^{k+1}A = \sum m_j (a_j + M_n^{k+1}A) \quad e$$

$$\text{temos } a + M_n^{k+1}A \in M_p \cdot \frac{A}{M_n^{k+1}A}$$

$$\text{Donde } \text{Ker } \psi \subset M_p \cdot \frac{A}{M_n^{k+1}A}$$

$$\text{Se } a + M_n^{k+1}A \in M_p \cdot \frac{A}{M_n^{k+1}A}$$

$$\text{Temos } a + M_n^{k+1}A = \sum m_j a_j + M_n^{k+1}A, m_j \in M_p$$

$$\begin{aligned} e \quad \psi(a + M_n^{k+1}A) &= \psi(\sum m_j a_j + M_n^{k+1}A) = \sum m_j a_j + (M_n^{k+1}A + M_p.A) = \\ &= M_n^{k+1}A + M_p.A \end{aligned}$$

$$\text{Donde } M_p \cdot \frac{A}{M_n^{k+1}A} \subset \text{Ker } \psi$$

$$\text{Daí, concluimos que } \text{Ker } \psi = M_p \cdot \frac{A}{M_n^{k+1}A}$$

Agora, temos $B \approx C$ e portanto

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_n^{k+1}A + M_p.A} \leq k \quad \text{o que acarreta, pelo corolário}$$

5 que

$$M_n^k A \subset M_p.A + M_n^{k+1}A = M_p.A + M_n(M_n^k A)$$

Sendo A ξ_n - módulo finitamente gerado, temos que $M_n^k A$ é ξ_n - módulo finitamente gerado.

Pelo corolário 1, temos $M_n^k A \subset M_p.A$ e portanto $M_n^{k+1}A \subset M_p.A$

Como $M_n^{k+1}A \subset M_p.A$, temos

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_p.A} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_n^{k+1}A + M_p.A} \leq k$$

Portanto $\dim_{\mathbb{R}} \frac{A}{M_p.A} < \infty$ e temos pelo Teorema de Malgrange que A é ξ_p - módulo finitamente gerado.

Além disso, $a + M_p.A = a + (M_n^{k+1}A + M_p.A)$ e

$$a + M_n^{k+1}A = \left(\sum_{i=1}^k r_i e_i \right) + M_n^{k+1}A, \quad r_i \in \xi_p, \quad \text{logo,}$$

$$a - \sum_{i=1}^k r_i e_i \in M_n^{k+1}A \subset M_p.A$$

$$\begin{aligned} \text{Donde } a + M_p.A &= \sum_{i=1}^k r_i e_i + M_p.A = \sum_{i=1}^k r_i (e_i + M_p.A) = \\ &= \sum_{i=1}^k (r_i + M_p) \cdot (e_i + M_p.A) \end{aligned}$$

Temos portanto:

A é um ξ_p - módulo finitamente gerado e $e_1 + M_p.A, \dots, e_k + M_p.A$ geram $\frac{A}{M_p.A}$ como $\frac{\xi_p}{M_p} \cong \mathbb{R}$ - espaço vetorial.

Logo, pelo corolário 2, temos:

$e_1, \dots, e_k$ geram A como ξ_p - módulo.

1.16. Corolário 8: Se as projeções de $e_1, \dots, e_k$ geram

$\frac{A}{M_n^{k+1}A + M_p.A}$ como $\mathbb{R}$ - espaço vetorial, então, $e_1, \dots, e_k$

geram A como ξ_p - módulo.

Observações:

Como consequência deste corolário temos:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função par diferenciável, então, existe uma função diferenciável $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x) = g(x^2)$, nas vizinhanças de zero.

De fato:

Sejam $A = \xi_1$ e $h: \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ com $h(x) = x^2$.

Então, $\frac{\xi_1}{M_1^3 \xi_1 + M_1 \cdot \xi_1} = \frac{\xi_1}{\langle x^2 \rangle_{\xi_1}}$ é gerado por $1 + \langle x^2 \rangle$ e $x + \langle x^2 \rangle$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Assim, pelo corolário 8, existem germes $\bar{g}$ e $\bar{k}$ pertencentes a ξ_1 , tais que $\bar{f} = h^*(\bar{g}) \cdot 1 + h^*(\bar{k}) \cdot x$ onde $\bar{f}$ é o germe de f em o , e portanto $\bar{f}(x) = \bar{g}(x^2) + x \bar{k}(x^2)$

Sendo f par, segue que $\bar{k} \equiv 0$ e temos $f(x) = g(x^2)$ nas vizinhanças de zero com $\bar{g}$ um representante qualquer de g .

2. GERMES ESTÁVEIS

Vejamos alguns conceitos que necessitamos para definir germes estáveis.

2.1. Campo de vetores ao longo de um germe: Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe diferenciável C^∞ .

Um campo de vetores ao longo de f é um germe $c: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow T\mathbb{R}^p$ tal que $\pi \circ c = f$, onde $\pi: T\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ denota a primeira projeção.

Seja $\theta(f)$ o ξ_n - módulo consistindo de todos os

campos de vetores C^∞ ao longo de f .

Sejam $A = \theta(I_{\mathbb{R}^p})$ e $B = \theta(I_{\mathbb{R}^n})$ onde $I_{\mathbb{R}^p}$ e $I_{\mathbb{R}^n}$ denotam os germes das identidades $\mathbb{R}^p, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e $\mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^n, o$ respectivamente.

Por exemplo, A é o ξ_p - módulo consistindo de todos os germes em o de campos de vetores C^∞ sobre $\mathbb{R}^p$.

Seja $\psi: S_1 \rightarrow S_2$ um homomorfismo de anéis.

2.2. Definição: Sejam $\bar{A}$ um S_1 - módulo e $\bar{B}$ um S_2 - módulo. Uma aplicação $\alpha: \bar{A} \rightarrow \bar{B}$ será dita um **homomorfismo sobre ψ** se

$$\alpha(a_1 + a_2) = \alpha(a_1) + \alpha(a_2) \text{ e } \alpha(r a_1) = \psi(r) \alpha(a_1),$$

$$\forall a_1, a_2 \in \bar{A} \text{ e } r \in S_1$$

2.3. Definição: Por um **homomorfismo misto sobre ψ** , queremos dizer uma quintupla $(\alpha, \beta, \bar{A}, \bar{B}, C)$ onde $\bar{A}$ é um S_1 - módulo, $\bar{B}$ e C são S_2 - módulos, $\alpha: \bar{A} \rightarrow C$ é um homomorfismo sobre ψ e $\beta: \bar{B} \rightarrow C$ é um homomorfismo de S_2 - módulos. Tal homomorfismo misto será dito do tipo finito se $\bar{A}$ é finitamente gerado como um S_1 - módulo e C é finitamente gerado como um S_2 - módulo.

Seja $f \in \xi_{n,p}$. Denotaremos

$$Tf: (T\mathbb{R}^n, \pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}\{o\}) \longrightarrow (T\mathbb{R}^p, \pi_{\mathbb{R}^p}^{-1}\{o\}) \text{ o germe}$$

tangente de f , isto é, o germe em $\pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}\{o\}$ da aplicação

tangente de qualquer representante de f . (Aqui $\pi_{\mathbb{R}^n}: T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

e $\pi_{\mathbb{R}^n}: T\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ denotam as primeiras projeções).

O seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 (T\mathbb{R}^n, \pi_{\mathbb{R}^n}^{-1}\{0\}) & \xrightarrow{Tf} & (T\mathbb{R}^p, \pi_{\mathbb{R}^p}^{-1}\{0\}) \\
 \downarrow \pi_{\mathbb{R}^n} & & \downarrow \pi_{\mathbb{R}^p} \\
 (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, 0)
 \end{array}$$

Assim, para qualquer $\zeta \in B$, $Tf \circ \zeta \in \theta(f)$ e para qualquer $\eta \in A$, $\eta \circ f \in \theta(f)$.

Definimos $tf: B \rightarrow \theta(f)$, $\omega f: A \rightarrow \theta(f)$

por $tf(\zeta) = Tf \circ \zeta$ e $\omega f(\eta) = \eta \circ f$

Então tf é um homomorfismo de ξ_n -módulos e ωf é um homomorfismo sobre $f^*: \xi_p \rightarrow \xi_n$.

Assim $(\omega f, tf, A, B, \theta(f))$ é um homomorfismo misto sobre f^* .

2.4. Definição: Dizemos que f é infinitesimalmente estável ou simplesmente que f é estável se $\omega f(A) + tf(B) = \theta(f)$.

Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe diferenciável C^∞ . Temos que:

$$\begin{aligned}
 \theta(f) &= \{c: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{2p}, c \in C^\infty/\pi \text{ o } c = f\} = \\
 &= \{(f, w), w: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, w \in C^\infty\} = \\
 &= \{(f, w_1, \dots, w_p)/w_i: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, w_i \in \xi_n\}
 \end{aligned}$$

Assim $\theta(f) \simeq \underbrace{\xi_n \times \xi_n \times \dots \times \xi_n}_{p\text{-vézes}}$ naturalmente co-

mo ξ_n -módulos.

Em particular, temos:

$$A = \theta(I_{\mathbb{R}^p}) \simeq \underbrace{\xi_p \times \dots \times \xi_p}_{p\text{-vézes}} \quad e$$

$$B = \theta(I_{\mathbb{R}^n}) \approx \underbrace{\xi_n \times \dots \times \xi_n}_{n\text{-vezes}}$$

Logo, f é estável, se para todo $\tau \in \theta(f)$, existirem $\zeta \in \theta(I_{\mathbb{R}^n})$ e $\eta \in \theta(I_{\mathbb{R}^p})$ tais que $\tau = t f(\zeta) + \eta \circ f$

Denotando

$$\tau = \sum_{i=1}^p \tau_i \frac{\partial}{\partial y_i} \circ f, \quad \tau_i \in \xi_n$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi_i \in \xi_n$$

$$\eta = \sum_{i=1}^p \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \eta_i \in \xi_p$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$$

Teremos matricialmente

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \circ f \\ \eta_2 \circ f \\ \vdots \\ \eta_p \circ f \end{bmatrix}$$

ou

$$(**) \{ \tau_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \zeta_j + \eta_i \circ f, \quad i = 1, 2, \dots, p \}$$

Exemplos: 1. Seja $f: \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$

(i) Se $f(x) = x$, temos que f é estável, pois $tf(B) = \{tf(\zeta) : \zeta \in B\}$

$$B = \theta(I_{\mathbb{R}}) \approx \xi_1$$

$$tf(\zeta)(x) = f'(x) \cdot \zeta(x) = \zeta(x),$$

$$\text{Portanto } tf(B) = \theta(f)$$

(ii) Se $f(x) = x^2$ temos que f é estável, pois

$$wf(A) = \{\eta \circ f, \eta \in \xi_1\} \supset \mathbb{R}$$

$$tf(B) = \{tf(\zeta), \zeta \in \xi_1\} = M_1$$

$$\text{Portanto, } wf(A) + tf(B) = \theta(f)$$

(iii) Se $f(x) = x^3$ temos que f não é estável, pois $wf(A) = \{\eta \circ f, \eta \in \xi_1\}$

$$tf(B) = \{tf(\zeta), \zeta \in \xi_1\} = M_1^2$$

Logo, temos que $x \notin wf(A) + tf(B)$ donde $wf(A) + tf(B) \neq \theta(f)$.

2. Seja $f: \mathbb{R}^2_{,0} \rightarrow \mathbb{R}^2_{,0}$

(i) Se $f(x,y) = (x,y)$ temos que f é estável pois $tf(B) = \{tf(\zeta), \zeta \in \xi_2 \times \xi_2\} = \xi_2 \times \xi_2 \approx \theta(f)$

$$\text{Portanto } wf(A) + tf(B) = \theta(f)$$

(ii) Se $f(x,y) = (x,y^2)$ temos que f é estável, (dobra).

Para tal, dados w_1 e w_2 em ξ_2 , existem ζ_1, ζ_2, η_1 e η_2 em ξ_2 , tais que

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \circ f \\ \eta_2 \circ f \end{bmatrix}, \text{ isto é}$$

$$\begin{cases} w_1 = \zeta_1 + \eta_1 \circ f \\ w_2 = 2y \zeta_2 + \eta_2 \circ f \end{cases}$$

Para a primeira equação, basta tomar $\zeta_1 = w_1$ e $\eta_1 = 0$.

Para a segunda, vamos usar o corolário 8 (1.16).

Tomando $A = \xi_2$, temos que $\frac{\xi_2}{M_2^3 \xi_2 + M_2 \cdot \xi_2} = \frac{\xi_2}{\langle x, y^2 \rangle_{\xi_2}}$ é gerado por $1 + \langle x, y^2 \rangle$ e $y + \langle x, y^2 \rangle$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Logo, existem α_1 e α_2 em ξ_2 tais que, $w_2(x, y) = (f^* \alpha_1)(x, y) + (f^* \alpha_2)(x, y) \cdot y = \alpha_1(x, y^2) + y \alpha_2(x, y^2)$

Portanto, para que a segunda equação se verifique, basta tomar $\zeta_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 \circ f$ e $\eta_2 = \alpha_1$.

2.5. Definição: Dizemos que **(**)** (ver página 20) admitem soluções até ordem k , se

$$\{\tau_i = (\sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \zeta_j + \eta_i \circ f) \bmod M_n^{k+1}, \quad i = 1, \dots, n\}$$

2.6. Teorema 1: Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$. Então f é estável $\iff$ **(**)** admitem soluções até a ordem p .

Prova:

$(\Rightarrow)$ imediata

$(\Leftarrow)$ Temos que $\theta(f) = \underbrace{\xi_n \times \dots \times \xi_n}_{p\text{-vezes}}$ é um

ξ_n - módulo finitamente gerado por $\frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f$.

Seja $L = \{tf(\zeta)/\zeta \in \theta(I_{\mathbb{R}^n})\}$

onde $\theta(I_{\mathbb{R}^n}) = \underbrace{\xi_n \times \dots \times \xi_n}_{n\text{-vezes}}$

L é um submódulo de $\theta(f)$ e assim $A = \frac{\theta(f)}{L}$ é um

ξ_n - módulo finitamente gerado.

Via f^* podemos ver A como um ξ_p - módulo.

Seja e_i a projeção de $\frac{\partial}{\partial y_i}$ o f em A .

$$\theta(f) \xrightarrow{\pi} \frac{\theta(f)}{L} = A$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \right) + L = e_i$$

Temos que: f é estável $\iff e_1, \dots, e_p$ geram A como ξ_p - módulo.

De fato:

($\implies$) Seja $w + L \in A$. Como f é estável $w =$

$$= tf(\zeta) + \eta \circ f, \quad \eta = \sum_{i=1}^p \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i} \implies w + L =$$

$$= \eta \circ f + L = \sum_{i=1}^p (\eta_i \circ f) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \right) + L =$$

$$= \sum_{i=1}^p (f^* \eta_i) e_i.$$

($\impliedby$) Seja $w \in \theta(f)$. Temos que $w + L \in A$ e por hipótese, existe η_i tal que $w + L = \sum_{i=1}^p (f^* (\eta_i)) e_i =$

$$= \sum_{i=1}^p (\eta_i \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \right) + L = \eta \circ f + L$$

onde $\eta = \sum_{i=1}^p \eta_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$

Portanto, $w + L = \eta \circ f + L \implies (w - \eta \circ f) \in L \implies$

$\implies$ Existe ζ tal que $(w - \eta \circ f) = tf(\zeta).$

Assim $w = tf(\zeta) + \eta \circ f$ e f é estável.

Agora aplicando o Teorema 2(1.15) vemos que f é

estável $\iff$ o módulo $\frac{A}{M_n^{p+1}A}$ é gerado por $e_1 + M_n^{p+1}A, \dots$

..., $ep + M_n^{p+1}A$ como ξ_p - módulo.

Desta última afirmação concluímos que se as equações (**) podem ser resolvidas até ordem p , então ε é estável.

De fato:

Seja $W \in (f)$. Temos:

$$(w + L) + M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = [(tf(\zeta) + \eta \circ f + g) + L] + M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} \quad \text{onde}$$

$$g \in M_n^{p+1} \theta(f) \text{ e portanto } g + L \in M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L}. \text{ Assim } (w + L) +$$

$$+ M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = [(tf(\zeta) + \eta \circ f) + L] + M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = (\eta \circ f + L) +$$

$$+ M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = \left(\sum_{i=1}^p (f * \eta_i) \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \circ f \right) + L \right) + M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = \left(\sum_{i=1}^p (f * \eta_i) e_i \right) +$$

$$+ M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L} = \sum (f * \eta_i) (e_i + M_n^{p+1} \frac{\theta(f)}{L}) \text{ e portanto } f \text{ é estável}$$

Exemplos: 1. Seja $f: \mathbb{R}^2, o \rightarrow \mathbb{R}^2, o$ (dobra)

$$(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2) = (x_1, x_2^2)$$

Mostremos novamente que f é estável, agora usando o Teorema 1.

Para quaisquer $\tau_1, \tau_2 \in \xi_2$, podemos escrever

$$\begin{cases} \tau_1 = (\zeta_1 + \eta_1 \circ f) \bmod M_2^3 \\ \tau_2 = (2x_2 \zeta_2 + \eta_2 \circ f) \bmod M_2^3 \end{cases} \quad \text{onde,}$$

sendo $\tau_2 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + o(3)$, podemos

tomar $\zeta_1 = \tau_1$, $\eta_1 = 0$ e $2x_2 \zeta_2 = 2x_2 \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_{12}}{2} x_1 + \frac{a_{22}}{2} x_2 \right)$

e portanto $\zeta_2 = \frac{a_2}{2} + \frac{a_{12}}{2} x_1 + \frac{a_{22}}{2} x_2$ e assim $\eta_2 = a_0 + a_1 y_1 +$

$+ a_{11} y_1^2.$

2. Seja $f: \mathbb{R}^2, o \rightarrow \mathbb{R}^2, o$ (cúspide)

$$(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2) = (x_1, x_1 x_2 - x_2^3)$$

Temos que f é estável, pois para quaisquer τ_1 , $\tau_2 \in \xi_2$, podemos escrever

$$\begin{cases} \tau_1 = (\zeta_1 + \eta_1 \circ f) \bmod M_2^3 \\ \tau_2 = [x_2 \zeta_1 + (x_1 - 3x_2^2) \zeta_2 + \eta_2 \circ f] \bmod M_2^3 \end{cases} \text{ onde,}$$

sendo

$$\begin{cases} \tau_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + o(3) \\ \tau_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2 + o(3), \end{cases} \text{ e}$$

podemos tomar

$$\begin{cases} \zeta_1 = b_2 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \\ \eta_1 = (a_0 - b_2) + a_1 y_1 \\ \zeta_2 = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \frac{a_2 - b_{22}}{3} \\ \eta_2 = b_0 + (b_1 - c) y_1 \quad \text{com } c = \frac{a_2 - b_{22}}{3} \end{cases}$$

Uma Outra Caracterização de Estabilidade Infinitesimal

2.7. Definição: Seja $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e $\psi \in \xi_n$

(i) f satisfaz a condição (Z) para ψ se existem matrizes $H(n \times p)$ de germes de ξ_n e $K(p \times p)$ de germes de ξ_p , tais que

$$\psi \cdot I_p = t f H + K \circ f$$

(ii) f satisfaz a condição (Z) se f satisfaz a

condição (Z) para todo $\psi \in \xi_n$.

2.8. **Lema 1:** Seja $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e sejam $\psi_1, \psi_2 \in \xi_n$. Suponhamos que f satisfaz a condição (Z) para ψ_1 e ψ_2 .

Então, f satisfaz a condição (Z) para $\psi_1 + \psi_2$.

Prova:

$$\text{Temos } \psi_1 I_p = \text{tf } H_1 + K_1 \circ f \text{ e}$$

$$\psi_2 I_p = \text{tf } H_2 + K_2 \circ f$$

$$\text{Portanto } (\psi_1 + \psi_2) I_p = \text{tf}(H_1 + H_2) + (K_1 + K_2) \circ f.$$

2.9. **Lema 2:** Seja $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e sejam $\psi_1, \psi_2 \in \xi_n$. Suponhamos que f satisfaz a condição (Z) para ψ_1 e ψ_2 .

Então, f satisfaz a condição (Z) para $\psi_1 \cdot \psi_2$.

Prova:

$$\text{Temos } \psi_1 I_p = \text{tf } H_1 + K_1 \circ f \text{ e}$$

$$\psi_2 I_p = \text{tf } H_2 + K_2 \circ f$$

$$\text{Portanto } \text{tf} [\psi_1 H_2 + H_1 (K_2 \circ f)] + (K_1 K_2) \circ f =$$

$$= \text{tf } \psi_1 H_2 + \text{tf } H_1 (K_2 \circ f) + (K_1 \circ f) \cdot (K_2 \circ f) =$$

$$= \psi_1 \text{tf } H_2 + (\text{tf } H_1) (K_2 \circ f) + (\psi_1 I_p - \text{tf } H_1) \cdot (K_2 \circ f)$$

$$= \psi_1 (\text{tf } H_2 + K_2 \circ f) + \text{tf } H_1 (K_2 \circ f) - \text{tf } H_1 (K_2 \circ f)$$

$$= \psi_1 \cdot \psi_2 I_p$$

$$\text{Assim } \psi_1 \psi_2 I_p = \text{tf } H + K \circ f \text{ onde}$$

$$H = \psi_1 \psi_2 + H_1 (K_2 \circ f) \text{ e } K = K_1 \cdot K_2$$

2.10. Teorema 2: Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$.

f é estável $\iff f$ satisfaz a condição (Z).

Prova:

($\implies$) Seja $\psi \in \xi_n$. Como f é estável temos:

$$\begin{bmatrix} \psi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} \zeta_{11} \\ \zeta_{21} \\ \vdots \\ \zeta_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{11} \circ f \\ \eta_{21} \circ f \\ \vdots \\ \eta_{p1} \circ f \end{bmatrix}$$

.....

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \psi \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} \zeta_{1p} \\ \zeta_{2p} \\ \vdots \\ \zeta_{np} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{1p} \circ f \\ \eta_{2p} \circ f \\ \vdots \\ \eta_{pp} \circ f \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\psi \cdot I_p = tf H + K \circ f, \text{ onde } H = (\zeta_{ij})_{n \times p} \text{ e } K = (\eta_{rs})_{p \times p}$$

($\impliedby$) Temos que para todo ψ de ξ_n , existem H, K tais que $\psi \cdot I_p = tf H + K \circ f$ e vamos provar que dados $\tau_1, \dots, \tau_p$ existem $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ e $\eta_1, \dots, \eta_p$ tais que

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_p \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \circ f \\ \vdots \\ \eta_p \circ f \end{bmatrix}$$

Por hipótese, temos que:

$$\begin{bmatrix} \tau_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_i \end{bmatrix} = \text{tf } H_i + K_i \circ f, \text{ com}$$

$H_i = (h_1^i \dots h_p^i)_{n \times p}$ e $K_i = (k_{rs}^i)_{p \times p}$ onde $i = 1, \dots, p$ e

h_j^i é a coluna j da matriz H_i , $j = 1, \dots, p$.

$$\text{Seja ainda } \text{tf} = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}, \text{ onde } v_i \text{ é a linha } i \text{ da}$$

matriz jacobiana de f .

$$\text{Assim, adotando a notação } \delta_i = \begin{cases} \tau_i, & j = k, \\ 0, & j \neq k \end{cases} \text{ te-}$$

mos $\delta_i = [v_j, h_k^i] + (k_{jk}^i \circ f)$, $i = 1, \dots, p$;

$j = 1, \dots, p$ e $k = 1, \dots, p$ onde $[v, w]$ representa o produto interno usual de v por w .

Nossa tese é: Dados $\tau_1, \dots, \tau_p$, existem $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ e $\eta_1, \dots, \eta_p$ tais que

$$\{\tau_i = [v_i, u] + \eta_i \circ f, \quad u = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Para isto basta tomar:

[illegible]

De fato:

$$\begin{aligned}
& [v_i, h_1^1 + h_2^2 + \dots + h_p^p] + k_{i1}^1 \circ f + k_{i2}^2 \circ f + \dots + k_{ip}^p \circ f = \\
& = [v_i, h_1^1] + k_{i1}^1 \circ f + [v_i, h_2^2] + k_{i2}^2 \circ f + \dots + [v_i, h_{i-1}^{i-1}] + k_{i \ i-1}^{i-1} \circ f + \\
& + [v_i, h_i^i] + k_{ii}^i \circ f + [v_i, h_{i+1}^{i+1}] + k_{i \ i+1}^{i+1} \circ f + \dots + [v_i, h_p^p] + k_{ip}^p \circ f = \\
& = \tau_i
\end{aligned}$$

2.11. Corolário 1: Seja $f : \mathbb{R}^n_{,0} \rightarrow \mathbb{R}^p_{,0}$.

As equações (**) se verificam até ordem $k \iff$ a condição (Z) se verifica até ordem k .

Prova:

($\Rightarrow$) Seja $\psi \in \xi_n$. Por hipótese temos

$$\ell \rightarrow \psi \begin{bmatrix} \circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \circ \\ \circ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{\ell 1} \\ \zeta_{\ell 2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta_{\ell n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_{\ell 1} \circ f \\ \eta_{\ell 2} \circ f \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_{\ell p} \circ f \end{bmatrix} \mod M_n^{k+1}$$

Portanto

$$\psi \cdot I_p = \text{tf} \cdot H + K \circ f \pmod{M_n^{k+1}} \text{ onde } H = (\zeta_{ij}) \text{ e } K = (\eta_{rs}).$$

($\Leftarrow$) Temos que para todo ψ em ξ_n , existem H , k tais que $\psi \cdot I_p = \text{tf} H + k \circ f \pmod{M_n^{k+1}}$ e queremos provar que dados $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, existem $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ e $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ tais que

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_p \end{bmatrix} = \text{tf} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \circ f \\ \eta_2 \circ f \\ \vdots \\ \eta_p \circ f \end{bmatrix} \pmod{M_n^{k+1}}$$

Da hipótese temos que

$$\begin{bmatrix} \tau_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tau_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tau_i \end{bmatrix} = \text{tf} H_i + K_i \circ f \pmod{M_n^{k+1}}, \text{ com}$$

$$H_i = (h_1^i \ h_2^i \ \dots \ h_p^i)_{n \times p} \text{ e } K_i = (k_{rs}^i)_{p \times p}, \quad i = 1,$$

$\dots, p$ e h_j^i sendo a coluna j da matriz H_i , $j = 1, \dots, p$.

p .

$$\text{Seja ainda } \text{tf} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}, \text{ onde } v_i \text{ é a linha } i \text{ da}$$

matriz jacobiana de f .

Assim, adotando a notação $\delta_i = \begin{cases} \tau_i \bmod M_n^{k+1}, & j = k \\ 0 \bmod M_n^{k+1}, & j \neq k \end{cases}$

$$\delta_i = [v_j, h_k^i] + k_{jk}^i \circ f \pmod{M_n^{k+1}} \quad i = 1, \dots, p; j = 1, \dots,$$

p e $k = 1, \dots, p$ onde $[v, w]$ representa o produto interno usual de v por w .

Temos que provar que cada τ_i , $i = 1, \dots, p$ é tal que $\tau_i = [v_i, u] + \eta_i \pmod{M_n^{k+1}}$ com

$$u = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_n \end{bmatrix}$$

Para isto basta tomarmos

$$\left\{ \begin{array}{l} u = h_1^1 + h_2^2 + \dots + h_p^p \\ n_1 = k_{11}^1 + k_{12}^2 + \dots + k_{1p}^p \\ n_2 = k_{21}^1 + k_{22}^2 + \dots + k_{2p}^p \\ \vdots \\ n_p = k_{p1}^1 + k_{p2}^2 + \dots + k_{pp}^p \end{array} \right.$$

De fato; seja $\bar{\tau} = \{\theta \in \xi_n / \theta = \tau \bmod M_n^{k+1}\}$

Temos $\overline{[v_j, u] + \eta_j \circ f} =$

$$= [v_1^1, h_1^1 + h_2^2 + \dots + h_p^p] + k_{i1}^1 \circ f + k_{i2}^2 \circ f + \dots + k_{ip}^p \circ f$$

$$= [v_i, h_i^1] + k_{i1}^1 \circ f + \dots + [v_i, h_{i-1}^{i-1}] + k_{i-1}^{i-1} \circ f +$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{[v_i, h_i^i] + k_{ii}^i \circ f + [v_i, h_{i+1}^{i+1}] + k_{i i+1}^{i+1} \circ f + \dots + [v_i, h_p^p] +} \\
& + \overline{k_{ip}^p \circ f} = \overline{[v_i, h_1^1] + k_{i1}^1 \circ f + \dots + [v_i, h_{i-1}^{i-1}] + k_{i i-1}^{i-1} \circ f} + \\
& + \overline{[v_i, h_i^i] + k_{ii}^i \circ f + [v_i, h_{i+1}^{i+1}] + k_{i i+1}^{i+1} \circ f + \dots +} \\
& + \overline{[v_i, h_p^p] + k_{ip}^p \circ f} = \bar{\tau}_i
\end{aligned}$$

2.12. Corolário 2: Seja $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$.

f é estável $\iff$ a condição (Z) se verifica até a ordem p .

Prova:

Temos (pelo Teorema 1) que f é estável $\iff$ (**) admitem soluções até a ordem $p \iff$ (pelo Corolário 1) a condição (Z) se verifica até a ordem p .

2.13. Teorema 3: Seja $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$.

As equações (**) se verificam até a ordem k

$$\iff \text{as equações} \quad \ell \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \tau f(\zeta^{i,\ell}) + \eta^{i,\ell} \circ f,$$

$i = 1, \dots, n; \ell = 1, \dots, p$ se verificam até ordem k ,

$$\zeta^{i,\ell} = \begin{bmatrix} \zeta_1^{i,\ell} \\ \vdots \\ \zeta_n^{i,\ell} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \eta^{i,\ell} = \begin{bmatrix} \eta_1^{i,\ell} \\ \vdots \\ \eta_p^{i,\ell} \end{bmatrix}$$

Prova:

($\Rightarrow$) Imediato

($\Leftarrow$) Temos que mostrar que as equações (**) se verificam até ordem k e para isto, pelo corolário 1, basta mostrar que f satisfaz a condição (Z) até ordem k .

Em primeiro lugar, mostramos que f satisfaz a condição (Z) até ordem k para $\psi = a x_i$.

Temos, por hipótese que

$$\begin{bmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t f (\zeta^{i,1}) + \eta^{i,1} \circ f, \text{ mod } M_n^{k+1} \theta(f)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t f (\zeta^{i,2}) + \eta^{i,2} \circ f, \text{ mod } M_n^{k+1} \theta(f)$$

.....

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i \end{bmatrix} = t f (\zeta^{i,p}) + \eta^{i,p} \circ f, \text{ Mod } M_n^{k+1} \theta(f)$$

Tomando $H = (a \zeta^{i,1}, \dots, a \zeta^{i,p})$ e

$K = (a \eta^{i,1}, \dots, a \eta^{i,p})$ temos

$$a x_i I_p = t f H + k \circ f \text{ mod } M_n^{k+1} \theta(f)$$

Agora, pelo lema 2, temos que f satisfaz a condição (Z) até ordem k para $\psi = a x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ e daí, pelo lema 1, que f satisfaz a condição (Z) até ordem k para todo ψ polinomial.

Portanto f satisfaz a condição (Z) para todo germe em ξ_n , até ordem k .

2.14. Corolário 3: Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$.

$$f \text{ é estável} \iff \text{as equações} \quad \ell \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$= t f(\zeta^{i, \ell}) + \eta^{i, \ell} \circ f, \quad i = 1, \dots, n \text{ e } \ell = 1, \dots, p$ se verificam até ordem p .

Prova:

Temos (pelo Teorema 1) que f é estável $\iff$ (**) admitem soluções até a ordem $p \iff$ (pelo Teorema 3) as equações

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = t f(\zeta^{i, \ell}) + \eta^{i, \ell} \circ f, \quad i = 1, \dots, n; \quad \ell = 1, \dots, p$$

p se verificam até ordem p .

Exemplos: 1. Seja $f : \mathbb{R}^2, o \rightarrow \mathbb{R}^2, o$ (dobra)

$$(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2^2)$$

Mostremos novamente que f é estável.

$$\text{Sejam} \begin{cases} \tau_1 = (\zeta_1 + \eta_1 \circ f) \bmod M_2^3 \\ \tau_2 = (2x_2\zeta_2 + \eta_2 \circ f) \bmod M_2^3 \end{cases}$$

Aplicando o corolário 3,

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{tomando } \begin{cases} \zeta_1 = x_1, \eta_1 = 0 \\ \zeta_2 = 0, \eta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \text{tomando } \begin{cases} \zeta_1 = 0, \eta_1 = 0 \\ \zeta_2 = 0, \eta_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{tomando } \begin{cases} \tau_1 = 0, \eta_1 = 0 \\ \tau_2 = \frac{1}{2}, \eta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{tomando } \begin{cases} \zeta_1 = x_2, \eta_1 = 0 \\ \zeta_2 = 0, \eta_2 = 0 \end{cases}$$

teremos o resultado.

2. Seja $f : \mathbb{R}^{n,0} \rightarrow \mathbb{R}^{n,0}$ dada por $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, x_1 x_n + x_2 x_n^2 + \dots + x_{n-1} x_n^{n-1} + x_n^{n+1})$

Mostremos que f é estável.

Sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 = \zeta_1 + \eta_1 \circ f \\ \tau_2 = \zeta_2 + \eta_2 \circ f \\ \vdots \\ \tau_{n-1} = \zeta_{n-1} + \eta_{n-1} \circ f \\ \tau_n = x_n \zeta_1 + x_n^2 \zeta_2 + \dots + x_n^{n-1} \zeta_{n-1} + (x_1 + \end{array} \right.$$

$$+ 2x_2 x_n + \dots + (n-1) x_{n-1} x_n^{n-2} + (n+1) x_n^n) \zeta_n + \eta_n \circ f$$

Aplicando o corolário 3,

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_i^{\leftarrow \ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \eta_\ell = y_i, & \ell = 1, \dots, n \text{ e } i=1, \\ & \dots, n-1 \\ \eta_k = 0, & k \neq \ell \\ \zeta_j = 0, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n^{\leftarrow \ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_\ell = x_n, & \ell = 1, \dots, n-2 \\ \zeta_{\ell+1} = -1 \\ \eta_{\ell+1} = 1 \\ \zeta_j = 0, & j \neq \ell \text{ e } j \neq \ell + 1 \\ \eta_i = 0, & i \neq \ell + 1 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \\ 0 \end{bmatrix} \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_i = \frac{i+1}{n+1} x_{i+1}, & i=1, \dots, n-2 \\ \eta_i = -\frac{i+1}{n+1} y_{i+1}, & i=1, \dots, n-2 \\ \zeta_{n-1} = x_n \\ \zeta_n = -\frac{1}{n+1} \\ \eta_{n-1} = 0 \\ \eta_n = \frac{1}{n+1} y_1 \end{cases}$$

$$\text{e para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x_n \end{bmatrix} \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = 1 \\ \zeta_i = 0, i = 2, \dots, n \\ \eta_1 = -1 \\ \eta_j = 0, j = 2, \dots, n \end{cases}$$

teremos o resultado.

3. Seja $f : \mathbb{R}^{2,0} \rightarrow \mathbb{R}^3,0$ dada por

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1 x_2, x_2^2)$$

Mostremos que f é estável.

$$\text{Sejam } \begin{cases} \tau_1 = \zeta_1 + \eta_1 \circ f \\ \tau_2 = x_2 \zeta_1 + x_1 \zeta_2 + \eta_2 \circ f \\ \tau_3 = 2x_2 \zeta_2 + \eta_3 \circ f \end{cases}$$

Aplicando o corolário 3,

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \\ \eta_1 = y_1 \\ \eta_2 = \eta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = x_2 \\ \zeta_2 = 0 \\ \eta_1 = \eta_3 = 0 \\ \eta_2 = -y_3 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \\ \eta_1 = \eta_3 = 0 \\ \eta_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = 1 \\ \zeta_2 = 0 \\ \eta_1 = -1 \\ \eta_2 = \eta_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_2 = 0 \\ \eta_1 = \eta_2 = 0 \\ \eta_3 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ tomando } \begin{cases} \zeta_1 = 0 \\ \zeta_2 = \frac{1}{2} \\ \eta_1 = \eta_3 = 0 \\ \eta_2 = -\frac{1}{2} y_1 \end{cases}$$

teremos o resultado.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ dado por

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2^3)$$

Mostremos que f não é estável.

$$\text{Sejam } \begin{cases} \tau_1 = \zeta_1 + \eta_1 \circ f \\ \tau_2 = 3x_2^2 \zeta_2 + \eta_2 \circ f \end{cases}$$

para $\tau_1 = 0$ e $\tau_2 = x_2$, segue que não existem $\zeta_2 \in \xi_2$ e $\eta_2 \in \xi_2$ tais que:

$$x_2 = 3x_2^2 \zeta_2 + \eta_2 (x_1, x_2^3).$$

Logo, temos o resultado.

3. ÁLGEBRA ASSOCIADA

A álgebra associada ao germe $f: \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ é

$$\text{definida por } Q(f) = \frac{\xi_n}{f^*(M_p)\xi_n} = \frac{\xi_n}{\langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n}}$$

Usaremos a notação $\delta(f)$ para designar a dimensão de $Q(f)$ como espaço vetorial real, isto é, $\delta(f) = \dim_{\mathbb{R}} Q(f)$.

Observações:

Chamaremos $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ ao conjunto das séries formais nas indeterminadas $x_1, \dots, x_k$ e coeficientes em $\mathbb{R}$ e usaremos com frequência a notação $(\underline{x}_k) = (x_1, \dots, x_k)$.

3.1. **Lema 1:** Seja $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n}$ tal que $I \supset M_n^k$ e

$$\hat{I} = \langle j^k f_1(o), \dots, j^k f_p(o) \rangle_{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}. \text{ Então, } \frac{\xi_n}{I} \approx \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}{\hat{I}}$$

como $\mathbb{R}$ -álgebras.

Prova:

Provemos em primeiro lugar que $\hat{I} \supset \hat{M}_n^k$, onde $\hat{M}_n^k$ é o ideal maximal em $\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}$.

Seja H_k o conjunto das séries homogêneas de grau k e seja $\phi \in H_k \subset M_n^k \subset I$. Assim $\phi = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p$ e

$$\phi = j^k \phi(o) = j^k (\sum j^k \alpha_i(o) j^k f_i(o)) = \sum j^k \alpha_i(o) j^k f_i(o) + \beta$$

onde $\sum j^k \alpha_i(o) j^k f_i(o) \in \hat{I}$ e $\beta \in \hat{M}_n^{k+1}$

Portanto

$$H_k \subset \hat{I} + \hat{M}_n^{k+1} \implies \hat{M}_n^k \subset \hat{I} + \hat{M}_n^{k+1} \implies$$

$$\implies \text{por Nakayama } \hat{M}_n^k \subset \hat{I}.$$

$$\begin{aligned} \text{Seja agora } \psi : \xi_n &\rightarrow \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}{\hat{I}} \\ g &\mapsto j^k g(o) + \hat{I} \end{aligned}$$

Passemos agora à prova de que ψ é um isomorfismo.

1. ψ é um homomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebra.

Sejam $g, h \in \xi_n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \psi(g + h) &= j^k(g + h)(o) + \hat{I} = (j^k g(o) + j^k h(o)) + \hat{I} = \\ &= (j^k g(o) + \hat{I}) + (j^k h(o) + \hat{I}) = \psi(g) + \psi(h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha g) &= j^k \alpha g(o) + \hat{I} = \alpha j^k g(o) + \hat{I} = \alpha(j^k g(o) + \hat{I}) = \\ &= \alpha \psi(g) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot h) &= j^k(g \cdot h)(o) + \hat{I} = j^k g(o) j^k h(o) + \hat{I} = \\ &= (j^k g(o) + \hat{I}) \cdot (j^k h(o) + \hat{I}) = \psi(g) \cdot \psi(h). \end{aligned}$$

2. ψ é sobrejetora

$$\text{Seja } \alpha + \hat{I} \in \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}{\hat{I}}. \quad \text{Logo } \alpha + \hat{I} = j^k \alpha(o) + \hat{I}$$

Tomemos $g = j^k \alpha(o)$ como germe em ξ_n

$$\psi(g) = j^k g(o) + \hat{I} = g + \hat{I} = j^k \alpha(o) + \hat{I} = \alpha + \hat{I}$$

3. $\text{Ker } \psi = I$.

Seja $g \in \text{Ker } \psi$. Temos que:

$$\psi(g) = \hat{I} \iff j^k g(o) \in \hat{I} \iff j^k g(o) = \sum_{i=1}^p \alpha_i j^k f_i(o)$$

$$\text{Portanto, } j^k g(o) = \sum_{i=1}^p j^k \alpha_i(o) j^k f_i(o) + \beta, \beta \in M_n^{k+1}$$

Temos que $g = j^k g(o) + \delta$, com $\delta \in M_n^{k+1}$ e portanto

$$g = \sum_{i=1}^p j^k \alpha_i(o) \cdot j^k f_i(o) + \beta + \delta.$$

$$\text{Tomando } j^k f_i(o) = f_i - (f_i - j^k f_i(o)),$$

$$\theta = \sum_{i=1}^p j^k \alpha_i(o) (f_i - j^k f_i(o)) \in M_n^{k+1} \text{ e } \mu = \beta + \delta - \theta,$$

temos $g = \sum j^k \alpha_i(o) f_i + \mu, \mu \in M_n^{k+1}$ e concluimos que $g \in I$

e $\text{Ker } \psi \subset I$.

Seja agora $g \in I$.

$\psi(g) = j^k(g) + \hat{I}$ e como $j^k(g) \in \hat{I}$, temos $\psi(g) = \hat{I}$ e concluimos que $I \subset \text{Ker } \psi$.

Assim, temos que $I = \text{Ker } \psi$.

$$\text{Podemos concluir agora que } \frac{\xi_n}{I} \approx \frac{\mathbb{R}\{x_n\}}{\hat{I}}$$

3.2. Definição: Seja $I \subset M_n$ um ideal. Chamamos **posto do ideal** I à dimensão real do espaço vetorial real $\frac{I + M_n^2}{M_n^2}$.

3.3. Lema 2: Seja $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ um ideal de ξ_n tal que $I \subset M_n$ e seu posto seja igual a r .

Então existe I' , ideal de ξ_{n-r} , tal que $\frac{\xi_n}{I} \approx \frac{\xi_{n-r}}{I'}$, isomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras com $I' \subset M_{n-r}^2$.

Prova:

Consideremos $f: \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ tal que $f = (f_1, \dots, f_p)$.

$$\text{Temos que } \dim_{\mathbb{R}} \frac{f^*(M_p) \cdot \xi_n + M_n^2}{M_n^2} = r \iff$$

$$\iff \dim_{\mathbb{R}} \frac{\langle f_1, \dots, f_p \rangle_{\xi_n} + M_n^2}{M_n^2} = r \iff$$

$$\iff \dim_{\mathbb{R}} \langle Lf_1, \dots, Lf_p \rangle_{\mathbb{R}} = r \text{ onde } Lf_i, (i = 1, \dots, p) \text{ é a parte linear de } f_i.$$

Suponha que $Lf_1, \dots, Lf_r$ são $\mathbb{R}$ -linearmente independentes. Então, existem $h_{r+1}, \dots, h_n$ lineares que completam uma base de $M(1 \times n, \mathbb{R})$ (= espaço das matrizes reais $1 \times n$).

Seja $\psi: \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{n,o}$ difeomorfismo tal que $\psi = (f_1, \dots, f_r, h_{r+1}, \dots, h_n)$.

Consideremos $\psi^*: \xi_n \rightarrow \xi_n$ isomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras induzido por ψ e sejam

$$(\psi^{-1})^* f_i = (\psi^*)^{-1} f_i = x_i, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$(\psi^{-1})^* h_{r+j} = (\psi^*)^{-1} h_{r+j} = x_{r+j}, \quad 1 \leq j \leq n - r$$

$$\text{Assim } (\psi^{-1})^* \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle x_1, \dots, x_r,$$

$$g_{r+1}(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n), \dots, g_p(0, \dots,$$

$$0, x_{r+1}, \dots, x_n) \rangle = J \text{ com } g_{r+1}, \dots, g_p \in M_{n-r}^2$$

$$\text{Portanto } \frac{\xi_n}{I} \simeq \frac{\xi_n}{J}, \text{ tomando para isto o isomorfis-$$

$$\text{mo } h \text{ tal que } h(\alpha + I) = (\psi^{-1})^*(\alpha) + J.$$

Agora, mostremos que $\frac{\xi_n}{J} \approx \frac{\xi_{n-r}}{I'}$ com $I' = \langle g_{r+1}, \dots, g_p \rangle$ onde $g_i = g_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)$, $i = r+1, \dots, p$.

$$\text{Seja } \rho : \xi_n \rightarrow \frac{\xi_{n-r}}{I'}$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) \mapsto \alpha(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) + I'$$

(i) Mostremos que ρ é sobre

Para todo $\beta(x_{r+1}, \dots, x_n) + I' \in \frac{\xi_{n-r}}{I'}$, tomemos o próprio $\beta(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) \in \xi_n$ e temos $\rho(\beta) = \beta + I'$.

(ii) Mostremos que $\text{Ker } \rho = J$.

Seja $\alpha \in \text{Ker } \rho$

$$\rho(\alpha) = I' \iff \alpha(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) \in I' \iff$$

$$\iff \alpha(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=r+1}^p \alpha_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) \cdot g_i(0, \dots, 0,$$

$$x_{r+1}, \dots, x_n)$$

Temos que:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^r x_j k_j(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{Portanto } \alpha(x_1, \dots, x_n) = \alpha(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots,$$

$$x_n) + \sum_{j=1}^r x_j k_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=r+1}^p \alpha_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots,$$

$$x_n) g_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^r x_j k_j(x_1, \dots, x_n) \quad e$$

portanto $\alpha \in J$ e $\text{Ker } \rho \subset J$.

Por outro lado, se $\alpha \in J$, temos:

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^r x_j k_j(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=r+1}^p \alpha_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots,$$

$x_n) \cdot g_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_n)$ e temos que

$$\rho(\alpha) = \sum_{i=r+1}^p \alpha_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots, x_r) g_i(0, \dots, 0, x_{r+1}, \dots,$$

$x_n)$ pertence a I' e $J \subset \text{Ker } \rho$.

$$\text{Logo, } J = \text{Ker } \rho \text{ e } \frac{\xi_n}{J} \approx \frac{\xi_{n-r}}{I'}.$$

Dado $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$, seja

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{a matriz}$$

Jacobiana de f , onde $f = (f_1, \dots, f_p)$.

Seja k o posto de $J(f)$ na origem.

3.4. Definição: Seja $d = n - k$. Nas condições acima diremos que f é do tipo Σ_d .

Exemplos: 1. $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$
 $(x, y) \mapsto (x, y^2)$

$$J(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \text{ e na origem } J(f)_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujo posto é 1. Temos $d = 2 - 1 = 1$ e assim f é do tipo Σ_1 .

3.5. **Proposição:** $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x_n\}}{I} < \infty \iff I$ é M_n -primário.

Prova:

($\Leftarrow$) I é M_n -primário $\implies$ existe k tal que $M_n^k \subset I$. Por-

tanto $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x_n\}}{I} \leq \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x_n\}}{M_n^k} < \infty$.

($\Rightarrow$) Suponha que $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x_n\}}{I} = r < \infty$.

Usando o mesmo raciocínio de (1.11) temos que existe k tal que $M_n^k \subset I$.

Portanto, se $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ é um germe com $\delta(f) < \infty$, então tem-se que $Q(f) \cong \frac{\mathbb{R}\{x_1, \dots, x_k\}}{I}$ (isomor-

fismo de $\mathbb{R}$ -álgebras) onde $K = n$ (posto de $J(f)$ na origem), f é do tipo Σ_k e I um ideal M_k -primário, $I \subset M_k^2$.

No caso de f ser estável com $n \leq p$, temos por Mather IV que $\delta(f) < \infty$ e portanto, $f^*M_p \xi_n$ é M_n -primário. (Observamos que se $n > p$, então, $\delta(f) = \infty$. Para isto ver [07].)

Temos ainda, devido a Mather, o importante resultado:

3.6. **Teorema:** Sejam $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ e $g : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ germes estáveis. Então, $Q(f) \cong Q(g)$ como $\mathbb{R}$ -álgebras se, e somente se, f e g são equivalentes.

Observações:

A estabilidade é fundamental no Teorema, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam $f, g : \mathbb{R}^2, o \rightarrow \mathbb{R}^2, o$ dados por $f(x, y) = (x, xy - y^3)$ que é estável (ver página 25) e $g(x, y) = (x, y^3)$ que é não estável (ver página 38).

Temos $Q(f) \approx Q(g)$ como $\mathbb{R}$ -álgebras e no entanto f e g não são equivalentes.

4. FORMA NORMAL PARA GERMES ESTÁVEIS

Em primeiro lugar vamos definir os conceitos de deformação e desdobramento de um germe.

4.1. Definição: Dado um germe $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$, uma **deformação** de f é um germe $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ tal que $F(\underline{x}, o) = f(\underline{x})$ e o correspondente desdobramento é o germe $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, o \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r, o$ dado por $G(\underline{x}, \underline{u}) = (F(\underline{x}, \underline{u}), \underline{u})$.

Vejamos agora como obter uma forma normal para germes estáveis.

4.2. Suponhamos que $A \approx \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_a\}}{\langle r_1, \dots, r_b \rangle}$ (como $\mathbb{R}$ -álgebras), onde $I = \langle r_1, \dots, r_b \rangle$ é um ideal M_a -primário e $\underline{e}$ é uma representação minimal para A no sentido que $I \subset M_a^2$ e $r_1, \dots, r_b$ é um conjunto minimal de geradores de I .

Seja $i(A) = b - a$.

Podemos escolher os geradores r_i como polinômios, conforme o Lema 3.1.

Para cada inteiro $c \geq i(A)$, podemos definir um número $\mu_c(A)$ como segue:

Tomamos $s = a + c$ e consideramos $(q_1, \dots, q_s)$

tal que $I = \langle q_1, \dots, q_s \rangle$. Isto é sempre possível, pois $s = a + c \geq a + i(A) = b$.

Formemos agora o $\mathbb{R}\{x_a\}$ -módulo $M_a^{(s)} = \underbrace{M_a \times \dots \times M_a}_{s\text{-vezes}}$.

Analogamente, consideremos $I^{(s)}$ e o submódulo L de $M_a^{(s)}$ gerado pelas s -uplas $(\frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial q_s}{\partial x_i})$, $i = 1, \dots, a$.

Então, o módulo quociente $V = \frac{M_a^{(s)}}{(I^{(s)} + L)}$ teria como um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, dimensão menor ou igual à dimensão do módulo quociente $\frac{M_a^{(s)}}{I^{(s)}} = (\frac{M_a}{I})^s$ que tem dimensão finita.

Seja $\ell = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Fazemos $\mu_c(A) = \ell + s$.

Seja $0 \leq n \leq p$ inteiros tais que $p - n = c \geq i(A)$ e $p \geq \mu_c(A)$. Então, podemos construir um germe estável $f : \mathbb{R}^{n,0} \rightarrow \mathbb{R}^{p,0}$ como segue:

Seja $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ representantes de uma base de V .

Então $v_j = (v_{j,1}, \dots, v_{j,s})$, $j = 1, \dots, \ell$ e f será dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_a, t_1, \dots, t_\ell, z_1, \dots, z_{n-a-\ell}) &= \\ &= (y_1, \dots, y_p) \end{aligned}$$

com

$$\begin{cases} y_i = q_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} t_j v_{ji}(x) & 1 \leq i \leq s \\ y_{s+j} = t_j & 1 \leq j \leq \ell \\ y_{\ell+s+k} = z_k & 1 \leq k \leq n - a - \ell \end{cases}$$

Observamos que tomando $p \geq \mu_{p-n}(A) = \ell + s = \ell + a + c = \ell + a + p - n$ então $n \geq \ell + a$ e $s + \ell + n - a - \ell = n - a + s = n - a + a + c = n + c = p$ e assim f está entre as dimensões estabelecidas.

Pelo resultado de Mather sobre estabilidade infinitesimal, este f é um germe estável em o . Tal f é uma forma normal para um germe estável.

Mather mostra ainda que se $f_1 : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ é um germe estável com $n \leq p$ e $A = Q(f_1)$, então $p - n \geq i(A)$, $p \geq \mu_{p-n}(A)$ e existe uma forma normal estável $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ com $Q(f) \cong A = Q(f_1)$.

Assim f e f_1 são equivalentes.

No caso de um germe $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ ($n \leq p$) com $\delta(f) < +\infty$, podemos repetir a construção acima para ξ_n e $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ para obter um germe estável $F(x, t) : \mathbb{R}^{n+m}, o \rightarrow \mathbb{R}^{p+m}, o$ tal que $F(x, 0) = (f(x), 0)$. Isto é usualmente chamado o desdobramento universal de f .

Exemplos: 1. $I = \langle x^2 \rangle$, $A = \frac{\mathbb{R}\{x\}}{\langle x^2 \rangle}$

$$a = 1, b = 1 \Rightarrow i(A) = b - a = 1 - 1 = 0$$

Tomando $c = 2 \geq i(A)$, vamos definir $\mu_2(A)$:

$$s = a + c = 1 + 2 = 3 \text{ e seja}$$

$$I = \langle q_1, q_2, q_3 \rangle = \langle x^2, x^2 + x^3, x^4 \rangle$$

$$L = \langle (2x, 2x + 3x^2, 4x^3) \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{M_1^{(3)}}{I^{(3)} + L} &= V = \frac{\langle (x, 0, 0), (0, x, 0), (0, 0, x) \rangle}{\langle (x^2, 0, 0), (0, x^2, 0), (0, 0, x^2), (2x, 2x + 3x^2, 4x^3) \rangle} = \\ &= \frac{\langle (x, 0, 0), (0, x, 0), (0, 0, x) \rangle}{\langle (x^2, 0, 0), (0, x^2, 0), (0, 0, x^2), (2x, 2x, 0) \rangle} \end{aligned}$$

Seja (α, β, γ) um representante de uma classe em V .

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (a_1x + x^2h_1(x), b_1x + x^2h_2(x), c_1(x) + x^2h_3(x)) =$$

$$= (a_1x, b_1x, c_1x) + h_1(x^2, 0, 0) + h_2(0, x^2, 0) + h_3(0, 0, x^2) =$$

$$(a_1x, b_1x, c_1x) \text{ e } (a_1x, b_1x, c_1x) = (a_1x, a_1x, 0) + (0, (b_1 - a_1)x,$$

$$c_1x) \sim (0, (b_1 - a_1)x, c_1x).$$

Portanto, qualquer classe de V pode ser representada por um elemento do tipo $(0, ax, bx)$ e V tem dimensão $\ell = 2$ com representantes de base $(0, x, 0)$ e $(0, 0, x)$.

$$\text{Para } v_1 = (0, x, 0) \text{ temos } v_{11} = 0, v_{12} = x \text{ e } v_{13} = 0$$

$$\text{Para } v_2 = (0, 0, x) \text{ temos } v_{21} = 0, v_{22} = 0 \text{ e } v_{23} = x$$

$$\mu_2(A) = \ell + s = 2 + 3 = 5$$

Sejam $0 \leq n \leq p$ inteiros tais que $p - n = 2 \geq i(A)$ e $p \geq \mu_2(A) = 5$. Escolhemos $p = 5$ e $n = 3$.

Portanto $f : \mathbb{R}^3_{,0} \rightarrow \mathbb{R}^5_{,0}$ é dado por $f(x, t_1, t_2) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ com

$$\begin{cases} y_i = q_i(x) + \sum_{j=1}^2 t_j v_{ji}(x), & 1 \leq i \leq 3 \\ y_{3+j} = t_j, & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{Assim } y_1 = x^2, \quad y_2 = x^2 + x^3 + t_1x, \quad y_3 = x^4 + t_2x, \\ y_4 = t_1, \quad y_5 = t_2.$$

$$\text{Portanto } f(x, t_1, t_2) = (x^2, x^2 + x^3 + t_1x, x^4 + t_2x, t_1, t_2)$$

$$2. \quad I = \langle x^k \rangle, \quad A = \frac{\mathbb{R}\{x\}}{\{x^k\}}, \quad k \geq 3$$

$$a = 1, b = 1 \Rightarrow i(A) = b - a = 1 - 1 = 0$$

Tomando $c = 0$, vamos definir $\mu_0(A)$.

$$s = a + 0 = 1 + 0 = 1, \quad I = \langle x^k \rangle \quad e \quad L = \langle kx^{k-1} \rangle.$$

$$V = \frac{M_1}{I+L} = \frac{\langle x \rangle}{\langle x^k, kx^{k-1} \rangle} = \frac{\langle x \rangle}{\langle x^{k-1} \rangle}$$

Assim $\ell = \dim V = k - 2$ e podemos representar uma base de V por $v_{11} = x; \dots; v_{k-2,1} = x^{k-2}$.

$$\mu_0(A) = \ell + s = k - 2 + 1 = k - 1.$$

Sejam $0 \leq n \leq p$ inteiros tais que $p - n = 0$ e $p \geq \mu_0(A) = k - 1$. Escolhemos $p = k - 1$ e $n = k - 1$.

Portanto $f : \mathbb{R}^{k-1,0} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1,0}$ é dada por $f(x, t_1, t_2, \dots, t_{k-2}) = (y_1, y_2, \dots, y_{k-1})$ com

$$\begin{cases} y_i = q_i(x) + \sum_{j=1}^{k-2} t_j v_{ji}(x), & 1 \leq i \leq 1 \\ y_{1+j} = t_j, & 1 \leq j \leq k-2 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} y_1 = x^k + t_1 x + t_2 x^2 + \dots + t_{k-2} x^{k-2} \\ y_2 = t_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} = t_{k-2} \\ f(x, t_1, \dots, t_{k-2}) = (x^k + t_1 x + \dots + t_{k-2} x^{k-2}, t_1, \dots, t_{k-2}) \end{cases}$$

$$3. \quad I = \langle x + y^2, xy \rangle, \quad A = \frac{\mathbb{R}\{x, y\}}{\langle x + y^2, xy \rangle}$$

Usando o seguinte isomorfismo

$$\begin{array}{l} Y = x + y^2 \\ X = y \end{array} \quad \text{obtemos} \quad \begin{cases} x = Y - X^2 \\ y = X \end{cases}$$

$$\text{e } \begin{cases} x + y^2 = (Y - X^2) + X^2 = Y \\ xy = (Y - X^2) \cdot X = XY - X^3 \end{cases}$$

$$\text{Assim } A = \frac{\mathbb{R}\{x,y\}}{\{x+y^2, xy\}} \cong \frac{\mathbb{R}\{X,Y\}}{\langle Y, XY-X^3 \rangle} \cong \frac{\mathbb{R}\{X\}}{\langle X^3 \rangle} \quad \text{e } a$$

forma normal, pelo exemplo anterior, fica: $f(x,t) = (x^3+tx, t)$.

4. Vamos neste exemplo, encontrar o desdobramento universal de $f(x,y) = (x + y^2, xy)$

$$I = \langle x + y^2, xy \rangle \quad , \quad A = \frac{M_2}{\langle x+y^2, xy \rangle}$$

$$L = \langle (x, xy), (y, y^2), (2xy, x^2), (2y^2, xy) \rangle$$

$$V = \frac{M_2^2}{I^{(2)} + L} =$$

$$= \frac{\langle (x,0), (y,0), (0,x), (0,y) \rangle}{\langle (x+y^2,0), (0,x+y^2), (xy,0), (0,xy) \rangle + \langle (x,xy), (y,y^2), (2xy,x^2), (2y^2,xy) \rangle}$$

$$= \frac{\langle (x,0), (y,0), (0,x), (0,y) \rangle}{\langle (x+y^2,0), (0,x+y^2), (xy,0), (0,xy), (x,xy), (y,y^2), (2xy,x^2), (2y^2,xy) \rangle}$$

$$= \frac{\langle (x,0), (y,0), (0,x), (0,y) \rangle}{\langle (0,x+y^2), (0,xy), (x,0), (y,y^2), (0,x^2), (y^2,0) \rangle}$$

Sendo (α, β) um representante de uma classe em V , podemos escrever

$$\alpha = a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + \dots$$

$$\beta = b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^3 + \dots$$

$$\text{Assim } (\alpha, \beta) \sim (a_2y, b_1x + b_2y + b_5y^2) \quad \text{e}$$

$$(a_2 y, b_1 x + b_2 y + b_5 y^2) = (a_2 y, a_2 y^2) + (0, b_1 x + b_2 y + (b_5 - a_2) y^2)$$

$$\text{e } (\alpha, \beta) \sim (0, b_1 x + b_2 y + c y^2)$$

Temos ainda

$$(0, b_1 x + b_2 y + c y^2) = (0, b_1 (x + y^2)) + (0, b_2 y + (c - b_1) y^2) \text{ e fi-}$$

$$\text{camos com } (\alpha, \beta) \sim (0, b_2 y + d y^2).$$

Temos portanto $\dim V = 2$ com representantes de base $v_1 = (0, y)$ e $v_2 = (0, y^2)$.

Para $v_1 = (0, y)$ temos $v_{11} = 0$ e $v_{12} = y$ e para $v_2 = (0, y^2)$ temos $v_{21} = 0$ e $v_{22} = y^2$

$$\mu_0(A) = \ell + s = 2 + 2 = 4$$

Tomando $p = 4$ e $n = 4$, temos $f : \mathbb{R}^4_{,0} \rightarrow \mathbb{R}^4_{,0}$ dada por $f(x, y, t_1, t_2) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ com

$$\begin{cases} y_i = q_i(x) + \sum_{j=1}^2 t_j v_{ji}(x), & 1 \leq i \leq 2 \\ y_{2+j} = t_j, & 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

Assim

$$f(x, y, t_1, t_2) = (x + y^2, xy + t_1 y + t_2 y^2, t_1, t_2)$$

Observações:

Seja $f : \mathbb{R}^n_{,0} \rightarrow \mathbb{R}^p_{,0}$. Existe estabilização de

$$f \iff \dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta(f)}{tf(A) + f^* M_n \theta(f)} < \infty.$$

5. O INVARIANTE $m(f)$

5.1. Definição: Por um invariante topológico no sentido geral, entendemos um invariante associado a um germe tal que, quando dois germes são topologicamente equivalentes, seus invariantes são iguais. Por um invariante topológico restrito a um conjunto de germes, entendemos que se dois germes deste conjunto são topologicamente equivalentes, então, seus invariantes são iguais.

Vamos agora fornecer duas definições, que provaremos serem equivalentes e que nos levarão à nossa definição do invariante $m(f)$.

Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ e seja $\tilde{f}$ uma representante de f definida num aberto U contendo o .

5.2. Definição A: $m_1(\tilde{f}) = \max\{ m \in \mathbb{Z} / \text{Para toda vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U, \text{ existe } y \in \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m \}$.

Se não existir tal $m_1(\tilde{f})$, tomamos $m_1(\tilde{f}) = +\infty$.

5.3. Definição B: $m_2(\tilde{f}) = \max\{ m \in \mathbb{Z} / \text{Para toda vizinhança de } o \text{ em } U, \text{ existe conjunto } W \text{ contido em } V \text{ e } y \in \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = m \}$.

Se não existe tal $m_2(\tilde{f})$, tomamos $m_2(\tilde{f}) = +\infty$.

5.4. A Definição A é equivalente à Definição B.

De fato:

Sejam $A = \{ m \in \mathbb{Z} / \text{Para toda vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U, \text{ existe } y \in \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m \}$ e

$B = \{ m \in \mathbb{Z} / \text{Para toda vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U, \text{ existe conjunto } W \text{ contido em } V \text{ e } y \in \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = m \}$.

Provemos que $A = B$ e teremos o resultado.

(a) Seja $m \in A$. Portanto, dada vizinhança V de o em U , temos que existe y em $\mathbb{R}^p$ com $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m$.

Tomemos $W = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \tilde{f}^{-1}(y) \cap V \subset \tilde{f}^{-1}(y)$.

Assim, $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = \#W = m$ e temos que $m \in B$.

(b) Seja $m \in B$. Portanto, dada vizinhança V de o em U , existe conjunto W contido em V e $y \in \mathbb{R}^p$ com $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = m$.

Como $W \subset V$, temos $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap W) = m$ e assim $m \in A$.

Temos portanto, de (a) e (b), que $m_1(\tilde{f}) = m_2(\tilde{f})$

Seja, então, $m(\tilde{f}) = m_1(\tilde{f}) = m_2(\tilde{f})$.

Observação: Sejam $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$, $\tilde{f}$ uma representante de f definida num aberto U do $\mathbb{R}^n$ e U_1 um aberto tal que $U_1 \subset U$. Então, temos que $m(\tilde{f}) = m(\tilde{f}|_{U_1})$.

De fato:

Sejam $A_U = \{ m \in \mathbb{Z} \text{ tal que, para toda vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U, \text{ existe } y \text{ em } \mathbb{R}^p \text{ com } \# (\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m \}$ e $A_{U_1} = \{ m \in \mathbb{Z} \text{ tal que, para toda vizinhança } V \text{ de } o \text{ em } U_1, \text{ existe } y \text{ em } \mathbb{R}^p, \text{ com } \# [(\tilde{f}/_{U_1})^{-1}(y) \cap V] \geq m \}$.

Seja $m \in A_U$.

Temos que, toda vizinhança V de o em U_1 é também vizinhança de o em U .

Portanto, existe y em $\mathbb{R}^p$ com $\# [(\tilde{f}/_{U_1})^{-1}(y) \cap V] = \# (\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m$.

Assim $m \in A_{U_1}$.

Seja $m \in A_{U_1}$.

Temos que para toda vizinhança V de o em U , $V \cap U_1$ é vizinhança de o em U_1 e portanto, existe y em $\mathbb{R}^p$ com $\# (\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq \# (\tilde{f}^{-1}(y) \cap V \cap U_1) = \# [(\tilde{f}/_{U_1})^{-1}(y) \cap V \cap U_1] \geq m$

Assim $m \in A_U$.

Logo $A_U = A_{U_1}$ e concluímos que $m(\tilde{f}) = m(\tilde{f}/_{U_1})$.

5.5. Proposição: Sejam $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^p,o$, f_1 uma representante f definida num aberto U e f_2 uma representante de f definida num aberto V . Então, temos $m(f_1) = m(f_2)$.

Prova:

Da definição de germe, temos que existe um aberto $W \subset U \cap V$ tal que, $f_1|_W = f_2|_W$.

Logo, temos $m(f_1) = m(f_1|_W) = m(f_2|_W) = m(f_2)$.

5.6. Definição: Chamaremos multiplicidade real de f a este valor comum a todo representante de f e denotaremos por $m(f)$.

Exemplo: 1. Seja $f : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tal que uma representante de f seja $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(x) = x^2$.

Seja $A = \{m \in \mathbb{Z} / \text{Para toda vizinhança } V \text{ de } 0 \text{ em } \mathbb{R}, \text{ existe } y \text{ em } \mathbb{R} \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) \geq m\}$.

Tomando $y < 0$, temos que $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) = 0$.

Tomando $y = 0$, temos que $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) = 1$.

Para todo V , existe y em $\mathbb{R}$, $y > 0$, tal que

$$\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) = 2$$

Para todo V , não existe y em $\mathbb{R}$ tal que

$$\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) > 2.$$

Assim $A = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 2\}$ e $m_1(\tilde{f}) = 2$.

Concluimos, portanto, que $m(f) = 2$.

2. Seja $f : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ tal que uma representante de f seja dada por $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tilde{f}(x) = x^3$.

Para todo V , tomando $y = 0$, temos que

$$\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) = 1 \text{ e não existe } y \text{ tal que } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V) > 1$$

Assim, temos que $m_1(\tilde{f}) = 1$.

Concluimos, portanto, que $m(f) = 1$.

5.7. Lema: A multiplicidade real é um invariante topológico no sentido geral.

Prova:

Pela definição de equivalência topológica de f e g , podemos encontrar homeomorfismos h e k tais que $f = k \circ g \circ h$ como germes.

Podemos escolher representantes para estes germes que serão denotados também por f, g, h e k e vizinhanças de o em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $U_1 \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^p$ e $W_1 \subset \mathbb{R}^p$ tal que o seguinte diagrama comuta com $h: U \xrightarrow{\sim} U_1$ e $k: W \xrightarrow{\sim} W_1$.

$$\begin{array}{ccc}
 U_1 & \xrightarrow{g} & W \\
 \uparrow h & & \downarrow k \\
 U & \xrightarrow{f} & W_1
 \end{array}
 \quad f = k \circ g \circ h$$

Então, se V é uma vizinhança de o em U e $y \in W_1$, temos:

$$f^{-1}(y) \cap V = h^{-1} \circ g^{-1} \circ k^{-1}(y) \cap V = h^{-1}(g^{-1}(y_1) \cap V_1) \text{ onde } y_1 = k^{-1}(y) \text{ e } V_1 = h(V).$$

Assim $\#(f^{-1}(y) \cap V) = \#(g^{-1}(y_1) \cap V_1)$ pois h é homeomorfismo. Como $h: V \rightarrow V_1$ e $k^{-1}: y \rightarrow y_1$ são bijeções, concluimos que $m(f) = m(g)$.

5.8. Proposição: Sejam $f_1: \mathbb{R}^{n_1, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, o}$ e $f_2: \mathbb{R}^{n_2, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_2, o}$ ($n_i \leq p_i$, $i = 1, 2$), germes estáveis com $\Omega(f_1) \approx \Omega(f_2)$.

$$\text{Então, } m(f_1) = m(f_2).$$

Prova:

Seja $Q(f_1) \approx Q(f_2) \approx A = \frac{\mathbb{R}\{x_a\}}{\langle r_1, \dots, r_b \rangle}$ uma representação minimal. Vamos construir o desdobramento universal de $r = (r_1, \dots, r_b)$.

Se $v_1, \dots, v_\ell$ é uma base sobre $\mathbb{R}$ para $\frac{M_a^{(b)}}{I^{(b)} + L}$ com L gerado por $(\frac{\partial r_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial r_b}{\partial x_i})$, $i = 1, \dots, a$; então o desdobramento universal $F : \mathbb{R}^{a+\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{b+\ell}$ será dado por $F(x_1, \dots, x_a, t_1, \dots, t_\ell) = (y_1, \dots, y_{b+\ell})$ com

$$\begin{cases} y_i = r_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} t_j v_{ji}, & 1 \leq i \leq b \\ y_{b+j} = t_j, & 1 \leq j \leq \ell \end{cases}$$

Vamos construir uma forma normal para f_1 .

Seja $c_1 = p_1 - n_1$, então escolhemos $a + c_1$ geradores para I , $(r_1, \dots, r_b, 0, \dots, 0)$ com $a + c_1 - b$ zeros.

Consideremos $V = \frac{M^{(a+c_1)}}{I^{(a+c_1)} + L_1}$ onde L_1 é gerado por $(\frac{\partial r_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial r_b}{\partial x_i}, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, a$.

$$\text{De modo que } \frac{M^{(a+c_1)}}{I^{(a+c_1)} + L_1} \approx \frac{M^{(b)}}{I^{(b)} + L} \oplus \frac{M^{(a+c_1-b)}}{I^{(a+c_1-b)}}$$

Assim, se $m_1, \dots, m_{\delta-1}$ ($\delta = \dim_{\mathbb{R}} A$) é uma base monomial para $\frac{M}{I}$, o ideal maximal de A , então:

$(v_1; 0), \dots, (v_\ell; 0), (0; m_1, 0, \dots, 0), \dots, (0; m_{\delta-1}, 0, \dots, 0), (0; 0, m_1, \dots, 0), \dots, (0; 0, \dots, m_{\delta-1})$ é uma base sobre $\mathbb{R}$ para V e temos uma forma normal para f_1 dada por $F_1 : \mathbb{R}^{n_1; 0} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1; 0}$ com parâmetros t_j ($1 \leq j \leq \ell$) e $s_{\alpha, \beta}$ ($1 \leq$

$\alpha \leq \delta-1$ e $1 \leq \beta \leq a + c_1 - b$ e definida por:

$$F_1(x_1, \dots, x_a; t_1, \dots, t_\ell; s_{1,1}, \dots, s_{\delta-1}, a + c_1 - b; z_1, \dots, z_{n_1 - a - \ell - (\delta-1)(a+c_1-b)}) = (y_1, \dots, y_{p_1})$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_i = r_i(x) + \sum_{j=1}^{\ell} t_j v_{ji}, & 1 \leq i \leq b \\ y_{b+j} = t_j, & 1 \leq j \leq \ell \\ y_{b+\ell+\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\delta-1} s_{\alpha,\beta} m_\alpha, & 1 \leq \beta \leq a + c_1 - b \\ y_{a+c_1+\ell+(\beta-1)(\delta-1)+\alpha} = s_{\alpha,\beta}, & 1 \leq \alpha \leq \delta-1, 1 \leq \beta \leq a+c_1-b \\ y_{a+c_1+\ell+(a+c_1-b)(\delta-1)+k} = z_k, & 1 \leq k \leq n_1 - a - \ell - (\delta-1)(a+c_1-b) \end{array} \right.$$

Que F_1 é uma forma normal implica que F_1 e f_1 são equivalentes. Assim $m(f_1) = m(F_1)$.

Vamos mostrar agora que $m(F_1) = m(F)$.

Consideremos vizinhanças de o em $\mathbb{R}^{n_1}$ da forma $U_1 \times U_2$ com

$$U_1 \subset \mathbb{R}^{a+\ell} = \{(\underline{x}, \underline{t}) \text{ onde } \underline{x} \in \mathbb{R}^a \text{ e } \underline{t} \in \mathbb{R}^\ell\} \text{ e } U_2 \subset \mathbb{R}^{n_1 - a - \ell} = \{(\underline{s}, \underline{z}) \text{ onde } \underline{s} \in \mathbb{R}^{(\delta-1)(a+c_1-b)} \text{ e } \underline{z} \in \mathbb{R}^{n_1 - a - \ell - (\delta-1)(a+c_1-b)}\}$$

Pela definição de $m(F_1)$, existe um $y = (y', y'')$, $y' \in \mathbb{R}^{b+\ell}$ e $y'' \in \mathbb{R}^{p_1-b-\ell}$ e vizinhança $\bar{U}_1 \times \bar{U}_2$, $\bar{U}_1 \subset U_1$ e $\bar{U}_2 \subset U_2$, tal que $\#(F_1^{-1}(y) \cap \bar{U}_1 \times \bar{U}_2) = m(F_1)$.

Então, $F_1^{-1}(y', y'') = (x, t, s, z)$ tal que (x, t) satisfaz $F(x, t) = y'$ e se $(x, t, s, z) \in \bar{U}_1 \times \bar{U}_2$, então, $(x, t) \in \bar{U}_1$.

Finalmente, como t, s, z são univocamente determinados por $y = (y', y'')$, existem $m(F_1)$ ou mais diferentes $(\underline{x})$ tal que $(\underline{x}, \underline{t}) \in \bar{U}_1$ e $F(\underline{x}, \underline{t}) = y'$.

Como isto é verdade para qualquer vizinhança $U_1 \subset \mathbb{R}^{a+\ell}$, temos $m(F) \geq m(F_1)$.

Agora, se V é uma vizinhança de o em $\mathbb{R}^{n_1}$, então $V \cap \mathbb{R}^{a+\ell}$ (projeção de V em $\mathbb{R}^{a+\ell}$) é uma vizinhança de o em $\mathbb{R}^{a+\ell}$, e para todo $V_1 \subset V \cap \mathbb{R}^{a+\ell}$ vizinhança de o , existe $y' \in \mathbb{R}^{b+\ell}$ tal que

$$\# (F^{-1}(y') \cap V_1) \geq m(F).$$

Então, se $(\underline{x}, \underline{t}) \in F^{-1}(y') \cap V_1$, $(x, t, o, o) \in F_1^{-1}$

$(y', o) \cap V$, e assim $\# (F_1(y', o) \cap V) \geq m(F)$.

Como V é arbitrário, $m(F_1) \geq m(F)$.

Portanto $m(F_1) = m(F)$.

De maneira análoga, $m(F_2) = m(F)$ para F_2 uma forma normal para f_2 .

Então $m(f_1) = m(F_1) = m(F) = m(F_2) = m(f_2)$ e a proposição está provada.

Observações:

1. Vejamos uma diferente prova do Teorema no caso em que $n_1 - p_1 = n_2 - p_2$.

Sejam $f: \mathbb{R}^{n_1, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, o}$ e $g: \mathbb{R}^{n_2, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_2, o}$, estáveis, $n_1 - p_1 = n_2 - p_2$ com $Q(f) \approx Q(g)$.

Construimos as formas normais para f e g : $F: \mathbb{R}^{n_1, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, o}$ e $G: \mathbb{R}^{n_2, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_2, o}$ estáveis.

Temos $Q(F) \approx Q(f) \approx Q(g) \approx Q(G)$.

(i) Se $n_1 = n_2 \implies p_1 = p_2$

$F, G : \mathbb{R}^{n_1, o} \rightarrow \mathbb{R}^{p_1, o}$ estáveis e $Q(F) \approx Q(G) \Rightarrow$
 $F \sim G \Rightarrow m(F) = m(G) \Rightarrow m(f) = m(g).$

(ii) Se $n_1 < n_2$, $k = n_2 - n_1$

Seja $\bar{F} : \mathbb{R}^{(n_1+k), o} \rightarrow \mathbb{R}^{(p_1+k), o}$

$$(\underline{x}, \underline{t}) \rightarrow (F(\underline{x}), \underline{t})$$

$\bar{F}$ é estável, $Q(\bar{F}) \approx Q(F) \approx Q(G)$

$Q(\bar{F}) \approx Q(G) \Rightarrow \bar{F} \sim G \Rightarrow m(\bar{F}) = m(G) = m(g)$ mas
 $m(\bar{F}) = m(F) = m(f)$ (ver observação 2 abaixo).

Portanto $m(f) = m(g).$

2. Sejam $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$

$$\underline{x} \rightarrow f(\underline{x})$$

$F : \mathbb{R}^{n+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^{p+k}, o$

$$(\underline{x}, \underline{t}) \rightarrow (f(\underline{x}), \underline{t})$$

Então, $m(f) = m(F)$

De fato:

Seja $\tilde{f}$ um representante de f definido num aberto U_1 em $\mathbb{R}^n$ contendo o e $\tilde{F}$ um representante de F definido num aberto $W = U_1 \times U_2$ em $\mathbb{R}^{n+k}$, com U_2 um aberto em $\mathbb{R}^k$ contendo o .

Sejam

$A = \{m \in \mathbb{Z} / \text{ Para toda vizinhança } V_1 \text{ de } o \text{ em } U_1, \text{ existe } y \text{ em } \mathbb{R}^p \text{ com } \#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V_1) \geq m\}$ e $B = \{m \in \mathbb{Z} / \text{ Para toda vizinhança } V_1 \times V_2 \text{ de } (o, o) \text{ em } W, \text{ existe } (y, t) \text{ em } \mathbb{R}^{p+k} \text{ com } \#(\tilde{F}^{-1}(y, t) \cap (V_1 \times V_2)) \geq m\}.$

(i) Se $p \in A$, temos:

Para toda vizinhança V_1 de o em U_1 , existe y em $\mathbb{R}^p$ com $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V_1) \geq p \Rightarrow$ existe, pelo menos um $x_i \in V_1$, $i = 1, \dots, p$ tal que $\tilde{f}(x_i) = y \Rightarrow \tilde{F}(x_i, t) = (\tilde{f}(x_i),$

$t) = (y, t)$, $i = 1, \dots, p$, para todo $t \in \mathbb{R}^k \Rightarrow$ Para toda vizinhança $V_1 \times V_2$ em W , existe $(y, t) \in \mathbb{R}^{p+k}$ com $\#(\tilde{F}^{-1}(y, t) \cap (V_1 \times V_2)) \geq p \Rightarrow p \in B$.

(ii) Se $p \in B$, temos:

Para toda vizinhança $V_1 \times V_2$ de $(0, 0)$ em W , existe $(y, t) \in \mathbb{R}^{p+k}$ com $\#(\tilde{F}^{-1}(y, t) \cap (V_1 \times V_2)) \leq p \Rightarrow$ existe $(x_i, t) \in V_1 \times V_2$, $i = 1, \dots, p$ tal que $\tilde{F}(x_i, t) \Rightarrow (\tilde{f}(x_i), t) = (y, t) \Rightarrow \tilde{f}(x_i) = y$, $i = 1, \dots, p$, $x_i \in V_1 \Rightarrow$ Para toda vizinhança V_1 de 0 em U_1 , existe y em $\mathbb{R}^p$ com $\#(\tilde{f}^{-1}(y) \cap V_1) \geq p \Rightarrow p \in A$.

Temos portanto que $m(f) = m(F)$.

Notação:

Chamaremos $m(I)$ o valor comum da multiplicidade real de toda germe estável f ($n \leq p$) com $\Omega(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$ e

por $\delta(I) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$.

CAPÍTULO II

1. DEFORMAÇÕES DE IDEAIS.

1.1. Definição: Dado um ideal $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\xi n}$ (Respectivamente $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle_{\mathbb{R}\{\underline{x}_n\}}$), uma **k-deformação** de I é uma aplicação $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^r$ (Respectivamente $F \in (\mathbb{R}\{\underline{x}_{n+k}\})^r$) tal que $F(\underline{x}, 0) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_r(\underline{x}))$.

Podemos escrever $F(\underline{x}, \underline{t}) = (F_1(\underline{x}, \underline{t}), \dots, F_r(\underline{x}, \underline{t}))$.

Se $k = 1$, as 1-deformações serão chamadas deformações homotópicas.

1.2. Definição: Uma k-deformação $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^r$ (respectivamente $F \in (\mathbb{R}\{\underline{x}_{n+k}\})^r$) tem **q-zeros proximos de zero**, que denotaremos por q-o-o, se dada uma vizinhança U de o em $\mathbb{R}^n$ e $\xi > 0$, existe t_o em $\mathbb{R}^k$ com $\|t_o\| < \xi$ e tal que $F(\underline{x}, \underline{t}_o) = o$ tem q soluções em U .

Exemplos: 1. Seja $I = \langle x, x+y^2 \rangle \subset \mathbb{R}\{x, y\}$. Seja a deformação homotópica de I dada por $F(x, y, t) = (F_1(x, y, t), F_2(x, y, t)) = (x, x + (y-t)(y-2t))$. Temos que F tem 2-o-o.

2. Seja $I = \langle x, y^k \rangle \subset \mathbb{R}\{x, y\}$, $k \geq 3$.

a) $H_1 = (x, (y-t)^k) \in (\mathbb{R}\{x, y, t\})^2$ é uma deformação homotópica de I com 1-o-o.

b) $H_2 = (x, (y-t)^{k-1}(y-2t)) \in (\mathbb{R}\{x, y, t\})^2$ é uma deformação homotópica de I com 2-o-o.

c) $H_k = (x, (y-t) \cdot (y-2t) \cdot \dots \cdot (y-kt)) \in (\mathbb{R}\{x, y, t\})^2$ é uma deformação homotópica de I com k-o-o.

3. Seja $I = \langle x, x^3 + xy^7 \rangle \subset \mathbb{R}\{x, y\}$

$H = (x, x^3 + xy^7 + t(y-t)(y-2t) \dots (y-qt)) \in (\mathbb{R}\{x, y, t\})^2$ é uma deformação homotópica de I que tem q -o-o, qualquer que seja q .

4. Sejam $f, g: \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$, e, $I = \langle x^2 \rangle$, $J = \langle x^3 \rangle$.

Temos que $m(f) = 2$ e $m(g) = 1$.

Consideremos as deformações homotópicas de I dadas por

$F(x, t) = x^2 + t^2$ e $F_1(x, t) = (x-t)(x-2t)$ e, a deformação homotópica de J , $G(x, t) = (x-t)(x-2t)(x-3t)$.

Temos que F tem 1-o-o e tem-se $1 = q < m(f) = 2$.

Temos que F_1 tem 2-o-o e tem-se $2 = q = m(f)$.

Temos ainda que G tem 3-o-o e então tem-se $3 = q > m(g) = 1$.

1.3. **Lema:** Sejam $I, J \subset M_n \subset \xi_n$ ideais tais que $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle g_1, \dots, g_p \rangle = J$.

Então existe uma k -deformação $F = (F_1, \dots, F_p)$ de I com q -o-o se, e somente se, existe uma k -deformação $G = (G_1, \dots, G_p)$ de J com q -o-o.

Prova:

Sendo $\langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle g_1, \dots, g_p \rangle$, temos que existe M uma matriz inversível em zero com entradas em ξ_n , tal que

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{bmatrix}$$

Seja $F = (F_1, \dots, F_p)$ uma k -deformação de I com $q-o-o$.

Tomando $G = (G_1, \dots, G_p)$ de modo que

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_p \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{bmatrix}, \quad \text{obtemos uma } k\text{-deformação}$$

de J com $q-o-o$.

De fato:

$$\begin{bmatrix} G_1(\underline{x}, 0) \\ \vdots \\ G_p(\underline{x}, 0) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} F_1(\underline{x}, 0) \\ \vdots \\ F_p(\underline{x}, 0) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_p(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_p(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

e $G = (G_1, \dots, G_p)$ é uma k -deformação de J .

Além disso, se $F_i(\underline{x}_j, \underline{t}_0) = 0$, $i = 1, \dots, p$, temos que:

$$\begin{bmatrix} G_1(\underline{x}_j, \underline{t}_0) \\ \vdots \\ G_p(\underline{x}_j, \underline{t}_0) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} F_1(\underline{x}_j, \underline{t}_0) \\ \vdots \\ F_p(\underline{x}_j, \underline{t}_0) \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $G_i(\underline{x}_j, \underline{t}_0) = 0$, $i = 1, \dots, p$ e G tem $q-o-o$.

Pela simetria, temos a igualdade

Exemplo: Sejam $I = \langle x, x + y^2 \rangle = \langle x + y^3, y^2 \rangle = J$.

$$\begin{bmatrix} x \\ x+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 1 & 1-y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+y^3 \\ y^2 \end{bmatrix}$$

com

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -y \\ 1 & 1-y \end{bmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{bmatrix} 1-y & y \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando $F = (x, x + (y-t_1)(y-t_2))$

Temos $G = (G_1, G_2)$ onde

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-y & y \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x + (y-t_1)(y-t_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x(1-y) + xy + y(y-t_1)(y-t_2) \\ -x + x + (y-t_1)(y-t_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x - xy + xy + y(y-t_1)(y-t_2) \\ (y-t_1)(y-t_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x + y(y-t_1)(y-t_2) \\ (y-t_1)(y-t_2) \end{bmatrix} \text{ e assim} \end{aligned}$$

$G = (x + y(y-t_1)(y-t_2), (y-t_1)(y-t_2))$ e ambos F e G tem 2-o-o.

1.4. Definição: Seja A uma $\mathbb{R}$ -álgebra e I, J ideais de A . Dizemos que I e J são equivalentes ($I \sim J$) se existir isomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras $\psi : A \rightarrow A$ tal que $\psi(I) = J$.

1.5. Teorema: Sejam $I, J \subset M_n \subset \xi_n$ ideais tais que $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle \sim \langle g_1, \dots, g_p \rangle = J$.

Então, existe uma k -deformação $G = (G_1, \dots, G_p)$ de J com q-o-o se, e somente se, existe uma k -deformação $F = (F_1, \dots, F_p)$ de I com q-o-o.

Prova:

$I \sim J \iff$ Existe $\psi : \xi_n \rightarrow \xi_n$ isomorfismo de $\mathbb{R}$ -álgebras tal que $\psi(I) = J \iff$ Existe $h : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{n,o}$ germe de difeomorfismo C^∞ , tal que $h^* = \psi$, e $\psi(I) = J$.

Assim, $h^* \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle g_1, \dots, g_p \rangle$ e portanto $\langle g_1, \dots, g_p \rangle = \langle f_1 \circ h, \dots, f_p \circ h \rangle$

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\langle g_1, \dots, g_p \rangle$ tem uma k -deformação G com q -o-o e provemos que $\langle f_1, \dots, f_p \rangle$ tem uma k -deformação com q -o-o.

Se $\langle g_1, \dots, g_p \rangle$ tem uma k -deformação G com q -o-o e $\langle g_1, \dots, g_p \rangle = \langle f_1 \circ h, \dots, f_p \circ h \rangle$, pelo lema anterior, existe uma k -deformação H de $\langle f_1 \circ h, \dots, f_p \circ h \rangle$ com q -o-o tal que $H_i(x, 0) = f_i \circ h(x)$.

Tomemos $F = (F_1, \dots, F_p)$ dada por

$$F_i(\underline{x}, \underline{t}) = H_i(h^{-1}(\underline{x}), \underline{t}), \quad i = 1, \dots, p.$$

F é uma k -deformação de $\langle f_1, \dots, f_p \rangle$ e tem q -o-o.

De fato:

$$F_i(\underline{x}, 0) = H_i(h^{-1}(\underline{x}), 0) = f_i \circ h(h^{-1}(\underline{x})) = f_i(\underline{x}) \quad \text{e se}$$

$(\underline{x}_j, \underline{t}_0)$ é tal que $H_i(\underline{x}_j, \underline{t}_0) = 0$, $i = 1, \dots, p$, então:

$$\begin{aligned} F_i(h(\underline{x}_j), \underline{t}_0) &= H_i(h^{-1}(h(\underline{x}_j)), \underline{t}_0) = \\ &= H_i(\underline{x}_j, \underline{t}_0) = 0 \end{aligned}$$

Pela continuidade de h , temos que F tem q -o-o.

($\Leftarrow$) Fazendo $\langle f_1, \dots, f_p \rangle = (h^{-1})^* \langle g_1, \dots, g_p \rangle$ e usando raciocínio análogo, chega-se à prova.

Exemplo: Seja $I = \langle x, -3y^2 + 2x - 2y^3 \rangle \sim \langle x + y^3 + 2y^2, y^2 + 2x \rangle = J$

Com

$h : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ dado por $h(x, y) = (x + y^3 + 2y^2, y)$.

Logo

$h^{-1} : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ é dado por $h^{-1}(x, y) = (x - y^3 - 2y^2, y)$.

Seja $G = (G_1, G_2) = (x + 2(y - t_1)(y - t_2) + y(y - t_1)(y - t_2), 2x + (y - t_1)(y - t_2))$ uma 2-deformação de $\langle g_1, g_2 \rangle = J$ com 2-o-o.

Vamos definir uma deformação $F = (F_1, \dots, F_p)$ de I tal que $F_i(\underline{x}, \underline{t}) = G_i(h^{-1}(x, y), t_1, t_2)$.

Assim $F_1(x, y, t_1, t_2) = G_1(x - y^3 - 2y^2, y, t_1, t_2) = x - y^3 - 2y^2 + 2(y - t_1)(y - t_2) + y(y - t_1)(y - t_2)$ e $F_2(x, y, t_1, t_2) = G_2(x - y^3 - 2y^2, y, t_1, t_2) = 2x - 2y^3 - 4y^2 + (y - t_1)(y - t_2)$ e $F = (x - y^3 - 2y^2 + 2(y - t_1)(y - t_2), 2x - 2y^3 - 4y^2 + (y - t_1)(y - t_2))$ que tem 2-o-o

Questão:

Sejam I e J dois ideais de ξ_n .

Suponhamos que para cada deformação I_λ de I , com q-o-o, existe deformação J_μ de J com q-o-o, e, reciprocamente. É verdade que $I \sim J$?

Observações:

Seja $F(\underline{x}, \underline{t}) : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^r$ (respectivamente $F \in (\mathbb{R}\{x_n\})^r$) uma k -deformação de $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset \xi_n$ (respectivamente $I \subset \mathbb{R}\{x_n\}$) e seja $\bar{F} : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{r+k}$ (respectivamente $F \in (\mathbb{R}\{x_n\})^{r+k}$) tal que $\bar{F}(\underline{x}, \underline{t}) = (F(\underline{x}, \underline{t}), \underline{t})$.

Suponha que F tem q-o-o. Assim, para toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$, $o \in U$ e para todo $\xi > 0$, existe $\underline{t}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\|\underline{t}_0\| < \xi$ tal que $F(x, \underline{t}_0) = o$ tem q soluções em U .

Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ vizinhança de o em $\mathbb{R}^{n+k}$.

Tomemos $U = V \cap \mathbb{R}^n$, vizinhança de o em $\mathbb{R}^n$ e $\xi > 0$ tal que para $\underline{t} \in \mathbb{R}^k$, $\|\underline{t}\| < \xi$, tenhamos $\underline{t} \in V \cap \mathbb{R}^k$. Nestas condições, existe $\underline{t}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\|\underline{t}_0\| < \xi$ tal que $F(\underline{x}, \underline{t}_0) = o$ tem q soluções em U , a saber $(\underline{x}_1, \underline{t}_0), \dots, (\underline{x}_q, \underline{t}_0)$.

Logo, $\bar{F}(\underline{x}_i, \underline{t}_0) = (F(\underline{x}_i, \underline{t}_0), \underline{t}_0) = (o, \underline{t}_0)$, $i = 1, \dots, q$.

Portanto $\bar{F}^{-1}(o, \underline{t}_0) \supset \{(\underline{x}_1, \underline{t}_0), \dots, (\underline{x}_q, \underline{t}_0)\}$ e assim $\#(\bar{F}^{-1}(o, \underline{t}_0) \cap V) \geq q$ donde concluímos que $m(\bar{F}) \geq q$.

1.6. Definição: Seja $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ , V aberto.

Em cada ponto $x \in V$ chamaremos $Q_x(f) = \frac{C_x^\infty(\mathbb{R}^n)}{f^*(M_p) \cdot C_x^\infty(\mathbb{R}^n)}$ a álgebra associada a f em x .

1.7. Proposição: Se $\dim_{\mathbb{R}} Q_{x_0}(f) = k$, finita, então existe aberto U contendo x_0 tal que para todo $x \in U$ a $\dim_{\mathbb{R}} Q_x(f) \leq k$.

Prova:

Pelo teorema 1 (1.14) e corolário 8 (1.16) do capítulo I, sendo $p_1, \dots, p_k$ em $C_{x_0}^\infty(\mathbb{R}^n)$ representantes de uma base de $Q_{x_0}(f)$, eles geram $C_{x_0}^\infty(\mathbb{R}^n)$ como um módulo sobre $C_{y_0}^\infty(\mathbb{R}^p)$ via $f^*(y_0 = f(x_0))$.

Pelo teorema 2 (1.15) do capítulo I, podemos assumir que $p_1, \dots, p_k$ são polinômios de grau $\leq k$.

Mostraremos que existe um aberto fixo U contendo x_0 tal que sobre U todo polinômio nas variáveis x_i 's podem ser escritos como combinação linear dos p_i 's com funções diferenciáveis dos y_i 's como coeficientes.

Em primeiro lugar, a afirmação é verdadeira para algum U e para todo polinômio de grau $\leq N$.

De fato, observe que para qualquer monômio, podemos encontrar um aberto U desde que a afirmação é verdadeira para germes em x_0 .

Assim podemos encontrar um conjunto aberto U tal que a afirmação é verdadeira para todo monômio de grau $\leq N$. Por linearidade a afirmação é verdadeira para todo polinômio de grau $\leq N$.

Consideremos agora um polinômio da forma $x^\alpha p$ onde o grau de p é N . Temos que $x^\alpha p$ pode ser escrito como combinação linear dos $x^\alpha p_i$'s e, portanto, por indução como combinação linear dos p_i 's em U .

Assim U é tal que a afirmação é verdadeira para todo polinômio.

Isto prova que para todo $x' \in U$,

$p_1 + M_n^{k+1} C_{x'}^\infty(\mathbb{R}^n), \dots, p_k + M_n^{k+1} C_{x'}^\infty(\mathbb{R}^n)$ geram

$\frac{C_{x'}^\infty(\mathbb{R}^n)}{M_n^{k+1} C_{x'}^\infty(\mathbb{R}^n)}$ como $C_y^\infty(\mathbb{R}^p)$ módulo e pelo teorema 2 (1.15)

do capítulo I, $p_1, \dots, p_k$ geram $C_{x'}^\infty(\mathbb{R}^n)$ como $C_y^\infty(\mathbb{R}^p)$ módulo. Agora pelo corolário 8 (1.16) do capítulo I, temos $\dim_{\mathbb{R}} Q_{x'}(f) \leq k$.

1.8. Proposição: Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ (não necessariamente estável) tal que $\delta(f) < \infty$.

Então $m(f) \leq \delta(f)$.

Prova:

Escolhamos U , $o \in U$ e $p_1, \dots, p_k$ como na proposição anterior ($\delta(f) = k$). Sejam $x_1, \dots, x_r$ pontos na pré-imagem de y em U e seja $S = \{x_1, \dots, x_r\}$.

Seja $C_S^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{i=1}^r C_{x_i}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos germes de funções C^∞ sobre S e seja $Q_S(f)$ a álgebra quociente

$$\frac{C_S^\infty(\mathbb{R}^n)}{f^*(M_p) C_S^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

Temos que $C_S^\infty(\mathbb{R}^n)$ é um módulo finitamente gerado sobre $C_Y^\infty(\mathbb{R}^p)$ com geradores $p_1, \dots, p_k$ (pelas mesmas razões usadas na prova da proposição anterior).

Assim, pelo teorema 1 (1.14) do capítulo I, $Q_S(f)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com $p_1, \dots, p_k$ como representantes de vetores geradores.

Por outro lado, como $Q_S(f)$ é isomorfo a $\sum_{i=1}^r Q_{x_i}(f)$, temos $r \leq \dim_{\mathbb{R}} Q_S(f) \leq k$.

O seguinte resultado devido a J.E. TOUGERON apareceu nas Publ. Ann. Inst. Fourier, Grenoble no trabalho "IDEAUX DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES I" à página 195.

1.9. Proposição: A função $\lambda \in \Lambda \rightarrow \delta(I_\lambda)$ é semi-contínua superiormente.

Usaremos este resultado para provar o seguinte teorema.

1.10. Teorema: Seja $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ com $\delta(I) < \infty$, $F : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma k -deformação de I , $(F_1(\underline{x}, \underline{\lambda}), F_2(\underline{x}, \underline{\lambda}), \dots, F_p(\underline{x}, \underline{\lambda}))$ e $I_\lambda = \langle F_1, \dots, F_p \rangle$. Se F tem q-o-o, então $q \leq \delta(I)$.

Prova:

Pelo resultado de Tougeron enunciado acima, temos que existe $\xi > 0$ tal que se $|\lambda| < \xi$, então $\delta(I_\lambda) \leq \delta$.

Tomemos um λ' fixo tal que $|\lambda'| < \xi$.

Temos, assim $\delta(I_{\lambda'}) \leq \delta < \infty$.

Consideremos agora $G(x) = (F_1(\underline{x}, \underline{\lambda}'), \dots, F_p(\underline{x}, \underline{\lambda}'))$.

Temos que $\dim_{\mathbb{R}} \frac{\xi_n}{\langle G_1, \dots, G_p \rangle} = \delta(I_{\lambda'}) < \infty$.

Seja U uma vizinhança de o em $\mathbb{R}^n$ escolhida como na proposição 1.7.

Pela prova da proposição 1.8, vemos que G tem no máximo $\delta(I_{\lambda'})$ elementos na pré-imagem de qualquer y em U . Em particular temos no máximo $\delta(I_{\lambda'}) \leq \delta(I)$ elementos na pré-imagem de o em U .

Assim, existe um $U, o \in U$ tal que para todo $\xi' > 0$, $\xi' \leq \xi$ e λ tal que $|\lambda| < \xi'$, temos $F(x, \lambda) = o$ tem no máximo $\delta(I)$ raízes.

Portanto, $q \leq \delta(I)$.

1.11. Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$, $n \leq p$, estável.

Se existir $g : \mathbb{R}^k, o \rightarrow \mathbb{R}^\ell, o$, $k \leq \ell$ com $Q(g) \approx Q(f)$ e $m(g) \geq \delta(g)$, então, $m(f) = \delta(f)$.

Prova:

Como pela proposição 5.8 do capítulo I, $m(f)$ depende da f estável com dado $Q(f)$ e pela proposição 1.8 $m(f) \leq \delta(f)$, é suficiente mostrar que $m(f) \geq \delta(f)$ para um f .

Temos um germe $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ tal que $m(g) \geq \delta(g)$ e $Q(g) \approx Q(f)$. Então, g tem um desdobramento universal $G(\underline{x}, \underline{t})$ tal que $Q(G) \approx Q(g)$ e $G(\underline{x}, o) = (g(\underline{x}), o)$.

Repetindo exatamente o mesmo argumento usado na proposição 5.8 capítulo I para mostrar que $m(F_1) \geq m(F)$ temos que $m(G) \geq m(g)$.

Assim G é um germe estável com $Q(G) \approx Q(g) \approx Q(f)$ e então $m(G) \geq m(g) \geq \delta(g) = \delta(G)$.

Como $m(G) \geq \delta(G)$, pela proposição 1.8, temos $m(G) = \delta(G)$ e desde que $Q(G) \approx Q(f)$, pela proposição 5.8 capítulo I, temos $m(f) = \delta(f)$.

1.12. Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ um germe estável ($n \leq p$) cuja álgebra tem uma representação minimal

$$Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_a\}}{\langle r_1, \dots, r_b \rangle}$$

Então, $m(f) = \delta(f)$ se, e somente se, existir uma k -deformação $\mathbb{R}(\underline{x}, \underline{t})$ de $r(\underline{x}) = (r_1(\underline{x}), \dots, r_b(\underline{x}))$ com $\delta(f) \rightarrow 0$.

Prova:

($\Leftarrow$) Sejam $R : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^b, o$ tal que $R(\underline{x}, o) = (r_1(\underline{x}), \dots, r_b(\underline{x}))$ e $\bar{R} : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^{b+k}, o$ tal que $\bar{R}(\underline{x}, \underline{t}) = (R(\underline{x}, \underline{t}), \underline{t})$, $a+k \leq b+k$. $R(\underline{x}, \underline{t})$ tem $\delta(f) \rightarrow 0 \Rightarrow m(\bar{R}) \geq \delta(f)$

$$Q(\bar{R}) = \frac{\xi_{a+k}}{\langle R(\underline{x}, \underline{t}), \underline{t} \rangle} \approx \frac{\xi_a}{\langle r_1(\underline{x}), \dots, r_b(\underline{x}) \rangle} \approx \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_a\}}{I}$$

Portanto $\dim_{\mathbb{R}} Q(\bar{R}) = \delta(\bar{R}) = \delta(f)$

Dai $m(\bar{R}) \geq \delta(\bar{R})$, onde $\bar{R} : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^{b+k}, o$ com $a+k \leq b+k$ e $Q(\bar{R}) \approx Q(f)$ o que acarreta $m(f) = \delta(f)$

($\Rightarrow$) Temos $m(f) = \delta(f)$

$\delta(f) < \infty$, $a \leq b \Rightarrow$ Existe $\bar{R} : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^{b+k}, o$

desdobramento universal de $r : \mathbb{R}^a, o \rightarrow \mathbb{R}^b, o$, $r(x) = (r_1(x), \dots, r_b(x))$ ($\delta(r) = \delta(f)$), $\bar{R}(x, t) = (y, t)$, $\bar{R}(x, o) = (r(x), o)$.

Seja $R : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^b, o$ tal que $R(x, t) = y$.

Daí $R(x, o) = r(x)$ e R é uma deformação de r .

$$\delta(\bar{R}) = \delta(r) = \delta(f).$$

Temos $\bar{R} : \mathbb{R}^{a+k}, o \rightarrow \mathbb{R}^{b+k}, o$, $a+k \leq b+k$ estável
 $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$, $n \leq p$ (no caso estável)

$$Q(f) \simeq Q(\bar{R}) \text{ e } m(f) \geq \delta(f) \quad (m(f) = \delta(f)).$$

Pelo teorema 1.11, temos portanto $m(\bar{R}) = \delta(\bar{R})$.

Assim, dada uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^{a+k}$ de $o \in \mathbb{R}^{a+k}$,
 existe $(y, t) \in \mathbb{R}^{b+k}$ tal que $\# (\bar{R}^{-1}(y, t) \cap U) \geq \delta(f)$.

Portanto $R(x, t) - y = o$ tem ao menos $\delta(f)$ soluções em x pertencentes à vizinhança de o em $\mathbb{R}^a$.

Assim a $k+b$ - deformação de $r(x)$, com parâmetros t em $\mathbb{R}^k$ e s em $\mathbb{R}^b$, $R(x, t) - s$ tem $\delta(f) - o - o$.

1.13. Lema: Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um representante de um germe em o , tal que existe x arbitrariamente próximo de o em U com $m(f(x)) = k$, onde $f(x)$ denota o germe de f em x , então, $m(f) \geq k$.

Prova:

Seja V uma vizinhança de o em U , podemos encontrar $x \in V$ e uma vizinhança V_1 de x com $V_1 \subset V$ tal que $m(f(x)) = k$. Então podemos encontrar y tal que

$$\# (f^{-1}(y) \cap V_1) \geq k. \text{ Assim } \# (f^{-1}(y) \cap V_1) \geq k. \text{ e } m(f) \geq k.$$

1.14. Proposição: Se o ideal M_a -primário $I = \langle r_1, \dots, r_b \rangle \subset \mathbb{R}\{x_a\}$ pode ser deformado numa família de ideais M_a -primários $I_t = \langle R_1, \dots, R_b \rangle$ tal que existe t arbitrária-

mente pequeno não nulo, com $\delta(I_t) = \delta(I)$ e $m(I_t) = \delta(I_t)$, então, $m(I) = \delta(I)$.

Prova:

Denotemos por $F(\underline{x}, t, \underline{s})$ um representante de um desenvolvimento universal de $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}$

$$(\underline{x}, t) \rightarrow (R(\underline{x}, t), t)$$

Isto é também um representante de um desenvolvimento universal de

$$\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b$$

$$\underline{x} \rightarrow R(\underline{x}, t_0)$$

Agora, para $t = t_0$ pequeno, o germe de F em $(0, t_0, 0)$, $F_{(0, t_0, 0)}$ é estável e tem álgebra

$$\frac{\mathbb{R}\{\underline{y}, t-t_0, \underline{s}\}}{\langle F(\underline{x}, t, \underline{s}) \rangle} \approx \frac{\mathbb{R}\{\underline{x}\}}{I_{t_0}}$$

Podemos tomar $t_0 \neq 0$, pequeno tal que $m(F_{(0, t_0, 0)}) = m(I_{t_0}) = \delta(I_{t_0}) = \delta(I)$ e pelo lema 1.13 e pela proposição 1.8 temos

$$\delta(I) \geq m(F_{(0, 0, 0)}) \geq \delta(I) \quad \text{donde} \quad m(I) = \delta(I)$$

2. ESCADAS E DEFORMAÇÕES DE IDEAIS M_2 - PRIMÁRIOS EM $\mathbb{R}\{x_1, x_2\}$.

Em primeiro lugar, vamos ordenar $\mathbb{N}^k$ pela ordem lexicográfica reversa:

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{N}^k$, então, $\alpha < \beta \iff$ Existe m , $1 \leq m \leq k$ tal que $\alpha_k = \beta_k, \dots$

$$\dots, \alpha_{m+1} = \beta_{m+1} \text{ e } \alpha_m < \beta_m.$$

2.1. **Definições:** Chamamos **ordem** de uma série $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^k} \lambda_{\alpha} x^{\alpha}$ em $\mathbb{R}\{x_k\}$ e denotamos por $O(f)$, ordem de f , ao primeiro múlti-índice de $\mathbb{N}^k$ tal que $\lambda_{\alpha} \neq 0$.

Definimos como **Escada** de um ideal I de $\mathbb{R}\{x_k\}$ o subconjunto $E(I)$ de $\mathbb{N}^k$ das ordens das séries de I .

A **fronteira** de $E(I)$ será o menor subconjunto $F(I)$ de $E(I)$ tal que

$$E(I) = \bigcup_{\alpha \in F(I)} (\alpha + \mathbb{N}^k)$$

Note que, se $\alpha \in E(I)$, então, $\alpha + \mathbb{N}^k \in E(I)$ pois existem séries $f \in I$ tal que $O(f) = \alpha$ e $\forall \beta \in \mathbb{N}^k$, $x^{\beta} \cdot f \in I$, então,

$$O(x^{\beta} \cdot f) = \alpha + \beta \in E(I)$$

2.2. **Proposição:** Se I e J são dois ideais em $\mathbb{R}\{x_k\}$ com $I \subset J$, então, temos $E(I) \subset E(J)$ mas, em geral, $F(I) \not\subset F(J)$.

De fato:

Seja $\alpha \in E(I) \Rightarrow$ Existe f em I tal que $O(f) = \alpha$.

Como $I \subset J \Rightarrow f \in J$ e conseqüentemente que $O(f) = \alpha \in E(J) \Rightarrow E(I) \subset E(J)$.

Seja agora $I = \langle x, y \rangle$ e $J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ ambos em $\mathbb{R}\{x, y\}$

$F(I) = \{(1,0), (0,1)\} \not\supset F(J) = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$
e no entanto $I \supset J$.

Observações:

Podemos ter $E(I) \subset E(J)$ sem que $I \subset J$.

Para tal, basta considerarmos $I = \langle x^2 \rangle$ e $J = \langle x^2 + y \rangle$ ambos em $\mathbb{R}\{x,y\}$.

2.3. Teorema: O complemento, $\mathbb{N}^k - E(I)$ é finito se, e somente se, I é um ideal M_k -primário em $\mathbb{R}\{x_k\}$. Em qualquer caso $\# F(I) < \infty$.

Prova:

($\Leftarrow$) Suponha que I é um ideal M_k -primário em $\mathbb{R}\{x_k\}$. Então, existe α em $\mathbb{R}$ tal que $I \supset M_k^\alpha$, e assim $x_i^\alpha \in I$, $1 \leq i \leq k$.

Portanto $(\alpha, 0, \dots, 0) \in E(I)$, $(0, \alpha, 0, \dots, 0) \in E(I)$, ..., $(0, 0, \dots, 0, \alpha) \in E(I)$.

Logo, $\mathbb{N}^k - E(I)$ é finito.

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathbb{N}^k - E(I)$ é finito.

Assim, existem $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$ em I e α em $\mathbb{N}$ tal que $o(\bar{f}_1) = (\alpha, 0, \dots, 0)$, $o(\bar{f}_2) = (0, \alpha, \dots, 0)$, $o(\bar{f}_k) = (0, \dots, 0, \alpha)$.

Seja $\bar{f}_k = x_k^\alpha + x_k^\alpha h(x_k) \in I$

Temos $\bar{f}_k = x_k^\alpha (1 + h(x_k))$ onde $1 + h(x_k)$ é invertível e portanto $f_k = x_k^\alpha \in I$.

Tomemos $\bar{f}_{k-1} = x_{k-1}^\alpha g_1(x_{k-1}) + x_k g_0(x_k) \in I$
com $g_1(0) = 1$.

Agora, multiplicando $\bar{f}_{k-1}$ por $x_{k-1}^{j\alpha} x_k^{\alpha-j-1}$ obte-

mos que $x_{k-1}^{(j+1)\alpha} x_k^{\alpha-j-1} \in I$, onde $j = 0, \dots, \alpha-1$ e isto acarreta que $f_{k-1} = x_{k-1}^{\alpha^2} \in I$.

Tomemos $\bar{f}_{k-2} = x_{k-2}^{\alpha} g_2(x_{k-2}) + x_{k-1} g_1(x_{k-1}) + x_k g_0(x_k) \in I$ com $g_2(0) = 1$.

Multiplicando $\bar{f}_{k-2}$ por $x_{k-2}^{(j+1)\alpha} x_{k-1}^{\alpha^2-i-1} x_k^{\alpha-j-1}$ obtemos que $x_{k-2}^{(j+i+1)\alpha} x_{k-1}^{\alpha^2-i-1} x_k^{\alpha-j-1} \in I$ onde para cada i variando entre 0 e α^2-1 devemos fazer j variar entre 0 e $\alpha-1$.

Isto acarreta que $f_{k-2} = x_{k-2}^{\beta} \in I$ onde $\beta = \alpha^2 + (\alpha^2-1)\alpha$.

Tomemos agora $\bar{f}_{k-3} = x_{k-3}^{\alpha} g_3(x_{k-3}) + x_{k-2} g_2(x_{k-2}) + x_{k-1} g_1(x_{k-1}) + x_k g_0(x_k)$ onde $g_3(0) = 1$.

Multiplicando $\bar{f}_{k-3}$ por

$x_{k-3}^{(j+i+l)\alpha} x_{k-2}^{\beta-l-1} x_{k-1}^{\alpha^2-i-1} x_k^{\alpha-j-1}$ obtemos que

$x_{k-3}^{(j+i+l+1)\alpha} x_{k-2}^{\beta-l-1} x_{k-1}^{\alpha^2-i-1} x_k^{\alpha-j-1} \in I$ onde para

cada l variando entre 0 e β devemos fazer i variar entre 0 e α^2-1 e para cada i variando entre 0 e α^2-1 devemos fazer j variar entre 0 e α .

Isto acarreta que $f_{k-3} = x_{k-3}^{\beta+(\beta-1)\alpha} \in I$

Podemos prosseguir com este processo para $r = 4, 5, \dots, k-1$, nesta ordem, da seguinte maneira:

Supondo que $x_{k-s}^{\alpha} \in I$, $s = 0, \dots, r-1$ e $\bar{f}_{k-r} = x_{k-r}^{\alpha} g_r(x_{k-r}) + x_{k-r+1} g_{r-1}(x_{k-r+1}) + \dots$

$$+ x_{k-1} g_1(x_{k-1}) + x_k g_0(x_k) \in I \text{ onde } g_r(0) = 1.$$

Multiplicando $\bar{f}_{k-r}$ por

$$x_{k-1}^{(i_0+i_1+\dots+i_{r-1})\alpha_0} x_{k-(r-1)}^{\alpha_{r-1}-i_{r-1}-1} \cdot \dots \cdot x_{k-1}^{\alpha_1-i_1-1} x_k^{\alpha_0-i_0-1}$$

Obtemos que

$$x_{k-r}^{(i_0+i_1+\dots+i_{r-1}+1)\alpha_0} x_{k-(r-1)}^{\alpha_{r-1}-i_{r-1}-1} \cdot \dots \cdot x_{k-1}^{\alpha_1-i_1-1} x_k^{\alpha_0-i_0-1}$$

$\in I$ onde cada i_t varia entre 0 e α_t-1 , $t = 0, \dots, r-1$.

Assim, portanto I é M_k -primário.

Provemos agora que $\# F(I) < \infty$.

Façamos a demonstração por indução.

Seja $I \subset \mathbb{R}\{x\}$. Se I é M_1 -primário, $F(I)$ tem um único elemento x^α para algum α .

Se I não é M_1 -primário, $F(I)$ é vazio.

Seja $I \subset \mathbb{R}\{x, y\}$. Se $F(I)$ é vazio nada temos a fazer. Suponha $F(I) \neq \emptyset$ e seja $(\alpha, \beta) \in F(I)$.

Não podemos ter

$(\alpha_1, \beta_1) \in F(I)$ com $\alpha_1 \geq \alpha$ e $\beta_1 \geq \beta$.

Assim temos que ter

ou $\alpha_1 < \alpha$ ou $\beta_1 < \beta$.

Além disso, não podemos ter

$(\alpha_1, \bar{\beta}) \in F(I)$ e

$(\alpha_2, \bar{\beta}) \in F(I)$ com $\alpha_1 \neq \alpha_2$

pois caso contrário, supondo

$\alpha_1 < \alpha_2$ temos $(\alpha_2, \beta) \in (\alpha_1,$

$\beta) + \mathbb{N}^2$ o que é absurdo.

A mesma observação vale para $(\bar{\alpha}, \beta_1) \in F(I)$ e $(\bar{\alpha},$

$\beta_2) \in F(I)$.

Assim $F(I)$ terá no máximo $\alpha + \beta$ elementos. Portanto $\# F(I) < \infty$.

Suponha agora que $\# F(I) < \infty$ para todo $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}$. Provemos que $\# F(I) < \infty$ para $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$

Se $\# F(I) = \emptyset$ nada temos a fazer.

Suponha $\# F(I) \neq \emptyset$ e sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in F(I)$.

Não podemos ter $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in F(I)$, $\beta \neq \alpha$, com $\beta_1 \geq \alpha_1$, $i = 1, \dots, k$. Assim se $\beta \in F(I)$, teremos obrigatoriamente $\beta_i < \alpha_i$ para algum i .

Para cada j , $0 \leq j \leq \alpha_i$, seja F_j^i a fronteira de $E_j^i \subset \mathbb{N}^{k-1}$ onde $E_j^i \times \{j\} = (\mathbb{N}^{k-1} \times \{j\}) \cap E(I)$.

Como por hipótese $\# F_j^i < \infty$, temos que $\# \bigcup_{i,j} F_j^i \times \{j\} < \infty$, $1 \leq i \leq k$, $0 \leq j \leq \alpha_i$ e além disso $\bigcup_{i,j} F_j^i \times \{j\} \supset F(I)$, $1 \leq i \leq k$; $0 \leq j \leq \alpha_i$.

Assim $\# F(I) < \infty$.

2.4. Definições: Por uma **base canônica** de um ideal $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ entendemos uma família de séries (f_α) , $\alpha \in F(I)$ tal que $o(f_\alpha) = \alpha$.

Diremos que $L: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma linear positiva não nula**, se

$$L(a_1, \dots, a_r) = \sum_{j=1}^r \ell_j a_j, \text{ com os coeficientes } \ell_j$$

sendo números reais positivos não todos nulos.

O teorema que segue aparece no artigo "Weierstrass Préparé a la Hironaka" de Joël Briançon publicado na "Singularité à Cargese, Asterisque nº 7 e 8 pp 67-73, 1973.

2.5. Teorema: Sendo dados:

L uma forma linear positiva sobre $\mathbb{R}^r$

$f_1, \dots, f_p$ elementos de $C\{x, y\}$ onde $x = (x_1, \dots, x_q)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ verificando:

Para todo $i = 1, \dots, p$, existe $E_i \in \mathbb{N}^r$ tal que no desenvolvimento de $f_i = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} f_{iA} y^A$ em relação a y com coeficientes em $C\{x\}$, tem-se:

$$1) f_{iE_i}(0) \neq 0$$

$$2) f_{iA}(0) = 0 \text{ para todo } A \in \mathbb{N}^r, A \neq E_i \text{ e } L(A) \leq L(E_i).$$

Então, para todo $g \in C\{x, y\}$, existem séries $g_1, \dots, g_p, h$ de $C\{x, y\}$ tal que

$$1) g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$$

$$2) h = \sum_{A \in \mathbb{N}^r} h_A y^A \text{ com } h_A = 0 \text{ para } A \in \Delta = \bigcup_{i=1}^p (E_i + \mathbb{N}^r)$$

Exemplos: 1) Sejam $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ tais que $f_i = \lambda_i \underline{x}^{E_i}$, $E_i \in \mathbb{N}^k$, isto é, f_i são monomiais.

Neste caso temos que para todo L , forma linear positivo sobre $\mathbb{R}^k$, as condições do teorema estão satisfeitas.

Assim temos que para todo $g \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$, existem $g_1, \dots, g_p, h \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ tal que:

$$1) g = \sum_{i=1}^p f_i g_i + h$$

$$2) h = \sum_{A \in \mathbb{N}^k} h_A \underline{x}^A \text{ com } h_A = 0 \text{ para todo } A \in \Delta =$$

$$= \bigcup_{i=1}^p (E_i + \mathbb{N}^k).$$

2) Sejam $f_1, f_2 \in \mathbb{R}\{x, y\}$ tais que

$$f_1 = x^3 + 2xy + y^4 \text{ e } f_2 = x^2y^2 + 3xy^3 \text{ com } E_1 =$$

$$= (3, 0) \text{ e } E_2 = (2, 2).$$

Se tomamos

$L(a, b) = a + b$ observamos que:

$L(1, 1) = 2 \leq L(0, 3) = 3$ e $f_1^{(0)}(1, 1) = 2 \neq 0$. Assim para esta L as condições do teorema não estão satisfeitas.

Agora basta

tomar $L_1(x, y) = \alpha x +$

βy tal que a reta $\alpha x + \beta y = L_1(3, 0)$ passe por $(3, 0)$ e por $(0, t)$ com $t \in (0, 1)$. Por exemplo, se tomamos $L_1(x, y) = \frac{1}{6}x +$

$+ y$ temos as conclusões do teorema satisfeitas por todo $g \in$

$\mathbb{R}\{x, y\}$ e existem séries g_1, g_2, h de $\mathbb{R}\{x, y\}$ tais que

$$1) g = \sum_{i=1}^2 f_i g_i + h \text{ e}$$

$$2) h = \sum_{A \in \mathbb{N}^2} h_A x^A \text{ com } h_A = 0 \text{ para todo } A \in \bigcup_{i=1}^2 (E_i +$$

$$+ \mathbb{N}^2).$$

Observação: Se os E_i 's são as ordens dos f_i 's conforme definição em 2.1 deste capítulo, notamos que o L_1 escolhido servirá para quaisquer f 's com as ordens E_1 e E_2 .

3) Sejam $f_1, f_2 \in \mathbb{R}\{x, y, z\}$ tal que $f_1 = x^7 y z^2 +$

z^3 e $f_2 = xy^9z^3 + z^4$ com $E_1 = (7,1,2)$ e $E_2 = (1,9,3)$ que são exatamente as $o(f_i)$, $i = 1,2$.

Se $t \in (0,1)$, temos que

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & b+t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix} = a \cdot (b+t) \cdot t > 0 \text{ se } a \neq 0, \text{ pois } b \geq 0$$

e portanto, existirá realmente um plano passando por estes pontos.

Se $a = 0$, caímos no caso do exemplo anterior.

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior tomamos $L_1(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ tal que o plano $\alpha x + \beta y + \gamma z = L_1(7,1,2)$ passe por $(7,1,2)$, $(0,1+t,2)$ e $(0,0,2+t)$ com t pertencente ao intervalo $(0,1)$.

Por exemplo pensamos em planos paralelos ao plano passando por $(0,0,\frac{3}{2})$, $(7,1,2)$ e $(0,\frac{3}{2},2)$ e obtemos $L_1(x,y,z) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}y + \frac{21}{2}z$.

$$\text{Temos } L_1(E_1) = L_1(7,1,2) = \frac{105}{4} \text{ e}$$

$L_1(0,0,3) = \frac{61}{2} > L_1(E_1)$, logo as hipóteses do teorema estão satisfeitas para E_1 .

No entanto, para E_2 temos $L_1(E_2) = L_1(1,9,3) = \frac{253}{4}$ e $L_1(0,0,4) = 42 < L_1(E_2)$, logo para E_2 , L_1 não satisfaz as hipóteses do teorema.

Vamos resolver este problema da seguinte maneira:

Tomamos $a = \max \{1,7\} = 7$ e $b = \max \{1,9\} = 9$ e trabalhamos com o ponto $(7,9,0)$ para construir a nossa L . Usando o mesmo raciocínio anterior e tomando em particular os pontos $(7,9,0)$, $(0, 9 + \frac{1}{2}, 0)$ e $(0,0,\frac{1}{2})$, obtemos $L(x,y,z) = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}y + \frac{133}{2}z$ donde temos

$$L(E_1) = L(7,1,2) = \frac{553}{4} \text{ e } L(0,0,3) = \frac{399}{2} > L(E_1)$$

$$L(E_2) = L(1,9,3) = \frac{925}{4} \text{ e } L(0,0,4) = 266 > L(E_2)$$

logo, as hipóteses do teorema estão satisfeitas para E_1 e E_2 .

Vamos agora usar o teorema acima para demonstrar o seguinte resultado:

2.6. Lema de Preparação Generalizado

Uma base canônica de um ideal $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ gera I e todo $f \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ pode ser escrito com $g_\alpha \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ e $\lambda_\beta \in \mathbb{R}$ na forma:

$$(*) \quad f = \sum_{\alpha \in F(I)} f_\alpha g_\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)} \lambda_\beta \underline{x}^\beta \quad \text{onde } \{f_\alpha, \alpha \in F(I)\} \text{ é a}$$

base canônica.

Prova:

Vamos proceder por indução sobre k para provar a validade de (*).

Seja $k = 1$. Neste caso a base canônica tem um único elemento f_1 com $E_1 = \alpha = o(f_1)$.

Se tomamos L tal que $L(x) = x$, as hipóteses do teorema estão satisfeitas e a expressão (*) é verdadeira para $k = 1$.

Seja $k = 2$. Temos que $F(I) < \infty$.

Suponha que $f_i, i = 1, \dots, p$ seja uma base canônica para I com $o(f_i) = E_i = (a_i, b_i)$ e $E_1 < E_2 < \dots <$

Se $a_1 \neq 0$, tomamos a reta que passa por E_1 e $(0, b_1 + t)$, $t \in (0, 1)$. Escolhemos, por exemplo, neste caso $t = \frac{1}{2}$ e obtemos $L(x, y) = \frac{1}{2a_1}x + y$.

Se $a_1 = 0$, recaímos no caso anterior.

Temos assim as condições do teorema satisfeitas, o que garante a validade da expressão (*) neste caso.

Seja $k = 3$. Temos que $F(I) < \infty$.

Suponha que $f_i, i = 1, \dots, p$ seja uma base canônica

nica para I com $o(f_i) = E_i = (a_i, b_i, c_i)$ e $E_1 < E_2 < \dots < E_p$.

Seja $a = \max \{a_i, i = 1, \dots, p\}$, $b = \max \{b_i, i = 1, \dots, p\}$.

Supondo $a > 0$, tomando L como no exemplo 3 com $t = \frac{1}{2}$ obtemos $L(x, y, z) = \frac{1}{4}x + \frac{a}{2}y + (\frac{a}{2} + ab)z$ e temos as condições do teorema satisfeitas e portanto vale a expressão (*) para $k = 3$ e $a > 0$.

Se $a = 0$, recaímos em casos anteriores.

Se k qualquer. Temos $F(I) < \infty$.

Suponha que $f_i, i = 1, \dots, p$ seja uma base canônica para I com $o(f_i) = (a_1^i, \dots, a_k^i)$ e $E_1 < E_2 < \dots < E_p$.

Seja $a_j = \max \{a_j^i, i = 1, \dots, p\}, j = 1, \dots, k-1$.

Se tomamos os pontos $(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 0), (0, a_2 + t, 0, \dots, 0), (0, 0, a_3 + t, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, a_{k-1} + t, 0), (0, 0, \dots, 0, t)$ com $t \in (0, 1)$ intervalo aberto, temos:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & 0 \\ 0 & a_2 + t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k-1} + t & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} = a_1 (a_2 + t) \dots (a_{k-1} + t)$$

$t) \cdot t > 0$ se $a_1 \neq 0$, pois $a_i \geq 0, i = 1, \dots, k-1$ e $t > 0$.

Temos portanto que se $a_1 \neq 0$, por estes pontos passa realmente um hiperplano de modo que para cada $E_i, i = 1, \dots, p$, o hiperplano paralelo a este passando por E_i , determina um n -sólido limitado por ele e pelas "partes positivas" dos planos coordenados, no qual não existe $A \in \mathbb{N}^r$ com ordem

lexicográfica maior que a de E_1 .

Se $a_1 = 0$, caímos em casos anteriores.

Vamos mostrar agora que $\{f_i, i = 1, \dots, p\}$, base canônica de I , gera I .

De fato, temos que se $f \in I$,

$$f = \sum_{\alpha \in F(I)} f_{\alpha} \cdot g_{\alpha} + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)} \lambda_{\beta} x^{\beta}, \quad g_{\alpha} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\} \text{ e } \lambda_{\beta} \in \mathbb{R}$$

Como $g = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)} \lambda_{\beta} x^{\beta} \in I$, temos que $o(g) \in I$.

Por outro lado, temos que $o(g) = \bar{\beta}$, para algum $\bar{\beta} \in \mathbb{N}^k - E(I)$ e temos a_i uma contradição.

$$\text{Assim } \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)} \lambda_{\beta} x^{\beta} = 0$$

2.7. Corolário: Se I é M_k -primário, $\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}/I) = \#(\mathbb{N}^k - E(I))$. A família x^{β} , $\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)$ define uma base de $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}/I$.

2.8. Corolário: Se I é M_k -primário, $\frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}}{I}$ admite base monomial

Observações:

$$(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta') \text{ se } \beta < \beta' \text{ ou } \beta = \beta' = \alpha < \alpha'.$$

Temos que se $o(f) = (\alpha, \beta)$, então, podemos escrever $f(x, y) = y^{\beta} \cdot f_1(x, y)$ com f_1 regular em x de ordem α .

Pelo teorema de preparação de Weierstrass, podemos escrever $f_1(x, y) = g(x, y) \cdot h(x, y)$ com

$g(x, y) = x^{\alpha} + a_1(y)x^{\alpha-1} + \dots + a_{\alpha}(y)$ onde $a_1(o) = \dots = a_{\alpha}(o) = 0$, isto é, g é um polinômio de Weierstrass de grau α em x e onde h é uma unidade.

Portanto $f = y^\beta \cdot g(x,y) \cdot h(x,y)$

A fronteira de um ideal M_2 -Primário $I \subset \mathbb{R}\{x,y\}$ consiste de um conjunto

$$A_{\mathbb{N}} = \{A_i = (\alpha_i, \beta_i), i = 0, \dots, s\} \text{ tal que}$$

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_s = 0 \text{ e } 0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_s$$

Escolhemos uma base canônica

$$f_i = y^{\beta_i} g_i, \quad i = 0, \dots, s.$$

2.9 Proposição: Seja I um ideal M_2 -primário em $\mathbb{R}\{x,y\}$ e $\{f_i\}$, $i = 0, 1, \dots, s$ uma base canônica com $f_i = y^{\beta_i} g_i$ onde g_i é um polinômio de Weierstrass de grau α_i em x . Para todo j , $0 \leq j \leq s-1$, existem polinômios u_{j+1}^j em $\mathbb{R}\{y\}[x]$, $j+1 \leq i \leq s$ tal que u_{j+1}^j é um polinômio de Weierstrass de grau $\alpha_j - \alpha_{j+1}$ em x e

$$y^{\beta_{j+1}-\beta_j} f_j = u_{j+1}^j f_{j+1} + \dots + u_s^j f_s$$

Prova:

Temos que $f_{s-1} = y^{\beta_{s-1}} g_{s-1}$ onde g_{s-1} é um polinômio de Weierstrass de grau α_{s-1} . Assim

$$f_{s-1} = y^{\beta_{s-1}} (x^{\alpha_{s-1}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} a_i^{s-1} (y) x^i) \text{ e portanto}$$

$$y^{\beta_s - \beta_{s-1}} f_{s-1} = y^{\beta_s} (x^{\alpha_{s-1}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} a_i^{s-1} (y) x^i) \text{ e tomando}$$

$$u_s^{s-1} = x^{\alpha_{s-1}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} a_i^{s-1} (y) x^i \text{ e sabendo que } f_s = y^{\beta_s},$$

$$\text{temos } y^{\beta_s - \beta_{s-1}} f_{s-1} = u_s^{s-1} y^{\beta_s}.$$

Temos agora $f_{s-2} = y^{\beta_{s-2}} g_{s-2}$ onde g_{s-2} é um polinômio de Weierstrass de grau α_{s-2} . Assim

$$f_{s-2} = y^{\beta_{s-2}} (x^{\alpha_{s-2}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} a_i^{s-2} (y) x^i) \text{ e portanto}$$

$$y^{\beta_{s-1} - \beta_{s-2}} f_{s-2} = y^{\beta_{s-1}} (x^{\alpha_{s-2}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} a_i^{s-2} (y) x^i)$$

Aplicando o teorema de divisão de Weierstrass para g_{s-1} , podemos escrever

$$(*) \quad x^{\alpha_{s-2}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} a_i^{s-2} (y) x^i = q \cdot g_{s-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} r_i^{s-1} (y) x^i,$$

$$r_i(0) = 0.$$

Vamos mostrar que q é um polinômio de Weierstrass de grau $\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}$.

Se fizermos $y = 0$ na expressão acima, obtemos

$$x^{\alpha_{s-2}} = q(x, 0) x^{\alpha_{s-1}} \text{ que acarreta } q = x^{\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}} + h(x, y) \text{ com } h(x, 0) = 0.$$

Afirmamos que se $h \neq 0$, o grau de $h(x, y)$ em relação a x é menor que $\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}$.

Suponhamos que exista um monômio em h com grau $k \geq \alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}$ em x e seja $\alpha y^r x^k$ com $\alpha \neq 0$ e obvia-

mente $r \geq 1$.

Derivando a expressão (*) r-vezes com relação a y e $(k + \alpha_{s-1})$ -vezes com relação a x e em seguida fazendo $x = y = 0$, obtemos:

$$0 \equiv \alpha(r + k + \alpha_{s-1})! \quad (\text{absurdo}).$$

Portanto q é um polinômio de Weierstrass de grau $\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}$.

Temos portanto

$$\begin{aligned} y^{\beta_{s-1}-\beta_{s-2}} f_{s-2} &= y^{\beta_{s-1}} (q \cdot q_{s-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} r_i^{s-1}(y) x^i) = \\ &= y^{\beta_{s-1}} \cdot q \cdot q_{s-1} + y^{\beta_{s-1}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} r_i^{s-1}(y) x^i = \\ &= q \cdot f_{s-1} + y^{\beta_{s-1}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}} r_i^{s-1}(y) x^i \end{aligned}$$

Fazendo $q = u_{s-1}^{s-2}$, resta mostrar que $r_i^{s-1}(y) \equiv 0$ ou que o grau de $r_i^{s-1}(y)$ é maior ou igual a $\beta_s - \beta_{s-1}$.

Temos que $p(x, y) = y^{\beta_{s-1}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} r_i^{s-1}(y) x^i \in I$, por-

$o(p(x, y)) \in E(I)$.

Sabemos que o grau de $p(x,y)$ em x é no máximo $\alpha_{s-1}-1$ é assim o grau de y em cada monômio de $p(x,y)$ deverá ser maior ou igual a β_s , donde concluimos que o grau de $r_i^{s-1}(y) \geq \beta_s - \beta_{s-1}$.

Podemos escrever portanto $p(x,y) = y^{\beta_s} u_s^{s-2} = u_s^{s-2} f_s$ e temos $y^{\beta_{s-1}-\beta_{s-2}} f_{s-2} = u_{s-1}^{s-2} f_{s-1} + u_s^{s-2} f_s$.

Mostremos agora que o resultado é válido para f_{s-3} .

Temos $f_{s-3} = y^{\beta_{s-3}} g_{s-3} = y^{\beta_{s-3}} (x^{\alpha_{s-3}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-3}-1} a_i^{s-3} (y)x^i)$.

Portanto $y^{\beta_{s-2}-\beta_{s-3}} f_{s-3} = y^{\beta_{s-2}} (x^{\alpha_{s-3}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-3}-1} a_i^{s-3} (y)x^i)$.

Aplicando o teorema de divisão de Weierstrass para g_{s-2} podemos escrever.

$$x^{\alpha_{s-3}} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-3}-1} a_i^{s-3} (y)x^i = q_1 g_{s-2} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} r_i^{s-2} (y) x^i$$

Pelo mesmo argumento usado para q , mostramos que q_1 é um polinômio de Weierstrass de grau $\alpha_{s-3}-\alpha_{s-2}$ em x .

Temos portanto

$$\begin{aligned} y^{\beta_{s-2}-\beta_{s-3}} f_{s-3} &= y^{\beta_{s-2}} (q_1 g_{s-2} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} r_i^{s-2} (y)x^i) = \\ &= q_1 f_{s-2} + y^{\beta_{s-2}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} r_i^{s-2} (y)x^i \quad \text{e como} \end{aligned}$$

$$P_1(x,y) = y^{\beta_{s-2}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} r_i^{s-2} (y)x^i \in I \quad \text{com grau em } x \text{ no má-}$$

ximo igual a $\alpha_{s-2}-1$, temos que o grau de todo monômio de

$P_1(x,y)$ com relação a y é maior ou igual a $\beta_{s-1} - \beta_{s-2}$.

Assim, podemos escrever $P_1(x,y) = y^{\beta_{s-1}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} b_i^{s-2}(y) x^i$.

$$b_i^{s-2}(y) x^i.$$

Aplicando novamente o teorema de divisão de Weierstrass para g_{s-1} , obtemos

$$\sum_{i=0}^{\alpha_{s-2}-1} b_i^{s-2}(y) x^i = q_2 g_{s-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} c_i(y) x^i.$$

Temos portanto,

$$\begin{aligned} y^{\beta_{s-2}-\beta_{s-3}} f_{s-3} &= q_1 f_{s-2} + y^{\beta_{s-1}} (q_2 g_{s-1} + \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} c_i(y) x^i) = \\ &= q_1 f_{s-2} + q_2 f_{s-1} + y^{\beta_{s-1}} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} c_i(y) x^i \quad \text{onde, pelo mesmo} \end{aligned}$$

argumento usado anteriormente, o grau dos monômios de $\sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1}$

$c_i(y) x^i$ em relação a y é maior ou igual a $\beta_s - \beta_{s-1}$.

Ficamos com

$$\begin{aligned} y^{\beta_{s-2}-\beta_{s-3}} f_{s-3} &= q_1 f_{s-2} + q_2 f_{s-1} + y^{\beta_s} \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} d_i(y) x^i \quad \text{e fazendo} \\ q_1 &= u_{s-2}^{s-3}, \quad q_2 = u_{s-2}^{s-3}, \quad \sum_{i=0}^{\alpha_{s-1}-1} d_i(y) x^i = u_s^{s-3} \quad \text{e} \quad y^{\beta_s} = f_s \quad \text{te-} \end{aligned}$$

mos que

$$y^{\beta_{s-2}-\beta_{s-3}} f_{s-3} = u_{s-2}^{s-3} f_{s-2} + u_{s-1}^{s-3} f_{s-1} + u_s^{s-3} f_s.$$

Prosseguindo com este processo, chegamos ao resultado.

Exemplo: Seja $I = \langle x^3, y^3(x^2 + 2xy + 4y^2), y^5 \rangle$

Tomemos $f_0 = x^3, f_1 = y^3(x^2 + 2xy + 4y^2), f_2 = y^5$

Temos $\alpha_0 = 3, \beta_0 = 0$

$\alpha_1 = 2, \beta_1 = 3$

$\alpha_2 = 0, \beta_2 = 5$

Para $0 \leq j \leq 1$, temos

$y^{\beta_1 - \beta_0} f_0 = u_1^0 f_1 + u_2^0 f_2$, isto é

$y^3 x^3 = u_1^0 y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2) + u_2^0 y^5$ o que acarreta

ta $u_1^0 = x - 2y$ e $u_2^0 = 8y$

temos ainda $y^{\beta_2 - \beta_1} f_1 = u_2^1 f_2$, isto é,

$y^2 y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2) = u_2^1 y^5$ e portanto

$u_2^1 = x^2 + 2xy + 4y^2$.

2.10. Lema: $A = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n / x^n + a_1 x^{n-1} + \dots +$

$a_{n-1} x + a_n = 0$ tem n soluções dis-

tintas em $\mathbb{R}\}$.

é aberto e tem o em seu fecho.

Prova:

Suponha que $(a_1, \dots, a_n) \in A$,

Queremos provar que $\exists \delta > 0 / \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

com $|y_i - a_i| < \delta, i = 1, \dots, n \Rightarrow x^n + y_1 x^{n-1} + \dots +$

$+ y_{n-1} x + y_n = 0$ tem n soluções distintas em $\mathbb{R}$.

$A \neq \emptyset$, pois $(x-1)(x-2) \dots (x-n) = 0$ tem n raízes distintas em $\mathbb{R}$.

Suponha $(a_1, \dots, a_n) \in A$ e $x_i, i = 1, \dots, n$ são as raízes distintas de $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$

$$\text{Seja } u = \min\left\{\frac{|x_i - x_j|}{3}, i \neq j; i, j = 1, \dots, n\right\}$$

Consideremos a função

$g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ que é contínua e diferenciável com derivadas não nulas nos x_i 's.

Como não podemos ter mais nenhuma raiz além destas n x_i 's, tomando $x_{i,1} = x_i - u$ e $x_{i,2} = x_i + u$ teremos que $g(x_{i,1})$ e $g(x_{i,2})$ terão sinais contrários.

Consideremos agora a função $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

$f(x, y_1, \dots, y_n) = x^n + y_1 x^{n-1} + \dots + y_{n-1} x + y_n$ que é contínua em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Assim, tomando $(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ fixado, temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que se $|x - \bar{x}| < \delta$ e $|y_i - \bar{y}_i| < \delta, i = 1, \dots, n$, então, $|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(\bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)| < \varepsilon$

Tomando $\xi_i = \min\{|g(x_{i,1})|, |g(x_{i,2})|\}$, temos

$\exists \delta_i$ tal que com $|y_i - a_i| < \delta_i, i = 1, \dots, n; \Rightarrow |f(x_{i,1}, a_1, \dots, a_n) - f(x_{i,1}, y_1, \dots, y_n)| < \epsilon_i$ e $|f(x_{i,2}, a_1, \dots, a_n) - f(x_{i,2}, y_1, \dots, y_n)| < \epsilon_i$

Seja $\delta = \min\{\delta_i, i = 1, \dots, n\}$

Assim, para $|y_i - a_i| < \delta, i = 1, 2, \dots, n$ teremos

$$|f(x_{i,1}, a_1, \dots, a_n) - f(x_{i,1}, y_1, \dots, y_n)| < \epsilon_i \text{ e}$$

$$|f(x_{i,2}, a_1, \dots, a_n) - f(x_{i,2}, y_1, \dots, y_n)| < \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sabendo que $f(x_{i,1}, a_1, \dots, a_n) = g(x_{i,1})$ e

$f(x_{i,2}, a_1, \dots, a_n) = g(x_{i,2})$, concluímos que

$f(x_{i,1}, y_1, \dots, y_n)$ e $f(x_{i,2}, y_1, \dots, y_n)$ tem sinais contrários e como f é contínua, existe $\bar{x}_i \in (x_{i,1}; x_{i,2})$ tal que $f(\bar{x}_i, y_1, \dots, y_n) = 0$

Como os intervalos $(x_{i,1}; x_{i,2}), i = 1, \dots, n$ são disjuntos, temos que

$f(x, y_1, \dots, y_n) = 0$, tem n raízes distintas $\bar{x}_i, i = 1, \dots, n$ sempre que $|y_i - a_i| < \delta$.

Provamos que A é aberto. Temos que provar agora que $0 \in \bar{A}$.

Tomamos o polinômio

$$(x - \frac{1}{r}) \cdot (x - \frac{1}{2r}) \cdot \dots \cdot (x - \frac{1}{nr}) \text{ que tem } n \text{ raízes distintas.}$$

Como os coeficientes de $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x, x^0$ depen-

dem das raízes, podemos escolher r de forma a tê-los tão pequenos quanto se queira.

2.11. Corolário 1: Sejam $H_a = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ e $H_b = x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m$, com $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

Então o conjunto

$B = \{(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+m} / H_a \cdot H_b = 0 \text{ tem } n + m \text{ soluções distintas em } \mathbb{R}\}$ é aberto e tem o em seu fecho.

Prova:

Evidentemente $B \neq \emptyset$ e tem o em seu fecho, pois tomando o polinômio $(x - \frac{1}{r}) \cdot (x - \frac{1}{2r}) \dots (x - \frac{1}{(n+m)r})$, podemos escolher r de forma a que as raízes sejam tão pequenas quando queiramos.

Seja $x_1, \dots, x_{n+m}$ $n + m$ soluções distintas para $H_a \cdot H_b = 0$ de modo que $x_1, \dots, x_n$ sejam soluções para $H_a = 0$ e $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ sejam soluções para $H_b = 0$.

Pela técnica de demonstração do lema, sabemos que para qualquer $\xi > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se

$|\bar{a}_i - a_i| < \delta_1$ e $|\bar{b}_j - b_j| < \delta_2$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, então $|\bar{x}_i - x_i| < \xi$ onde $\bar{x}_i$, $i = 1, \dots, n + m$ são as raízes de

$$H_{\bar{a}} = x^n + \sum_{i=1}^n \bar{a}_i x^{n-i} \text{ e } H_{\bar{b}} = x^m + \sum_{j=1}^m \bar{b}_j x^{m-j}$$

Tomando $\xi = \min \left\{ \frac{|x_i - x_j|}{3}, i \neq j, i, j = 1, \dots, \right.$

$n + m\}$ e $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, temos a prova.

Observação:

Usando o mesmo raciocínio, podemos estender este resultado para um número finito qualquer de fatores do tipo H_a .

2.12. Corolário 2: Seja $f(x, \underline{\mu}, \underline{c}) = x^k + h_1(\underline{\mu}, \underline{c}) x^{k-1} + \dots + h_k(\underline{\mu}, \underline{c})$ com as h_i 's contínuas, $x \in \mathbb{R}$, $\underline{\mu} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{c} \in \mathbb{R}^p$. Seja $\underline{c}_1$ tal que $f(x, \underline{o}, \underline{c}_1) = 0$ tenha k soluções distintas em x .

Então, existe vizinhança U de $(\underline{o}, \underline{c}_1)$ em $\mathbb{R}^{n+p}$ tal que para $(\underline{\mu}, \underline{c}) \in U$, $f(x, \underline{\mu}, \underline{c}) = 0$ tem k soluções distintas em x .

Prova:

Temos, pelo lema, que existe aberto $V \subset \mathbb{R}^k$, com $(h_1(\underline{o}, \underline{c}_1), \dots, h_k(\underline{o}, \underline{c}_1)) \in V$ e tal que para $(a_1, \dots, a_k) \in V$, $x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k = 0$ tem k soluções distintas em x .

Como $h_1, \dots, h_k$ são contínuas, V é aberto e $(h_1(\underline{o}, \underline{c}_1), \dots, h_k(\underline{o}, \underline{c}_1)) \in V$, então, existem abertos $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $W_2 \subset \mathbb{R}^p$ com $(\underline{o}, \underline{c}_1) \in W_1 \times W_2$ tal que para $(\underline{\mu}, \underline{c}) \in W_1 \times W_2$ tem-se que $h_1(\underline{\mu}, \underline{c}), \dots, h_k(\underline{\mu}, \underline{c}) \in V$.

2.13. Teorema: Seja I um ideal M_2 -primário em $\mathbb{R}\{x, y\}$ e $(f_0, \dots, f_s)$ uma base canônica. Então, existe uma deformação $(F_0, \dots, F_s)$ com $\delta(I)$ - zeros próximos de zero.

Prova:

Podemos considerar $f_i = y^{\beta_i} g_i$ com g_i um poli-

nômio de Weierstrass de grau α_i em x e onde $o(f_i) = (\alpha_i, \beta_i)$.

Pela proposição anterior temos

$$\begin{aligned} y^{\beta_{j+1}-\beta_j} f_j &= \mu_{j+1}^j f_{j+1} + \dots + \mu_s^j f_s \implies \\ \implies y^{\beta_{j+1}} g_j &= \mu_{j+1}^j y^{\beta_{j+1}} g_{j+1} + \dots + \mu_s^j y^{\beta_s} g_s \text{ onde } g_s \equiv 1 \\ \implies g_j &= \mu_{j+1}^j g_{j+1} + \mu_{j+2}^j y^{\beta_{j+2}-\beta_{j+1}} g_{j+2} + \dots + \mu_s^j y^{\beta_s-\beta_{j+1}} g_s \end{aligned}$$

Vamos construir a deformação $(F_0, \dots, F_s)$ na seguinte forma

$$F_j(x, y, \underline{\eta}, \underline{c}) = \left[\prod_{\ell=1}^{\beta_j} (y - \eta_\ell) \right] G_j(x, y, \underline{\eta}, \underline{c}), \quad 0 \leq j \leq s, \quad \text{onde}$$

$G_j(x, y, \underline{\eta}, \underline{c})$ é uma deformação de g_j e $\underline{\eta}, \underline{c}$ são parâmetros na deformação.

$$\text{Temos } F_j(x, y, \underline{0}, \underline{0}) = y^{\beta_j} g_j = f_j(x, y) \text{ e de fato}$$

$$(F_0, F_1, \dots, F_s) \text{ é uma deformação de } (f_0, \dots, f_s)$$

Vamos definir agora os G_j pela indução decrescente sobre j :

Tomemos primeiro deformação de μ_{j+1}^j

$$U_{j+1}^j = \mu_{j+1}^j + \sum_{m=0}^{\alpha_j - \alpha_{j+1} - 1} C_j^{(m)} x^m, \quad C_j^{(m)} \text{ parâmetros.}$$

Coloquemos $G_s \equiv 1$. Logo, G_s é uma deformação de g_s .

$$\text{Seja } G_{s-1} = U_s^{s-1} G_s = \mu_s^{s-1} + \sum_{m=0}^{\alpha_{s-1} - 1} C_{s-1}^{(m)} x^m.$$

Para $C_{s-1}^{(m)} = 0$, temos $G_{s-1} = g_{s-1}$ e portanto G_{s-1} é uma deformação de g_{s-1} .

Tomemos agora

$$G_j = U_{j+1} G_{j+1} + \sum_{\ell=\beta_{j+1}+1}^{\beta_{j+2}} \pi (y-\eta_\ell) \mu_{j+2}^j G_{j+2} + \dots +$$

$$+ \sum_{\ell=\beta_{j+1}+1}^{\beta_s} \pi (y-\eta_\ell) \mu_s^j G_s, \text{ que é deformação de } g_j, \text{ pois}$$

$$G_j(x, y, \underline{o}, \underline{o}) = g_j(x, y)$$

Afirmamos que existe um aberto σ no espaço $\mathbb{R}^{1+\beta_s+\alpha_o}$ espaço das variáveis $(y, \underline{\eta}, \underline{c})$ com $\underline{o} \in \sigma$ e tal que, para pontos deste conjunto, G_j tem α_j soluções distintas em x .

De fato:

Observamos que

$$G_j(x, \underline{o}, \underline{o}, \underline{c}) = (x^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} + \sum_{m=0}^{\alpha_j - \alpha_{j+1} - 1} c_j^{(m)} x^m) \cdot G_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq s-1$$

$$\text{Fazendo } H_j = x^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} + \sum_{m=0}^{\alpha_j - \alpha_{j+1} - 1} c_j^{(m)} x^m, \quad \text{temos}$$

$$G_j(x, \underline{o}, \underline{o}, \underline{c}) = \prod_{k=j}^{s-1} H_k = H_j \cdot H_{j+1} \cdot \dots \cdot H_{s-2} \cdot H_{s-1} =$$

$$= (x^{\alpha_j - \alpha_{j+1}} + \sum_{m=0}^{\alpha_j - \alpha_{j+1} - 1} c_j^{(m)} x^m) \cdot (x^{\alpha_{j+1} - \alpha_{j+2}} + \sum_{m=0}^{\alpha_{j+1} - \alpha_{j+2} - 1} c_{j+1}^{(m)} x^m) \cdot$$

$$\dots \cdot (x^{\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1}} + \sum_{m=0}^{\alpha_{s-2} - \alpha_{s-1} - 1} c_{s-2}^{(m)} x^m) \cdot (x^{\alpha_{s-1}} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\alpha_{s-1} - 1} c_{s-1}^{(m)} x^m)$$

Pelo corolário 1, temos que o conjunto

$$B = \{c = (c_o^{(o)}, \dots, c_o^{(\alpha_o - \alpha_1 - 1)}, c_1^{(o)}, \dots, c_1^{(\alpha_1 - \alpha_2 - 1)}, \dots,$$

$$\dots, c_{s-1}^{(o)}, \dots, c_{s-1}^{(\alpha_{s-1} - 1)}) \in \mathbb{R}^{\alpha_o} \text{ tal que, todo } G_j(x, \underline{o}, \underline{o}, \underline{c}),$$

$j = 0, \dots, s-1$ tem α_j soluções distintas em $\mathbb{R}\}$ é aberto e tem $\underline{o}$ em seu fecho.

Agora, para qualquer ponto $\underline{c} \in B$, temos pelo corolário 2, que existe uma vizinhança U_c^j de $(0,0,c)$ tal que para $(y, \underline{n}, \underline{c})$ nessa vizinhança $G_j(x, y, \underline{n}, \underline{c})$ tem α_j soluções distintas em x .

Temos $U_c = \bigcap U_c^j$ é uma vizinhança de $(0,0,c)$ tal que todo $G_j(x, y, \underline{n}, c)$ tem α_j soluções distintas em x com $(y, \underline{n}, c) \in U_c$.

Assim, existe $\sigma = \bigcup_{c \in B} U_c$ tal que todo G_j tem α_j soluções distintas em x , é aberto, não vazio e tem 0 em seu fecho.

Como cada H_j é um polinômio de Weierstrass em x , para $(y, \underline{n}, \underline{c})$ próximos de zero, as soluções serão próximas de zero.

Analisemos o número de zeros próximos de zero da deformação $(F_0, F_1, \dots, F_s)$ de $(f_0, f_1, \dots, f_s)$.

Tomemos $(\underline{n}, c)$ suficientemente próximo de $(0,0)$ de modo que $(y, \underline{n}, \underline{c}) \in \sigma$ quando $y = \eta_\ell$, $1 \leq \ell \leq \beta_s$ e $\eta_i \neq \eta_j$ para $i \neq j$.

Sabemos que

$$(\beta_s - \beta_{s-1})\alpha_{s-1} + (\beta_{s-1} - \beta_{s-2})\alpha_{s-2} + \dots + (\beta_1 - \beta_0)\alpha_0 =$$

$\delta(I)$

Tomando $y = \eta_j$, $\beta_{s-1} < j \leq \beta_s$, temos:

$$F_s(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \sum_{\ell=1}^{\beta_s} \pi (\eta_j - \eta_\ell) = 0, \text{ para todo } x.$$

$G_{s-1}(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0$ tem α_{s-1} soluções distintas em x : $x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{s-1}}$. Assim

$$F_{s-1}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \sum_{\ell=1}^{\beta_{s-1}} \pi (\eta_j - \eta_\ell) G_{s-1}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0,$$

$i = 1, \dots, \alpha_{s-1}$ e $\beta_{s-1} < j \leq \beta_s$.

$$G_{s-2}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = U_{s-1}^{s-2} G_{s-1}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) + \\ + \sum_{\ell=\beta_{s-1}+1}^{\beta_s} \pi (\eta_j - \eta_\ell) \cdot \mu_s^{s-2} \cdot G_s(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0,$$

$i = 1, \dots, \alpha_{s-1}$ e $\beta_{s-1} < j \leq \beta_s$

$$\text{Portanto } F_{s-2}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \sum_{\ell=1}^{\beta_{s-2}} \pi (\eta_j - \eta_\ell).$$

$$G_{s-2}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0, \quad i = 1, \dots, \alpha_{s-1} \text{ e } \beta_{s-1} < \ell \leq \beta_s$$

Indutivamente, teremos

$$G_k(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = U_{k+1}^k G_{k+1}(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) + \\ + \sum_{\ell=\beta_{k+1}}^{\beta_{k+2}} \pi (\eta_j - \eta_\ell) \mu_{k+2}^k(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) + \dots + \sum_{\ell=\beta_{k+1}}^{\beta_s} \pi (\eta_j - \eta_\ell).$$

$$\cdot \mu_s^k G_s(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0 \text{ e}$$

$$F_k(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \sum_{\ell=1}^{\beta_k} \pi (\eta_j - \eta_\ell) G_k(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0$$

$i = 1, \dots, \alpha_{s-1}; \beta_{s-1} < \ell \leq \beta_s \text{ e } 0 \leq k \leq s.$

Portanto, temos $(\beta_s - \beta_{s-1}) \cdot \alpha_{s-1}$ soluções distintas.

Seja agora $\beta_{s-2} < j \leq \beta_{s-1}$,

$$F_s(x, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = \pi_{\ell=1}^{\beta_s} (n_j - n_\ell) = 0 \text{ para todo } x$$

$$F_{s-1}(x, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = \pi_{\ell=1}^{\beta_{s-1}} (n_j - n_\ell) G_{s-1}(x, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0, \text{ para todo } x.$$

$G_{s-2}(x, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0$ tem α_{s-2} soluções distintas em x : $x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_{s-2}}$

Então:

$$F_{s-2}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = \pi_{\ell=1}^{\beta_{s-2}} (n_j - n_\ell) \cdot G_{s-2}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0$$

$$i = 1, \dots, \alpha_{s-2}, \beta_{s-2} < j \leq \beta_{s-1}$$

$$G_{s-3}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = U_{s-2}^{s-3} G_{s-2}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) + \\ + \pi_{\ell=\beta_{s-2}+1}^{\beta_{s-1}} (n_j - n_\ell) \mu_{s-1}^{s-3} G_{s-1}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) + \pi_{\ell=\beta_{s-2}+1}^{\beta_s} (n_j - n_\ell) \mu_s^{s-3} \cdot$$

$$\cdot G_s(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0, \quad i = 1, \dots, \alpha_{s-2}, \beta_{s-2} < j \leq \beta_{s-1}$$

$$F_{s-3}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = \pi_{\ell=1}^{\beta_{s-3}} (n_j - n_\ell) G_{s-3}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0$$

Indutivamente teremos

$$G_k(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = U_{k+1}^k G_{k+1}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) + \pi_{\ell=\beta_{k+1}+1}^{\beta_{k+2}} (n_j - n_\ell) \mu_{k+2}^k \cdot$$

$$\cdot G_{k+2}(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) + \dots + \pi_{\ell=\beta_{k+1}+1}^{\beta_s} (n_j - n_\ell) \mu_s^k G_s(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) =$$

$$= 0 \text{ e } F_k(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = \pi_{\ell=1}^{\beta_k} (n_j - n_\ell) G_k(x_i, n_j, \underline{n}, \underline{c}) = 0$$

$$i = 1, \dots, \alpha_{s-2} \quad \beta_{s-2} < j \leq \beta_{s-1} \quad 0 \leq k \leq s$$

e portanto, temos mais $(\beta_{s-1} - \beta_{s-2}) \cdot \alpha_{s-2}$ soluções distintas.

Seguindo com este processo, chegamos a

$y = \eta_j$, $0 = \beta_0 < j \leq \beta_1$. temos:

$$F_s(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \prod_{\ell=1}^{\beta_s} (\eta_j - \eta_\ell) = 0, \text{ para todo } x, \quad 0 < j \leq \beta_1$$

$$F_{s-1}(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \prod_{\ell=1}^{\beta_{s-1}} (\eta_j - \eta_\ell) = 0, \text{ para todo } x, \quad 0 < j \leq$$

β_1 .

Até

$$F_1(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = \prod_{\ell=1}^{\beta_1} (\eta_j - \eta_\ell) = 0, \text{ para todo } x, \quad 0 < j \leq \beta_1$$

Temos

$$G_0(x, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0 \text{ tem } \alpha_0 \text{ soluções distintas em } x, \quad 0 <$$

$$< j \leq \beta_1 : x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_0} \text{ e portanto}$$

$$F_0(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = G_0(x_i, \eta_j, \underline{\eta}, \underline{c}) = 0$$

$$i = 1, \dots, \alpha_0 \quad 0 < j \leq \beta_1$$

Portanto, temos mais $\beta_1 \cdot \alpha_0$ soluções distintas.

Concluindo, $(F_0, F_1, \dots, F_s)$ é uma deformação de $(f_0, f_1, \dots, f_s)$ tendo

$$\alpha_{s-1}(\beta_s - \beta_{s-1}) + \alpha_{s-2}(\beta_{s-1} - \beta_{s-2}) + \dots + \alpha_0 \beta_1 = \delta(I)$$

zeros próximos de zero.

Exemplos: 1. Seja $I = \langle x^3, y^3 \rangle \subset \mathbb{R}\{x, y\}$

$$f_0 = x^3 = y^0 g_0 \Rightarrow g_0 = x^3 \cdot g_1 \quad \text{e} \quad \mu_1^0 = x^3$$

$$f_1 = y^3 = y^3 \cdot g_1 \Rightarrow g_1 = 1$$

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 3 \quad \alpha_0 = 3, \alpha_1 = 0$$

$$U_1^0 = \mu_1^0 + \sum_{m=0}^{\alpha_0-1} c_0^{(m)} x^m = x^3 + c_0^{(2)} x^2 + c_0^{(1)} x + c_0^{(0)} = G_0$$

$$G_1 = 1$$

$$F_j = (x, y, \underline{n}, \underline{c}) = \left[\prod_{\ell=1}^{\beta_j} (y - \eta_\ell) \right] G_j(x, y, \underline{n}, \underline{c}), \quad 0 \leq j \leq 1$$

Assim

$$F_0 = x^3 + c_0^{(2)} x^2 + c_0^{(1)} x + c_0^{(0)}$$

$$F_1 = (y - \eta_1) \cdot (y - \eta_2) \cdot (y - \eta_3)$$

2. Seja $I = \langle x^3, y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2), y^5 \rangle$

Tomemos $f_0 = x^3$, $f_1 = y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2)$, $f_2 = y^5$

$$\alpha_0 = 3, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 0 \quad \text{e} \quad \beta_0 = 0, \beta_1 = 3, \beta_2 = 5$$

$$y^{\beta_1 - \beta_0} f_1 = \mu_1^0 f_1 + \mu_2^0 f_2$$

$$\left| \begin{array}{l} y^3 x^3 = (x - 2y) y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2) + 8y \cdot y^5 \\ y^{\beta_3 - \beta_1} f_1 = \mu_2^1 f_2 \end{array} \right.$$

$$y^2 \cdot y^3 (x^2 + 2xy + 4y^2) = (x^2 + 2xy + 4y^2) y^5$$

$$\begin{cases} g_0 = \mu_1^0 g_1 + \mu_2^0 y^{\beta_2 - \beta_1} g_2 = (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) + 8y \cdot y^2 \\ g_1 = \mu_2^1 g_2 = (x^2+2xy+4y^2) \cdot 1 \\ g_2 = 1 \end{cases}$$

$$U_1^0 = \mu_1^0 + \sum_{m=0}^{\alpha_0 - \alpha_1 - 1} c_0^{(m)} x^m = x - 2y + c_0^{(0)}$$

$$U_2^1 = \mu_2^1 + \sum_{m=0}^{\alpha_1 - \alpha_2 - 1} c_1^{(m)} x^m = x^2 + 2xy + 4y^2 + c_1^{(1)}x + c_1^{(0)}$$

$$G_2 = 1$$

$$G_1 = x^2 + 2xy + 4y^2 + c_1^{(1)}x + c_1^{(0)}$$

$$\begin{aligned} G_0 &= U_1^0 G_1 + \sum_{\ell=\beta_1+1}^{\beta_2} \pi (y-\eta_\ell) \cdot \mu_2^0 G_2 = \\ &= (x-2y+c_0^{(0)}) (x^2+2xy+4y^2+c_1^{(1)}x+c_1^{(0)}) + \\ &+ (y-\eta_4) \cdot (y-\eta_5) \cdot 8y \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{cases} F_0 = (x-2y+c_0^{(0)}) (x^2+2xy+4y^2+c_1^{(1)}x+c_1^{(0)}) + (y-\eta_4) \cdot (y-\eta_5) \cdot 8y \\ F_1 = (y-\eta_1) (y-\eta_2) (y-\eta_3) (x^2+2xy+4y^2+c_1^{(1)}x+c_1^{(0)}) \\ F_2 = (y-\eta_1) \cdot (y-\eta_2) \cdot (y-\eta_3) \cdot (y-\eta_4) \cdot (y-\eta_5) \end{cases}$$

2.14. Teorema: Para todo germe estável $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ do tipo Σ_2 , a dimensão da álgebra associada $\delta(f)$ é um invariante topológico.

Prova:

Temos pelo Lema 3.3 , **CAPÍTULO I**, que

$$Q(f) = \frac{\xi_n}{\langle f_1, \dots, f_p \rangle \xi_n} \approx \frac{\mathbb{R}\{x_1, x_2\}}{\langle g_1, g_2 \rangle}, \quad \text{com}$$

$I = \langle g_1, g_2 \rangle \subset M_2^2$, M -primário, representação minimal de

I .

Pelo teorema anterior, existe uma deformação de $\langle g_1, g_2 \rangle$ com $\delta(I)$ zeros próximos de zero e pelo teorema 1.12, $m(f) = \delta(f)$, donde se conclui que $\delta(f)$ é uma invariante topológico.

CAPÍTULO III

1. IDEAIS M_k -primários EM $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$.

Seja I um ideal M_k -primário em $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$.

Como I é M_k -primário, existe um menor inteiro $\ell+1$ tal que $(0, \dots, 0, \ell+1)$ pertence a $F(I)$.

Então, para cada i , $0 \leq i \leq \ell+1$ denotamos por F_i a fronteira de E_i onde $E_i \times \{i\} = (N^{k-1} \times \{i\}) \cap E(I)$.

Como um exemplo, damos os E_i 's e os F_i 's correspondentes à seguinte $E(I)$.

Desde nossa discussão anterior está claro que

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{\ell+1} \text{ e que } F(I) \subset \bigcup_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\}.$$

1.1. **Lema:** Seja $I \subset \mathbb{R}\{x_k\}$, M_k -primário.

Para cada $\alpha \in \bigcup_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\}$, onde $\ell+1$ é menor in-

teiro tal que $(0, \dots, 0, \ell+1)$ pertence a $F(I)$, existe f_α em I tal que $f_\alpha = x^\alpha + \sum \lambda_\beta^\alpha x^\beta$, $\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)$ e $\beta > \alpha$.

Prova:

Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \bigcup_{i=1}^{\ell+1} F_i \times \{i\}$.

Como $\alpha \in I$, existe f_α em I tal que

$$f_\alpha = x^\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k} \lambda_\beta^\alpha x^\beta, \quad \beta > \alpha, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{N}^k.$$

Assim, resta provar que podemos escolher f_α de modo que $\beta \in \mathbb{N}^k - E(I)$.

Como I é M_k -primário, pelo teorema 2.3 do capítulo II, existem j_i , $i = 1, \dots, k$ tais que $x_i^{j_i} \in I$.

Suponha que estes j_i 's sejam os menores possíveis, donde temos que $j_k = \ell+1$.

Podemos portanto escolher $\bar{f}_\alpha = x^\alpha + \sum_{\beta \in \mathbb{N}^k} \lambda_\beta^\alpha x^\beta \in I$,

$\beta > \alpha$, de modo que cada $\beta_i < j_i$, $i = 1, \dots, k$.

Desta forma os $\bar{f}_\alpha$'s serão polinômiais.

Usando a ordem lexicográfica reversa sobre as ordens dos $\bar{f}_\alpha$'s, podemos reescrever a família $\{\bar{f}_\alpha\}$ como $\{\bar{f}_j / 1 \leq j \leq s\}$ onde

$$s = \prod_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\} \text{ e o } (\bar{f}_J) = \alpha_j \text{ com } \alpha_j = (\alpha_i^j, \dots, \alpha_k^j).$$

Sabemos que $\alpha_s = (0, \dots, 0, \ell+1)$. Assim

$$\bar{f}_s = x_k^{\ell+1} + \sum \lambda_\beta^s x^\beta \in I, \beta > \alpha_s \text{ e teremos } \beta_k \geq \ell+1 \text{ sempre.}$$

Portanto podemos escrever

$$\bar{f}_s = x_k^{\ell+1} (1 + \sum \lambda_\beta^s x^{\beta_1}, \dots, x_{k-1}^{\beta_{k-1}} x_k^{\beta_k - \ell - 1}) \text{ e portanto po-}$$

demus tomar $f_s = x_k^{\ell+1} \in I$.

Temos $\alpha_{s-1} = (0, \dots, 0, \alpha_{k-1}^{s-1}, \ell)$. Assim

$$\bar{f}_{s-1} = x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{s-1}} x_k^\ell + \sum \lambda_\beta^{s-1} x^\beta \in I, \beta > \alpha_{s-1}$$

donde

$$\bar{f}_{s-1} = x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{s-1}} x_k^\ell + \sum \lambda_{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell)}^{s-1} x^{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell)} +$$

$$+ \sum \lambda_\gamma^{s-1} x^\gamma, (\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell) > (0, \dots, 0, \alpha_{k-1}^{s-1}, \ell) \text{ e}$$

$$\gamma \geq (0, \dots, 0, \ell+1).$$

Como $x_k^{\ell+1} \in I$, temos que $\bar{\bar{f}}_{s-1} \in I$, onde

$$\bar{\bar{f}}_{s-1} = x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{s-1}} x_k^\ell + \sum \lambda_{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell)}^{s-1} x^{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell)},$$

$$(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell) > (0, \dots, 0, \alpha_{k-1}^{s-1}, \ell).$$

Portanto, podemos escrever

$$\bar{\bar{f}}_{s-1} = x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{s-1}} x_k^\ell (1 + \sum \lambda_{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1}, \ell)}^{s-1} x^{(\beta_1, \dots, \beta_{k-1} - \alpha_{k-1}^{s-1}, 0)})$$

Logo, podemos tomar

$$f_{s-1} = x_{k-1}^{\alpha_{k-1}^{s-1}} x_k^{\ell} \in I.$$

Agora, para cada $\bar{f}_j$ na ordem lexicográfica reversa decrescente, usamos o seguinte processo:

Seja $\lambda_{\bar{\beta}}^{\alpha} x^{\bar{\beta}}$ o monômio de menor ordem de $\bar{f}_j$ tal que $\bar{\beta} \in E(I)$, $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_k)$.

Temos que, existe $h \in I$, polinomial, escolhida da mesma forma como escolhemos $\bar{f}_\alpha$, tal que

$$o(h) = \bar{\beta} \text{ e } h = x^{\bar{\beta}} + \sum \lambda_{\gamma} x^{\gamma}, \quad \gamma > \bar{\beta}.$$

Tomando agora $\bar{f} = \bar{f}_j - \lambda_{\bar{\beta}}^{\alpha} h$, obtemos um polinômio de ordem α , pertencente a I onde não comparece nenhum termo de ordem menor ou igual a $\bar{\beta}$.

Usando esse raciocínio seguidamente com todo $\beta \in E(I)$ e eliminando os termos supérfluos, com um número finito de passos, obtemos o desejado.

Exemplos: Vamos analisar um ideal $I \subset \mathbb{R}\{x, y\}$ que tenha uma escada com a seguinte conformação:

$$\text{Tomemos } y^3 + \sum_{(a,b) > (0,3)} \lambda_{(a,b)}^{(0,3)} x^a y^b \in I. \quad \text{Temos}$$

$$y^3 + \sum_{(a,b) > (0,3)} \lambda_{(a,b)}^{(0,3)} x^a y^b = y^3 (1 + \sum_{(a,b) > (0,3)} \lambda_{(a,b)}^{(0,3)} x^a y^{b-3})$$

e como este último fator é inversível, podemos tomar

$$f_3 = y^3 \in I.$$

$$\text{Tomemos } xy^2 + \sum_{(a,b) > (1,2)} \lambda_{(a,b)}^{(1,2)} x^a y^b \in I. \quad \text{Temos}$$

$$xy^2 + \sum_{(a,b) > (1,2)} \lambda_{(a,b)}^{(1,2)} x^a y^b = xy^2 + \sum_{(a,2) > (1,2)} \lambda_{(a,2)}^{(1,2)} x^a y^2 + \\ + \sum_{(a,b) \geq (0,3)} \lambda_{(a,b)}^{(1,2)} x^a y^b.$$

Como $y^3 \in I$, podemos tomar

$$xy^2 + \sum_{(a,2) > (1,2)} \lambda_{(a,2)}^{(1,2)} x^a y^2 = xy^2 (1 + \sum_{(a,2) > (1,2)} \lambda_{(a,2)}^{(1,2)} x^{a-1}) \\ \in I.$$

Como o segundo fator é inversível, podemos escolher $f_2 \in I$ tal que $f_2 = xy^2$.

$$\text{Tomemos então } x^2 + \sum_{(a,b) > (2,0)} \lambda_{(a,b)}^{(2,0)} x^a y^b \in I. \text{ Te-} \\ \text{mos } x^2 + \sum_{(a,b) > (2,0)} \lambda_{(a,b)}^{(2,0)} x^a y^b = x^2 + \sum_{(a,0) > (2,0)} \lambda_{(a,0)}^{(2,0)} x^a + \\ + \sum_{(a,1) \geq (0,1)} \lambda_{(a,1)}^{(2,0)} x^a y + \sum_{(a,2)} \lambda_{(a,2)}^{(2,0)} x^a y^2 + \sum_{(a,b) \geq (0,3)} \lambda_{(a,b)}^{(2,0)} \\ \cdot x^a y^b.$$

Como y^3 e xy^2 pertencem a I , podemos tomar

$$x^2 + \sum_{(a,0) > (2,0)} \lambda_{(a,0)}^{(2,0)} x^a + \sum_{(a,1) \geq (0,1)} \lambda_{(a,1)}^{(2,0)} x^a y +$$

$$+ \lambda_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 \in I.$$

Ainda, como I é M_2 -primário, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x^{k+1} \in I$. Logo, podemos tomar:

$$g = x^2 + \lambda_{(3,0)}^{(2,0)} x^3 + \lambda_{(4,0)}^{(2,0)} x^4 + \dots + \lambda_{(k,0)}^{(2,0)} x^k + \lambda_{(0,1)}^{(2,0)} y + \\ + \lambda_{(1,1)}^{(2,0)} xy + \lambda_{(2,1)}^{(2,0)} x^2 y + \dots + \lambda_{(k,1)}^{(2,0)} x^k y + \lambda_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 \in I.$$

Logo, $g - \lambda_{(3,0)}^{(2,0)} x g \in I$ e eliminando termos em que comparece x^{k+1} , obtemos:

$$x^2 + \bar{\lambda}_{(4,0)}^{(2,0)} x^4 + \dots + \bar{\lambda}_{(k,0)}^{(2,0)} x^k + \bar{\lambda}_{(0,1)}^{(2,0)} y + \bar{\lambda}_{(1,1)}^{(2,0)} xy + \\ + \bar{\lambda}_{(2,1)}^{(2,0)} x^2 y + \dots + \bar{\lambda}_{(k,1)}^{(2,0)} x^k y + \bar{\lambda}_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 \in I.$$

Podemos, desta forma, repetindo este artifício seguidamente, obter:

$$g_1 = x^2 + \mu_{(0,1)}^{(2,0)} y + \mu_{(1,1)}^{(2,0)} xy + \mu_{(2,1)}^{(2,0)} x^2 y + \dots + \mu_{(k,1)}^{(2,0)} x^k y + \\ + \mu_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 \in I.$$

Logo, $g_2 = g_1 - \lambda_{(2,1)}^{(2,0)} y g_1 \in I$ e eliminando termos em que aparecem y^3 e xy^2 obtemos que

$$x^2 + \bar{\mu}_{(0,1)}^{(2,0)} y + \bar{\mu}_{(1,1)}^{(2,0)} xy + \bar{\mu}_{(3,1)}^{(2,0)} x^3 y + \dots + \bar{\mu}_{(k,1)}^{(2,0)} x^k y + \\ + \bar{\mu}_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 \in I.$$

Usando este mesmo artifício seguidamente, podemos tomar $f_1 \in I$ com.

$$f_1 = x^2 + \alpha_{(0,1)}^{(2,0)} y + \alpha_{(1,1)}^{(2,0)} xy + \alpha_{(0,2)}^{(2,0)} y^2.$$

Temos assim uma base $\{f_1, f_2, f_3\}$ na forma do lema.

Seja I M_k -primário e $\ell+1$ o menor inteiro positivo com $(0, \dots, 0, \ell+1) \in F(I)$.

Para cada $\alpha \in \bigcup_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\}$, seja f_α como no lema.

Observamos que $o(f_\alpha) = \alpha$ e que a família $\{f_\alpha, \alpha \in \bigcup_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\}\}$, contém a família $\{f_\alpha, \alpha \in F(I)\}$ que dão uma base polinomial canônica para I .

Para cada $k, -1 \leq k \leq \ell+1$, seja $P_k = \# \left(\bigcup_{i=0}^k F_i \times \{i\} \right)$,

onde, obviamente $P_{-1} = 0$

Então, podemos reescrever a família precedente

$\{f_\alpha, \alpha \in \bigcup_{i=0}^{\ell+1} F_i \times \{i\}\}$ como $\{f_j, 1 \leq j \leq P_{\ell+1}\}$ tal que se

$P_{i-1} < j \leq P_i$, então, $o(f_j) = (\alpha_j, i)$ com $\alpha_j \in F_i$.

Pelo Lema 1.1 podemos escrever

$$f_j = x_k^i (f_j^{(0)} + x_k f_j^{(1)} + \dots + x_k^{\ell-i} f_j^{(\ell-i)}) \text{ com}$$

$$f_j^{(r)} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}, \quad 0 \leq r \leq \ell-i.$$

$$\text{Se tomarmos } h_j = f_j^{(0)} + x_k f_j^{(1)} + \dots + x_k^{\ell-i-1} f_j^{(\ell-i-1)}.$$

$$f_j^{(\ell-i-1)} \text{ e } g_i = f_j^{(\ell-i)}, \text{ então, } f_j = x_k^i (h_j + x_k^{\ell-i} g_j) \text{ com}$$

$$h_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\} \text{ e } g_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}.$$

1.2. Definição: Nos referimos a esta família $\{f_j\}$ como uma base canônica para I na direção x_k e para $0 \leq i \leq \ell$ definimos I_i o ideal em $\mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}$ gerado por

$$\{f_j^{(0)} / P_{i-1} < j \leq P_i\}.$$

Exemplos:

1.

$I \subset \mathbb{R}\{x,y,z\}$, I M-primário

$$I = \langle x^5, x^2y^2, xy^4, y^6, x^4z^2, y^2z^3, xy^2z^2, z^7 \rangle$$

Consideremos o ponto $(0,0,7) \in F(I)$.

Para cada i , $0 \leq i \leq 7$, denotamos por F_i a
 Fronteira de E_i , onde $E_i \times \{i\} = (\mathbb{N}^{k-1} \times \{i\}) \cap E(I)$

No nosso exemplo, temos

Neste caso, temos

$$P_{-1} = 0, P_0 = 4, P_1 = 8, P_2 = 11, P_3 = 13, P_4 = 15, P_5 = 17, \\ P_6 = 19, P_7 = 20$$

Uma base canônica $\{f_j\}$ para o ideal I na direção z será:

$$f_1 = x^5, f_2 = x^2 y^2, f_3 = x y^4, f_4 = y^6$$

$$f_5 = x^5 z, f_6 = x^2 y^2 z, f_7 = x y^4 z, f_8 = y^6 z$$

$$f_9 = x^4 z^2, f_{10} = x y^2 z^2, f_{11} = y^6 z^2$$

$$f_{12} = x^4 z^3, \quad f_{13} = y^2 z^3$$

$$f_{14} = x^4 z^4, \quad f_{15} = y^2 z^4$$

$$f_{16} = x^4 z^5, \quad f_{17} = y^2 z^5$$

$$f_{18} = x^4 z^6, \quad f_{19} = y^2 z^6$$

$$f_{20} = z^7$$

No nosso exemplo, os ideais $I_i \subset \mathbb{R}\{x, y\}$, $0 \leq i \leq 6$ são:

$$I_0 = \langle x^5, x^2 y^2, xy^4, y^6 \rangle$$

$$I_1 = \langle x^5, x^2 y^2, xy^4, y^6 \rangle$$

$$I_2 = \langle x^4, xy^2, y^6 \rangle$$

$$I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = \langle x^4, y^2 \rangle$$

$$\text{Codim } I_0 = \text{cod } I_1 = 16$$

$$\text{Codim } I_2 = 12$$

$$\text{Codim } I_3 = \text{codim } I_4 = \text{codim } I_5 = \text{codim } I_6 = 8$$

$$\text{Assim Codim } I = 32 + 12 + 32 = 76$$

2.

Seja $I \subset \mathbb{R}\{x, y, z\}$, $I = M_3^4$

Portanto $I = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^3z, x^2z^2, xz^3, y^3z, y^2z^2, yz^3, xy^2z, xyz^2, x^2yz, z^4 \rangle$

Consideremos o ponto $(0, 0, 4) \in F(I)$.

Para cada i , $0 \leq i \leq 4$ denotamos por F_i a fronteira de E_i onde $E_i \times \{i\} = (\mathbb{N}^{k-1} \times \{i\}) \cap E(I)$

No nosso exemplo, temos:

Neste caso, temos $P_{-1} = 0$, $P_0 = 5$, $P_1 = 9$, $P_2 = 12$, $P_3 = 14$ e $P_4 = 15$

Uma base canônica $\{f_j\}$ para o ideal I na direção z é $f_1 = x^4$, $f_2 = x^3y$, $f_3 = x^2y^2$, $f_4 = xy^3$, $f_5 = y^4$

$$f_6 = x^3y, f_7 = x^2yz, f_8 = xy^2z, f_9 = y^3z$$

$$f_{10} = x^2z^2, f_{11} = xyz^2, f_{12} = y^2z^2$$

$$f_{13} = xz^3, f_{14} = yz^3$$

$$f_{15} = z^4$$

Os ideais $I_i \subset \mathbb{R}\{x, y\}$, $0 \leq i \leq 3$ são

$$I_0 = \langle x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 \rangle$$

$$I_1 = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle$$

$$I_2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$$

$$I_3 = \langle x, y \rangle$$

Codim $I_0 = 10$, codim $I_1 = 6$, codim $I_2 = 3$ e codim $I_3 = 1$

Assim codim $I = 10 + 6 + 3 + 1 = 20$

Esta forma de calcular codimensão de I é garantida pela proposição 1.4 deste capítulo.

1.3. **Lema:** Todo $f = x_k^i g \in I$, pode ser escrito como $f = \sum_j g_j f_j + g_{p_{\ell+1}} x_k^{\ell+1}$, $p_{i-1} < j \leq p_{\ell}$, $g_j \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$ e

$$g_{p_{\ell+1}} \in \mathbb{R} x_k.$$

Prova:

Seja $f = x_k^i (g^{(0)}(x_1, \dots, x_{k-1}) + x_k g^{(1)}(x_1, \dots, x_k))$.

Aplicando o Lema de preparação generalizado (2.6 do capítulo II), obtemos:

$$x_k^i g^{(0)} = \sum_j g_j f_j x_k^i + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} \quad \text{onde } p_{i-1} < j \leq p_i \text{ e}$$

$$\beta \in \mathbb{N}^{k-1} - E_i, \quad \text{com } \beta' = (\beta, i).$$

$$\text{Onde } g^{(0)} = \sum_j g_j f_j + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta}, \quad \beta \in \mathbb{N}^{k-1} - E_i,$$

$$p_{i-1} < j \leq p_i \text{ e } g_j \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}.$$

$$\text{Relembrando que } f_j = x_k^i f_j^{(0)} + x_k^{i+1} \psi_j \text{ com } \psi_j \in$$

$\mathbb{R}\{x_k\}$, podemos escrever

$$x_k^i g^{(0)} = \sum_j g_j f_j x_k^i + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} =$$

$$= \sum_{g_j} (f_j - x_k^{i+1} \psi_j) + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} =$$

$$= \sum g_j f_j - x_k^{i+1} \sum g_j \psi_j + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} =$$

$$= \sum g_j f_j + x_k^{i+1} g'' + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'}$$

$$\text{Com } g'' = - \sum g_j \psi_j$$

$$\text{Então, } f = x_k^i (g^{(0)} + x_k g^{(1)}) =$$

$$= \sum g_j f_j + x_k^{i+1} g'' + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} + x_k^{i+1} g^{(1)} =$$

$$= \sum g_j f_j + x_k^{i+1} (g'' + g^{(1)}) + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'}$$

$$\text{Fazendo } g'' + g^{(1)} = \bar{g}_1, \text{ obtemos:}$$

$$f = \sum g_j f_j + x_k^{i+1} \bar{g}_1 + \sum \lambda_{\beta} x^{\beta'}, \bar{g}_1 \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$$

$$\text{e } g_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}.$$

Podemos agora, indutivamente, repetir este processo para $x_k^{i+1} \bar{g}_1$. Se nós repetimos isto, mais $\ell-i$ vezes, obtemos

$$f = \sum g_j f_j + x_k^{\ell+1} \bar{g}_{\ell-i+1} + \sum \bar{\lambda}_{\beta} x^{\beta'}, \bar{g}_{\ell-i+1} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$$

onde $P_{i-1} < j \leq P_{\ell}$ e $\beta' \notin E(I)$.

Como $x_k^{\ell+1} \in I$, temos

$$\sum \bar{\lambda}_{\beta} x^{\beta'} = f - (\sum g_j f_j + \bar{g}_{\ell-i+1} x_k^{\ell+1}) \in I, \quad P_{i-1} < j \leq P_{\ell}$$

e assim $\alpha(\sum \bar{\lambda}_{\beta} x^{\beta'}) \in E(I)$ o que é impossível e devemos ter

$$\sum \lambda_{\beta} x^{\beta'} = 0$$

Portanto

$$f = \sum g_j f_j + x_k^{\ell+1} \bar{g}_{\ell-i+1}, \quad g_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\} \quad \text{e} \quad \bar{g}_{\ell-i+1} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$$

$$\text{ou} \quad f = \sum g_j g_j + x_k^{\ell+1} g_{p_{\ell+1}}, \quad g_{p_{\ell+1}} = \bar{g}_{\ell-i+1}, \quad p_{i-1} < j \leq p,$$

$$g_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\} \quad \text{e} \quad g_{p_{\ell+1}} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}.$$

Exemplo: Seja $I = \langle x^3 + 3xy + 2y^2, x^3y + 4xy^3 - y^4,$

$$x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4, x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4, xy^4, y^5 \rangle$$

Tomemos

$$f = 2x^6y^2 + 6x^4y^3 + 4x^3y^4 - 3x^3y^3 - 15xy^4 + 6x^2y^4 + 7x^3y^7$$

Podemos escrever

$$f = y^2 \underbrace{[2x^6]}_{g(0)} + y \underbrace{(6x^4 + 4x^3y - 3x^3 - 15xy + 6x^2y + 7x^3y^4)}_{g(1)}$$

$$2y^2x^6 = 2x^3 \cdot x^3y^2 \quad \text{e como}$$

$$x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4 = x^3y^2 + y^3(5 - 3xy), \quad \text{temos}$$

$$2y^2x^6 = 2x^3(x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4) + y^3[-2x^3(5-3xy)]$$

Assim

$$f = 2x^3(x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4) + y^3[-2x^3(5 - 3xy) + 6x^4 + 4x^3y -$$

$$- 3x - 15xy + 6x^2y + 7x^3y^4] =$$

$$= 2x^3(x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4) + y^3(-10x^3 + 6x^4y + 6x^4 + 4x^3y -$$

$$- 3x^3 - 15xy + 6x^2y + 7x^3y^4) =$$

$$= 2x^3(x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4) + y^3(-13x^3 + 6x^4y + 6x^4 + 4x^3y -$$

$$- 15xy + 6x^2y + 7x^3y^4)$$

Repetimos o processo para:

$$f_1 = y^3(-13x^3 + 6x^4y + 6x^4 + 4x^3y - 15xy + 6x^2y + 7x^3y^4)$$

Podemos escrever

$$f_1 = y^3[-13x^3 + 6x^4 + y(6x^4 + 4x^3 - 15x + 6x^2 + 7x^3y^3)]$$

Temos

$$y^3(-13x^3 + 6x^4) = (-13x + 6x^2)x^2y^3 \text{ e}$$

Como

$$x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4 = x^2y^3 + y^4(5 - 2x), \text{ temos}$$

$$y^3(-13x^3 + 6x^4) = (-13x + 6x^2)(x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4) + \\ + y^4[(13x - 6x^2) \cdot (5 - 2x)]$$

Assim

$$f_1 = (-13x + 6x^2)(x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4) + \\ + y^4[(13x - 6x^2) \cdot (5 - 2x) + 6x^4 + 4x^3 - 15x + 6x^2 + 7x^3y^3] = \\ = (-13x + 6x^2)(x^3y^3 + 5y^4 - 2xy^4) + y^4([65x - 26x^2 - 30x^2 + \\ + 12x^3 + 6x^4 + 4x^3 - 15x + 6x^2 + 7x^3y^3] = \\ = (-13x + 6x^2)(x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4) + \\ + y^4[50x - 50x^2 + 16x^3 + 6x^4 + 7x^3y^3]$$

Repetimos o processo para

$$f_2 = y^4[50x - 50x^2 + 16x^3 + 6x^4 + 7x^3y^3] \text{ temos}$$

$$f_2 = y^4[50x - 50x^2 + 16x^3 + 6x^4 + y(7x^3y^2)] \text{ e}$$

$$y^4(50x - 50x^2 + 16x^3 + 6x^4) = (50 - 50x + 16x^2 + 6x^3)xy^4$$

Assim

$$f_2 = (50 - 50x + 16x^2 + 6x^3)xy^4 + y^5(7x^3y^2) \text{ e } f \text{ pode ser}$$

escrito:

$$f = 2x^3(x^3y^2 + 5y^3 - 3xy^4) + (-13x + 6x^2)(x^2y^3 + 5y^4 - 2xy^4) + (50 - 50x + 16x^2 + 6x^3)xy^4 + 7x^3y^2 \cdot y^5.$$

1.4. **Proposição:** Se I é um ideal M_k -primário, $I \subset \mathbb{R}\{x_k\}$ com $I_i \subset \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$, $0 \leq i \leq \ell$, definidos como em 1.2, então:

(1) cada ideal I_i é um ideal M_{k-1} -primário em $\mathbb{R}\{x_{k-1}\}$.

(2) temos $E_i = E(I_i)$; $F_i = F(I_i)$ e

$\{f_j^{(0)}, P_{i-1} < j \leq P_i\}$ é um conjunto de geradores canônicos de I_i .

(3) $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_\ell$

(4) I_i , $0 \leq i \leq \ell$, independem dos geradores canônicos $\{f_j\}$ usados para defini-los.

Prova:

(2) Para $P_{i-1} < j \leq P_i$, $f_j^{(0)} \in I_i$ tal que

$$o(f_j^{(0)}) = \alpha_j \in E(I_i).$$

Então, como $\{\alpha_j / P_{i-1} < j \leq P_i\}$ é a fronteira F_i de E_i , qualquer elemento $\beta \in E_i$ tem a forma $\alpha_j + \gamma$, para algum $\gamma \in \mathbb{N}^{k-1}$.

Então, como I_i é um ideal, $\alpha_j \in E(I_i)$ implica

que $\alpha_j + \gamma \in E(I_i)$. Assim $E_i \subset E(I_i)$.

Reciprocamente, se $h \in I_i$, então existe $g_j \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$ tal que

$$h = \sum_j g_j f_j^{(0)} \text{ somada sobre } P_{i-1} < j \leq P_i.$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \bar{h} &= \sum_j g_j f_j = \sum_j g_j x_k^i (f_j^{(0)} + x_k \bar{h}_j) = \\ &= x_k^i \left(\sum_j g_j f_j^{(0)} + x_k \sum_j g_j \bar{h}_j \right) = x_k^i (h + x_k h_1). \end{aligned}$$

Assim, temos que $o(\bar{h}) = (o(h), i) \in E(I)$ e também que $o(\bar{h}) \in E(I) \cap (\mathbb{N}^{k-1} \times \{i\})$, isto é, $o(h) \in E_i$.

Portanto, $E(I_i) \subset E_i$ e temos a igualdade.

De $F(I_i) = F_i = \{o(f_j^{(0)}) / P_{i-1} < j \leq P_i\}$, segue que

$\{f_j^{(0)} / P_{i-1} < j \leq P_i\}$ é um conjunto canônico de geradores

para I_i .

Para (1), usamos o Teorema 2.3 do Capítulo II e o fato que

$$(\mathbb{N}^{k-1} - E(I_i)) \times \{i\} = (\mathbb{N}^{k-1} - E_i) \times \{i\} \subset \mathbb{N}^k - E(I)$$

que é finito.

Para (3) aplicamos o lema para $x_k f_j$, $P_{i-1} < j \leq P_i$

Obtemos $x_k f_j = \sum_r g_r f_r + g_{P_{\ell+1}} x_k^{\ell+1}$, $P_i < r \leq P_\ell$ com

$g_r \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$ e $g_{P_{\ell+1}} \in \mathbb{R}\{x_k\}$.

Igualando os termos em x_k^{i+1} , obtemos

$$x_k^{i+1} f_j^{(0)} = x_k^{i+1} \sum g_r f_r^{(0)}, \quad p_i < r \leq p_{i+1} \quad \text{ou}$$

$$f_j^{(0)} = \sum g_r f_r^{(0)}, \quad p_i < r \leq p_{i+1} \quad \text{e portanto} \quad f_j^{(0)} \in I_{i+1} \quad \text{o}$$

que acarreta $I_i \subset I_{i+1}$, pois todos seus geradores pertencem a I_{i+1} .

Por último, mostramos que I_i independe dos geradores canônicos $\{f_j\}$, $i = 0, \dots, \ell$.

Se $\{f'_j\}$ é outro conjunto de geradores canônicos, queremos mostrar que para $I'_i = \langle f'_j^{(0)} / p_{i-1} < j \leq p_i \rangle$, $I'_i \subset I_i$.

Então, pela simetria, eles serão iguais.

Aplicando o lema para f'_j , obtemos

$$f'_j = \sum g_r f_r + g_{p_{\ell+1}} x_k^{\ell+1}, \quad p_{i-1} < r \leq p_\ell, \quad g_r \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\} \quad \text{e}$$

$$g_{p_{\ell+1}} \in \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}.$$

Igualando os termos envolvendo x_k^i , obtemos

$$x_k^i f'_j^{(0)} = x_k^i \sum g_r f_r^{(0)}, \quad p_{i-1} < r \leq p_i.$$

$$\text{Assim} \quad f'_j^{(0)} = \sum g_r f_r^{(0)} \in I_i.$$

Observações:

1. Uma importante consequência de (2) é que se

$$q_i = \text{codim } I_i = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}}{I_i} \right) \quad \text{e}$$

$$q = \text{codim } I = \dim_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}}{I} \right) \quad \text{então} \quad q = \sum_{i=0}^{\ell} q_i.$$

Usaremos este fato quando construirmos deformações

de I com q soluções próximas de zero.

(2) Se desejarmos alterar os geradores canônicos para I_i , ($i = 0, \dots, \ell$) e escolher no lugar, geradores $\{\bar{f}_j^{(0)}\}$, podemos encontrar $\bar{f}_j \in I$ da forma $x_k^i (\bar{f}_j^{(0)} +$

$+ x_k \bar{\psi}_j)$, geradores de I na direção x_k .

De fato, como podemos escrever

$$\bar{f}_j^{(0)} = \sum g_r f_r^{(0)}, \quad P_{i-1} < r \leq P_i, \quad \text{podemos escolher}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_j &= \sum g_r f_r = \sum g_r x_k^i (f_r^{(0)} + x_k \psi_r) = \\ &= x_k^i (\bar{f}_j^{(0)} + x_k \sum g_r \psi_r). \end{aligned}$$

Exemplo: Se em lugar do ideal $I_2 = \langle x^4, xy^2, y^6 \rangle$ no nosso exemplo anterior, tomarmos o ideal

$$\bar{I}_2 = \langle x^4 + x^3 y^4, xy^2 + x^4 y^6, y^6 + x^5 \rangle$$

Podemos encontrar, $\bar{f}_j$ da seguinte maneira:

Temos

$$f_9 = x^4 z^2; \quad f_{10} = xy^2 z^2, \quad f_{11} = y^6 z^2$$

$$f_9^{(0)} = x^4; \quad f_{10}^{(0)} = xy^2, \quad f_{11}^{(0)} = y^6$$

$$\bar{f}_9^{(0)} = x^4 + x^3 y^4 = 1 \cdot x^4 + x^2 y^2 \cdot xy^2 = \sum g_r f_r^{(0)}$$

$$\bar{f}_{10}^{(0)} = xy^2 + x^4 y^6 = 1 \cdot xy^2 + x^4 y^6$$

$$\bar{f}_{11}^{(0)} = y^6 + x^5 = 1 \cdot y^6 + xy^4 \quad \text{e assim}$$

$$\bar{f}_j = \sum g_r f_r \quad \text{e temos}$$

$$\bar{f}_9 = x^4 z^2 + x^2 y^2 xy^2 z^2 = x^4 z^2 + x^3 y^4 z^2$$

$$\bar{f}_{10} = xy^2z^2 + x^4y^6z^2$$

$$\bar{f}_{11} = y^6z^2 + x.x^4.z^2 = y^6z^2 + x^5z^2$$

3. Em [01] da bibliografia os autores afirmam que:

Se $f_j = x_k^i (h_j + x_k^{\ell-i} g_j)$ é uma base canônica na direção x_k ; então, podemos assumir que para cada j_0 , $P_{i-1} < j_0 \leq P_i$, ou $g_{j_0} = 0$ ou $g_{j_0} \notin \langle g_j/j \neq j_0 \rangle + I$, $P_{i-1} < j \leq P_i$.

Para demonstrar esta afirmação usam os seguintes argumentos:

Podemos, em primeiro lugar, remover termos em x_k^ℓ . I_ℓ dos f_j . Então, se $g_{j_0} = \sum_{j \neq j_0} r_j$, podemos substituir

$$f_{j_0} \text{ por } \bar{f}_{j_0} = f_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} r_j f_j.$$

Assim, $\{f_j/j \neq j_0\} \cup \{\bar{f}_{j_0}\}$ é ainda um conjunto de geradores canônicos e $\bar{f}_{j_0} = x_k^i \bar{h}_{j_0}$ e $\bar{g}_{j_0} = 0$.

Se além disso, todo $h_j \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$, então, também $\bar{h}_{j_0} \in \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$ e não perturbamos esta propriedade.

Temos para esta afirmação o seguinte contra.

Exemplo: Seja $I = \langle x^6, y^6, zx^3 + z^3y, zy^3 + z^3xy, z^2x^3, z^2y^3, z^3x^2, z^3y^2, z^4 \rangle$

onde fazemos $f_1 = x^6$, $f_2 = y^6$, $f_3 = zx^3 + z^3y$,

$$f_4 = zy^3 + z^3xy, \quad f_5 = z^2x^3, \quad f_6 = z^2y^3, \quad f_7 = z^3x^2,$$

$$f_8 = z^3 y^2 \text{ e } f_9 = z^4.$$

Se tomamos $\bar{f}_4 = f_4 - x f_3 = z y^3 - z x^4$, temos que $\{f_1, f_2, f_3, \bar{f}_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ não é mais uma base canônica para I .

Com a redação a seguir o resultado vale e é o que necessitaremos no capítulo IV.

Se $f_j = x_k^i (h_j + x_k^{\ell-i} g_j)$ é uma base canônica na direção x_k , então, podemos assumir que para cada j_0 , $P_{i-1} < j_0 \leq P_i$, ou $g_{j_0} = 0$ ou $g_{j_0} \notin \langle g_j / j > j_0 \rangle + I_\ell$,

$$P_{i-1} < j \leq P_i.$$

1.5. Definição: Seja I um ideal M_k -primário em $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$. Diremos que I satisfaz a **condição** (x_k) se existir uma base canônica $\{f_j\}$ de I , na direção x_k tal que para cada j , $P_{i-1} < j \leq P_i$,

$$f_j = x_k^i (f_j^{(0)} + x_k^{\ell-i} g_j), \quad f_j^{(0)}, \quad g_j \in \mathbb{R}\{\underline{x}_{k-1}\}.$$

Exemplo: $I = \langle x^4, x^3 y, x^2 y^2 + 2z^4, y^3, x^3 z + 3x^2 y z^4, y^2 z, x z^2 + 5z^4, z^5 \rangle$.

1.6. Definição: Seja $A \subset \mathbb{N}^k$ e $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ um ideal M_k -primário com deformação $F(\underline{x}, t)$ tendo $m(I)$ soluções próximas de zero. Então, dizemos que F tem $\#(A)$ **soluções na forma de A**, se dado $\xi > 0$, existe uma família de números reais $|x_i^{(J)}| < \xi$, $1 \leq i \leq k$, $J = 0, 1, \dots$ e t tal que

$\{(x_1^{(J_1)}, \dots, x_k^{(J_k)}), (J_1, \dots, J_k) \in A\}$ dá $\mathbb{H}(A)$ das $m(I)$

soluções para $F(., \underline{t}) = 0$.

Exemplo: Seja $I = \langle x_1^3, x_1 x_2^2, x_2^4 \rangle \subset \mathbb{R}\{x_1, x_2\}$ e seja $A = \mathbb{N}^2 - E(I)$

$$A = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (0,2), (0,3)\}$$

A deformação F dada por

$$F(x_1, x_2, t) = ((x_1 - x_1^{(0)})(x_1 - x_1^{(1)})(x_1 - x_1^{(2)}), (x_1 - x_1^{(0)})(x_2 - x_2^{(0)})(x_2 - x_2^{(1)}), (x_2 - x_2^{(0)})(x_2 - x_2^{(1)})(x_2 - x_2^{(2)})(x_2 - x_2^{(3)})) \text{ tem } \mathbb{H}(A)$$

soluções na forma de A .

Observações:

Se I tem uma deformação com soluções na forma de A , então I tem deformação com soluções na forma de A_1 para todo $A_1 \subset A$.

1.7. Lema: Se $I \subset \mathbb{R}\{x_k\}$ é um ideal M_k -primário gerado por monômios, então, existe uma deformação F de I cujas soluções tem a forma de $\mathbb{N}^k - E(I)$ com $x_i^{(J)}$ arbitrariamente escolhidas de forma que as soluções sejam distintas.

Prova:

Em primeiro lugar notamos que se I é gerado por monômios, então, admite uma base canônica na direção x_k formada por monômios. Então, procedemos por indução sobre k .

Se $k = 1$, o resultado segue devido a que em $\mathbb{R}\{x\}$, os únicos ideais são $\langle x^\ell \rangle$, $\ell = 1, 2, \dots$, e estes tem $\prod_{i=1}^{\ell} (x - x_i)$ como deformação.

Se $k > 1$, os ideais $I_0, \dots, I_\ell$ correspondendo a I são gerados por monômios em $\mathbb{R}\{x_{k-1}\}$.

Por indução, existem deformações F_i , $0 \leq i \leq \ell$, tendo soluções na forma de $\mathbb{N}^{k-1} - E_i$.

Além disso, podemos escolher as soluções de F_i , $i = 1, \dots, \ell$ coincidindo com as soluções de F_0 .

Então, a deformação F definida por

$$(F_0, (x_k - x_k^{(1)})F_1, \dots, \prod_{i=1}^{\ell} (x_k - x_k^{(i)})F_\ell, \prod_{i=1}^{\ell+1} (x_k - x_k^{(i)})) \text{ tem}$$

soluções na forma de $\mathbb{N}^k - E(I)$.

1.8. Proposição: Seja $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ ($n \leq p$) estável, com

álgebra $Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$, I gerado por monômios.

$$\text{Então, } m(f) = \delta(f)$$

Prova:

Temos que $Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$ e pelo Lema 3.3 do Capí-

tulo I, $\frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I} \approx \frac{\mathbb{R}\{x_a\}}{J}$, $J \subset M_2^2$, J numa representação mi-

nimal e monomial.

Pelo Lema anterior, existe uma deformação de J com $\delta(f) = \delta(J) - o - o$ e pelo teorema 1.12 do Capítulo II temos $m(f) = \delta(f)$.

Exemplos: 1. $I = \langle x_k^{\ell+1}, x_i^2 \mid 1 \leq i \leq k-1, x_i x_j \mid$

$$1 \leq i < j \leq k \rangle \subset \mathbb{R}\{x_k\}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ um germe estável ($n \leq p$) cuja álgebra tenha uma representação minimal

$$Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I} \quad \text{com } I = \langle x_k^{\ell+1}, x_i^2 + \xi_i x_k^\ell \mid 1 \leq i \leq k-1,$$

$$x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq k \rangle, \text{ onde } \xi_i = \pm 1 \text{ ou } 0.$$

Então, $m(f) = \delta(f)$.

De fato:

Vamos proceder por indução sobre k .

Para $k = 2$, deformamos $\langle y^{\ell+1}, x^2 + \xi y^\ell, xy \rangle$

$$\text{para } \left(\pi_{i=1}^{\ell+1} (y-y_i), (x-x_1)(x-x_2) + \xi \pi_{i=2}^{\ell+1} (y-y_i), (x-x_1)(y-y_1) \right)$$

Quando $y = y_1$, existem duas soluções com $x = x_1$, $x = x_2$ e quando $y = y_i$, $2 \leq i \leq \ell+1$, existem ℓ soluções com $x = x_1$. Assim $m(I) = \delta(I) = \ell+2$.

Se $k > 2$, podemos supor que $\xi_{k-1} \neq 0$ e fazendo

$$\xi'_i = -\frac{\xi_i}{\xi_{k-1}}, \quad 1 \leq i \leq k-2, \quad \text{temos}$$

$$I = \langle x_k^{\ell+1}, x_{k-1}^2 + \xi_{k-1} x_k^\ell, x_{k-2}^2 + \xi'_{k-2} x_{k-1}^2, \dots, x_1^2 + \xi'_1 x_{k-1}^2, x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq k \rangle.$$

Consideremos o ideal $I'_0 \subset \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$.

$$I'_0 = \langle x_{k-2}^2 + \xi'_{k-1} x_{k-1}^2, \dots, x_1^2 + \xi'_1 x_{k-1}^2, x_i x_j$$

$$1 \leq i < j \leq k-1 \rangle$$

Então, $x_{k-1}^3 \in I_0$ e I_0 é do tipo de I com $k-1$ e $\ell+1 = 3$.

Assim, podemos supor por indução se $\xi'_{k-2} \neq 0$, (se todo $\xi'_i = 0$, I'_0 é gerado por monômios e vale o resultado), que I'_0 admite uma deformação F'_0 tendo $\delta(I'_0) - 2$ zeros com $x_{k-1} = x_{k-1}^{(1)}$, um zero com $x_{k-1} = x_{k-1}^{(2)}$ e um zero com $x_{k-1} = x_{k-1}^{(3)}$.

Denotamos as coordenadas deste último zero por $x_i = x_i^{(3)}$. Então, a seguinte deformação de I será suficiente:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{m=1}^{\ell+1} (x_k - x_k^{(m)}) \right), (x_{k-1} - x_{k-1}^{(1)}) (x_{k-1} - x_{k-1}^{(2)}) + \xi_{k-1} \prod_{m=2}^{\ell+1} (x_k - x_k^{(m)}) \\ & - \xi_{k-1} \prod_{m=2}^{\ell+1} (x_k^{(1)} - x_k^{(m)}), F'_0, (x_k - x_k^{(1)}) (x_i - x_i^{(3)}) \quad 1 \leq i \leq k-1 \end{aligned}$$

onde $x_k^{(m)}$ são tais que

$$\xi_{k-1} \prod_{m=2}^{\ell+1} (x_k^{(1)} - x_k^{(m)}) = (x_{k-1}^{(3)} - x_{k-1}^{(1)}) (x_{k-1}^{(3)} - x_{k-1}^{(2)}).$$

Com efeito, é uma deformação de I e quando $x_k = x_k^{(1)}$ as equações se reduzem a

$$(x_{k-1} - x_{k-1}^{(1)}) (x_{k-1} - x_{k-1}^{(2)}) = F'_0 = 0 \quad \text{que tem}$$

$$\delta(I'_0) - 2 + 1 \text{ soluções;}$$

quando $x_k = x_k^{(m)}$ $2 \leq m \leq \ell+1$ existe uma solução $x_i = x_i^{(3)}$

$$1 \leq i \leq k-1.$$

Assim a deformação precedente tem

$$\delta(I'_0) - 1 + \ell = \delta(I) \quad \text{zeros próximos de zero.}$$

1.9. Definição: Dizemos que um ideal M_k -primário $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ satisfaz a **condição (d)** se:

(1) os geradores canônicos de I na direção $\underline{x}_k$ correspondendo a I_j para $j > 0$ são monômios,

(2) I_0 tem uma deformação $F_0(\underline{x}, \underline{t}, s)$ tal que as coordenadas de $F_0(\underline{x}, 0, x_k^\ell)$ pertencem a I e dado $\xi > 0$, existem $\underline{t}, s$ com $\|\underline{t}\| < \xi$ e $|s| < \xi$ tal que:

(a) $F_0(\underline{x}, \underline{t}, 0)$ tem $\delta(I_0) - 0 - 0$

(b) $F_0(\underline{x}, \underline{t}, s)$ tem soluções na forma de $\mathbb{N}^{k-1} - E(I_1)$

(3) I satisfaz a condição (x_k) .

Exemplo: $I = \langle x^4, x^3y, x^2y^2 + 2z^4, y^3, xz, yz, z^5 \rangle$.

1.10. Teorema: Se $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ é um ideal M_k -primário que satisfaz a condição (d), então $m(I) = \delta(I)$.

Prova:

Seja $F_0(\underline{x}_{k-1}, \underline{t}_0, s)$ dada pela condição (d) e sejam $F_1(\underline{x}_{k-1}, t_1), \dots, F_\ell(\underline{x}_{k-1}, t_\ell)$, deformação de $I_1, \dots, I_\ell$ dadas pelo lema 1.8.

Sabemos que $F_0(\underline{x}_{k-1}, \underline{t}_0, s)$ tem soluções na forma $\mathbb{N}^{k-1} - E(I_1)$ e, também, podemos escolher parâmetros $\underline{t}_i$ de modo que as F_i, s tenham soluções que concordem com as soluções de $F_0(\underline{x}_{k-1}, \underline{t}_0, s)$ sobre $\mathbb{N}^{k-1} - E(I_i) \subset \mathbb{N}^{k-1} - E(I_1)$.

Então, considere a deformação de I com parâmetros $\underline{t} = (\underline{t}_0, \dots, t_\ell, x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(\ell+1)})$ e s dada por

$$\prod_{i=1}^{\ell+1} (x_k - x_k^{(i)})$$

$$\prod_{i=1}^{\ell} (x_k - x_k^{(i)}) F_{\ell}$$

.....

$$(x_k - x_k^{(1)}) F_1$$

$$F_0(x_{k-1}, t_0, s + \prod_{i=2}^{\ell+1} (x_k - x_k^{(i)}))$$

Os parâmetros $x_k^{(i)}$ podem ser escolhidos tal que

$$s = - \prod_{i=2}^{\ell+1} (x_k^{(1)} - x_k^{(i)}).$$

Possamos à contagem das soluções:

.Quando $x_k = x_k^{(1)}$ as equações se reduzem a

$$F_0(x_{k-1}, t_0, 0) = 0 \text{ que tem } q_0 = \#(\mathbb{N}^{k-1} - E_0) \text{ soluções;}$$

.Quando $x_k = x_k^{(2)}$ as equações tornam-se $F_1(x_{k-1},$

$$t_1) = 0 \text{ e } F_0(x_{k-1}, t_0, s) = 0 \text{ que tem } q_1 = \#(\mathbb{N}^{k-1} -$$

$- E(I_1))$ soluções comuns,

.podemos repetir isto por $x_k = x_k^{(3)}, \dots, x_k^{(\ell+1)}$ e

teremos respectivamente $q_2, \dots, q_{\ell}$ soluções comuns.

Isto, então, são $q = \sum_{i=0}^{\ell} q_i$ soluções.

Exemplos: Seja $I = \langle x^4, x^3y, x^2y^2 + 2z^4, y^3, xz, yz, z^5 \rangle$

Para este ideal tomamos a seguinte deformação

$$F = \left(\prod_{i=0}^3 (x - x_i), \left[\prod_{i=0}^2 (x - x_i) \right] (y - y_0), (x - x_0)(x - x_1)(y - y_0)(y - y_1) + \right.$$

$$\left. + 2 \left(x + \prod_{i=1}^4 (z - z_i), \prod_{i=0}^2 (y - y_i), (x - x_2)(z - z_0), (y - y_2)(z - z_0), \right. \right.$$

$$\left. \prod_{i=0}^4 (z - z_i) \right) \text{ onde fazemos}$$

$$s = - \pi \sum_{i=1}^4 (z_0 - z_i)$$

$$2s = - (x_2 - x_0) (x_2 - x_1) (y_2 - y_0) (y_2 - y_1) .$$

CAPÍTULO IV

1. TORRES EM $\mathbb{R}\{x_3\}$

1.1. **Definição:** Um ideal M_3 -primário $I \subset \mathbb{R}\{x, y, z\}$, $I \subset M_3^2$, será chamado uma **torre** na direção z se $I_1 = M_2$ e I pode ser escrito na forma:

$$I = \langle z^{\ell+1}, xz, yz, f_0, \dots, f_{j-1}, f_j + a_j z^\ell, f_{j+1}, \dots,$$

$$f_r \rangle \text{ com } I_0 = \langle f_0, f_1, \dots, f_r \rangle \text{ onde } \{f_i, i = 0, \dots$$

$$\dots, r\} \text{ é uma base canônica para } I_0.$$

Exemplos: 1. $\langle x^2 \pm z^k, y^2 \pm z^k, xy, zy \rangle$

$$2. \langle x^2 - y^2, z^k, xy, xz, yz \rangle$$

$$3. \langle x^2 + y^3, xz, yz, z^2 \pm y^3 \rangle$$

Observação: Toda torre satisfaz a condição (x_3)

1.2. **Proposição:** Seja I um ideal M_2 -primário em $\mathbb{R}\{x, y\}$

com $\delta(I) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathbb{R}\{x, y\}}{I}$ e $\{f_0, \dots, f_s\}$ uma base canônica

para I tal que $I' = \langle f_0, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_s \rangle \subsetneq I$.

Então, existe uma deformação $(F_0, \dots, F_s)$ com

$\delta(I)$ -o-o tal que $(F_0, \dots, F_{k-1}, F_{k+1}, \dots, F_s)$ tem

$(\delta(I) + 1)$ -o-o.

Prova:

Em primeiro lugar, observamos que para todo $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ temos que $1-\lambda x-\mu y$ é invertível.

Assim, como $f_k \notin I$, $f_k - \lambda x f_k - \mu y f_k \notin I$ e

$$f_k \notin \langle x f_k, y f_k, f_0, \dots, f_{k-1}, f_{k+1}, \dots, f_s \rangle = J.$$

Vamos agora construir uma deformação (F_i) de J com $(\delta(I) + 1)$ -o-o tal que existe uma deformação de f_k ; F_k , de modo que (F_i, F_k) seja uma deformação de I com $\delta(I)$ -o-o.

$$\text{Como } y^{\beta_{j+1}-\beta_j} f_j = \mu_{j+1}^i f_{j+1} + \dots + \mu_k^j f_k + \dots$$

$\dots + \mu_s^j f_s$ e $f_k \notin \langle f_i, i \neq k \rangle$, temos que μ_k^j não pode ser invertível e portanto $\mu_k^j \in M_2$. Logo podemos escrever $\mu_k^j = x w_j + y v_j$, $j < k$.

Usando a mesma notação do Teorema 2.13. do capítulo II, colocamos para nossa deformação:

$$F_i = \sum_{\ell=1}^{\beta_i} \pi (y - \eta_\ell) G_i, \quad i \neq k$$

$$F_{s+1} = \sum_{\ell=1}^{\beta_{k+1}} \pi (y - \eta_\ell) G_k, \quad (= (y - \eta_{\beta_{k+1}}) F_k)$$

$$F_{s+2} = \sum_{\ell=1}^{\beta_k} \pi (y - \eta_\ell) (x - x_0) G_k \quad (= (x - x_0) F_k)$$

onde para G_j , $j < k$

$$G_j = \sum_{\ell=\beta_{j+1}+1}^{\beta_k} \pi (y - \eta_\ell) \omega_j (x - x_0) G_k + \sum_{\ell=\beta_{j+1}+1}^{\beta_{k+1}} \pi (y - \eta_\ell) v_j G_k + \dots + \sum_{\ell=\beta_{j+1}+1}^{\beta_s} \pi (y - \eta_\ell) \mu_s^j G_s.$$

Se $j = k-1$, w_{k-1} é um polinômio de Weierstrass de grau $\alpha_{k-1} - \alpha_k - 1$, em x e neste caso ficamos com

$$G_{k-1} = (x-x_0) \left(w_{k-1} + \sum_{m=0}^{\alpha_{k-1}-\alpha_k-2} c_{k-1}^{(m)} x^m \right) G_k + (y-\eta_{\beta_{k+1}}) v_{k-1} G_k + \\ + \sum_{\ell=\beta_{k+1}}^{\beta_{k+1}} \pi (y-\eta_\ell) \mu_{k+1} G_{k+1} + \dots + \sum_{\ell=\beta_{k+1}}^{\beta_s} \pi (y-\eta_\ell) \mu_s^{k-1} G_s.$$

Então, podemos conferir que, junto com

$$F_k = \sum_{\ell=1}^{\beta_k} \pi (y-\eta_\ell) G_k \text{ temos } \delta(I) \text{ soluções.}$$

Em adição, sem F_k , temos a solução adicional $y = \eta_{\beta_{k+1}}$, $x = x_0$.

Exemplos: 1. Seja $I \subseteq \mathbb{R}\{x,y\}$ um ideal tal que

$$I = \langle y^2, x^2 + y, xy \rangle. \text{ Temos que } I \text{ tem a seguinte } E(I):$$

Tomamos a seguinte deformação de I :

$$((y-y_1)(y-y_2), (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_2), (x-x_1)(y-y_1))$$

que tem duas soluções para $y = y_1$ com x'_1 e x'_2 e uma solução para $y = y_2$ com x_1 .

Se considerarmos o ideal $I' = \langle y^2, x^2 + y \rangle$ que tem $E(I')$:

Se tomamos a deformação de I'

$$((y-y_1)(y-y_2), (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_2))$$

temos a solução adicional (x_2, y_2) .

2. Podemos também ter mais que uma solução adicional. Seja $I = \langle x^3, x^2y^2, y^4 \rangle$ com $E(I)$ dado abaixo:

Tomemos a deformação:

$\left(\prod_{i=1}^3 (x-x_i), (x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_2), \prod_{i=1}^4 (y-y_i) \right)$ que tem

10-o-o.

Se considerarmos $J = \langle x^3, y^4 \rangle$, temos que $E(J)$ é

A deformação de $J = \left(\prod_{i=1}^3 (x-x_i), \prod_{i=1}^4 (y-y_i) \right)$ tem

12-o-o.

1.3. Proposição : Se $I \subset \mathbb{R}\{x,y,z\}$ é uma torre, então,

$$m(I) = \delta(I).$$

Prova:

Temos $I = \langle z^{\ell+1}, xz, yz, f_0, \dots, f_{j-1}, f_j + a_j z^\ell,$

$f_{j+1}, \dots, f_r \rangle$.

Agora, como $z^\ell \notin I$, $f_j \notin \langle f_0, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots,$

$f_r \rangle$.

Pela Proposição 1, existem deformações $F_i(x,y,t)$ das f_i 's tendo $\delta(I_0)$ -o-o e tal que $F_0, \dots, F_{j-1}, F_{j+1},$

... F_r tem um $(\delta(I_0) + 1)$ -o-o, (x_0, y_0) onde F_j não se anula.

Podemos escolher diferentes $z_i, s, i = 1, \dots, \ell+1$

próximos de zero, tais que $s = - \pi_{i=2}^{\ell+1} (z_1 - z_i)$.

Então, exigimos que a seguinte deformação de I seja satisfeita:

$$\begin{aligned} & \left(\pi_{i=1}^{\ell+1} (z - z_i), (x - x_0)(z - z_1), (y - y_0)(z - z_1), F_0, \dots, F_{j-1}, F_j + \right. \\ & \left. + a_j \left(s + \pi_{i=2}^{\ell+1} (z - z_i), F_{j+1}, \dots, F_r \right) \right) \end{aligned}$$

Esta é justamente a deformação que é dada pelo Teorema 1.10, Capítulo III, uma vez que sabemos que I satisfaz a condição (d).

De fato, $I_i = M_2$ para $i \geq 1$ e a deformação $(F_1, \dots, F_{j-1}, F_j + a_j s, F_{j+1}, \dots, F_r)$ tem q_0 soluções quando $s=0$ e tem uma solução adicional $(x_0, y_0, \underline{t}_0)$ quando $a_j s = -F_j(x_0, y_0, \underline{t}_0)$.

Isto é válido, mesmo se $a_j = 0$, exceto que então, escolhemos $(x_0, y_0, \underline{t}_0)$ para ser uma das $\delta(I_0)$ soluções para $(F_0, F_1, \dots, F_r)$ e estamos completos

Exemplo: Se $I = \langle z^4, xz, yz, y^2, x^2 + y, xy + z^3 \rangle$

Temos que $E(I)$ é:

$$(\delta(I) = 6)$$

Tomamos a deformação:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \left(\pi(z-z_i), (x-x_2)(z-z_1), (y-y_2)(z-z_1), (y-y_1)(y-y_2), \right. \\ & \left. (x-x_1)(x-x_2) + (y-y_2), (x-x_1)(y-y_1) + \sum_{i=2}^4 \pi(z-z_i) - \right. \\ & \left. - \sum_{i=2}^4 \pi(z_1-z_i) \right) \text{ onde tomamos } \sum_{i=2}^4 \pi(z_1-z_i) = (x_2-x_1)(y_2-y_1). \end{aligned}$$

Quando $z = z_1$ temos a mesma deformação anterior e assim temos três soluções.

Se $z = z_i, i = 2, 3, 4$ temos mais três soluções com (x_2, y_2) .

Portanto, I tem $\delta(I)$ -o-o e assim $m(I) = \delta(I)$.

1.4. **Proposição:** Seja $I \subset \mathbb{R}\{x,y,z\}$ é um ideal M_3 -primário, $I \subset M_3^2$ e $I_1 = M_2$.

Se I satisfaz a condição (x_3) (Definição 1.5., Capítulo III), então I é equivalente a uma torre.

Prova:

($\Leftarrow$) Óbvio.

($\Rightarrow$) Fazemos três reduções para simplificar a forma do ideal.

Começamos por relembrar que com a condição (x_3) , um ideal com $I_1 = M_2$ pode ser escrito na forma:

$$\langle f_i(x,y) + a_i z^\ell, xz + bz^\ell, yz + cz^\ell, z^{\ell+1} \rangle \text{ onde}$$

$$\langle f_i(x,y) \rangle = I_0.$$

Primeiro efetuamos uma mudança de variáveis

$$x' = x + bz^{\ell-1}, y' = y + cz^{\ell-1}, z' = z.$$

Então, $x'y', y'z', z'^{\ell+1}$ estão em I . Também, co-

como $f_i(x,y) \in \langle x,y \rangle^2$, $f_i(x,y) + a_i z^\ell =$

$$= f_i(x',y') + a'_i z'^\ell \pmod{\langle x'z', y'z', z'^{\ell+1} \rangle}.$$

Assim se $I' = \langle f_i(x',y') + a'_i z'^\ell, x'z', y'z',$

$z'^{\ell+1} \rangle$ temos $I \sim I'$ e portanto pelo teorema 1.5 do Capítulo II, eles tem o mesmo número de zeros próximos de zero.

Escreveremos x,y,z e a_i ao invés de x',y',z' e a'_i e I ao invés de I' .

Em segundo lugar, assumimos que as $f_{i,s}$ formam uma base canônica para o ideal $I_0 \subset \mathbb{R}\{x,y\}$, pois, por 1.6 Ca-

pítulo III, se $\langle g_j(x,y) \rangle$ é uma base canônica para I_0 , temos $g_j = \sum u_{ji} f_i$ e $\sum u_{ji}(x,y) (f_i(x,y) + a_i z^\ell) = g_j(x,y) + d_j z^\ell \pmod{\langle xz, yz, z^{\ell+1} \rangle}$ e $I = \langle z^{\ell+1}, xz, yz, g_j + d_j z^\ell \rangle$.

Por último, como a notação de 2.1. Capítulo II, como $o(f_0) < o(f_1) < \dots < o(f_r)$ se nem todos a_i 's são iguais a zero, seja j o maior inteiro tal que $a_j \neq 0$. Subtraindo múltiplos de f_j dos geradores f_i , $i < j$, podemos assumir que $\{f_i\}$ é uma base canônica e que para todo $i \neq j$, $a_i = 0$.

Assim temos

$$I = \langle z^{\ell+1}, xz, yz, f_0, \dots, f_{j-1}, f_j + a_j z^\ell, f_{j+1}, \dots, f_r \rangle \text{ e estamos completos.}$$

2. TORRES EM $\mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ PARA $k \geq 3$.

2.1. Definição: Um ideal M_k -primário $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ será chamado uma torre na direção x_k , se:

a) $I_1 = M_1$ e I pode ser escrito na forma

$$I = \langle x_k^{\ell+1}, x_i x_k \quad 1 \leq i \leq k, f_1, \dots, f_{j-1}, f_j + a x_k^\ell,$$

$f_{j+1}, \dots, f_r \rangle$ com $I_0 = \langle f_0, f_1, \dots, f_r \rangle$ e $\{f_i\}$ base canônica para I_0 .

b) Existe uma deformação (F_i) de I_0 com $\delta(I_0) - o-o$ tal que $(F_1, \dots, F_{j-1}, F_{j+1}, \dots, F_r)$ tem $(\delta(I_0) + 1) - o-o$.

Observação:

1. Se $k = 3$, a definição acima coincide com a defi-

nição de Torre vista anteriormente.

2. Se I é uma Torre, I satisfaz a condição (x_k)

2.2. Proposição: Se $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ é uma torre, então, $m(I) = \delta(I)$.

Prova:

Temos por (a) da definição que

$$I = \langle f_1, \dots, f_{j-1}, f_j + ax_k^\ell, f_{j+1}, \dots, f_r, x_k^{\ell+1}, x_1 x_k \rangle$$

$$1 \leq i < k \text{ onde } \langle f_1, \dots, f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, \dots, f_r \rangle = I_0$$

e $\{f_i\}$ é uma base canônica para I_0 .

Por (b), existe uma deformação $F(\underline{x}_{k-1}, \underline{t}) = (F_1, \dots, F_r)$ de I_0 com $\delta(I_0)$ -o-o tal que

$$(F_1, \dots, F_{j-1}, F_{j+1}, \dots, F_r) \text{ tem } (\delta(I_0) + 1)\text{-o-o.}$$

Assim a deformação $(F_1, \dots, F_{j-1}, F_j + as, F_{j+1}, \dots, F_r)$ é uma deformação que satisfaz a condição (d).

Portanto, $m(I) = \delta(I)$.

2.3. Corolário: Se I é uma torre, então, existe deformação de I com $\delta(I)$ -o-o.

2.4. Proposição: Se $I \subset \mathbb{R}\{\underline{x}_k\}$ é um ideal M_k -primário que satisfaz a condição (x_k) , $I \subset M_k^2$ e $I_1 = M_{k-1}$, então, I é equivalente a um ideal da forma:

$$J = \langle x_k^{\ell+1}, x_i x_k \quad 1 \leq i < k, f_1, \dots, f_{j-1}, f_j + ax_k^\ell,$$

$$f_{j+1}, \dots, f_r \rangle \text{ com}$$

$$J_0 = \langle f_0, f_1, \dots, f_r \rangle \text{ onde } \{f_i\} \text{ é uma base canônica}$$

para J_0 .

Prova:

A demonstração é análoga à de 1.4.

Vamos agora descrever um método para obter ideais que satisfaçam a definição de Torre dada acima.

2.5. A construção é indutiva como segue:

Quando $k = 2$, seja $\{f_i(x_1, x_2)\}$ uma base canônica para um ideal M_2 -primário $J^{(2)} \subset \mathbb{R}\{x_1, x_2\}$.

Seja, então $\{f_i^{(2)}\} \subset \{f_i\}$, um conjunto minimal de geradores.

Construimos então um ideal

$J^{(3)} = \langle f_i^{(2)} \quad i \neq j, \quad f_j^{(2)} + a_1 x_3^\ell, a_2 x_3^\ell, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle$ onde ou $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$.

Usamos agora a notação $f_i^{(3)}$ em lugar de

$f_i^{(2)} \quad i \neq j, \quad f_j^{(2)} + a_1 x_3^\ell$ e $a_2 x_3^\ell$ e assim ficamos com
 $J^{(3)} = \langle f_i^{(3)}, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle$.

Construimos $J^{(4)} = \langle f_i^{(3)} \quad i \neq s, \quad f_s^{(3)} + b_1 x_4^p, b_2 x_4^p, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 x_4, x_2 x_4, x_3 x_4 \rangle$ onde ou $b_1 \neq 0$ ou $b_2 \neq 0$.

Agora, suponha que temos construído indutivamente um ideal $J^{(k-1)} \subset \mathbb{R}\{x_{k-1}\}$ dado por $J^{(k-1)} = \langle f_i^{(k-1)},$

$x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq k-1, (a,b) \neq (1,2) \rangle$

Então, construímos um ideal em $\mathbb{R}\{x_k\}$ dado por:

$$J^{(k)} = \langle f_i^{(k-1)} \quad i \neq j', f_{j'}^{(k-1)} + c_1 x_k^m, c_2 x_k^m, x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq k \quad (a,b) \neq (1,2) \rangle.$$

Exemplos: Vamos, por este processo, obter os ideais dos exemplos (1) e (2) do Lema 1.8 do Capítulo III.

$$1. J^{(2)} = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^2 \rangle$$

$$J^{(3)} = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_3^2, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle$$

.....

$$J^{(k-1)} = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{k-1}^2, x_a x_b$$

$$1 \leq a < b \leq k-1, (a,b) \neq (1,2) \rangle$$

$$J^{(k)} = \langle x_1^2, x_2^2, \dots, x_{k-1}^2, x_k^{\ell+1}, x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq k \rangle$$

$$2. J^{(2)} = \langle x_1^2 + \xi_1' x_2^2, x_1 x_2, x_2^2 \rangle$$

$$J^{(3)} = \langle x_1^2 + \xi_1' x_2^2, x_1 x_2, x_2^2 + \xi_2' x_3^2, x_3^2, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle$$

$$J^{(4)} = \langle x_1^2 + \xi_1' x_2^2, x_2^2 + \xi_2' x_3^2, x_3^2 + \xi_3' x_4^2, x_4^2, x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq$$

$$\leq 4 \rangle$$

.....

$$J^{(k-1)} = \langle x_1^2 + \xi_1' x_2^2, x_2^2 + \xi_2' x_3^2, \dots, x_{k-2}^2 + \xi_{k-2}' x_{k-1}^2,$$

$$x_{k-1}^2, x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq k-1 \rangle$$

$$J^{(k)} = \langle x_1^2 + \xi_1' x_2^2, \dots, x_{k-2}^2 + \xi_{k-2}' x_{k-1}^2, x_{k-1}^2 + \xi_{k-1}' x_k^{\ell},$$

$$x_k^{\ell+1}, x_a x_b \quad 1 \leq a < b \leq k \rangle.$$

Assim, podemos escrever, supondo $\xi_{k-1} \neq 0$ e fa-

zendo $\xi'_i = -\frac{\xi_i}{\xi_{k-1}}, \quad 1 \leq i \leq k-2,$

$$(k)_j = \langle x_k^{\ell+1}, x_i^2 + \xi_i x_k^\ell \quad 1 \leq i \leq k-1, x_i x_j \quad 1 \leq i < j \leq k \rangle$$

2.6. Proposição: Se I é construído como acima, então, I é uma Torre e portanto $m(I) = \delta(I)$.

Prova:

Temos que I satisfaz a condição (x_k) do Capítulo III, definição 1.5, $I \subset M_k^2$ e $I_1 = M_{k-1}$.

Por 2.3, I pode ser escrito na forma

$$I = \langle x_k^{\ell+1}, x_i x_k, \quad 1 \leq i < k, f_1, \dots, f_{j-1}, f_j + a x_k^\ell,$$

$$f_{j+1}, \dots, f_r \rangle \text{ com } I_0 = \langle f_0, f_1, \dots, f_r \rangle \text{ onde } \{f_i\} \text{ é}$$

uma base canônica para I_0 .

Assim construiremos indutivamente, uma deformação para I , (F_i) que satisfaz:

(1) a condição (b) da definição de Torre, isto é, existe uma deformação (F_i) de I_0 com $\delta(I_0)$ -o-o tal que $(F_1, \dots, \hat{F}_j, \dots, F_r)$ tem $(\delta(I_0)+1)$ -o-o.

(2) se F_i corresponde a $f_i^{(k)}$, então

$$(F_1, \dots, F_{i-1}, F_{i+1}, \dots, F_r) \text{ tem } (q+1)\text{-o-o.}$$

Começamos nossa indução com o caso $k = 2$.

Para isto usamos uma generalização da Proposição 1.2.

2.7. Proposição: Seja $\{f_i\}$ uma base canônica para um ideal M_2 -primário $I \subset \mathbb{R}\{x, y\}$. Então, existe uma deformação $F = (F_i)$ de I tal que F tem $\delta(I)$ -o-o e para qualquer j

com $f_j \notin \langle f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_r \rangle$,

$(F_1, \dots, F_{j-1}, F_{j+1}, \dots, F_r)$ tem $(\delta(I)+1)-o-o$.

Prova:

A prova consiste em aplicar o método da Proposição 1 para cada j tal que $f_j \notin \langle f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_r \rangle$.

Temos que $\mu_j^{(i)} \in M_2$, $i \neq j$ e podemos obter $\mu_j^{(i)} = xw_j^i + yv_j^i$.

Tomamos a deformação usual, exceto que, para cada j tal que $f_j \in \langle f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_r \rangle$, μ_j^i torna-se

$(x-x_0^{(i)})w_j^i + (y-\eta_{\beta_{j+1}})v_j^i$, a menos que $j = i + 1$ e neste caso

$$w_j^i = v_j^i + \sum_{m=0}^{\alpha_{j-1}-\alpha_j-2} c_{j-1}^{(m)} x^m.$$

Assim, se removemos F_j , conseguimos o zero extra

$$(x_0^{(i)}, \eta_{\beta_{j+1}}).$$

Esta proposição dá o resultado para $k = 2$.

Seja agora

$$J^{(3)} = \langle f_i^{(2)} \mid i \neq j, f_j^{(2)} + a_1 x_3^\ell, a_2 x_3^\ell, x_1 x_3, x_2 x_3 \rangle.$$

Temos $I_0 = \langle f_j^{(2)} \rangle$ e pela proposição anterior, temos que existe deformação (F_i) de I_0 com $\delta(I_0)-o-o$ tal que $(F_i, i \neq j)$ tem $(\delta(I_0)+1)-o-o$.

Consideremos a seguinte deformação de I_0 , $(F_i,$

$i \neq j, F_j + a_1 s).$

Temos que (F_i) tem q_0 -o-o $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i = 1, \dots, q_0$ e $(F_i, i \neq j)$ tem uma $(q_0 + 1)$ -ésimo zero próximo de zero $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

Assim, se $s = -\frac{1}{a_1} F_j (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, t), (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$

é o $(q_0 + 1)$ -ésimo zero da deformação.

Por último, quando $s = x_k^\ell$ e $t = 0$, obtemos termos pertencentes a I.

Portanto, I satisfaz a condição (d) e temos a seguinte deformação de I com q -o-o:

$$(F_i \ i \neq j, F_j + a_1 s, a_2 \prod_{i=0}^{\ell-1} (x_3 - x_3^{(i)}), (x_1 - x_1^{(0)})(x_3 - x_3^{(0)}), (x_2 - x_2^{(0)})(x_3 - x_3^{(0)}) \text{ onde } s = \prod_{i=1}^{\ell} (x_3^{(0)} - x_3^{(i)}) - \prod_{i=1}^{\ell} (x_3 - x_3^{(i)}).$$

Queremos mostrar que esta deformação também satisfaz a propriedade 2.

Os zeros da deformação são $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(0)})$, $i = 1, \dots, q_0$ e $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(i)})$, $i = 1, \dots, \ell-1$ se $a_2 \neq 0$ e $i = 1, \dots, \ell$ se $a_2 = 0$.

Mostraremos que obtemos um zero a mais se removemos um dos seguintes:

$$F_i \ i \neq j, F_j + a_1 s, a_2 \prod_{i=0}^{\ell-1} (x_3 - x_3^{(i)}) \text{ se } a_2 \neq 0.$$

Se removemos algum $F_i, i \neq j$, obtemos que $\{F_n, n \neq i\}$ tem um $q_0 + 1$ zero $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, que é diferente

de $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ para todo i .

Assim, os termos restantes tem $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ como um zero. Se removemos $F_j + a_1 s$, temos o zero $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$.

Por último, se $a_2 \neq 0$, então, quando removemos $a_2 \sum_{i=0}^{\ell-1} (x_3 - x_3^{(i)})$ temos o zero adicional $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(\ell)})$.

Suponha, por indução, que o resultado vale para todo $j < k$.

Seja (F_i) a deformação para a torre $\langle f_i^{(k-1)}, x_a x_b, 1 \leq a < b \leq k-1, (a,b) \neq (1,2) \rangle$ que satisfaça a ambas propriedades.

Seja $I = \langle f_i^{(k-1)} \mid i \neq j, f_j^{(k-1)} + c_1 x_k^\ell, c_2 x_k^\ell, x_a x_b \mid 1 \leq a < b \leq k, (a,b) \neq (1,2) \rangle$

Temos que $I_0 = \langle f_i^{(k-1)}, x_a x_b \mid 1 \leq a < b \leq k-1, (a,b) \neq (1,2) \rangle$ e portanto (F_i) é uma deformação que tem $\delta(I_0) - o - o$.

Consideremos a seguinte deformação

$(F_i, i \neq j, F_j + c_1 s)$ de I_0 .

Usamos, para mostrar a propriedade (1) para I , a propriedade (2) de I_0 . Temos que, por um lado $f_j \in \{f_i^{(k-1)}\}$ e pela propriedade (2) $(F_i \mid i \neq j)$ tem um $(\delta(I_0) + 1)$ -ésimo ze-

ro.

Sejam $x_{k-1}^{(i)}$, $i = 1, \dots, q_0$ os q_0 zeros de (F_i) e $x_{k-1}^{(0)}$ o (q_0+1) -ésimo zero de $(F_i, i \neq j)$

Assim, se $s = -\frac{1}{c_1} F_j(x_{k-1}^{(0)}, t)$, $x_{k-1}^{(0)}$ é um q_0+1 zero da deformação $(F_i, i \neq j, F_j + c_1 s)$.

Por último, quando fazemos $s = x_k^\ell$ e $t = 0$ na deformação, obtemos termos pertencentes a I .

Portanto, I satisfaz a condição (d) e temos a seguinte deformação de I com $q_0=0$:

$$(F_i, i \neq j, F_j + c_1 \mu, c_2 \prod_{i=0}^{\ell-1} (x_k - x_k^{(i)}), (x_k - x_k^{(0)})(x_i - x_i^{(0)}))$$

$$\text{onde } \mu = \prod_{i=1}^{\ell} (x_k^{(0)} - x_k^{(i)}) - \prod_{i=1}^{\ell} (x_k - x_k^{(i)}).$$

Queremos mostrar que esta deformação também satisfaz a propriedade 2.

Os zeros da deformação são $(x_{k-1}^{(i)}, x_k^{(0)})$, $i = 1, \dots, q_0$ e $(x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(i)})$, onde $i = 1, \dots, \ell-1$ se $c_2 \neq 0$ e $i = 1, \dots, \ell$ se $c_2 = 0$.

Mostraremos que obtemos um zero a mais se removermos um dos seguintes:

$$F_i, i \neq j, F_j + c_1 \mu, c_2 \prod_{i=0}^{\ell-1} (x_k - x_k^{(i)}) \text{ quando } c_2 \neq 0.$$

Se removermos algum $F_i, i \neq j$, obtemos que $\{F_n, n \neq i\}$ tem em $q_0 + 1$ zero $x_{k-1}^{(0)}$, que é diferente de

$x_{k-1}^{(i)}$, para todo i .

Assim, os termos restantes tem $(x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)})$ como um zero.

Se removemos $F_j + c_1 \mu$, temos $(x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)})$ como uma q_0+1 solução para a deformação.

Por último, se $c_2 \neq 0$, então, quando removemos $c_2 \sum_{i=0}^{\ell-1} (x_k - x_k^{(i)})$ temos o zero adicional $(x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(\ell)})$.

Assim, o resultado segue por indução.

Exemplo: Em $J^{(2)} = \langle x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_2, x_2^2 \rangle$, todos os geradores são essenciais.

Se tomamos a deformação

$$F_0 = ((x_1 - x_1^{(1)})(x_1 - x_1^{(2)}), (x_1 - x_1^{(1)})(x_2 - x_2^{(1)}),$$

$$(x_2 - x_2^{(1)})(x_2 - x_2^{(2)})) \text{ que tem os zeros}$$

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(1)}) \text{ e se retiramos}$$

$$(x_1 - x_1^{(1)})(x_2 - x_2^{(1)}) \text{ obtemos o zero adicional } (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}).$$

$$\text{Temos } J^{(3)} = \langle x_1^2, x_2^2, x_2 x_2 + 5x_3^4, x_1 x_3, x_2 x_3, x_3^5 \rangle$$

e a deformação fica:

$$F = ((x_1 - x_1^{(1)})(x_1 - x_1^{(2)}), (x_2 - x_2^{(1)})(x_2 - x_2^{(2)}),$$

$$(x_1 - x_1^{(1)}), (x_2 - x_2^{(1)}) + 5 \left(\sum_{i=1}^4 (x_3^{(0)} - x_3^{(i)}) - \sum_{i=1}^4 (x_3 - x_3^{(i)}) \right),$$

$$(x_1 - x_1^{(2)})(x_3 - x_3^{(0)}), (x_2 - x_2^{(2)})(x_3 - x_3^{(0)}), \sum_{i=0}^4 (x_3 - x_3^{(i)}) \right),$$

onde tomamos $(x_1^{(2)} - x_1^{(1)})(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}) = -5 \sum_{i=1}^4 \pi (x_3^{(0)} - x_3^{(i)})$

Os zeros da deformação são:

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}), (x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(0)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(1)}, x_3^{(0)}) \text{ e}$$

mais $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}),$

$$(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(4)}).$$

Vamos verificar que esta deformação também satisfaz a propriedade 2.

Se removemos:

$$(1) (x_1 - x_1^{(1)})(x_1 - x_1^{(2)}) \text{ obtemos o zero adicional}$$

$$(x_1', x_2^{(1)}, x_3^{(0)})$$

$$(2) (x_2 - x_2^{(1)})(x_2 - x_2^{(2)}), \text{ obtemos o zero adicional}$$

$$(x_1^{(1)}, x_2', x_3^{(0)}).$$

$$(3) (x_1 - x_1^{(1)})(x_2 - x_2^{(1)}) + 5 \sum_{i=1}^4 \pi (x_3^{(0)} - x_3^{(i)}) -$$

$$- \sum_{i=1}^4 \pi (x_3 - x_3^{(i)}) \text{ obtemos o zero adicional } (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(0)}).$$

CAPÍTULO V

1. GRUPO K

Seja $K = \{H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, o \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, o, \text{ germes de difeomorfismos } C^\infty \text{ da forma } H(x,y) = (h(x), H_2(x,y)), \text{ tal que o diagrama abaixo comuta}\}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{R}^n, o & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, o & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^n, o \\
 \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\
 \mathbb{R}^n, o & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, o & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^n, o
 \end{array}$$

onde $i(x) = (x, o)$, $\pi_1(x,y) = x$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_p)$

Temos que K tem estrutura de grupo com relação à composição.

Observemos que $H_2(x,o) \equiv 0$, isto é, H deixa invariante o subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

Temos também que $h: \mathbb{R}^n, o \longrightarrow \mathbb{R}^n, o$ é um germe de difeomorfismo, pois:

$$J H(o,o) = \begin{bmatrix} Jh(o)_{n \times n} & \vdots & 0_{n \times p} \\ \dots\dots\dots & & \\ & J H_2(o,o)_{p \times (n+p)} & \end{bmatrix}$$

e assim $|J h(o)| \neq 0$.

Temos que K atua sobre $\xi_{n,p}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 K \times \xi_{n,p} &\longrightarrow \xi_{n,p} \\
 (H, f) &\longmapsto H * f = g,
 \end{aligned}$$

se, e somente se, $(I, g) = H \circ (I, f) \circ h^{-1}$, onde I é o germe da identidade do $\mathbb{R}^n$ em o .

Considerando $K^k = \{k - \text{jatos de elementos de } K\}$ temos que K^k atua sobre $J^k(n, p)$, de maneira natural, isto é:

$$\begin{aligned} K^k \times J^k(n, p) &\longrightarrow J^k(n, p) \\ (j^k_H(o), j^k_f(o)) &\longmapsto j^k_H(o) \square j^k_f(o) = j^k_{(H*f)}(o). \end{aligned}$$

2. GRUPO DE LIE E GRUPO ALGÉBRICO

Seja $(G, *)$ um grupo e $\phi: G \times G \rightarrow G$ e $\psi: G \rightarrow G$ definidas por: $\phi(g_1, g_2) = g_1 * g_2$ e $\psi(g) = g^{-1}$.

2.1. Definição: $(G, *)$ diz-se um grupo de Lie, se:

- (i) G é uma variedade diferenciável C^∞ , de dimensão finita;
- (ii) $\phi, \psi \in C^\infty$

2.2. Definição: $(G, *)$ diz-se um grupo algébrico se:

- (i) $G \subset \mathbb{R}^n$ (para algum n)
- (ii) G é um grupo de Lie
- (iii) ϕ e ψ são racionais

Exemplos: A^k, K^k são grupos algébricos que atuam algebricamente sobre $J^k(n, p)$.

Como K^k atua algebricamente sobre $J^k(n, p)$, temos que as K^k -órbitas são sub-variedades diferenciáveis (mergulhadas) de $J^k(n, p)$.

Dado $j^k_f(o) \in J^k(n, p)$, temos que o espaço tangente

$$T_{j^k_f(o)} K^k j^k_f(o) = j^k(tf(M_n^{\theta}(1_{\mathbb{R}^n})) + f^* M_p^{\theta}(f))$$

Por um abuso de linguagem, escrevemos

$$T_f^K.f = \text{tf}(M_n^\theta(1_{\mathbb{R}^n})) + f^* M_p^\theta(f)$$

3. GERMES SIMPLES E DO TIPO DE ÁLGEBRA DISCRETA

3.1. Definição: Seja $f: \mathbb{R}^n, o \longrightarrow \mathbb{R}^p, o$ estável.

Dizemos que f é um **germe simples**, se existir um aberto $\sigma \subset J^{p+1}(n, p)$ com $j^{p+1}f(o) \in \sigma$, encontrando apenas um número finito de K^{p+1} -órbitas.

3.2. Definição: Seja $f: \mathbb{R}^n, o \longrightarrow \mathbb{R}^p, o$ estável do tipo Σ_i .

Dizemos que f é do **Tipo de Álgebra Discreta** se existir um aberto σ de $J^{p+1}(n, p)$ com $j^{p+1}f(o) \in \sigma$, tal que σ encontra apenas um número finito de K^{p+1} -órbitas do tipo Σ_i .

Exemplos: 1. Todo germe simples é do Tipo de Álgebra Discreta.

2. Pelo exemplo 2 desenvolvido no item 4 do Capítulo I (Forma Normal Para Um Germe Estável), um germe estável f cuja álgebra é $Q(f) \cong \frac{\mathbb{R}\{x\}}{\langle x^k \rangle}$ é dado por $f: \mathbb{R}^{k-1}, o \longrightarrow \mathbb{R}^{k-1}$, onde

$$f(x, \mu_1, \dots, \mu_{k-2}) = (x^k + \mu_{k-2}x^{k-2} + \dots + \mu_1x, \mu_1, \dots, \mu_{k-2})$$

$$\text{Assim, } I = \langle x^k, \mu_1, \dots, \mu_{k-2} \rangle \text{ e}$$

$$T_f^K.f = \langle (x, 1, 0, \dots, 0), (x^2, 0, 1, \dots, 0), (x^3, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (x^{k-2}, 0, \dots, 0, 1) \rangle_{M_{k-1}} + I^{k-1}$$

Vamos descrever geradores de

$\langle (x, 1, 0, \dots, 0), (x^2, 0, 1, \dots, 0), \dots, (x^{k-2}, 0, \dots, 0, 1) \rangle_{M_{k-1}}$
que não pertencem a I^{k-1} .

Temos:

$$\begin{aligned} & \cdot (x^2, x, 0, \dots, 0), (x^3, x^2, 0, \dots, 0), (x^4, x^3, 0, \dots, 0), \\ & \dots, (x^{k-1}, x^{k-2}, 0, \dots, 0), (0, x^{k-1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x^3, 0, x, 0, \dots, 0), (x^4, 0, x^2, 0, \dots, 0), (x^5, 0, x^3, 0, \dots, 0) \\
& \dots (x^{k-1}, 0, x^{k-3}, 0, \dots, 0), (0, 0, x^{k-2}, 0, \dots, 0), (0, 0, x^{k-1}, 0, \dots, 0) \\
& \cdot \dots \dots \dots \cdot \\
& \cdot (x^{k-2}, 0, \dots, 0, x, 0), (x^{k-1}, 0, \dots, x^2, 0), (0, \dots, 0, x^3, 0), \\
& \dots, (0, 0, \dots, x^{k-1}, 0) \\
& \cdot (x^{k-1}, 0, \dots, 0, x), (0, \dots, 0, x^2), \dots, (0, \dots, 0, x^{k-1}),
\end{aligned}$$

Seja agora $v \in (\mathbb{R}\{x_1, u_1, u_2, \dots, u_{k-2}\})^{k-1}$.

Temos $v \equiv (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}, 0, \dots, 0) \bmod T_f K.f$

Seja $v = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) = (v'_1 + \bar{v}_1, \dots, v'_k + \bar{v}_k) = v' + \bar{v}$

onde $v'_i \in \mathbb{R}\{x\}$ e $\bar{v}_i(x, 0, \dots, 0) = 0, i = 1, \dots, k-1$.

Então, $v \equiv (v'_1, v'_2, \dots, v'_{k-1}) \bmod T_f K.f$ onde podemos supor que grau $v'_i \leq k-1$.

Portanto, $v \equiv (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_{k-3}, v'_{k-2}, v'_{k-1}) \equiv (v'_1, j^{k-2}v'_2, j^{k-3}v'_3, \dots, j^2v'_{k-2}, j^1v'_{k-1}) \bmod T_f K.f$.

Assim $v \equiv (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1}, 0, \dots, 0) \bmod T_f K.f$

Temos que uma base para o espaço transversal a $T_f K.f$ em f é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, 0, \dots, 0) = w_1 \\ (x^2, 0, \dots, 0) = w_2 \\ \dots\dots\dots \\ (x^{k-1}, 0, \dots, 0) = w_{k-1} \end{array} \right.$$

O espaço transversal transladado para f é dado por

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) &= f + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i w_i = \\ &= (x^k + \mu_{k-2} x^{k-2} + \dots + \mu_1 x + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x^i, \mu_1, \dots, \mu_{k-2}) \end{aligned}$$

Temos que $f_0 = \gamma(0) = f$ é estável, o que acarreta $\gamma(\lambda) = f_\lambda$ é estável se λ for suficientemente próximo de zero.

Se $\lambda_1 \neq 0$, f_λ é do tipo Σ_0 .

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$, temos que f_λ é do tipo Σ_1 com

$$Q(f_\lambda) \approx \frac{\mathbb{R}\{x\}}{\langle x^2 \rangle}$$

Tomemos agora $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{i-1} = 0, \lambda_i \neq 0$

Nesta situação, f_λ é do tipo Σ_1 e $Q(f_\lambda) \cong \frac{R\{x\}}{\langle x^i \rangle}$,
 $i = 2, \dots, k$ álgebras duas a duas não isomorfas.

Logo, f é simples.

3.3. Proposição: Seja G um grupo algébrico, que atua algebricamente sobre um conjunto algébrico M .

Então, existe um subconjunto $\pi \subset M$, minimal, algébrico, (fechado), G -invariante, tal que $M - \pi$ é constituído por um número finito de G -órbitas.

Aplicações:

1. Seja a ação $K^{(P+1)} \times J^{P+1} \longrightarrow J^{P+1}$, onde $J^{P+1} = J^{P+1}(n,p)$

Então, existe um conjunto algébrico $\pi^{p+1}(n,p)$, minimal

$K^{(P+1)}$ -invariante tal que $J^{P+1}(n,p) - \pi^{P+1}(n,p)$ é constituído por um número finito de K^{P+1} -órbitas.

Seja $\tau(n,p) = \text{cod } \pi^{P+1}(n,p)$.

Usando estes conceitos, temos o famoso teorema de Mather:

3.4. Teorema: O conjunto das aplicações estáveis em $C_{pr}^{\infty}(N^n, P^p)$ é denso, se e somente se, $n < \tau(n,p)$.

$$(C_{pr}^{\infty}(N,P) = \{f: N \rightarrow P, C^{\infty}, \text{próprias}\})$$

Observações: $\{(n,p) \in N^* \times N^* / n < \tau(n,p)\}$ é denominado o conjunto das "Boas Dimensões de Mather". Tais dimensões são descritas pelas seguintes equações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{a) } p < 7(p-n) + 8, & p-n \geq 4 \\ \text{b) } p < 7(p-n) + 9, & 3 \geq p-n \geq 0 \\ \text{c) } p < 8, & p-n = -1 \\ \text{d) } p < 6, & p-n = -2 \\ \text{e) } p < 7, & p-n \leq -3 \end{array} \right.$$

Veja a figura na página seguinte.

BOAS DIMENSÕES DE MATHER

2. Seja $\Sigma_r^{P+1} = \{j^{P+1}f(0) \mid j^{P+1}(n,p) \text{ tal que } f \text{ é do tipo } \Sigma_r\}$.

Temos que Σ_r^{P+1} é K^{P+1} -invariante.

A proposição 3.3 acima também se aplica para $M = \Sigma_r^{P+1}$ e $G = K^{P+1}$.

Seja a ação $K^{P+1} \times \Sigma_r^{P+1} \longrightarrow \Sigma_r^{P+1}$.

Existe $\pi_r^{P+1}(n,p)$, algébrico, minimal, K^{P+1} -invariante, tal que, em $\Sigma_r^{P+1} - \pi_r^{P+1}(n,p)$ existe apenas um número finito de K^{P+1} -órbitas.

Observações:

1. Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^P, 0$, estável do tipo Σ_r .

Logo, f é do Tipo de Álgebra Discreta se,

$$j^{P+1}f(0) \in \Sigma_r^{P+1} - \pi_r^{P+1}(n,p)$$

$$2. \pi_r^{P+1} = \bigcup_{r=0}^n \text{fecho } \pi_r^{P+1}$$

3.5. Proposição: Seja $f: \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^P, 0$ estável, com (n,p) nas "Boas Dimensões". Então, f é simples

Prova:

Como f é estável, temos que existe um representante $\tilde{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^P$, de f , tal que $j^{P+1}\tilde{f}: U \longrightarrow j^{P+1}(n,p)$ é transversal à $K^{P+1} \cdot j^{P+1}f(0)$ em $j^{P+1}f(0)$.

$$\begin{aligned} & \text{Logo, } D(j^{P+1}\tilde{f})(0) \cdot \mathbb{R}^n + T_{j^{P+1}f(0)} K^{P+1} j^{P+1}f(0) = \\ & = T_{j^{P+1}f(0)} j^{P+1}(n,p). \end{aligned}$$

Portanto, $\text{cod } K^{P+1} \cdot j^{P+1}f(0) \leq n$

Temos dois casos a considerar:

$$(1) K^{P+1} \cdot j^{P+1}f(0) \subset \pi_r^{P+1}(n,p)$$

$$(2) \quad K^{P+1} \cdot j^{P+1} f(0) \subset J^{P+1}(n, p) - \pi^{P+1}(n, p).$$

Suponhamos que ocorra (1). Logo,

$$\text{cod } K^{P+1} \cdot j^{P+1} f(0) \geq \text{cod } \pi^{P+1}(n, p) = \tau(n, p)$$

Como, $\text{cod } K^{P+1} \cdot j^{P+1} f(0) \leq n$, segue que $n \geq \tau(n, p)$

Como, (n, p) está nas "Boas Dimensões", temos que $n < \tau(n, p)$, nos levando a uma contradição.

Logo, ocorre (2)

Sendo $\pi^{P+1}(n, p)$ fechado, temos que f é simples

3.6. 2ª Derivada Intrínseca

Seja K um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial de dimensão k .

3.6.1. Definição: (2 - produto simétrico)

O par $(S^2 K, \phi)$ se diz um 2 - produto simétrico de K , se:

(a) $S^2 K$ é um $\mathbb{R}$ - espaço vetorial e $\phi: K \times K \longrightarrow S^2 K$ é uma aplicação bilinear simétrica;

$$(b) \quad \dim_{\mathbb{R}} S^2 K = \binom{k+1}{2}$$

(c) $\phi(K \times K)$ gera $S^2 K$.

Observações:

1. Sejam $(S^2 K, \phi)$ e $(\bar{S}^2 K, \psi)$ dois 2-produtos simétricos de K .

Então, existe um único $\mathbb{R}$ -isomorfismo linear canônico

T , tal que $K \times K \xrightarrow{\phi} S^2 K$

$$\begin{array}{ccc} & & \nearrow T \\ \psi \downarrow & & \\ & \bar{S}^2 K & \end{array}$$

comuta, isto é, $\phi = T \circ \psi$.

2. Seja $(S^2 K, \phi)$ um 2 - produto simétrico de k .

Seja W um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial e $\psi : K \times K \rightarrow W$ uma aplicação bilinear simétrica.

Então, existe uma única aplicação $\mathbb{R}$ -linear $T : S^2 K \rightarrow W$ tal que

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{\psi} & W \\ \downarrow \phi & \nearrow T & \\ S^2 K & & \end{array}$$

comuta, isto é, $T \circ \phi = \psi$.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n, K$ um subespaço vetorial, $\dim K = k$ e $\{e_1, \dots, e_k\}$ base de K .

3.6.2. Definição: $S^2 k = H_2(k, 1)$ (formas homogêneas de grau 2 em k variáveis).

Seja $\phi : K \times K \rightarrow S^2 k$, bilinear tal que

$$\phi(e_i, e_j) = x_i x_j.$$

Logo, ϕ é simétrica.

Temos que $\phi(K \times K)$ gera $S^2 K$ e $\dim S^2 k = \binom{k+1}{2}$

Seja $f : \mathbb{R}^{n,0} \rightarrow \mathbb{R}^p,0$ do tipo Σ_k , isto é, $\dim \text{Ker } Df(o) = k$. Sejam $K = \text{Ker } Df(o)$ e

$$C = \text{CoKer } Df(o) = \frac{\mathbb{R}^p}{\text{Im } Df(o)}.$$

Suponhamos que $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-k},$

$f_{n-k+1}(x), \dots, f_p(x))$ com $f_i \in M_n^2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Temos $f = (\pi_1, \dots, \pi_{n-k}, f_{n-k+1}, \dots, f_p)$. Logo,

$$Df = (D\pi_1, \dots, D\pi_{n-k}, Df_{n-k+1}, \dots, Df_p) \text{ e}$$

$$D^2 f = (0, \dots, 0, D^2 f_{n-k+1}, \dots, D^2 f_p)$$

$$K = \{ (0, \dots, 0, v_{n-k+1}, \dots, v_n) : v_i \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{Im Df}(0) = \{ (w_1, \dots, w_{n-k}, 0, \dots, 0) : w_i \in \mathbb{R} \}$$

$$C \approx \{ (w_{n-k+1}, \dots, w_p) : w_i \in \mathbb{R} \}$$

Seja $S^2_k = H_2(k, 1)$

$$K \times K \xrightarrow{i} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{D^2 f(o)} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\pi} C = \frac{\mathbb{R}^p}{\text{Im } Df(o)}$$

$d^2 f(o) = \pi \circ D^2 f(o) \circ i$

$d^2f(o) = 2a$ derivada intrínseca de f em o .

$$d^2 f(o)(e_i, e_j) = \pi(D^2 f(o)(e_i, e_j)) =$$

$$= D^{2f_{n-k+1}}(o)(e_i, e_j), \dots, D^{2f_p}(o)(e_i, e_j), \quad n-k+1 \leq i, j \leq n \text{ e}$$

$$\begin{array}{ccc} K \times K & \xrightarrow{d^2 f(0)} & C \\ \phi \downarrow & & \nearrow T \\ S^2 K = H_2(k, 1) & & \end{array}$$
$$d^2 f(o)(e_i, e_j) =$$

$$= T \circ \phi(e_i, e_j) = T(x_i, x_j)$$

Nestas condições diremos que f é do tipo $\Sigma_{k, (j)}$.

Temos que:

$$\| T \|_{x_i x_j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f_{n-k+1}(o)}{\partial x_{n-k+1} \partial x_{n-k+1}} & \frac{\partial^2 f_{n-k+1}(o)}{\partial x_n \partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_p(o)}{\partial x_{n-k+1} \partial x_{n-k+1}} & \frac{\partial^2 f_p(o)}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix}$$

Pela análise das técnicas de Mather VI, James Damon em [02], provou que um germe do Tipo de Álgebra Discreta é necessariamente de um dos seguintes tipos:

- a) Σ_1 ou Σ_2
- b) $\Sigma_{k,(j)}$, $j = 0, 1$, $k \geq 3$
- c) $\Sigma_{3,(2)}$

Mostremos agora que para germes do Tipo de Álgebra Discreta, tem-se $m(f) = \delta(f)$

3.7. Teorema 1: Se $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ ($n \leq p$) é estável do tipo de Álgebra Discreta, do tipo Σ_1 ou Σ_2 , então $m(f) = \delta(f)$.

Prova:

Se f é do tipo Σ_1 , então, $Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x\}}{\langle x^k \rangle}$

Pela proposição 1.8. do Capítulo III, temos $m(f) = \delta(f)$.

Se f é do tipo Σ_2 , então $Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x, y\}}{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$

com $f_i \in M_2^2$, $i = 1, \dots, s$ e pelo teorema 2.13 do Capítulo II, $m(f) = \delta(f)$.

3.8. Teorema 2: Se $f : \mathbb{R}^n, o \rightarrow \mathbb{R}^p, o$ ($n \leq p$) é estável do

Tipo de Álgebra Discreta do tipo $\Sigma_{k,(j)}$, $j = 0, 1$; $k \geq 3$,
então, $m(f) = \delta(f)$.

Prova:

Por [02], os germes do tipo de Álgebra Discreta,
do tipo $\Sigma_{k,(j)}$, $J = 0, 1$ e $k \geq 3$ tem álgebras isomorfas a

$\frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$ dadas por:

a) Caso $\Sigma_{k,(0)}$. Neste caso temos $Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{M_k^2}$

Como M_k^2 admite geradores monomiais, segue pela pro-
posição 1.8. do Capítulo III que $m(f) = \delta(f)$

b) Caso $\Sigma_{k,(1)}$. Neste caso temos que

$Q(f) \approx \frac{\mathbb{R}\{x_k\}}{I}$ onde $I = \langle x_k^{\ell+1}, x_i^2 + \xi_i x_k^\ell \mid 1 \leq i \leq k-1, \ell \geq 0 \rangle$

$x_i x_j \mid 1 \leq i < j \leq k \rangle$ com $\xi_i = \pm 1$ ou 0.

e pelo exemplo 2 da proposição 1.8 Capítulo III, temos que
 $m(f) = \delta(f)$.

Para o tipo $\Sigma_3(2)$ necessitaremos do seguinte Teo-
rema devido a J. Mather:

3.9. Teorema: Seja G um grupo de Lie e M uma variedade di-
ferenciável C^∞ com G atuando sobre M diferenciavelmente.

Seja $N \subset M$ subvariedade conexa.

Então, N está contido numa única G -órbita se, e
somente se,

(i) $T_x N \subset T_x G.x, \forall x \in N$.

$$(ii) \dim_{\mathbb{R}} T_x G.x = \text{constante}, \quad x \in N.$$

Temos por [02], que os germes do Tipo de Álgebra Discreta do tipo $\Sigma_{3,(2)}$, tem $\mathbb{R}$ -álgebra isomorfos a $\frac{\mathbb{R}\{x\}}{I}$, com I de forma:

1.	$\langle x^2+y^2+z^2, xy, xz, yz \rangle$	torre na direção y
2.	$\langle z^2+y^2, zy, yx, y^2+x^2 \rangle$	torre na direção y
3.	$\langle x^2, yz, xy, z^2+y^2 \rangle$	torre na direção y
4.	$\langle x^2+yz, xz, y^2, z^2 \rangle$	
5.	$\langle x^2, y^2, yz, z^2 \rangle$	gerado por monômios
6.	$\langle x^2+z^k, y^2+z^k, xz, yz \rangle$	torres na direção z
7.	$\langle x^2+z^k, y^2, xz, yz \rangle$	torres na direção z
8.	$\langle x^2, y^2, z^k, xz, yz \rangle$	torres na direção z
9.	$\langle x^2-y^2+z^k, xy, xz, yz \rangle$	torres na direção z
10.	$\langle x^2-y^2, z^k, xy, xz, yz \rangle$	torres na direção z
11.	$\langle x^2+yz, z^2+y^k, xy, xz \rangle$	torres na direção x
12.	$\langle x^2+yz, z^2, y^k, xy, xz \rangle$	torres na direção x.
13.	$\langle z^2+yx, x^2, xz+y^k, zy \rangle$	
14.	$\langle x^2+y^2, z^2, x^\ell, x^{\ell-1}y, xz, yz \rangle$	torres na direção z
15.	$\langle x^2+y^2, z^2, x^\ell, xz, yz \rangle$	torres na direção z
16.	$\langle x^2+y^2, z^2+x^\ell, xz, yz \rangle$	torres na direção z
17.	$\langle x^2+y^2, z^2, xz + x^\ell, yz \rangle$	

18.	$\langle z^2, x^m, y^\ell, xy, xz, yz \rangle$	torres em cada direção
19.	$\langle z^{2 \pm y}, x^{m \pm y^\ell}, xy, xz, yz \rangle$	torres em cada direção
20.	$\langle z^{2 \pm y^\ell}, x^m, xy, xz, yz \rangle$	torres em cada direção
21.	$\langle z^{2 \pm y \pm x^m}, xy, xz, yz \rangle$	torres em cada direção
22.	$\langle z^2, x^m, xz + y^\ell, xy, yz \rangle$	torres na direção y
23.	$\langle z^{2 \pm x^m}, xz + y^\ell, xy, yz \rangle$	torres na direção y
24.	$\langle z^2, yz + x^m, xz + y^\ell, xy \rangle$	
25.	$\langle x^2, xz, yz, z^2, xy^2, y^3 \rangle$	torre
26.	$\langle x^2, xz, yz, z^2 + xy^2, y^3 \rangle$	torre
27.	$\langle x^2, xz, yz, z^2, y^3 \rangle$	torre
28.	$\langle x^2, xz, yz, z^2 + y^3 \rangle$	torre
29.	$\langle x^2, xz, y^4, yz, z^2, xy^3 \rangle$	torre
30.	$\langle x^2, xz + y^3, yz, z^2 \rangle$	torre
31.	$\langle x^2, xz + xy^2, yz, y^4, z^2 \rangle$	
32.	$\langle x^2, xz, yz, y^4, z^2 \rangle$	torre
33.	$\langle x^2 + y^3, xz, yz, z^2 \pm y^3 \rangle$	torre
34.	$\langle x^2, y^4, xz, yz, z^2 + xy^3 \rangle$	torre
35.	$\langle x^2, xz, yz, z^2 + xy^2, y^4 \rangle$	torre
36.	$\langle x^2 + y^3, xz + y^3, yz, z^2 + xy^2 \rangle$	
37. $\ell \geq 3$	$\langle x^2, xz, yz, z^2, xy^2, y^{\ell+1} \rangle$	torre
38. $\ell \geq 3$	$\langle x^{2 \pm y^\ell}, xz, yz, z^2, xy^2 \rangle$	torre

39. $\ell \geq 3$	$\langle x^{2+y^\ell}, xz, yz, z^2, xy^2, y^{\ell+1} \rangle$	torre
40. $\ell \geq 3$	$\langle x^{2+y^\ell}, xz, yz, z^{2+y^{\ell+1}}, xy^2 \rangle$	torre
41. $\ell \geq 3$	$\langle x^{2+y^{\ell+1}}, xz, yz, z^{2+y^{\ell+1}}, xy^2 \rangle$	torre
42. $\ell \geq 2$	$\langle x^2, xz, yz, z^{2+y^{\ell+1}}, xy^2 \rangle$	torre
43. $\ell \geq 2$	$\langle x^2, xz+y^{\ell+1}, yz, z^2, xy^2 \rangle$	
44. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+y^k} \rangle$	torre
45. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+y^k}, xy^{k-1} \rangle$	torre
46. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+y^k}, xy^{k-2} \rangle$	torre
47. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz+y^k, yz, z^{2+xy^{k-1}} \rangle$	
48. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz+y^k, yz, z^2 \rangle$	
49. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz+y^k, yz, z^2, xy^{k-1} \rangle$	
50. $k \geq 5$	$\langle x^{2+y^3}, xz+y^k, yz, z^2, xy^{k-2} \rangle$	
51. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+xy^{k-1}} \rangle$	torre
52. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+xy^{k-1}}, y^{k-1} \rangle$	torre
53. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^{2+xy^{k-1}}, y^k \rangle$	torre
54. $k \geq 3$	$\langle x^{2+y^3}, xz+xy^{k-1}, yz, z^{2+y^{k-1}} \rangle$	
55. $k \geq 3$	$\langle x^{2+y^3}, xz+xy^{k-1}, yz, z^2 \rangle$	
56. $k \geq 3$	$\langle x^{2+y^3}, xz+xy^{k-1}, yz, z^2, y^{k+1} \rangle$	
57. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^2, y^k \rangle$	torre
58. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^2, y^k, xy^{k-1} \rangle$	torre
59. $k \geq 4$	$\langle x^{2+y^3}, xz, yz, z^2, y^{k+1}, xy^{k-1} \rangle$	torre

60. $k \geq 4$ $\langle x^2 + y^3, xz, yz, z^2, xy^{k-1} \rangle$ torre

Consideremos a seguinte partição dos ideais acima em três classes de ideais.

$A_1 = \{I_i/I_i \text{ é gerado por monomios}\}$

$A_2 = \{I_j/I_j \text{ são torres}\}$

$A_3 = \text{Complementar de } A_1 \cup A_2.$

3.10. Teorema 3: Se $f : \mathbb{R}^{n,o} \rightarrow \mathbb{R}^{p,o}$ ($n \leq p$) é estável do Tipo de Álgebra Discreta do tipo $\Sigma_{3,(2)}$, então $m(f) = \delta(f)$.

Prova:

Os ideais da classe A_1 são gerados por monomios e portanto pela proposição 1.8. do Capítulo III, $m(f) = \delta(f)$.

Os ideais da classe A_2 são torres em $\mathbb{R}\{\underline{x}_3\}$ e portanto por 1.3 proposição 2 do Capítulo IV, $m(f) = \delta(f)$.

Resta-nos mostrar para os ideais da classe A_3 que $m(I) = \delta(I)$.

Para tal, sejam I em A_3 .

Temos que I tem uma das duas formas seguintes:

$$I = \langle z^2 + v(x,y), xz + \mu(x,y), yz, \dots \rangle \quad \text{ou}$$

$$I = \langle z^2 + v(x,y), xz, yz + \mu(x,y), \dots \rangle$$

Suponhamos que $I = \langle z^2 + v(x,y), xz + \mu(x,y), yz, \dots \rangle$

Consideremos $I_{s,t} = \langle z^2 + v(x,y) + t\mu(x,y), xz + s\mu(x,y), yz, \dots \rangle$.

Demonstra-se que:

$$(1) \quad I_{s,t} \sim I_{0,1}, \quad \forall s,t \in \mathbb{R} \quad \text{com } t > 0$$

$$(2) \quad I_{0,1} \text{ é torre na direção } z.$$

$$(3) \quad \text{Cod } I_{0,1} = \text{Cod } I \quad (I = I_{1,0})$$

Como $I_{0,1}$ é uma torre, segue não só que $m(I_{0,1}) = \delta(I_{0,1})$, como também que existe uma deformação de $I_{0,1}$ com $\delta(I_{0,1}) \rightarrow 0$. Logo, pelo teorema 1.5 do Capítulo II, temos que $I_{s,t}$ admite deformação com $\delta(I_{s,t}) \rightarrow 0$, $\forall s,t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$.

Logo, $m(I_{s,t}) = \delta(I_{s,t})$, $\forall s,t \in \mathbb{R}$ com $t > 0$.

Consideremos os ideais $I_{1,t}$, lembrando que $I = I_{1,0}$.

Por (3) e (1), temos:

$$m(I_{1,t}) = \delta(I_{1,t}) = \delta(I_{1,0}), \quad \text{para todo } t > 0.$$

Logo, pela proposição 1.14 do Capítulo II, segue que $m(I_{1,0}) = \delta(I_{1,0})$, isto é, $m(I) = \delta(I)$.

Agora, para provarmos (1), procedemos da seguinte maneira:

Seja $I_{s,t} = \langle f_1, \dots, f_\ell \rangle$ e seja $f_{s,t} = (f_1, \dots, f_\ell)$.

Em vista do Teorema 3.9, é suficiente mostrarmos:

$$(i) \quad \frac{\partial f_{s,t}}{\partial s}, \frac{\partial f_{s,t}}{\partial t} \in T_{f_{s,t}} K.f_{s,t}$$

$$(ii) \quad \text{cod } T_{f_{s,t}} K.f_{s,t} = \text{constante}, \quad \forall s,t \in \mathbb{R}, t > 0.$$

A verificação de (2) é imediata e a prova de (3) é possível usando a teoria de escadas.

Apliquemos esta técnica para um ideal em A_3 .

Para os demais, o procedimento é análogo.

$$\text{Se } I = \langle x^2 + yz, xy, xz + y^k, z^2 \rangle$$

Consideremos as deformações de I .

$$f_{s,t} : \mathbb{R}^5,0 \rightarrow \mathbb{R}^4,0 \text{ dadas por}$$

$$f_{s,t} = (x^2 + yz, xy, xz + sy^k, z^2 + ty^k), s, t \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$\text{e seja } I_{s,t} = \langle x^2 + yz, xy, xz + sy^k, z^2 + ty^k \rangle$$

Vamos em primeiro lugar mostrar que vale a condição (i), isto é:

$$(0,0,y^k,0), (0,0,0,y^k) \in T_{f_{s,t}}^{K.f_{s,t}} =$$

$$= \langle \partial_x f_{s,t}, \partial_y f_{s,t}, \partial_z f_{s,t} \rangle_{M_3} + \langle (f_1, 0, \dots, 0), \dots$$

$$\dots (0, 0, \dots, f_1) \rangle.$$

O que é o mesmo que dizer que existem m_1, m_2, m_3 em M_3 que satisfazem o sistema (1)

$$(1) \quad \begin{cases} 2m_1x + m_2z + m_3y + I_{s,t} = 0 \\ m_1y + m_2x + I_{s,t} = 0 \\ m_1z + m_2ksy^{k-1} + m_3x + I_{s,t} = y^k \\ m_2kty^{k-1} + 2m_3z + I_{s,t} = 0 \end{cases}$$

e m_1, m_2, m_3 em M_3 que satisfazem o sistema (2):

$$(2) \quad \begin{cases} 2m_1x + m_2z + m_3y + I_{s,t} = 0 \\ m_1y + m_2x + I_{s,t} = 0 \\ m_1z + m_2ksy^{k-1} + m_3x + I_{s,t} = 0 \\ m_2kty^{k-1} + 2m_3z + I_{s,t} = y^k \end{cases}$$

E para estes sistemas apresentamos as seguintes soluções:

Para (1): Se $s = 0$, tomamos $m_1 = -z$, $m_2 = -x$ e $m_3 = 0$.

Se $s \neq 0$, tomamos $m_1 = \frac{k+2}{(k-2)s} x$, $m_2 = \frac{4}{(k-2)s} y$ e $m_3 = \frac{2k}{(k-2)s} z$.

Para (2): Se $s = 0$, tomamos $m_1 = \frac{1}{2kt} x$, $m_2 = \frac{1}{kt} y$ e $m_3 = 0$.

Se $s \neq 0$, tomamos $m_1 = \frac{k+1}{(2-k)t} x$, $m_2 = \frac{3}{(2-k)t} y$ e $m_3 = \frac{2k-1}{(2-k)t} z$.

Mostremos agora que vale (ii).

Para isto vamos calcular

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{(\mathbb{R}\{x,y,z\})^4}{\langle (2x,y,z,0), (z,x,ksy^{k-1},kty^{k-1}), (y,0,x,2z) \rangle_{M_3} + I_{s,t}^{(4)}}$$

onde $I_{s,t} = \langle x^2 + yz, xy, xz + sy^k, z^2 + ty^k \rangle$ e

$$V = \langle (2x,y,z,0), (z,x,ksy^{k-1},kty^{k-1}), (y,0,x,2z) \rangle_{M_3} + I_{s,t}^{(4)}$$

Para facilitar os nossos cálculos, vamos fazer uma listagem de elementos em $I_{s,t}$ e V .

Temos que

$x^3, x^2y, xy^2, y^{k+1}; x^2z, xz^2, z^3; y^2z, yz^2; xyz;$ per-

tencem a $I_{s,t}$ e que

$(2x^2, 0, xz, 0), (0, y^2, yz, 0), (2xz, yz, z^2, 0)$

$(xz, x^2, 0, 0), (yz, 0, ksy^k, kty^k), (z^2, xz, 0, 0)$

$(0, 0, x^2, 2xz), (y^2, 0, 0, 2yz), (yz, 0, xz, 2z^2)$

$(0, y^3, 0, 0), (y^3, 0, 0, 0)$ pertencem a V .

Tomemos agora $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ em $(\mathbb{R}\{x, y, z\})^4$.

Assim podemos escrever

$\psi = (L_1(\psi_1) + L_2(\psi_1) + O_3(\psi_1), L_1(\psi_2) + L_2(\psi_2) + O_3(\psi_2),$

$L_1(\psi_3) + L_2(\psi_3) + O_3(\psi_3), L_1(\psi_4) + L_2(\psi_4) + O_3(\psi_4))$

onde $L_i(\psi_j)$, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4$ é a parte homogênea de grau i de ψ_j e $O_3(\psi_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$ são os termos de grau maior ou igual a 3 de ψ_j .

Tomemos $\psi = \rho + \mu$ onde

$\rho = (L_1(\psi_1), L_1(\psi_2), L_1(\psi_3))$ e

$\mu = (L_2(\psi_1) + O_3(\psi_1), L_2(\psi_2) + O_3(\psi_2), L_2(\psi_3) + O_3(\psi_3),$

$L_4(\psi_4) + O_3(\psi_4)).$

Tomemos agora

$$\mu \equiv (a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz,$$

$$b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz,$$

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + c_5xz + c_6yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots$$

$$\dots + c_{k+4}y^k,$$

$$d_1x^2 + d_2y^2 + d_3z^2 + d_4xy + d_5xz + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots$$

$$\dots + d_{k+4}y^k)$$

$$= (a_1x^2, 0, \frac{a}{2}, xz, 0) + (a_2y^2 + a_3y^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz,$$

$$b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz,$$

$$c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4xy + (c_5 - \frac{a_1}{2})xz + c_6yz + c_7y^3 +$$

$$c_8y^4 + \dots + c_{k+4}y^k, d_1x^2 + d_2y^2 + d_3z^2 + d_4xy + d_5xz +$$

$$+ d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots + d_{k+4}y^k) \equiv$$

$$\equiv (0, b_2y^2, b_2yz, 0) + (a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz +$$

$$+ a_6yz, b_1x^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz, c_1x^2 + c_2y^2 +$$

$$+ c_3z^2 + c_4xy + \bar{c}_5xz + (c_6 - b_2)yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots +$$

$$+ c_{k+4}y^k$$

$$d_1x^2 + d_2y^2 + d_3z^2 + d_4xy + d_5xz + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots$$

$$\dots + d_{k+4}y^k) \equiv (2c_3xz, c_3yz, c_3z^2, 0) + (a_2y^2 + a_3z^2 +$$

$$+ a_4xy + (a_5 - 2c_3)xz + a_6yz, b_1x^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz +$$

$$\begin{aligned}
& + (b_6 - c_3)yz, c_1x^2 + c_2y^2 + c_4xy + \bar{c}_5xz + \bar{c}_6yz + c_7y^3 + \\
& + c_8y^4 + \dots + c_{k+4}y^k; d_1x^2 + d_2y^2 + d_3z^2 + d_4xy + d_5x\bar{z} + \\
& + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots + d_{k+4}y^k) \equiv ((a_5 - 2c_3)xz, \\
& (a_5 - 2c_3)x^2, 0, 0) + (a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_6yz, (b_1 - a_5 + \\
& + 2c_3)x^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + \bar{b}_6yz, c_1x^2 + c_2y^2 + c_4xy + \\
& + \bar{c}_5xz + \bar{c}_6yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots + c_{k+4}y^k, d_1x^2 + d_2y^2 + \\
& + d_3z^2 + d_4xy + d_5xz + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots + d_{k+4}y^k) \equiv \\
& \equiv (\bar{c}_5yz, 0, \bar{c}_5xz, 2\bar{c}_5z^2) + (a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + (a_6 - \bar{c}_5)yz, \\
& \bar{b}_1x^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz, c_1x^2 + c_2y^2 + c_4xy + \\
& \bar{c}_6yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots + c_{k+4}y^k, d_1x^2 + d_2y^2 + (d_3 - \\
& - 2\bar{c}_5)z^2 + d_4xy + d_5xz + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots + \\
& + d_{k+4}y^k) \equiv (\bar{a}_6yz, 0, ks\bar{a}_6y^k, kt\bar{a}_6y^k) + (a_2y^2 + a_3z^2 + \\
& + a_4xy, \bar{b}_1x^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz, c_1x^2 + c_2y^2 + \\
& c_4xy + \bar{c}_6yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots + (c_{k+4} - ks\bar{a}_6)y^k, d_1x^2 + \\
& + d_2y^2 + \bar{d}_3z^2 + d_4xy + d_5xz + d_6yz + d_7y^3 + d_8y^4 + \dots + \\
& + (d_{k+4} - kt\bar{a}_6)y^k) \equiv (a_3z^2, a_3xz, 0, 0) + (a_2y^2 + a_4xy, \\
& \bar{b}_1x^2 + b_3z^2 + b_4xy + (b_5 - a_3)xz + b_6yz, c_1x^2 + c_2y^2 + \\
& c_4xy + \bar{c}_6yz + c_7y^3 + c_8y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4}y^k, d_1x^2 + d_2y^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{d}_3 z^2 + d_4 xy + d_5 xz + d_6 yz + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv \\
& \equiv (0, 0, c_1 x^2, 2c_1 xz) + (a_2 y^2 + a_4 xy, \bar{b}_1 x^2 + b_3 z^2 + \\
& + b_4 xy + \bar{b}_5 xz + b_6 yz, c_2 y^2 + c_4 xy + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots \\
& \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, d_1 x^2 + d_2 y^2 + \bar{d}_3 z^2 + d_4 xy + (d_5 - 2c_1) xz + \\
& d_6 yz + d_7 y^3 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv (a_2 y^2, 0, 0, 2a_2 yz) + \\
& + (a_4 xy, \bar{b}_1 x^2 + b_3 z^2 + b_4 xy + \bar{b}_5 xz + b_6 yz, c_2 y^2 + c_4 xy + \\
& + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, d_1 x^2 + d_2 y^2 + \bar{d}_3 z^2 + \\
& d_4 xy + \bar{d}_5 xz + (d_6 - 2a_2) yz + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv \\
& \equiv (a_4 xy, \bar{b}_1 x^2 + b_3 z^2 + b_4 xy + \bar{b}_5 xz + b_6 yz, c_2 y^2 + c_4 xy + \\
& + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, d_1 x^2 + d_2 y^2 + \bar{d}_3 z^2 + \\
& + d_4 xy + \bar{d}_5 xz + \bar{d}_6 yz + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv \\
& \equiv (0, \bar{b}_1 x^2 + b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + b_6 yz, c_2 y^2 + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + \\
& + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, d_1 x^2 + d_2 y^2 + \bar{d}_3 z^2 + \bar{d}_5 xz + \bar{d}_6 yz + \\
& + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv \\
& \equiv (0, 0, 0, d_1 x^2 + 2\bar{b}_1 x^2 + \bar{b}_1 yz + d_1 yz) + (0, b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + \\
& + (b_6 - \bar{b}_1) yz, c_2 y^2 + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, \\
& d_2 y^2 + \bar{d}_3 z^2 + \bar{d}_5 xz + (\bar{d}_6 - d_1) yz + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + \\
& + \bar{d}_{k+4} y^k) \equiv
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (0, 0, 0, \bar{d}_5 xz + \bar{d}_5 s y^k) + (0, b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + \bar{b}_6 yz, c_2 y^2 + \\
&+ \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, \quad d_2 y^2 + d_3 z^2 + \\
&+ \bar{d}_6 yz + d_7 y^3 + d_8 y^4 + \dots + (\bar{d}_{k+4} - \bar{d}_5 s) y^k) \equiv \\
&\equiv (0, 0, 0, \bar{d}_3 z^2 + t \bar{d}_3 y^k) + (0, b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + \bar{b}_6 yz, c_2 y^2 + \\
&+ \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + c_8 y^4 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, d_2 y^2 + \bar{d}_6 yz + d_7 y^3 + \\
&+ d_8 y^4 + \dots + (\bar{d}_{k+4} - \bar{d}_5 s - t \bar{d}_3) y^k) \equiv \\
&\equiv (0, b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + \bar{b}_6 yz, c_2 y^2 + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + \dots + \\
&+ \bar{c}_{k+4} y^k, d_2 y^2 + \bar{d}_6 yz + d_7 y^3 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Portanto } \psi \equiv (L_1(\psi_1), L_1(\psi_2) + b_3 z^2 + \bar{b}_5 xz + \\
&+ \bar{b}_6 yz, L_1(\psi_3) + c_2 y^2 + \bar{c}_6 yz + c_7 y^3 + \dots + \bar{c}_{k+4} y^k, \\
&L_1(\psi_4) + d_2 y^2 + \bar{d}_6 yz + d_7 y^3 + \dots + \bar{d}_{k+4} y^k).
\end{aligned}$$

Temos que $\text{Cod } V = 2(k-2) + 19$ que independe dos valores de s e t .

Resta mostrar agora que $\text{Cod } I_{0,1} = \text{Cod } I$.

$$I = \langle x^2 + yz, xy, xz + y^k, z^2 \rangle$$

$$(\delta(I) = k + 4)$$

$$J = \langle x^2 + yz, xy, xz, z^2 + y^k \rangle = I_{0,1}$$

$$(\delta(J) = k + 4)$$

B I B L I O G R A F I A

- [01] - DAMON, J. ; GALLIGO, A. - A topological Invariant for Stable Map Germs - *Inventiones Mathematicae* 32, 103-132 (1976).
- [02] - DAMON, J. - The Classification of Discrete Algebra Types. To appear.
- [03] - MATHER, J. - Classification of Stable Germs by $\mathbb{R}$ -Algebras - *Publ. Math. I H E S* 37, 223-248 (1969).
- [04] - MATHER, J. - Transversality. *Advances in Math.* 4 (3), 301-336 (1970).
- [05] - MATHER, J. - The Nice Dimensions. *Proc. Liverpool Singularities I. Springer Lectures Notes in Mathematics* nº 192, pp. 207-253. Berlin - Heidelberg - New York - Springer 1971.
- [06] - BRIANÇON, J. - Weierstrass Préparé à La Hironaka In: *Singularité à Cargèse, Astérisque* nº 7 et 8, pp. 67-73, 1973.
- [07] - TADINI, W. M. - Germes Finitamente Determinados e Símbolo de Boardman, São Carlos, Dissertação de Mestrado apresentada ao ICMSC-USP, 1976 - 76p.
- [08] - BRÖCKER, TH. - *Differentiable Germs and Catastrophes*, Londres, Cambridge University Press, 1975, 179 p. (LMS - 17).
- [09] - GIBSON, C.G. - *Singular Points of Smooth Mappings*. Pitman Publishing Limited, 1979.
- [10] - Golubitsky, M. & Guillemin, V. - *Stable Mappings and Their Singularities*. Springer-Verlag, 1973. (GTM-14).